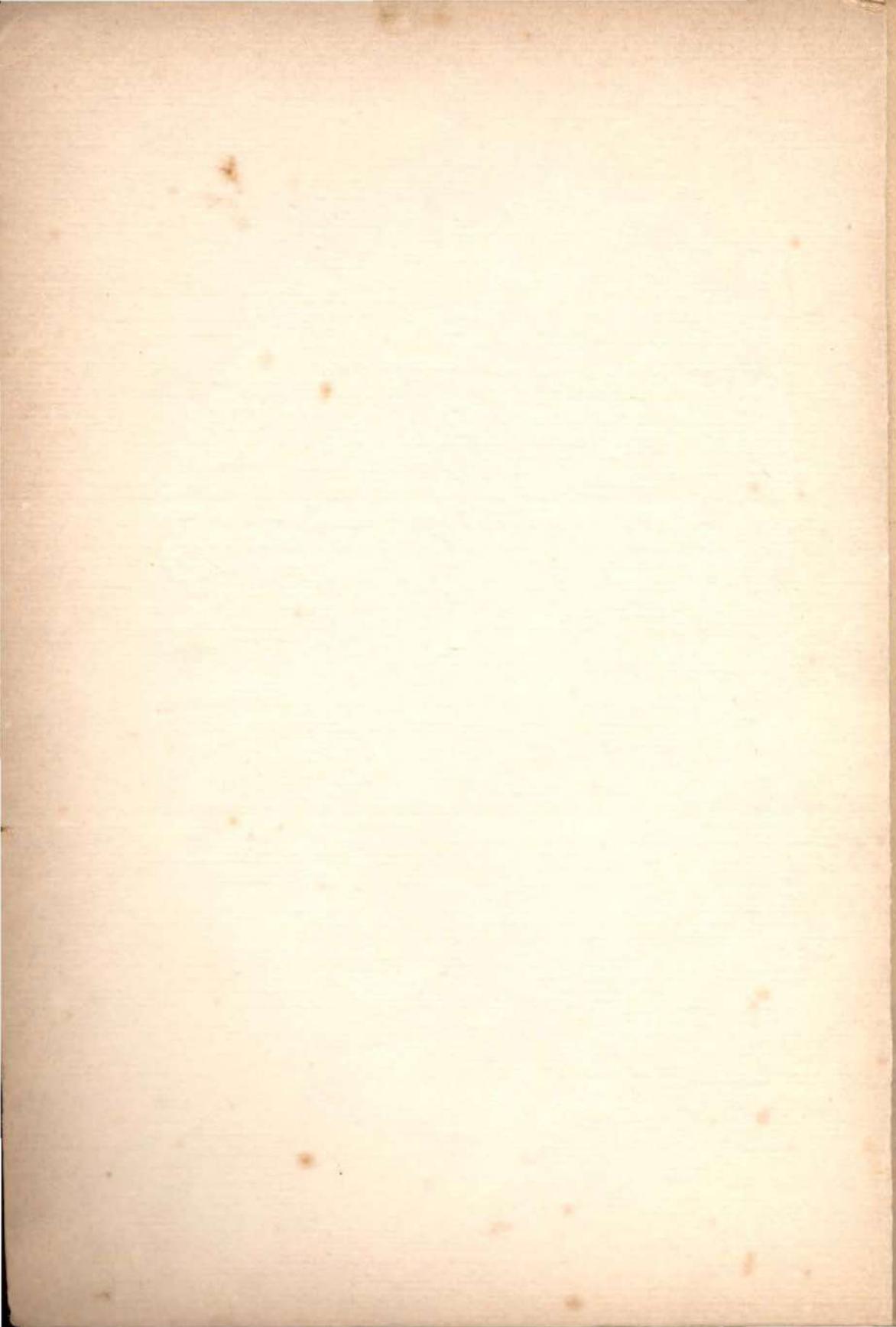


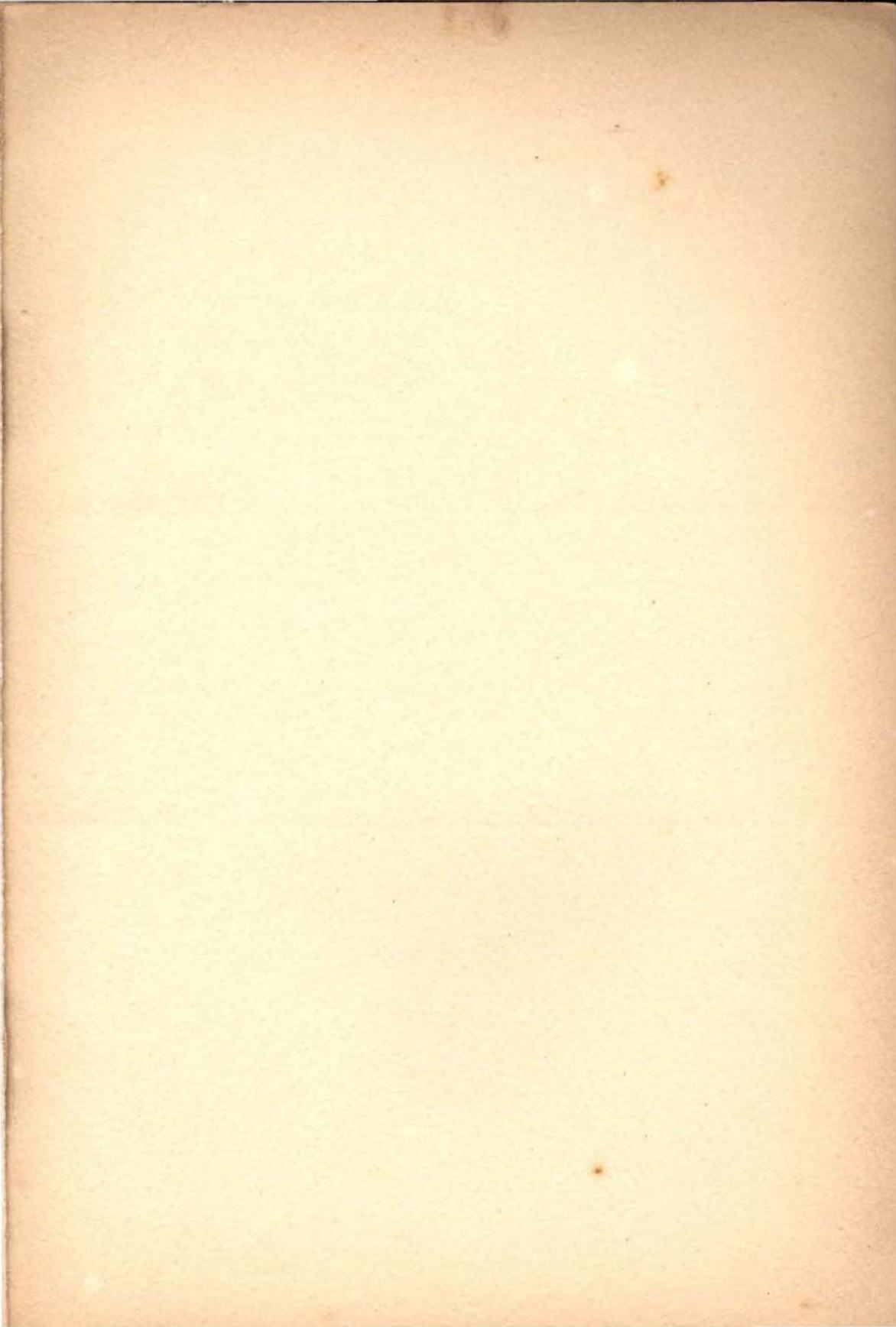
CARLOS DEL NEGRO  
ESCULTOR

