

FELIPPE DOS SANTOS REIS

Docente livre e assistente da
cadeira de Estabilidade das
—— Construções na ——
Escola Polytechnica do Rio.
::: Chefe da Secção Technica
das Obras do Porto de Nictheroy

Estudo dos Systemas Hyperestaticos,
interna e externamente
pela equação de Fontviolant.

THESE apresentada á illustre Congregação
da Escola Nacional de Bellas Artes para o
concurso de cathedratico da cadeira de
Resistencia dos Materiaes, Grapho-Estatica
e Estabilidade das Construções. ==

1927

RIO DE JANEIRO
Typ. d'A Encadernadora - S. A.
Rua S. José, 35



FELIPPE DOS SANTOS REIS

Docente livre e assistente da
cadeira de Estabilidade das
— Construções na —
Escola Polytechnica do Rio.
::: Chefe da Secção Technica
das Obras do Porto de Nictheroy

Estudo dos Systemas Hyperestaticos,
interna e externamente
pela equação de Fontviolant.

THESE apresentada á illustre Congregação
da Escola Nacional de Bellas Artes para o
concurso de cathedratico da cadeira de
Resistencia dos Materiaes, Grapho-Estatica
e Estabilidade das Construções. ==

1927

RIO DE JANEIRO

Typ. d'A Encadernadora - S. A.

Rua S. José, 35



3 1/2
1927

575767

CLA/EBA



270003696



PREFACIO

O presente trabalho versa sobre os systemas hyperestaticos, ou superabundantes, no calculo de suas deformações lineares e angulares, na determinação das forças de ligação interiores e exteriores.

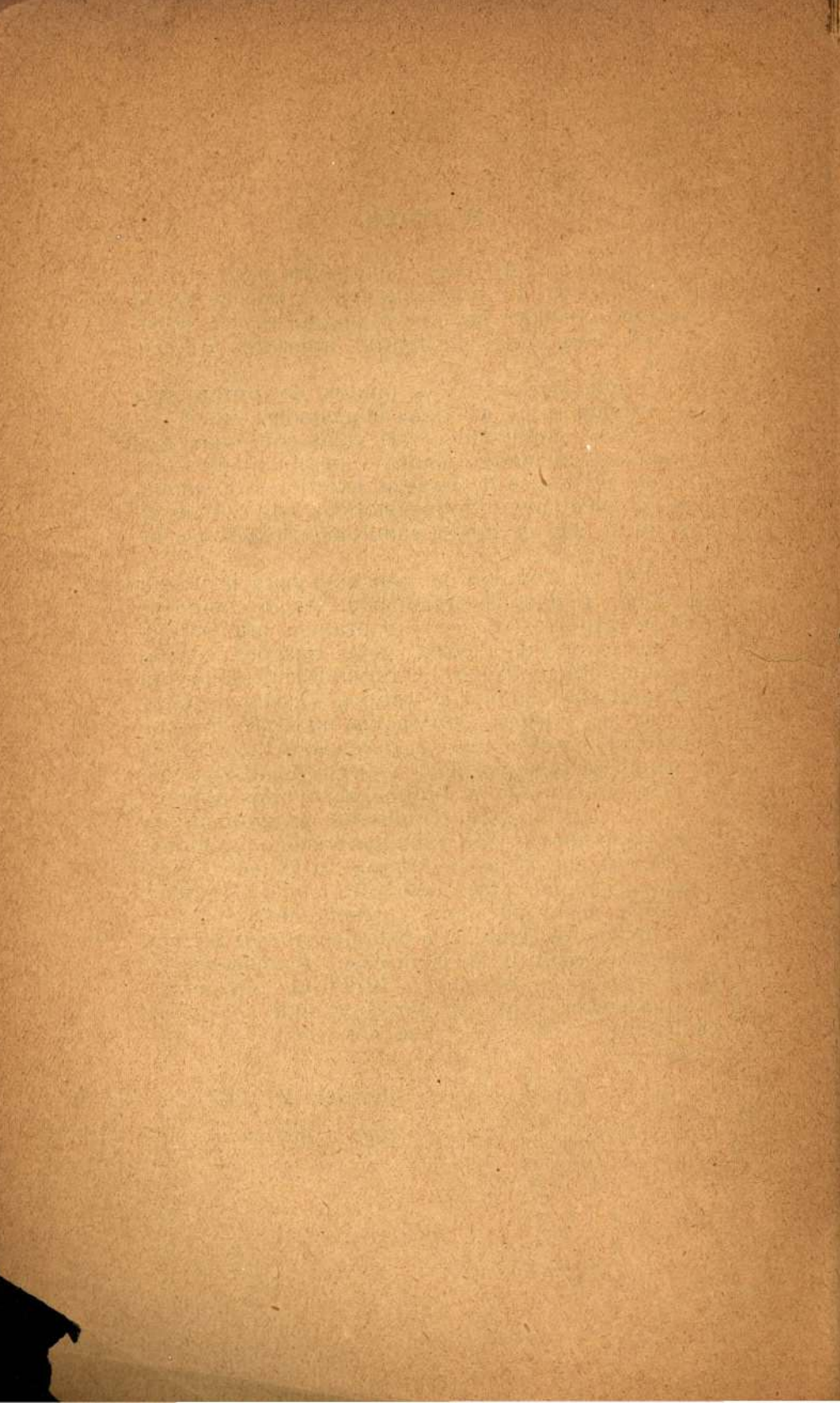
Trata, portanto, dos pontos do programma que versam sobre as vigas engastadas, numa, ou em ambas extremidades, das vigas continuas, dos systemas reticulados planos superabundantes em barras, em forças de ligação exteriores e, ainda, dos completamente hyperestaticos, isto é, d'aquelles que o são de modo simultaneo, externa e internamente.

Em se tratando de concurso para professor destinado á uma disciplina cuja feição emana de ambos aspectos: theorico e pratico, ora surgindo do campo da theoria, pelas ligações com a Mecanica Racional e a theoria da Elasticidade, ora emanando da adaptação pratica desses conhecimentos aos corpos deformaveis, ou reaes, fizemos acompanhar nossa these, cuja feição é theorica, de uma serie de photographias de serviços nossos, executados no dominio da pratica, nas varias applicações das doutrinas encerradas no programma da cadeira em apreço. São trabalhos nos quaes collaboramos, ora como auctor do projecto de todo o serviço, ou de uma parte d'elle, ora como executor, ou ainda, fiscal das obras apresentadas.

Indicamos, tambem a lista dos nossos artigos e trabalhos publicados. Com esse complemento á these não visamos trazer o brilho de um nome, mas offerecer, com elle, terrenos onde se possa, facilmente aferir o labor da nossa vida de professional.

Rio de Janeiro, Janeiro de 1927

FELIPPE DOS SANTOS REIS.



INTRODUÇÃO

Os primitivos methodos de *Resistencia dos Materiaes* applicaveis aos corpos isotropos, ou de fibra media, ou ainda, de modo mais geral, aos systemas de semelhantes corpos, tendo feição geometrica e cinematica, são longos no raciocinio das deformações superpostas, como exemplifica o estudo classico dos arcos, são fastidiosos na eliminação de certas incognitas auxiliares, como serve de exemplo, a deducção classica do theorema de *Berthot e Clapeyron*, nas vigas continuas.

Como meio de pesquisa para deducção de formulas, num caso a estudar, têm o inconveniente da falta de uniformidade, não deixando ao pesquisador nenhuma *norma geral* que, sendo applicavel a todos os casos, permitta abrir logo, caminho de ensaio a quem aborda pela primeira vez a questão.

Ainda hoje, esses processos são, não obstante, muito vulgares em alguns paizes, especialmente em França, embora quasi abandonados na Alemanha e na Italia, paiz onde muito predomina, nesse ramo da technica, a influencia allemã.

De 1850 para cá, a *Resistencia dos Materiaes* tem soffrido alterações radicaes até na propria consideração dos apoios, outr'ora considerados rigidos em qualquer de seus generos e hoje encarados como *deformaveis*, isto é, soffrendo deformações elasticas e calorificas.

Duas equações da Mecânica, cujas applicações à *Resistencia dos Materiaes* pareciam impossiveis aos antigos technicos da primeira metade do seculo passado que já conheciam a grande obra de Lagrange sobre a Mecânica Analytica - a equação das forças vivas e a dos trabalhos virtuales, introduzidas naquella Sciencia, no fim do seculo passado, fornecem hoje tres methodos novos, elegantes e de absoluta generalidade, para a solução dos dois grandes e fundamentaes problemas de *Resistencia dos Materiaes*: o problema do calculo das deformações: angulares e lineares, elasticas e thermicas e o problema do calculo das forças de ligação exteriores e interiores, estas ultimas nos systemas reticulados de barras.

Os dois methodos que se baseiam no *theorem* das forças vivas originam-se d'uma Memoria de Clapeyron relativa ao trabalho das forças elasticas ⁽¹⁾ de 1858 e dez annos após, esse mesmo alvitre surgia, de modo feliz e claro, num trabalho de Menabrea.⁽²⁾

Um primeiro processo decorre daquelle *theorem* com o estabelecimento da equação de Clapeyron sobre o potencial interno do corpo, ou systemas de corpos deformados. B. Fontviolant ⁽³⁾ estende, aliás, essa formula ás deformações calorificas, ampliando-a, dando-lhe toda a extensão necessaria á uma generalisação absoluta. D'ahi, se pôde deduzir os bellos *theoremas* de A. Castigliano ⁽⁴⁾ que datam de 1875 e só elles offerecem

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, T. XLVI, pag. 208

(2) *Principe général pour déterminer les pressions et les tensions dans un système élastique*, citado por Fontviolant, pag. 3. Les méthodes modernes, etc. Fontviolant cita, tambem, uma nota de Menabrea apresentada á Academia franceza, em 1858.

(3) B. Fontviolant: *Les Méthodes Modernes de la Résistance des Matériaux*, pag. 18, Guathier-Villars, 1919.

(4) *Theoria novu do equilibrio dos systemas articulados* (Academia de Turim).

methodo inteiramente novo e geral para o calculo completo dos systemas ⁽⁵⁾ sob os dois aspectos geraes, acima apontados.

Entre as consequencias d'esse theorema, a proposição de Menabrea: o *teorema del minimo lavoro di deformazione*, pelas suas applicações ao calculo das forças de ligação nos systemas superabundantes externamente, exige citação especial.

Podemos, aliás, resolver por aquelles theoremas o problema das deformações elasticas e calorificas, pois, Flamard, na sua these classica ⁽⁶⁾, estende-os ás deformações calorificas.

O segundo processo que emana do theorema das forças vivas e que vamos expôr nesta these é devido a Fontviolant ⁽⁷⁾ que o indicou pela primeira vez em 1888 e cuja ultima exposição data de 1919, sendo mais geral e mais simples, consistindo em tomar como fundamento, o *teorema de Betti, Boussinesq e M. Levy* que dão os principios de reciprocidade de Maxwell ⁽⁸⁾ e que elle proprio enriquece com o estabelecimento de um complemento. Das formulas que permitem demonstrar esse theorema, conclue sua equação de elasticidade, isto é, a equação de Fontviolant, como a denomina L. Lecornu, em sua obra classica de Mecanica Racional ⁽⁹⁾.

Na exposição que, aqui, fazemos deixamos de lado aquelle theorema para resaltar melhor a equação de Fontviolant e suas innumeradas applicações,

(5) Vide: *Calcul des systèmes Élastiques de la Construction* par Ernest Flamard, 1918.

(6) *Méthodes nouvelles de la Statique des Constructions*, Nancy.

(7) *Les Méthodes Modernes de la Résistance des Matériaux*, 1919. Antes, elle a tinha exposto de modo mais longo, como elle reconhece (pag. 44) em outras memorias que lhe dão a prioridade, desde 1888: *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* t. CVII p. 383 e *Bulletin de la Société des Ingénieurs civils de France*: Agosto de 1888 e Março de 89.

(8) C. Maxwell: *On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames* (Philosophical Magazine, 1864).

(9) *Cours de Mécanique* par Léon Lecornu, t. III, 1918, pag. 45, n. 714.

affastando-nos, assim, ligeiramente das exposições feitas pelo illustre mathematico francez, bem como fazemos apresentação de lemmas preliminares que dão mais relevo ás proposições que servem de fundamento á deducção daquella equação.

Esse methodo, aliás, a não ser na Mecanica de *Lecornu* e, assim mesmo, exposto pelo theorema dos trabalhos virtuaes não figura, ainda, em obra classica. É o proprio *Fontviolant* quem o diz, no prefacio de sua obra sobre os *Methodos modernos em Resistencia dos Materiaes*, onde escreve que das quatro obras que trazem até 1919, os processos modernos, em França, a unica que cita sua equação é aquella Mecanica, as tres outras trazendo, apenas, os theoremas de *Castigliano* e o methodo de *Mohr*.⁽¹⁰⁾

Finalmente, decorrente do theorema dos trabalhos virtuaes surgio, em 1874, o processo de *Mohr*⁽¹¹⁾ que o applicou, pela primeira vez, ao calculo das deformações elasticas, methodo que se tornou, logo, classico pela vulgarisação que lhe deram as obras de *Müller Breslau* e *Camillo Guidi*: *Die neuren Methoden des Festigkeitslehre* e *Lezioni sulla Scienza delle Costruzioni*.

A exposição que fazemos hoje, de modo o mais simples e didactico possivel, da equação de *Fontviolant* e de suas applicações é, pensamos, serviço que prestamos aos technicos brasileiros.

Demais, as applicações como estão, aqui, feitas ás vigas rectas, quadros, arcos e reticulados planos, parece-nos que ainda não surgiram expostas no duplo problema do calculo das deformações e das forças de ligação, nem mesmo feitas pelo

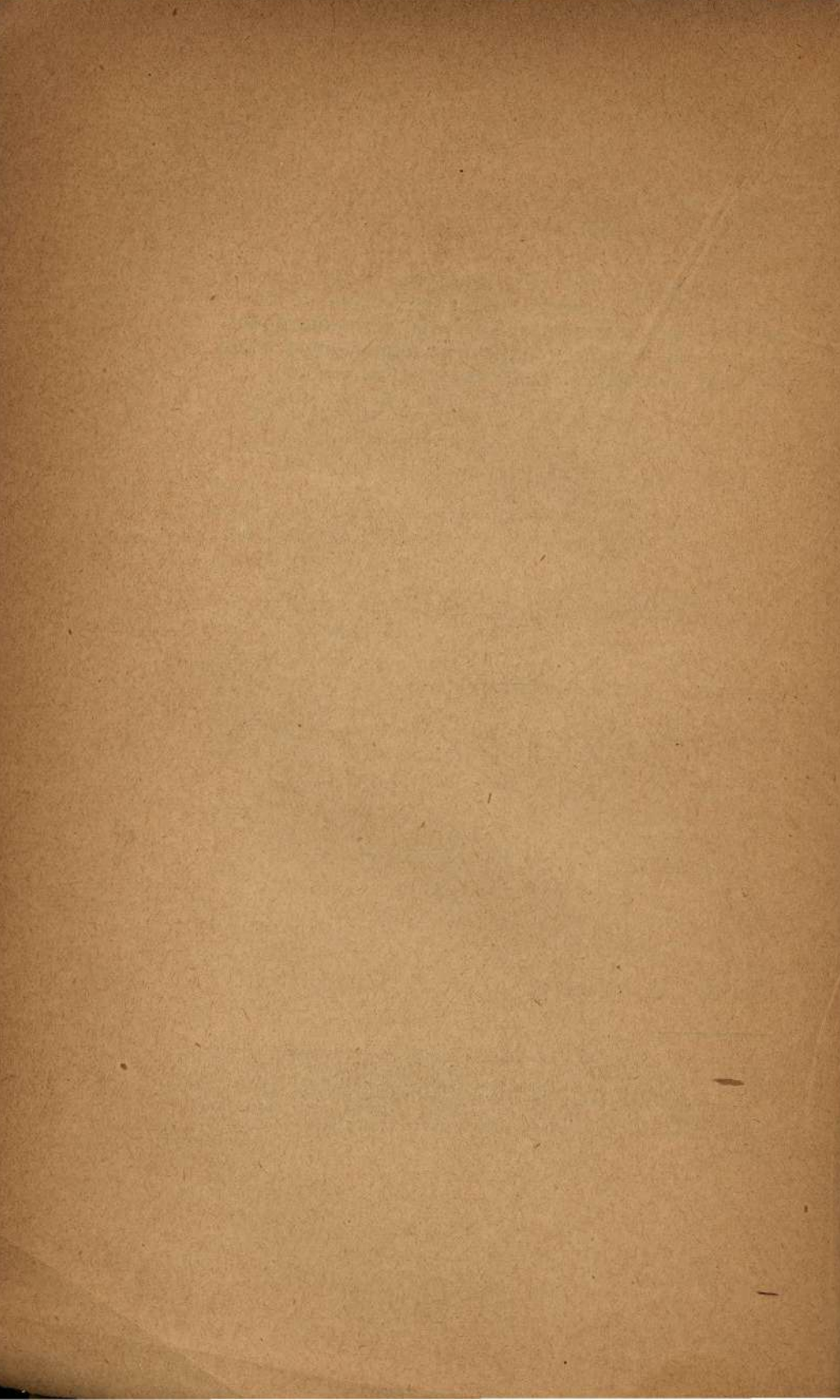
(10) Bertrand de Fontviolant, obra cit. 1919, pag. 2. A nova edição da *Resistencia dos Materiaes* de *Rabozée* já indica o methodo de Castigliano.

(11) *Beitrag zur Theorie des Bogenfachwerksträger* no *Zeitschrift der Architekten und Ingenieur Vereins zu Hannover*.

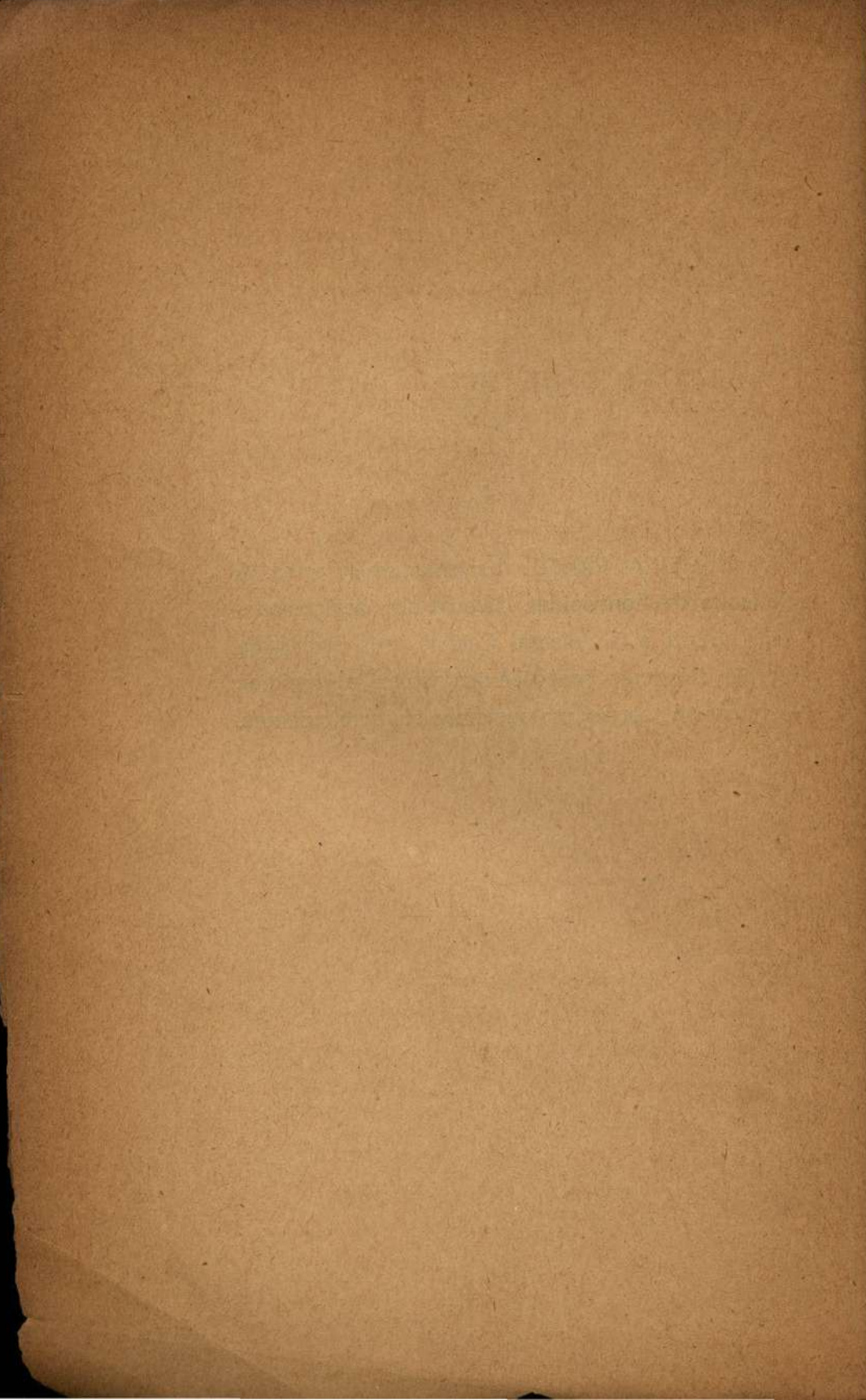
proprio auctor ⁽¹²⁾ que nas applicações (Methodos modernos, etc., pag. 41) recommenda a obra de Flamard.

Acompanhando esse trabalho, como fazemos sempre, da bibliographia que nos servio de base, facilitamos o julgamento da these. Por ella, poder-se-á, assim, cotejar a exposição que vamos fazer em suas qualidades, ou seus defeitos.

(12) A respeito, só conhecemos os estudos que Fontviolant fez sobre os arcos elasticos na sua *Resistencia dos Materiaes* (Methodos novos) e sua bella memoria sobre o *Calcul des Ponts Circulaires a une seul travée, etc. Compte rendu des travaux de la Société des Ingenieurs civils de France* Julho, Setembro de 1920. Mas, nesses trabalhos, o illustre auctor tinha outro objectivo do nosso, que é o de procurar relações conhecidas por processo novo.



PRIMEIRA PARTE: Lemmas preliminares. A
Equação de Fontviolant. Calculo dos deslocamen-
tos lineares e angulares. Calculo das forças de
ligação exteriores (reacções nos apoios) e interiores
(esforços nas barras) nos systemas superabundantes.



PRIMEIRA PARTE

A EQUAÇÃO DE FONTVIOLANT

ESTUDO PRELIMINAR — PROPRIEDADES DO
POTENCIAL INTERNO EM UM CORPO, OU
SYSTEMA DE CORPOS DEFORMADOS.

LEMMA PRIMEIRO (CLAPEYRON)

Seja um corpo, ou systemas de corpos isostaticos, ou hyperstaticos, no qual se imagina agindo certo conjuncto exterior de n forças F e conjugados C .

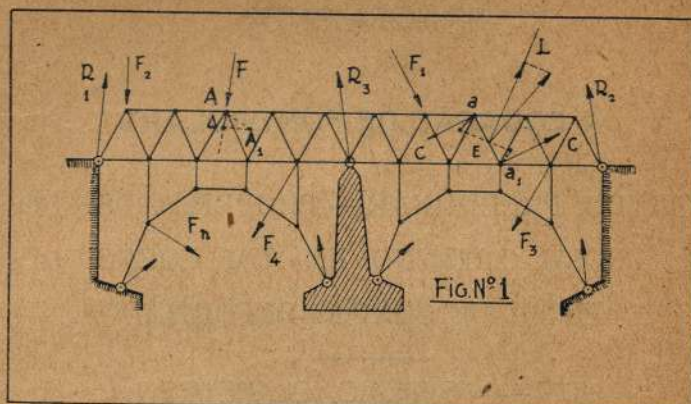
Dessa solicitação decorre certa deformação elastica no corpo, ou systemas de corpos, manifestada do seguinte modo:

Tomando-se, por exemplo, o ponto A , onde age a força F , vê-se que elle soffre certo deslocamento elastico absoluto AA_1 , e considerando-se em a a_1 determinada recta, sobre a influencia das forças e conjugados, essa recta tomará certo movimento de rotação elastica absoluta (fig. 1).

Chamemos de modo geral:

4—a projecção do deslocamento elastico $A A_1$ do ponto A de applicação da força, sobre a propria direcção da força.

Θ —a projecção do vector representativo da rotação elástica da recta a a_1 sobre o eixo L do conjugado C , no qual é marcado, como se sabe, o vector representativo do momento do conjugado.



Ora qualquer que seja o systema, existem forças R de ligação exteriores, nos apoios e cargas propriamente ditas, F .

O trabalho que as primeiras executam, como é facil vêr, é essencialmente nullo, desde que sejam rigidos os apoios.

Chamemos de :

π —o potencial interno armazenado no corpo, ou systemas de corpos deformados.

T —o trabalho executado durante a deformação pelas forças e conjugados exteriores.

Appliquemos a equação das forças vivas.

Ora, o systema partindo do repouso (imaginamos as forças e os conjugados partindo, inicialmente, de valores nullos e crescendo, continuamente, aos valores finais F e C) e chegando á uma situação de repouso, após o fim da deformação elas-

tica, sabemos, por aquella equação, que o trabalho executado será nullo. Como o trabalho das forças e conjugados exteriores é T e o das forças interiores tem, exactamente, o valor contrario ao trabalho de deformação do corpo, visto nascerem como reacções á acções externas, temos,

$$(1) \dots\dots\dots T - \pi = 0$$

Assim:

Lemma primeiro — As forças e conjugados exteriores directamente applicadas a um corpo, ou systema de corpos, produzem pela deformação que executam um trabalho igual ao potencial interno do corpo deformado.

Dessa applicação da equação das forças vivas concluimos ainda, que o trabalho executado pelas forças externas não depende senão do estado final de deformação, desde que as forças partam de zero e cheguem (*aliás de qualquer modo de variação continua*) aos valores finaes, o mesmo se dando com os conjugados.

É um corollario notavel e que nos vae servir para a demonstração do segundo *lemma*.

SEGUNDO LEMMA (CLAPEYRON)

Em virtude desse resultado, qualquer variação continua que seja dada ás forças e conjugados (F e C) partindo de zero e chegando a (F' e C') pode ser acceito.

Assim sendo, seja λ um numero qualquer positivo e variavel entre 0 e 1. Pode-se suppôr que a variação se faça pela lei da proporcionalidade λF e $\lambda \mu$, μ sendo o momento do conjugado C .

Ora, uma vez definido λ como foi, aquelles valores iniciaes e finaes serão attingidos.

Segundo o principio da superposição dos efeitos elasticos das forças, pode-se, dada a variação admittida, tomar para os deslocamentos os valores λA e $\lambda \theta$, tendo λ a mesma significação.

Imaginemos, agora, determinado instante e figuremos a passagem ao tempo infinitamente visinho. As forças e conjugados tomarão accrescimos infinitesimales de $d(\lambda F)$ e $d(\lambda \mu)$ e os deslocamentos lineares e angulares projectados variam de $d(\lambda A)$ e $d(\lambda \theta)$.

O trabalho infinitamente pequeno executado será:

$$dT = \sum_1^n (\lambda F) d(\lambda A) + \sum_1^n (\lambda \mu) d(\lambda \theta)$$

ou:

$$dT = \left(\sum_1^n F A + \sum_1^n \mu \theta \right) \lambda d\lambda$$

E o trabalho total será:

$$T = \left(\sum_1^n F A + \sum_1^n \mu \theta \right) \int_0^1 \lambda d\lambda$$

Ou

$$T = \frac{1}{2} \left(\sum_1^n F A + \sum_1^n \mu \theta \right)$$

Substituindo em (1), vem :

$$(2) \dots \pi = \frac{1}{2} \left(\sum_1^n F\Delta + \sum_1^n \mu\Theta \right)$$

É a equação de *Clapeyron*, sob forma analytical. Ella constitue o nosso :

Lemma segundo. O potencial interno do corpo, ou systema de corpos deformados pelo conjunto de n forças e conjugados (F e C) variaveis de zero a (F e C) em determinado tempo, é igual á metade do que seria executado se essas forças e conjugados produzissem as mesmas deformações, porém, de modo instantaneo (tempo de applicação nullo).

LEMMA TERCEIRO

ou Lemma dos tres potenciaes internos relativos a dois systemas de forças e conjugados (Fontviolant).

Seja um corpo, ou systema de corpos isotropos, ou de fibra media, isostatico, ou hyperestatico. Vamos imaginar applicado ao *systema dois conjunctos de n e m forças differentes*. Denominaremos esses dois grupos de systemas A e B . Applicando-se o systema A , tem-se no corpo, ou systema de corpos, um potencial π_A e applicando o systema B , tem-se em π_B o potencial interno correlativo. A applicação dos systemas A e B , simultaneamente, faz nascer terceiro potencial π_{AB} .

Existe relação notavel entre esses *tres potenciaes* e que será estabelecida agora, num raciocinio parcellado:

a) *Estudo da deformação com o systema A.*

Sejam :

F_A : uma força qualquer do systema A .

A : o ponto de applicação.

D_A : sua direcção.

Δ_A a projecção do deslocamento linear e elastico do ponto A , sobre a direcção D_A .

Em virtude de (2) temos:

$$(3). \dots \pi_A = \frac{1}{2} \sum_1^n F_A \Delta_A$$

b) *Estudo da deformação com o systema B .*

Analogamente, chamaremos de :

F_B : uma força qualquer do systema B

B : seu ponto de applicação.

D_B : sua direcção.

Δ_B : a projecção do deslocamento linear e elastico, etc.

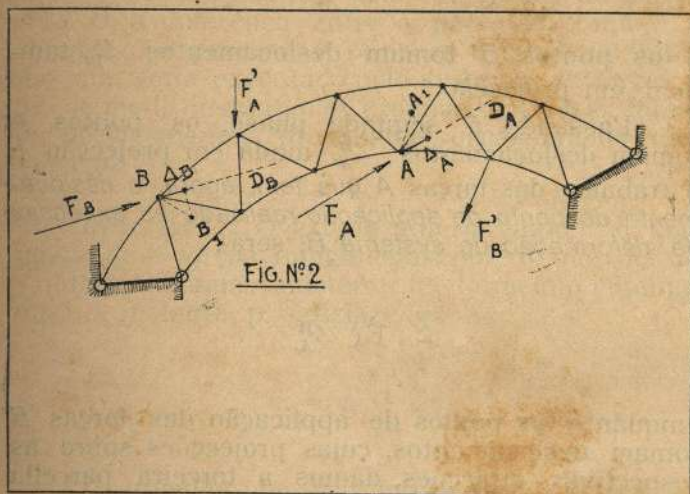
Teremos pela mesma equação :

$$(4). \dots \pi_B = \frac{1}{2} \sum_1^m F_B \Delta_B$$

c) *Estudo da deformação produzida pelo conjunto (A, B)*

Como os pontos A e B (fig. 2) são diferentes, a applicação do systema A ao corpo, ou systema de corpos, deformando-o de modo geral,

existirá um deslocamento no ponto B e vice-versa, o systema B applicado trará deslocamento em A . Assim sendo, temos a considerar em Δ_A^B a projecção sobre a direcção D_A do deslocamento elastico do ponto A sob a acção do systema de forças B .



Vejam, agora, a deformação do conjuncto (A, B) , calculando o deslocamento elastico do ponto A em projecção sobre D_A .

Ora, pelo principio da superposição dos effeitos esse deslocamento será a somma dos deslocamentos parciaes, ou $\Delta_A + \Delta_A^B$.

Podemos obter essa deformação em duas phases do seguinte modo:

Appliquemos, inicialmente, o systema A no qual as forças crescem de zero aos valores finais e depois o systema B em condições identicas.

Ora, durante a primeira phase, os pontos A de applicação do systema de forças A tomam

deslocamentos Δ_A em projecção e o trabalho dessas forças será (2):

$$\frac{1}{2} \sum_1^n F_A \Delta_A$$

e os pontos B tomam deslocamentos Δ_B^A , também, em projecção.

Passando á segunda phase, os pontos A tomam deslocamentos Δ_A^B , ainda em projecção e o trabalho das forças A que tem, agora, o deslocamento do ponto de applicação realizado ás expensas da deformação do systema B , será:

$$\sum_1^n F_A \Delta_A^B$$

enquanto os pontos de applicação das forças B tomam deslocamentos, cujas projecções sobre as respectivas direcções, dá-nos a terceira parcella de trabalho executado pelos systemas simultaneos A e B :

$$\frac{1}{2} \sum_1^m F_B \Delta_B$$

Por consequencia, o potencial $\pi_{A,B}$ será (form. 1)

$$(5) \quad \frac{1}{2} \sum_1^n F_A \Delta_A + \sum_1^n F_A \Delta_A^B + \frac{1}{2} \sum_1^m F_B \Delta_B = \pi_{A,B}$$

Subtrahindo (3) e (4) de (5), vem:

$$(6) \quad \dots \sum_1^n F_A \Delta_A^B = \pi_{A,B} - (\pi_A + \pi_B)$$

É a formula procurada. Dahi, o

Lemma terceiro. — Applicando-se, successivamente, a um corpo isotropo, ou de fibra media, ou a um systema de semelhantes corpos, isostatico, ou hyperestatico, dois conjunctos de forças A e B , a differença entre o potencial total e a somma dos potenciaes parciaes é igual ao trabalho que seria executado pelo systema de forças A se, de modo instantaneo, produzissem essas forças os deslocamentos projectados occasionados pelo systema B .

Observação. O estudo anterior suppoz o conjuncto de n forças. Imaginemos, porém, que dessas n forças, algumas existam que formem q conjugados, o restante p satisfazendo a :

$$n = p + 2q$$

O trabalho que duas forças, formando um binario, realisam, como se sabé de Mecanica, pode ser escripto em funcção do momento do conjugado pelo producto $M\theta$, θ sendo a projecção do vector representativo da rotaçáo elastica da recta que liga os pontos de applicação das forças, sobre o eixo do conjugado C e M o momento do mesmo.

Designando, analogamente, por M_A e M_B os momentos, substituindo F_A , F_B e θ_A , θ_B e θ_A^B os deslocamentos angulares projectados, em vez dos Δ , relativos aos deslocamentos lineares, temos :

$$(7). \dots \sum_1^p F_A \Delta_A^B + \sum_1^q M_A \theta_A^B = \pi_{AB} - (\pi_A + \pi_B)$$

LEMMA QUARTO

ou Lemma dos deslocamentos elasticos e das forças de dois systemas (Fontviolant).

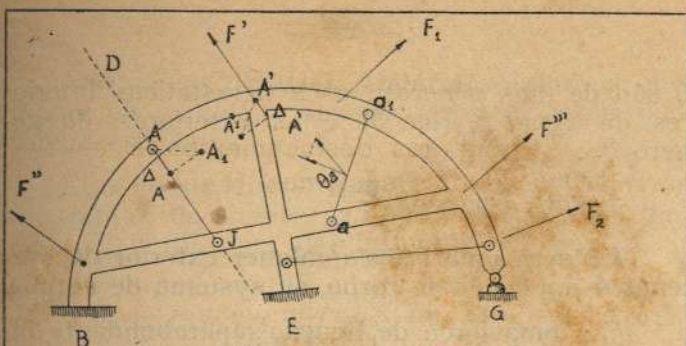
Seja um corpo, ou systema de corpos isotropos, ou de fibra media e hyperestatico interna e externamente (fig. 3). Abrangemos assim, toda a generalisação do raciocinio, pois, o systema isostatico pode ser considerado caso particular do hyperestatico.

Imaginemos, ainda como anteriormente, o systema deformado pelo conjuncto A qualquer de n forças F , taes que, num ponto A arbitrario, Δ_A represente o deslocamento de A projectado sobre a direcção D arbitrariamente escolhida nesse ponto e Θ_A projecção analoga dos vectores representativos das rotações elasticas soffridas pelas rectas, tal como aa_1 , sobre uma direcção tambem escolhida *ad libitum*, entre as direcções normaes áquellas rectas.

Transformemos o systema hyperestatico H num isostatico I pela suppressão das ligações superabundantes.

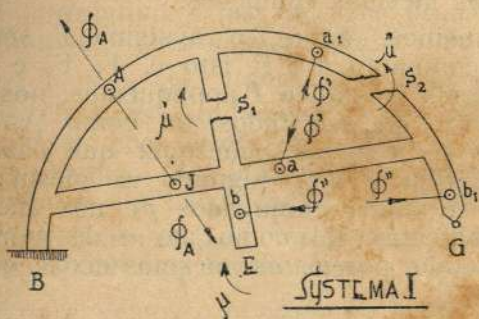
O leitor sabe que essa operação pode mesmo ser feita, conforme o numero e a natureza das ligações superabundantes de uma, ou mais maneiras. Por exemplo, a viga engastada nos extremos, pode ser tornada isostatica, ou pela suppressão dos dois momentos de engastamento (caso de dois apoios do primeiro genero), ou pela suppressão de um engaste (caso da viga em balanço, ou *cantilever*).

A operação feita, o systema isostatico trabalha igualmente como o hyperestatico, desde que ao systema I se addicione certo conjuncto B de forças iguaes ás forças de ligação retiradas e, naturalmente, incognitas *a priori*. Essas forças

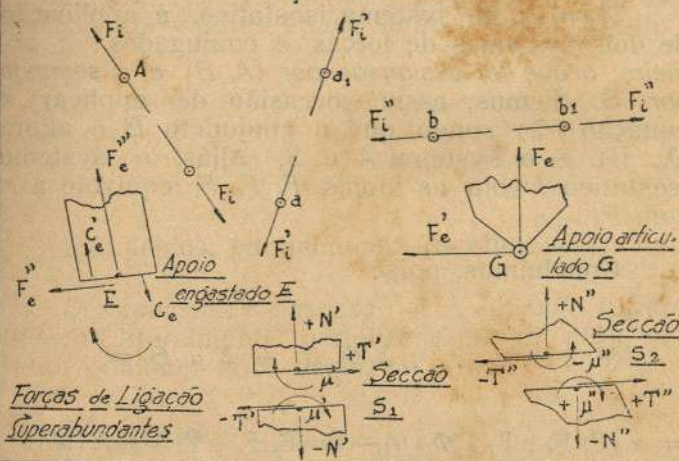


SYSTEMA H

FIG. Nº 3



SYSTEMA I



Forças de Ligação Superabundantes

Seccão S₁

Seccão S₂

Apoio articulado G lado G

Apoio engastado E

B são de dois generos: as hyperstaticas interiores do typo F_i (fig. 3) e as exteriores, do genero F_e .

Assim, resumindo:

F : será uma força qualquer exterior do systema A applicado ao corpo, ou systema de corpos.

F_i : uma força de ligação superabundante interior applicada ao systema I derivado do superabundante H .

F_e : uma força de ligação superabundante exterior nas mesmas condições.

Imaginemos, agora, o systema I sem as forças do conjuncto A e B , isto é, F , F_e e F_i e nesse systema isostatico I applicuemos, nos pontos, anteriormente escolhidos, tal como A , novo systema S de n forças quaesquer que chamaremos de auxiliares Φ_A , segundo as mesmas direcções D e ainda conjugados μ_a nos mesmos pontos das rectas, tal como aa_1 e de momento qualquer tendo, porém, os mesmos eixos que os conjugados C .

Haverá, no systema isostatico, a applicação de dois systemas de forças e conjugados: o primeiro, o que foi designado por (A, B) e o segundo por S . Temos, assim, occasião de applicar a equação (7) sendo que o conjuncto B é agora (A, B) e o systema A é S . Aliás, o systema isostatico I com as forças F, F_e, F_i equivale a H com F .

Concluimos, pois:

$$(8) \dots \dots \dots \Sigma \Phi \Delta + \Sigma \mu \Theta =$$
$$= \pi (F, F_e, F_i, \Phi, \mu) - [\pi (F, F_e, F_i) + \pi (\Phi, \mu)]$$

π sendo os diversos potenciaes internos que adquire o systema isostatico sob a acção dos systemas de força.

E' o nosso lemma quarto. Como é facil de vêr, trata-se de simples corollario do lemma terceiro. E' inutil, pois, dar-lhe enunciado novo.

EQUAÇÃO DE FONTVIOLANT

Consideremos, ainda, o mesmo systema hyperestatico, acima estudado H , o systema isostatico I correlativo e as mesmas projecções dos deslocamentos lineares e angulares Δ e Θ .

Os valores de Δ e Θ referem-se a deslocamentos elasticos produzidos pelos systemas de forças. Acontece, porém, que, além dessas deformações elasticas, existem as calorificas Δ_t e Θ_t provenientes das oscillações de temperatura.

Se quizermos, pois, ter generalidade na formula final devemos leval-as em conta.

Empreguemos o *principio da superposição dos effeitos*. Os valores finaes serão, evidentemente :

$$(9) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \Delta' = \Delta + \Delta_t \\ \Theta' = \Theta + \Theta_t \end{array} \right.$$

Estudemos, parcialmente, os effeitos :

Deslocamentos elasticos. — A equação (8) applicavel, literalmente, permite escrever para um ponto qualquer onde occorrem Δ e Θ :

$$(10) \dots \Sigma \Phi \Delta + \Sigma \mu \Theta = \pi(F, F_e, F_i, \Phi, \mu) \dots\dots\dots$$

de applicação. Esse trabalho, por definição mesmo de trabalho, é

$$(11) \dots\dots\dots \Sigma \Phi \Delta_t + \Sigma \mu \Theta_t$$

Por outro lado, as forças elasticas interiores que permanecem, tambem constantes, visto o systema ser supposto isostatico e portanto, *apresentar livre dilatação*, executam certo trabalho, facil de avaliar.

Effectivamente, o deslocamento produzido será pela lei de dilatação linear: $at dx$ para o comprimento dx , sendo a dilatação linear unitaria para a materia de que é feito o corpo.

Por outro lado, por definição de tensão elastica, a força será $\sigma_x (dy dz)$, $dy dz$ sendo a area correspondente.

Em consequencia, o trabalho total no paralelepipedo, executado pelas forças elasticas é:

$$\begin{aligned} & \sigma_x (dy dz) (-at dx) + \sigma_y (dz dx) (-at dy) + \\ & + \dots = -at (\sigma_x + \sigma_y \dots) dx dy dz. \end{aligned}$$

Para todo o systema é só integrar, extendendo a integração ao volume total occupado pelo systema de corpos.

Pela formula (1) esse trabalho deve ser igual a (11).

Portanto:

$$(12) \dots\dots \Sigma \Phi \Delta_t + \Sigma \mu \Theta_t = -at \iiint (\sigma_x + \sigma_y \dots) dx dy dz$$

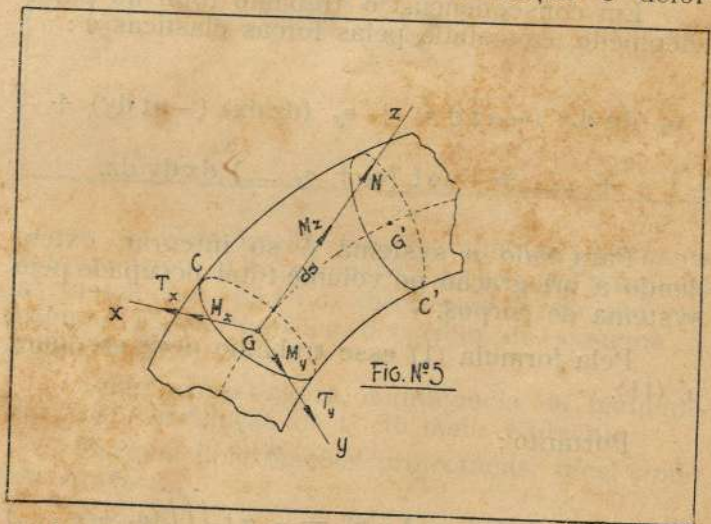
Sommando-se, membro a membro, as relações (12) e (10) e fazendo uso de (9) na somma final, vem:

$$\Sigma \Phi \Delta' + \Sigma \mu \Theta' = \pi (F, F_e \dots \mu) - [\pi (F, F_e, F_i) + \pi (\Phi, \mu)] - \alpha t \iiint (\sigma_x + \dots) dx dy dz.$$

E' a equação de Fontviolant.

