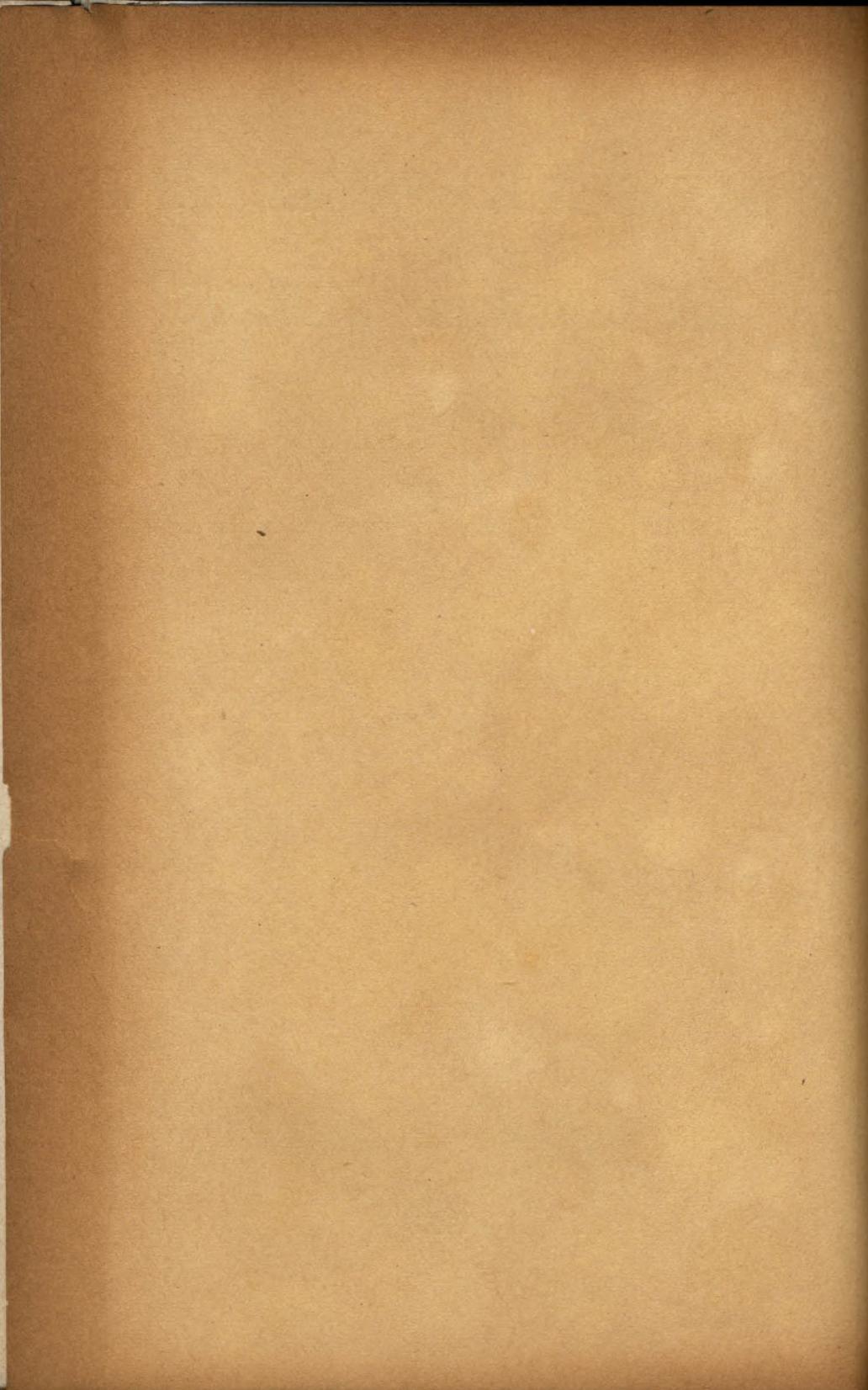


O EMPREGO DO METHODO DAS ROTAÇÕES
NAS ESTRUCTURAS CELLULARES

SERGIO MARCONDES DE CASTRO

Eng. Civil



*Trabalho apresentado a Congregação da
Escola Nacional de Bellas Artes pelo En-
genheiro Civil Sergio Marcondes de Castro,
candidato a Cadeira de Resistencia dos Ma-
teriaes, Graphostatica e Estabilidade das
Construcções.*

Março de 1927

de 11

O EMPREGO DO METHODO DAS ROTAÇÕES NAS ESTRUCTURAS CELLULARES

O concreto armado, fornecendo estruturas eminentemente rigidas, introduziu nas construcções modernas o systema quadrangular, ou seja, sem diagonaes, onde a invariabilidade dos angulos é obtida por meio da rigidez dos diversos nós.

O elemento fundamental deste typo de construcção é o «portal», chamado pelos autores alemães de «rahmen», de cuja reunião formam-se os diversos typos de «quadros rigidos» ou estruturas cellulares, com diversos andares e diversos vãos, onde naturalmente qualquer dos membros componentes pode ser substituido por outros polygonaes.

O calculo de uma estrutura celular de qualquer numero de andares e vãos é de grande importancia actual, visto a sua applicação corrente nas estruturas modernas de concreto armado e metallicas, sendo no entretanto de grande difficuldade, devido ao alto grau de indeterminação do problema. Assim, um systema simples de dois andares e dois vãos, com pilares engastados nas bases, já é doze vezes estaticamente indeterminado, como se pode ver, fazendo dois cortes verticaes pelas vigas.

Alguns autores aconselham o emprego rigoroso da *Theoria mathematica* da Elasticidade, a qual dá origem a diversos methodos de calculo, todos muito laboriosos, mesmo em casos relativamente simples, não admittindo hypotheses simplificadoras, nem mesmo em quadros, onde estas seriam facilmente justificadas.

A maioria, no entanto, dos calculistas, lançam mão de abreviações, fazendo diversas hypotheses, mais ou menos simplificadoras, sobre a funcção de diversos membros, comportamento de apoios, e mesmo fixando articulações em pontos mais ou menos arbitrarios, transformando assim um problema de grande indeterminação, em grupos de systemas estaticamente determinados.

Em certos casos, a localização de articulações, abandono de componentes de reacções, e mesmo reacções totaes de grupos de peças da estructura, quando se procura determinar os esforços maximos em um determinado membro, são naturalmente indicadas e facilmente admittidas, sem no entanto ser possível assegurar previamente a influencia real destas simplificações, sobre os resultados finaes — Noutros casos no entanto, taes como influencia de variações de temperatura e forças lateraes, estas hypotheses tornam-se completamente eleatorias, podendo comprometter consideravelmente os resultados obtidos.

Methodos approximados existem ainda, que permitem a solucção dos quadros com bastante

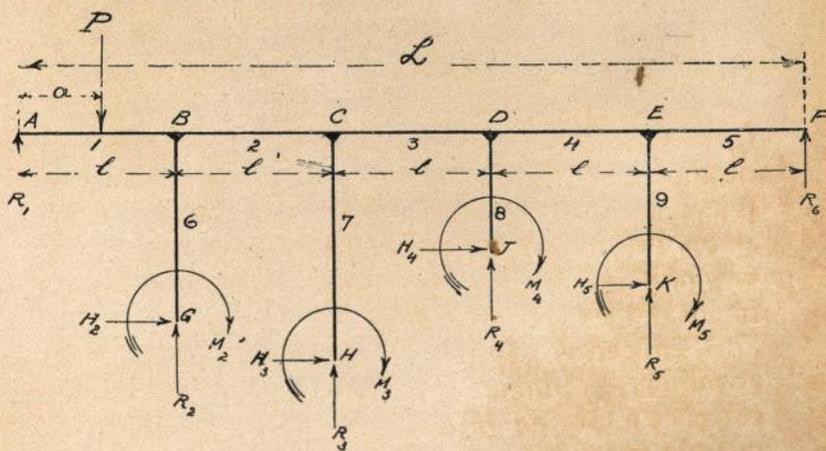
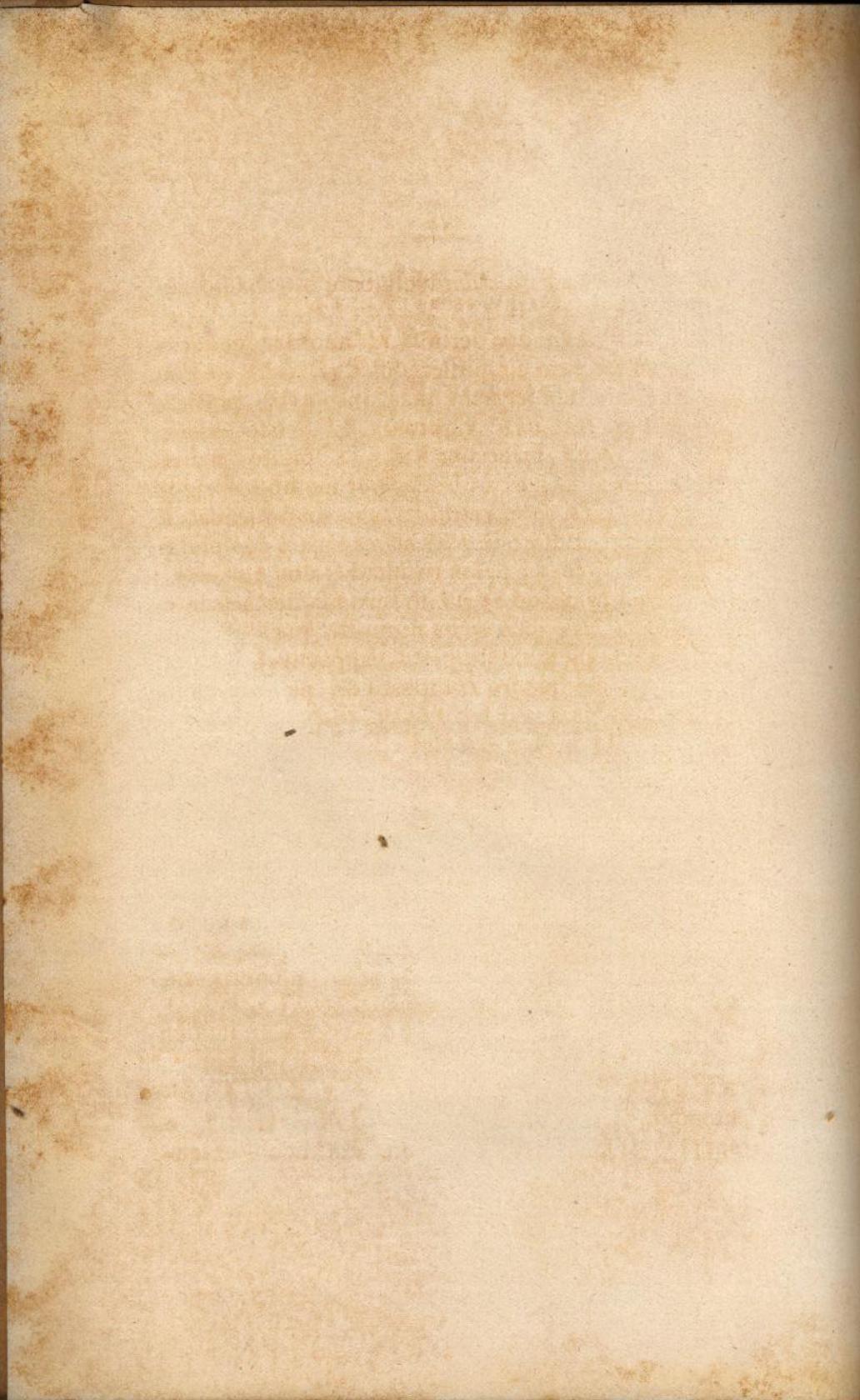


figura 1



rigor, reduzindo consideravelmente o trabalho necessario.

