ENGENHEIRO MARIO A. MARTINS COSTA

Theoria do Concreto Armado

These apresentada para o concurso da cadeira de Resistencia de Materiaes da Escola Nacional de Bellas-Artes.

RIO DE JANEIRO
Typ. do *Jornal do Commercio*, de Rodrigues & C.

1927

INTRODUCCÇÃO

Os estudos sobre o concreto armado, mercê uma technica experimental, sob todos os pontos de vista louvavel, permittem hoje projectar com relativa segurança construcções deste material. Para este resultado concorreu principalmente a orientação da casa Wayss e Freytag, btseando, desde o começo, os seus estudos numa experimentação rigorosa feita sob a direcção de profissionaes abalisados, orientação essa, que foi em seguida adoptada por todos os que se occuparam do assumpto, francezes, allemães e americanos. Graças á estes methodos de trabalho o conhecimento do novo material tem-se precisado e sua applicação tem sido feita com resultados satisfactorios.

Todavia até esta data, as theorias creadas para explicar o phenomeno são insufficientes e falhas. Todos sabem que a união entre o concreto e o ferro é de natureza francamente physica, mas as theorias citadas ainda não explicaram porque razão o concreto quando ligado ao ferro tem maiores deformações sem soffrer reducções de energia, nem porque o seu trabalho admissivel varia com a porcentagem do ferro, etc. A imperfeição destas theorias está aliás formalmente reconhecida no estabelecimento da theoria da flexão, na qual suppõe-se que todos os esforços de tracção devem ser equilibrados pelo ferro, trabalhando, porém, o concreto á compressão; hypothese esta que, no fundo, equivale á admittir: ou o concreto como plastico na zona de tracção, o que é um absurdo, pois não se póde transmittir força num meio desta especie; ou o concreto como fendilhado na zona de tracção, trabalhando á cisalhamento ou flexão para transmittir ao ferro a força do conjugado que elle deve equilibrar, o que é desconhecer a importancia dos fendilhamentos.

Em 1905 fui encarregado pela Administração da E. F. Central do Brazil de proceder á construcção do viaducto entre S. Diogo e S. Christovão. Durante os trabalhos tive de modificar os muros de arrimo, que passaram a ser, por motivos economicos, de concreto armado. Os estudos aos quaes procedi a respeito convenceram-me de que as theorias estabelecidas não tinham base sufficiente não explicando o problema convenientemente e, por isso vendo-se obrigadas a faltarem á logica a cada passo, para fazerem concordar seus resultados com os factos observados. Fui assim levado, naturalmente, a estudar uma nova theoria do phenomeno, baseando-me apenas na intervenção da adherencia, procurando ver toda a extensão do papel desta no assumpto. Verifiquei desde logo que os auctores das citadas theorias não tinham encarado este papel com attenção e, portanto, tinham deixado de lado premissas importantes, não podendo, portanto, por falta das mesmas, resolver o problema. Os resultados que obtive satisfizeram-me plenamente.

Esta theoria é que tenho a honra de apresentar a esta douta corporação. Foi terminada em 1906 e applicada pela primeira vez no mesmo anno na ponte da E. F. Central sobre o rio do Trapicheiro e sobre outra ponte construida pela mesma estrada na rua de S. Christovão, para a Prefeitura, quando deu-se o rebaixe daquella rua no mesmo anno. Em seguida foi applicada em mais de 300 obras d'arte da mesma Estrada, entre as quaes as novas pontes da duplicação da Serra do Mar, uma infinidade de pontes diversas em diversos pontos da Estrada, tunneis, caixas d'agua, chaminés de usina, passagens superiores e inferiores, edificios diversos, etc.

A verdade manda dizer que o seu resultado tem sido bom, estando estas obras em bom estado, apezar de terem algumas dellas mais de 20 annos.

MARTINS COSTA.

I — A RELAÇÃO BASICA $\frac{pf}{pc}$

Chama-se *concreto armado* o material obtido pela addicção de uma ossatura de ferro ou *armadura* á uma massa de concreto de dosagem definida. O metal em virtude de sua adherencia ao concreto forma com este um conjuncto estavel, praticamente insensivel ás variações de temperatura (os coefficientes de dilatação dos dois materiaes têm valores quasi identicos), e resistindo, com efficiencia, á elevados esforços.

A adherencia entre os materiaes attinge á 36^k por c/m^2 de superficie de contacto segundo as mais recentes experiencias. Sua funcção consiste em manter, de tal maneira, unidos os materiaes que, entre elles, não possam desenvolver-se movimentos relativos; deixando ella de existir si taes movimentos se manifestarem. Na realidade, a adherencia, desenvolve contra qualquer tendencia ao escorregamento da armadura, uma resistencia similhante ao attricto. O concreto que envolve a armadura toma *péga,* á coberto do ar, e, portanto, dilata-se procurando occupar o espaço já occupado pelo metal, resultando d'ahi uma compressão d'este ultimo por todos os lados, de modo que o concreto como que se engrena na superficie rugosa do ferro. Uma vez a *péga* feita, ao longo da superficie de contacto nenhuma deformação de um dos materiaes poderá ter lugar, sem que, *simultaneamente* se manifeste uma *deformação* igual no outro. Assim para que o phenomeno da deformação effectuando-se, não perturbe a estabilidade do conjuncto é necessario qũe elle satisfaça esta dupla condição: ser de *valor igual* para os dois materiaes ao longo da superficie de contacto e manifestar-se *simultaneamente* em ambos em cada ponto da cidata superficie, isto é, *começando, desenvolvendo-se* e *terminando* para os dois materiaes, em contacto e cada segmento d'esta superficie nos mesmos instantes.

Ora, esta dupla condição só é preenchida devido á acção da adherencia, pois os dois materiaes tendo velocidade V de propagação das deformações differentes, as velocidades V δ (segundo as quaes terá lugar uma deformação δ) velocidades, essas, que serão as das massas respectivas em movimento, serão naturalmente tambem differentes. Para melhor comprehensão do assumpto precizemos bem o sentido de V e de V δ. Supponhamos uma barra prysmatica de um material de densidade ρ e de coefficiente de elasticidade E. Seja Ω sua secção transversal e consideremos esta barra como composta de uma série de segmentos de igual cumprimento l. Applicando ao primeiro d'estes segmentos uma força F esta vencer-lhe-ha a *inercia* propria tendendo á pol-a em movimento, depois de produzir-lhe uma deformação $\delta = \frac{\Delta l}{l}$ e isto depois de um tempo Θ. Mas á este movimento oppondo-se o segmento contiguo, a força F transmittir-se-ha á este segmento cuja inercia é vencida no mesmo tempo Θ, transmittindo-se depois a força ao terceiro segmento, e, assim por diante. Resulta d'ahi que o phenomeno se transmittindo de segmento á segmento n'um tempo Θ, elle percorrerá n'este tempo cada segmento de comprimento l e com uma velocidade V. Esta velocidade é portanto a *velocidade de propagação da deformação* ao longo da barra. Em cada segmento l a deformação é $\frac{\Delta l}{l}$, isto é, a deformação por unidade de cumprimento do segmento, e, portanto da barra, será $\delta = \frac{\Delta l}{l}$. No fim de um tempo t o phenomeno terá percorrido um cumprimento L = vt da barra, produzindo-lhe uma deformação por unidade de comprimento vt δ e isso com uma velocidade v δ. Esta velocidade v δ é então a velocidade *segundo a qual se faz a deformação*, isto é, é a velocidade das massas em movimento. Ora, a massa posta em movimento é $\rho\Omega vt$. Sendo sua quantidade de movimento igual á impulsão de F no tempo t de sua acção teremos:

$$Ft = \rho\,\Omega\, v t . v\delta$$

d'onde

$$E\Omega\delta t = \rho\Omega\, v\, t\, v\delta$$

e

$$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \qquad (1)$$

Do exposto se conclue que a *velocidade de propagação* V *das deformações* só depende em cada corpo, do seu coefficiente de elasticidade e de sua massa por unidade de volume ρ. Esta velocidade não varia com a deformação, sendo, como é, independente dos valores d/esta ultima. O mesmo não acontece com a *velocidade da deformação* $v\delta$; esta depende de δ, isto é, do effeito produzido pelas forças externas.