CASOS PARTICULARES. CORPO DE FIBRA MEDIA. ESTUDO DO POTENCIAL.

Seja (fig. 5) *C* a secção em um corpo de fibra media e figuremos em *C'* a secção *C* defor-



mada nas condições classicas de Resistencia dos Materiaes.

Nesse deslocamento CC' as forças elasticas applicadas entre C e C' executam certo trabalho. Chamemos o quociente desse trabalho elementar pelo elemento ds de fibra media de ϱ . O trabalho das forças elasticas entre C e C' será ϱds e para todo o corpo.

$$(12 a) \dots \dots \pi = \int_0^s \varrho ds$$

Calculemos ϱ .

Ora, de modo geral, os elementos de redução ao centro de gravidade G da secção C do corpo, agem sob forma de forças e conjugados, taes como :

N — força normal á secção e segundo Gz .

T_x e T_y — as componentes do esforço cortante segundo as direcções Gx e Gy .

M_x , M_y , M_z — os momentos dos tres conjugados, cujos eixos são dirigidos segundo os tres eixos coordenados.

Sejam, ainda :

Ω : a area da secção C .

E : o modulo de elasticidade longitudinal

G : o modulo de elasticidade transversal

I_x , I_y e I_z os momentos de inercia relativos aos tres eixos Gx , Gy Gz , o ultimo sendo momento de inercia polar relativo a G .

ε o coefficiente ⁽¹⁾ que surge no cisalhamento transversal proveniente da não uniformidade de

(1) Vide as obras classicas de Guidi e Föppl.

distribuição desse esforço. Como observa Flamard (Calcul des Systèmes Élastiques de la Construction, pag. 4) pode-se considerar para uma fibra, como modulo de elasticidade transversal $\frac{G}{\varepsilon}$ para levar em conta esse facto. Aliás, affastamo-nos, aqui, de Fontvioland que não considera esse coefficiente.

Temos, para trabalho de uma das forças N , por exemplo, $\frac{1}{2} N (\Delta ds)$ imaginando-se que a applicação de N se faça com a variação de zero a N , Δds sendo o alongamento, ou encurtamento, dado pela lei de Hooke. Como Δds é igual a

$\frac{Nds}{E\Omega}$, concluímos:

$$(12\ b) \quad \varrho = \frac{1}{2\Omega} \left(\frac{N^2}{E} + \frac{\varepsilon_x T_x^2}{G} + \frac{\varepsilon_y T_y^2}{G} + \right. \\ \left. + \frac{M_x^2}{E \varrho_x^2} + \frac{M_y^2}{E \varrho_y^2} + \dots \right)$$

$\varrho_x, \varrho_y, \varrho_z$ sendo os raios de giração.

Isto posto, retomemos o nosso corpo isotropo, ou de fibra media, solicitado pelo conjunto (A, B) de forças F, F_0 e F_i e sejam:

$$N, T_x, T_y, M_x, \dots$$

os elementos de redução ao centro de gravidade da secção C.

De modo analogo, imaginemos, a applicação do systema auxiliar S dando na secção C as forças e conjugados :

$$N^s, T_x^s, T_y^s, M_x^s, \dots$$

Pela superposição dos efeitos quando existir a applicação simultanea dos systemas (A, B) e S , teremos na secção C :

$$N + N^s, \dots, M_x + M_x^s, \dots$$

Ora, pela formula (12 a):

$$(13) \quad \pi (F, F_e, F_i) = \int_{o_2}^{s_1} \frac{1}{2} \varrho (F, F_e, F_i) ds$$

Sendo:

$$\varrho (F, F_e, F_i) = \frac{1}{2} \left(\frac{N^2}{E\Omega} + \frac{\epsilon T_x^2}{G\Omega} + \dots \right)$$

Para passar do valor de $\varrho (F, F_e, F_i)$ do systema F, F_e, F_i aos valores $\varrho (\Phi, \mu)$ e $\varrho (F, F_e, F_i, \Phi, \mu)$ é só substituir

$$N, T_x, T_y, \dots$$

por

$$N^s, T_x^s, T_y^s, \dots$$

e por

$$N + N^s, T + T_x^s, \dots$$

Ora, um theorema de Euler sobre as funcções homogeneas da Analyse Infinitesimal ⁽¹⁾ permite escrever :

$$(14) \dots \varrho (F, F_e, F_i, \Phi, \mu) - [\varrho (F, F_e, F_i) + \varrho (\Phi, \mu)] = N^s \frac{\delta \varrho (F, F_e, F_i)}{\delta N} + T_x^s \frac{\delta \varrho (F, F_e, F_i)}{\delta T_x} + \dots$$

Ou, ainda, trazendo as derivadas parciaes por seus valores tirados de (12 b), o segundo membro se escreve :

$$N^s \frac{N}{E \Omega} + T_x^s \frac{\epsilon_x T_x}{G \Omega} + \dots$$

Como a formula (12 a) permite escrever :

$$\pi (F, F_e, F_i, \Phi, \mu) - [\pi (F, F_e, F_i) + \pi (\Phi, \mu)] = \int_0^s \left\{ \varrho (F, F_e \dots \mu) - [\varrho (F, .. F_i) + \varrho (\Phi, \mu)] \right\} ds$$

Concluimos :

$$\begin{aligned} \pi (F \dots \mu) - [\pi (F \dots F_i) + \pi (\Phi, \mu)] &= \\ = \int_0^s \left(N^s \frac{N}{E \Omega} + T_x^s \frac{\epsilon_x T_x}{G \Omega} + \dots \right) ds \end{aligned}$$

(1) Cours de Calcul Différentiel et Intégral — J. A. Serret, 6.^e ed., t. I pag. 197.

A equação de Fontviolant se escreve, deixando de lado o termo da temperatura:

$$\Sigma \Phi \Delta + \Sigma \mu \Theta = \int_0^s \left(N^s \frac{N}{E \Omega} + \dots + M_x^s \frac{M_x}{EI_x} + \dots \right) ds$$

Nessa formula: Φ , μ , N^s M_x^s ... dizem respeito ao conjuncto S de forças e conjugados Φ e μ applicado ao systema isostatico; Δ , Θ , N , M_x ao conjuncto (A, B) das forças F , F_e , F_i .

Efeito da temperatura. Deixamos de lado o termo relativo á temperatura. Se quizessemos levar em conta, era só observar a influencia na extensão ds entre C e C' imaginando o systema isostatico I deduzido de H pela suppressão das ligações superabundantes e o systema I estando sollicitado pelo conjuncto S de Φ e μ . O termo seria, como é facil vêr: $-\alpha t \int_0^s N^s ds$.

CASO DE FLEXÃO COMPOSTA PLANA

Existem, apenas, os elementos N , T e M do esforço longitudinal, esforço cortante e momento de flexão.

A formula se escreve:

$$(15) \dots \Sigma \Phi \Delta + \Sigma \mu \Theta = \int_0^s N^s \frac{N}{E \Omega} + T^s \frac{\epsilon T}{G \Omega} + M^s \frac{M}{EI} ds$$

SOLUÇÃO GERAL DOS DESLOCAMENTOS
LINEARES E ANGULARES
NAS DEFORMAÇÕES DOS SYSTEMAS

1.^a Questão: *Deslocamento linear*

Calculemos o deslocamento linear Δ d'um ponto qualquer projectado sobre a direcção D , arbitrariamente escolhida,

E' de modo particular o calculo das flexas nas vigas rectas e arcos.

Imaginemos, então, o systema S de forças e conjugados Φ e μ auxiliares, reduzido a uma unica força Φ igual á unidade.

A equação de Fontviolant se escreve:

$$(16) \dots \Delta = \int_0^s \left(N^s \frac{N}{E \Omega} + T^s \frac{\epsilon_x T_x}{G \Omega} + \dots \right) ds$$

E' a formula geral. Aliás, poderíamos usar Φ qualquer dividindo o segundo membro por Φ como faz Fontviolant, embora sem vantagem nas applicações.

Se, apenas, existir flexão simples, como no caso das vigas rectas ⁽¹⁾, teremos:

$$(17) \dots \Delta = \int_0^l \left[T^s \left(\frac{\epsilon T}{G \Omega} \right) + M^s \left(\frac{M}{EI} \right) \right] dx$$

l sendo o vão e o eixo longitudinal sendo o eixo do x .

(1) No excellente trabalho das "Peças engastadas" do illustre eng. japonês *F. Takabeja* (1926), encontra-se a influencia da força normal N , até hoje desprezada. *Takabeja* é levado a classificar as peças como "movilmente engastadas, ou não".

2.^a Questão — *Calculo das rotações.*

Do mesmo modo, se quizermos a rotação θ relativa a uma recta aa_1 é só imaginarmos o systema de forças auxiliares S reduzido a um unico conjugado de momento $\mu = 1$. Teremos :

$$(18) \dots\dots\dots \theta = \int_0^s \left(N^s \frac{N}{E \Omega} + \dots\dots\dots \right. \\ \left. + M_x^s \frac{M_x}{E I_x} + \dots \right) ds$$

Analogamente, poderíamos escrever a mesma formula em flexão simples.

Partindo da equação de Fontviolant pode-se obter os deslocamentos Δ e θ em funcção dos potenciaes. Essas expressões obtidas por Flamar e muito elegantes, foram por elle demonstradas em sua notavel these de doutorado e Fontviolant indica, na sua obra citada sobre os *Methodos Modernos*, demonstrações novas (pag. 60).

SOLUÇÃO GERAL DO CALCULO DAS FORÇAS
DE LIGAÇÃO SUPERABUNDANTES
NOS SYSTEMAS HYPERESTATICOS INTERNA
E EXTERMAMENTE

Estudemos o caso do corpo de fibra media, o mais empregado na pratica. A marcha é aliás, geral.

Retomemos o systema S , porém, decompondo-o em:

1) Um systema Φ_e e μ_e de forças e conjugados de valores arbitrarios applicados no systema isos-

tatico / tendo as mesmas direcções que as direcções e eixos das forças e conjugados de forças F_e do systema B .

2) Um systema $\Phi_i \mu_i$ analogo para as forças correspondentes a F_i no systema B .

A equação de Fontvioland se escreve:

$$(19) \dots \Sigma \Phi_e \Delta + \Sigma \Phi_i \Delta + \Sigma \mu_e \Theta + \Sigma \mu_i \Theta = \\ = \int_0^s (N^s \frac{N}{E\Omega} + \dots) ds$$

Ora, afirmamos que o primeiro membro é nullo.

De facto Δ e Θ se referem ao systema isostatico / deformado (fig. 4) pelo conjuncto (A, B) das forças F, F_e, F_i e portanto deformado de accordo com as deformações que pode soffrer o systema hyperestatico H .

Ora, nesse systema:

1°) nos apoios do primeiro e segundo genero não ha deslocamentos lineares:

2°) nos apoios do terceiro genero não ha rotações, nem deslocamentos lineares: Θ e Δ .

Assim, os Δ e Θ são nullos.

Quanto ás forças interiores e os conjugados, as primeiras são duas a duas iguaes e oppostas e applicadas aos pontos extremos de uma barra. Na somma que figura no primeiro membro de (19), á cada termo $\Phi_i \Delta$ corresponde um igual a $-\Phi_i \Delta$ que desaparecem na somma, o mesmo se dando com os dois termos que traduzem a acção de um conjugado μ_i no extremo da recta $\alpha_1 \alpha_1$.

A equação se escreve:

$$(20) \dots \int_0^s \left(N^s \frac{N}{E \Omega} + \dots \right) ds = 0$$

APPLICAÇÃO

Seja um systema com m forças superabundantes interna e externamente e n conjugados superabundantes em condições analogas.

Appliquemos, segundo as direcções das forças e dos eixos dos conjugados, m systemas de forças $\Phi = 1$ e n systemas de conjugados $\mu = 1$ formando $m + n$ systemas S , cujas applicações faremos *isoladamente*.

Para determinada secção C os elementos de reducção ao centro de gravidade provindo do systema total são dados por formulas do genero:

$$(21) \dots \left\{ \begin{array}{l} N^s = a_1 \Phi_1 + \dots + \beta_1 \mu_1 + \dots \\ T_x^s = \gamma_1 \Phi_1 + \dots + \delta_1 \mu_1 + \dots \\ M_x^s = \varepsilon_1 \Phi_1 + \dots + \eta_1 \mu_1 + \dots \end{array} \right.$$

Onde: $a_1 \beta_1 \gamma_1 \dots$ são funcções das coordenadas x, y, z do centro de gravidade.

As formulas (21) dizem respeito ao systema de $m + n$ forças e conjugados. Com systemas S de uma unica força, ou unico conjugado, nas condi-

ções que estamos usando, simplificam-se muito. Por exemplo, para o systema S_1 : $\Phi_1 = 1$, ter-se-ia $N^{S_1} = a_1$, $M_x^{S_1} = \varepsilon_1$, Para S_2 : $\Phi_2 = 1$, viria: $N^{S_2} = a_2$, (22).

Cada systema S dando, por (20), uma equação, teremos $m + n$ equações, a saber:

$$(23) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \int_0^S \left[a_1 \frac{N}{E \Omega} + \gamma_1 \frac{\varepsilon_x T_x}{G \Omega} + \dots \dots \dots \right] ds = \sigma \\ \dots \dots \dots \\ \int_G^S \left[\beta_1 \frac{N}{E \Omega} + \delta_1 \frac{\varepsilon_x T_x}{G \Omega} + \dots \dots \dots \right] ds = \sigma \end{array} \right.$$

São $m+n$ equações entre as $m+n$ incognitas superabundantes permitindo pela resolução do systema das equações escriptas determinar as $m+n$ incognitas.

OBSERVAÇÃO — O processo anterior relativo á applicação de $m+n$ systemas S differe do *methodo de Fontviolant* na forma, pois este auctor (obr. cit., *Meth. mod.*, pag. 64) applica *um só* systema S de $m+n$ forças. As formulas finaes são as mesmas, porém, a exposição, conforme o leitor verá nas applicações, fica mais clara. Demais, ha outra vantagem nesse raciocinio: é a lembrança que sempre traz do processo de *Castigliano*, cuja exposição, na realidade, é de feitio paralelo ao de *Fontviolant*, se o leitor nos da venia, para assim nos exprimirmos.

SIMPLIFICAÇÃO DO METHODO EXPOSTO

Fontviolant e os auctores que tratam dos systemas superabundantes pelos methodos de *Castigliano* e *Mohr* usam o systema / isostatico.

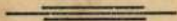
Ora, imaginemos $m+n$ incognitas superabundantes de modo tal que o systema I' com m forças incognitas possa ser resolvido, *a priori*. Teremos, naturalmente, os m valores em funcção dos n desconhecidos e de valores numericos dados.

O systema I' seria n vezes superabundante. Ora, como o systema I isostatico traz as forças agindo sobre elle, em identicas condições que o systema H , o raciocinio se applica, literalmente, ao systema I' .

Em summa: em vez do systema de equações lineares de $m+n$ incognitas pode-se usar, apenas, um systema de n equações lineares e n incognitas. A questão se simplifica.

Exemplo: a viga engastada em ambos os extremos pode ser tornada *isostatica* pela transformação em viga sobre dois apoios simples. E' o systema isostatico simples I . O estudo poderia, entretanto, ser feito pela reducção á um systema I' , apenas, com um engaste num dos extremos e para exposição didactica, poderíamos passar da viga sobre apoios simples, ao de um engaste e finalmente, deste estudo, ao do duplo engaste.

E' aliás, ño fundo, o raciocinio de recurrencecia que H. Poincaré chama de modo feliz: *um raciocinio em cascata*.



Os sistemas $m + n$ incógnitas superabundantes de modo tal que o sistema V com as suas incógnitas possa ser resolvido, e como tal, mais naturalmente, os m valores em função dos n desconhecidos e de valores numéricos dados.

O sistema V seria n vezes superabundante. Ora, como o sistema V satisfaz às condições dadas sobre ele em idénticas condições que o sistema IV o principio se applica literalmente ao sistema IV .

Em suma: em vez do sistema de equações lineares de $m + n$ incógnitas pode-se usar apenas um sistema de n equações lineares e n incógnitas. A questão se simplifica.

Exemplo: a vida passada em tipos os exemplos pode ser tomada isostática pela transformação em vida sobre dois eixos simples. O sistema isostático simples A do estudo poderia ser tratado sob este ponto de vista, e um sistema A apenas com um eixo e um dos eixos e para a expressão didáctica poderíamos passar da vida sobre eixos simples ao de um eixo e finalmente deste estado ao do duplo eixo.

É claro, no fundo, o principio de redundância que H. Poincaré chama de modo feliz: "un excès de conditions".

SIMPLIFICAÇÃO DO MÉTODO EXPOSTO

Forçados os autores que tratam de sistemas superabundantes a resolver os problemas de modo mais simples e mais fácil e claro.

SEGUNDA PARTE

APPLICAÇÕES

PRIMEIRA: VIGAS ENGASTADAS

Tomemos, como primeiro exemplo, o caso da viga engastada nos dois extremos e fazendo uma carga uniformemente distribuída. É o mais simples e também, o mais simples dos casos de vigas engastadas.

SEGUNDA PARTE. APPLICAÇÕES. - Estudo das vigas engastadas. Vigas Contínuas. Arcos. Reticulados planos completamente superabundantes. Quadros Rígidos.



apoiados existentes

reações ligadas A e B momentos e de

SEGUNDA PARTE. APLICACÕES - Estudos
das vigas engastadas. Vigas Contínuas. Arcos Re-
ticulados planos completamente superabundantes.
Quadros Rígidos.

SEGUNDA PARTE

APLICAÇÕES

PRIMEIRA: VIGAS ENGASTADAS

Tomemos, como primeiro exemplo, o caso muito corrente da viga engastada nos dois extremos e trazendo uma carga uniformemente distribuída. É o mais classico e, também, o mais simples dos casos de vigas engastadas.

Trata-se de systema superabundante externamente, como se vê na fig. 6, sendo p a carga por metro corrente.

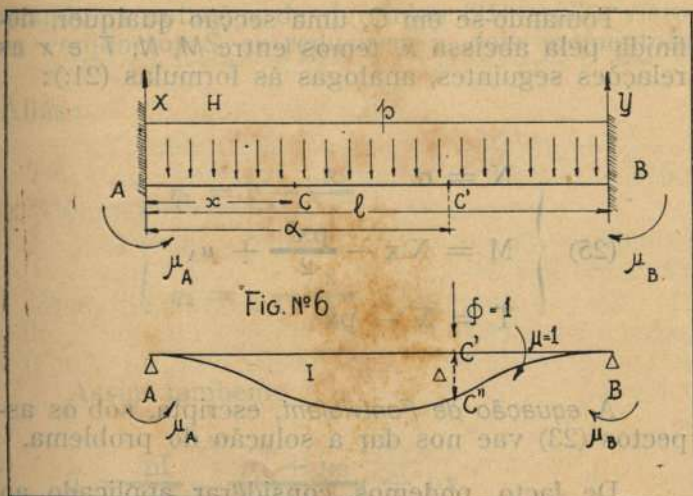


FIG. Nº 6

Nos apoios existem:

Duas reacções forças X e Y , incognitas a determinar.

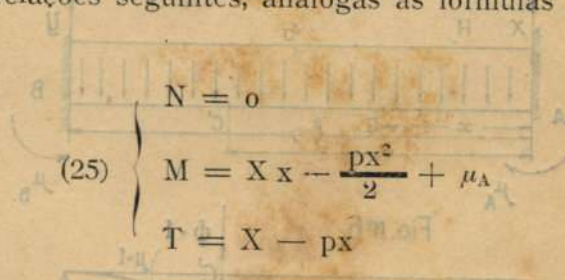
Dois momentos μ_A e μ_B , também desconhecidos, *a priori*.

As duas primeiras X e Y podem ser consideradas reacções estáticas, pois, as equações da *Estatica* permitem obtel-as em função dos momentos.

Os valores são, pela aplicação do theorema dos momentos, em relação a A e B :

$$(24) \quad \begin{cases} X = \frac{pl}{2} - \frac{\mu_A + \mu_B}{l} \\ Y = \frac{pl}{2} + \frac{\mu_A + \mu_B}{l} \end{cases}$$

Tomando-se em C , uma secção qualquer, definida pela abcissa x , temos entre M , N , T e x as relações seguintes, analogas ás formulas (21):



$$(25) \quad \begin{cases} N = 0 \\ M = Xx - \frac{px^2}{2} + \mu_A \\ T = X - px \end{cases}$$

A equação de *Fontviolant*, escripta, sob os aspectos (23) vae nos dar a solução do problema.

De facto, podemos considerar applicado ao systema dois conjunctos de forças, considerando-se como systema H superabundante: a viga engastada em A e B e systema I isostatico: a viga sobre dois apoios simples A e B .

Pelas nossas notações anteriores, teremos:

1) O conjuncto F das cargas exteriores, sendo a carga uniforme ρ .

O conjuncto F_1 não existe.

2) O systema F_e que se reduz a dois conjugados μ_A e μ_B .

Ora, substituindo em (25) X pelo seu valor (24), pode-se escrever:

$$M = \left(\frac{\rho l}{2} x - \frac{\rho x^2}{2} \right) - \mu_A \left(\frac{x}{1} - 1 \right) - \mu_B \frac{x}{1}$$

$$= \lambda + \eta_1 \mu_A + \eta_2 \mu_B$$

usando as notações das formulas (21) a (23), visto os conjunctos S se reduzirem a dois momentos.

Aliás:

$$\left. \begin{aligned} \eta_1 &= 1 - \frac{x}{1} \\ \eta_2 &= -\frac{x}{1} \end{aligned} \right\}$$

Assim tambem:

$$T = \frac{\rho l}{2} - \frac{\mu_A + \mu_B}{1} = \rho x$$

$$= \left(\frac{\rho l}{2} - \rho x \right) - \delta_1 \mu_A - \delta_2 \mu_B$$

Onde: δ_1 e δ_2 tem a significação anterior, sendo iguaes: $-\frac{1}{1}$

As formulas (23) se escrevem:

$$(26) \int_0^1 \frac{1}{EI} \left(\frac{pl}{2}x - \frac{px^2}{2} - \frac{\mu_A + \mu_B}{1}x + \mu_A \right) \left(1 - \frac{x}{1} \right) dx + \int_0^1 \frac{\varepsilon}{G\Omega} \left(\frac{pl}{2} - \frac{\mu_A + \mu_B}{1} - px \right) \left(-\frac{1}{1} \right) dx = 0$$

$$(27) \int_0^1 \frac{1}{EI} \left(\frac{pl}{2}x - \dots + \mu_A \right) \left(-\frac{x}{1} \right) dx + \int_0^1 \frac{\varepsilon}{G\Omega} \left(\frac{pl}{2} - \dots - px \right) \left(-\frac{1}{1} \right) dx = 0$$

São as duas equações que unidas às equações (24) resolvem o problema.

Se a secção Ω , E , I , G , forem constantes, a integração se faz immediatamente. E' o caso corrente da pratica.

Os resultados se simplificam, substituindo a primeira relação (26) pela diferença de (26) e (27) e conservando-se (27). Acha-se, após, as simplificações:

$$(28) \dots \left\{ \begin{aligned} (\mu_A - \mu_B) \frac{1}{2EI} + \frac{pl^3}{12EI} &= 0 \\ (2\mu_B - \mu_A) \frac{1}{6EI} - \frac{pl^3}{24EI} + \frac{\varepsilon}{G\Omega} (\mu_A + \mu_B) &= 0 \end{aligned} \right.$$

e finalmente:

$$(29) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \mu_A = - \frac{pl^2}{12} \\ \mu_B = + \frac{pl^2}{12} \end{array} \right.$$

Portanto, de (24), se conclue:

$$X = Y = \frac{pl}{2}$$

CALCULO DO DESLOCAMENTO LINEAR

Procuremos o deslocamento Δ no ponto C , de abscissa a .

A formula a empregar é (16).

Ora, tomando o systema I isostatico, vamos applicar no ponto C' a força $\Phi=1$ que constituirá o nosso systema S .

Calculemos os N^S , M^S Para isso, imaginaremos a viga sobre dois apoios simples e só com a carga Φ (fig. 6). Os momentos, variando segundo duas leis, conforme o ponto está entre A e C' e entre C' e B , concluímos:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1^S = \left(\frac{1-a}{l} \right) x \\ M_2^S = \left(\frac{1-a}{l} \right) x - (x-a) \end{array} \right.$$

visto $\Phi = 1$. Os coeficientes multiplicadores das fracções da formula (16) são, pois :

$$\left\{ \begin{array}{l} N_s = 0 \\ M_s = x - \frac{\alpha x}{l} \dots\dots \text{de } A \text{ a } C' \\ M_s = a \left(1 - \frac{x}{l} \right) \dots\dots \text{de } C' \text{ a } B \end{array} \right.$$

O resultado será :

$$(30) \Delta = \int_0^a \frac{1}{EI} \left(\frac{pl}{2} x - \frac{px^2}{2} - \frac{\mu_A + \mu_B}{l} x + \mu_A \right)$$

$$\left(1 - \frac{\alpha}{l} \right) x dx + \int_a^l \frac{1}{EI} \left(\frac{pl}{2} x - \dots \right) \left(1 - \frac{x}{l} \right) a dx +$$

$$+ \int_0^a \frac{\varepsilon}{G\Omega} \left(\frac{pl}{2} - \frac{\mu_A + \mu_B}{l} - px \right) \left(1 - \frac{\alpha}{l} \right) dx +$$

$$+ \int_a^l \frac{\varepsilon}{G\Omega} \left(\dots \right) \left(- \frac{\alpha}{l} \right) dx$$

Effectuando e suppondo G , E , l e Ω constantes, acharemos, após a substituição de μ_A e μ_B por seus valores :

$$\Delta = \frac{p\alpha^2}{24EI} (1 - a)^2 + \frac{\epsilon p \alpha}{2G\Omega} (1 - a)$$

Nos livros, o leitor encontra, geralmente, a flecha, para a qual $a = \frac{1}{2}$ com o primeiro termo,

sómente. A causa está na deducção, partindo da equação classica da linha elastica que, como se sabe, não é *uma equação exacta*. A formula anterior está indicada na obra citada sobre os systemas elasticos de *Flamard*, partindo das formulas de *Castigliano*.⁽¹⁾ Aliás, poderíamos completal-a com o termo que diz respeito á temperatura, sem falarmos na influencia desprezivel do *esforço longitudinal*, originado nos engastes. O leitor que se interessar por esse aspecto ultimo póde consultar a excellente obra de *Takabeya*, prof. da Universidade de Hokkaido (Japão) sobre as *Peças engastadas nas duas extremidades*.

CALCULO DA ROTAÇÃO

O estudo se faz do mesmo modo, unicamente em vez de se applicar na secção C , de abscissa α , a força $\Phi = 1$, applica-se o conjugado $\mu = 1$, constituindo elle o systema S .

Acha-se, após, calculo algebrico longo, porém, sem difficuldade de raciocinio :

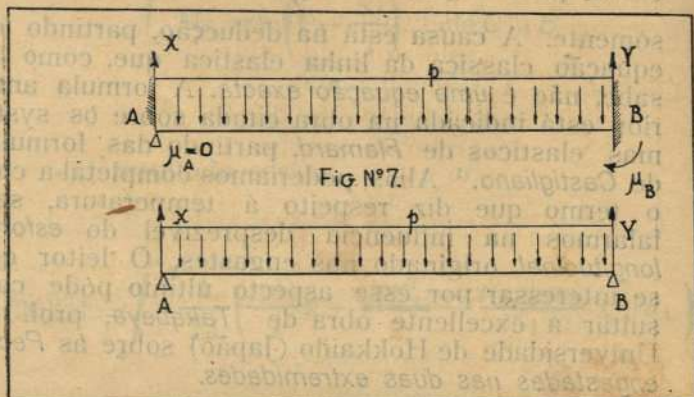
$$\Theta = \frac{p\alpha}{12EI} (1 - a)(1 - 2a)$$

(1) Vide, tambem, a pag. 31 da excellente obra do prof. de Vienna F. Hartmann: Die statisch unbestimmten Systeme, etc, 1922.

Vê-se, nesse caso, que o coeficiente ϵ do cisalhamento influe em Δ e não surge em Θ .

Casos Particulares

a) *Viga engastada num extremo e apoiada no outro.* Faz-se, por exemplo, $\mu_A = 0$ (onde está o apoio simples). As formulas (24), (25), (27) e (30) subsistem, fazendo-se: $\mu_A = 0$.



Viga sobre dois apoios simples. Faz-se, então, $\mu_A = \mu_B = 0$. As mesmas equações (24), (25) e (30) subsistem, fazendo-se essa hypothese.

Generalisação

Caso de distribuição continua qualquer. A marcha é a mesma. Nas equações (24) e (25), em vez dos termos em p , surgem outros que dependem da sobrecarga. A exposição, porém, fica a mesma, quer no cálculo das reacções μ superabundantes, quer no calculo dos deslocamentos Δ e Θ .

Caso das forças concentradas—A marcha geral, tambem nada soffre. Unicamente, é preciso

observar que a expressão do momento varia nos espaços entre as cargas. É preciso, pois, na integração, desdobrar a extensão de zero a 1, em diversos trechos, conforme o numero de cargas. É, aliás, o raciocínio que fizemos no calculo de Δ .

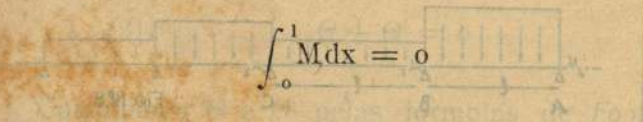
Outros Methodos :— Equações Syntheticas

Era possivel resolver o calculo da viga engastada por outros methodos conservando, entretanto, a applicação da *equação de Fontviolant*.

Por exemplo, tomando como systema I isostatico, a viga em balanço, ou com um engaste apenas, tendo a outra extremidade livre.

Não nos reteremos sobre essa marcha, inteiramente analogá á que vimos de apresentar.

O recurso, a que já nos referimos, do appello a systema I menos superabundante, merece reparo especial. Tomemos o systema superabundante do engaste em B e apoio simples em A . A applicação do systema S : $\mu = 1$, no ponto A desse systema I daria, evidentemente : $X = 0$, $Y = 0$, $\mu_B = \mu_A = 1$ (em valor absoluto). Donde : $M^S = 1$ e a *equação de Fontviolant* seria escripta de modo synthetico:


$$\int_0^1 M dx = 0$$

deixando de lado o termo do esforço cortante.

Aliás, sob a mesma condição, as equações (26) e (27) se escrevem:

$$\int_0^1 Mx dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 M(1-x) dx = 0$$

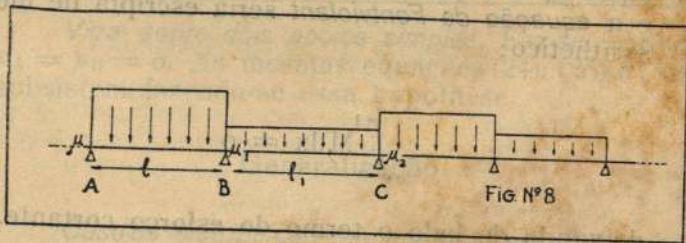
São as tres equações classicas, simples de deduzir pelos *theoremas de Castigliano*, ou pela linha elastica, porém, como se vê, não sendo rigorosamente exactas. Ellas synthetizam o estudo das vigas engastadas e são faceis de interpretar geometricamente.

SEGUNDA APPICAÇÃO: — VIGAS CONTINUAS

Não pretendemos expôr, aqui, o estudo das vigas continuas. Sabemos da existencia de methodos graphicos: *Mohr*, *Fontviolant*, etc., e de procesos analyticos: *Bertot* (*tres momentos*), *Castigliano*, *Maxwell*, etc.

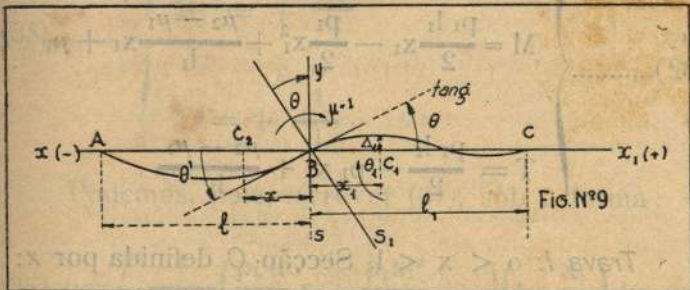
Vamos nos limitar á indicação da formula dos tres momentos, obtida pela equação de *Fontviolant*.

Seja a viga continua da fig. 8, com cargas uniformes, distribuidas nas diversas travas e apoios intermediarios do primeiro genero.



Procuremos a relação entre tres momentos consecutivos nos apoios da viga continua. Sabemos que, por essa relação, devida a *Clapeyron* e *Bertot*, é possivel achar os momentos nos apoios e, portanto, solucionar os problemas do calculo das forças de ligações exteriores e dos deslocamentos.

Ora, isolemos duas travas AB e BC consecutivas do todo e entre si. Sejam l , e l_1 os vãos μ , μ_1 e μ_2 os tres momentos, A, B e C os tres apoios. Estudemos o que se passa no ponto B.



Seja S a secção ahi, da viga continua. Ora, pela solicitação das travas AB e BC a secção S passa para S_1 tomando o movimento de rotação Θ .

Estudemos as duas travas. No ponto B, na primeira trava, a elastica, fará com a horizontal o angulo Θ' igual a Θ , salvo o signal, da trava seguinte a menos que ahi exista uma articulação. Temos, pois :

$$(31) \dots \dots \Theta + \Theta' = 0$$

Calculemos Θ e Θ' pelas formulas de Fontviolant (18). Tudo se resume no calculo de N^s , M^s , observando que a origem pode ser collocada em B e a integração da formula (18) pôde ser feita de o a l e de o a l_1 .

Ora, colloquemos em B o conjugado $\mu = 1$ constituindo o systema S.

As formulas que nos dão com as cargas, os elementos de redução ao centro de gravidade, são:

Trava l_1 : $0 < x_1 < l_1$. Secção C definida por x_1 :

$$(32) \dots \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ M = \frac{p_1 l_1}{2} x_1 - \frac{p_1}{2} x_1^2 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{l_1} x_1 + \mu_1 \\ T = \frac{p_1 l_1}{2} - p_1 x_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{l_1} \end{array} \right.$$

Trava l : $0 < x < l$. Secção C definida por x :

$$(33) \dots \left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ M = \frac{pl}{2} x - \frac{p}{2} x^2 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{l} x + \mu_1 \\ T = \frac{pl}{2} - px + \frac{\mu_2 - \mu_1}{l} \end{array} \right.$$

Com o conjugado: $\mu = 1$, constituindo o sistema S e nas vigas AB e BC as formulas anteriores subsistem, fazendo-se p igual a zero e $\mu_2 = \mu = 0$, $\mu_1 = 1$. Temos:

Trava l_1 : $0 < x_1 < l_1$

$$(34) \dots \left\{ \begin{array}{l} N^s = 0 \\ M^s = 1 - \frac{x_1}{l_1} \\ T^s = -\frac{1}{l_1} \end{array} \right.$$

Trava I: $0 < x < l$

$$(35) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} N^s = 0 \\ M^s = + \frac{x}{1} \\ T^s = + \frac{1}{1} \end{array} \right.$$

Podemos, pois, escrever (31), sob a forma :

$$(36) \dots 0 = \int_0^1 \frac{1}{E_1 I_1} \left(\frac{p_1 l_1}{2} x_1 - \frac{p_1 x_1^2}{2} + \dots \right) \left(1 - \frac{x_1}{l_1} \right) dx_1 +$$

$$+ \int_0^1 \frac{\varepsilon}{G_1 Q} \left(\frac{p_1 l_1}{2} - p_1 x_1 + \dots \right) \left(-\frac{1}{l_1} \right) dx_1 + \int_0^1 \frac{1}{E_1} \left(\frac{p_1}{2} x$$

$$- \dots \right) \left(\frac{x}{l_1} \right) dx + \int_0^1 \frac{\varepsilon}{G Q} \left(\frac{p_1}{2} - p x + \dots \right) \left(+\frac{1}{l_1} \right) dx$$

E'a equação generalizada dos tres momentos μ , μ_1 e μ_2 .

Poder-se-ia desenvolver, porém, não é nosso objectivo, aqui, senão indicar a solução pela equação de Fontviolant.

Seria, tambem, facil concluir d'ahi, a equação de M. Levy dos dois momentos, bem como a equação mais moderna dos cinco momentos quando os apoios são elasticamente deformaveis.

Observações — a) Se os apoios não são de niveis, ha lugar para os termos em N, pois, existe compressão longitudinal. A formula ficaria mais

longa e os termos novos, em numero de dois, poderiam ser avaliados com simplicidade.

b) Se em vez da carga uniforme, houvesse carga distribuida segundo a lei $p = f(x)$ ou, se houvesse cargas concentradas, ou mesmo, a superposição de ambas, a marcha nada soffreria.

Naturalmente, as cargas concentradas exigiriam o desdobramento das integraes, o leitor devendo iniciar o estudo, como sempre, escrevendo as equações (32) e (33) para as duas travas.

c) Na formula classica dos tres momentos, apenas, figuram os termos em M devido á demonstração partindo da *formula approximada* da linha elastica. O leitor que desejar obtel-a deve, em (36), annullar os termos provenientes de T , isto é, conservar, apenas, o primeiro e o terceiro.

d) Faz-se ainda as hypotheses particulares:

$E = E_1$ (travas de mesmo material) $\Omega = \Omega_1$,
 $I = I_1$ (mesma secção, nas diversas travas).

Calculo do deslocamento

O calculo dos deslocamentos é feito de modo simples.

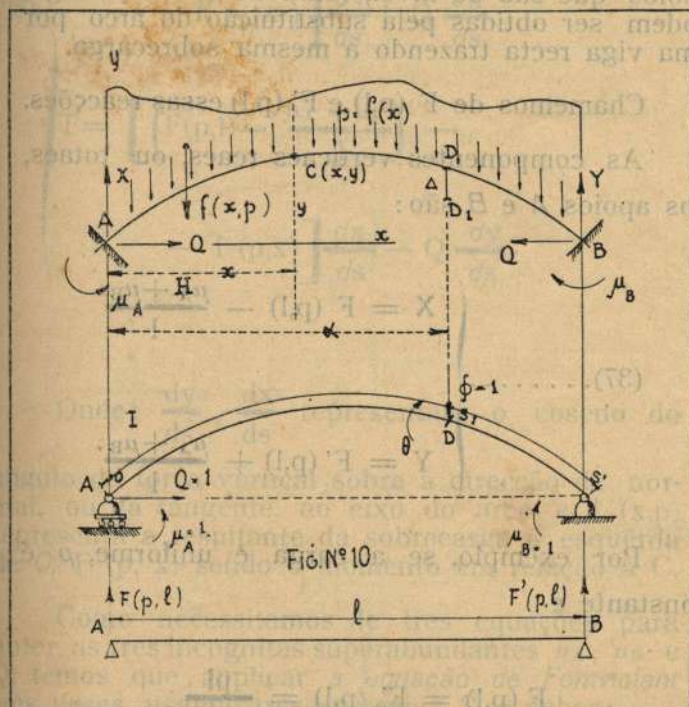
Por exemplo, calculemos na trava I_1 no ponto C_1 de abscissa x_1 , Δ_1 e θ_1 .

E' só considerarmos a trava isolada e collocarmos no ponto C_1 ou a força $\phi = 1$, ou conjugado $\mu = 1$, constituindo o systema S . O caso é inteiramente analogo ao da viga engastada e a applicação das formulas (16) e (18) resolve o problema.

O leitor que desejar as formulas finaes pôde consultar a excellente obra de Ernest Flamard, já muitas vezes citada, sobre os *Systemas elasticos das Construcções* (pag. 50).

TERCEIRA APPLICAÇÃO — ARCOS

Seja o arco engastado em ambas as extremidades, de alma cheia, constituindo *systema superabundante externamente H*. Tomemos o arco isostatico, representativo do nosso systema I, pela substituição do apoio (fig. 10) A (engaste) por apoio plano e de B (engaste) por uma rotula.



Sejam: μ_A e μ_B os momentos de engastamento.

Sabe-se que μ_A , μ_B e Q (componente horizontal das reacções, supposta a mesma nos apoios, para cargas verticais) constituem as incógnitas superabundantes.

Chamemos de :

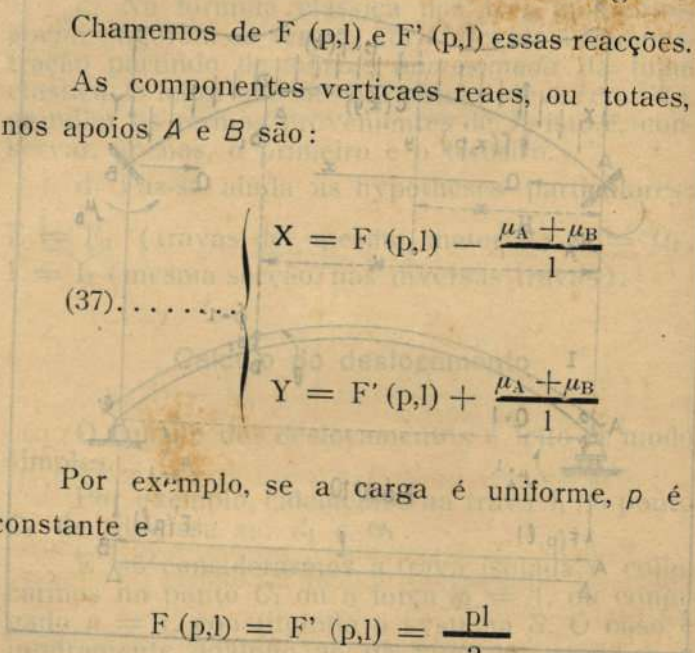
$$p = f(x)$$

a lei de variação das cargas.

As componentes verticaes das reacções nos apoios que são de nível, relativas á sobrecarga, podem ser obtidas pela substituição do arco por uma viga recta trazendo a mesma sobrecarga.

Chamemos de $F(p,l)$ e $F'(p,l)$ essas reacções.

As componentes verticaes reaes, ou totaes, nos apoios A e B são :


$$(37) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} X = F(p,l) - \frac{\mu_A + \mu_B}{l} \\ Y = F'(p,l) + \frac{\mu_A + \mu_B}{l} \end{array} \right.$$

Por exemplo, se a carga é uniforme, p é constante e

$$F(p,l) = F'(p,l) = \frac{pl}{2}$$

Na secção C do arco, tal que $0 < x < l$, sendo x a abscissa de C , temos, para os elementos de redução ao centro de gravidade, das forças á esquerda de C .

$$(38) \left\{ \begin{aligned} M &= \left[F(p,l) - \frac{\mu_A + \mu_B}{1} \right] x - F(p,x) + \mu_A - Qy \\ N &= \left[F(p,l) - \frac{\mu_A + \mu_B}{1} - \right. \\ &\quad \left. - f(p, x) \right] \frac{dy}{ds} + Q \frac{dx}{ds} \\ T &= \left[\left(F(p,l) - \frac{\mu_A + \mu_B}{1} \right) - \right. \\ &\quad \left. - f(p,x) \right] \frac{dx}{ds} - Q \frac{dy}{ds} \end{aligned} \right.$$

Onde: $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dx}{ds}$ representam o coseno do

ângulo da força vertical sobre a direcção da normal, ou da tangente, ao eixo do arco e $f(x,p)$ representa a resultante da sobrecarga á esquerda de C, $F(p, x)$ sendo o momento em relação a C.

Como necessitamos de tres equações para obter as tres incognitas superabundantes μ_A , μ_B e Q , temos que applicar a equação de Fontviolat tres vezes, usando tres systemas S, a saber:

1.º) Faremos: $\mu_A = 1$, $\mu_B = 0$, $Q = 0$ Systema S_1 . As cargas externas nullas.