Estes methodos permitem abordar quadros completos e sem simplificações duvidosas de sua estructura que seriam quasi insólueis praticamente pela resolução rigorosa. E' desnecessario frisar que estas soluções são de muito maior approximação, que as obtidas por methodos rigorosos applicados em estruturas já simplificadas, a não ser que estas simplificações sejam completamente controladas pelos resultados dos calculos.

D'entre os do segundo grupo, destaca se o «methodo das rotações», proposto por Maney, por ser completamente geral, applicavel a qualquer typo de quadro composto de peças rectilíneas e para qualquer typo de carga que sobre elle actue, tendo ainda a grande vantagem de simplicidade e uniformidade de applicação.

A seguir daremos os diversos methodos de calculo mais em voga, todos applicados a um mesmo typo de estructura, com o fito de poder comparal-as sob o aspecto de trabalho necessario a sua solução completa, sendo evidente que todas as considerações feitas para este typo, serão applicaveis a qualquer que seja o numero de vãos e andares que este possua.

Seja A B C D E F uma viga de comprimento total L (fig. 1), momento de inercia I_0 e secção transversal Ω_0 , constantes em toda a exten-

são para maior simplicidade dos caculos, rigidamente ligada a pilares G B, HC, JD e KE, formando vãos iguaes a l , tendo para alturas respectivamente h_6, h_7, h_8, h_9 , e momentos de inercia e secções transversaes $I_6, \Omega_6, I_7, \Omega_7, I_8, \Omega_8, I_9, \Omega_9$. — Os pilares serão suppostos rigorosamente engastados nas suas bases, e os extremos da viga apoiados sobre massiços indeformaveis por meio de aparelhos só permittindo reacções verticaes.

Um dos methodos rigoros e immediatamente indicado para o estudo do quadro é, sem duvida, o dos trabalhos minimos de deformação que, apesar de muito laboriosa a parte numerica devido ao grande numero de incognitas, não apresenta difficuldades.

Este methodo, fundado sobre o theorema das forças vivas e dos trabalhos virtuaes, é inteiramente geral, e se applica uniformemente a todas as construcções hyperstaticas que se possam apresentar, determinando as deformações elasticas e calorificas, e as forças de ligação entre as diversas peças formando o systema.

Para a solução do quadro, é necessario tornal-o isostatico pela supressão de apoios superabundantes e applicação nestes dos esforços de ligação: componentes verticaes R , horisontaes H e conjugados M , correspondentes aos diversos apoios supprimidos.

Tomando-se para o apoio estaticamente determinado, um dos internos, K por exemplo, os seus esforços de ligação ficam conhecidos em

função dos outros e das cargas externas actuando sobre o quadro, pelas tres equações geraes de equilibrio. Para uma carga unica P no vão AB, tem-se:

$$\begin{aligned} H_5 &= -(H_2 + H_3 + H_4) \\ R_5 &= P - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_6) \\ M_5 &= l(4R_1 + 3R_2 + 2R_3 + R_4 - R_6) - \\ &\quad - H_2(h_6 - h_9) - H_3(h_7 - h_9) - H_4(h_8 - \\ &\quad - h_9) + M_2 + M_3 + M_4 - P(4l - a) \end{aligned}$$

onde a é a distancia da carga ao apoio da esquerda.

Por outro lado, os elementos staticos nas diversas secções têm para valor :

$$M_{AB} \begin{cases} 0 < x < a & M = R_1 x \\ a < x < l & M = R_1 x - P(x - a) \end{cases}$$

$$M_{BC} = R_1 x + R_2(x - l) + M_2 - H_2 h_6 - P(x - a)$$

$$M_{CD} = R_1 x + R_2(x - l) + R_3(x - 2l) + M_2 + \\ + M_3 - H_2 h_6 - H_3 h_7 - P(x - a)$$

$$M_{DE} = R_1 x + R_2(x - l) + R_3(x - 2l) + \\ + R_4(x - 3l) + M_2 + M_3 + M_4 - H_2 h_6 - H_3 h_7 - \\ - H_4 h_8 - P(x - a)$$

$$M_{BF} = R_6(L - x)$$

$$N_{AB} = 0 \quad N_{BC} = H_2 \quad N_{CD} = H_2 + H_3$$

$$N_{DE} = H_2 + H_3 + H_4 \quad N_{EF} = 0$$

$$T_{AB} \begin{cases} 0 < x < a & T = R_1 \\ a < x < l & T = R_1 - P \end{cases}$$

$$T_{BC} = R_1 + R_2 - P$$

$$T_{CD} = R_1 + R_2 + R_3 - P$$

$$T_{DE} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - P$$

$$T_{EF} = -R_6$$

e para os pilares

$$M_{GB} = M_2 - H_2 y_6$$

$$M_{JD} = M_3 - H_3 y_7$$

$$M_{HC} = M_4 - H_4 y_8$$

$$M_{KE} = l(4R_1 + 3R_2 + 2R_3 + R_4 - R_6) - \\ - P(4l - a) - H_2(h_6 - h_9 + y_9) - H_3(h_7 - \\ - h_9 + y_9) - H_4(h_8 - h_9 + y_9) + M_2 + M_3 + M_4$$

$$N_{GB} = R_2 \quad N_{JD} = R_3 \quad N_{HC} = R_4$$

$$N_{KE} = P - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_6)$$

$$T_{GB} = H_2 \quad T_{DJ} = H_3 \quad T_{HC} = H_4$$

$$T_{KE} = - (H_2 + H_3 + H_4)$$

As equações para a determinação das incógnitas do problema, serão obtidas pelas derivadas

parciaes do trabalho total de deformação do quadro :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{E\Omega} - 2 \alpha t N \right) ds + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\varepsilon T^2}{G\Omega} ds.$$

onde E e $\frac{G}{\varepsilon}$ são os modulos de elasticidade longitudinal e transversal.

No nosso caso, não se levando em conta as variações de temperatura, virá :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} ds + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{E\Omega} ds + \int_0^l \frac{\varepsilon T^2}{G\Omega} ds.$$

Derivando em relação a R_1 , tem-se :

$$\frac{dW}{dR_1} = \frac{1}{EI_0} \left\{ \int_0^{L-1} R_1 x - \int_a^{L-1} P (x-a) + \int_1^{L-1} [R_2(x-1) + M_2 - H_2 h_6] + \int_{2l}^{L-1} [R_3(x-2l) + M_3 - H_3 h_7] + \int_{3l}^{L-1} [R_4(x-3l) + M_4 - H_4 h_8] \right\} x dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{EI_9} \int_0^{h_9} \left\{ 1 (4 R_1 + 3 R_2 + 2 R_3 + R_4 - R_6) - \right. \\
& - P (4l - a) - H_2 (h_6 - h_9 + y_9) - H_3 (h_7 - h_9 + y_9) - \\
& \quad \left. - H_4 (h_8 - h_9 + y_9) + M_2 + M_3 + M_4 \right\} 4l dy - \\
& - \frac{1}{E\Omega_9} \int_0^{h_9} [P - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_6)] dy + \\
& + \frac{\varepsilon}{G\Omega_0} \left[\int_0^{L-1} R_1 - \int_a^{L-1} P + \int_1^{L-1} R_2 + \int_{2l}^{L-1} R_3 + \int_{3l}^{L-1} R_4 \right] dx + 0
\end{aligned}$$

Do mesmo modo serão obtidos

$$\frac{dW}{dR_2} = 0 \quad \frac{dW}{dR_3} = 0 \quad \frac{dW}{dR_4} = 0 \quad \frac{dW}{dR_6} = 0$$

$$\frac{dW}{dH_2} = 0 \quad \frac{dW}{dH_3} = 0 \quad \frac{dW}{dH_4} = 0$$

$$\frac{dW}{dM_2} = 0 \quad \frac{dW}{dM_3} = 0 \quad \frac{dW}{dM_4} = 0$$

ao todo onze equações, lineares, simultaneas, contendo as onze incognitas, ficando assim completamente resolvido o problema.

Sem lançar mão do theorema dos trabalhos minimos de deformação, é possível ainda resolver o problema com todo o rigor, pela igualdade da deformação de diversos trechos, tornados estatica-

mente determinados por meio de cortes verticaes feitos nas vigas, e actuados pelas cargas externas e forças estaticamente indeterminadas internas, como propõe Hartmann no «*Algemeine Bauzeitung*», fac. 3^o—1913—para o caso do typo de dois andares e dois vãos ; ou, então, tornar nullos os deslocamentos das bases dos pilares no caso do systema principal ser simplesmente apoiado em A e F, os restantes apoios sendo eliminados.

O calculo do deslocamento da base dos pilares não apresenta difficuldades, desde que seja decomposto em tres deslocamentos parciaes : um vertical e igual a flexa da viga no seu ponto de ligação, no caso de serem despresados os efeitos das forças axiaes, simplificação esta sempre viavel; o segundo horisontal proveniente da rotação do eixo da viga neste ponto, e igual ao producto da rotação pela altura da pilastra ; e finalmente a rotação do eixo do pilar, naturalmente igual ao da viga. Naturalmente quando se estudar a influencia das forças R_r , H_r e M_r é necessario introduzir ainda a deformação do pilar.

Estes deslocamentos podem ser obtidos por diversos processos, dentre elles o mais elegante sendo o baseado no theorema de Castigliano, concebido nos seguintes termos :

«As derivadas parciaes do trabalho de deformação em relação as forças exteriores e conjugados agindo sobre um systema elastico qualquer, são iguaes aos deslocamentos lineares projectados ou rotações absolutas descriptas pelos differentes

pontos e secções de applicação das forças e conjugados externos, durante a deformação».

Assim, para se obter, o deslocamento vertical ou a rotação de uma secção qualquer da viga, deve-se applicar a esta secção uma força Φ ou um conjugado π , derivar em relação a esta o trabalho total de deformação, fazendo-se então Φ ou π nullos, visto não serem forças actuando realmente sobre a viga.