Estabelecidas estas noções passemos ao nosso caso. A adherencia não permittindo movimentos relativos entre os dois materiaes a velocidade das massas postas em movimento em cada segmento deve ser igual para os dois materiaes ao longo da superficie de contacto. Além d'isso a deformação δ deve ser a mesma para ambos. Ora, si $v_f\delta_f = v_c\delta_c$ e si δ_f deve ser igual á δ_c segue-se que as velocidades v_f e v_c devem tambem ser iguaes. Sabemos, todavia, que $v_f = \sqrt{\frac{E_f}{\rho_f}}$ e $v_c = \sqrt{\frac{E_c}{\rho_c}}$ não são iguaes quando os corpos citados trabalham isolados. D'ahi, uma tendencia á movimentos relativos que determinam desde logo uma intervenção da adherencia. Quanto á estas velocidades v_f e v_c si a adherencia conseguir igualal-as nos dois materiaes ao longo da superficie de contacto, esta igualdade se mantem para todos os pontos de uma secção transversal, isto é, a propagação do phenomeno ao longo da barra si fará com a mesma velocidade não só ao longo da superficie de contacto como tambem ao longo de toda e qualquer outra secção longitudinal da viga, porque v_f e v_c só dependem de elementos caracteristicos dos materiaes, suas densidades e coefficientes de elasticidade, sejam quas forem as posições dos systemas moleculares na viga.

Seja ω a velocidade de propagação que os dois corpos devem manifestar quando solidarios. Sendo $\omega = \frac{v_f}{\gamma} = \lambda v_c$ teremos

$$\omega = \sqrt{\frac{E_f}{\gamma^2 \rho_f}} = \sqrt{\frac{E_c}{\left(\frac{\rho_c}{\lambda^2}\right)}}$$

A relação acima mostra que a adherencia, para transformar as velocidades v_f e v_c caracteristicas dos corpos em presença, na velocidade unica ω deve augmentar γ^2 vezes a resistencia da massa ρ_f do ferro e diminuir λ^2 vezes a resistencia da massa ρ_c do concreto, sem influir, directamente, sobre E_f E_c pois estes conservam valores fixos, emquanto as deformações dos corpos respectivos estão na phase elastica; demais, as acções da adherencia são de ordem meramente physica, ao passo que E_f e E_c são intimamente dependentes da natureza dos proprios corpos. A adherencia para modificar as resistencias das massas referidas obriga as massas dos dois corpos á collaborarem, uma no trabalho da outra, de maneira que as deformações respectivas sejam de valor igual e transmittam-se ao longo da barra prysmatica de concreto armado, com a mesma velocidade.

Resulta d'ahi que a adherencia faz uma massa de concreto ρ_c $(1 - \frac{1}{\lambda^2})$ collaborar com a massa do ferro elevando a resistencia d'esta ultima γ^2 vezes; quando á força distribuida ao concreto esta passa á actuar sobre uma massa $\frac{\rho_c}{\lambda^2}$. Em virtude d'esta partilha da massa de concreto resultam factos importantes.

Em primeiro lugar o coefficiente de elasticidade, por unidade de massa, é igual para ambos os corpos porque $\frac{E_f}{\gamma^2 \rho_f} = \frac{E_c}{\left(\frac{\rho c}{\gamma^2}\right)}$. Ora, sabemos que $E_f = \rho_f v^2_f$ e $E_c = \rho_c v^2_c$ podem ser considerados como forças resistentes internas; as acções externas despertando d'ellas as parcellas $E_f\delta$ e $E_c\delta$ n'uma deformação δ. Ora, estas forças podem ser consideradas como capazes de imprimir, respectivamente, ás massas ρ_f e ρ_c accelerações V^2_f e V^2_c. No caso do concreto armado E_f actuará sobre as massas $\rho_f\gamma^2$ e E_c sobre as massas $\frac{\rho_c}{\lambda^2}$ e isto quer dizer que o ferro estende sua acção resistente sobre a massa de concreto augmentando-lhe a *capacidade de trabalho*. De facto então E'_c para a massa ρ_c do concreto é λ^2 vezes maior do que E_c. Este augmento de capacidade de trabalho é por sua vez correspondido no ferro por uma reducção de sua propria *capacidade de trabalho*, pois E'_f é apenas igual á $\frac{E_f}{\gamma^2}$. Isto, todavia, não quer dizer que os coefficientes de elasticidade do ferro e do concreto mudassem. Estes coefficientes são e continuam á ser os mesmos, sendo como são, forças resistentes provenientes das ligações existentes entre as moleculas dos corpos respectivos; apenas, em virtude da adherencia entre os dois corpos, elles são obrigados á collaborar na resistencia da massa total. O que variou foi a *capacidade de trabalho* dos materiaes ás forças directamente applicadas.

Em segundo logar, si a massa apresentada pelo ferro á força externa é γ^2 vezes maior do que quando o material trabalha isolado, os effeitos da força externa isto é, suas deformações serão γ^2 vezes menores. Ao passo que o concreto offerecendo á força externa uma massa λ^2 vezes menor do que quando isolado, os effeitos d'esta força externa serão λ^2 maiores. Si as forças externas referidas forem as forças unitarias $p_f = E_f\delta_f$ e $p_c = E_c\delta_c$ produzindo deformações δ_f e δ_c

quando os materiaes estão isolados, teremos aqui $p_f = \gamma^2 E \frac{d_f}{\gamma^2}$ e $p_c = \frac{E_c}{\lambda^2} \lambda^2 \delta_c$ Isto é, em virtude da collaboração das massas do concreto no trabalho do ferro, as deformações no concreto augmentaram e no ferro diminuiram. Mas como a capacidade de trabalho do ferro diminuio e a do concreto augmentou, esta variação de deformações indica que ellas correspondem ás variações de capacidade. Quanto á $\gamma^2 E_f$ e $\frac{E_c}{\lambda^2}$, ellas não significam augmento da resistencia do ferro ou reducção da resistencia do concreto, mas simplesmente que a força unitaria p_f applicada ao ferro se distribue sobre uma massa γ^2 vezes maior ao passo que p_c se distribue sobre uma massa λ^2 vezes menor. Então fazendo $\frac{\delta_f}{\gamma^2} = \gamma^2 \delta_c$ teremos:

$$\frac{p_f}{p_c} = \frac{\gamma^2 E_f}{\frac{E_c}{\lambda^2}} = \lambda^2 \gamma^2 \frac{E_f}{E_c} = m$$

Tal é o valor das forças externas applicadas no ferro e no concreto.