Elementos de redução ao centro de gravidade da secção C das formulas (38):

$$(39) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} M^{S_1} = 1 - \frac{x}{l} \\ N^{S_1} = - \frac{1}{l} \frac{dy}{ds} \\ T^{S_1} = - \frac{1}{l} \frac{dx}{ds} \end{array} \right.$$

2.º Faremos: $\mu_B = 1, \mu_A = 0, Q = 0,$
Systema S_2

$$(40) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} M^{S_2} = - \frac{x}{l} \\ N^{S_2} = - \frac{1}{l} \frac{dy}{ds} \\ T^{S_2} = - \frac{1}{l} \frac{dx}{ds} \end{array} \right.$$

3.º Faremos: $\mu_B = 0, \mu_A = 0, Q = 1.$
Systema S_3

$$(41) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} M^{S_3} = - y \\ N^{S_3} = + \frac{dx}{ds} \\ T^{S_3} = + \frac{dy}{ds} \end{array} \right.$$

As equações de Fontviolant serão, portanto :

Primeira equação :

$$\int_0^s \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right) ds + \int_0^s \frac{N}{E\Omega} \left(-\frac{1}{l}\right) \frac{dy}{ds} ds + \int_0^s \frac{\epsilon T}{G\Omega}$$

$$\left(-\frac{1}{l}\right) \frac{dx}{ds} ds = 0$$

Segunda equação

$$\int_0^s \frac{M}{EI} \left(-\frac{x}{l}\right) ds + \int_0^s \frac{N}{E\Omega} \left(-\frac{1}{l}\right) \frac{dy}{ds} ds +$$

$$\int_0^s \frac{\epsilon T}{G\Omega} \left(-\frac{1}{l}\right) \frac{dx}{ds} ds = 0$$

Terceira equação :

$$\int_0^s \frac{M}{EI} (-y) ds + \int_0^s \frac{N}{E\Omega} \left(\frac{dx}{ds}\right) ds + \int_0^s \frac{\epsilon T}{G\Omega}$$

$$\left(-\frac{dy}{ds}\right) ds = 0$$

São tres equações a tres incognitas, postas em evidencia pela substituição de M , N e T pelos seus valores. O problema fica, assim, resolvido de modo synthetico.

Observação — Se quizermos levar em conta o efeito da temperatura, deveremos substituir: $\frac{N}{E\Omega}$ por $\frac{N}{E\Omega} - \alpha t$, α e t tendo as significações dadas na primeira parte desta obra.

Calculo dos Deslocamentos

Primeiro : 1 — *deslocamento linear* Δ . Procuremos o deslocamento vertical Δ no ponto D. Appliquemos, para isso, a força Φ vertical.

Sejam : x uma abscissa qualquer, a a abscissa rectilinea de D, s_1 a abscissa curvelinea desse ponto.

M , N e T os valores (38). Temos, para um ponto C, tal que : $0 < x < a$:

$$(42) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} M' = M + \Phi \left(1 - \frac{a}{l} \right) x \\ N' = N + \Phi \left(1 - \frac{a}{l} \right) \frac{dy}{ds} \\ T' = T + \Phi \left(1 - \frac{a}{l} \right) \frac{dx}{ds} \end{array} \right.$$

e para um ponto $a < x < l$:

$$(43) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} M' = M + \Phi \left(1 - \frac{x}{l} \right) a \\ N' = N - \Phi \frac{a}{l} \frac{dy}{ds} \\ T' = T - \Phi \frac{a}{l} \frac{dx}{ds} \end{array} \right.$$

Usando o systema S como constituido, apenas, da força $\Phi = 1$ applicada ao systema isostatico / é só fazer, nas fórmulas (42) e (43), $\Phi = 1$ e annullar os outros termos. Teremos, assim, M^s , N^s , ... relativos ao systema $\Phi = 1$. O deslocamento será:

$$\Delta = \int_0^{s_1} \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) x ds + \int_{s_1}^s \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right) \alpha ds +$$

$$+ \int_0^{s_1} \frac{N}{E\Omega} \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) \frac{dy}{ds} ds + \int_{s_1}^s \frac{N}{E\Omega} \left(-\frac{\alpha}{l}\right) \frac{dy}{ds} ds +$$

$$+ \int_0^s \frac{\varepsilon T}{G\Omega} \left(1 - \frac{\alpha}{l}\right) \frac{dx}{ds} ds + \int_{s_1}^s \frac{\varepsilon T}{G\Omega} \left(-\frac{\alpha}{l}\right) \frac{dx}{ds} ds.$$

A mesma observação anterior tendo lugar para a parcella inherente á temperatura.

Segundo:—deslocamento angular. O mesmo raciocinio poderia ser feito se, em vez do systema S da força unica $\Phi = 1$, quizessemos applicar o conjugado $\mu = 1$. Teriamos, então, Θ em vez de Δ .

O raciocinio é o mesmo.

Ponto: $0 < x < a$

$$(44) \left. \begin{aligned} M'' &= M - \frac{1}{l} x \\ N'' &= N - \frac{1}{l} \frac{dy}{ds} \\ T'' &= T - \frac{1}{l} \frac{dx}{ds} \end{aligned} \right\}$$

Ponto: $a < x < l$:

$$(45) \quad \left. \begin{aligned} M'' &= M + \left(1 - \frac{x}{l}\right) \\ N'' &= N - \frac{1}{l} \frac{dy}{ds} \end{aligned} \right\}$$

A rotação θ seria, pois :

$$\theta = \int_0^{s_1} \frac{M}{EI} \left(-\frac{x}{l}\right) ds + \int_{s_1}^s \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{l}\right) ds +$$

$$+ \int_0^s \frac{N}{E \Omega} \left(-\frac{1}{l}\right) \frac{dy}{ds} ds + \dots$$

Outros tipos de arcos

Da fig. 10, podemos deduzir outros tipos de arcos :

μ) collocando engaste em B e articulação em A .

E' caso particular do arco estudado, visto ser derivado desse, pela condição: $\mu_A = 0$.

Em vez das tres equações indicadas, teremos, apenas duas, dando: μ_B e Q .

β) Suppondo o arco apresentando duas articulações, em A e B . E' caso particular do anterior, apenas, existindo, uma incognita superabundante: o empuxo Q .

γ) Imaginando o arco engastado em B e apoiado em A , sem empuxo. Só ha uma incognita superabundante μ_B , visto Q e μ_A serem nullos.

δ) Finalmente, apenas existindo apoios planos em A e B , o arco é isostatico: $\mu_A = \mu_B = Q = 0$.

Deixamos ao leitor, a titulo de exercicio, a deducção das formulas desses casos particulares, das formulas geraes que estudamos. Aliás, taes formulas poderiam ser estudadas, directamente, como é facil vêr, pela *equação de Fontviolant*.

QUARTA APPLICAÇÃO

SYSTEMA RETICULADO COMPLETAMENTE HYPERESTÁTICO

Estudemos a tesoura da fig. 11 sobre tres apoios A , B e C , em A e B sobre apoios - planos e em C articulado. Há, além da superabundancia externa, a interna, indicada pela presença das duas barras MD e ME .

Consideremos o systema isostatico I, com n barras sem o apoio A e as barras superabundantes.

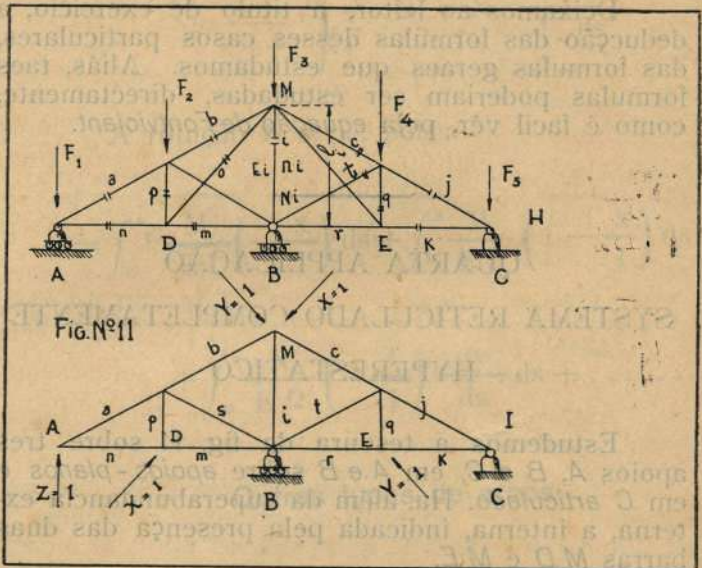
Imaginemos o systema só solicitado por esforços normaes ás secções das barras ⁽¹⁾ (tracção, ou compressão). Na barra i , o esforço será:

$$(46) \dots N_i = a_i + b_i X + c_i Y + d_i Z$$

(1) Embora admittida essa hypothese por todos como exacta até o início do presente seculo e sendo mesmo o fundamento dos methodos de Ritter, Culmann, Zimmermann e Cremona não o é nem theorica, nem experimentalmente (vide, por ex., Cours de Stabilité des Constructions par A. Vierendeel, 1920).

conforme se sabe ⁽¹⁾ do estudo dos reticulados planos.

Trata-se de determinar: os coefficients numericos a_1, b_1, \dots a incognita superabundante externa Z e as internas X e Y .



Consideremos os systemas S.

Systema S_1 , correspondente a $Z=1$. Temos:

$$(47) \quad \left. \begin{array}{l} M_i^{s_1} = 0 \\ T_i^{s_1} = 0 \\ N_i^{s_1} = d_i \end{array} \right\}$$

(1) Camillo Guidi, Scienza delle costruzioni, parte prima, 1922, pag. 200 e 201, ou Trattado dell'arte dell'Ingegnero civile ed Architetto. C. Ceradini, cap. XIII, pag. 428.

o indice, i se extendendo ao systema I, *excepção portanto, das duas barras superabundantes.*

D'ahi, a primeira equação de Fontviolant :

$$(48) \quad \sum \int_0^1 \frac{N_i}{E_i \Omega_i} d_i dx_i = 0$$

Onde o signal Σ se extende a todo o systema e devemos substituir N_i pelo seu valor (46) para pôr evidencia as incognitas X, Y e Z .

Se quizermos levar em conta a temperatura, deveremos substituir: $\frac{N_i}{E_i \Omega_i}$ por $\left(\frac{N_i}{E_i \Omega_i} - at \right)$

Systema S_2 , correspondente á solicitação: $X=1$, na barra superabundante ME , de modulo E e area Ω . Elementos de redução ao centro de gravidade:

$$\left. \begin{array}{l} \text{na barra } ME \\ \\ \\ \text{nas outras} \end{array} \right\} \begin{array}{l} M^{s_2} = 0 \\ T^{s_2} = 0 \\ N^{s_2} = 1 = X \\ \\ M_{i2}^s = 0 \\ T_{i2}^s = 0 \\ N_{i2}^s = b_i \end{array}$$

Quando o systema (A, B) da primeira parte desse trabalho age, isto é, quando F, F_e e F_i sollicitam o systema I, os esforços serão dados por (46).

Temos pela equação de Fontviolant:

$$\sum_1^n \int_0^1 N_1^{s_2} \frac{N_1}{E_1 \Omega_1} dx_1 + \int_0^1 N^{s_2} \frac{N}{E \Omega} dx = 0$$

onde l é o comprimento de ME . Ora, N^{s_2} é igual a 1 e N (relativo ao systema F, F_e, F_i) é $X - \alpha t E \Omega$, se quizermos levar em conta a temperatura.

Assim tambem, N_1 é dado por (46) (systema F, F_e e F_i) e $N_1^{s_2}$ o é, por essa formula, no caso da unica sollicitação: $X=1$, isto é: $N_1^{s_2} = b_1$.

Assim:

$$\sum_1^n \int_0^1 \frac{1}{E_1 \Omega_1} (a_1 + b_1 X + c_1 Y + d_1 Z - \alpha t E_1 \Omega_1) b_1 dx_1 + \int_0^1 \frac{1}{E \Omega} (X - \alpha t E \Omega) dx = 0 \quad (49)$$

As variaveis x_1 (variando entre 0 e l_1) se referindo ás n barras do systema.

Analogamente, seria facil escrever a equação (50) para $Y=1$.

Assim, essa equação, que não escrevemos por desnecessaria ao raciocinio, unida a (49) e (48) forma um systema linear de tres equações entre tres incognitas.

O problema está resolvido, salvo detalhes de algebra.

Casos Particulares

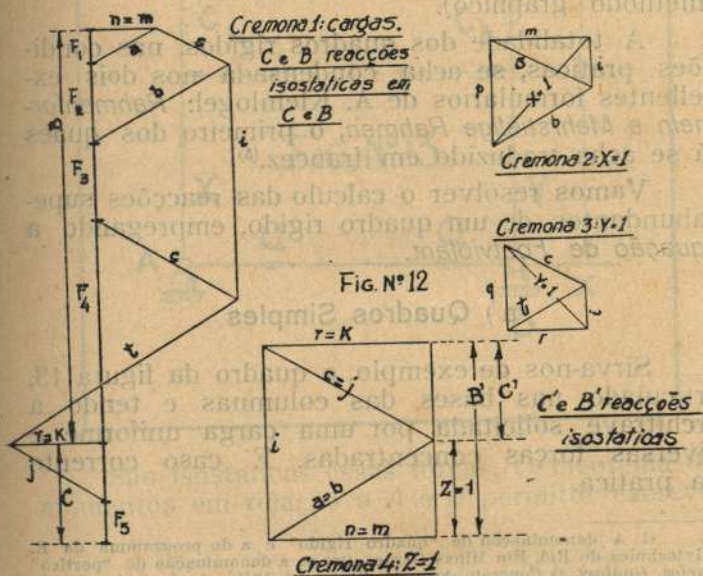
- *Primeiro*: Systema superabundante externamente. Nesse caso e na mesma figura, a unica equação que subsiste é a primeira.

Deve-se fazer nella: $X = 0$; $Y = 0$.

Segundo: Systema superabundante internamente: E' o systema I com duas barras. As ultimas equações subsistem, fazendo-se: $Z = 0$.

Avaliação dos coefficients b_i, c_i, d_i

O leitor vê, facilmente, pela equação (46) que esses coefficients representam os esforços nas barras, quando isoladamente: $X = 1, Y = 1, Z = 1$ e o systema é isostatico.



O calculo desses coefficients, bem como a_1 , se resume, pois, no traçado dos quatro cremonas que se acham representados na figura 12. O cremona 1 foi traçado com as forças F. Elle dá, portanto, immediatamente a_1 .

QUINTA APPLICAÇÃO

QUADROS RÍGIDOS (1)

Diversos são os processos adoptados no calculo das forças de ligação exteriores (reacções nos apoios) dos quadros rígidos, cujo estudo muito se tem desenvolvido no presente seculo.

O leitor, certamente, conhecerá esses methodos, desde o que decorre dos theoremas de Castigliano e Menabrea⁽²⁾ até os mais modernos de Hartmann⁽³⁾, pelos theoremas de Maxwell e Castigliano e de Strassner⁽⁴⁾ pelas vigas contínuas (methodo graphico).

A totalidade dos quadros rígidos, nas condições praticas, se acha condensada nos dois excellentes formularios de A. Kleinlogel: *Rahmenformeln e Mehrstielige Rahmen*, o primeiro dos quaes já se acha traduzido em francez.⁽⁵⁾

Vamos resolver o calculo das reacções superabundantes de um quadro rígido, empregando a equação de Fontviolant.

a) Quadros Simples

Sirva-nos de exemplo, o quadro da figura 13, articulado nas bases das columnas e tendo a architrave solicitada por uma carga uniforme e diversas forças concentradas. E' caso corrente na pratica.

(1) A denominação de "quadro rígido" é a do programma da E. Polytechnica do Rio. Em Minas Geraes, usa-se a denominação de "portico" (Carlos Goulart, O Concreto Armado, Volume 1, 1925). A denominação de "quadro" é a traducção literal do termo allemão correspondente *Rahmen*. Os Italianos usam o termo "portale" e sistemas cellulari (L. Duranti) os francezes não adoptaram, ainda, uma expressão definitiva. Por ex., Auguste Liévin usa *cadre*, F. Grassi: *portique, constructions a étages*, etc.

(2) *Lezioni sulla Scienza delle Costruzione*, C. Guidi, volume 8. Exercizi.

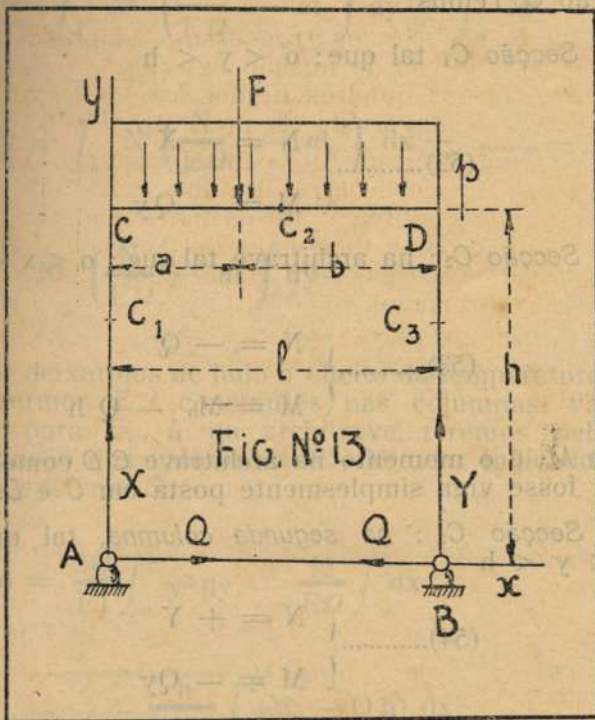
(3) *Die statisch unbestimmten Systeme des Eisen und Eisenbetonbaues* 1922. Berlin, Professor *Friedrich Hartmann*.

(4) *Berechnung statisch unbestimmter Systeme*, 1921, A. Strassner. Berlin.

(5) *Formulaire du Constructeur de Charpentes*, 1924, A. Renner. Paris.

Ha uma força superabundante: é o empuxo.

Chamemos de X e Y as reacções nos apoios A e B.



São isostaticas essas forças. O theorema dos momentos em relação a A e B permite escrever:

$$(51) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} X = \frac{pl}{2} + \frac{\Sigma F b}{1} \\ Y = \frac{pl}{2} + \frac{\Sigma F a}{1} \end{array} \right.$$

Calculemos Q pela equação de Fontviolant. Para isso, escrevamos as expressões dos elementos de redução ao centro de gravidade de uma secção C . Temos:

Secção C_1 tal que: $0 < y < h$

$$(52) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} N = - X \\ M = - Qy \end{array} \right.$$

Secção C_2 : na architrave, tal que: $0 < x < l$

$$(53) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} N = - Q \\ M = M_0 - Qh \end{array} \right.$$

onde M_0 é o momento na architrave CD como se essa fosse viga simplesmente posta em C e D .

Secção C_3 : na segunda columna, tal que: $0 < y < h$

$$(54) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} N = + Y \\ M = - Qy \end{array} \right.$$

Nessas formulas não levamos em conta os valores de T , conforme se faz no estudo dos quadros rigidos. Por exemplo, estudando-os pelos theoremas de Castigliano, despreza-se o potencial interno relativo aos esforços de cisalhamento. Aliás, alguns auctores vão além, desprezando N (Kleinlogel, Foerster, etc.)

Apliquemos o systema S igual, apenas, a $Q = 1$.

Temos as mesmas formulas, fazendo-se: $Q = 1$, $X = Y = 0$, $M_0 = 0$ (apoio plano em A).

A equação se escreve :

$$(55) \quad 0 = \int_0^h N^s \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha t \right) dy + \int_0^h M^s \frac{M}{EI} dy + \int_0^1 N^s \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha t \right) dx + \dots - \int_h^0 N^s \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha t \right) dy$$

Se deixarmos de lado o effeito da temperatura, supuzermos E, I , constantes nas columnas, variando para E_1, I_1 na architrave, teremos pela substituição dos valores de N^s, M^s, \dots indicados para o systema S :

$$(56) \quad 0 = \frac{2Q}{EI} \int_0^h y^2 dy + \frac{Q}{E\Omega} \int_0^1 dx - \frac{h}{E_1 I_1} \int_0^1 (M_0 - Qh) dx$$

Escrevendo, como é classico :

$$(57) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{E_1 I_1}{E I} \frac{h}{1} = \psi \\ \frac{1}{\Omega} = \rho^2 \end{array} \right.$$

Acharemos, após o desenvolvimento algebrico:

$$(58) \dots \dots \dots Q = \frac{\int_0^1 M_0 \, dx}{hl \left(1 + \frac{q^2}{h^2} + \frac{2}{3} \psi \right)}$$

Exemplos: Caso da carga uniforme. Temos:

$$\int_0^1 M_0 \, dx = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} p l^2 \right) l = \frac{pl^3}{12}$$

Caso da carga concentrada F :

$$\int_0^1 M_0 \, dx = \frac{1}{2} F \left(\frac{ab}{l} \right) l = F \frac{ab}{2}$$

E, assim, com a carga uniforme p e n forças;

$$(59) \dots \dots \dots Q = \frac{pl^3 + 6 \sum_1^n Fab}{12 hl \left(1 + \frac{q^2}{h^2} + \frac{2}{3} \psi \right)}$$

É a fórmula classica ⁽¹⁾.

Chamando o parenthesis no denominador de λ , o correctivo da temperatura seria na primeira

(1) Vide, por ex: Kleinlogel: Rahmenformeln, 1923, IX, pag. 55 e 61. Max Foerster: Manuale del Costruttore, traduzione; Parte prima, 1919, pag. 371; Beton Kalender, 1923, etc. Os srs. Kleinlogel e Foerster não conservam os termos em N , conforme nos referimos no texto. Desapparece, assim, no denominador a parcella que contém q^2 .

fórmula

$$Q_t = \frac{EI \alpha t}{4h^2}$$

como é fácil vêr.

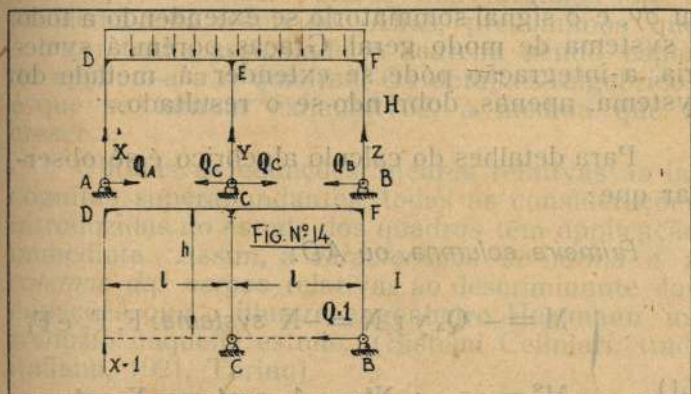
O correctivo dos termos de cisalhamento seria, tambem, facil de escrever. Nosso fim, aqui, não é, entretanto, como já não o tinha sido nas outras applicações, o de detalhar resultados conhecidos e classicos.

Damos por terminado, assim, o estudo do quadro simples.

= *Observação* — Se o quadro fosse engastado duas novas equações eram necessarias. O leitor, certamente, já vio que seriam obtidas com dois novos systemas: $S_1: \mu_A = 1$ e $S_2: \mu_B = 1$, sendo μ os momentos de engastamento.

b) Quadros Associados

Seja a fig. 14. Dois quadros associados trazem uma carga uniforme na architrave. De modo



geral, haveria triplice superabundancia externa. Mas a carga symetrica permite, logo, escrever:

$Q_c = 0$ e $X = Z$, sendo $Y = F - 2X$ e F a carga total.

O systema hyperestatico H apresenta como forças superabundantes X e $Q_A = Q_B$ e o systema isostatico I tem a forma indicada na figura 14, com apoio plano em C .

As equações hyperestaticas de Fontviollant seriam :

$$(60) \dots \left\{ \begin{array}{l} \Sigma \int N^s \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha t \right) ds + \Sigma \int M^s \frac{M}{EI} ds = 0 \\ \Sigma \int N^{s_1} \left(\frac{N}{E\Omega} - \alpha t \right) ds + \Sigma \int M^{s_1} \frac{M}{EI} ds = 0 \end{array} \right.$$

onde S e S_1 representariam os dois systemas isolados de solicitação: $X=1$ e $Q_A=1$, ds devendo, conforme a posição de C , ser substituído por dx , ou dy , e o signal sommatorio se extendendo a todo o systema de modo geral. Graças, porém, á symetria, a integração pôde se extender á metade do systema, apenas, dobrando-se o resultado.

Para detalhes do calculo algebrico é só observar que:

Primeira columna, ou AD:

$$(61) \dots \left\{ \begin{array}{l} M = - Q_A y ; N = -X \text{ systema: } F, F_0 \text{ e } F_1 \\ M^s = 0 ; N^s = -1 \text{ systema: } X = 1 \\ M^{s_1} = -y ; N^{s_1} = 0 \text{ systema: } Q_A = 1 \end{array} \right.$$

Segunda columna, ou CE:

$$(62) \dots \left\{ \begin{array}{l} M = 0; \quad N = -Y = 2X - F \\ M^S = 0; \quad N^S = 2 \\ M^{S_1} = 0; \quad N^{S_1} = 0 \end{array} \right.$$

Architrave, ou DE:

$$(63) \dots \left\{ \begin{array}{l} M = M_0 + Xx - Q_A h; \quad N = -Q_A \\ M^S = x \quad ; \quad N^S = 0 \\ M^{S_1} = -h \quad ; \quad N^{S_1} = -1 \end{array} \right.$$

E, salvo o detalhe meramente algebrico, de substituições desses valores nas formulas (60) o problema está resolvido. Aliás, presumimos que o leitor tenha assimilado a marcha sendo capaz de applica-la a n quadros. Os detalhes algebricos é que se tornam exhaustivos, á medida que n cresce.

Obtidas as equações lineares relativas ás incognitas superabundantes, todas as considerações introduzidas no estudo dos quadros têm applicação immediata. Assim, a *caracteristica de forma* e a *columna das cargas* relativas ao discriminante das equações que o illustre engenheiro Hartmann introduzio naquellê estudo. (Sistemi Cellulari, trad. italiana, 1921, Torino).

Quanto ao calculo dos deslocamentos nenhuma difficuldade offerece a applicação da marcha geral.

Como exemplo, deixamos ao leitor o cuidado de chegar às formulas finais do caso anterior. Deverá encontrar :

$$(64) \dots \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{3}{8} pl + \frac{3}{2} Q_A \frac{h}{l} \\ Q_A &= \frac{pl^2}{4h(3+4\psi)} \end{aligned} \right.$$

Onde ψ tem a mesma significação anterior da formula (58).



CONCLUSÃO

Estava este trabalho na typographia quando recebemos da Europa, o volume I da *Résistance des Matériaux Analytique et Graphique* de B. Fontviolant e ao mesmo tempo tivemos noticia, atravez do *Génie Civil* (Samedi, 12 Février 1927, vol. XC, Ouvrages récemment parus, p. 183) do apparecimento do segundo volume e organização de um terceiro que presentemente, prepara o illustre autor.

A leitura do primeiro volume dessa obra que fizemos já em condições de não nos ser mais util, veio trazer-nos o conforto da observação que o eminente professor da Escola Central reparou, tambem, na necessidade do desdobramento das applicações de sua equação para que, facilmente, se sinta a utilidade que possui.

Encontra-se, nesse volume, já algumas applicações e, em particular, uma deducção da equação dos tres momentos diversa da que indicamos em nosso presente trabalho.

Folgariamos, aliás muito, que o leitor estudasse essa obra á medida que fosse lendo nossa these para observar que, se nos faltaram outras qualidades, houve pelo menos, aqui, algum esforço proprio.

A leitura de uma nota critica de Mesnager sobre os processos de Fontviolant e vantagens sobre os outros methodos faz-nos, ainda, chamar a attenção de nossos leitores para tal trabalho, inserido no *Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale*, n. 4, avril, 1921.

Os processos modernos ganhando terreno, dia a dia, simplificam-se, também, na exposição apparecendo, hoje, independentes de qualquer noção das variações provenientes da equação dos trabalhos virtuaes e consequente das memorias de Mohr, como se observa, por exemplo, no excellente trabalho do prof. Marinho : *Aplicação do principio dos deslocamentos virtuaes á theoria geral dos systemas articulados*. (Rev. Did. da E. P. n. 5 e 7) para não citar senão um trabalho brasileiro.

presentemente prepara o illustre autor.

A leitura do primeiro volume dessa obra que fizemos já em condições de não nos ser mais útil, veio trazer-nos o conforto da observação que o eminentemente professor da Escola Central reparou também, na necessidade do desdobramento das applicações de sua obra para que facilmente se sinta a utilidade.



Encontra-se, também, já algumas applicações e, em particular, uma dedução da educação da educação em tres momentos diversos da que indicamos em nosso presente trabalho.

Polgaríamos, alias muito, que o leitor estu- dasse essa obra á medida que fosse lendo possa fazer para observar que se nos faltarem outras qualidades, houve pelo menos, aqui, algum estorço proprio.

A leitura de uma nota critica de Messager sobre os processos de L'ontolant e vantageurs sobre os outros methodos faz-nos, ainda chamar á attenção de nossos leitores para tal trabalho, inserido no Bulletin de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale n. 4, avril, 1921.

TRABALHOS E TITULOS DO AUTOR

OBRAS PUBLICADAS

TRABALHOS DIDACTICOS

Lições de Grapho-Estatica, em quatro fascículos:

Fascículos I e II; Generalidades, 1.^a ed. 1919. Exgottados.

Fascículo III: Vigas inclinadas e continuas, 1919. 1.^a edição,

Idem: 2.^a edição ampliada. 1921. Exgottada.

Fascículo IV. Cargas moveis e systemas articulados 1920. Exgottado.

Lições de Grapho-Estatica. Volume I (Dois primeiros fascículos revistos e ampliados). 2.^a edição e 2.^o milheiro. 1925.

Parte Geral. Edição de G. Netto & Dobici.

As nossas pontes de Concreto Armado. Obra organizada em commemoração do 1.^o Centenario do Brasil. Prefacio do prof. Sampaio Corrêa. 1924. Livraria Scientifica.

Estudo das peças flectidas em Cimento Armado. 1920. Exgottado.

TRABALHOS ORIGINAES

Estudo dos perfis theoricos das barragens 1920. Exgottado.

Uma applicação da theoria da Elasticidade aos muros de arrimo Ravier feitos de concreto armado.

These apresentada em Outubro de 1926 á Congregação da Escola Polytechnica do Rio para docencia-livre.

**PRINCIPAES ARTIGOS DIDACTICOS,
OU ORIGINAES:**

Na Revista Didactica da Escola Polytechnica.

Carta. (Mecanica Racional). N. 10, 1916.

Principios de Kepler e Galileu — N. 11. — 1917.

Representação symbolica das grandezas senoidaes. — N. 12. — 1918.

Memoria sobre a Resistencia dos Trilhos. N. 13. — 1918.

Uma solução nova do problema do Dr. Licinio. — N. 13. — 1918.

Memoria sobre a Resistencia dos Trilhos. N. 14. — Conclusão. 1918.

Uma nota sobre os polygonos funiculares. N. 17. — 1918.

Alguns resultados interessantes sobre o Hyperboloide continuo de revolução. — N. 18. — 1919.

Notas sobre o calculo das barragens. — N. 18. — 1919.

Algumas observações sobre cargas moveis. — N. 19. — 1920.

Sobre a synthese geral da Mecanica. — N. 19. — 1920.

Uma demonstração rápida de um theorema de Pascal. — N. 21 — 1921.

Correctivos de Bouvier e Levy para as juntas obliquas nos massiços de alvenaria. — N. 21. — 1921.

As verdadeiras formulas do principio de Archimedes nos diversos casos de terras saturadas. — Junho de 1926.

A proposito desse artigo, o autor recebeu de França uma carta de L. Ravier, laureado da Academia de Sciencias e da Sociedade dos engenheiros civis de França e auctor do conhecido systems de **cães Ravier**, onde vem escripto:

“En ce qui concerne votre étude au sujet du principe d'Archimède, je suis tout à fait d'accord avec vous et je vous en adresse mes meilleures felicitations”.

No referido artigo, o auctor aponta, casos em que o principio é falso e em particular estuda os terrenos saturados d'agua.

—:—

Na “Revista Brasileira de Engenharia”

Calculo de reservatorio cylindrico de concreto armado. — t. I, n. 4, 1921.

A evolução das nossas pontes. t. IV, 1922.

Nótas sobre algumas das nossas pontes, t. IV, 1922.

Calculos dos trilhos. Em dois numeros, t. IV, 1923.

Alguns erros no methodo de calculo dos cões. t. IX, 1925.

O verdadeiro methodo de calculo de cões. t. X, 1926.

Os absurdos a que conduz o methodo de calculo dos cões. em dois numeros, t. X, 1926.

O novo methodo de calculo de cáes. t. XI, 1926.

Estudo racional e novo da ancoragem nos systemas de pieux — palplanches Coignet e Ravier usados em cáes e muros de arrimo. t. XII, 1926.

—:—
No: "O Brasil Technico"

Honorarios de Engenheiros. vol. I, 1924.

Noticias criticas de obras. vol. I, entre outras:

Flavio de Castro. As forças hydraulicas no Brasil, pag. 63.

George Ribeiro. Secção de Vasão de Obras d'Arte, pag. 118.

Manoel Torres. Hulla Branca, pag. 185.

Clodomiro Oliveira. Problema siderurgico. Conferencia pag. 252.

Ev. Backeuser. Grossario de rochas, etc. pag. 377.

Artigo. Relatorio apresentado ao governo do Estado do Rio sobre a cortina longitudinal do cáes acostavel do Porto de Nictheroy, em cinco numeros. Vol. II e III, 1925 e 1926.

—:—
Na: "A Casa"

O cimento armado na casa ao alcance de todos n. 17. 1925.

—:—
No: "O Jornal"

Carta aberta sobre o projecto do cáes de S. Lourenço (Nictheroy) 21, 22 e 24 de Julho de 1925.

Segunda carta sobre o mesmo assumpto. 20 Setembro 1925.

TÍTULOS DO AUCTOR E CARGOS OCCUPADÔS

Nascido em Janeiro de 1895, frequentou o Collegio Paula Freitas em 1904 a 1911. Matriculou-se na Escola Polytechnica em 1913. Foi representante de turma no Directorio Academico, director da Revista Didactica e assistente no 4.º anno durante o seu curso academico. Formou-se em 1918 como eng.º civil, mecanico e electricista.

Trabalhou como engenheiro ajudante na *Secção Technica da Directoria de Obras*, do Estado do Rio de 1920 a 1924. Esteve, em 1922, na *Exposição Nacional* (Escriptorio technico).

Em 1924, foi requisitado para dirigir a *Secção Technica dos serviços do Porto de Nictheroy e do Saneamento da zona de S. Lourenço*, cargo que occupa, ainda, actualmente, (1927) tendo sido promovido a engenheiro do Estado, titulado no quadro, no posto maximo, em 1925.

Foi convidado para o cargo de prof. assistente de Estabilidade das Construcções, na Escola Polytechnica, no mesmo anno, cargo que occupa actualmente, tendo feito, em Outubro de 1926, o concurso annexo de docente livre da cadeira obtendo, nas tres povas, a média geral de 9.64.

Foi homenageado pela turma de engenheiros civis de 1922, figurando no quadro de formatura, devido aos cursos dados particularmente naquella Escola, o que lhe valeo, tambem, o titulo de membro honorario do Directorio Academico da Escola Polytechnica.

Foi consultor tecnico de algumas firmas constructoras no Rio: *Gusmão, Dourado & Baldassini* (1920 a 1924), *Leonidio Gomes & Cia.* (1920 a 1924), etc. deixando de sel-o pelos serviços intensos em Nictheroy, após esse anno.

Obteve o grão de *doutor em sciencias physicas e mathematicas* em Novembro de 1926.

Foi director fundador da Revista "O Brasil Technico" fundada em Julho de 1924, tendo deixado por falta de tempo em Janeiro de 1926, ocasião em que, além dos seus serviços no porto de Nicheroy, lhe foi entregue a fiscalisação da grande ponte de *Itajuru*, em Cabo Frio, obrigando-o a ausentar-se do Rio.

Entre os convites de cargos de confiança que tem recebido e que não lhe tem sido possível desempenhar, cita o autor tres:

O convite que lhe foi feito em Junho de 1925 pelo Exmo. Sr. Secretario de Agricultura e Obras do Espirito Santo, Dr. Moacyr Avidos para o cargo de Chefe na Secção Technica da Commissão de Obras Novas, em Victoria.

O que lhe foi enviado pelo director da E. F. Noroeste do Brasil, Dr. Alfredo de Castilho para a direcção do Escriptorio technico dessa estrada, em 1925.

Finalmente, o mais recente com que o Dr. Raja Gabaglia lhe honrou para a direcção dos serviços do Escriptorio Technico Raja Gabaglia, em S. Paulo (execução de trabalhos de agua e esgotos), em Dezembro de 1926.

Faz parte do corpo de collaboradores da revista : *A Architectura no Brasil*.

Indice

	PAG.
Prefacio	3
Introducção.	5
PRIMEIRA PARTE	12
<i>A equação de Fontviolant</i>	12
Lemma primeiro (<i>Clapeyron</i>)	13
Lemma segundo (<i>Clapeyron</i>)	15
Lemma terceiro (<i>Fontviolant</i>)	17
Lemma quarto (<i>Fontviolant</i>)	22
<i>A equação de Fontviolant</i>	25
<i>Casos particulares</i>	28
Flexão composta plana	33
<i>Calculo dos deslocamentos</i>	34
Deslocamento linear	34
Deslocamento angular	35
<i>Calculo das forças de ligação</i>	35
Simplificação do methodo	38
SEGUNDA PARTE. <i>Aplicações</i>	42
<i>Primeira: Vigas engastadas</i>	42
<i>Calculo das reacções</i>	43
<i>Calculo dos deslocamentos</i>	46
<i>Formulas syntheticas</i>	50
<i>Segunda: Vigas continuas</i>	51
<i>Calculo dos momentos nos apoios</i>	54

Calculo dos deslocamentos	55
<i>Terceira: Arcos</i>	56
Calculo das reacções	57
Calculo dos deslocamentos	61
Outros typos de arcos	63
<i>Quarta. Reticulados planos</i>	64
Tesoura completamente superabundante	64
Casos particulares.	67
Avaliação dos coefficients	68
<i>Quinta: Quadros rigidos</i>	69
<i>Quadro simples</i>	69
<i>Quadros associados</i>	74
Conclusão	79
Annexos á these	81
Obras e artigos do auctor	81
Indice	87
Photographias de serviços onde o auctor tomou parte	89

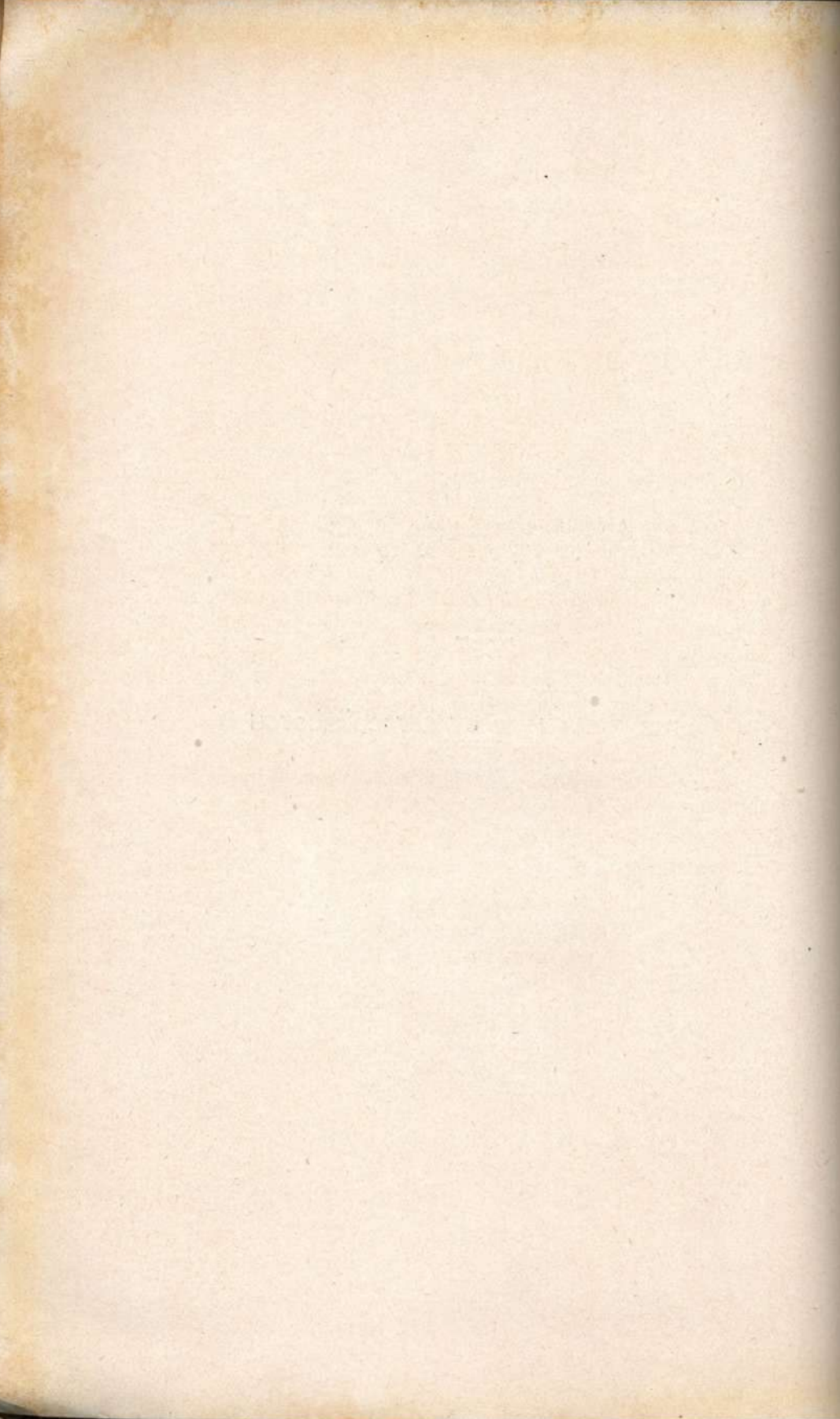


SEGUNDA PARTE
 Primeira: Vigas engastadas
 Calculo das reacções
 Calculo dos deslocamentos
 Formulas syntheticas
 Segunda: Vigas contínuas
 Calculo dos momentos nos apoios

ANNEXOS



Obras em que o auctor collaborou



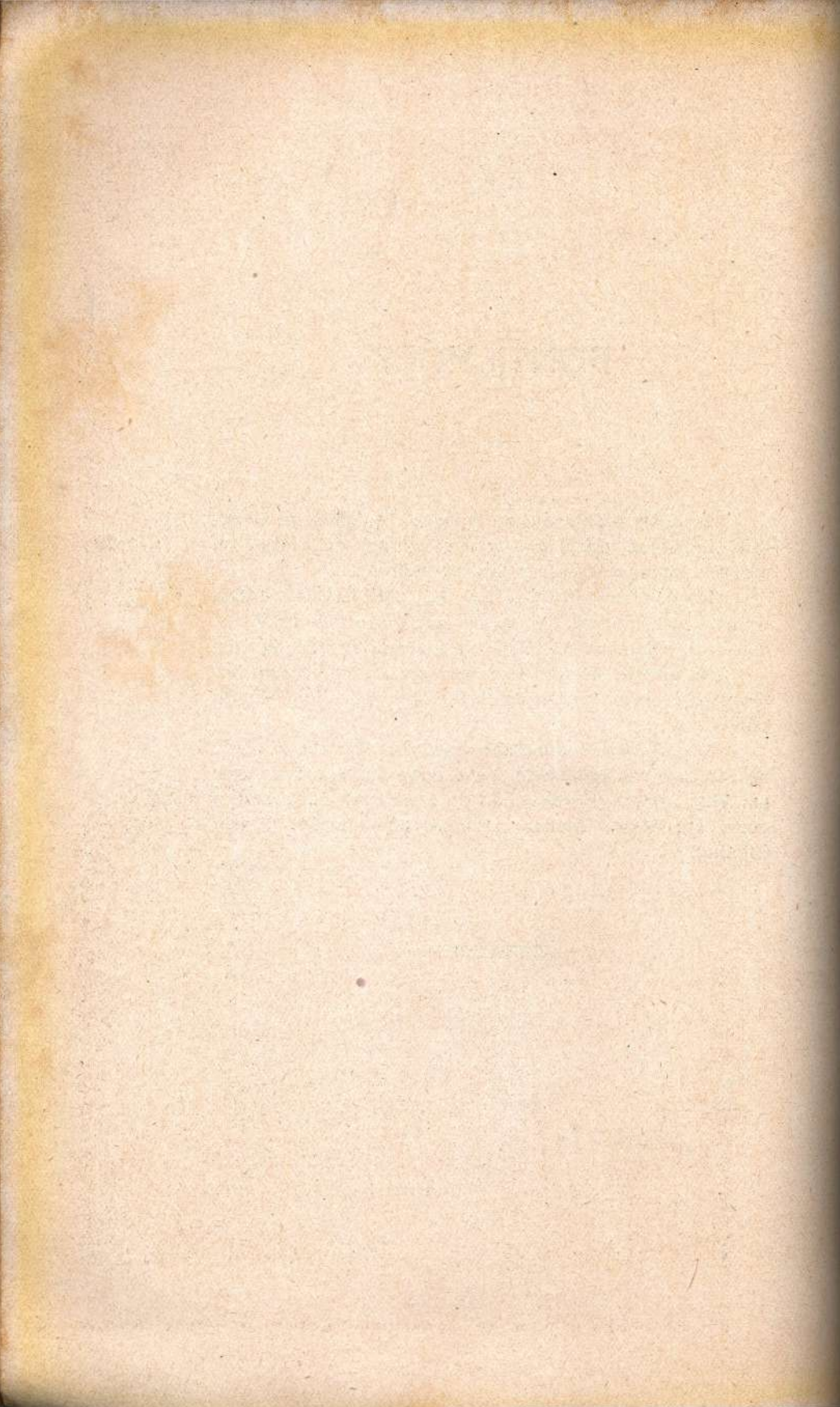
PONTILHÕES

O autor organizou, na Secção Technica da Directoria de Obras, pontilhões-typo para vãos de metro em metro e diversas larguras (até 12 metros).