São assim obtidos os deslocamentos parciaes produzidos pelas diversas forças R_r , H_r , M_r e P_r .

O deslocamento total da base dos pilares, será a somma dos deslocamentos parciaes, devidos isoladamente a cada uma das forças actuando sobre a estructura, tanto internas como externas. Rigorosamente não seria certa a addição dos deslocamentos assim calculados, visto já haver deslocamentos reaes do systema, quando outras forças actuam simultaneamente.

E' facil de ver que a differença é de quantidades pequenas, de segunda ordem, que podem ser desprezadas. Não sendo possivel qualquer deslocamento das bases dos pilares, teremos para cada uma destas secções, equações do typo :

$$\Delta_x = a_{1x} R_1 + a_{2x} R_2 + \dots + a_{nx} R_n + \beta_{1x} H_1 + \dots + \beta_{nx} H_n + \vartheta_{1x} M_1 + \dots + \vartheta_{nx} M_n + \delta_{nx} P_n = 0$$

$$\Delta_y = a_{1y} R_1 + \dots + a_{ny} R_n + \beta_{1y} H_1 + \dots + \beta_{ny} H_n + \vartheta_{1y} M_1 + \dots + \vartheta_{ny} M_n + \delta_{ny} P_n = 0$$

$$\Delta_0 = \alpha_{10} R_1 + \dots + \alpha_{n0} R_n + \beta_{10} H_1 + \dots + \beta_{r0} H_n + \vartheta_{10} M_1 + \dots + \vartheta_{n0} M_n + \delta_{n0} P_n = 0$$

sejam, ao todo, tantas equações quantas incógnitas hyperstaticas contenha o quadro.

O methodo de Hartmann, torna a formação das equações simultaneas extraordinariamente mais simples que o processo anterior, visto os diversos trechos tornados estaticamente determinados, serem consolos verticaes com potencias, onde o calculo das deformações é quasi immediato, conduzindo rapidamente aos valores dos diversos coefficients das incógnitas nas equações de condição. Além disto, pelo modo de seccionar o quadro, a influencia das diversas forças internas não se propaga além dos pilares que limitam cada viga, ficando assim bastante simples as equações de condição e de mais facil eliminação.

Não serão aqui desenvolvidas estas variantes de calculo, pois que, apesar de não haver dificuldades especiaes, são de applicação laboriosa ao typo em estudo, e outros methodos resolverem com muito maior simplicidade e approximação sufficiente.

Mesmo desprezando-se a influencia das deformações axiaes e transversaes, pouco serão, simplificados os calculos, visto o numero de incógnitas hyperstaticas continuar o mesmo, apesar do desenvolvimento algebrico necessario para a determinação dos valores numericos dos coefficients d'estas, ficar bastante reduzido.

Um dos artificios de que se pode lançar mão, com o intento de diminuir o numero de incognitas, é o seguinte, analogo ao que se faz no caso de viaductos em arcos continuos: Quando um dos vãos internos é o unico carregado do quadro, pode-se considerar como bôa approximação, só a influencia dos dois vãos adjacentes e desprezar os restantes, ficando deste modo reduzido a nove o numero de incognitas hyperstaticas.

Uma ultima simplificação, de resultados já duvidosos, seria no grupo anterior considerar as reacções verticaes e momentos de engastamento dos pilares extremos, nullos, reduzindo o problema a cinco incognitas.

No caso de quadros symetricos em relação a seu eixo vertical, pode ser adoptado, com grande vantagem o artificio da decomposição de cargas, conhecido por «methodo B. U.» (Belastungs-umordnung) que se resume em tornar as cargas externas symetricas em relação ao mesmo eixo. Para a sua applicação ao quadro em estudo, seria decomposta a carga P , em duas partes iguaes $\frac{P}{2}$ e applicadas isoladamente. Na primeira carga actuaria $\frac{P}{2}$ e outra $\frac{P}{2}$ em um ponto smetrico. As cargas e o quadro sendo symetricos, as reacções correspondentes são iguaes, ficando então o quadro reduzido a um systema contendo seis incognitas. A segunda carga, constituída de um conjugado de forças $\frac{P}{2}$ e $-\frac{P}{2}$ applicadas nos mesmos pontos que as anteriores, produzirá deformações contrarias nas

duas metades do quadro, e com um ponto de inflexão no meio da viga central; obtendo-se novamente seis incognitas.

Vemos assim, que o quadro que exigia para o seu estudo completo a resolução de um systema de onze equações simultaneas, fica reduzido, pela applicação do methodo B. U., a dois grupos independentes de equações simultaneas, cada um com seis incognitas, tendo ainda a vantagem, não desprezível, de só ser considerada nos calculos a metade do quadro.

A unica desvantagem do artificio é só ser applicado a extruturas symetricas e sujeita a cargas verticaes, não sendo portanto geral.

O processo de calculo, especialmente applicado a quadros do typo em consideração, proposto por Guide, no seu fasciculo "La trave solide coi piedriti", parte da hypothese simplificadora de que, mesmo para as cargas asymetricas, o deslocamento lateral das vigas é nullo. Esta simplificação localisa o ponto de inflexão das columnas no terço inferior de sua altura, no caso de pilares de secção uniforme, e no antipolo do eixo da viga em relação a ellipse central de elasticidade do pilar, no caso de sua secção ser variavel. O methodo dá sempre resultados acceitaveis para as construcções, civis, onde as sobrecargas são de pequena importancia em relação a carga morta. No caso de grandes alturas e sujeitos a importantes sobrecargas, como nos viaductos de Estrada de Ferro, estes resultados são duvidosos, podendo mesmo divergi-

rem consideravelmente do resultado real—O methodo tem ainda a desvantagem de só ser applicavel a cargas verticaes e não resolver o problema para o caso de variações de temperatura.

Em suas linhas geraes, a marcha de calculo é a seguinte :— Calculado o modulo de rigidez da pilastra na hypothese simplificador anterior, e conhecida a equação dos momentos nos extremos de uma viga sujeita ou não a cargas transversaes e rotações dos seus extremos, obtem-se uma equação para cada extremo de viga, obrigando a rotação desta a ser igual a rotação do pilar ahi concurrente, e a somma dos momentos em torno de um nó, nulla, para haver equilibrio. Guide toma para incognitas do problema os momentos nos extremos das vigas, obtendo assim um systema de equações simultaneas, contendo incognitas em numero igual ao duplo do numero de vigas. No quadro que estudamos o numero de vigas sendo de cinco, teriamos dez incognitas, mas, como os extremos do quadro são apoios simples, e portanto os momentos ahi são nullos, o numero de incognitas hyperstaticas fica reduzido a oito.

Finalmente, Maney no Bulletin nº 1 University of Minnesota : «Secondary Stresses and other problems in Rigid Frames», Março de 1915, apresentou o seu magnifico methodo, que resolve de um modo simples e elegante, quadros rigidos de qualquer typo, desde que todos os seus membros sejam rectilineos. Este, francamente baseado no processo de Mohr, considera

como incognitas as rotações dos diversos nós e despreza, por serem de pequena importancia, as deformações devidas aos esforços axiaes e transversaes. Para o caso de asymetria de cargas ou quadro, o problema é resolvido introduzindo-se como novas incognitas os deslocamentos geraes dos nós do systema.

No typo do quadro em consideração, o numero de incognitas, com a applicação do methodo das rotações, será de cinco, sejam, quatro rotações de nós e um deslocamento lateral.

Resumindo: Todos os methodos rigorosos resolvem o problema por meio da resolucção de um systema de onze equações simultaneas, e no caso particular das estructures symetricas, o artificio da decomposição das cargas, permite decompor-as em dois grupos independentes de seis equações, devendo os resultados serem superpostos. O methodo particular de Guide, que exige que a sobrecarga seja de pequeno valor, dará um systema contendo oito incognitas. O methodo das rotações, com a grande vantagem de ser completamente geral e applicavel a quaesquer typo de cargas, resolve o problema introduzindo um systema de cinco equações simultaneas.

Pelo que acabamos de ver, o methodo de Maney é de grande interesse, principalmente quando se tratar de estructures complexas, sendo os resultados obtidos de approximação compatíveis com as necessidades da pratica - Além disto a sua applicação é uniforme e simples.

A seguir exporemos em linhas geraes a sua theoria, e um exemplo de applicação numerico, com o fito de indicar os desenvolvimentos methodicos de calculo, que devem ser seguidos em casos semelhantes.

Methodo de Maney

Se considerarmos em uma viga sujeita a flexão, duas secções AB e CD distantes de dx , e tendo CD girado de $d\delta$ em relação a AB; é facil de ver que para uma fibra distante da unidade do eixo da viga, tem-se em virtude de

$$i = \frac{FL}{\Omega E} \text{ e } M = R \frac{I}{V},$$

$$R = E \frac{d\delta}{dx} \text{ e } R = \frac{M \times 1}{I}$$

d'ahi

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

Esta equação permite calcular o angulo δ , que fazem entre si, depois da deformação, duas secções normaes passando pelos pontos A e B da fibra neutra, e por conseguinte, a tangentes tiradas por estes pontos a esta deformada.

Supponhamos que antes da deformação o eixo da viga concorde com o eixo das abscissas um dos extremos com a origem, e sejam x_0 e x_1

as abscissas dos pontos A e B—. Tem-se directamente

$$\delta = \int_{x_0}^{x_1} \frac{M}{EI} dx \text{ e no caso de secção constante}$$

$$\delta = \frac{1}{EI} \int_{x_0}^{x_1} M dx$$

O segundo membro desta relação, representa a superficie limitada pela curva que traduz a lei segundo varia o factor $\frac{M}{EI}$ entre os limites indicados.

A cada elemento dx da viga, corresponderá a uma flexa elementar dy do extremo A, e se este distar de x da secção em consideração, terá naturalmente para valor

$$dy = x d\delta$$

e a flexa produzida pela flexão entre dois pontos de abscissas x_0 e x_1

$$y = \int_{x_0}^{x_1} x d\delta = \int_{x_0}^{x_1} \frac{Mx}{EI} dx.$$

e no caso de secção constante $y = \frac{1}{EI} \int_{x_0}^{x_1} Mx dx$

O segundo membro desta relação, representa o momento estatico da superficie limitada pela

area dos momentos em relação ao extremo considerado.

Estas relações, demonstram os theoremas de Mohr, que são enunciados do seguinte modo :

«A variação de ângulos entre as tangentes a dois pontos quaesquer de uma peça sujeita exclusivamente á fexão, é igual ao producto da area do diagramma dos momentos comprehendida entre estes pontos, pelo valor $\frac{1}{EI}$. A flecha do extremo de um membro em relação a um ponto qualquer deste, é igual ao producto do momento estatico da area dos momentos entre os dois pontos considerados em relação ao extremo deslocado, pelo valor $\frac{1}{EI}$ ».