Como estas forças são as que se transmittem de secção em secção são ellas que devem ser consideradas. De facto a distribuição é dos esforços p_f e p_c que são as unicas forças transmissiveis. O phenomeno se passa approximadamente do modo seguinte:

Supponhamos o ferro e o concreto sob a acção de esforços unitarios externos $p_f = E_f \delta_f$ e $p_c = E_c \delta_c$. A adherencia agindo desenvolve sobre o ferro uma acção $A_f \Omega_f$ reduzindo a sua deformação á $\frac{\delta_f}{\gamma^2}$ ao passo que o ferro reagindo sobre o concreto lhe communica um esforço supplementar tentando augmentar sua deformação para $\lambda^2 \delta_c$. Então:

$$p_f - A_f = E_f\left(\delta_f - \delta'\right) = E_f \frac{\delta_f}{\gamma^2}$$

$$p_c + A_c = E_c\left(\delta_c + \delta''\right) = E_c \lambda^2 \delta_c$$

D'onde

$$\frac{p_f - A_f}{p_c + A_c} = \frac{E_f \dfrac{\delta_f}{\gamma^2}}{E_c \lambda^2 \delta_c}$$

e d'ahi sendo $\dfrac{\delta_f}{\gamma^2} = \lambda^2 \delta_c$

$$\frac{p_f - A_f}{p_c + A_c} = \frac{E_f}{E_c}$$

Esta é a relação apparente dos trabalhos reaes. Mas as forças $A_f\Omega_f$ $A_c\Omega_c$ são forças que actuam sómente no segmento mas não se transmittem adiante.

N'estas condições as forças que se transmittem sendo p_f e p_c, devemos eliminar A_f e A_c da expressão acima. Ora

$$p_f - A_f = \frac{p_f}{\gamma^2}$$

$$p_c + A_c = \lambda^2 p_c$$

d'onde

$$\frac{p_f - A_f}{p_c + A_c} = \frac{p_f}{\gamma^2 \lambda^2 p_c} = \frac{E_f}{E_c}$$

d'onde

$$\frac{p_f}{p_c} = \gamma^2 \lambda^2 \frac{E_f}{E_c} = m$$

Tal é a relação entre as forças que se transmittem de secção em secção, que são as unicas que se transmittem realmente.

Como o phenomeno deve ter lugar com a velocidade de propagação igual, chamando ω esta velocidade teremos:

$$\omega = \frac{v_f}{\gamma} = \lambda v_c$$

Ora $A_f\Omega_f$ e $A_c\Omega_c$ são acções iguaes e directamente oppostas. Mas

$$A_f = p_f - \frac{p_f}{\gamma^2} = p_f\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)$$

$$A_c = \lambda^2 p_c - p_c = (\lambda^2 - 1)\, p_c$$

chaando Θ a relação $\frac{\Omega}{\Omega f}$ teremos: $A_f\Theta = A_c$. D'onde:

$$A_f\ \Theta = p_f\ \Theta\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = p_c\,(\lambda^2 - 1)$$

mas $\frac{pf}{pc} = m$ d'onde

$$m\,\Theta\,(\gamma^2 - 1) = \gamma^2(\lambda^2 - 1) = \gamma^2\lambda^2 - \gamma^2$$

Mas $\gamma\lambda = \frac{v_f}{v_c} = K$, isto é, uma constante conhecida pois v_f e v_c se conhece, d'onde:

$$m\,\Theta\,(\gamma^2 - 1) = k^2 - \gamma^2$$

e d'ahi:

$$\left\{\begin{array}{l} \gamma^2 = \dfrac{K^2 + m\,\Theta}{1 + m\,\Theta} \\[2ex] \lambda^2 = \dfrac{K^2(1 + m\,\Theta)}{K^2 + m\,\Theta} \end{array}\right.$$

d'onde

$$\omega = \frac{v_f}{\gamma} = \frac{v_f\sqrt{1 + m\Theta}}{\sqrt{K^2 + m\Theta}} = \lambda\, v_c = v_c K\sqrt{\frac{1 + m\,\Theta}{K^2 + m\,\Theta}} \qquad (2)$$

Conhece-se assim o valor da relação basica $\frac{pf}{pc}$ completamente pois $\gamma^2\lambda' = K^2$, é expressão conhecida. Então:

$$\frac{p_f}{p_c} = K^2 \times \frac{E_f}{E_c} = \frac{m}{} \qquad (3)$$

é uma constante rapidamente calculavel como se vê da tabella abaixo:

Material	*Traços*	*Composição em volume* cimento %	areia %	pedra %	agua %	*Peso por M³*	*Coefficiente de Elasticidade*	*Densidade*	*Velocidade*	*Relação* $m = \frac{p_f}{p_c}$
						kilos			metros	
Aço........	—	—	—	—	—	7850	22x10⁹	801	5240	—
Argamassa..	1:0	53,4	—	—	46,6	2115	3,5x10⁹	216	4025	10,6
» ..	1:1	33,0	33,0	—	36,0	2177	1,67xx0⁹	222	2742	48,0
» ..	1:2	23,0	46,0	—	31,0	2187	1,59x10⁹	223	2670	53,0
» ..	1:3	18,0	54,3	—	27,0	2216	1,45x10⁹	226	2533	64,0
Concreto...	1:2:4	12,0	24,0	48,0	16,0	2388	1,875x10⁹	242	2777	41,6
» ...	1:3:6	8,5	25,5	51,0	15,0	2388	1,714x10⁹	243	2655	49,4

Esta expressão eminentemente simples differe da das theorias em vóga porque estas, não examinando a necessidade de assegurar a simultaneidade do phenomeno, não entram em conta com todos os effeitos da adherencia.

Para que esta situação se mantenha é necessario que a adherencia persista. Sendo $A_f \Omega_f$ o esforço que a massa de concreto applica ao ferro é necessario que esta força seja equilibrada pela adherencia existente.

Chamemos S o perimetro da armadura n'uma secção recta e seja *l* o comprimento da barra de concreto armado. Chamando Q_o a taxa de segurança da adherencia por unidade de superficie teremos:

$$Q_o\, Sl = p_f \, \Omega_f \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) \qquad (4)$$

que é a *equação da estabilidade* do conjuncto.

Resulta de tudo isso que admittindo que o ferro e o concreto trabalhem como independentes entre si sob a acção das forças p_f e p_c na viga composta, o ferro trabalha, como sio seu coefficiente de elasticidade fosse $E'_f = \gamma^2 E_f = \gamma^4 \rho_f \omega^2$ e o concreto como si seu coefficiente de elasticidade fosse $E'_c = \frac{E_c}{\lambda^2} = \frac{\rho_c}{\lambda^4} \omega^2$. Sob o ponto de vista da resistencia de materiaes, portanto, elles se comportam como si fossem corpos novos.

Isto quanto ás forças externas. Quanto ás forças interiores a *capacidade* de trabalho do novo ferro é γ^2 vezes menor em valor absoluto ao passo que, no novo concreto esta *capacidade* é λ^2 vezes maior, que as manifestadas no antigo ferro e no antigo concreto respectivamente. De maneira que si definimos cada estado molecular de um material por um dado valor de energia potencial que elle então possue, o novo ferro tem a mesma energia potencial que o antigo, depois de desenvoλver um trabalho elastico γ^2 vezes menor do que o antigo, em quanto que o novo concreto para attingir o mesmo potencial do que o antigo, deve desenvolver um trabalho elastico λ^2 vezes superior ao d'este ultimo. Chamando pois R_f e R_c as taxas de trabalho admittidas para o antigo ferro e o antigo concreto, as taxas admissiveis para os novos materiaes, correspondentes aos mesmos potenciaes, que dos antigos, serão $\frac{R_f}{\gamma^2}$ e $\lambda^2 R_c$.