No seu livro de PONTES DE CIMENTO ARMADO, o autor resume, no fim, esses typos que tiveram innumeras applicações de 1920 até hoje no Estado do Rio.

As ultimas de que tem sciencia o autor, foram feitas pelo Director de Obras de S. Gonçalo, o Dr. Gilberto Lopes.

O projecto do pontilhão com 4 m. de vão e 12 m. de largura, vae annexado. Teve duas applicações: uma em Villa Aurora (construcção do Dr. Fausto L. Costa) e outra em Barra Mansa (construcção do Dr. Sylvio Olintho).



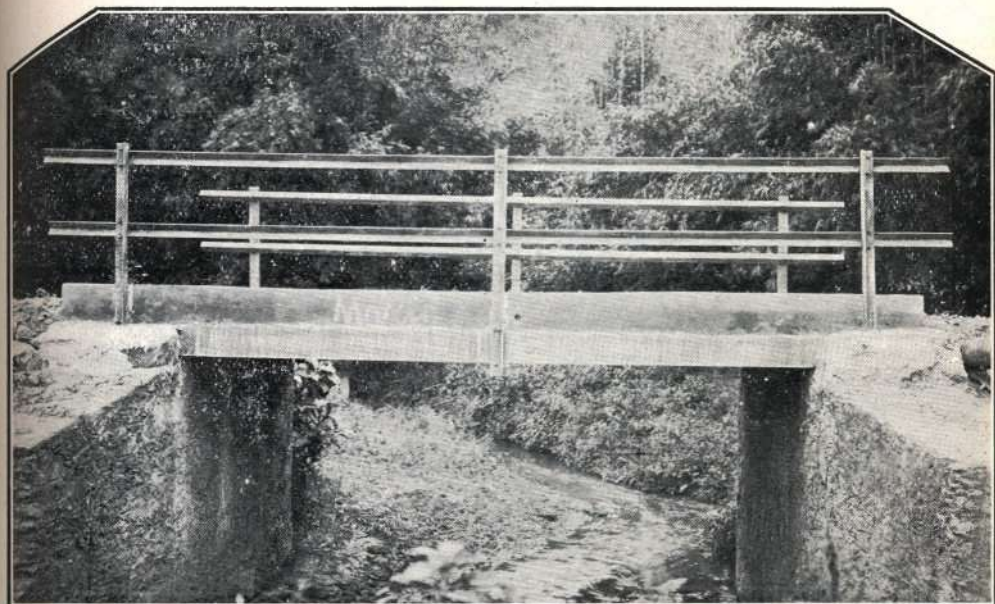
PONTILHÕES

Entre muitos pontilhões de sua autoria, cita o autor:



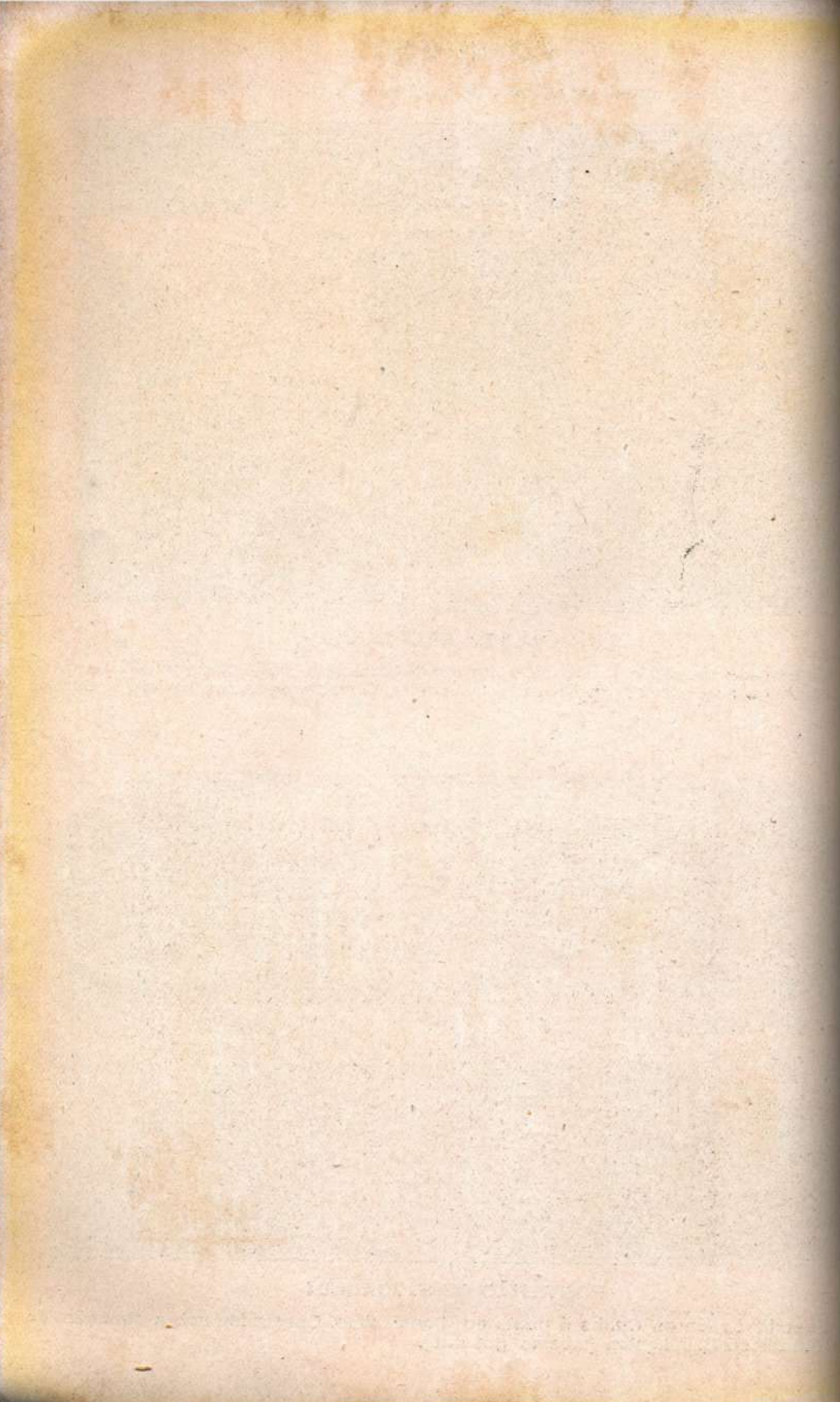
PONTILHÃO DA GROTA FUNDA

Na Estrada Varzea a S. José do Rio Preto Município de Therezopolis. Vão de 5 ms. Construído sob a direcção do eng.^o Octavio V. Coimbra (governo Feliciano Sodré).



PONTILHÃO DE S. JOAQUIM

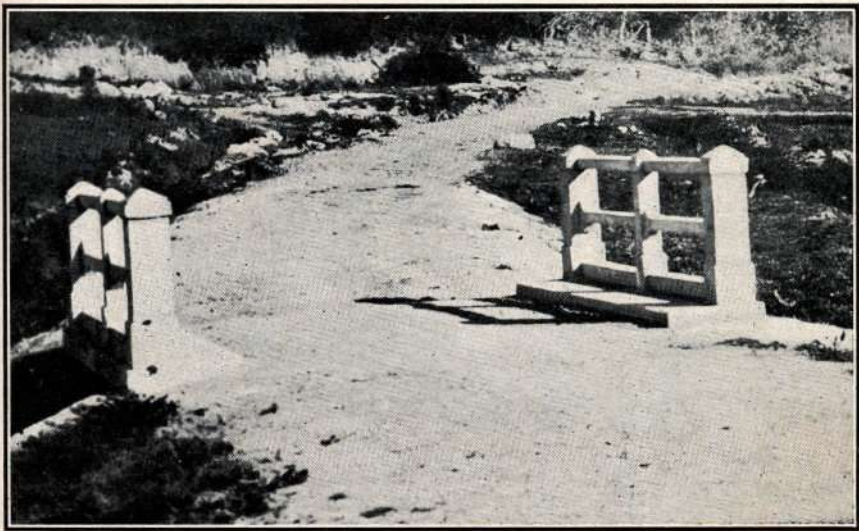
Estrada Leitão da Cunha á ponte do Constantino. Construída sob a direcção do eng.^o Francisco B. Kingston (mesmo governo).





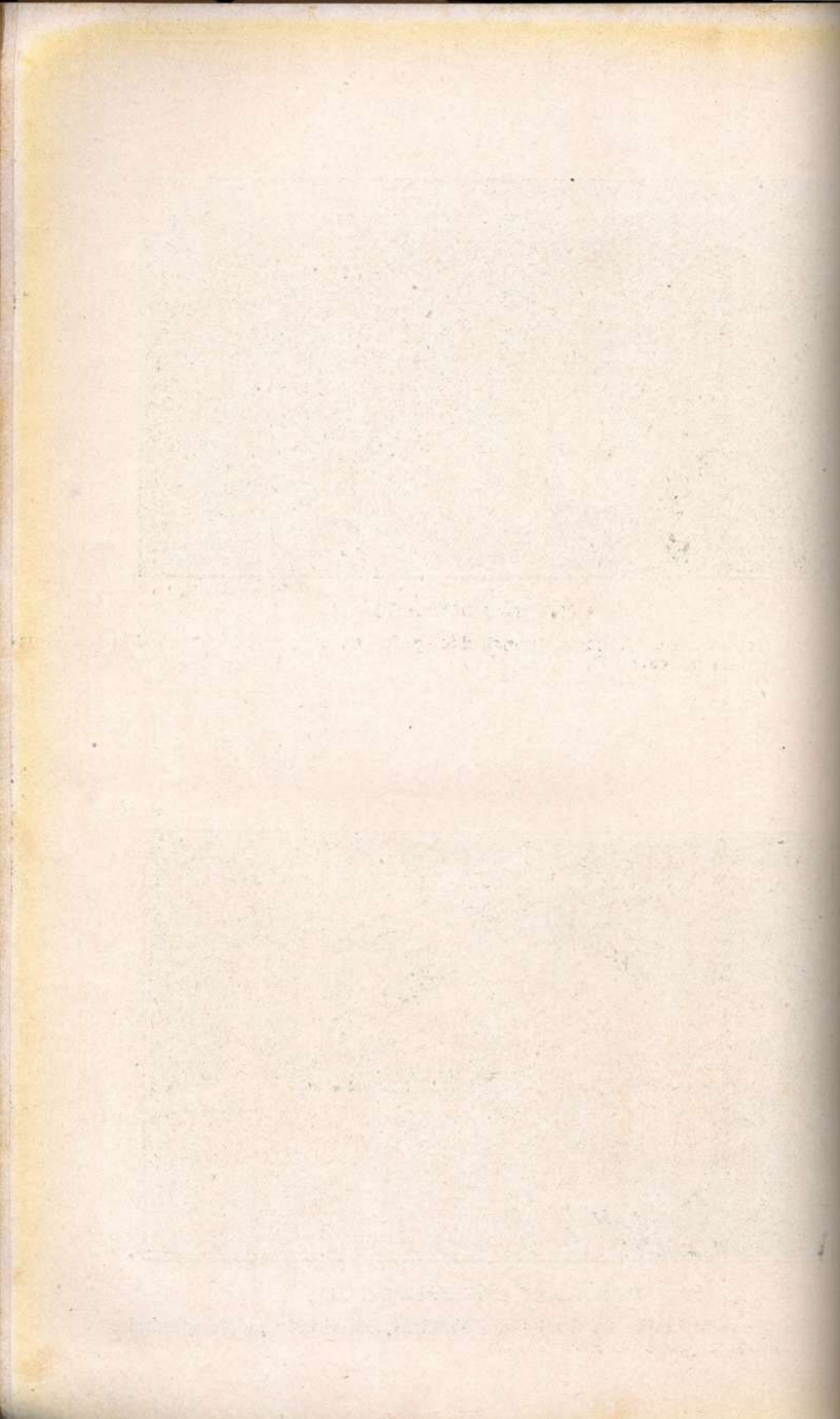
PONTILHÃO DO OLEO

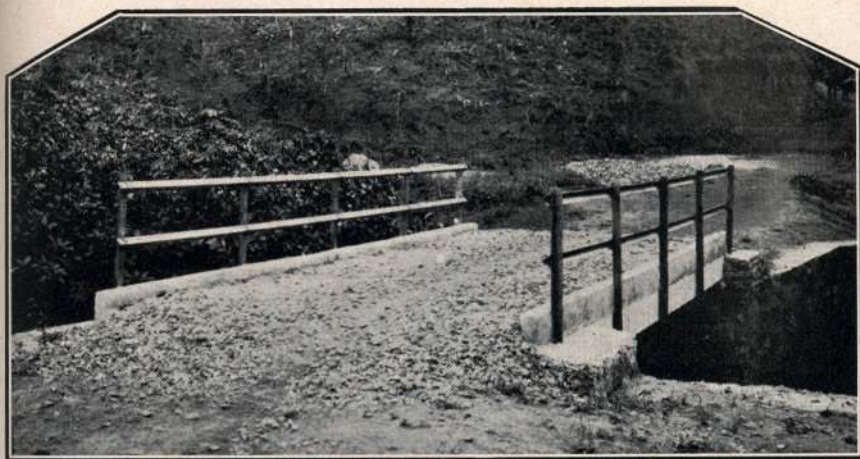
Na Estrada de Glycerio, construido pelo eng.^o do Estado do Rio Fausto L. Costa (governo Raul Veiga).



PONTILHÃO DAS PALMEIRAS

Na Estrada Leitão da Cunha a Palmeiras, construido pelo engenheiro Fausto L. Costa (governo Raul Veiga).





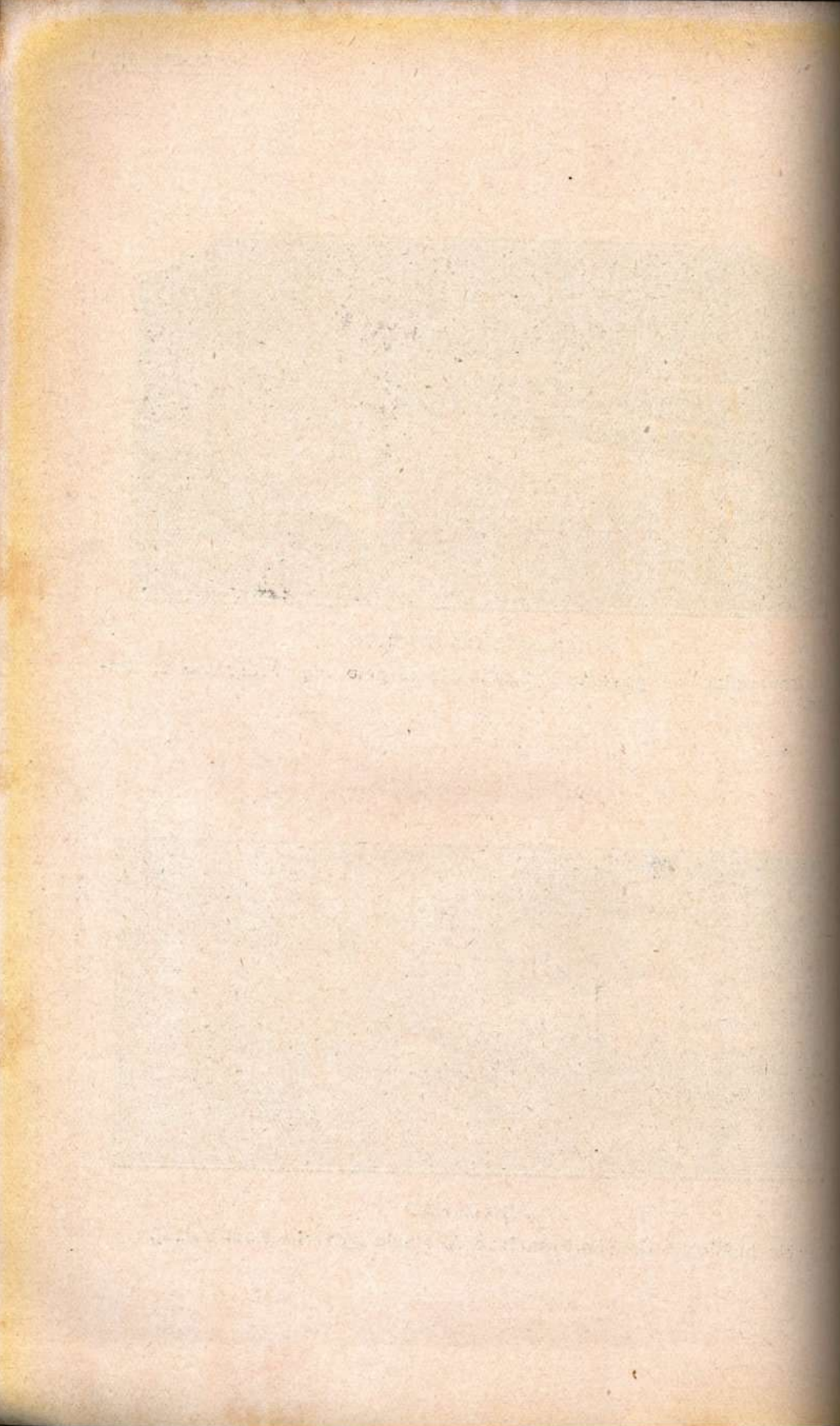
PONTILHÃO DO SOCEGO

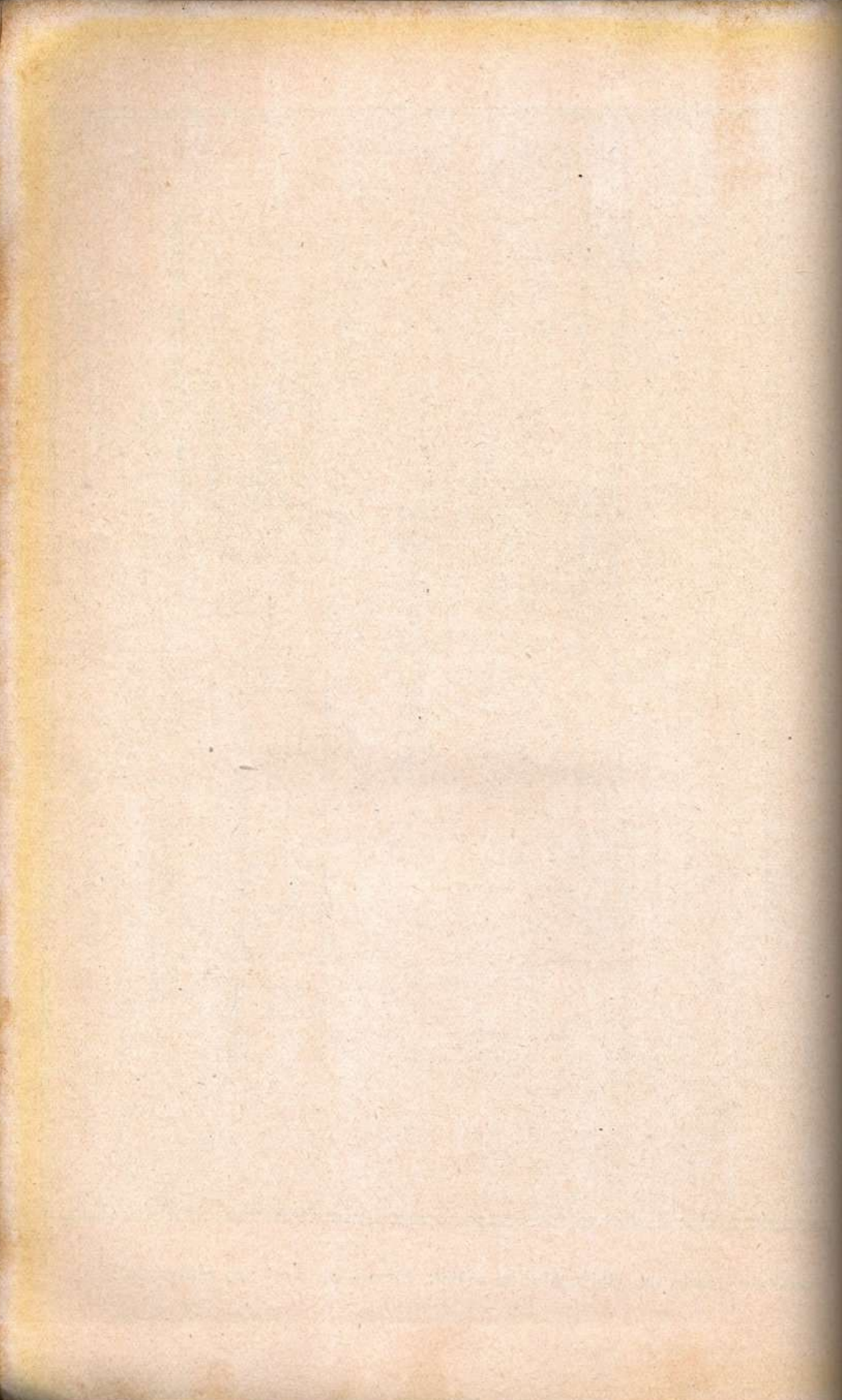
Construido no governo Feliciano Sodré pelo eng.º Francisco B. Kingston.



PONTILHÃO

No municipio de São Francisco de Paula (governo Raul Veiga).





PONTES

a) Pontes - typo.

O autor organisou projectos-typo para auto-caminhões de 6 e 12 tons. usados na Directoria de Obras do Estado para diversas larguras e em concreto armado.

Essas pontes tiveram inumeras applicações de 1920 a 1927, taes como as pontes: do Caximbáu, do Não Pensei, do Oleo, do Cassiano, do Frade, de Quatis, do Constantino, da Aldeia, do Ismerio, da Maravilha, do Faria, da Saudade, Macapá, etc.

b) Typos especiaes.

O autor cita:

A ponte "Raul Veiga" em viga Vierendeel de altura variavel.

A ponte do "Triumpho" em Vierendeel de cordas paralelas.

A ponte "Coronel Antunes" com arco circular.

A ponte de "Ubá" com arco parabolico.

c) Projectos.

Entre os projectos feitos e não executados por causas varias (sobretudo falta de recursos financeiros) o autor cita:

As pontes de Mundeos e do Sertão em quadros rigidos (Rahmen) e em tres vãos.

Os dois projectos da Ponte de Pinheiro sobre o Parahyba e que seria a maior do Brasil, em comprimento.

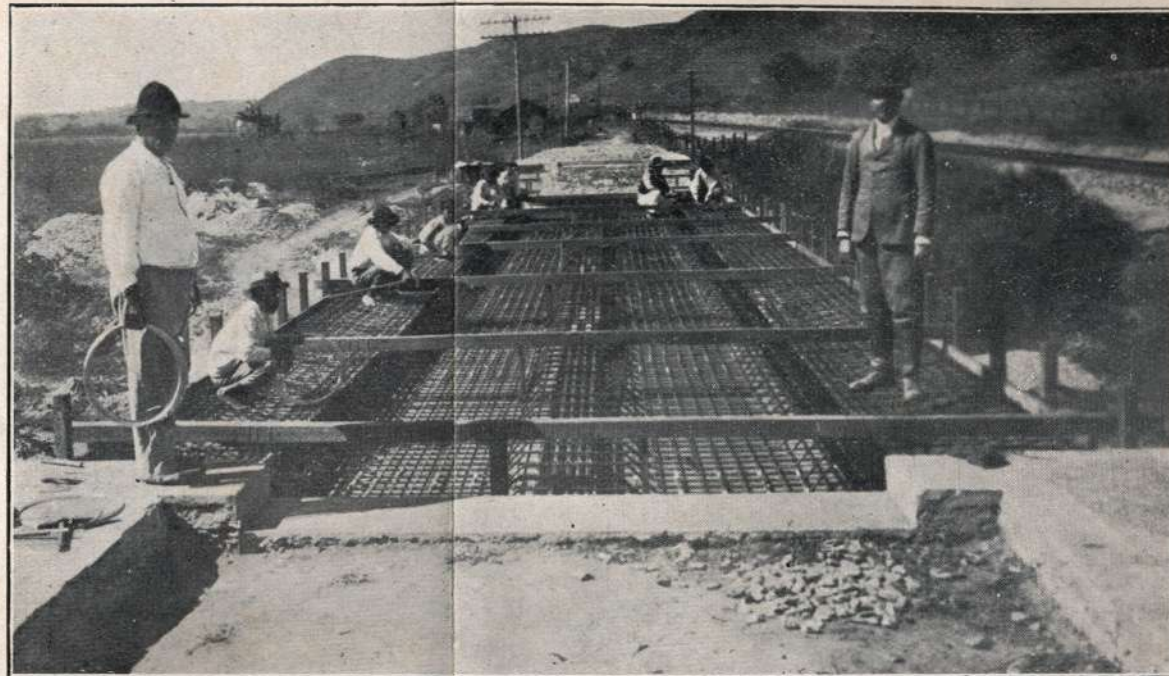


PONTE DO CAXIMBAU em Pinheiro - E. do Rio

Dois vãos de 16 metros. Projecto do autor. Execução dos eng.^{os} Octavio Coimbra e Sylvio Olintho.
Acha-se muitas vezes referida no seu livro de Pontes e com outras photographias.



PONTE DO CAXIMBAU



PHASE DE CONSTRUÇÃO

PONTE DO CAXIMBAU em Pinheiro - E. do

Dois vãos de 16 metros. Projecto do autor. Execução dos eng.^{os} Octavio C

Acha-se muitas vezes referida no seu livro de Pontes e com outra

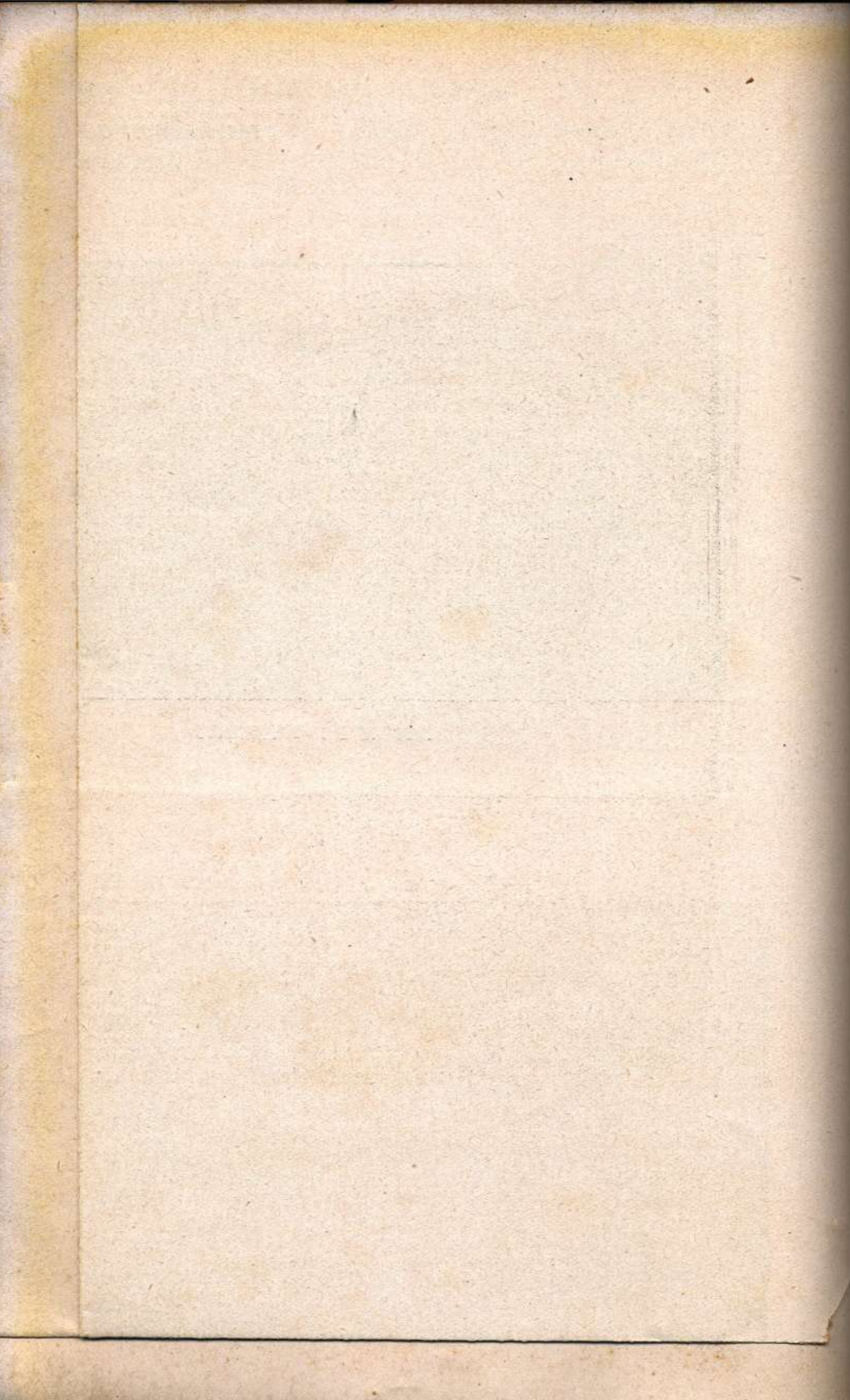


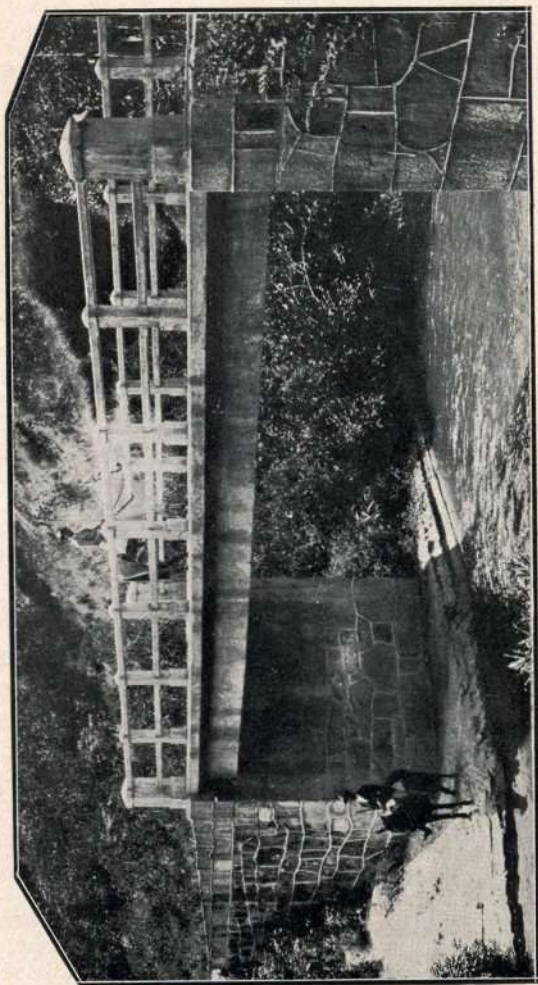
PONTE DO CAXIMBAU



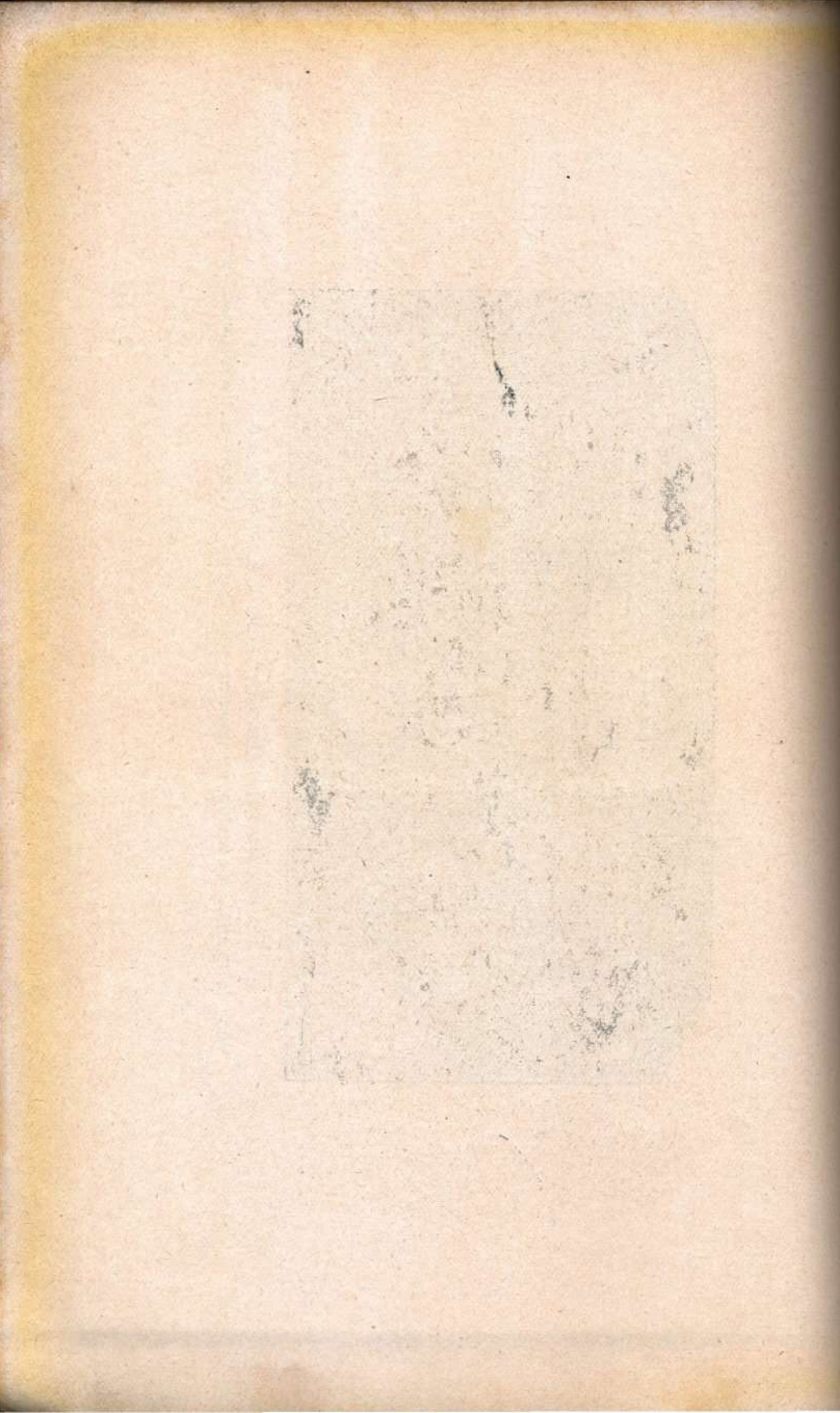


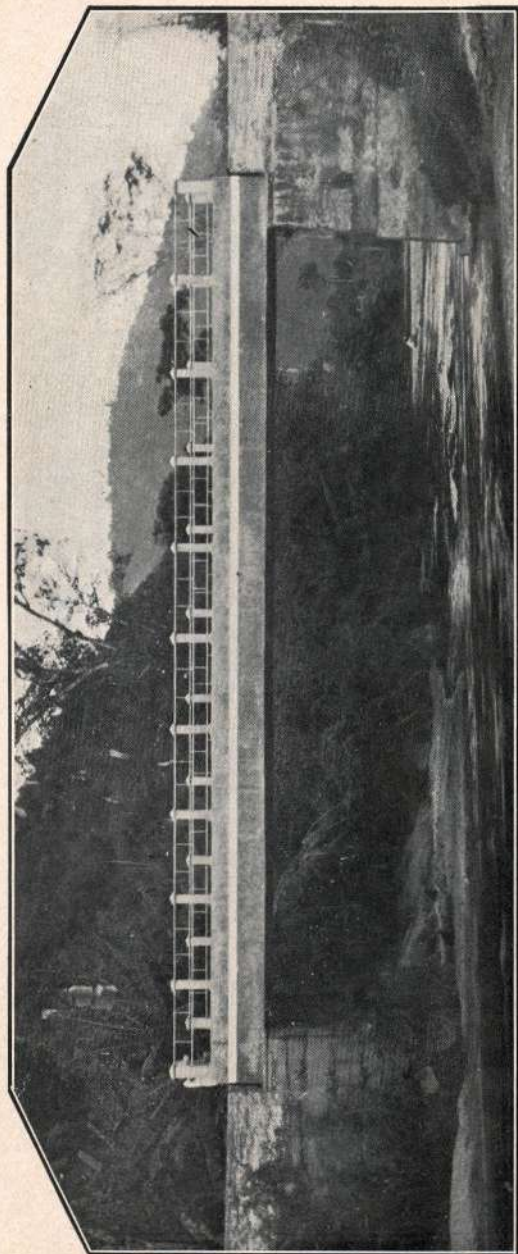
VISTA POR BAIXO



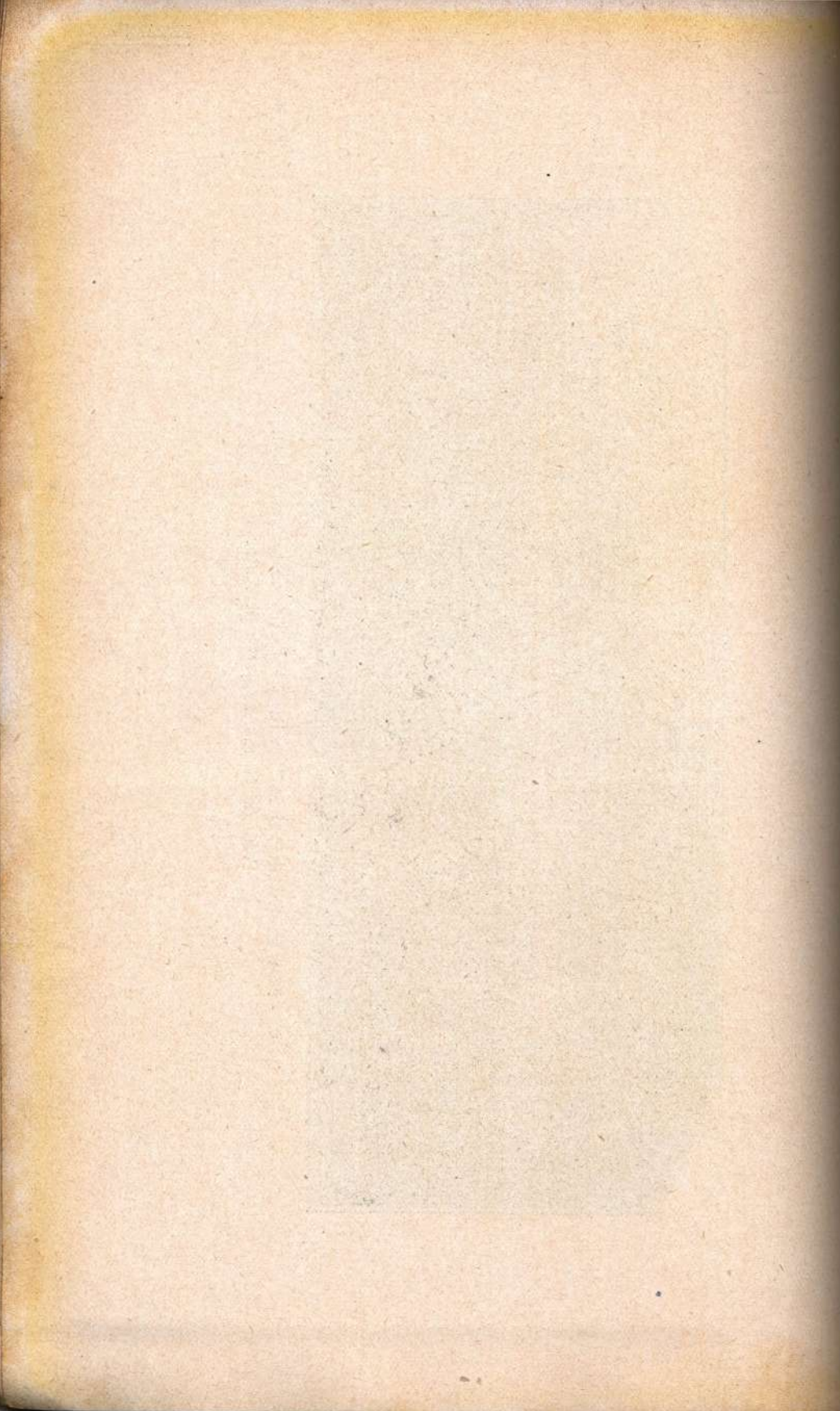


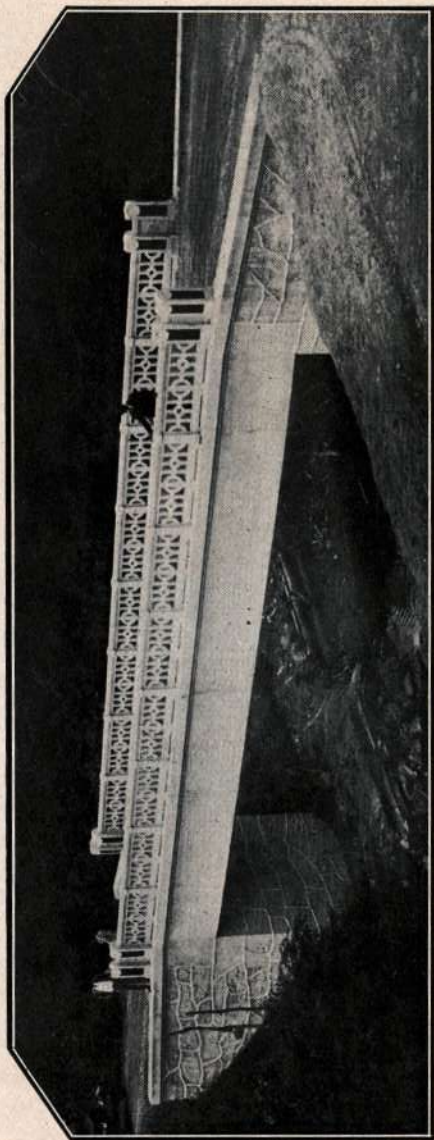
PONTE NA ESTRADA GLYCERIO A S. FRANCISCO
Vão de 14 ms. Construída no governo Raul Veiga. Projecto e fiscalização do autor.