Antes de expôr o methodo das rotações, é conveniente fixar de uma vez por todas, o sentido positivo de rotações, deslocamentos, momentos e esforços cortantes.

O momento no extremo de uma peça será considerado como positivo, se agir no sentido da marcha das agulhas de um relógio, o subscripto designando o membro sobre o qual actua e a primeira letra indicando a secção. Assim, M_{AB} será o momento actuando no extremo A da peça AB, e M_{BA} o momento no extremo B da mesma peça.

O desvio da tangente á elastica, será positivo quando o seu deslocamento for no sentido dos M positivos, e finalmente, a deflexão de cada ponto, medida na normal á posição primitiva, será

considerada positiva, quando medida a partir da linha de base no sentido das rotações positivas.

Os diagrammas dos momentos são ainda sempre collocados do lado da tensão do membro.

Condiremos um membro qualquer AB, actuado por momentos e esforços cortantes nos seus extremos e sujeito a cargas transversaes quaesquer. Seja AB' a posição inicial quando considerado o membro AB e A'B a mesma posição para o membro BA—(fig. 2).

Os angulos θ_B e θ_A são negativos de acordo com as convenções adoptadas, assim como o deslocamento d, sendo que os momentos que actuam nos extremos do membro são positivos, havendo naturalmente um ponto de inflexão.

No caso geral, do extremo A não ser fixo, o desvio do pondo B, será proveniente de uma rotação θ_A , seja $\theta_A l$, e do desvio de flexão d— $\theta_A l$, o qual é igual, pelo theorema de Mohr, ao momento da area do diagramma dos momentos em relação a B, dividido por EI.

A area dos $\frac{M}{EI}$, pode ser calculada, como sendo a somma algebraica de tres areas parciaes: aa'b, a'bb' e a'c'b', tendo para valores

$$\text{Area aa'b} = \frac{M_{AB}}{EI} \times \frac{1}{2} \quad \text{Area a'bb'} = \frac{M_{BA}}{EI} \times \frac{1}{2}$$

$$\text{Area a'c'b'} = \frac{F}{EI}$$

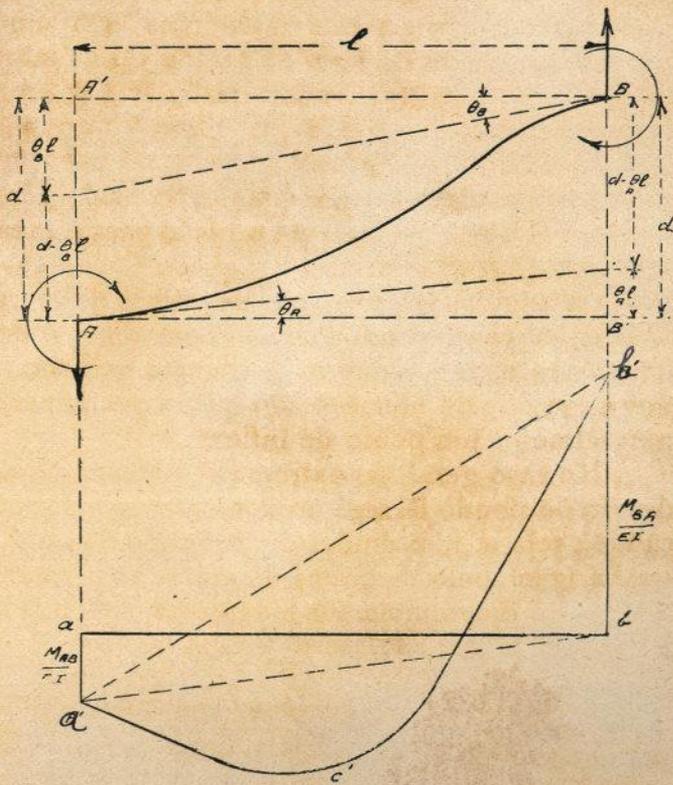
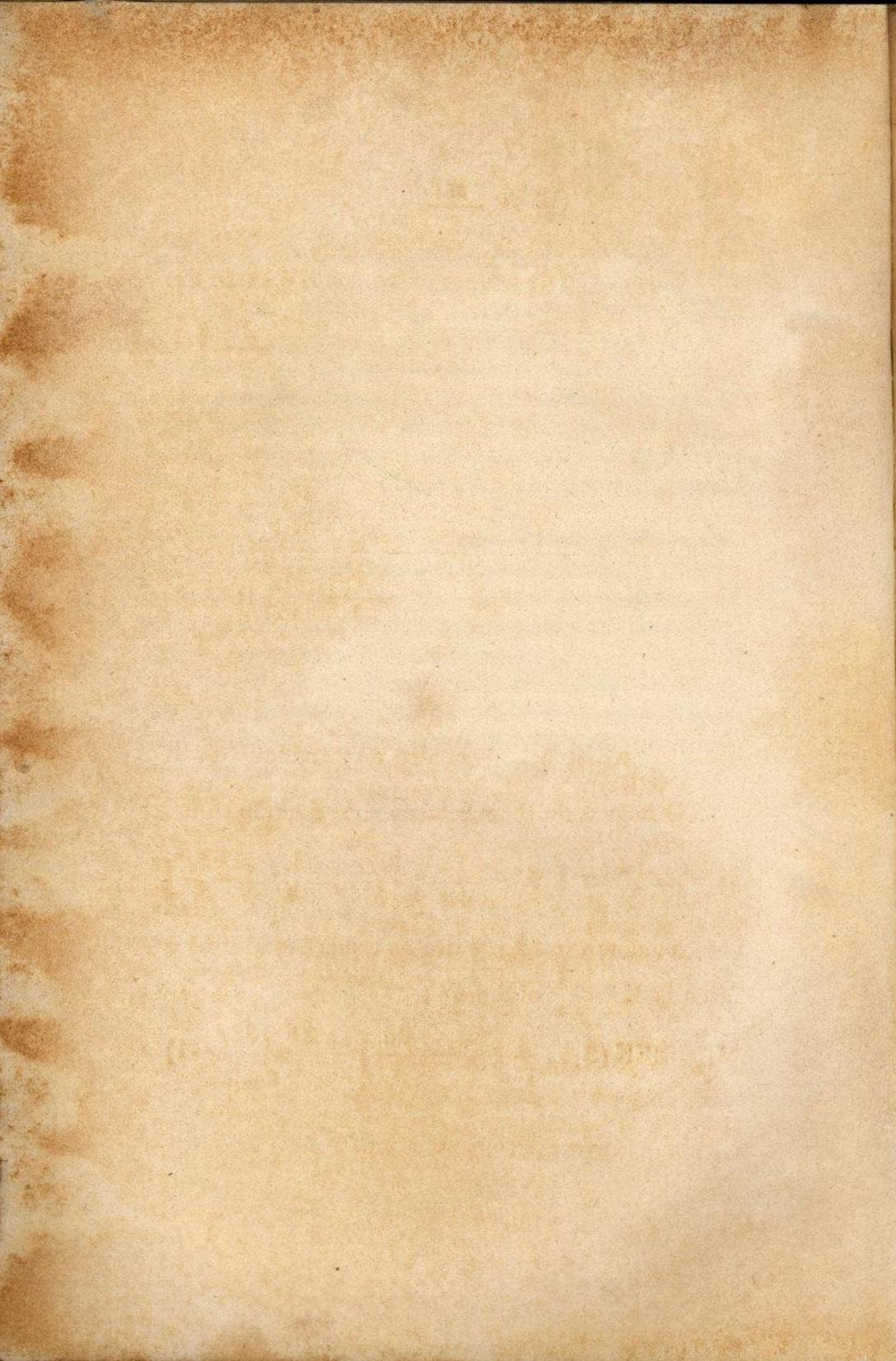


Figura 2



A variação de ângulo entre A e B é então de:

$$a) \theta_A - \theta_B = \frac{1}{2EI} \left(M_{AB} + M_{BA} + \frac{2F}{l} \right)$$

O momento estatico da area dos momentos é obtido do mesmo modo :

$$\text{Area } aa'b = \frac{M_{AB}}{EI} \times \frac{1}{2} \times \frac{2l}{3} = \frac{M_{AB}}{3EI} l^2$$

$$\text{Area } a'bb' = \frac{M_{BA}}{EI} \times \frac{1}{2} \times \frac{l}{3} = \frac{M_{BA}}{6EI} l^2$$

$$\text{Area } a'c'b' = \frac{F\xi_B}{EI}$$

onde ξ_B é a distancia do centro de gravidade de F ao apoio B.

O desvio de B em relação a A é então :

$$b) - (d - \theta_A l) = \frac{l^2}{EI} \left[\frac{M_{AB}}{3} + \frac{M_{BA}}{6} + \frac{F\xi_B}{l^2} \right]$$

Eliminando M_{BA} entre as equações a) e b) e fazendo $K = \frac{1}{l}$ obtem-se :

$$M_{AB} = 2EK \left(2\theta_A + \theta_B - \frac{3d}{l} \right) - \frac{2F}{l} \left(\frac{3\xi_B}{l} - 1 \right)$$

e do mesmo modo, eliminando M_{AB}

$$M_{BA} = 2EK \left(2\theta_B + \theta_A - \frac{3d}{l} \right) + \frac{2F}{l} \left(\frac{3\xi_B}{l} - 1 \right)$$

Deve-se notar, que nestas duas ultimas equações, os signaes dos termos referentes as cargas actuando sobre o membro, são de signaes contrarios, donde se pode concluir o seguinte: Se a carga sobre o membro, tende a girar sobre o extremo em consideração, no sentido positivo, o signal do termo referente a esta, será negativo; se a carga no entanto tende a agir em sentido contrario ao sentido positivo, o signal deste termo será positivo.

Este termo póde ser denominado de « termo de carga », pois que só depende das forças exteriores actuando sobre o membro em consideração.