Estes resultados explicam porque os trabalhos variam de accôrdo com a porcentagem de ferro e porque no concreto armado os alongamentos do concreto podem ser maiores do que quando este material trabalha isolado.

II — TRABALHOS ADMISSIVEIS

Desde que os unicos esforços transmissiveis são p_f e p_c a expressão do trabalho apparente $\frac{pf - Af}{pc + Ac}$ não póde ser tomada em conta quando se estuda o effeito das forças exteriores porque então as forças unicas que devem figurar são as forças transmissiveis. Sob o ponto de vista da Resistencia de Materiaes que considera as acções de um lado de uma secção transversaλ directamente equilibradas pelas reacções directamente oppostas de outro lado, as forças A_f e A_c não são consideradas e o trabalho é apenas effeito das forças p_f e p_c. Por isso os materiaes sob este ponto de vista trabalham como si o coefficiente do ferro fosse γ^2 vezes superior e o do concreto λ^2 vezes inferior.

Examinando-se a expressão $\dfrac{p_f}{p_c} = \dfrac{\gamma^2 E_f}{\dfrac{E_c}{\lambda^2}}$ vê-se que as forças distribuidas do ferro são γ^2 vezes maiores e as forças distribuidas ao concreto λ^2 vezes menores do que as correspondentes ás mesmas deformações si os materiaes trabalhassem isolados. Sendo o concreto um material heterogeneo as relações γ^2 e λ^2 podem variar de uma secção para outra acompanhando as variações de E_c; como o ferro é homogeneo v_f é constante, mas como $v_f^2 = \gamma^2 \lambda^2 v_c^2$ á proporção que v_c diminue $k = \gamma^2 \lambda^2$ augmenta. A relação $\dfrac{p_f}{p_c}$, portanto, varia, sendo maior quando o concreto tem mais baixo coefficiente de elasticidade. N'este caso quando no segmento o concreto é mais energico, a força que lhe cabe em partilha é maior e quando elle é mais fraco a força que lhe cabe em partilha é menor. Chamando-se $\Sigma(\Omega_f p_f + \Omega_c p_c)$ a força distribuida na secção transversal da bocca prysmatica, composta, as forças p_f e p_c terão seus valores definitivos em cada ponto de accôrdo com as normas acima.

Examinando-se a expressão dos trabalhos apparentes $\dfrac{p_f - A_f}{p_c + A_c}$ considerando que p_f e p_c só tem seus valores determinados de accôrdo com as normas citadas vê-se que a acção da adherencia é tambem variavel. As forças $A_f \Omega_f$ e $A_c \Omega_c$ são as acções reciprocas exercidas entre os corpos em presença no sentido de manter a igualdade e a simultaneidade das deformações. Estas forças, emanadas da adherencia, impedem o movimento relativo entre os dois materiaes oppondo-se o concreto á livre deformação do ferro e, portanto, recebendo da parte d'este ultimo acções tendendo á augmentar suas proprias deformações. Estas acções se exercem ao longo da superficie de contacto e uma em relação á outra são consideradas como acção e reacção. Ellas podendo exercer-se em virtude da adherencia, seus effeitos se verificarão emquanto a adherencia persistir. Estas forças, uma vez despertadas não permittirão movimentos relativos, mas como produzem acções sobre as deformações respectivas dos dois materiaes durante o periodo deformatorio (e estes effeitos d'ellas persistindo), ellas tambem continuam a agir como forças que se equilibram. Ellas, portanto, não podem ser transmittidas. Quanto aos seus effeitos elles se mantêm emquanto a adherencia persistir.

Si o concreto fosse um material homogeneo as deformações d'elle não poderiam exceder certo valor limite. Sendo, porém heterogeneo, cada segmento da viga composta tem um coefficiente de elasticidade do concreto differente. Ora, n'este caso, a distribuição das forças $\Sigma\ (\Omega_f p_f + \Omega_c p_c)$ é tambem differente; nos segmentos onde E_c é mais forte, trabalhando o concreto sob taxas maiores, e onde E_c é mais fraco trabalhando sob taxas menores. Assim a distribuição de forças se fazendo de accôrdo com as energias internas do concreto, este material será melhor aproveitado e seus alongamentos tambem maiores. Isto mesmo se verifica da equação do trabalho $\dfrac{p_f - A_f}{p_c \times A_c}$; a força $A_f\Omega_f$ é tanto maior quanto menor fôr v_c e como forma equilibra uma $\Omega_c A_c$ (força emanada do ferro), as deformações deste material descem de valor e o mesmo acontece com a deformação do concreto que lhe é igual. Então a parte de força equilibrada no segmento em virtude da acção da adherencia á maior do que no caso de ser v_c maior.

O facto de ser o concreto capaz de resistir á esforços maiores do que os determinados pelas experiencias de ruptura é comprovado pelas experiencias de Morsch na qual a variação do coefficiente de elasticidade entre o principio e o fim da prova não excede de 17 %. Podemos portanto suppôr que só 17 % da energia total foi consumida possuindo o material ainda um excesso de 83 %, isto é, si a energia fôr toda consumida o material póde trabalhar cerca de 4,9 vezes mais.

Desde que o concreto em cada segmento trabalhe de accôrdo com o valor de seu coefficiente de elasticidade, trabalhando mais ou menos conforme este valor fôr maior ou menor segue-se que o aproveitamento de sua energia potencial será muito mais intenso e suas deformações totaes n'um caso de prova de ruptura serão muito maiores, aproximando-se ellas de valores 4,9 vezes maiores. De facto Morsch achou que as deformações no concreto armado são cerca de 3 vezes maiores que no concreto não armado e considere ainda achou mais.

Sabemos que os trabalhos admissiveis são baseados na consideração dos limites de elasticidade, não devendo nunca exceder taes limites que correspondem ao ponto de separação da phase elastica da deformação das phases seguintes. Ora, este limite sendo mais ou menos conhecido no ferro não o é no concreto como se verifica facilmente examinando a curva respectiva de suas deformações, curva essa, que não apresenta nenhuma d'estas inflexões bruscas que se manifestam nas mudanças de phase. De facto o coefficiente de elasticidade ahi medido no começo e no fim de uma prova de ruptura apresenta variações apenas de 17 % o que significa que o mesmo ao attingir a ruptura a maioria dos systemas moleculares que constituem o material está em plena phase elastica, parecendo que o phenomeno de ruptura é devido á um esgotamento local ou á esforços secundarios.

N'estas condições para determinar a taxa de trabalho do concreto os technicos tem-se baseado na carga unitaria de ruptura, unico elemento que é conhecido com relativa segurança, na E. F. Central do Brasil temos adoptado como offerecendo todas as garantias, a praxe de fazer trabalhar o concreto á uma taxa maxima de 36 % da carga de ruptura. Quanto ao ferro adoptamos uma taxa de trabalho de 2/3 do seu limite de elasticidade. Estas taxas são as maximas, isto é, taxas limite que nunca devem ser excedidas.

Na pratica corrente os concretos mais utilisados são os de traço 1:2:4 e 1:3:6. Segundo as experiencias de Feret no laboratorio das obras do porto de Boulogue-sur-mer, os elementos mecanicos principaes d'estes concretos são:

	Concreto 1:2:4	Concreto 1:3:6
Ruptura á tracção simples	15,k2 por c/m²	6,k8 por c/m²
Idem á tracção em provas de flexão	28, 8 " "	12, 9 " "
Idem á compressão	170, 2 " "	70, 5 " "

Feret fez uma observação especial sobre o trabalho de tracção na prova de flexão e achou que o trabalho n'este caso era 1,89 vezees superior ao que se manifesta á uma tracção simples. Baseados n'estas experiencias feitas com uma technica rigorosa, estabelecemos para o concreto armado as taxas maximas seguintes, que tem sido utilisadas com vantagem desde 1906.