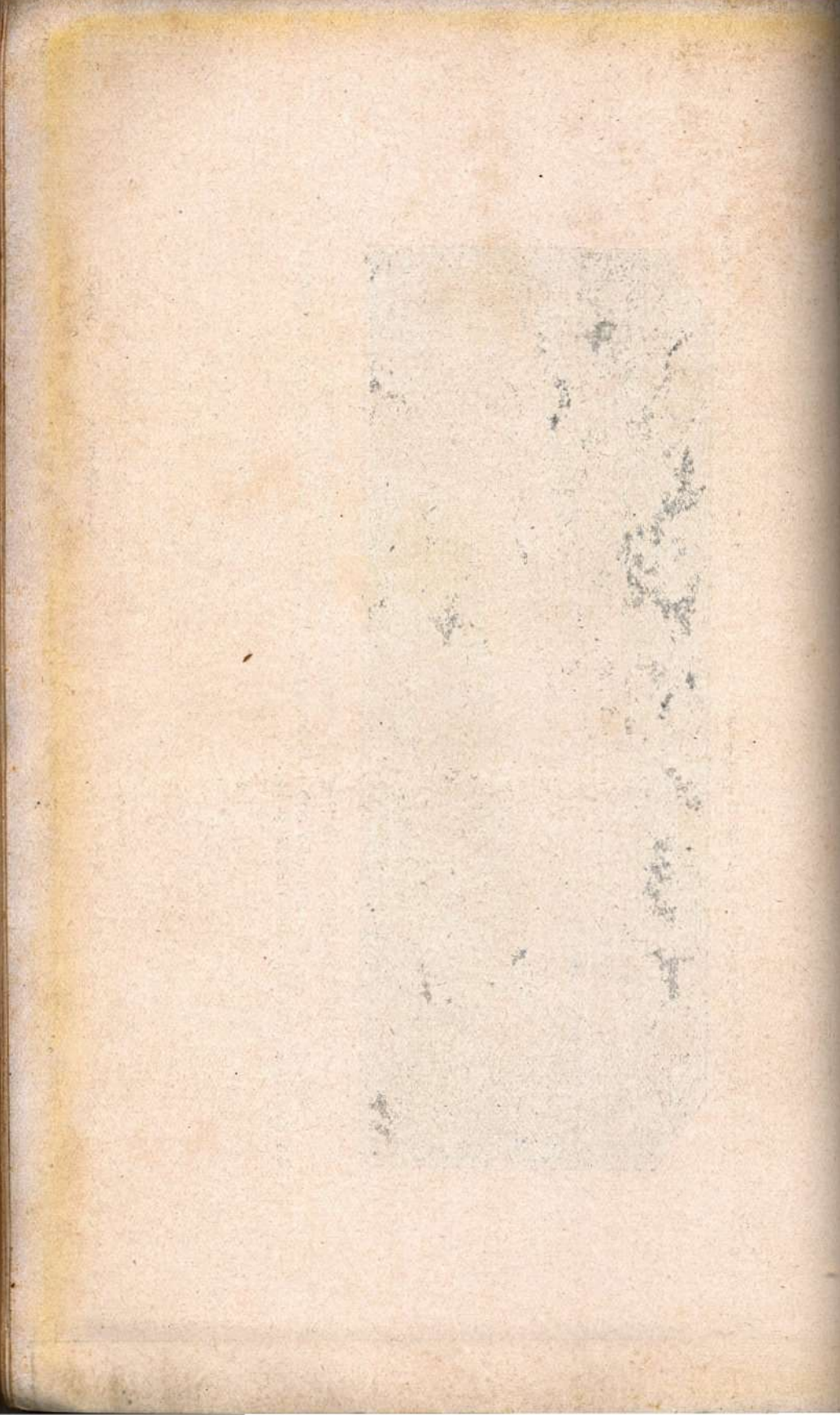


PONTE SOBRE O RIO BARRA MANSA - Em Barra Mansa
Vão de 16 ms. Projecto do Autor



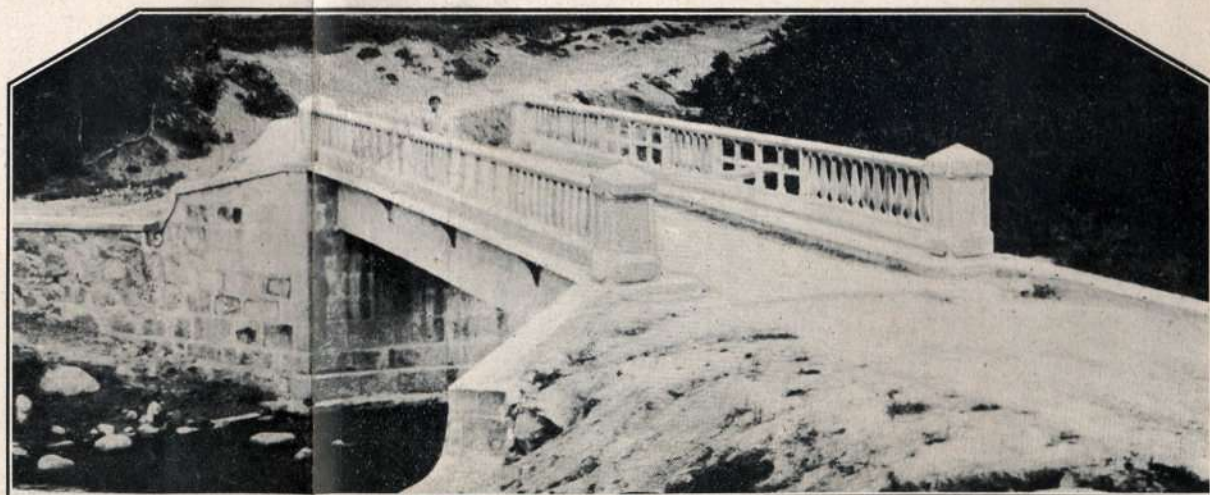
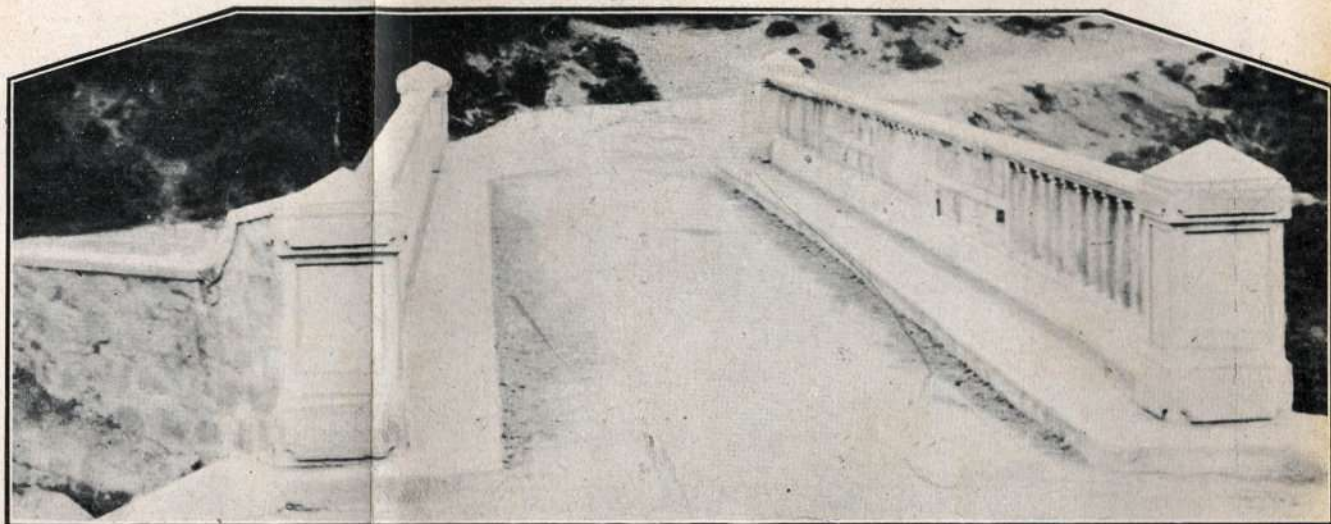


PONTE SOBRE O RIO PRETO - Estrada de Therezopolis a Friburgo
Vão de 17 ms. Construção sob a direcção do Dr. Octavio V. Coimbra que projectou as guardas. (Município de Therezopolis).



PONTE DO OLEO - sobre o Rio S. Pedro
(MUNICIPIO DE MACAHE)

Vão livre de 16 metros. Construção em concreto armado.

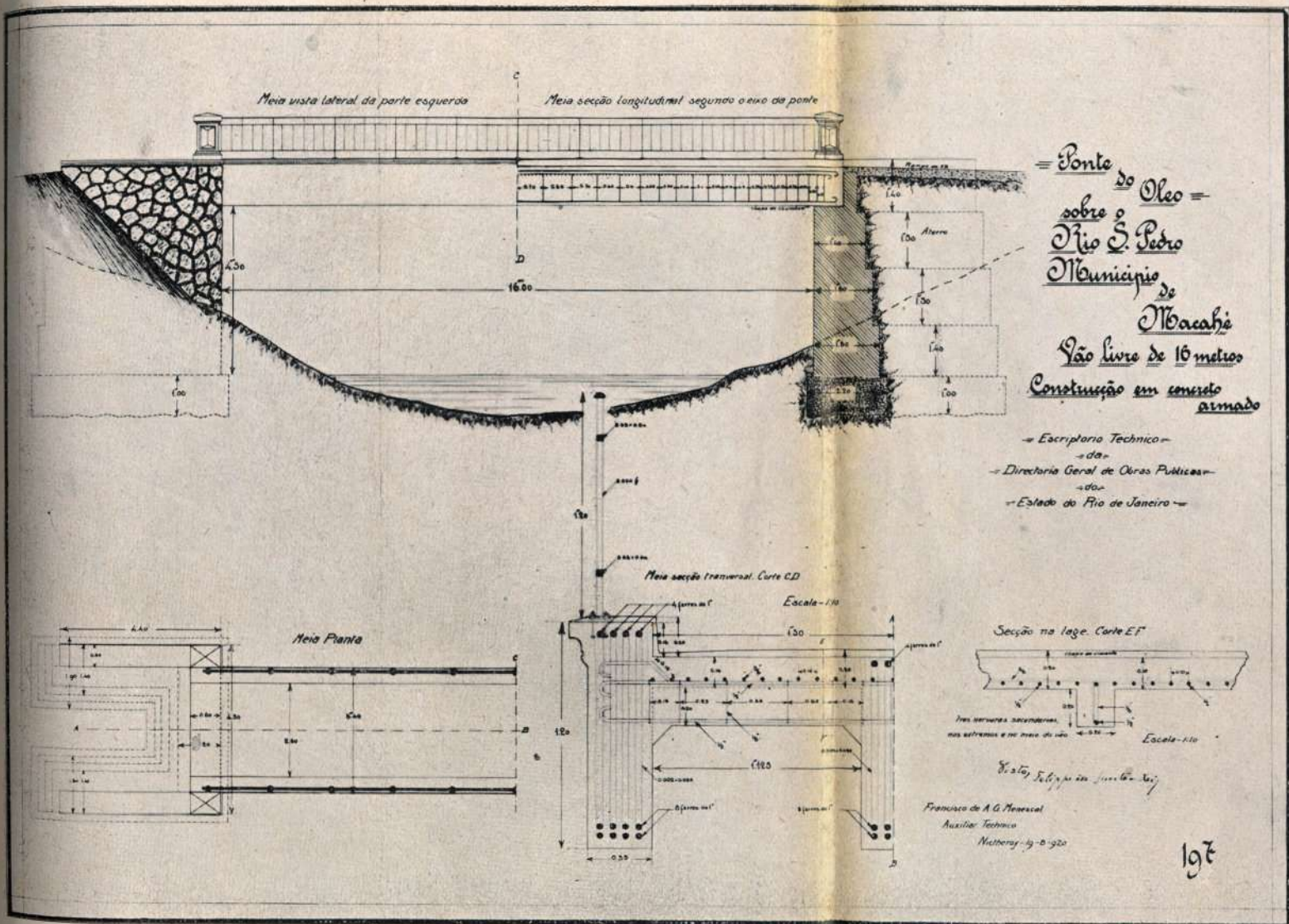


PONTE DO OLEO

o de 16 ms. Projecto do autor. Execução do Dr. Fausto Costa (1921).
a o Dr. Mario Paranhos executou as pontes do Cassiano e Não Pensei (1923).
Acha-se descripta no seu livro de Pontes na pag. 141.

PONTE DO OLEO - sobre o Rio S. Pedro
(MUNICIPIO DE MACAHÉ)

Vão livre de 16 metros. Construção em concreto armado.



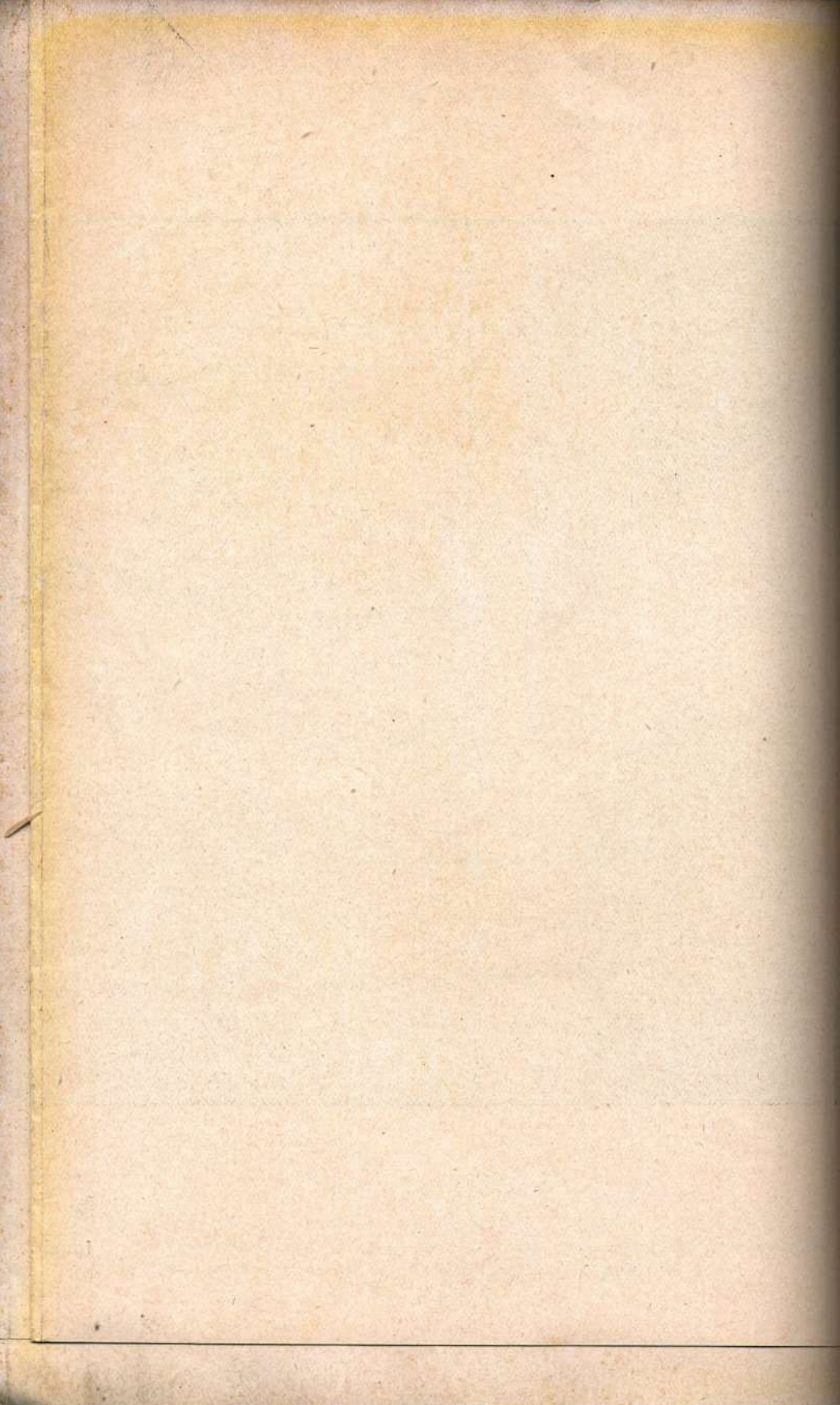
== Ponte do Oleo ==
sobre o Rio S. Pedro
Município de Macahé
Vão livre de 16 metros
Construção em concreto armado

— Escripção Technica —
— da —
— Diretoria Geral de Obras Publicas —
— do —
— Estado do Rio de Janeiro —



PONTE DO OLEO

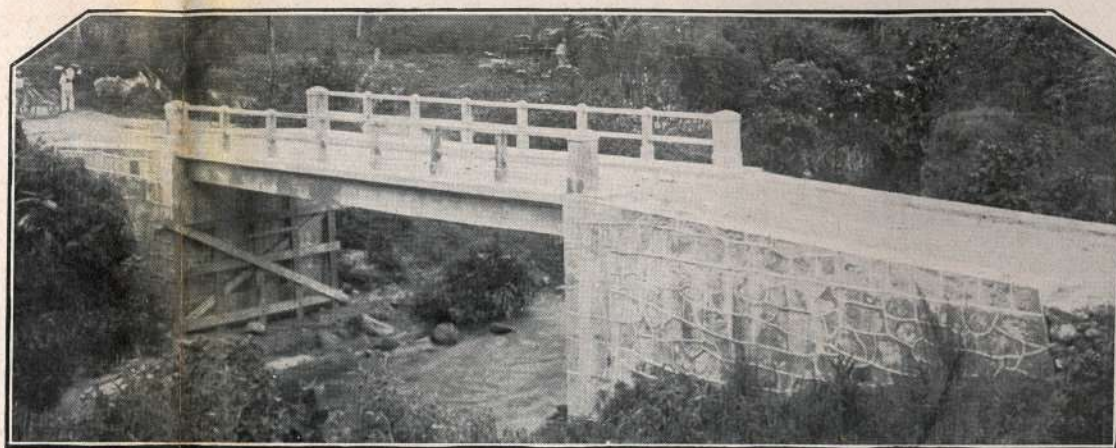
Vão de 16 ms. Projecto do autor. Execução do Dr. Fausto Costa (1921).
Igual a essa o Dr. Mario Paranhos executou as pontes do Cassiano e Não Pensei (1921)
Acha-se descripta no seu livro de Pontes na pag. 141.



PONTES PARA ESTRADA DE RODAGEM EM CONCRETO ARMADO



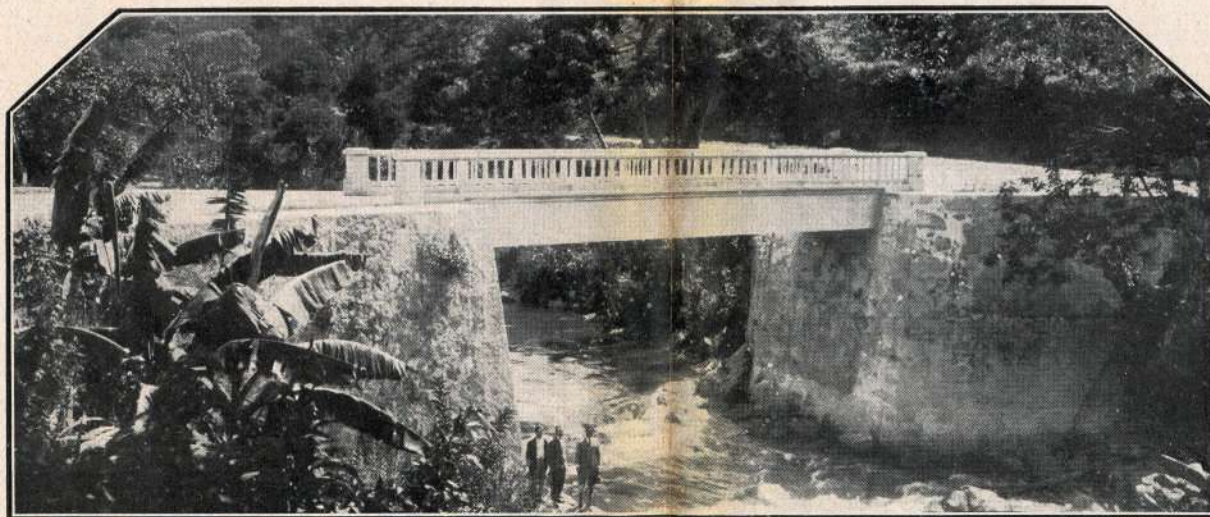
PHASE DE CONSTRUÇÃO



A MESMA PONTE CONCLUIDA

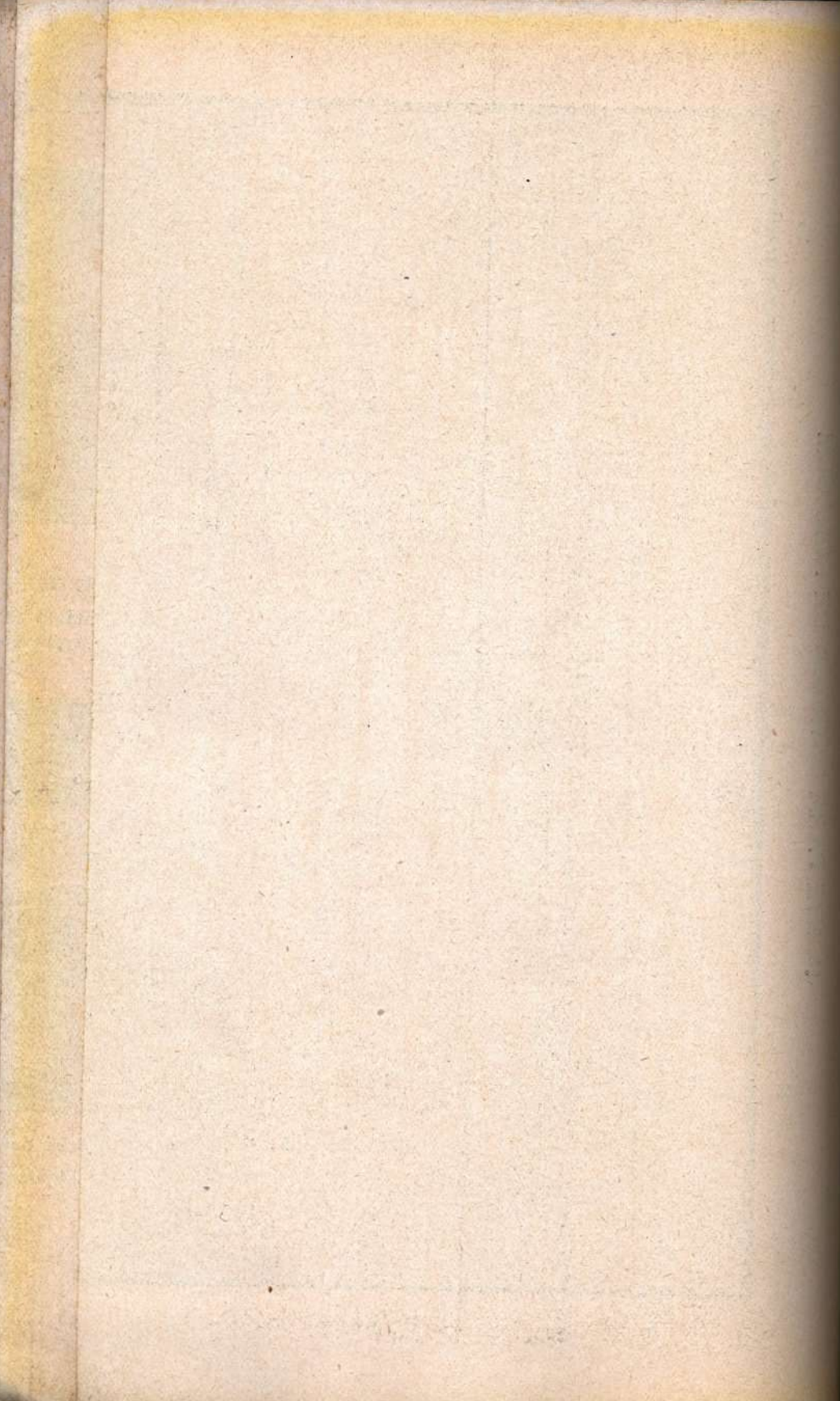
PONTE DO FRAIDE

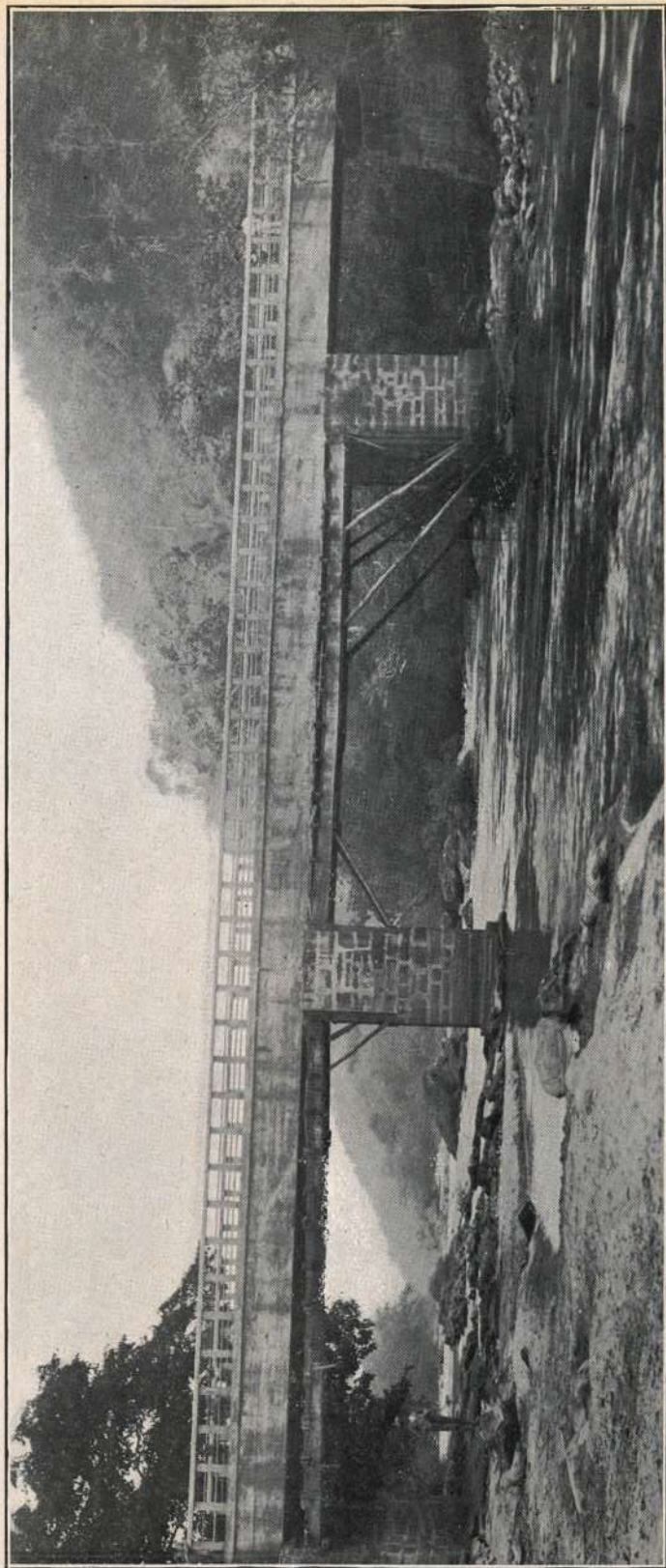
Vão de 14 ms. Projecto e fiscalização do autor.
Construida no governo Raul Veiga.



PONTE NA ESTRADA VARZEA - S. José do Rio Preto (Município de Therezopolis)

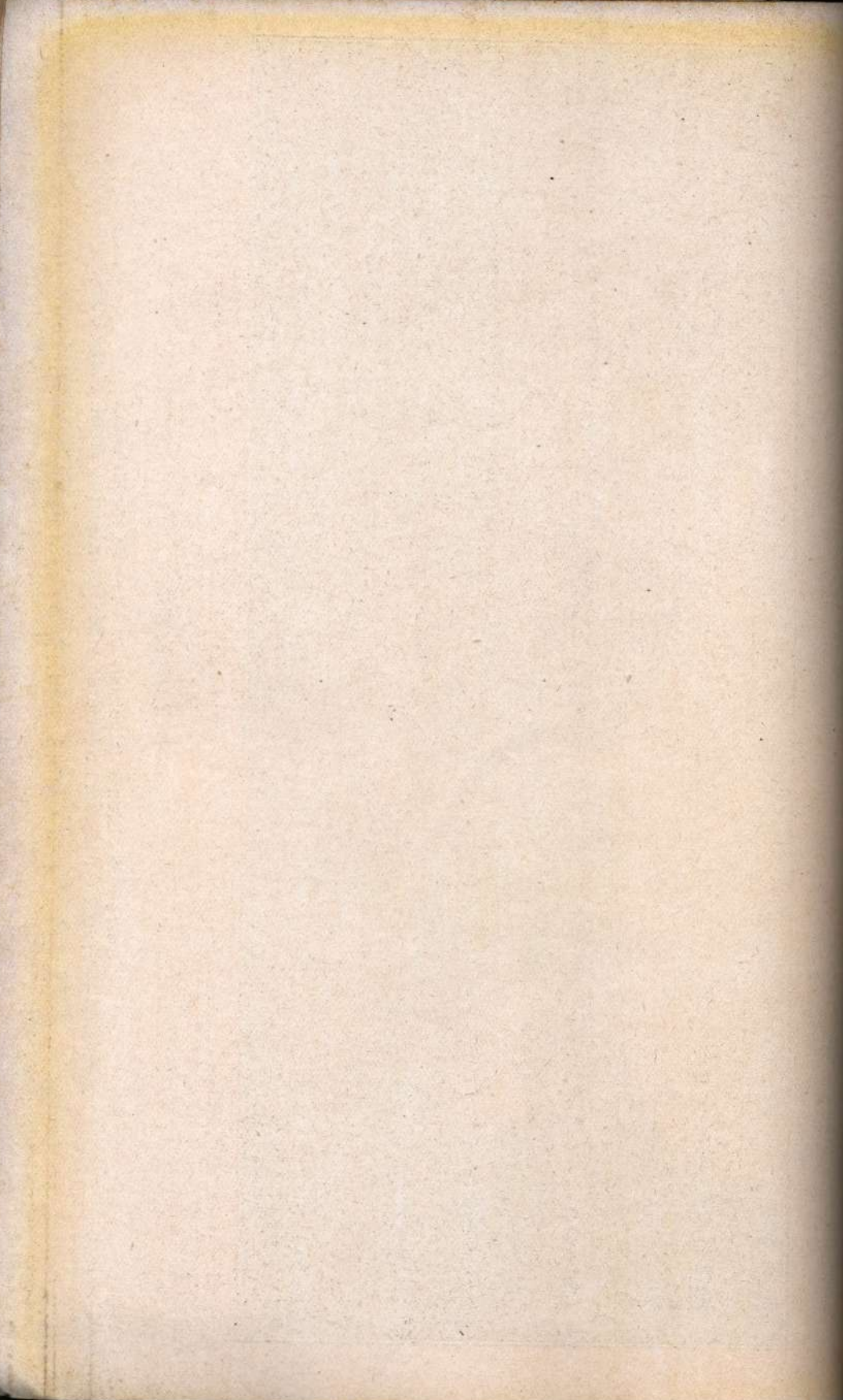
Vão de 15 ms. Construção dirigida pelo Dr. Octavio V. Coimbra





PONTE DO FARIA

Sobre o Rio Grande (Município de S. Maria Magdalena).
3 vãos de 14.5; 15.3 e 16.0 ms. Projecto do autor. Construção do Dr. Firmo Dutra.
Análoga a essa o autor projectou as pontes da Saudade e Macapá.



PONTE RAUL VEIGA — Em Santo Antonio de Padua
Com cerca de 170 m. de extensão em vigas Vierendeel.

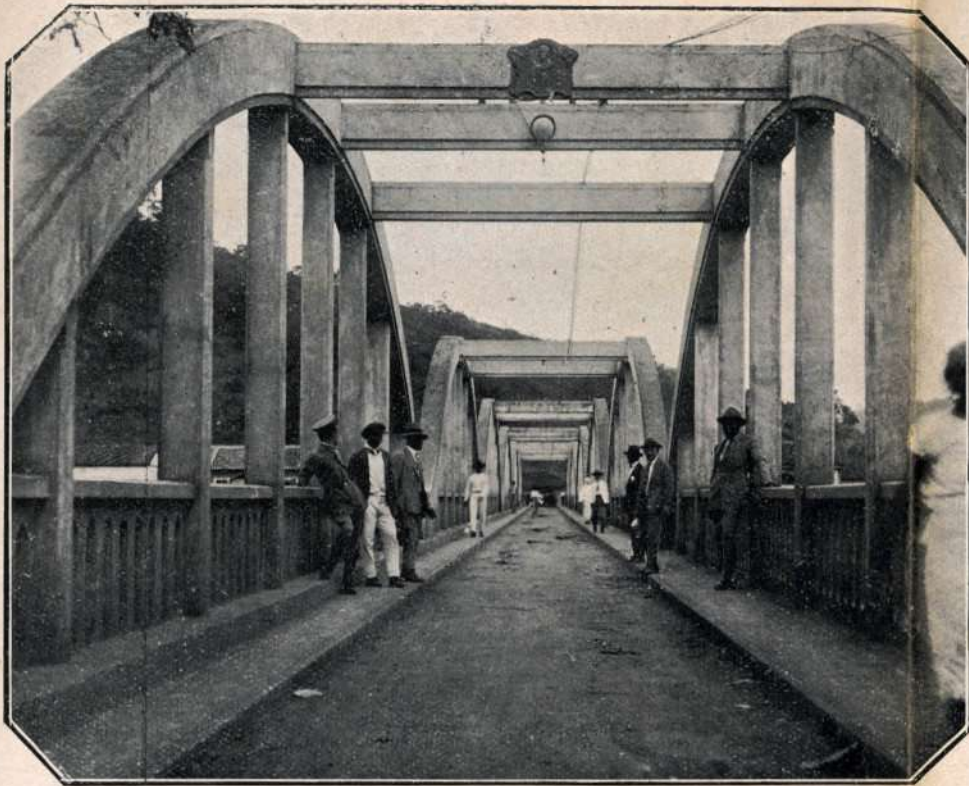


OUTRA VISTA

nsão no Brasil. Consta de
ponte um dos capitulos de



PONTE RAUL VEIGA — Em Santo Antonio de Padua
Com cerca de 170 m. de extensão em vigas Vierendeel.



VISTA DE FRENTE

A ponte Raul Veiga é uma das primeiras em extensão no Brasil. Consta de seis arcos de 29.5 ms. de vão. O autor dedicou a essa ponte um dos capítulos de seu livro de - Pontes de Concreto Armado (1922).

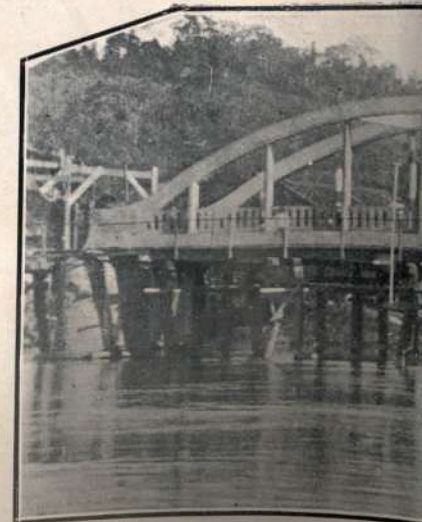


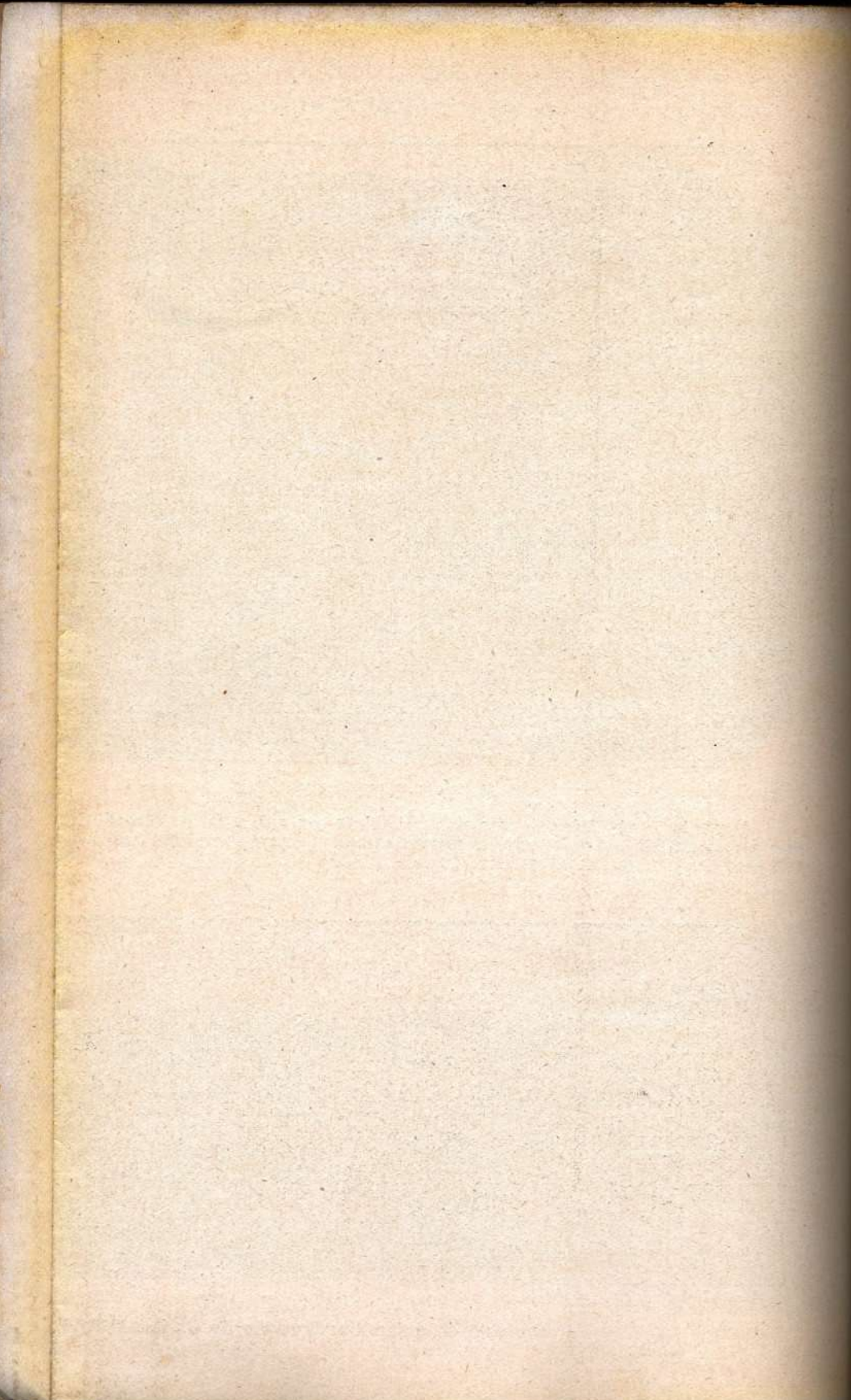
OUTRA

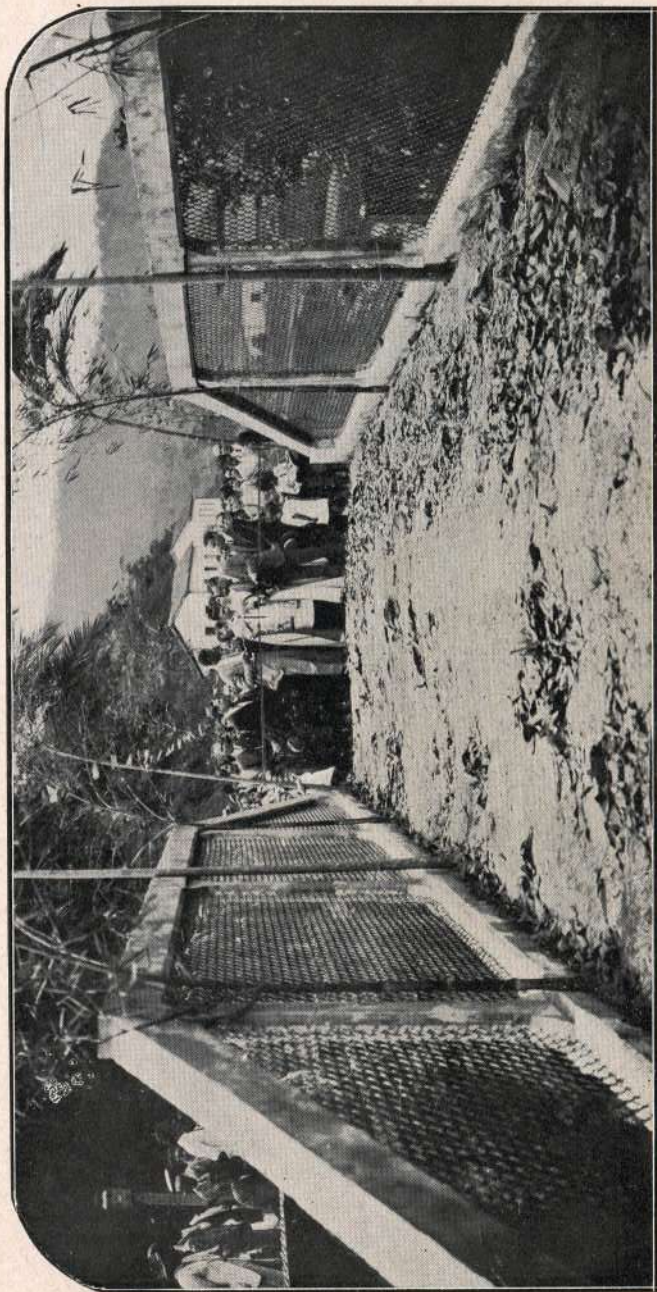


VISTA DE LADO

Projecto do autor. Construcção de Christiani & Nielsen



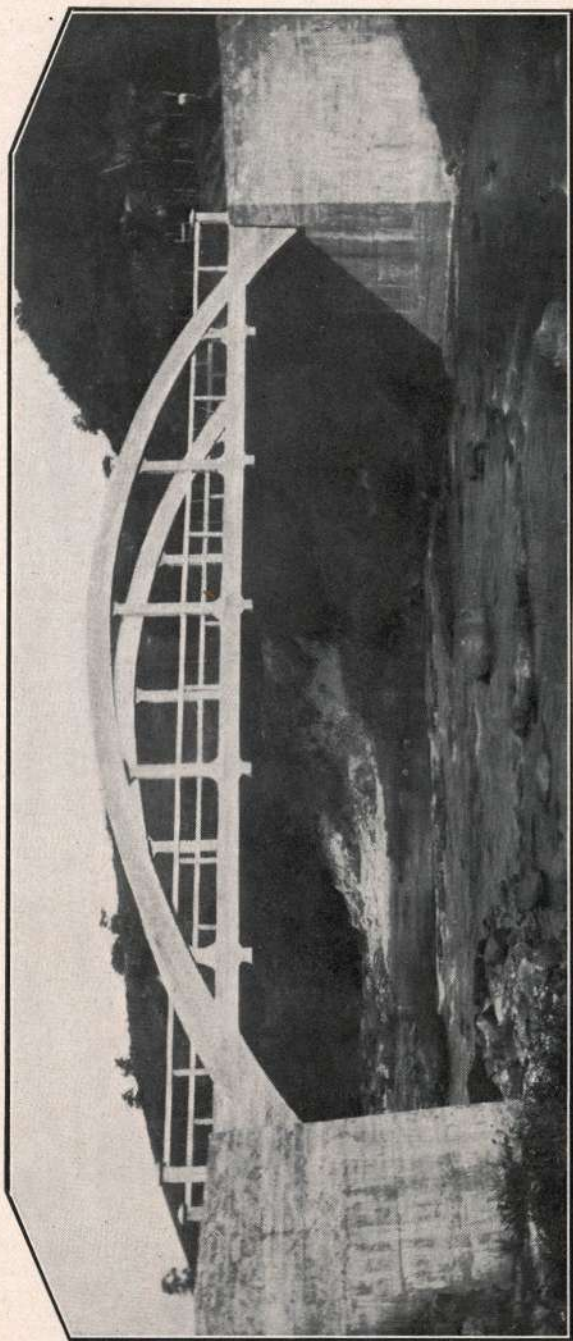




PONTE DO TRIUMPHO

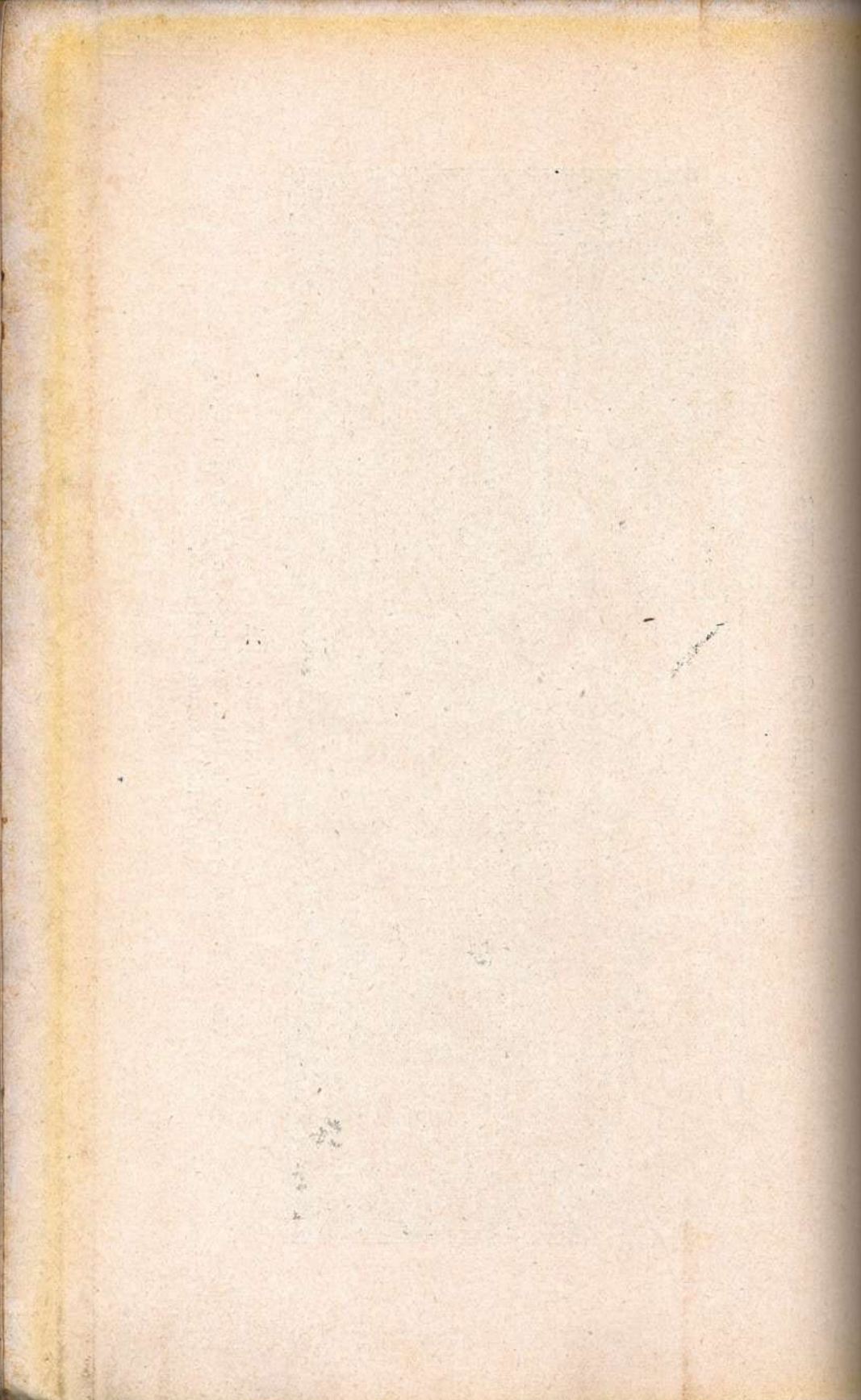
Projecto do autor. Execução do Dr. Firmo Dutra.
Fiscalisação do Dr. Francisco Kingston. Viga Vierendeel em cordas
parallelas (E. do Rio)