No caso das cargas symetricas, o termo de carga toma a forma simples $\frac{F}{l}$, onde F e a area do diagramma dos momentos, para a caso de uma viga simplesmente apoiada e de mesmo vão. Dentre os typos de cargas symetricas mais communmente usadas, citaremos as seguintes, com os valores dos seus termos de carga, que não deduziremos por não apresentar interesse:

a) Carga uniforme completa — $\frac{F}{l} = \frac{\omega l^2}{12}$

b) Carga uniforme central em extensão b ,
sendo $b + 2a = l$

$$\frac{F}{l} = \frac{\omega b}{12l} [6a(b+a) + b^2]$$

c) Cargas uniformes lateraes em extensões
 a — é a carga complementar do exemplo anterior

$$\frac{F}{l} = \frac{\omega a}{6l} (3l - 2a).$$

No caso geral de uma carga concentrada P ,
distante do "a" e "b" respectivamente dos apoios
A e B, as equações geraes tomam a forma

$$1) M_{AB} = 2EK \left(2\theta_A + \theta_B - 3\frac{d}{l} \right) - \frac{Pa b^2}{l^2}$$

$$2) M_{BA} = 2EK \left(2\theta_B + \theta_A - 3\frac{d}{l} \right) + \frac{Pa^2 b}{l^2}$$

Dentre as equações particulares, derivadas
de 1) e 2) destacam-se as seguintes :

a) — O extremo A é uma articulação.

$$M_{AB} = 0 \quad 2EK \left(2\theta_A + \theta_B - 3\frac{d}{l} \right) - \frac{Pa b^2}{l^2} = 0$$

$$\text{d'ahi } \theta_A = \frac{Pa b^2}{4EK l^2} - \frac{1}{2} \left(\theta_B - 3\frac{d}{l} \right)$$

e

$$M_{BA} = 3EK \left(\theta_B - \frac{d}{l} \right) + \frac{Pab}{2l^2} (1+a)$$

b) O extremo A é um engastamento perfeito.

Como $\theta_A = 0$

$$M_{AB} = 2EK \left(\theta_B - 3 \frac{d}{l} \right) - \frac{Pab^2}{l^2}$$

$$M_{BA} = 2EK \left(2 \theta_B - 3 \frac{d}{l} \right) + \frac{Pa^2b}{l^2}$$

Escrevendo-se para cada membro, as equações correspondentes aos deslocamentos angulares e lineares dos seus extremos, e notando, que para o equilibrio, a somma dos momentos nos extremos de todos os membros concurrentes a um determinado nó deve ser nulla, obtêm-se tantas equações, quantos nós tenha o quadro em estudo.

Como as incognitas, são as rotações dos diversos nós, fica o systema de equações completo, podendo ser resolvido immediatamente, quando não se levar em consideração o deslocamento lateral dos nós, devido a asymetria de carga ou do quadro; simplificação esta, admittida por Guide em seu methodo.

Quando necessario levar em conta estes deslocamentos, é indispensavel introduzir tantas equações auxiliares, quantos deslocamentos a serem calculados, as quaes podem sempre ser facilmente obtidas conforme veremos em um exemplo de applicação do methodo que daremos a seguir.

Exemplo de Calculo

O exemplo a seguir é um apanhado dos calculos feitos por mim, para o projecto do novo "Viaducto do Retiro", na Estrada de Ferro Central do Brazil, entre as estações de Juiz de Fora e Retiro. O viaducto é de cimento armado e constituido por um quadro do typo da fig. 1, com cinco vãos iguaes de 16^m.40, e com cavalletes vazados do typo A e com alturas respectivamente de 16^m.30, 16^m.10, 15^m.90 e 15^m.70.

Foram adoptados os seguintes valores:

Coefficiente de elasticidade do concreto —

$$E = 210.000 \text{ Kc/m}^2$$

Peso do concreto armado por m³ — 2.500 kg

Coefficiente de dilatação — $C_t = 0,000014$

Variação de temperatura em relação a inicial

$$\Delta t = 20^\circ \text{ C.}$$

Viaducto em curva de 3° — Velocidade ma-

xima = 65 K/h.

Para uma carga unica no primeiro vão, as equações geraes deduzidas anteriormente nos dão se chamarmos de "d" o deslocamento geral das vigas, proveniente da asymetria das cargas e da estructura :

$$M_{BA} = 3 E K_1 \theta_B + \frac{Pab}{2 l^2} (l + a)$$

$$M_{BG} = 2EK_6(2\theta_B - n_6 d)$$

$$M_{BC} = 2EK_2(2\theta_B + \theta_C)$$

$$M_{CB} = 2EK_2(2\theta_C + \theta_B)$$

$$M_{CH} = 2EK_7(2\theta_C - 3n_7 d)$$

$$M_{CD} = 2EK_3(2\theta_C + \theta_D)$$

$$M_{DC} = 2EK_3(2\theta_D + \theta_C)$$

$$M_{DJ} = 2EK_8(\theta_D - 3n_8 d)$$

$$M_{DE} = 2EK_4(2\theta_D + \theta_E)$$

$$M_{ED} = 2EK_4(2\theta_E + \theta_D)$$

$$M_{EL} = 2EK_9(2\theta_E - 3n_9 d)$$

$$M_{EF} = 2EK_5\theta_E$$

$$M_{GB} = 2EK_6(\theta_B - 3n_6 d)$$

$$M_{HC} = 2EK_7(\theta_B - 3n_7 d)$$

$$M_{JD} = 2EK_8(\theta_D - 3n_8 d)$$

$$M_{KE} = 2EK_9(\theta_E - 3n_9 d)$$

onde para simplicidade fizemos $n = \frac{1}{h}$

Sejam, duas equações para cada membro, salvo nos onde ha articulação em um extremo, visto os momentos terem ahi valores nullos.

Cada ponto de concurrencia de diversas peças, devendo estar naturalmente em equilibrio, tem-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{BA} + M_{BG} + M_{BC} = 0 \\ M_{CB} + M_{CH} + M_{CD} = 0 \\ M_{DC} + M_{DJ} + M_{DE} = 0 \\ M_{ED} + M_{EL} + M_{EF} = 0 \end{array} \right.$$

nas quaes devem ser substituidos os valores anteriormente obtidos.

Fica-se então com um systema de quatro equações contendo cinco incognitas: Θ_B , Θ_C , Θ_D , Θ_E e d .

Para a formação da quinta equação envolvendo estas, basta notar que, sendo a carga exterior que actua sobre o quadro, vertical, a somma de todas as componentes horisontaes das diversas reacções de apoios, devem ser nullas.

Como as reacções em A e F, só podem ser verticaes, devido a propria natureza dos apoios e se chamarmos de $Q_G - Q_H - Q_J$ e Q_L as componentes horisontaes destas nos pontos G, H, J e L, devemos ter:

$$Q_G + Q_H + Q_J + Q_L = 0$$

Chamando de r , a distancia vertical do ponto de inflexão da columna ao nó B, tem-se

$$\frac{M_{BG}}{r_g} = \frac{M_{BG} + M_{GB}}{h_g} \text{ d'ahí } r_g = \frac{M_{BG} + M_{GB}}{h_g M_{BG}}$$

visto a variação de momentos ao longo da columna ser linear.

A componente horisontal da reacção na columna, tem então para valor

$$Q_g = \frac{M_{BG}}{r_g} = \frac{M_{BG} + M_{GB}}{h_g} = n_g (M_{BG} + M_{GB})$$

e a quinta equação de condição toma a forma

$$(M_{BG} + M_{GE}) n_6 + (M_{CH} + M_{HC}) n_7 + (M_{DJ} + M_{JD}) n_8 + \\ + (M_{EL} + M_{LE}) n_9 = 0$$

Para o caso de uma força horizontal agindo sobre o quadro (esforço de freiagem) esta equação terá para valor do segundo termo, este esforço.

Substituindo nas cinco equações, os valores dos momentos nos extremos dos diversos membros em função das incógnitas, rotações e deslocamentos, obtem-se as equações finais que resolvem o problema.

Os primeiros membros destas equações, formam a denominada «Característica de Forma», visto ser completamente independente das cargas que sobre o quadro actuam, constante para cada tipo e função das dimensões longitudinaes e transversaes dos diversos membros componentes.

Variando pois a carga, é sufficiente calcular os segundos membros, que poderão ser denominados de «columna de carga»

Para a carga concentrada no primeiro vão, as equações tomam, depois de convenientemente simplificados, a seguinte forma, indicada no quadro abaixo.

θB	θc	θD	θg	d	2° termo
$3K_1 + 4K_6 + 4K_2$	$2K_2$			$- 6K_6 n_6$	$-\frac{Pab}{2 E l^2}(1+a)$
$2K_2$	$4K_2 + 4K_7 + 4K_3$	$2K_3$		$- 6K_7 n_7$	—
	$2K_3$	$4K_3 + 4K_8 + 4K_4$	$2K_4$	$- 6K_8 n_8$	—
		$2K_4$	$4K_4 + 4K_9 + 3K_5$	$- 6K_9 n_9$	—
$K_6 n_6$	$K_7 n_7$	$K_8 n_8$	$K_9 n_9$	$- 2(K n^2 + K n^2 +$ $+ K n^2 + K n^2)$	—

Como o systema é estaticamente indeterminado, é necessario o conhecimento prèvio das secções transversaes das diversas peças.

Para a determinação em primeira approximação, pode-se proceder do seguinte modo, sendo que naturalmente, se estes valores divergirem sensivelmente dos resultados obtidos, os calculos devem ser refeitos com as novas bases.

As vigas do estrado são calculadas como continuas e simplesmente apoiadas nos pilares, considerando-se uma sobrecarga uniforme equivalente, para os vãos dados, ao trem de cargas inclusive o impacto. Para o calculo dos esforços maximos nos pilares é conveniente sujeital-o aos tres seguintes typos de cargas, que produzem os esforços maximos: *a*) Cargas desequilibradas, avaliadas approximadamente em $0,05 pl^2$ para o caso de pequenas cargas, e no caso destas, serem de grande importancia convem admittir este valor para uma primeira approximação e calcular o quadro como rigido e para cargas uniforme totaes em vãos alternados, que são proximamente as cargas verticaes que produzem nestes os esforços maximos — *b*) esforços provenientes de freiagem ou outras forças parallelas ao estrado, que para o caso das vigas e columnas de secção constante, são distribuidas pelas pilastras inversamente proporcional as suas alturas. Para a determinação dos diversos momentos de flexão, os pontos de inflexão nas columnas podem ser localizados com grande approximação no meio de suas altu-

ras, e nas vigas no centro do vão. Assim sendo, o momento no topo de uma columna, immediatamente calculavel, se distribuirá igualmente pelas vigas que ahi concorram no caso de vãos iguaes, e nas columnas extremas esta distribuição será de um terço para o vão externo e dois terços para o vão interno ahi concurrente, visto as duas articulações ficticias distarem do pilar de distancia, dupla uma da outra. c) Esforços devidos a oscillações de temperaturas, de difficil previsão. E' costume não leval-os em conta no ante-projecto, visto ser sempre permittido acrescimo de taxas de trabalho do material quando se consideram todos os esforços maximos agindo simultaneamente.