	Concreto 1:2:4	Concreto 1:3:6
	[m = 41,4;K = 3,56]	[m = 49,6; K = 3,89]
Trabalho á tracção simples	5,5 λ^2 por c/m²	2,5 λ^2 por c/m²
Idem, idem nos trabalhos de flexão..	9,5 λ^2 por c/m²	4,7 λ^2 por c/m²
Idem, idem á compressão (com armadura)........	9,5 λ^2 por c/m²	7,2 λ^2 por c/m²
Idem, á compressão (sem armadura) maximo........	60,0 por c/m²	25,0 por c/m²

Quanto ao ferro

	no concreto 1:2:4	no concreto 1:3:6
Trabalhos á tracção simples	$\frac{920^k}{\gamma^2}$ por c/m²	$\frac{482^k}{\gamma^2}$ por c/m²
Idem, idem nos trabalhos de flexão	$\frac{1400^k}{\gamma^2}$ " "	$\frac{907^k}{\gamma^2}$ " "
Idem á compressão	$\frac{1400^k}{\gamma^2}$ " "	$\frac{1388^k}{\gamma^2}$ " "

Antes de terminar resta-me tratar do caso em que a armadura occupa uma situação excentrica relativamente á massa de concreto. N'estas condições a velocidade de deformação ao longo da armadura já não será igual em todos os pontos da massa de concreto. A acção do ferro sobre o concreto por intermedio da adherencia sendo $A_c\Omega_c$ esta acção transmittida ao centro de gravidade do concreto se decompõe n'uma força $A_c\Omega_c$ ahi applicada e n'um conjugado $(A_c\Omega_c, - A_c\Omega_c)$. A força $A_c\Omega_c$ produz uma acceleração uniformemente distribuida A_c ao passo que o conjugado dá lugar á uma acceleração angular $A_c \frac{v}{\tau^2}$ chamando v a distancia do centro de gravidade da secção considerada á armadura. D'onde se conclue que n'um ponto qualquer (o,y) d'esta secção a força $A_c\Omega_c$ produz uma acceleração total $A_c(1 + \frac{vy}{\tau^2})$ acceleração, essa, que no ponto de contacto com a armadura attinge o valor $A_c\ (1 + \frac{v^2}{\tau^2})$.

Esta variação de accelerações impressa ao concreto, pelo ferro não significa variação da velocidade de propagação das deformações. Esta, como já vimos, não depende da posição relativa das armaduras, mas sim, apenas da natureza dos materiaes e da porcentagem de ferro na viga composta. Além, d'isso, como o ferro continua sob a acção da força $A_f\Omega_f = A_c\Omega_c$, a reacção do concreto sobre o ferro continua do mesmo valor e portanto a deformação do materiaλ sob a acção de $A_f\Omega_f$ continua a mesma. A deformação do concreto será, portanto, do mesmo valor ao longo da superficie de contacto.

Mas o mesmo não póde acontecer em todos os pontos porque a acção do ferro, isto é, a deformação produz uma acção unitaria $A_c\ (1 + \frac{\nu y}{\tau^2})$. No caso de uma tracção ou de uma compressão longitudinaes, o material com armadura excentrica, comporta-se pois, mal, porque os esforços applicados tendem á produzir deformações iguaes em todos os pontos. Mas no caso de flexão, distribuindo-se o conjugado de accôrdo com as capacidades de trabalho de cada ponto, o material porta-se perfeitamente.

Abaixo damos algumas formulas para applicação das ideias expostas aos casos usuaes. Não seremos extensos todavia, limitando-nos apenas ás demonstrações indispensaveis.

III — TRACÇÃO E COMPRESSÃO SIMPLES

Nas construcções trabalhando á tracção ou á compressão a *armadura* deve ser em geral, peripherica para que o concreto armado trabalhe sempre sob as mesmas taxas, sujeito como elle se acha ás mesmas deformações, todavia casos ha em que a armadura deve ser central, como por exemplo, em caixas d'agua e silos de paredes pouco espessas.

Nos trabalhos á compressão emprega-se muitas vezes, armaduras transversaes, acompanhando armaduras longitudinaes ou mesmo isoladas. O seu emprego tem a vantagem de permittir ao concreto trabalhar sob taxas mais elevadas e com menor deformação do que quando não armadas. Como vimos, quando tratamos das taxas de trabalho admissiveis, o trabalho de segurança do concreto armado longitudinalmente, á compressão, é menor do que o que elle admitte isolado, e, isso, em virtude da necessidade do ferro não exceder seu limtie de elasticidade. Mas o concreto isolado trabalhando sob taxas elevadas deforma-se tambem mais e isso em certos casos é inconveniente; com a armadura transversal esta actua de modo á crear uma certa resistencia addicional ás deformações transversaes que acompanham as deformações longitudinaes citadas e, portanto, produz um augmento do coefficiente de elasticidade do material, reduzindo até certo ponto as proprias deformações longitudinaes.

Temos 3 casos á considerar:

1° — *caso — Armadura longitudinal central ou peripherica.*

Chamando Ωf e Ω_c as areas transversaes respectivas do ferro e do concreto, sendo *P* o esforço longitudinal teremos:

$$P = \Omega_f \; p_f + \Omega_c \; p_c$$

sendo $pf = mp_c$ e $\Theta = \dfrac{\Omega_f}{\Omega_c}$ a porcentagem

$$P = \Omega_c \; p_c (1 + m \, \Theta)$$

d'onde para uma carga *P* dada e uma porcentagem Θ dada teremos:

$$\Omega_c = \frac{P}{p_c (1 + m \, \Theta)}$$

$$\Omega_f = \frac{P}{p_c (1 + m \, \Theta)}$$

2° — *caso — Armadura transversaes.*

O emprego de armaduras transversaes tem por fim augmentar a resistencia á deformação longitudinal do concreto diminuindo as deformações transversaes correspondentes. Em ultima analyse uma armadura de secção transversal Ω'_f actuando sobre uma secção Ω'_c de concreto augmenta-lhe a energia de resistencia. De facto as forças internas desenvolvidas na mesma secção passarão de $E_c\Omega_c'$ á $E_c\Omega'_c + E_f\Omega'_f$.

Supponhamos que por unidade de comprimento da barra a secção longitudinal correspondente seja Ω_c' e a armadura transversal tenha uma area Ω'_f. Seja $\Theta' = \frac{\Omega'_f}{\Omega'_c}$ a porcentagem de ferro por m/c de comprimento da barra.

Teremos

$$E_c\Omega'_c + E_f\Omega'_f = E_c\Omega'_c\left(1 + \frac{E_f\Theta'}{E_c}\right)$$

N'estas condições as deformações transversaes $\delta_1 = \eta\delta$ decrescerão e os seus valores passarão á ser $\delta_2 = \frac{\delta_1}{1+\frac{E_f}{E_c}\Theta'}$. Por consequencia, diminuirá tambem a deformação longitudinal correspondente e o coefficiente de elasticidade no sentido longitudinal augmentará. De facto si o concreto para uma força dada tinha um valor $E_c = \frac{p}{\delta}$ para este coefficiente agora com a addicção do ferro, δ passará á $\delta' = \frac{\delta}{1+\frac{E_f}{E_c}\Theta'}$ e portanto $E'_c = \left(1+\frac{E_f}{E_c}\Theta'\right)E_c$.