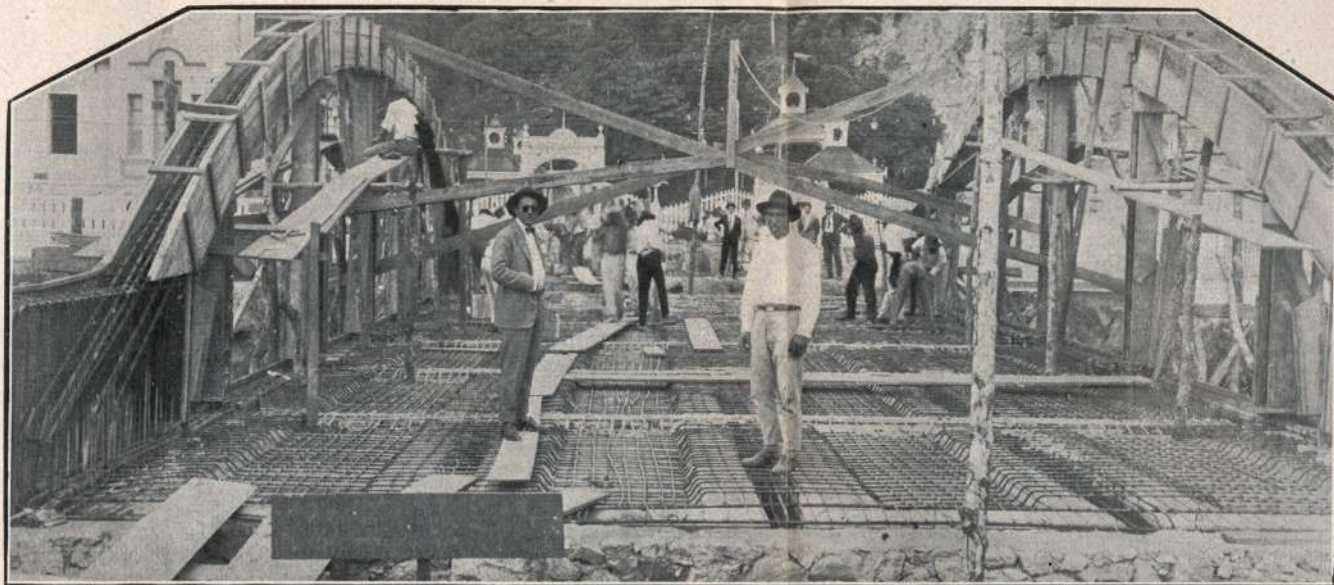


PONTE DE UBA

Vão de 23 ms. Projecto do autor. Execução do Dr. Gustavo Lyra.
(E. do Rio) Executada em 1925.

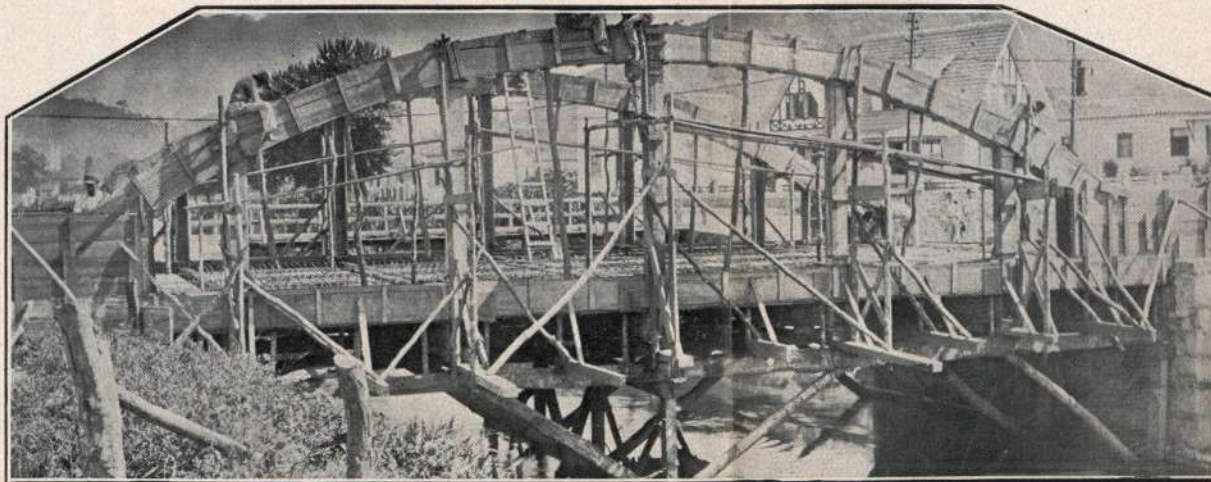


TIPOS DIVERSOS DE PONTES



PONTE CORONEL ANTUNES
(Vista de frente)

Vendo-se a ossatura metálica do estrado.



PONTE CORONEL ANTUNES
(Vista de lado)

Vão de 18 ms. Projecto e fiscalização do autor. Construção de Curtys & Irmão. Executada na cidade de Friburgo para a prefeitura de Nova Friburgo (Desenho de 1926 a Março de 1927).

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

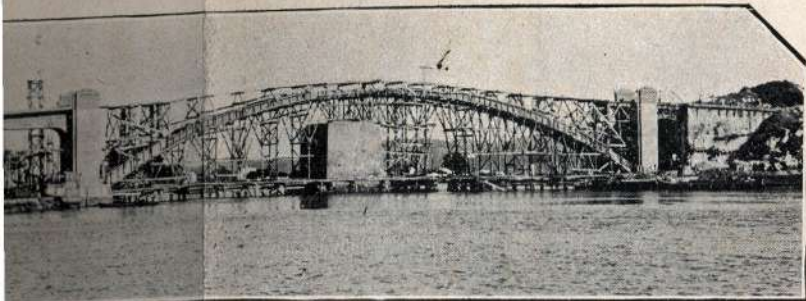
PHYSICS DEPARTMENT
5712 S. DICKINSON ST.
CHICAGO, ILL. 60637

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
PHYSICS DEPARTMENT
5712 S. DICKINSON ST.
CHICAGO, ILL. 60637

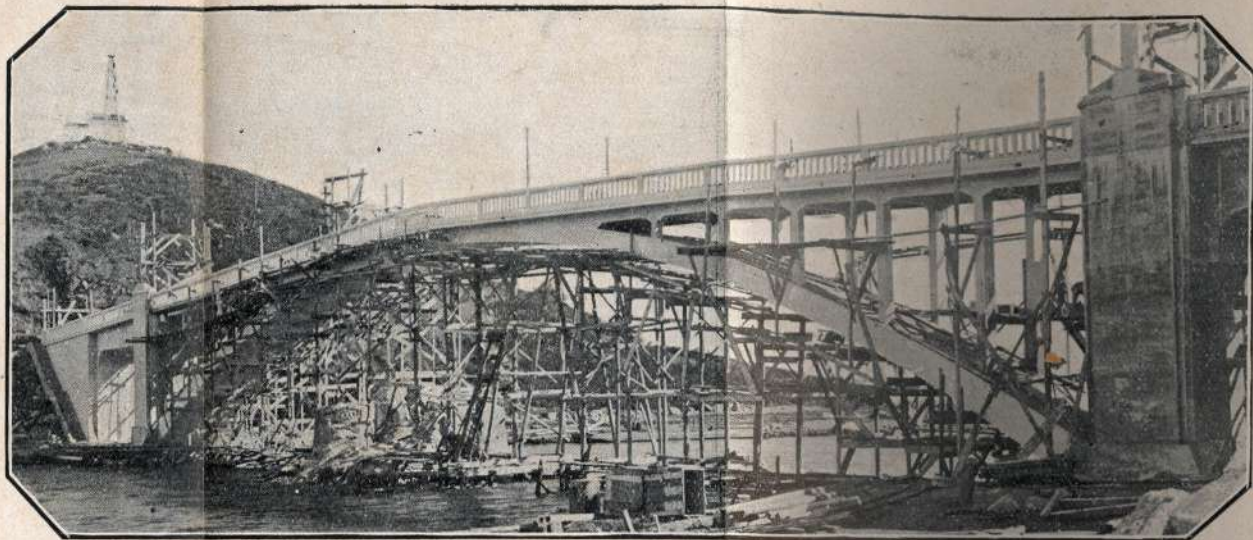
PONTE DE ITAJURU

em Cabo Frio—Hoje Feliciano Sodré

O MAIOR VÃO DE CONCRETO ARMADO, NA AMERICA DO SUL: 67 MS.



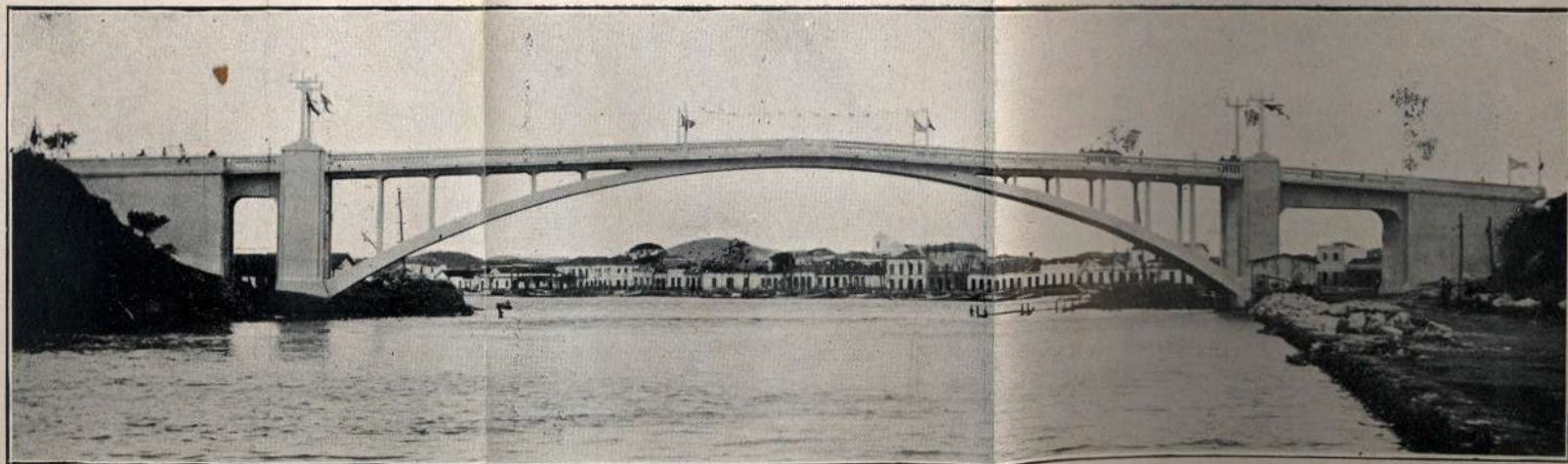
Phase de construção, em Fevereiro de 1926



Phase de construção, em Março de 1926



(metallica)



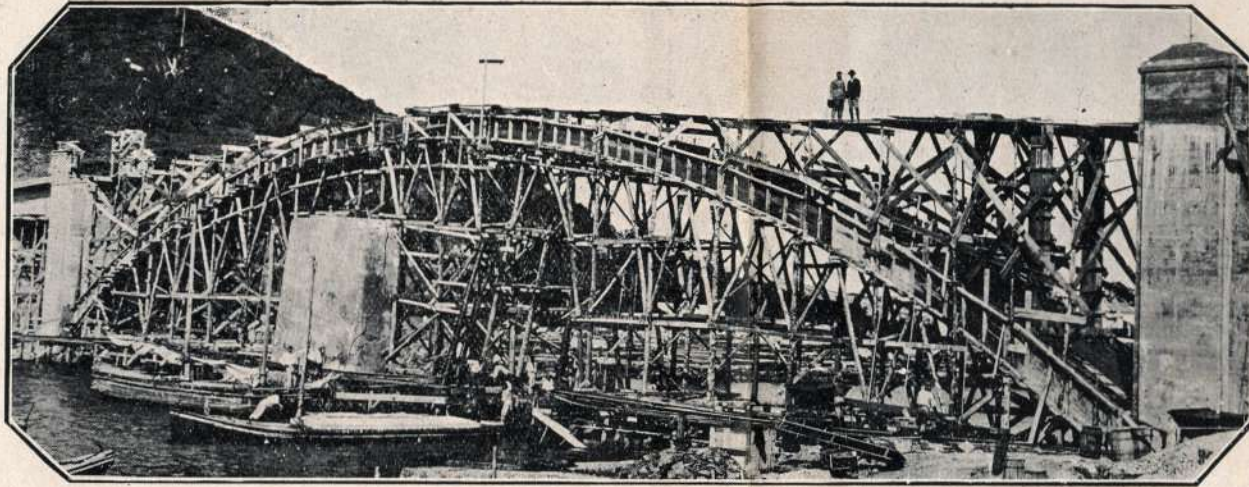
Ponte concluida

...reco do concreto armado. Dahi, não ser construida até 1925, dando margem a varios projectos: a) em cantaria (Dr. Meira Junior); um do autor (gov. Raul Veiga) em
tor projectou outro (1925) em concreto armado e viga cõntinua (aproveitando o pilar central), que servio de base á concurrencia (1925), substituindo-se depois um arco unico por
autor. O autor foi fiscal, por parte do Estado, daquella firma durante a construcção: Dez. de 1925 a Maio de 1926.

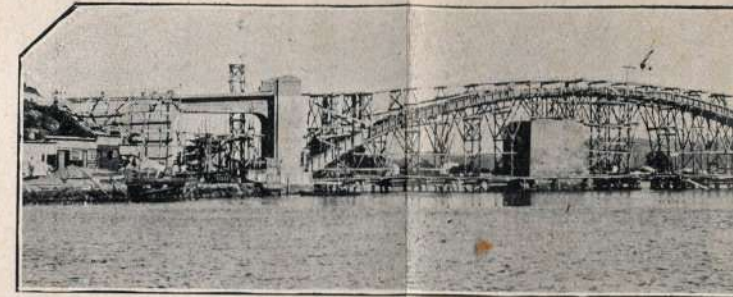
PONTE DE ITAJURU

em Cabo Frio—Hoje Feliciano Sodré

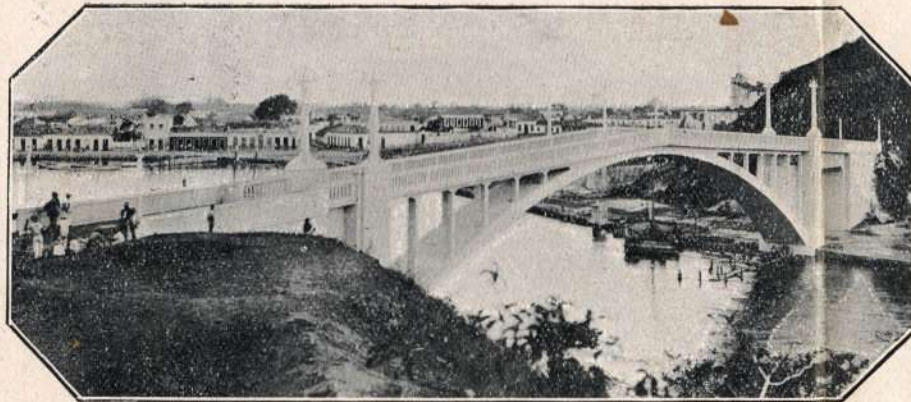
PONTE EM ARCO — E' O MAIOR VÃO DE CONCRETO ARMADO,



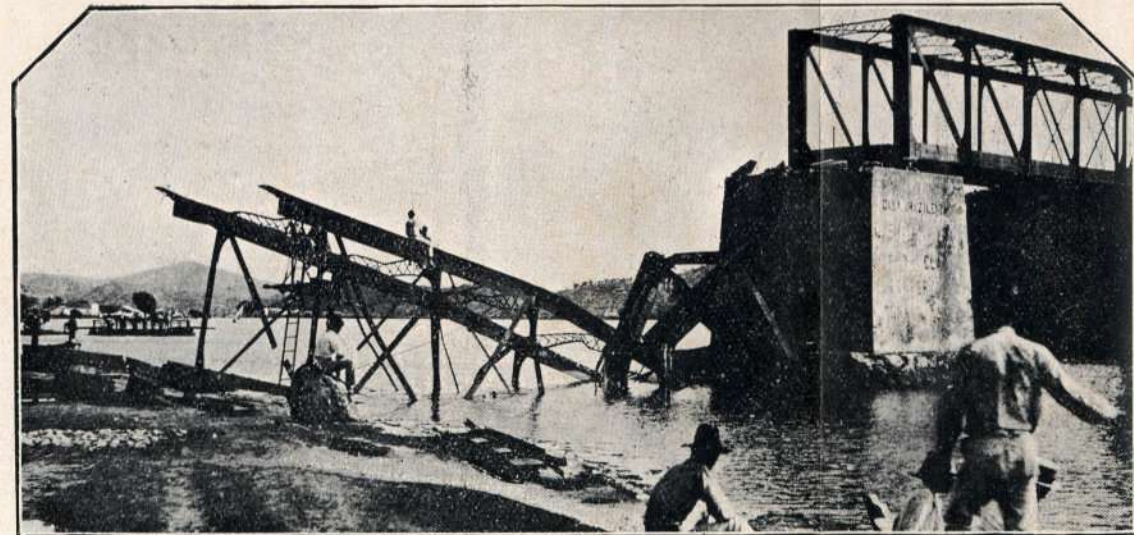
Phase de construção, em Janeiro de 1926



Phase de construção, em Fevereiro de 1926

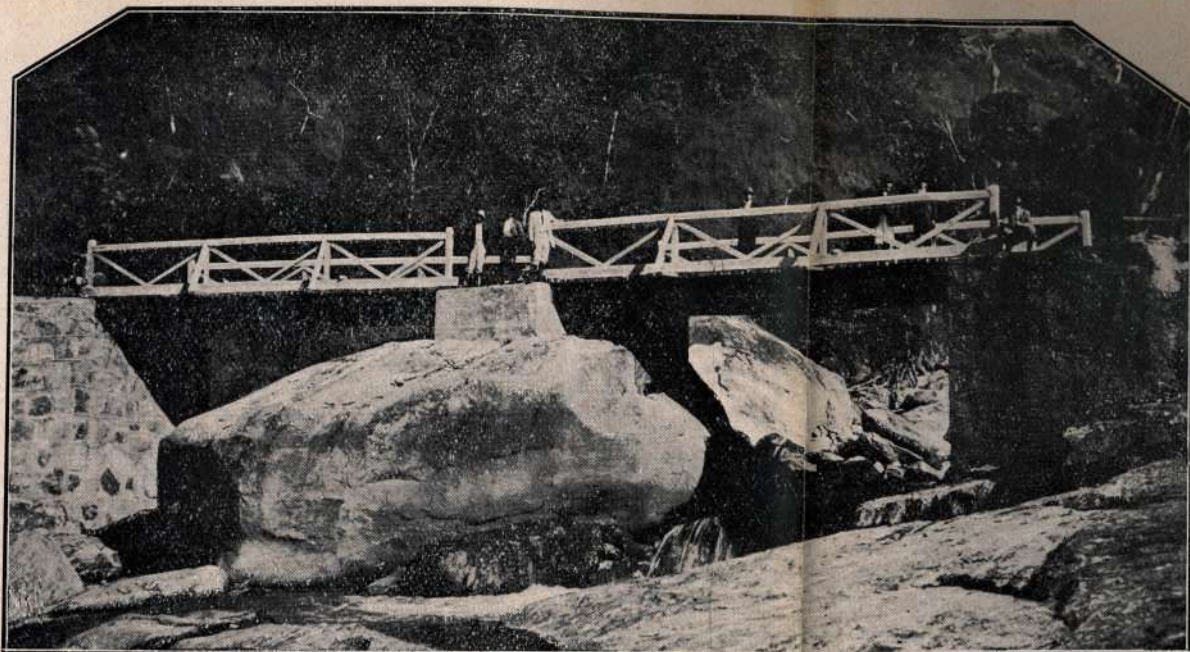


Ponte concluída

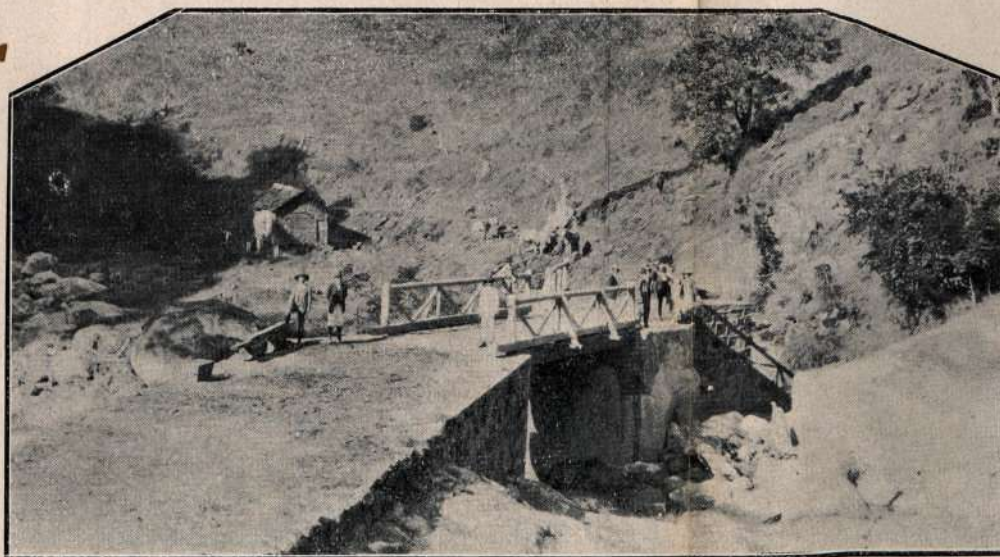


Ponte velha (metálica)

Cahindo um vão da ponte metálica em 1920, provocou pelas condições locais, fortes polémicas a respeito do emprego do concreto armado. Dahi, não se usou mais o concreto armado; um da firma Meanda Curly & Cia.; tres da firma Christiani & Nielsen (1923) todos em concreto armado. O autor projectou outro (1925) em concreto armado, proposta da firma Christiani & Nielsen e com parecer favoravel do autor. O autor foi fiscal, por parte do Estado.

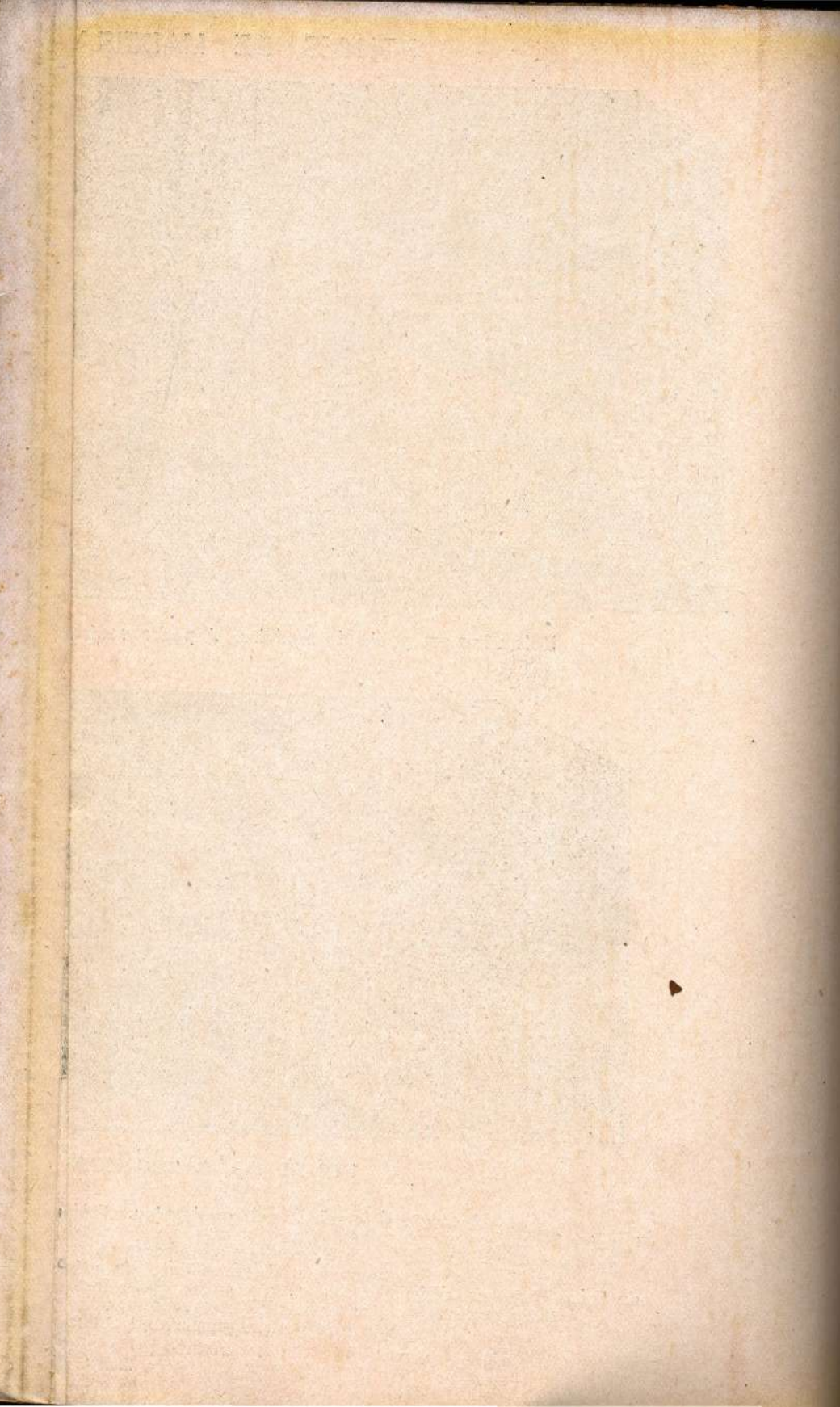


Dois vãos em ponte de madeira. A pedra central servio de pilar.



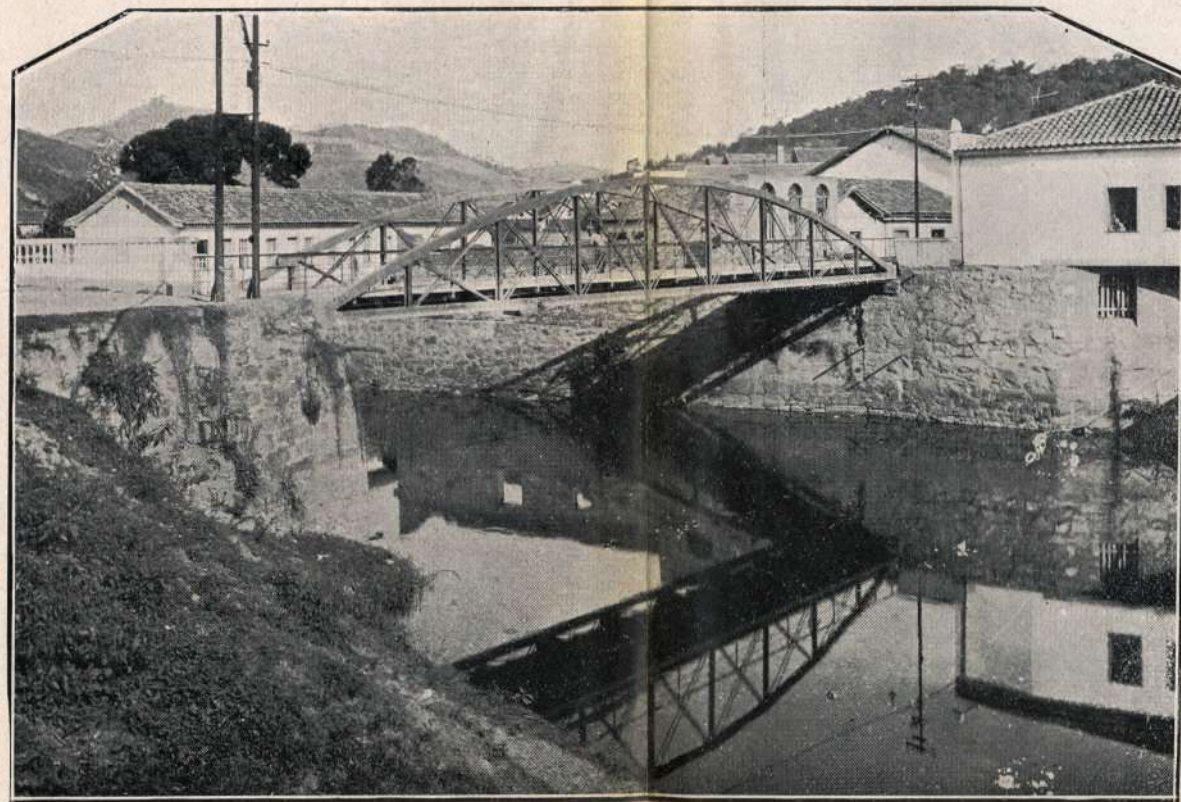
PONTE DO CAROCANGO

Execução do eng.^o Francisco Kingston. Projecto do autor.
 O autor fez muitos outros projectos como: duas pontes sobre o rio Turvo (uma de 12 ms. e outra de 29 ms. de vão) e em vigas armadas; a do Iserio sobre o rio Negro; a do Corrego do Fundão (estrada de Aparecida a Sapucaia; a da Gramma; da Caixa Grande; da Agua Ferro etc., alguns dos quaes foram construidos, porém, sem que fosse possível o autor conseguir photographias, pela exiguidade do tempo



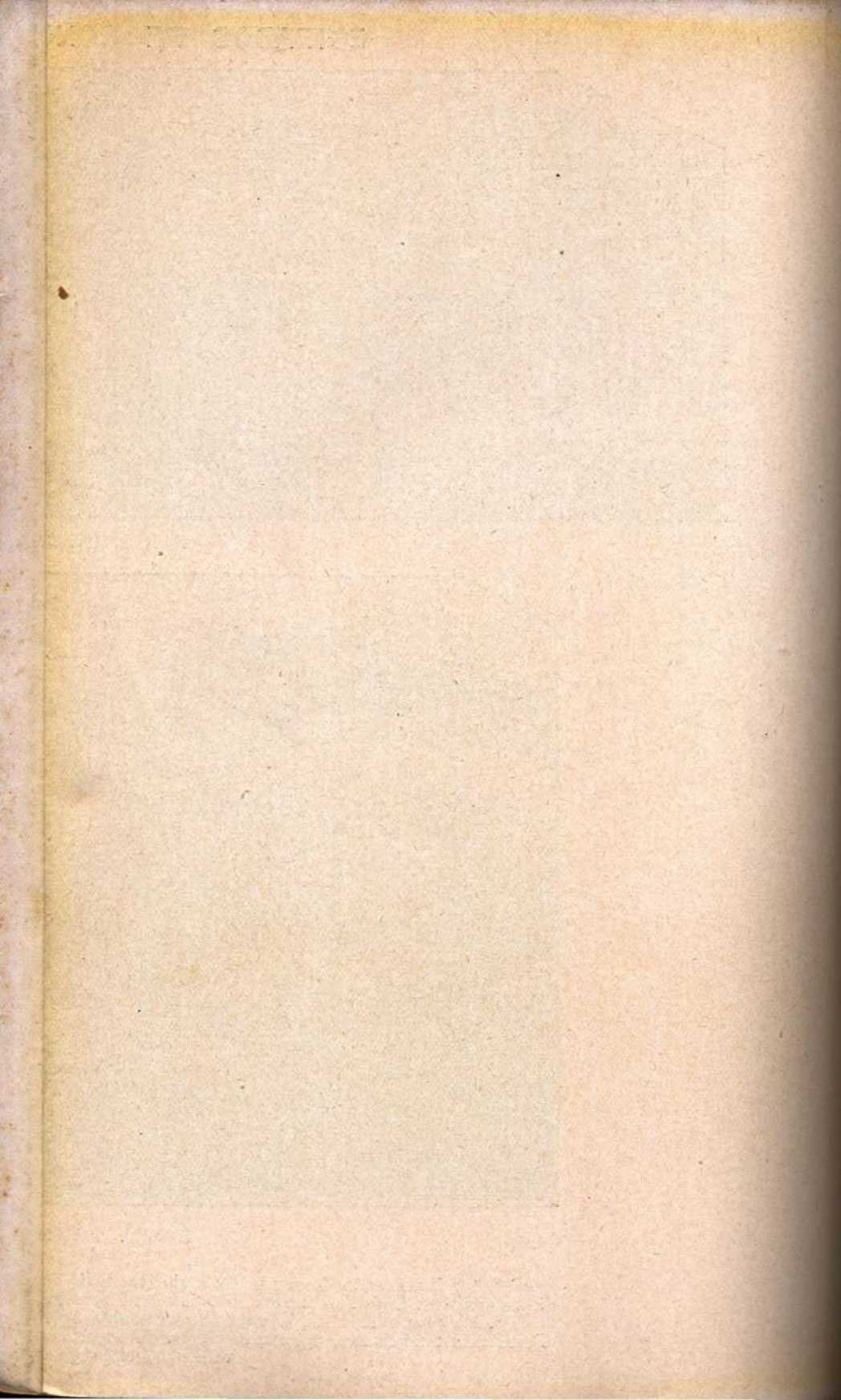


PARAHYBA DO SUL



BARRA DO PIRAHY

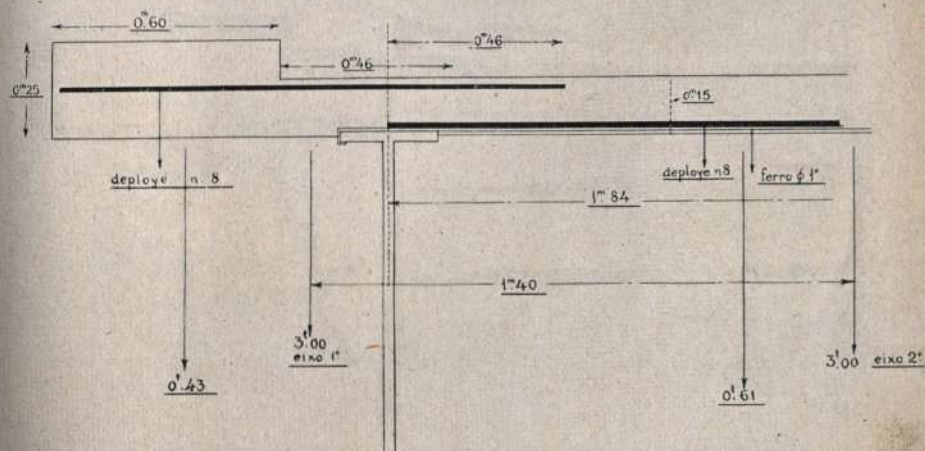
O autor faz menção do seu projecto da Barra do Pirahy (construção do Dr. Octavio Coimbra); da estação do Commercio (execução do Dr. Mario Paranhos); de Parahyba do Sul (construção do



ESTRADO ARMADO COM TÉLA DEPLOYÉ

Projecto da ponte de S. Fidelis

— na cidade de S. Fidelis —



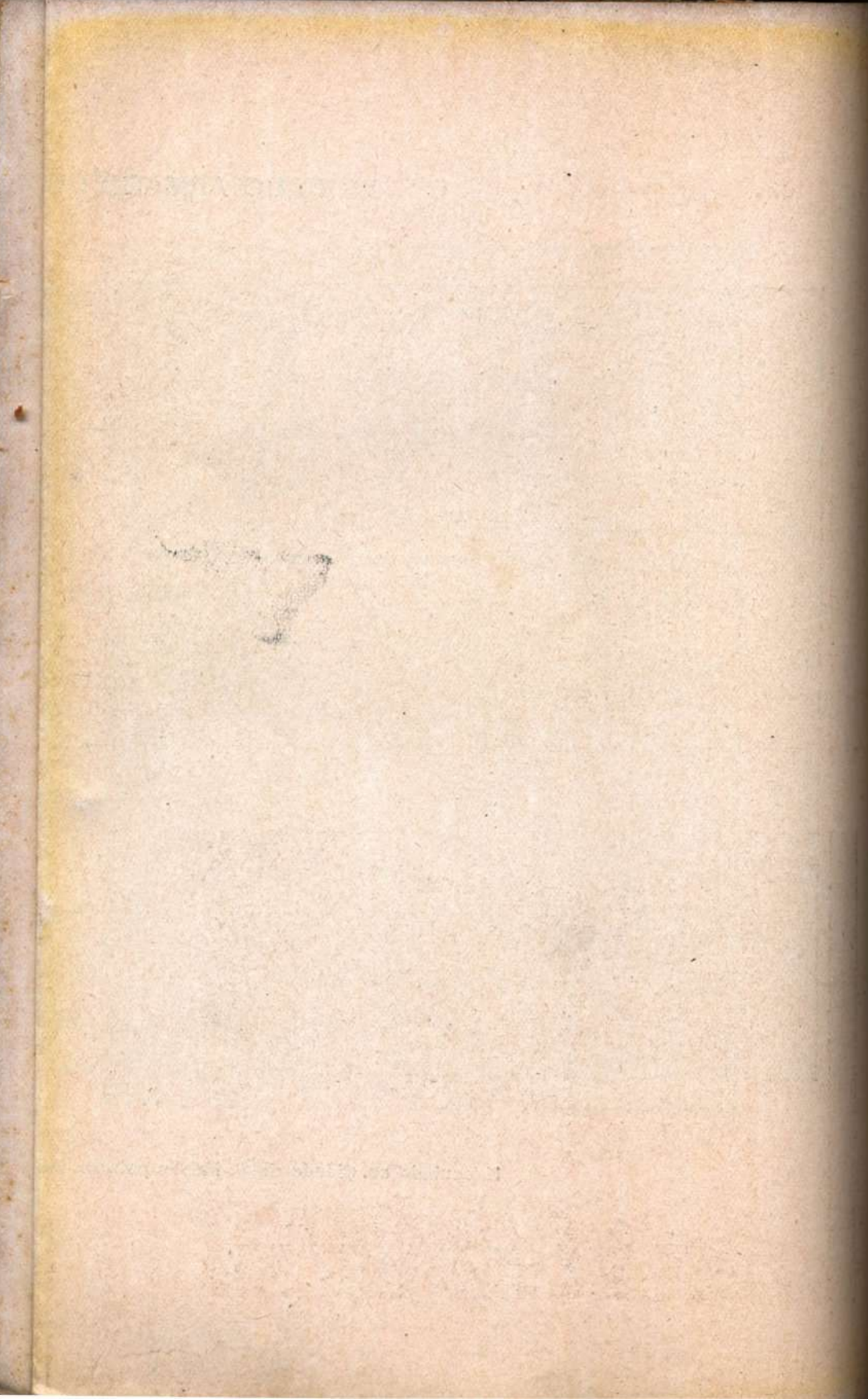
Directoria Geral de Obras Publicas do Estado do Rio de Janeiro

Escritorio Technico, Junho de 1920

3 Santos Reis
 10.6.20
[Signature]



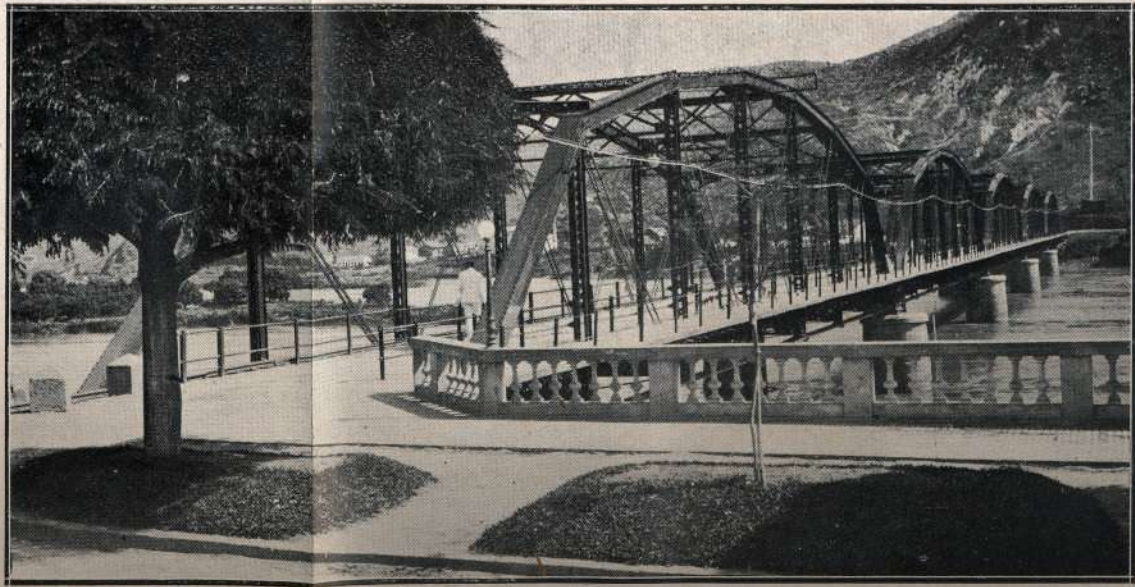
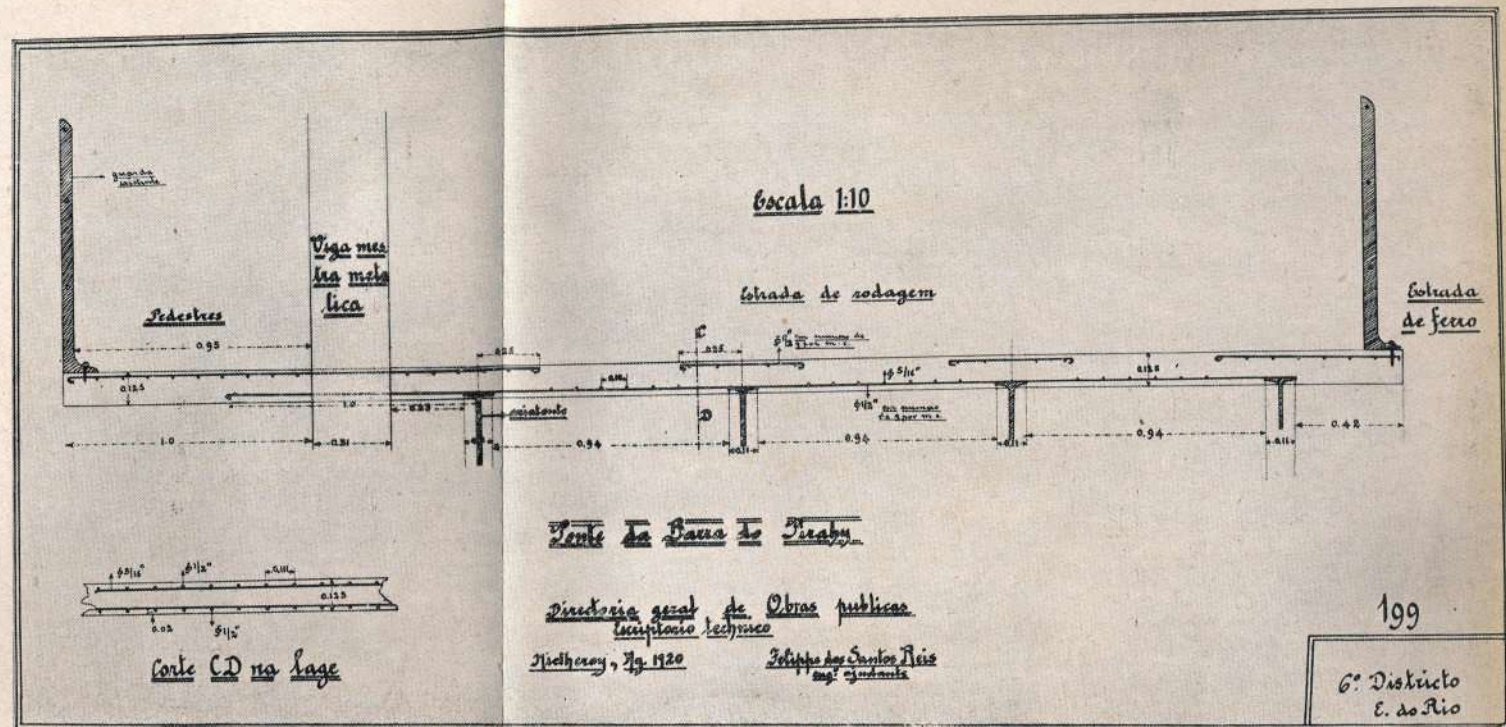
Executado na Cidade de S. Fidelis pelo Dr. Aristides de Figueiredo. Projecto do autor.