Para a determinação das constantes da caracteristica de forma, é necessario a determinação dos K , n e seus productos, que ficam indicados no quadro abaixo, para o caso em consideração :

Membros	cm. Comp.	I. cm ⁴	$\frac{I}{l} = K$	$\frac{1}{l} = n$	Kn	Kn^2
1	1640	7.891.0000	48.116	0.0006098	29,3411	—
2	»	6.968.0000	42.448	»	25,8849	—
3	»	»	»	»	»	—
4	»	»	»	»	»	—
5	»	78910000	48.116	»	29,3411	—
6	1630	39000000	23.926	0,0006135	14,6786	0,0090053
7	1610	»	24.224	0,0006211	15,0455	0,0093448
8	1590	»	24.529	0,0006290	15,4287	0,0097046
9	1570	»	24.841	0,0006360	15,7989	0,0100481

A característica de forma, cujos primeiros termos foram reduzidos a unidade, para preparal-a para a eliminação, é a seguinte :

Equaç.	θ_B	θ_C	θ_D	θ_E	d	2º termo
1'	1	0,207142	—	—	-0,00021489	α 409844
2'	1	5,141349	1	—	-0,00106333	β 84896
3'	—	1	5,155719	1	-0,00109042	γ 84896
4'	—	—	1	4,870712	-0,00111658	δ 84896
5'	1	1,024996	1,051102	1,076322	-0,00519161	ε 14,6786

O systema adoptado, para o calculo dos esforços maximos produzidos pelas cargas moveis, foi o das linhas de influencia, dividindo-se para isto cada viga em 10 secções iguaes. A carga movel adoptada foi de 1000^k.

Daremos a seguir o calculo completo dos esforços para o caso da carga na secção 0,5 l₁, como uma indicação do methodo que deve ser seguido, de modo a simplificar o mais possivel os calculos necessarios :

$$\text{Carga a } 0,5 l_1 \quad \frac{Pab}{2l^2} (1 + a) = 309.359$$

Equação	θ_B	θ_C	θ_D	θ_R	d	2º termo
1'	1	0,207142	—	—	— 0,00021489	— 0,000.003.594.388
2'	1	5,141349	1	—	— 0,00106333	—
3'	1	1,024996	1,051102	1,076322	— 0,00519161	—
2'-1'=6	—	4,934207	1	—	— 0,00084844	+ 0,000.003.594.388
2'-5'=7	—	4,116353	-0,051102	-1,076322	+ 0,00412828	—
6'	—	1	0,202667	—	— 0,00017195	+ 0,000.000.728.463
7'	—	1	-0,012414	-0,261475	+ 0,00100289	—
3'	—	1	5,155719	1	— 0,00109042	—
3'-6'=8	—	—	4,953052	1	— 0,00091847	— 0,000.000.728.463
3'-7'=9	—	—	5,168133	1,261475	— 0,00209331	—
8'	—	—	1	0,201895	— 0,00018544	— 0,000.000.147.074
9'	—	—	1	0,244087	— 0,00040504	—
4'	—	—	1	4,870712	— 0,00111658	—
4'-8'=10	—	—	—	4,668817	— 0,00093114	+ 0,000.000.147.074
4'-9'=11	—	—	—	4,626625	— 0,00071154	—
10'	—	—	—	1	— 0,00019944	+ 0,000.000.031.501
11'	—	—	—	1	— 0,00015379	—
10'-11'=12	—	—	—	—	— 0,00004565	+ 0,000.000.031.501

$$d'ahi \quad d = \frac{31501}{45650000} = 0,000.690.055^{cms}$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_E &= -0,000.000.106.124 \\ \Theta_D &= -0,000.000.253.603 \\ \Theta_C &= +0,000.000.661.180 \\ \Theta_B &= -0,000.003.879.632 \end{aligned} \right\} \text{rotações dos nós em r-} \\ \text{dianos.}$$

Os momentos nos extremos dos cavalletes, calculados pelas equações geraes, onde as incognitas já estão conhecidas, nos dão:

$$\begin{aligned} M_{BG} &= -65.210 \text{ Kcms.} & M_{GB} &= -26224 \text{ Kcms} \\ M_{CH} &= +26.535 \text{ »} & M_{HC} &= +19809 \text{ »} \\ M_{DJ} &= +8.189 \text{ »} & M_{JD} &= +10802 \text{ »} \\ M_{EL} &= +11.521 \text{ »} & M_{LE} &= +12628 \text{ »} \end{aligned}$$

obtendo-se para os empuxos nas bases dos pilares

$$\begin{aligned} Q_G &= -0,0006135 \times 91434 = -56,^K095 \\ Q_H &= +0,0006211 \times 46344 = +28,794 \\ Q_J &= +0,0006290 \times 18991 = +11,945 \\ Q_L &= +0,0006360 \times 24149 = +15,359 \end{aligned}$$

Como verificação, deve se obter $\Sigma Q = 0$, o que é satisfeito, no nosso caso, com um erro de

$$\xi = -56,^K095 + 56,098 = 0,^K003$$

devido naturalmente as aproximações de calculos. Do mesmo modo, para as vigas:

$$\begin{aligned}
 M_{BA} &= + 191756 \text{ Kcms.} & M_{DC} &= + 27 \times 45 \text{ Kcms} \\
 M_{BC} &= - 126546 \quad \text{''} & M_{DE} &= - 10.934 \quad \text{''} \\
 M_{CB} &= - 45.591 \quad \text{''} & M_{ED} &= - 8.305 \quad \text{''} \\
 M_{CD} &= + 19.053 \quad \text{''} & M_{EF} &= - 3.217 \quad \text{''}
 \end{aligned}$$

tendo-se ainda, para verificações de calculo, a condição, de que, a somma dos momentos nos extremos dos membros concurrentes a um determinado nó, seja nulla.

O calculo dos esforços cortantes nos extremos de cada viga e as reacções, serão feitas, com o auxilio da equação geral

$$T_A = \frac{M_{BA} - M_{AB} + \sum_0^1 P(1-a)}{l} = - \frac{M_{BA} - M_{AB}}{l} + \zeta_a$$

onde ζ_a é o esforço cortante no caso de uma viga simplesmente apoiada, de mesmo vão, e sujeita ao mesmo systema de cargas externas.

No nosso caso, virá :

$$R_A = 500 - \frac{191756}{1640} = + 383^k$$

$$R_{AB} = 1000 - 383 = + 617^k$$

$$R^F = - \frac{3217}{1640} = - 2^k,0$$

$$R_{BC} = \frac{126546 + 45591}{1640} = + 105^k \quad R_B = - 105^k$$

$$R_{\text{H}} = - \frac{19053 + 2745}{1640} = - 13,^{\text{k}}3$$

$$R_{\text{J}} = + \frac{10934 + 8305}{1640} = + 11,^{\text{k}}7$$

$$R_{\text{J}} = + 13,^{\text{k}}3 \quad R_{\text{L}} = 11,^{\text{k}}7$$

Os esforços axiais nas columnas são então de

$$R_{\text{A}} = 383^{\text{k}}$$

$$R_{\text{G}} = 617 + 105 = + 722^{\text{k}}$$

$$R_{\text{H}} = - 105 - 13,3 = - 118,3^{\text{k}}$$

$$R_{\text{J}} = + 13,3 + 11,7 = + 25,0^{\text{k}}$$

$$R_{\text{L}} = - 11,7 + 2,0 = - 9,7^{\text{k}}$$

$$R_{\text{E}} = - 2,0$$

Para se obter, os momentos nas diversas secções internas das vigas, deve-se notar que

$$M_{\text{x}} = \mu + M_{\text{AB}} + \frac{M_{\text{BA}} - M_{\text{AB}}}{l} x$$

onde μ é o momento de flexão na secção considerada com as mesmas cargas actuando sobre as vigas, se estas fossem simplesmente apoiadas nos seus extremos, e x a distancia do apoio a secção considerada.

Obtem-se assim:

Seções	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
0	--	-126546Kcms	+19053 Kcms.	-10934 Kcms.	- 3217 Kms.
0.25	+157061kcms.	-83511	+13603	- 6125	- 2412
0.50	+ 314122	-40477	+ 8154	- 1315	- 1608
0.75	+ 61183	+ 2577	+ 2704	+ 3495*	- 804
1.00	- 191756	-45591	- 2745	+ 8305	-

Para uma nova posição da carga, a determinação das incognitas, fica grandemente simplificada, visto a característica de forma ser fixa, e ser sufficiente operar só com os segundos termos.

Assim, para uma carga a 0.4 l₂, tem-se

$$-\frac{1000 a b}{l^2} = 236.160 + \frac{1000 a^2 b}{l^2} = +157.400$$

d'a hi :

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ termo de } 1' &= + 0,000.002.860.089 \\ \text{» } \text{» } 2' &= - 0,000.008.830.973 \end{aligned}$$

e os restante das outra equações simultaneas serão naturalmente nullos, visto só haver carga no segundo vão. Procedendo se a eliminação, virá integralmente :

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ termo de } 6 &= 2' - 1' = - 0,000.011.691.062 \\ \text{» } \text{» } 7 &= 2' - 5' = - 0,000.008.830.973 \\ \text{» } \text{» } &6' = - 0,000.002.369.390 \\ \text{» } \text{» } &7' = - 0,000.002.145.339 \\ \text{» } \text{» } 8 &= 3' - 6' = + 0,000.002.369.390 \\ \text{» } \text{» } 9 &= 3' - 7' = + 0,000.002.145.339 \\ \text{» } \text{» } &8' = + 0,000.000.478.369 \\ \text{» } \text{» } &9' = + 0,000.000.415.109 \\ \text{» } \text{» } 10 &= 4' - 8' = - 0,000.000.478.369 \\ \text{» } \text{» } 11 &= 4' - 9' = - 0,000.000.415.109 \\ \text{» } \text{» } &10' = - 0,000.000.102.460 \\ \text{» } \text{» } &11' = - 0,000.000.089.722 \\ \text{» } \text{» } 12 &= 10' - 11' = - 0,000.000.012.738 \end{aligned}$$

$$d = + \frac{12738}{45650000} = + 0,000.279,036^{\text{cms}}$$

$$\Theta_R = - 0,000.000.046.809$$

$$\Theta_D = + 0,000.000.539.559$$

$$\Theta_C = - 0,000.002.430.740$$

$$\Theta_B = + 0,000.003.423.559$$

$$M_{BG} = + 63.645 \text{ Kcms} \quad M_{GB} = + 29.242 \text{ Kcms.}$$

$$M_{CH} = - 54.751 \quad \text{«} \quad M_{HC} = - 30.020 \quad \text{«}$$

$$M_{DJ} = + 5.693 \quad \text{«} \quad M_{JD} = + 134 \quad \text{«}$$

$$M_{EL} = - 6.531 \quad \text{«} \quad M_{LR} = - 6.042 \quad \text{«}$$

$$Q_G = + 0,000 6135 \times 92887 = + 56,^{\text{K}}986$$

$$Q_B = - 0,000 6211 \times 84771 = - 52, 651$$

$$Q_J = + 0,000 6290 \times 5827 = + 3, 665$$

$$Q_L = - 0,000.6360 \times 12573 = - 7, 998$$

obtendo-se um erro, na verificação do calculos numericos de:

$$\xi = + 60,^{\text{K}}651 - 60,^{\text{K}}649 = + 0,^{\text{K}}002$$

A determinação dos momentos, esforços constantes e axiais nas diversas secções internas, são feitas rigorosamente como na secção anterior, e por esta razão não serão aqui reproduzidas.