Então chamando Ω_c a secção transversal da barra, si por unidade de comprimento da mesma a secção é Ω'_c teremos que a acção de uma força P será: $P = p'_c\Omega_c = \left(1+\frac{E_f}{E_c}\Theta'\right)E_c\delta_c\Omega_c$

E então

$$\Omega_c = \frac{P}{\left(1+\frac{Ef}{E_c}\theta'\right)_{pc}}$$

$$\Omega_f = \sigma' \Omega'_c = \theta' {}_{\varkappa}\Omega_c$$

chamando $K = \frac{\Omega'c}{\Omega c}$ a relação entre as areas da secção longitudinal sobre a unidade de comprimento e a secção transversal da barra.

3.º caso — *Armaduras longitudinaes e transversaes.*

As formulas são as do 1 caso, mas m varia e passa á ser então:

$$m' = \frac{m}{1+\frac{Ef}{E_c}\theta'}$$ d'onde

$$P = {}_c p_c \left(1+\frac{m\,\Theta}{1+\frac{Ef}{E_c}\theta'}\right) = {}_c p_c \left(1+\frac{m\,\Theta}{1+\mu\Theta'}\right)$$

d'onde chamando Θ' a porcentagem de ferro na secção trans-

Então chamando Ω a secção transversal da barra, si por

$$\Omega_c = \frac{P}{p^c\left(1+\frac{m\,\Theta}{1+\mu\Theta'}\right)}$$

$$\Omega_c = \frac{P\,\Theta}{p_c\left(1+\frac{m\,\Theta}{1+\mu\Theta'}\right)}$$

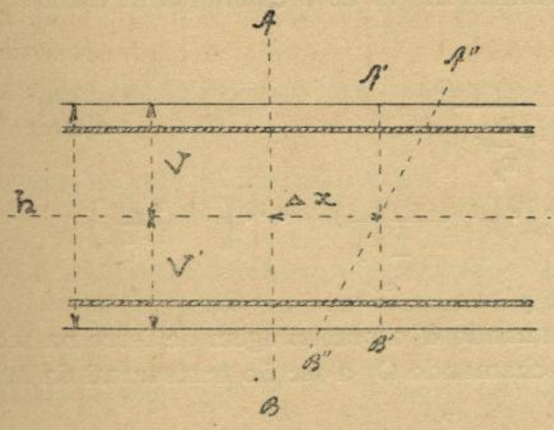
No sentido transversal

$$\Omega'_f = \Theta' k \Omega_c$$

FLEXÃO

Consideremos uma barra prysmatica de concreto armado trabalhando á flexão chamemos ω_f e ω'_f as areas das armaduras respectivamente nas zonas de tracção e de compressão. Sejam Re e R_c os trabalhos admissiveis do concreto nas mesmes zonas.

Admittiremos, de accôrdo com Hatt, que o concreto tem o mesmo coefficiente de elasticidade nos trabalhos á tracção e á compressão. Figuremos suas secções AB e A'B' distantes entre si de Δx e supponhamos que a flexão tenha produzido uma inclinação Θ entre ellas. Então



$$\frac{Re}{Rc} = \frac{V'}{V} = K$$

chamando h a altura da barra teremos:

$$\frac{V'}{V} + 1 = K + 1 = \frac{V + V'}{V} = \frac{h}{v}$$

d'onde

$$\begin{cases} V = \dfrac{h}{K + 1} \\ V' = K \dfrac{h}{k + 1} \end{cases}$$

Vejamos agora o effeito de uma força elementar f applicada n'um ponto da secção transversal. Chamando $d\varkappa$ o alongamento de $\Delta\varkappa$ e sendo E'_c o coefficiente de elasticidade do concreto teremos $E'_c = \frac{Ec}{\lambda^2}$ e d'ahi a força f actuando sobre uma area elementar zdy, nos dá:

$$f = E'_c\, zdy.\delta = E'_c\, zdy.\frac{dx}{\Delta x}$$

e sendo $y\,\Theta = dx$

$$f = \frac{E'_c\,\Theta}{\Delta x}\, z\, y\, dy$$

Tal é o valor da força n'um ponto qualquer do concreto. Quanto ás forças f_1, e f_2 sobre as armaduras teremos:

$$f_1 = \omega_f \,.\, R_f = \omega_f\, m\, Rc$$

$$f_2 = \omega^1{}_f\, R^1{}_f = \omega^1\, m\, R_c$$

Ora

$$Re = \frac{E^1_c\,\Theta}{\Delta x}\, v^1 \text{ e } R_c = \frac{E^1_c\,\Theta}{\Delta x}\, v$$

d'onde

$$f_1 = \frac{E^1_c\,\Theta}{\Delta x}\, m\, \omega_f\, v^1$$

$$f_2 = \frac{E'_c\,\Theta}{\nabla x}\, m\, \omega'_f\, v$$

Sommando todos os esforços $\Sigma f = o$. Então

$$\frac{E^1_c\,\Theta}{\Delta x}\left[\int_0^{v^1} z\, y\, dy + m\left(\omega^1_f\, v - \omega_f\, v^1\right)\right] - \frac{E^1_c\,\Theta}{\Delta x}\int_0^{v^1} zy\, dy = 0$$

Vejamos agora os momentos. O momento total M é igual á somma dos momentos parciaes relativamente ao eixo de rotação. Então:

$$fy = \frac{E^1_c \Theta}{\Delta x} (z\gamma^2 dy)$$

$$f_1 v^1 = \frac{E^1_c \Theta}{\Delta x} (m\underset{f}{\omega} v^{12})$$

$$f_2 v = \frac{E^1_c \Theta}{\Delta x} (m\underset{f}{\omega}{}^1 v^2)$$

que sommados dão:

$$M = \frac{E_c'\theta}{\Delta\varkappa}\left[\int_v^{v^1} zy^2 dy + m\left(\underset{f}{\omega}{}^1 v^2 + \underset{f}{\omega} v^{1\,2}\right)\right]$$

Tal é a equação geral que póde tambem tomar outra forma. Sendo $R = \frac{E'c\Theta}{\Delta\varkappa} v'$ teremos:

$$\frac{E'c\theta}{\nabla\varkappa} = \frac{Re}{v'} = \frac{Re}{v}$$

d'onde

$$M = \frac{Re}{v^1}\left[\int_v^{v^1} zy^2 dy + m\left(\underset{f}{\omega}{}^1 v^2 + \underset{f}{\omega} v^{1\,2}\right)\right] = \frac{Re}{v'} N$$

Similhante á formula $M = R \frac{I}{V}$ empregada nos materiaes homogeneos. Então:

$$N = \int_v^{v^1} zy^2 dy + m\left(\underset{f}{\omega}{}^1 v^2 + \underset{f}{\omega} v^{1\,2}\right)$$

expressão facil de guardar-se de memoria.

No caso de vigas rectangulares z = b = const. as equações relativamente ás forças e momentos tomam as formas

$$\frac{Re}{V'}\left[\frac{b}{2}(v^2-v'^2)+m(\underset{f}{\omega'}v-\underset{f}{\omega}v')\right]=O$$

$$\frac{Re}{V'}\left[\frac{b}{3}(v^3+v'^3)+m(\underset{f}{\omega'}v^2+\underset{f}{\omega}v'^2)\right]=M$$

As expressões v e v' pode mser determinadas em funcção de $K = \dfrac{Re}{Rc}$ que póde ser estabelecido de antemão num projecto. Então substituindo-se por seus valores nas equações acima teremos

$$\frac{b}{2}(v^2-v'^2)+m(\underset{f}{\omega'}v-\underset{f}{\omega}v')=\frac{b}{2}\frac{h^2}{(K+1)^2}(1-K^2)+\frac{mh}{K+1}(\underset{f}{\omega'}-k\underset{f}{\omega})=O$$

D'onde

$$K=\frac{bh+2m\underset{f}{\omega'}}{bh+2m\underset{f}{\omega}}$$

relação importante permittindo conhecer os trabalhos dos materiaes, quando se conhece os elementos de uma viga e os esforços aos quaes ella está sujeita.