ESTRADO NA BARRA DO PIRAHY



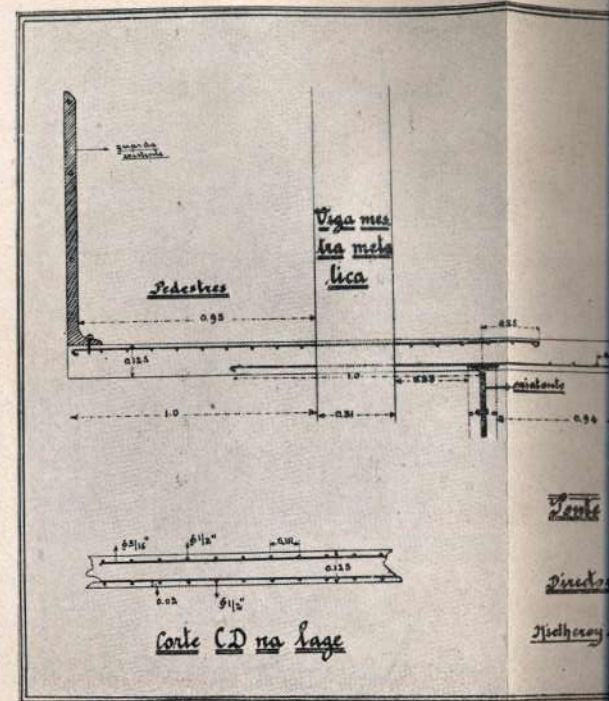
Arco e pedestres. Projecto Octavio V. Coimbra.

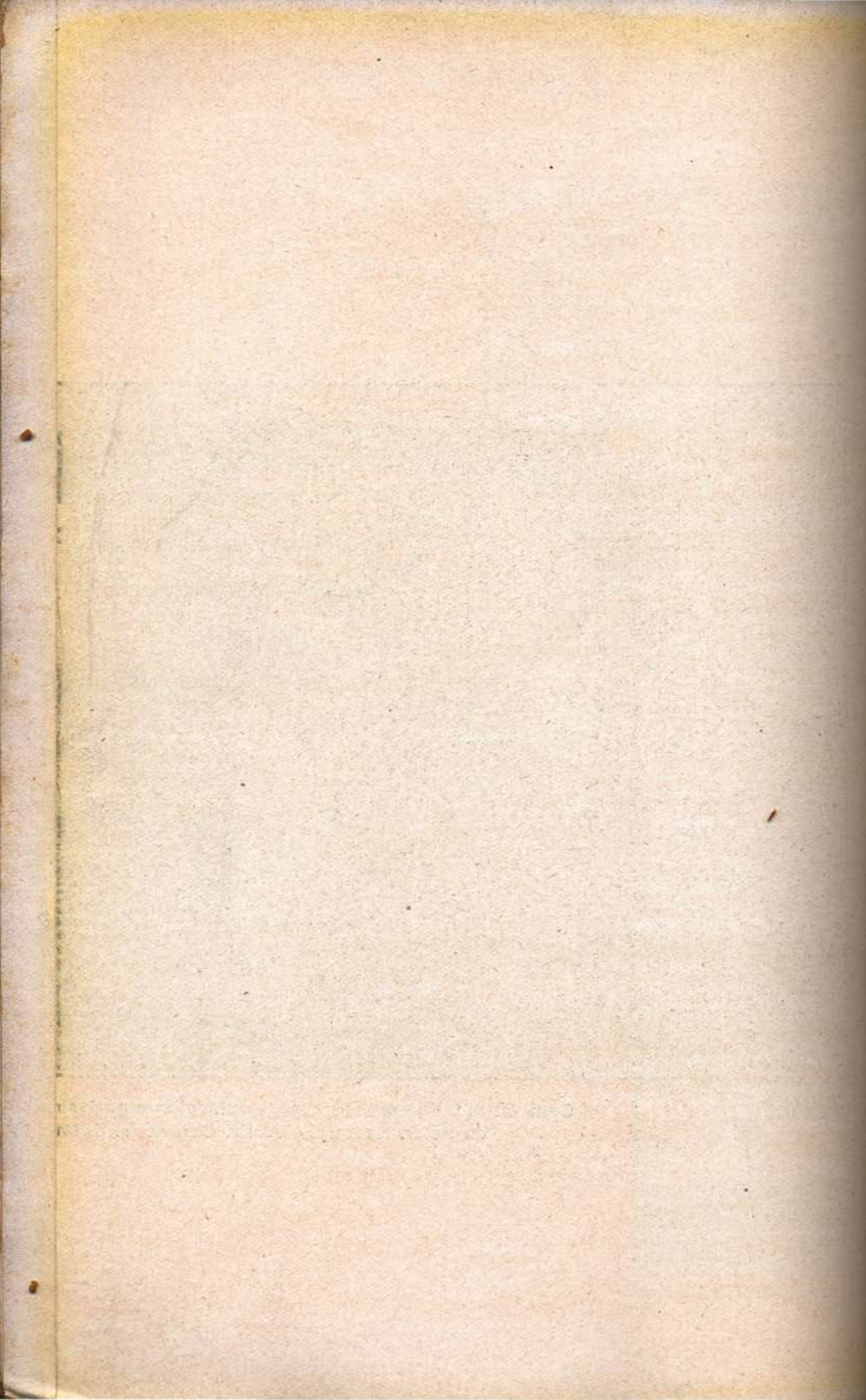


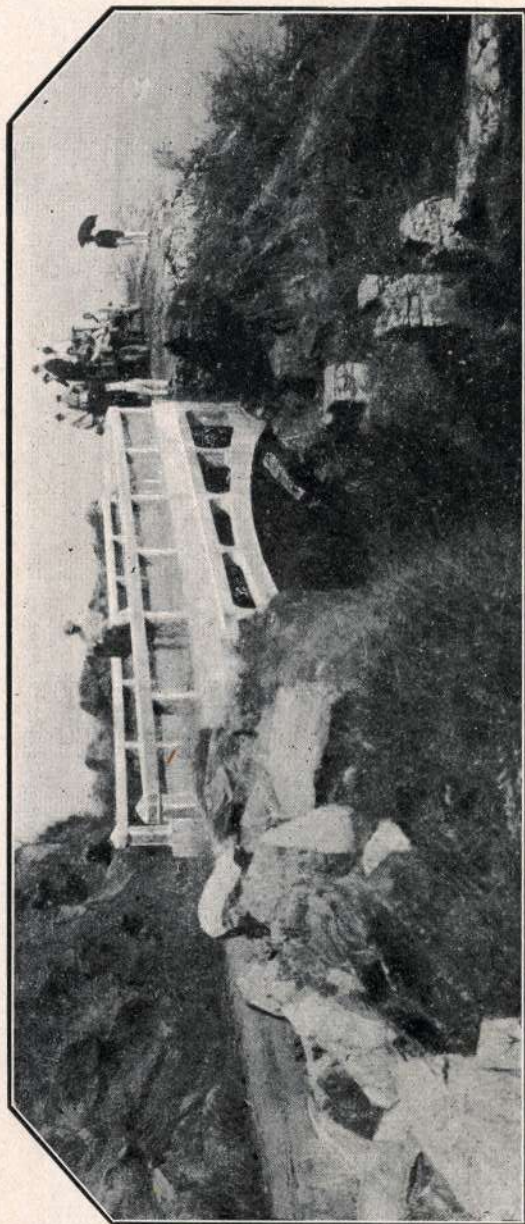
ESTRADO NA BARRA DO PIRAHY



Com 12 ms. de espessura para vehiculos e pedestres. Projecto do autor. Execucao do Dr. Octavio V. Coimbra.

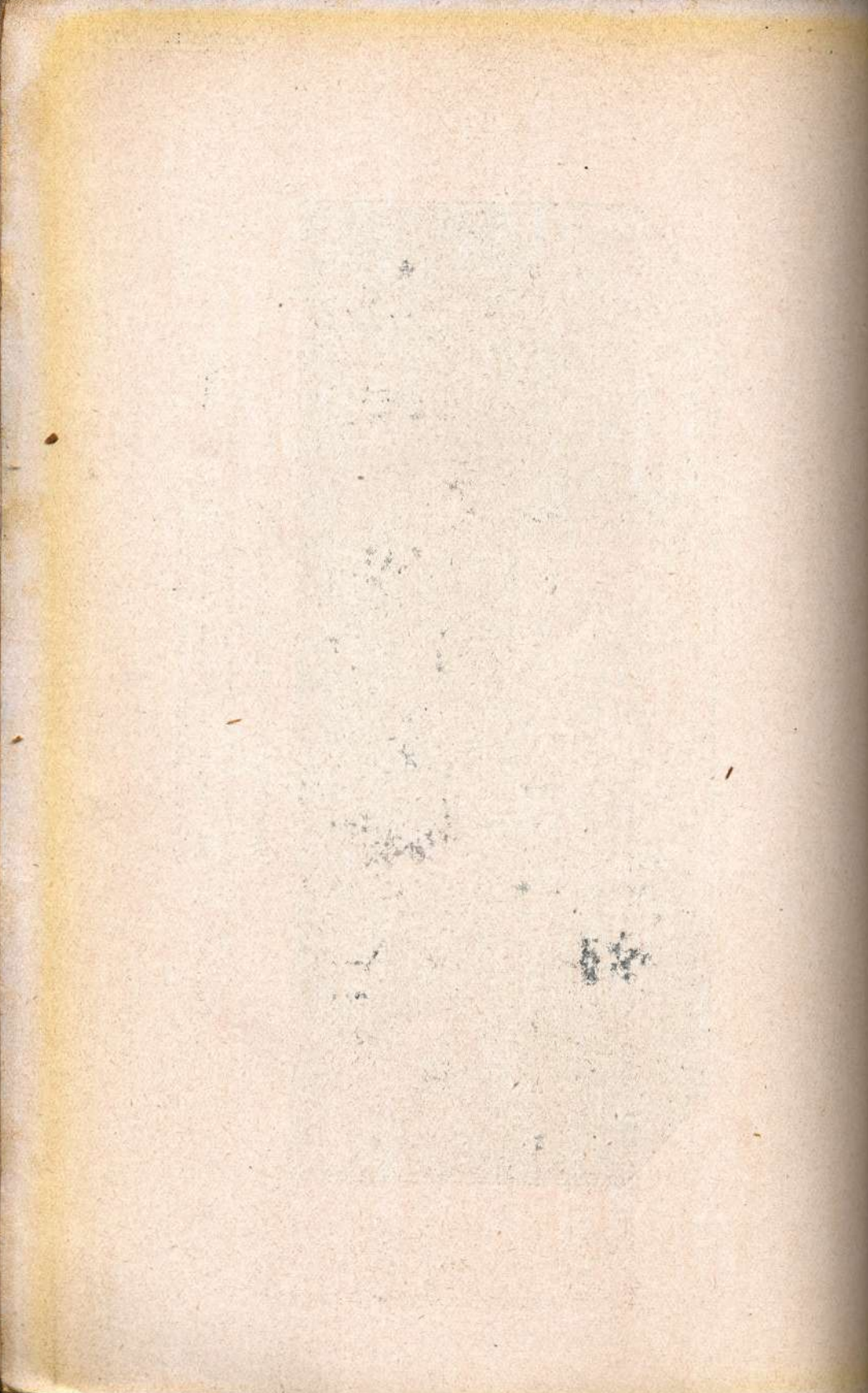


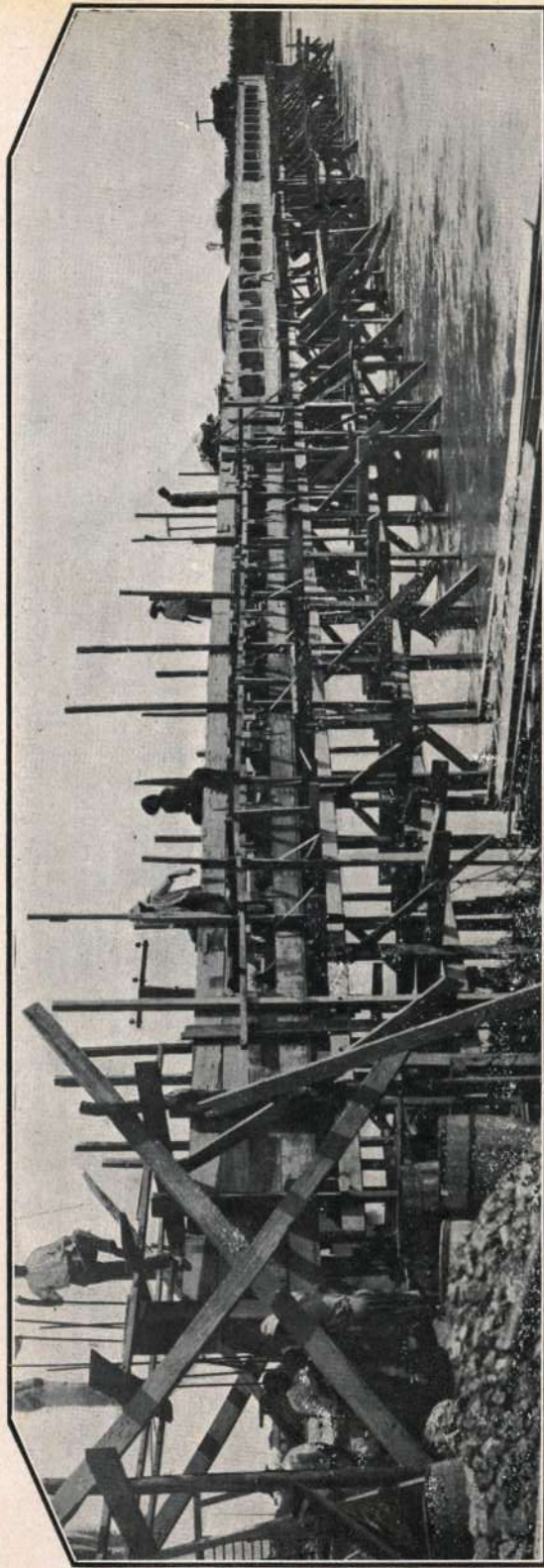




VIADUCTO DE S. JOÃO MARQUES

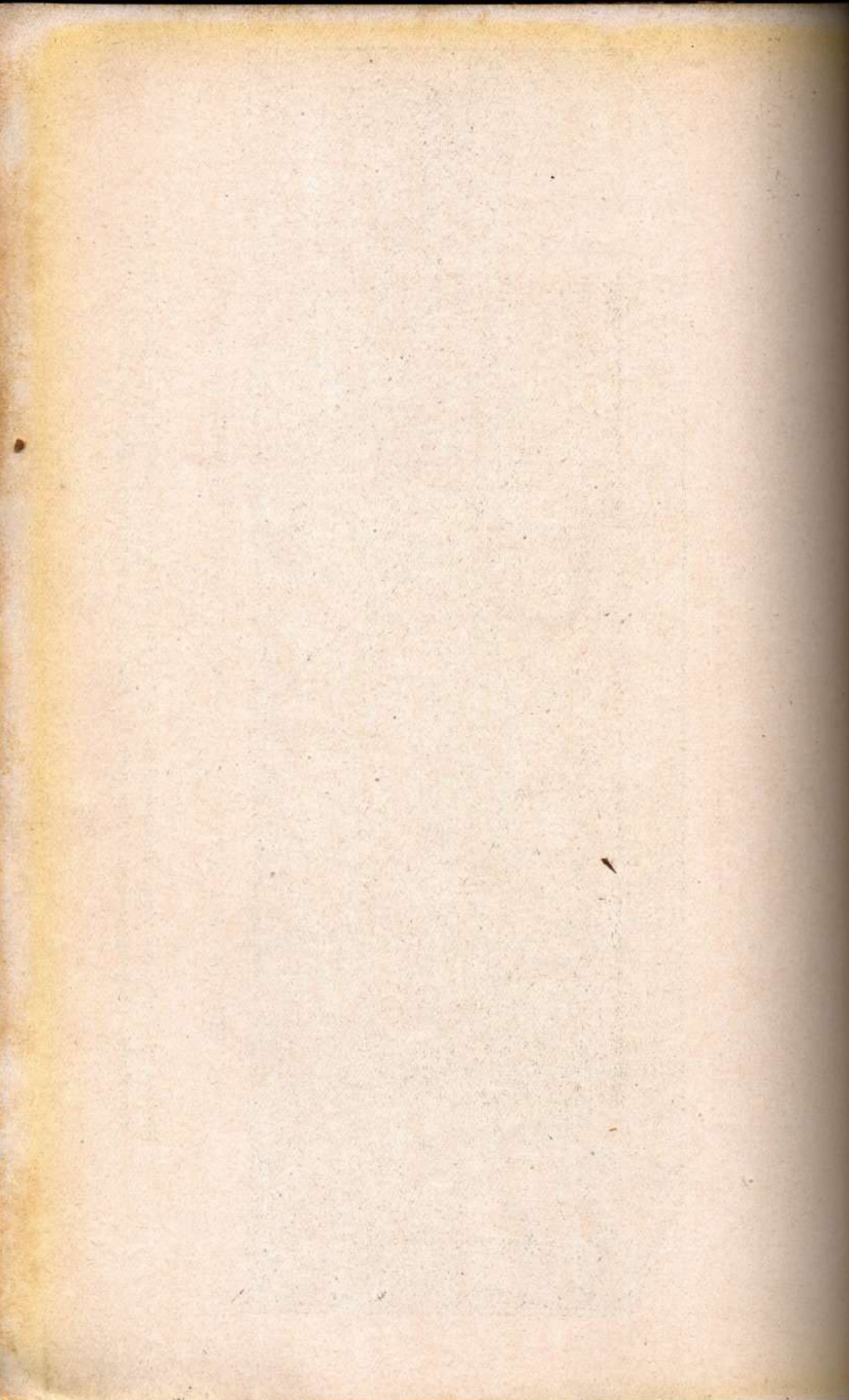
Projecto do autor. Vão de 16 ms. em rampa e esconso.
Construido pelo prof. Roberto D. Sanson. Fiscalisação do Dr. Fausto
L. Costa. (Governo Feliciano Sodré)



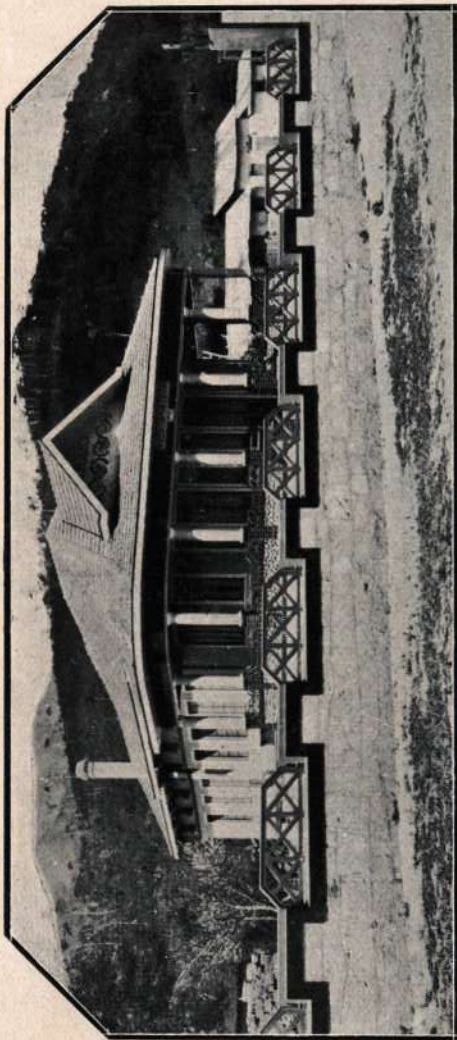


AQUEDUCTO PARA O REFORÇO DO ABASTECIMENTO DE AGUA DE CAMPOS
SOBRE O RIO PARAHYBA

Projecto do autor em vigas Vierendeel de cordas (ou membruras) paralelas e vãos de 24 ms.
Construida no governo Raul Veiga pelo Dr. Aristides de Figueiredo, eng.^o do Estado do Rio.



EDIFICIOS

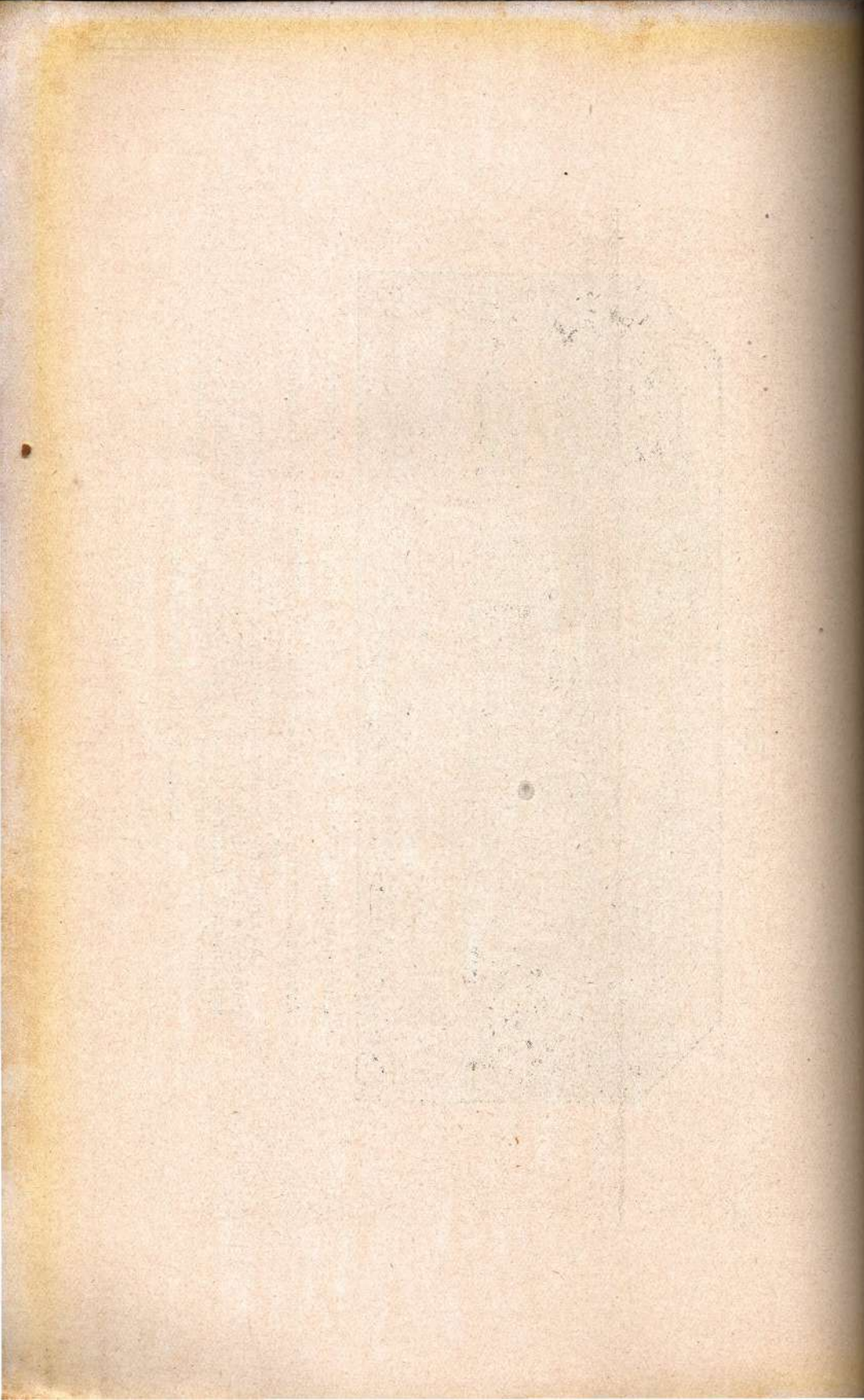


Bungalow para 150 contos, projectado e executado sob a direcção do autor.

Avenida Amazonas, em Therezopolis. Propriedade do Sr. Claudino Reis, da casa bancaria C. Reis & Cia.

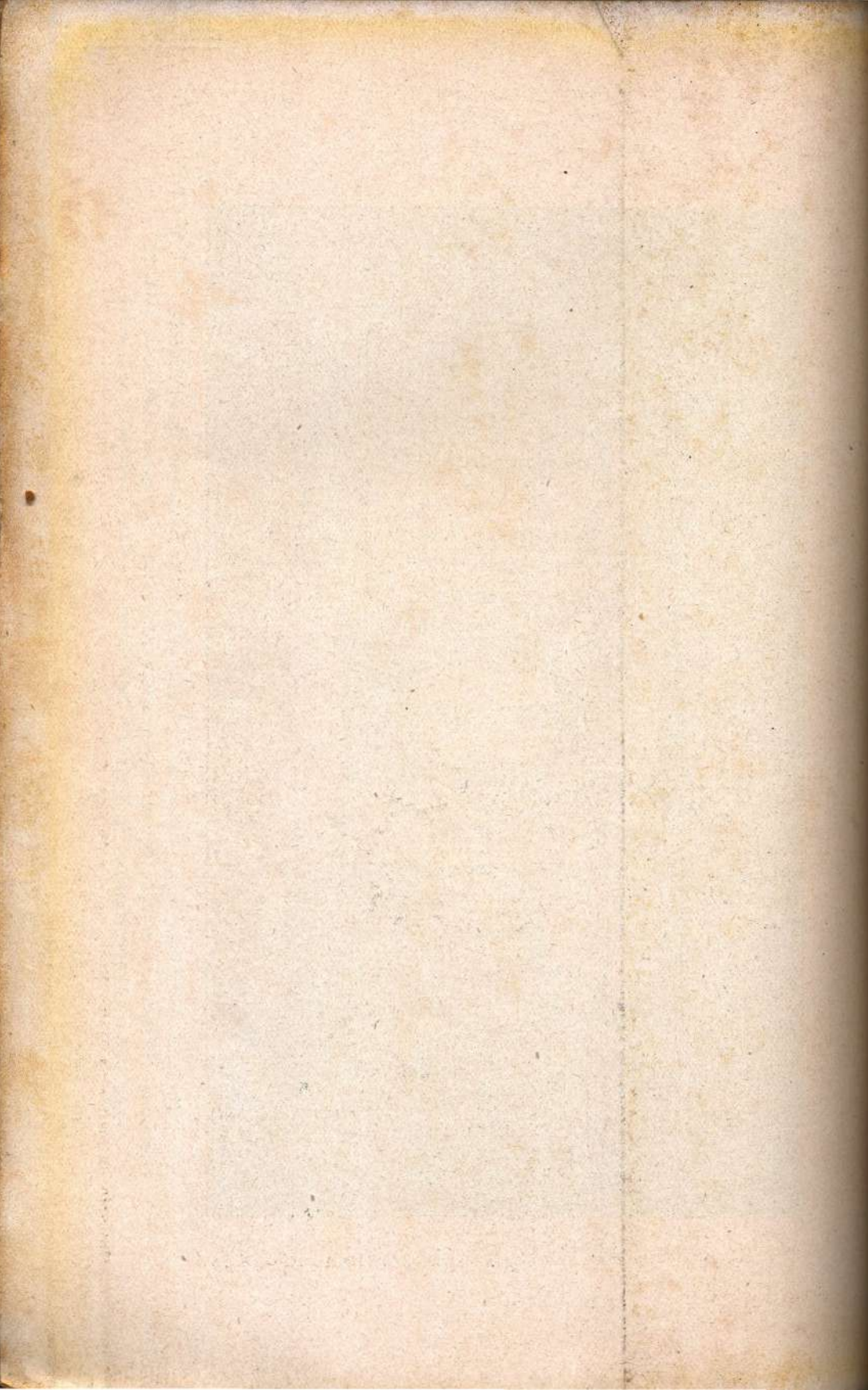
A exiguidade de tempo que tivemos para a confecção do complemento desta these, não nos permittio conseguir outras photographias de detalhes desse predio, nem de varios trabalhos em concreto armado feitos em 1922 - 1924, para a firma Leonidio

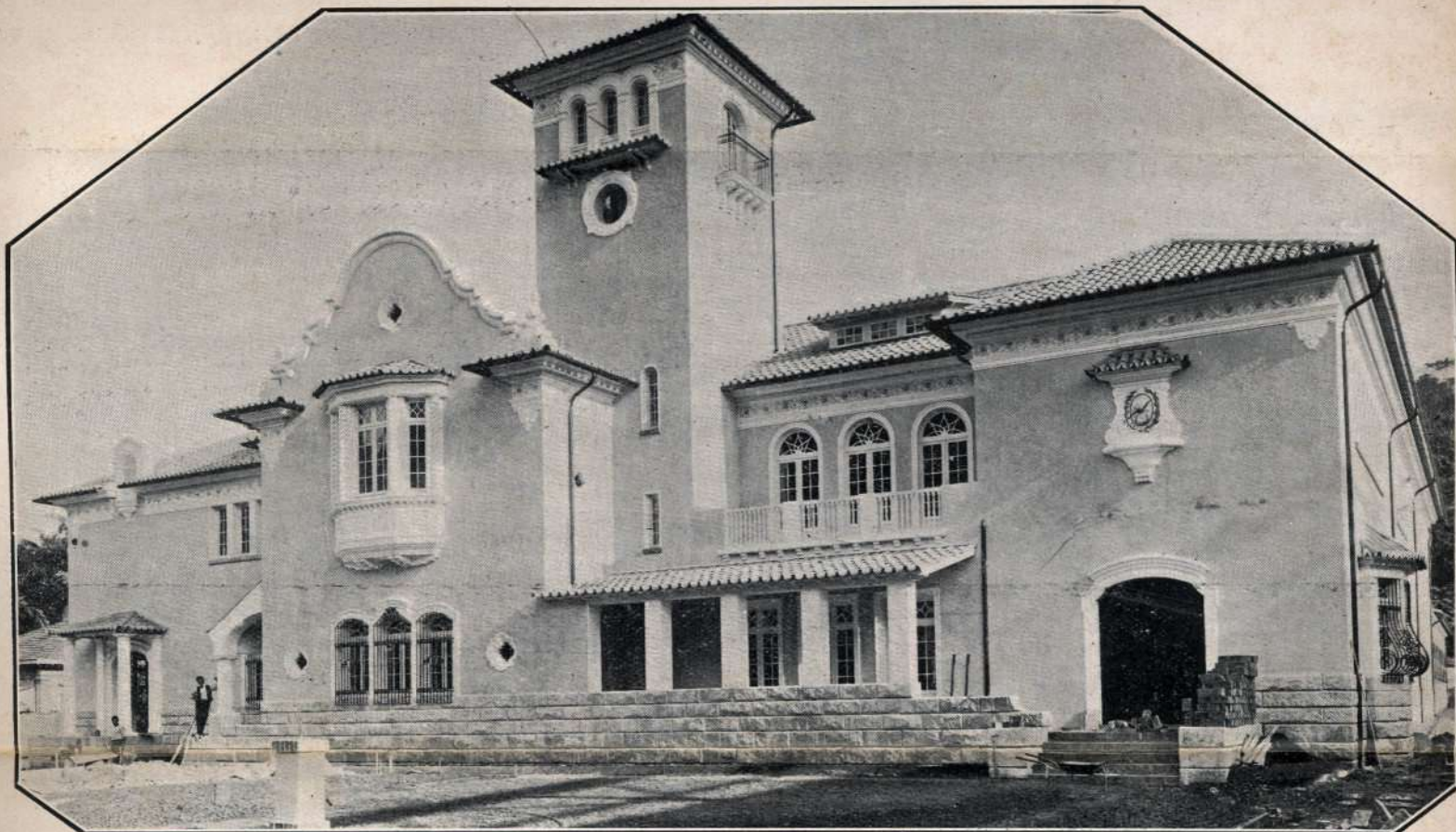
Gomes & Cia. dessa Praça.





Projecto de escada, vigas e piso em concreto armado na nova entrada da Escola Normal de Nictheroy. Execução sob as ordens do Dr. A. Guigon. Análoga a essa obra, está em execução a entrada principal da Prefeitura de Friburgo, também projectada pelo autor.

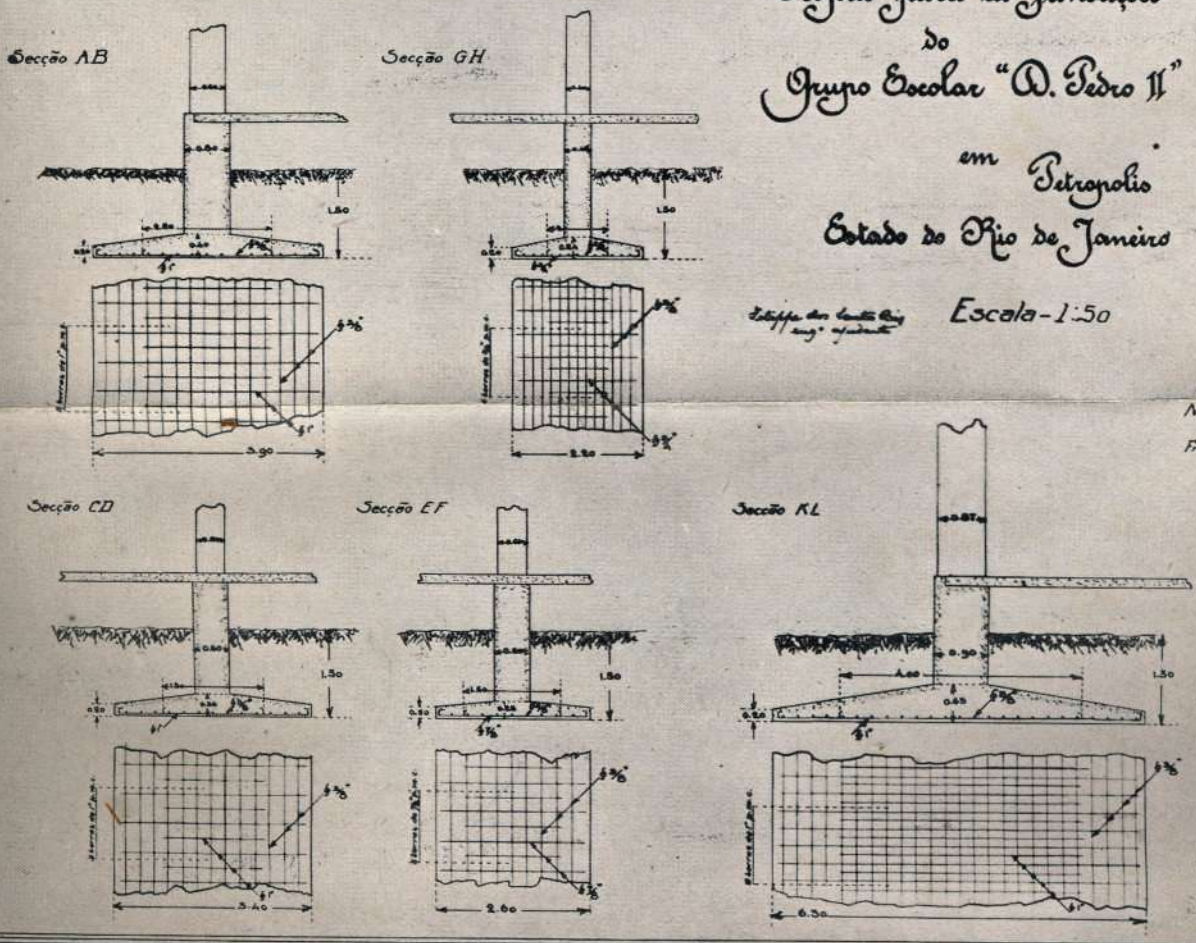




Projecto para as fundações
do
Grupo Escolar "D. Pedro II"
em Petropolis
Estado do Rio de Janeiro

Elaborado por Heitor de Mello
Escala - 1:50

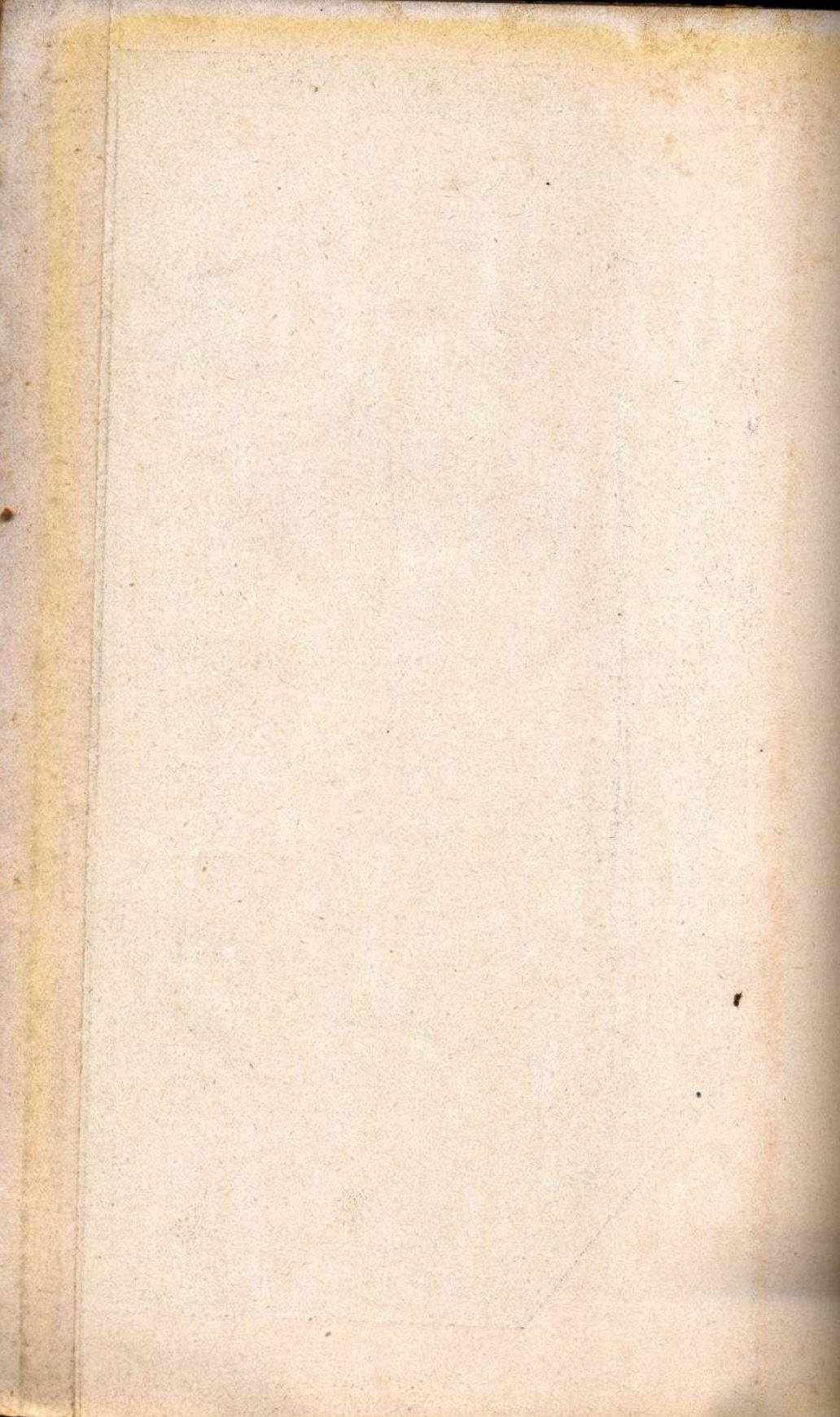
Niteroy - 11-1-921
Francisco de A. G. Menezes
Arquiteto Technico

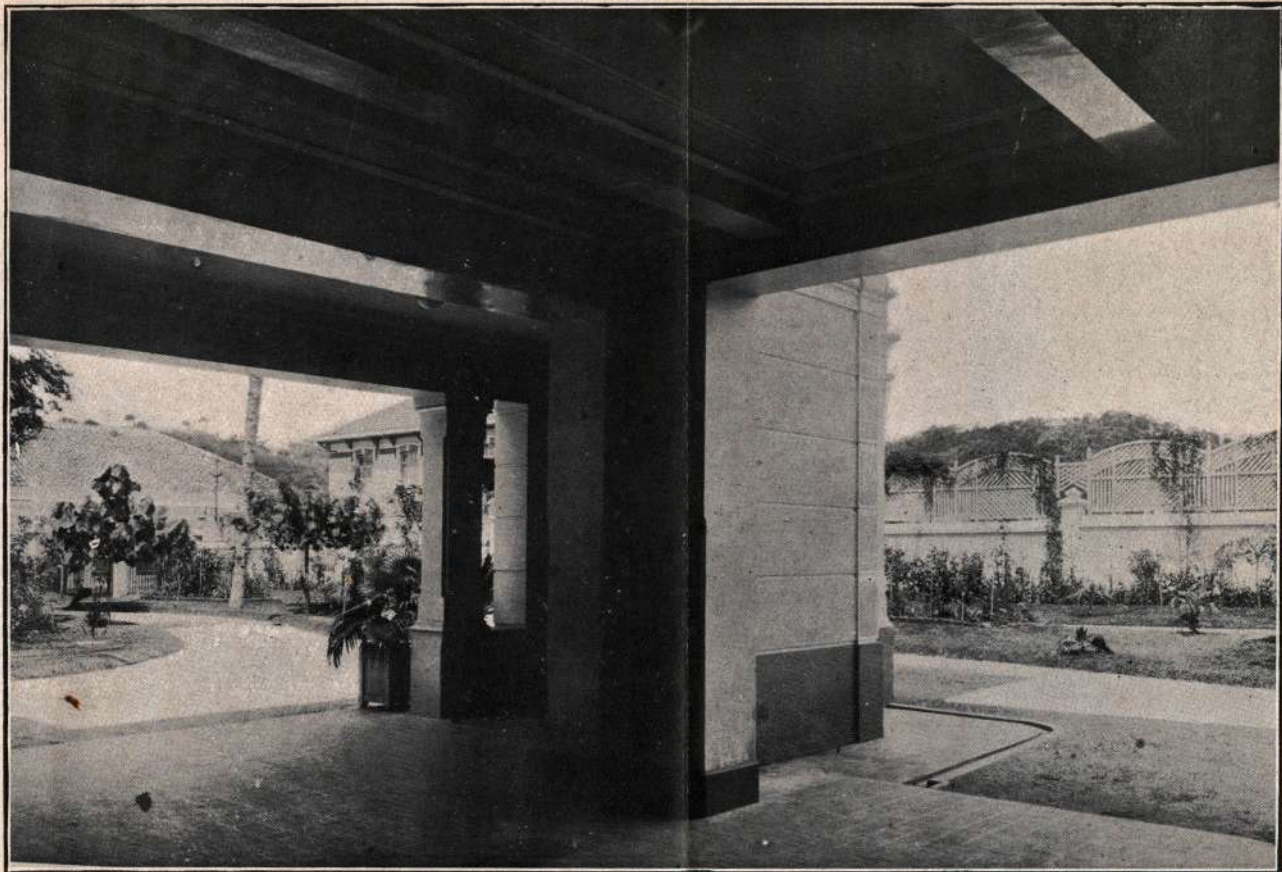


237

GRUPO ESCOLAR D. PEDRO II

Projecto de Heitor de Mello. Execução do Dr. Ed. Pederneiras. Fiscalização do Dr. Magarinos Torres. O autor projectou as fundações (terreno com 0.5 k/cm² de carga de segurança) vigas e pisos em concreto armado.