Esforço de freiagem—

Para um comprimento total de 82,^m00, a carga maxima sobre a ponte é a seguinte:

$$\begin{array}{r}
 2 \text{ locomotivas} = 2 \times 61.73 = 122.76 \\
 4 \text{ wagons de carga} = 4 \times 32.4 = 129.6 \\
 \hline
 \Sigma P = 252.72
 \end{array}$$

Adoptando-se para coefficiente de attrito, o valor usual $f = 0.20$, o esforço paralelo ao estrado será de

$$Q = 0.2 \times 252200 = 50440 \text{ seja } 50.400^k$$

e o segundo termo da equação 5, terá para valor

$$\frac{Q}{6E} = 0.04$$

sendo os das equações restantes nullos.

A resolução das equações é então:

$$\begin{array}{l}
 2^\circ \text{ termo de } 5' = + 0,002.725.055 \\
 \text{« } 7 = 2' - 5' = - 0,002.725.055 \\
 \text{« } \quad \quad 7' = - 0,000.662.007 \\
 \text{« } 9 = 3' - 7' = + 0,000.662.007 \\
 \text{« } \quad \quad 9' = + 0,000.128.094 \\
 \text{« } 11 = 4' - 9' = - 0,000.128.094 \\
 \text{« } \quad \quad 11' = - 0,000.027.686 \\
 \text{« } \quad \quad 12' = + 0,000.027.686
 \end{array}$$

$$d = - \frac{27686}{45650} = - 0,606.484^{\text{msc}}$$

$$\Theta_s = -0,000.120.957$$

$$\Theta_D = -0,000.088.041$$

$$\Theta_C = -0,000.086.450$$

$$\Theta_B = -0,000.112.420$$

$$M_{Bg} = + 8.957.540 \text{ Kcms.}$$

$$M_{CB} = + 9.738.250 \quad \text{»}$$

$$M_{Dj} = + 9.976.150 \quad \text{»}$$

$$M_{EL} = + 9.548.160 \quad \text{»}$$

$$M_{GB} = + 10.087.250 \quad \text{»}$$

$$M_{HC} = + 10.617.790 \quad \text{»}$$

$$M_{JD} = + 10.883.160 \quad \text{»}$$

$$M_{LE} = + 10.810.010 \quad \text{»}$$

$$Q_g = + 0,000.6135 \times 19.044.790 = + 11.684^k$$

$$Q_B = + 0,000.6211 \times 20.356.040 = + 12.643^k$$

$$Q_j = + 0,000.6290 \times 20.859.310 = + 13.123^k$$

$$Q_L = + 0,000.6360 \times 20.358.170 = + 12.950$$

$$\Sigma Q = 50.400^k.$$

Os calculos foram ainda desenvolvidos até este ponto, no presente typo de carga, para justificativa de nossa indicação de esforços no anteprojecto, tal como a fixação dos pontos de inflexão no meio das columnas e das vigas internas.

Obtem-se ainda

$$M_{CB} = - 5.086.130 \text{ Kcms}$$

$$M_{CD} = - 4.652.120 \quad \text{»}$$

$$M_{DC} = - 4.680.470 \quad \text{»}$$

$$M_{DB} = - 5.295.680 \quad \text{»}$$

e para os vãos extremos

$$\begin{aligned} M_{BA} &= - 3.407.810 \text{ Kcms.} \\ M_{BC} &= - 5.549730 \quad \text{»} \\ M_{ED} &= - 5.882.490 \quad \text{»} \\ M_{EF} &= - 3.665.670 \quad \text{»} \end{aligned}$$

valores estes, que satisfazem plenamente, dentro das exigencias de um ante-projecto, as condições indicadas.

Ainda, como um exemplo de sobrecarga vertical, estudemos a influencia da

Carga permanente

Garga permanente por m/ de viga = 5700^{kg.}
Tem-se

$$\frac{3}{2} \frac{F}{l} = \frac{pl^2}{8} = + 19.163.400$$

$$-\frac{F}{l} = \frac{pl^2}{12} = - 12.775.600$$

d' a hi

$$2^{\circ} \text{ termo de } l = - 30,42$$

$$\alpha \quad \alpha \quad 4 = + 30,42$$

sendo os restantes nulos, devido as cargas e os vãos serem eguaes.

Resolvendo.

$$\begin{aligned}
 2^\circ \text{ termo de } 1' &= - 0,000.074.223 \\
 \text{» } \text{» } 4' &= + 0,000.358.321 \\
 \text{» } \text{» } 6 = 2' - 1' &= + 0,000.074.223 \\
 &6' = + 0,000.015.043 \\
 \text{» } \text{» } 8 = 3' - 6' &= - 0,000.015.043 \\
 \text{» } &8' = - 0,000.003.037 \\
 \text{» } \text{» } 10 = 4' - 8' &= + 0,000.361.358 \\
 \text{» } \text{» } 11 = 4' - 9' &= + 0,000.358.321 \\
 \text{» } &10' = + 0,000.077.398 \\
 \text{» } &11' = + 0,000.077.448 \\
 \text{» } \text{» } 12 = 10' - 11' &= - 0,000.000.050
 \end{aligned}$$

$$d = + \frac{50}{45650} = + 0,001.095^{\text{cms.}}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_E &= + 0,000.077.616 \\
 \Theta_D &= - 0,000.018.501 \\
 \Theta_C &= + 0,000.018.981 \\
 \Theta_B &= - 0,000.077.920
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{Bg} &= - 1.586.270 \text{Kcms.} \\
 M_{Ch} &= + 365.470 \text{ »} \\
 M_{Dl} &= - 402.480 \text{ »} \\
 M_{Rl} &= + 1.597.620 \text{ »} \\
 M_{GB} &= - 803.260 \text{ »} \\
 M_{HC} &= + 172.360 \text{ »} \\
 M_{JD} &= - 211.880 \text{ »} \\
 M_{LE} &= + 787.910 \text{ »}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q_G &= - 0,0006135 \times 2.389530 = - 1.466^K \\
 Q_H &= + 0,0006211 \times 537830 = + 334^K \\
 Q_J &= - 0,0006290 \times 614360 = - 385 \\
 Q_L &= + 0,0006360 \times 2.385.530 = + 1.517
 \end{aligned}$$

Variações de temperatura

E' interessante, como exemplo de applicação do methodo, deduzir a «columna de carga» para o caso de uma variação de temperatura. Suporemos uma elevação uniforme de temperatura para todas as peças do quadro, sendo evidente, que a deducção será analoga para qualquer outra hypothese feita, tal como temperaturas constantes no estrado e pilares mas differindo entre si de uma quantidade determinada.

Se chamarmos de d_1 o deslocamento real de nó E no sentido horisontal, e o alongamento de cada viga, e Δ_n a deflexão da viga do vão n, teremos naturalmente para flecha dos pilares os seguintes valores:

Pilar EL	—	Deslocamento d_1
« DJ	—	« $d_1 - e$
« CH	—	« $d_1 - 2e$
« BG	—	« $d_1 - 3e$

visto os tres vãos serem iguaes.

As flechas das vigas, terão para valor:

- Viga AB—Alongamento de BG, visto o ponto A ser supposto fixo = Δ_1
- » BC—Diferença de alongamentos, de BG e CH = Δ_2
- » CD — Diferença de alongamentos de CH e DJ = Δ_3
- » DE — Diferença de alongamentos de DJ e EL = Δ_4
- » EF—Alongamento de EL, visto o ponto F ser fixo = Δ_5 .

As equações dos momentos nos extremos das peças, são agora, levando em conta as flechas já determinadas, e a não existencia de cargas sobre a estrutura.

$$\begin{aligned}
 M_{BA} &= 3 EK_1 (\theta_B - n_1 \Delta_1) \\
 M_{B\bar{C}} &= 2 EK_6 [2 \theta_B - 3n_6 (d_1 - 3e)] \\
 M_{BC} &= 2 EK_2 (2 \theta_B + \theta_C - 3n_2 \Delta_2) \\
 M_{CB} &= 2 EK_2 (2 \theta_C + \theta_B - 3n_2 \Delta_2) \\
 M_{C\bar{H}} &= 2 EK_7 [2 \theta_C - 3n_7 (d_1 - 2e)] \\
 M_{CD} &= 2 EK_3 (2 \theta_C + \theta_D - 3n_3 \Delta_3) \\
 M_{DC} &= 2 EK_3 (2 \theta_D + \theta_C - 3n_3 \Delta_3) \\
 M_{D\bar{J}} &= 2 EK_8 [2 \theta_D - 3n_8 (d_1 - e)] \\
 M_{DE} &= 2 EK_4 (2 \theta_D + \theta_E - 3n_4 \Delta_4) \\
 M_{ED} &= 2 EK_4 (2 \theta_E + \theta_D - 3n_4 \Delta_4) \\
 M_{EL} &= 2 EK_9 (2 \theta_E - 3n_9 d_1) \\
 M_{EF} &= 3 EK_5 (\theta_E - n_5 \Delta_5)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se estes valores nas equações de equilíbrio, são obtidos os mesmos valores para a característica de forma, e a columna de carga fica transformada em :

$$\begin{aligned} \text{Equação } 1 &= 3 (K_1 n_1 \Delta_1 - 6 K_6 n_6 e + 2K_2 n_2 \Delta_2) \\ \text{» } 2 &= 6 (K_2 n_2 \Delta_2 - 2 K_7 n_7 e + K_3 n_3 \Delta_3) \\ \text{» } 3 &= 6 (K_3 n_3 \Delta_3 - K_8 n_8 e + K_4 n_4 \Delta_4) \\ \text{» } 4 &= 3 (2 K_4 n_4 \Delta_4 + K_5 n_5 \Delta_5) \\ \text{» } 5 &= - 2 (3 K_6 n_6^2 + 2 K_7 n_7^2 + K_8 n_8^2)e \end{aligned}$$

Para os valores de $C_t = 0,000014$ e $\Delta t = 20^\circ$, obtem-se

Membros	l cms	$\frac{Cl}{t}$ cm
AB	1640	0,4592
BG	1630	0,4564
CH	1610	0,4508
DJ	1590	0,4452
EL	1570	0,4396

$$e = 0.4592$$

$$\Delta_1 = -0.4564$$

$$\Delta_2 = 0.4554 - 0.4508 = +0,0056$$

$$\Delta_3 = 0.4508 - 0,4452 = +0,0056$$

$$\Delta_4 = 0,4452 - 0.4396 = +0,0056$$

$$\Delta_5 = +0.4396$$

e d'ahi ;

2º termo de 1 =	—	160,632
» » 2 =	—	81,167
» » 3 =	—	40,768
» » 4 =	+	39,564
» » 5 =	—	0,051

A resolução do systema de equações é análoga a dos casos anteriores. A titulo de indicação da importancia deste genero de esforços, damos abaixo os momentos nos extremos das diversas peças componentes do quadro :

M_{BG}	= +	8.030.830	Kcms.
M_{CH}	= +	4.652.040	»
M_{DJ}	= —	4.168.300	»
M_{EL}	= —	8.210.240	»
$M_{BA'}$	= +	941.600	»
M_{BC}	= —	8.972.430	»
M_{CB}	= —	4.537.800	»
M_{CD}	= —	114.240	»
M_{GB}	= +	10.515.490	»
M_{HC}	= +	4.636.920	»
M_{JD}	= —	4.177.860	»
M_{LE}	= —	10.819.960	»
M_{DC}	= —	142.030	»
M_{DE}	= +	4.310.330	»
M_{ED}	= +	8.753.600	»
M_{EF}	= —	543.440	»

e para os empuxos dos pilares.