Quanto á formula dos momentos podemos exprimil-as em funcção de K substituindo v e v' por seus valores

$$\frac{h}{K+1} \text{ e } K\frac{h}{K+1}$$

$$M=\frac{Re}{v'}\left[\int_{K\frac{h}{K+1}}^{\frac{h}{K+1}} zy^2\,dy+m(\underset{f}{\omega'}+\underset{f}{\omega}K^2)\frac{h^2}{(K+1)^2}\right]$$

para o caso geral. Para o caso de viga rectangular, do valor de K acima tiramos

$$\underset{f}{\omega}=\frac{bh}{2mk}(1-k)+\frac{\underset{f}{\omega'}}{K}$$

d'onde se deduz

$$M = \frac{R_e\, bh^2}{6k}\,(2-k) + m\omega'_f\, h$$

ou

$$M = R_e \left[\frac{bh^2}{6}\,(2=k) + m\,\omega'_f\, h \right]$$

O caso de simples armadura se deduz facilmente fazendo $\omega'_f = 0$. Para o caso de viga de secção rectangular

$$R_e\, \frac{bh^2}{6}\,(2-k)$$

$$\omega_f = \frac{bh}{2mk}\,(1-k)$$

Estas expressões são faceis de guardar. Ainda ha outras formas sob as quaes se póde apresentar as formulas acima, como por exemplo em funcção da porcentagem metallica; mas deixamos de fazel-o para não dar desenvolvimentos demaziados. O material trabalhando á flexão, está sujeito á esforços de cisalhamento quer sobre os apoios, quer no corpo da viga. Para combater o cisalhamento sobre os apoios esforço, esse, para o qual é impossivel, racionalmente, estabelecer uma collaboração entre o ferro e o concreto, só temos o recurso de augmentar as areas sobre o qual elle deve actuar.

Quanto aos cisalhamentos transversaes ha os recursos de augmentar a força de cohesão do concreto empregando ou as barras recurvadas de Considére ou os anneis, o que no fundo produz o mesmo effeito. Assim augmenta-se segundo Morsch até 75^k por c/m^2 este esforço e portanto diminue-se a importancia do cisalhamento.

A taxa d'estes esforços não podendo ser influenciada pela acção do ferro no cisalhamento transversal, n'este caso ella ahi se conserva; no caso dos cisalhamento longitudinal as barras conseguindo uma elevação da força de cohesão a taxa correspondente aos esforços de cisalhamento augmenta.

Chamando T o esforço cortante sobre o apoio e to a taxa de cisalhamento do concreto a area do concreto sobre o aopio será

$$\Omega_c = \frac{T}{to}$$

Quanto ao cisalhamento longitudinal. Si Ry é o trabalho de uma fibra distante de y da fibra neutra e Rc o trabalho n a fibra mais affastada

$$\frac{Ry}{R_c} = \frac{y}{v} \text{ ou } Ry = \frac{R_c\,y}{v}$$

Sobre uma area zdy o esforço será então R_y zdy =

$$= \frac{R_{c}y}{c} \text{ zdy}$$ e estas forças accumuladas serão

$$\sum_{Y} R \text{ zdy} = \frac{R_c}{v}\int_{Y^1}^{Y} z_Y dy = \frac{R_c}{v} D$$

sendo *D* o momento estatico da area zdy em relação ao eixo considerado. Estas forças serão equilibradas pelas reacções; mas entre duas secções infinitamente visinhas apparecem esforços de escorregamento. De facto si suppozermos uma secção distante de *dx* da primeira a somma d'estes esforços será ahi

$$\frac{R^1c}{v}\int_{y^1}^{y} zydy = \frac{M+dM}{I}\int_{y^1}^{y} zydy$$

A diferença $\frac{R^1_c - R_c}{v}\int zydy$ será equilibrada pela resistencia ao escorregamento. Como $dM = Tdx$, este esforço de escorregamento sobre a extensão de dx será:

$$C = \frac{Tdx}{I} \int_{y^1}^{y} zydy$$

e por unidade de comprimento

$$C_1 = \frac{T}{I} \int_{y^1}^{y} zydy$$

Temos então na fibra neutra o maximo

$$C_{1\,max} = \frac{T}{I} \int_{o}^{v} zydy$$

Mas no caso do concreto armado I sendo substituido por N teremos no caso geral

$$C_1 = T \frac{\int_o^v zydy}{\int_v^{v'} zy^2 dy + m\,(\omega^1 v_f^2 + \omega v_f^{12})}$$

por unidade de comprimento. No caso da viga rectangular este esforço será:

$$C_1 = \frac{3\,Tb}{(k+1)\left[bh(2-k) + \xi\, m\omega^1_f\right]}$$

Si a taxa nova de trabalho é t'o teremos que

$$\frac{C_1}{b} > \frac{3\,T}{(K+1)\left[bh(2-K) + \xi\, m\omega^1_f\right]}$$

O augmento de cohesão é proporcional ao numero de barras de m/c. Estas barras representando uma area ω_f de ferro na secção $b \times 1$. Admittindo que a resistencia ao escorregamento possa ser representado por uma expressão de forma semelhante á da resistencia ao attricto teremos:

$$C_1 = f\, N$$

sendo N a força d ecohesão. Ora uma area de ferro ω_f representando uma resistencia para uma dada deformação $\frac{Ef}{Ec}$ vezes maior, que uma area de concreto correspondente, claro está, que si a taxa fôr excedida sendo n vezes maior, devemos prever uma armadura. Si b é a largura da vida e $b \times 1$ a area da secção longitudinal por unidade de comprimento

$$\omega_{f\,nesc} = (\omega - 1)\, b\, \frac{E_c}{E_f} = \mu\, (\omega - 1)\, b$$

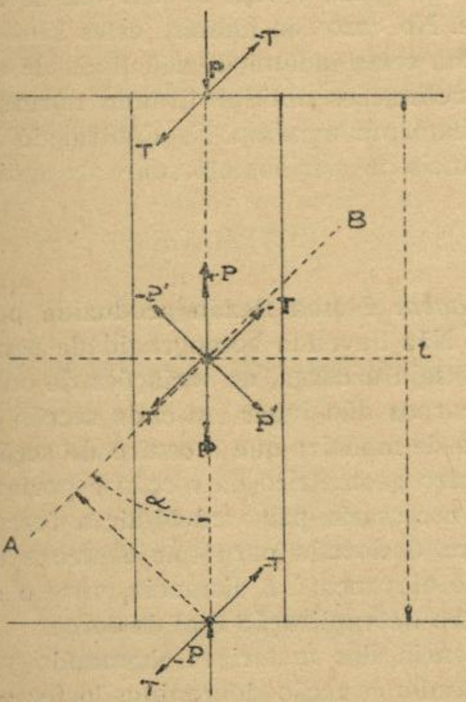
desde que a taxa para b seja nt_0 em vez de t_0 por unidade de superficie. No caso de anneis, estes são collocados em geral com uma certa inclinação calculada de accordo com a media das inclinações obtidas tirando normaes ás superficies de cisalhamento maximo. Na Central do Brasil collocamos estes anneis ou estribos até sobre os apoios.