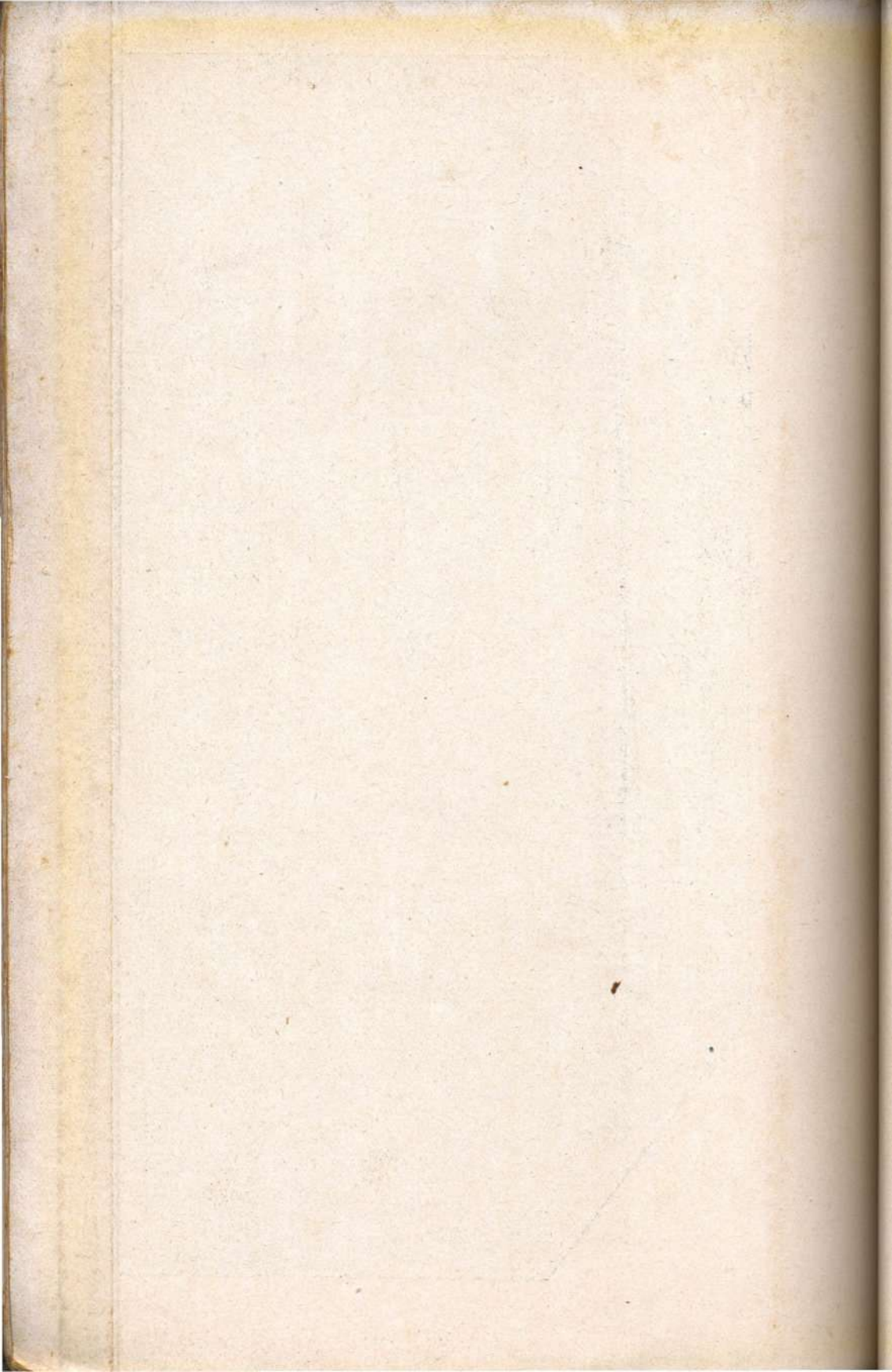


**VISTA DO PISO DO SEGUNDO PAVIMENTO**

Accrescimento no PALACIO DO INGÁ, Executado no governo Raul Veiga para moradia da familia do presidente.

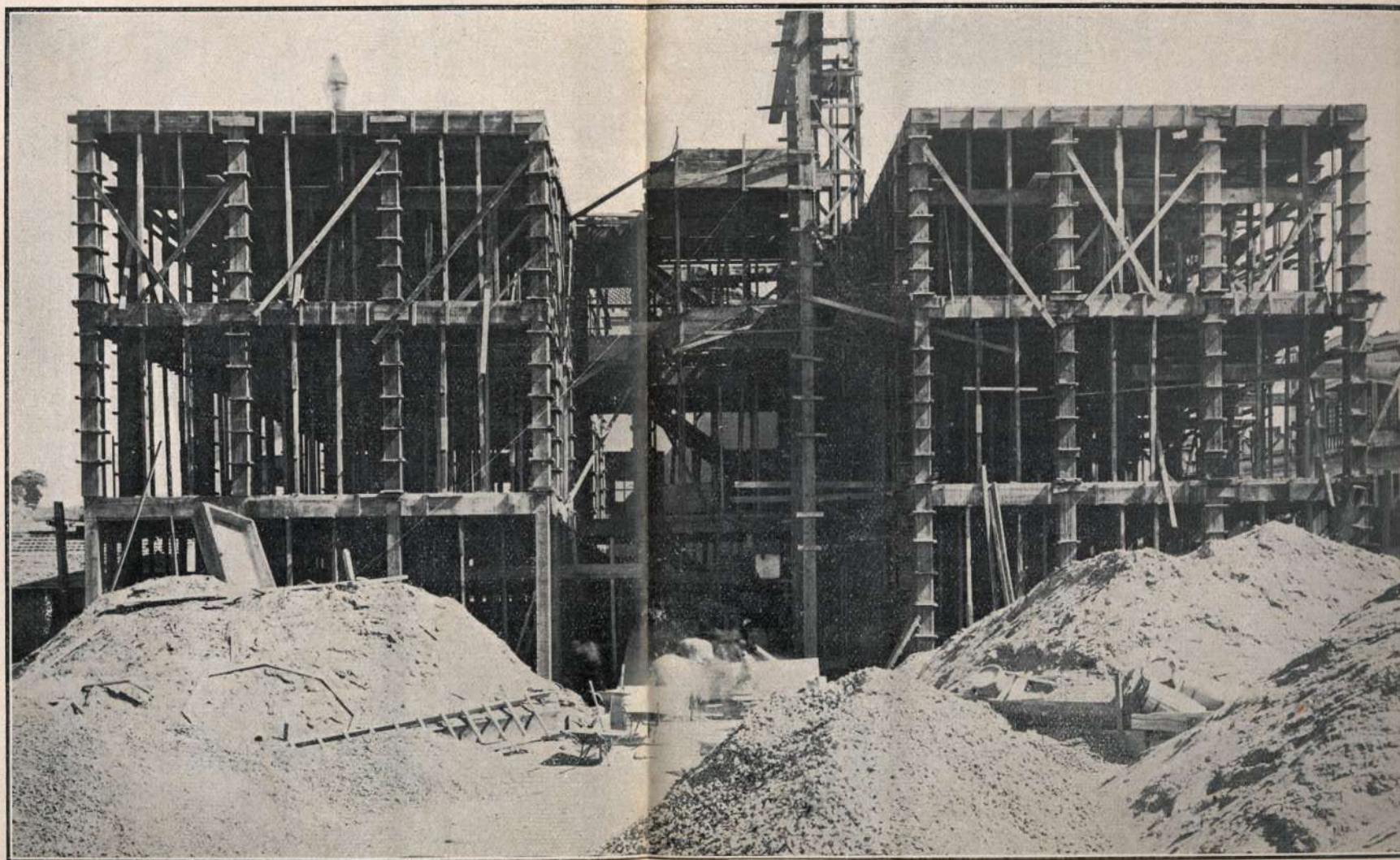
O autor projectou em concreto armado a escada, os pilares, pisos e fundações.

**VISTA EXTERNA**



EDIFÍCIOS

RIO DE JANEIRO, AVENIDA MEM DE SÁ, 253

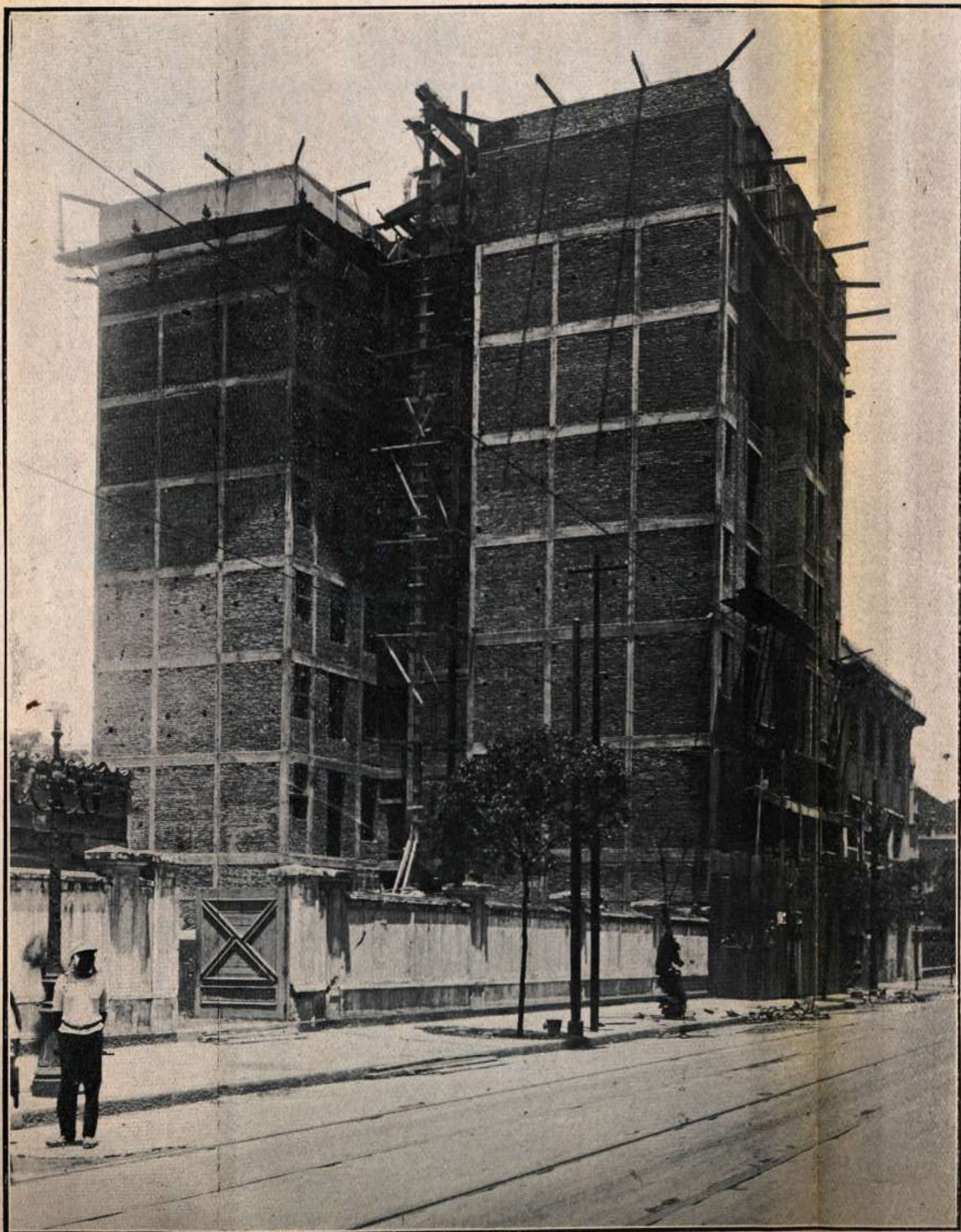


VISTA DOS "QUADROS RÍGIDOS" ASSOCIADOS EM EXECUÇÃO

PROJECTO DE BALDASSINI

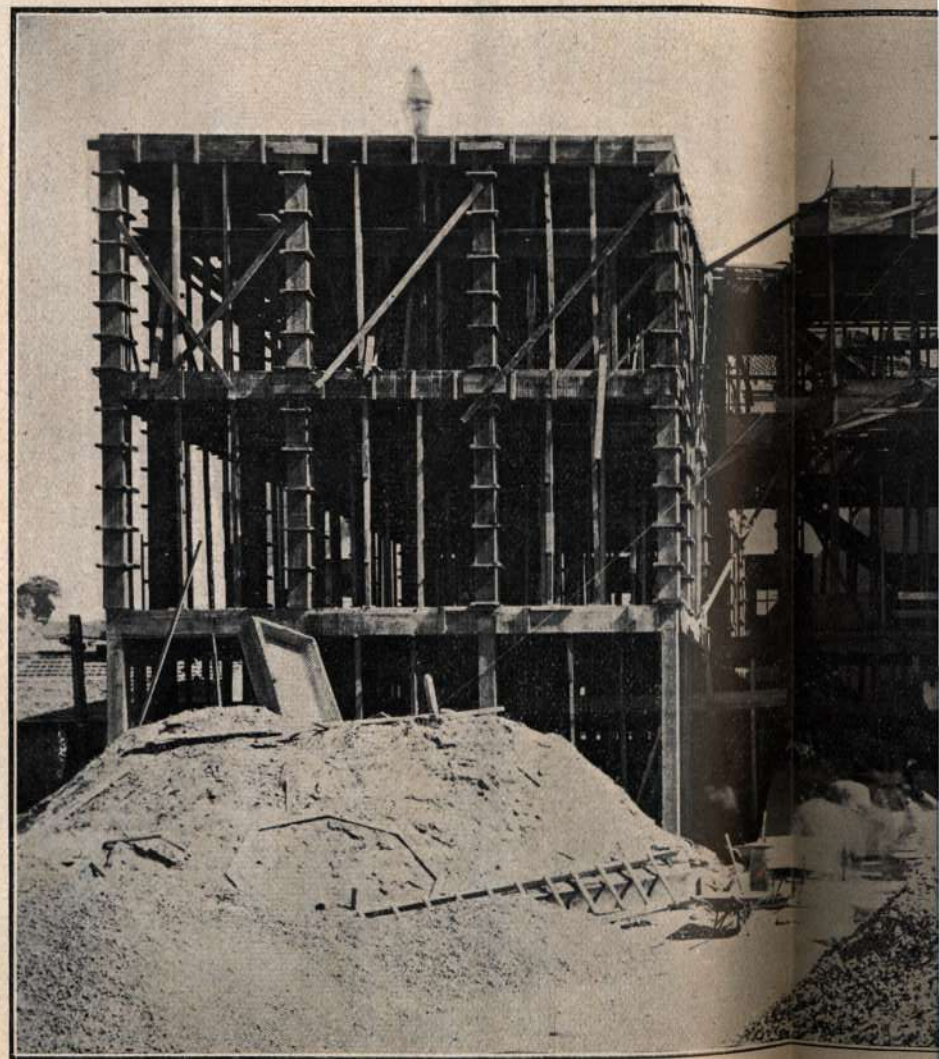
Proprietario e constructor : Gusmão, Dourado & Baldassini. O autor fez o projecto de toda a parte de concreto armado (columnas, pisos, vigas e fundações).





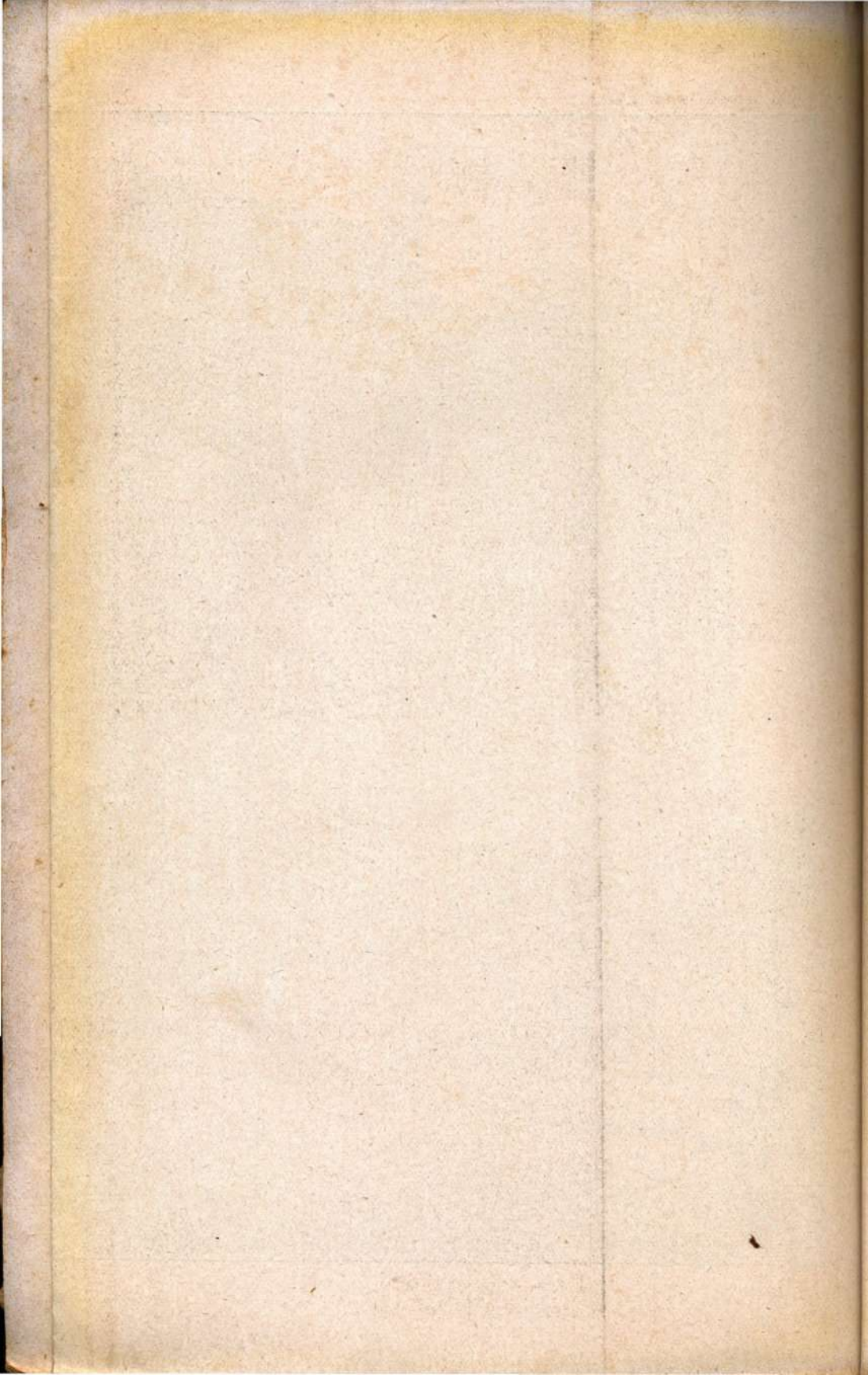
EDIFICIO

RIO DE JANEIRO, AVENIDA



VISTA DOS "QUADROS RÍGIDOS" ASS
PROJECTO DE BALD

Proprietario e constructor : Gusmão, Dourado & Baldassini. O auto
(columnas, pisos, vigas e



(PORTO DE NICTHEROY)



PLANTA DOS SERVIÇOS, ONDE O AUTOR DIRIGE DESDE O INICIO, A SECÇÃO TECHNICA.

Trabalhos montando a cerca de quarenta mil contos:

- a) SERVIÇOS DE DRAGAGEM
- b) SERVIÇOS DE ATERRO (a escavador e a desmonte hydraulico)
- c) SERVIÇO DE CÂES (acostavel com 2 e 8 ms. de aguas minimas e de saneamento)
- d) TRABALHOS DE ARRUAMENTOS E EMBELLEZAMENTOS

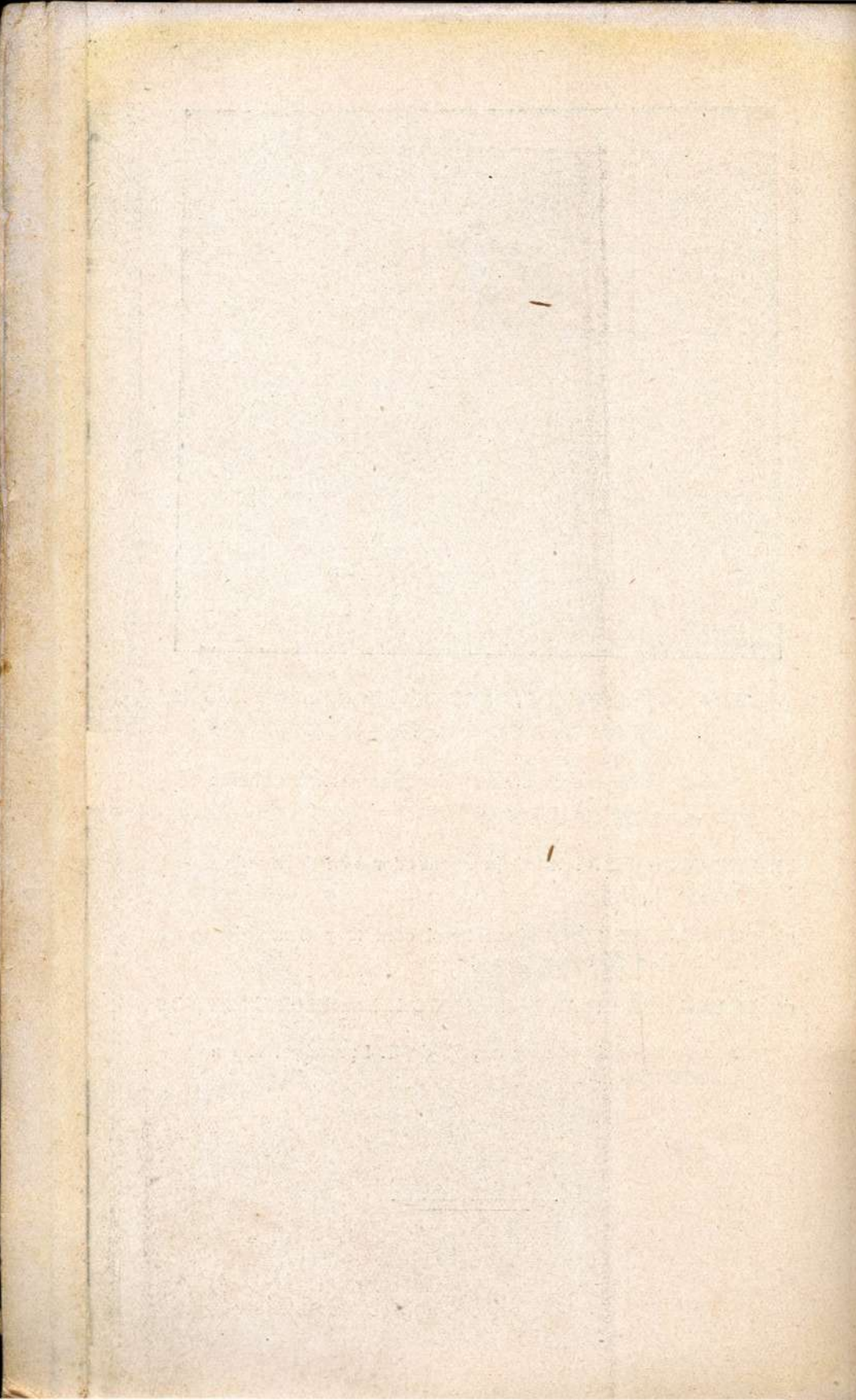
A area conquistada na região de S. Lourenço, vae a 570.000 m².

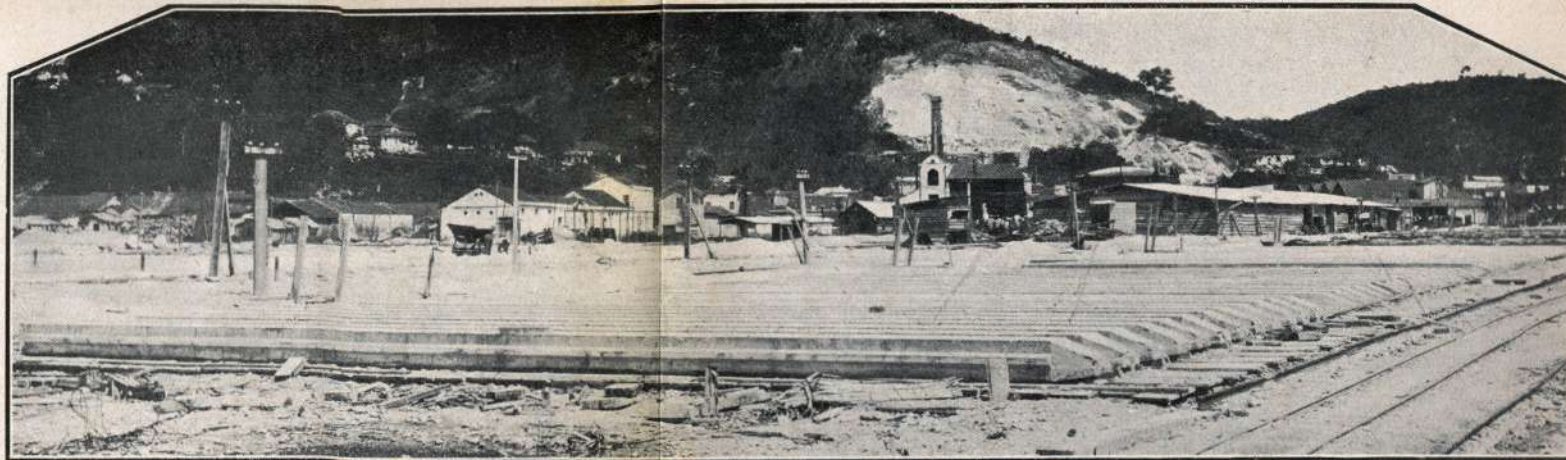


ATERRO HYDRAULICO NA ZONA DE S. LOURENÇO



DESMONTE
A ESCAVADOR,
NO MORRO
DR. CELESTINO





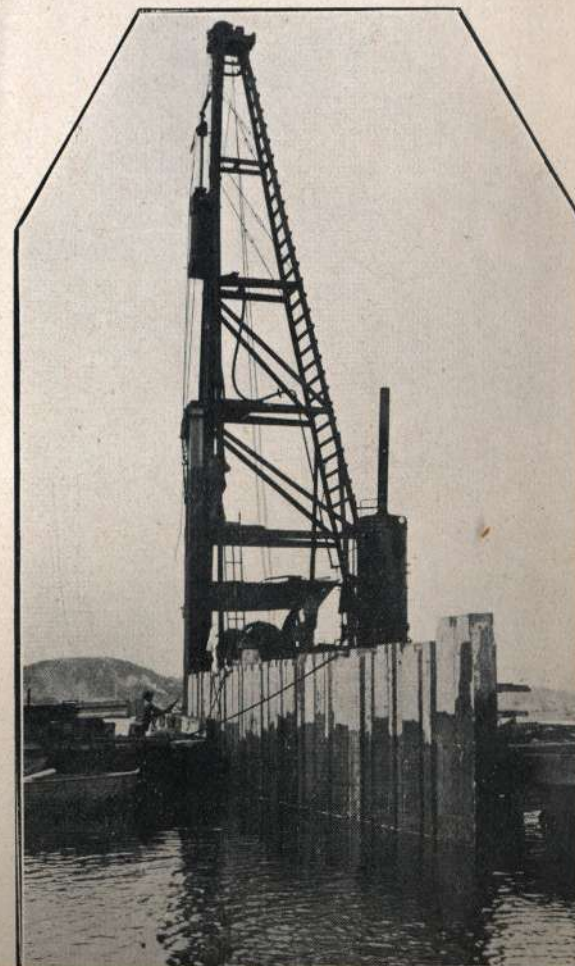
CAES MAIOR — ESTACAS DA CORTINA

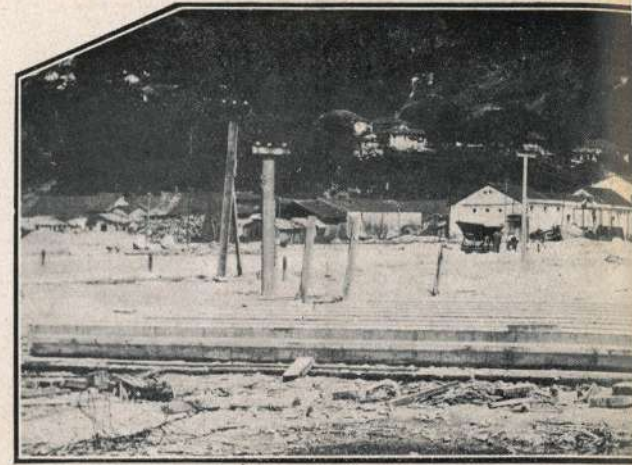
Projecto para 8 ms. em aguas minimas, calculado pelo autor segundo o genero de cões usado em Flensburg, Helsingoer, etc.



CRAVAÇÃO DAS ESTACAS

Typo de cões com placas de ancoragem, semelhante aos cões estudados por L. Ravier experimentalmente e que o autor estudou, — theoreticamente, em algumas Memorias. —





CAES MAIOR — ESTACAS DA C
 Projecto para 8 ms. em aguas minimas, calcula
 o genero de cões usado em Flensburg,

CHANTIER —
 CÃES MENOR

Tirantes e
 placas de anco-
 ragem. Essas pla-
 cas são solidari-
 as aos tirantes,
 ao contrario do
 que usa L. Ravier,
 — em muitos —
 projectos.

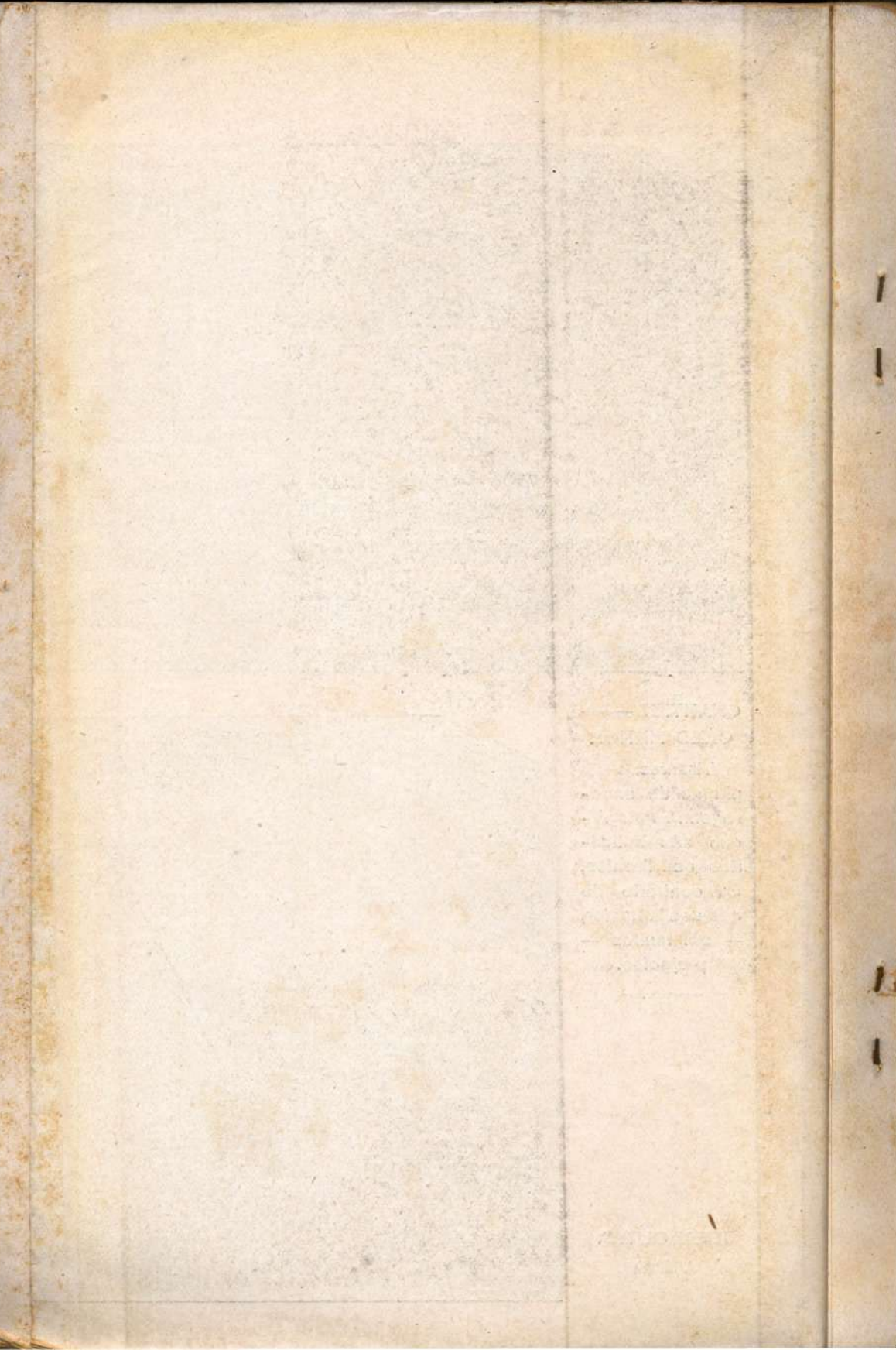


IDEM OUTRA
 VISTA



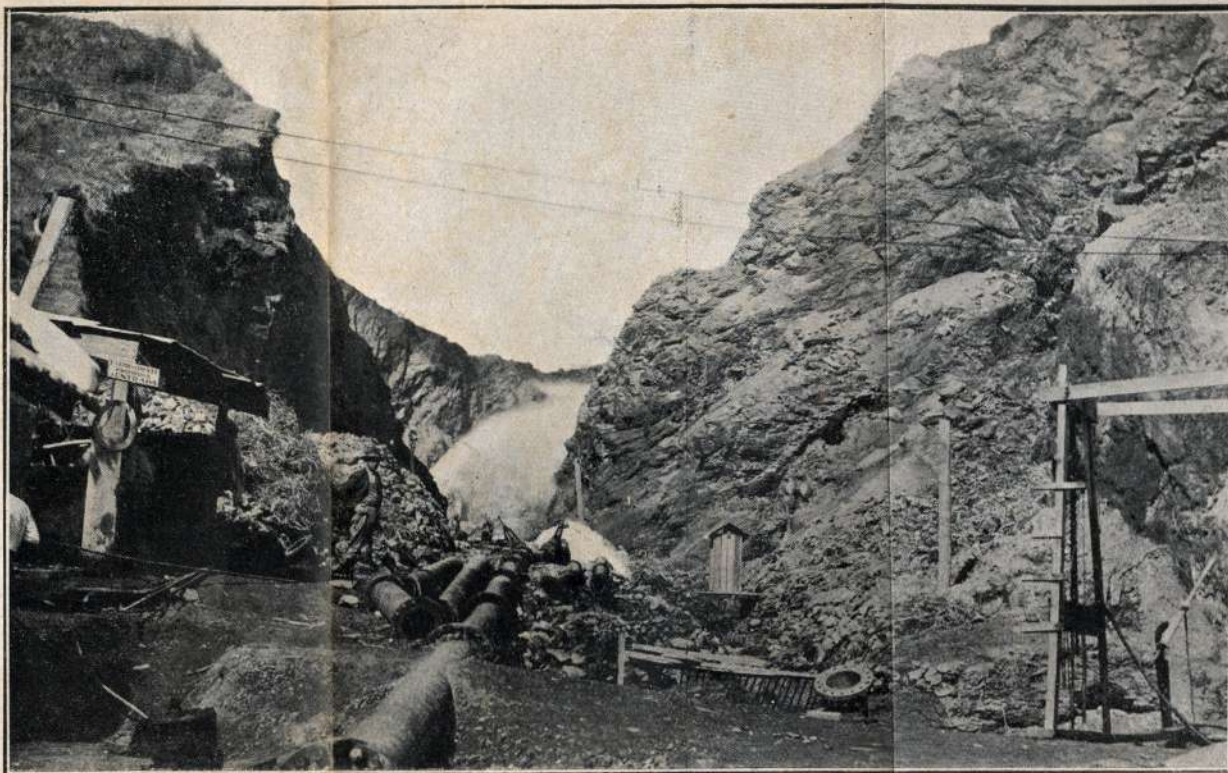
CRAVAÇ

Typo de cões c
 semelhante aos c
 experimentalment
 — theoreticamente,



O Y

do morro de S. Sebastião



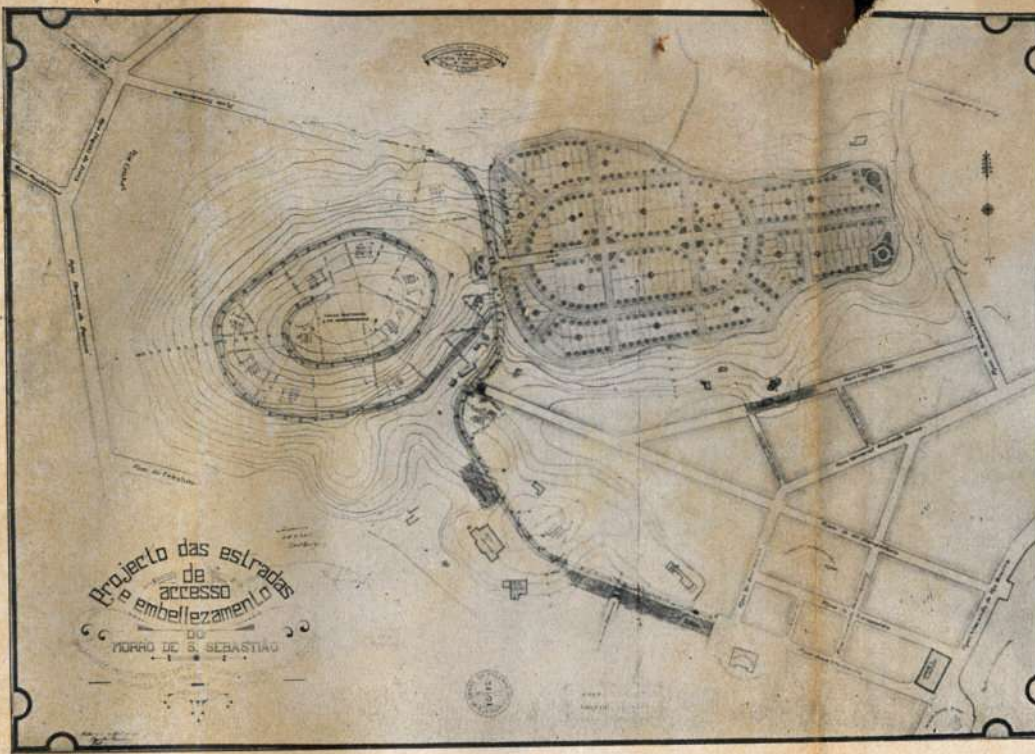
ABERTURA DA ESTRADA POR DESMONTE HYDRAULICO



Maquette construida sob a direcção do autor, na Secção Technica das Obras do Porto de Nictheroy

ULICO





PLANALTO E ESTRADAS DE ACESSO



DESMONTE HYDRAULICO



Estrada de acesso (12 ms. de largura)
em proseguimento da rua José Clemente.