Q_G	= +	11.380 ^k	Q_J	= —	5.150 ^k
Q_H	= +	5.870 ^k	Q_L	= —	12.100 ^k

Daremos ainda a deducção das equações simultaneas para forças lateraes. como um exemplo de applicação do methodo das rotações ao caso de quadros em andares.

Chamando de d_1 , o deslocamento lateral da braçadeira CD e de d_2 , o desvio da braçadeira superior AB em relação a CD, obtem-se para as equações dos momentos :

$$\begin{aligned} M_{CE} &= 2 EK_5 (2 \Theta_c - 3n_5 d_1) \\ M_{CD} &= 2 EK_4 (2 \Theta_c + \Theta_D) \\ M_{CA} &= 2 EK_2 (2 \Theta_c + \Theta_A - 3n_2 d_2) \\ M_{AC} &= 2 EK_2 (2 \Theta_A + \Theta_c - 3n_2 d_2) \\ M_{AB} &= 2 EK_1 (2 \Theta_A + \Theta_B) \\ M_{BA} &= 2 EK_1 (2 \Theta_B + \Theta_A) \\ M_{BD} &= 2 EK_3 (2 \Theta_B + \Theta_D - 3n_3 d_2) \\ M_{DB} &= 2 EK_3 (2 \Theta_D + \Theta_B - 3n_3 d_2) \\ M_{DC} &= 2 EK_4 (2 \Theta_D + \Theta_c) \\ M_{DF} &= 2 EK_6 (2 \Theta_D - 3n_6 d_1) \end{aligned}$$

As condicções de equilibrio nos nós dão :

$$\begin{aligned} \text{Nó A} - 2 \Theta_A (K_2 + K_1) + K_1 \Theta_B + K_2 \Theta_c - \\ - 3 K_2 n_2 d_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Nó B} - 2 \Theta_B (K_1 + K_3) + K_1 \Theta_A + K_3 \Theta_D - \\ - 3 K_3 n_3 d_3 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Nó C} - 2 \Theta_c (K_2 + K_4 + K_5) + K_2 \Theta_A + K_4 \Theta_D - \\ - 3K_2 n_2 d_2 - 3K_5 n_5 d_1 = 0$$

$$\text{Nó D} - 2 \Theta_D (K_3 + K_4 + K_6) + K_3 \Theta_B + K_4 \Theta_c - \\ - 3K_3 n_3 d_2 - 3K_6 n_6 d_1 = 0$$

A quinta equação é obtida com a condição de equilíbrio do quadro ABCD.

$$M_{AC} + M_{BD} + M_{CA} + M_{DB} + Q_1 h_2 = 0$$

seja após substituições e simplificações

$$K_2 \Theta_A + K_3 \Theta_B + K_2 \Theta_c + K_3 \Theta_D - \\ - 2(K_2 n_2 + K_3 n_3) = - \frac{Q_1 h_2}{6 E}$$

e a última, proveniente do equilíbrio do quadro inferior CDEF

$$(M_{CK} + M_{KC}) n_5 + (M_{DF} + M_{FD}) n_6 = Q_1 + Q_2$$

seja depois de simplificada

$$K_5 n_5 \Theta_c + K_6 n_6 \Theta_D - 2d_1 (K_5 n_5^2 + K_6 n_6^2) = \frac{Q_1 + Q_2}{6 E}.$$

O grupo completo, fica assim resumido no quadro abaixo :

E_1	Θ_A	Θ_B	Θ_C	Θ_D	d_1	d_2	2° termo
1	$2(K_2 + K_1)$	K_1	K_2			$-3K_2 n_2$	-
2	K_1	$2(K_1 + K_3)$		K_3		$-3K_3 n_3$	-
3	K_2		$2(K_2 + K_4 + K_5)$	K_4	$-3K_5 n_5$	$-3K_2 n_2$	-
4		K_3	K_4	$2(K_3 + K_4 + K_6)$	$-3K_6 n_6$	$-3K_3 n_3$	-
5	K_2	K_3	K_2	K_3		$-2(K_2 n_2 + K_3 n_3)$	$-\frac{Q_1 h_2}{6 E}$
6			$K_5 n_5$	$K_6 n_6$	$-\frac{2(K_5 n_5^2 + K_6 n_6^2)}{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 6}$		$\frac{Q_1 + Q_2}{6 E}$

No viaducto em consideração, Q_1 é a resultante da pressão do vento no trem de cargas, estrado da ponte, parte do cavallete, e da força centrífuga, visto este ser em curva; Q_2 é a pressão do vento em parte do cavallete correspondente a braçadeira intermediaria.

Estes valores foram calculados em

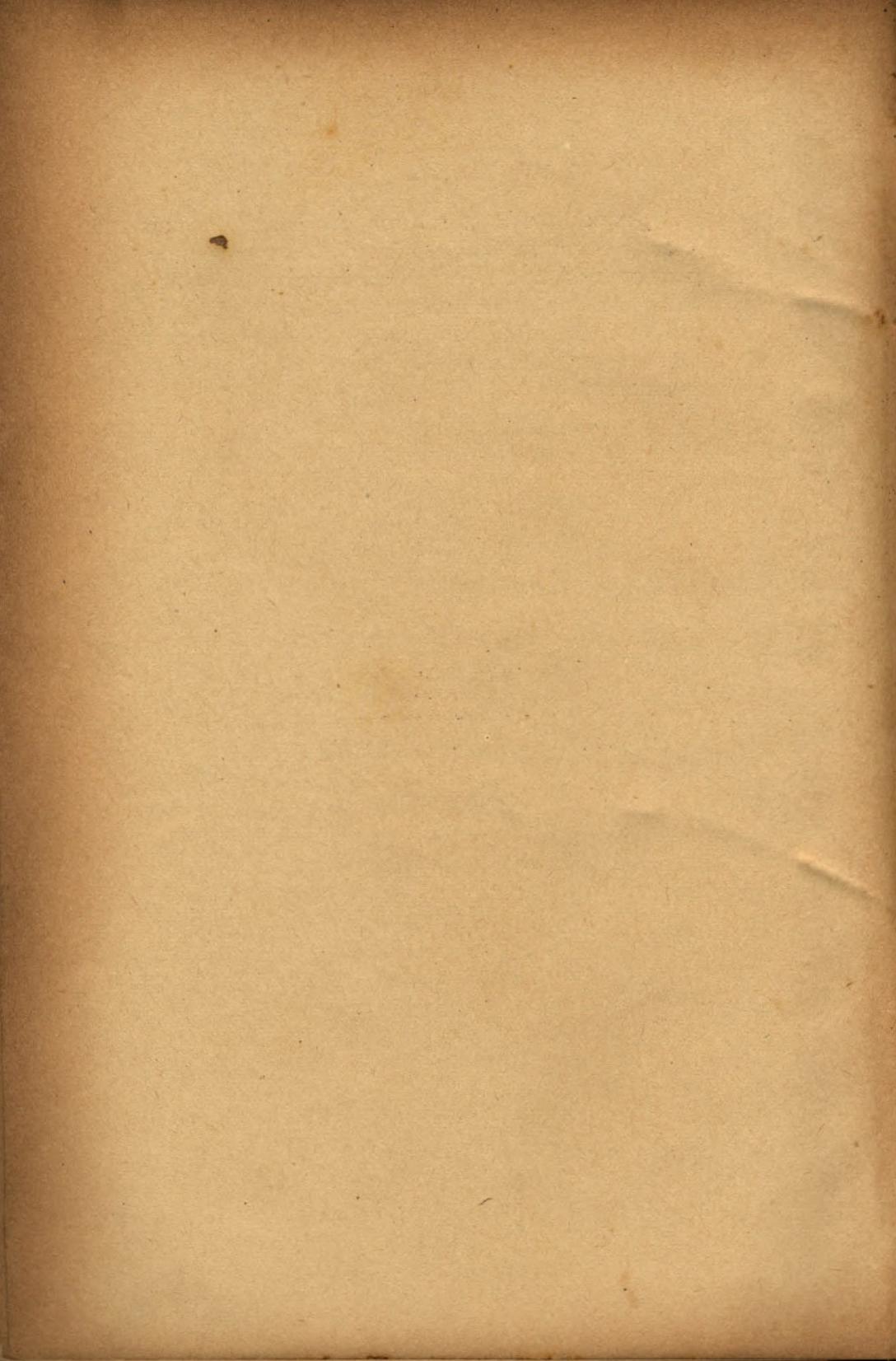
$$Q_1 = 25.000^k \quad Q_2 = 2.500^k$$

Para o preparo da característica de carga com os seus coefficients tendo valores numericos, eliminação e determinação dos momentos, esforços axiaes e cortantes nas diversas secções, todos os desenvolvimentos de calculo são analogos ao caso do viaducto de um andar, de modo que seria fastidioso repetil-os aqui para o cavallete.

Deve-se notar que, no caso dos cavalletes possuirem pernas inclinadas, como no caso em consideração e estando a viga AB ligada ao estrado e se deformando no plano vertical, é conveniente para a simplicidade dos calculos na estrutura longitudinal, substituir AE e BF, por columnas verticaes, de tal modo que, a regidez ou resistencia ao deslocamento dos pontos A e B, seja identica a produzida por AE e BF.

Os comprimentos equivalentes, sendo h, os seus momentos de inercia em relação a um eixo horisontal no plano da estrutura, devem ser iguaes a $I_{AE} \cos \alpha$ e $I_{BF} \cos \alpha$ respectivamente.

Quando a estructura, for composta de mais de duas columnas, cada grupo de columnas symetricas em relação ao eixo vertical, deve ser substituida, por uma unica pilastra vertical, como no caso anterior, tendo para momento de inercia, a somma dos momentos de inercia do grupo em consideração.



TYP. BAPTISTA DE SOUZA
RUA DA MISERICORDIA, 51
RIO DE JANEIRO

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