FLAMBAGEM

A *flambagem* é uma flexão produzida por compressão longitudinal. Não havendo homogeneidade perfeita por mais centrada que seja a carga, as variações de constituição molecular dos corpos dão lugar em cada secção recta á variações de carga de maneira que o centro de acção d'estas, desvia-se do centro geometrico da secção e portanto crea a excentricidade necessaria para substituir a força de compressão, por outra deslocada para este centro e um conjugado cujo braço de alavanca é a distancia entre o centro geometrico e o centro de applicação real da força.

A Resistencia dos materiaes chamando y a excentricidade para estudar a acção do conjugado fez γ uma funcção arbitraria de x e chegou a expressão de $P = \frac{\pi^2 EI}{l^2}$ como sendo a força minima capaz de produzir a flambagem. Mas não sendo possivel determinar todas as constantes do assumpto não se póde estudar em seu detalhe o phenomeno. Por isso as formulas impiricas são muitas e mais empregadas do que os resultados acima.

Propomos um methodo pratico baseado nos estudos de Duguet. Na maioria dos casos um corpo sujeito á compressão rompe por cisalhamento transversal. Duguet estudou o assumpto e achou que este cisalhamento se dá approximadamente fazendo o plano de ruptura angulos α com a direcção da força de 60 á 65° para as pedras e materiaes similhantes e de 50° para os metaes. O que *en gros* é verificado, diz Flamant. D'ahi a ideia do methodo empirico abaixo.



Consideremos uma barra prysmática sujeita no sentido longitudinal á um esforço *P*. Supponhamos que ella tenda á romper por cisalhamento segundo um plano AB inclinado de α sobre a direcção dos esforços. Decompondo as forças P normal e parallelamente á este plano, as acções normaes P' e —P' são directamente oppostas e portanto se equilibram, mas as acções tangenciaes, não. De facto cada uma d'ellas tende á deslocar um dos segmentos da barra sobre o outro e só a resistencia ao cisalhamento á isso se oppõe. Transportando as forças T e —T para os apoios cada uma d'estas força que é inutilisada por um conjugado e por uma força que é inutilisada pela resistencia dos apoios. Estes conjugados agindo no mesmo sentido, sommam-se estes e d'ahi a flexão. Ora, sendo $T = P \cos\alpha$ e h o braço de alavanca do conjugado no caso mais desfavoravel sendo $\frac{1}{2}$ senα teremos $M = \frac{Pl}{2}$ senαcosα para uma das forças e para ambas

$$M = Pl \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \frac{Pl}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$$

que será o momento capaz de produzir a flambagem.

Quanto aos esforços compressivos P' podemos suppor, então, em vista do schema que elles podem ser considerados como resultantes das forças T e P. N'este caso a barra sujeita á flambagem pelo conjugado (T, —T) está ainda sujeita á uma compressão longitudinal P uniformemente distribuida. Então

$$R = \frac{P}{\Omega} + \frac{Mv}{I_{min}} = \frac{P}{\Omega}\left(1 + \frac{l \operatorname{sen} 2\alpha}{2r^2_{min}}\right)$$

Tal é a formula á qual chegamos pelo methodo pratico descripto.

Para o concreto armado tomando $\alpha = 60°$, isto é, tomando então para a inclinação do plano de escorregamento, o mesmo que Duguet indica para pedras teremos: sen2α = 0,86

$$R = \frac{P}{\Omega}\left(1 \pm 0{,}43 \frac{1}{T^2_{min}}\right)$$

Para calcular columnas por esta formula devemos estabelecer primeiro o momento M_t e o esforço longitudinal P. Como então $\omega_f = \omega'_f$ e portanto K = 1 a viga de concreto armado estará sujeita á um momento

$$0{,}86Pl = \frac{R_c h}{6}\left(\Omega + 6m\omega_f h\right)$$

Calcula-se então Ω para uma resistencia $R_1 = R - R_c$ e depois determina-se a armadura de reforço de cada face cuja area será:

$$\omega_f = \frac{5{,}16Pl - R_c \Omega h}{6 R_c m h}$$

Dota-se esta viga de armaduras transversaes caso o esforço R, o exigir. Este processo rapido conduz á bons resultados.

A exposição acima feita sobre a tracção, compressão, flexão e flambagem é um estudo rapido só servindo para mostrar a applicação das ideias expostas que servem de base á theoria apresentada.

	Em vez de	leia-se
pag 6 - 6a. linha	velocidade V	velocidades V
" 6 - 28a. "	terá percorrido um cumprimento	terá percorrido um comprimento
" 6 - 30a. "	unidade de cumprimento	proporcional total
" 7 - 8a. "	$V = \sqrt{E}$	$V = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$
" 7 - 23a. "	$V_c = \frac{E}{p_c}$	$V_c = \frac{E_c}{\rho_c}$
" 7 - 26a. "	que determinam	que determina
" 9 - 3a. "	$\frac{E_f}{\gamma^2 \rho_r} = \frac{E_c}{\frac{\rho_c}{\lambda^2}}$	$\frac{E_f}{\gamma^2 \rho_r} = \frac{E_c}{\frac{\rho_c}{\lambda^2}}$
" 9 - 15a. "	capacidade de trabalho, etc	capacidade de trabalho ás forças directamente oppostas
" 10 - 14a. "	Tal é o valor das forças externas, etc	Tal é a relação entre os valores das forças externas, etc
" 10 - 21a. "	$p_c = E\delta$	$p_c = E_c \delta_c$
" 11 - 18a. "	$\frac{p_f}{p_c} = \gamma^2 \lambda^2 \frac{E_f}{E_c} = m$	$\frac{p_f}{p_c} = \gamma^2 \lambda^2 \frac{E_f}{E_c} = m$
" 12 - 6a. "	$A_c = \lambda^2 p_c - p_c = (\gamma^2 - 1) p_c$	$A_c = \lambda^2 p_c - p_c = (\lambda^2 - 1) p_c$
" 16 - 28a. "	$\frac{p_f - A_f}{p_c \times A_c}$	$\frac{p_f - A_f}{p_c + A_c}$
" 16 - 29a. "	-------------	Supprima-se a linha
" 17 - 14a. "	e considere ainda, etc	e Considère ainda, etc
" 21 - 6a. "	lemite de elasticidade	limite de elasticidade
" 21 - 24a. "	$\Omega f = \frac{p}{p_c(1 - m\theta)}$	$\Omega f = \frac{p\theta}{p_c(1 + m\theta)}$
" 24 - 11a. "	$\frac{R_c}{R_c} = \frac{V'}{V} = K$	$\frac{R_o}{R_c} = \frac{V'}{V} = K$
" 25 - 8a. "	$f = \frac{E'_c \theta}{\Delta x} z \gamma dy$	$f = \frac{E'_c \theta}{\Delta x} zydy$
" 25 - 6a. "	$f = E_c z dy S$	$f = E_c z dy \delta$
" 26 - 3a. "	$fy = \frac{E'_c \theta}{\Delta x}(z \gamma^2 dy)$	$fy = \frac{E'_c \theta}{\Delta x} zy^2 dy$
" 26 - 4a. "	$f_, v' = \frac{E'_c \theta}{\Delta x}(m \omega f v^{12})$	$f v' = \frac{E'_c \theta}{\Delta x}(m \omega f v'^2)$