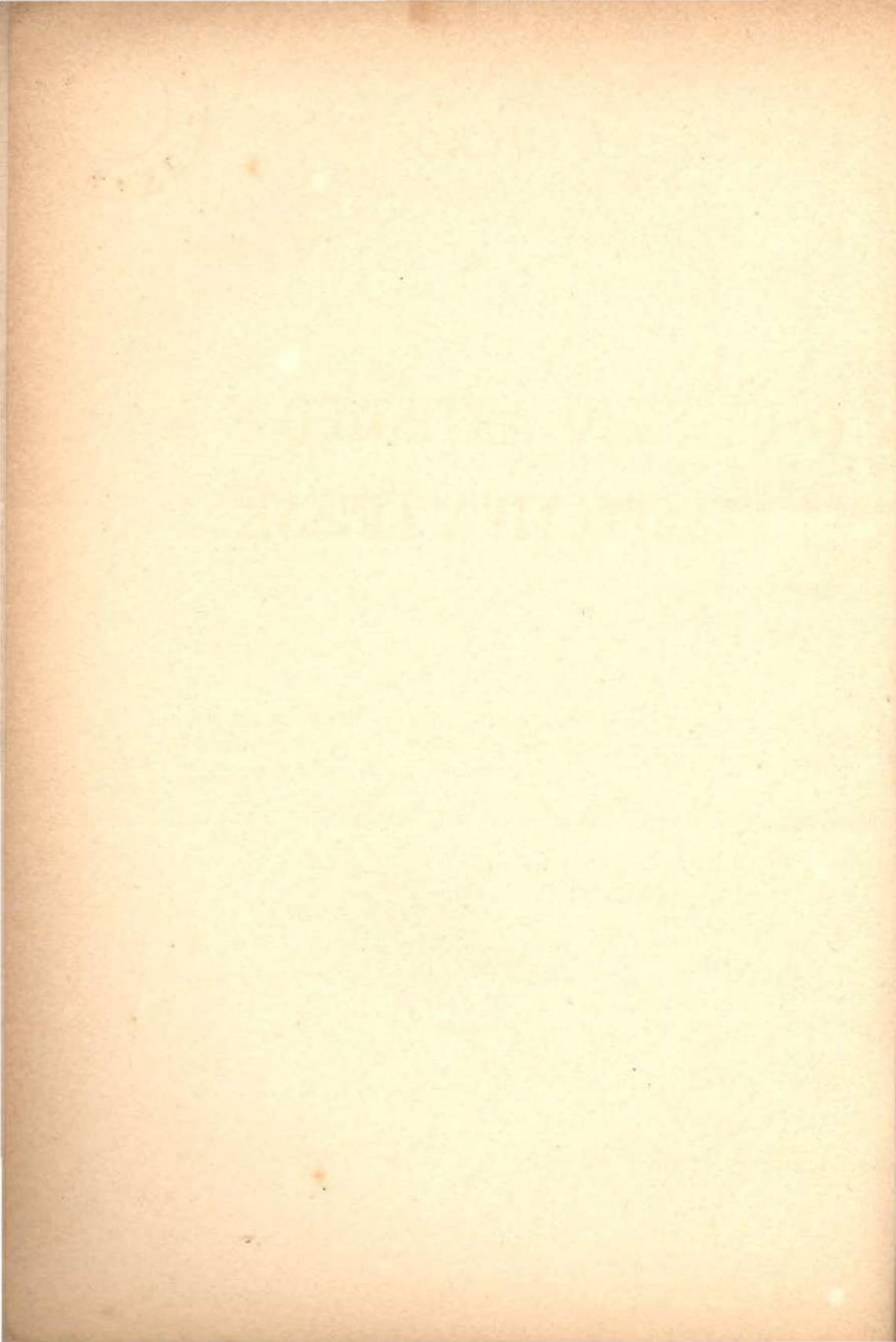
*O Desenho Artístico  
e a  
Perspectiva Linear*

TESE DE CONCURSO A CADEIRA DE DESENHO  
DA ESCOLA NACIONAL DE BELAS ARTES —  
UNIVERSIDADE DO BRASIL

RIO DE JANEIRO — 1942









CARLOS DEL NEGRO  
ESULTOR

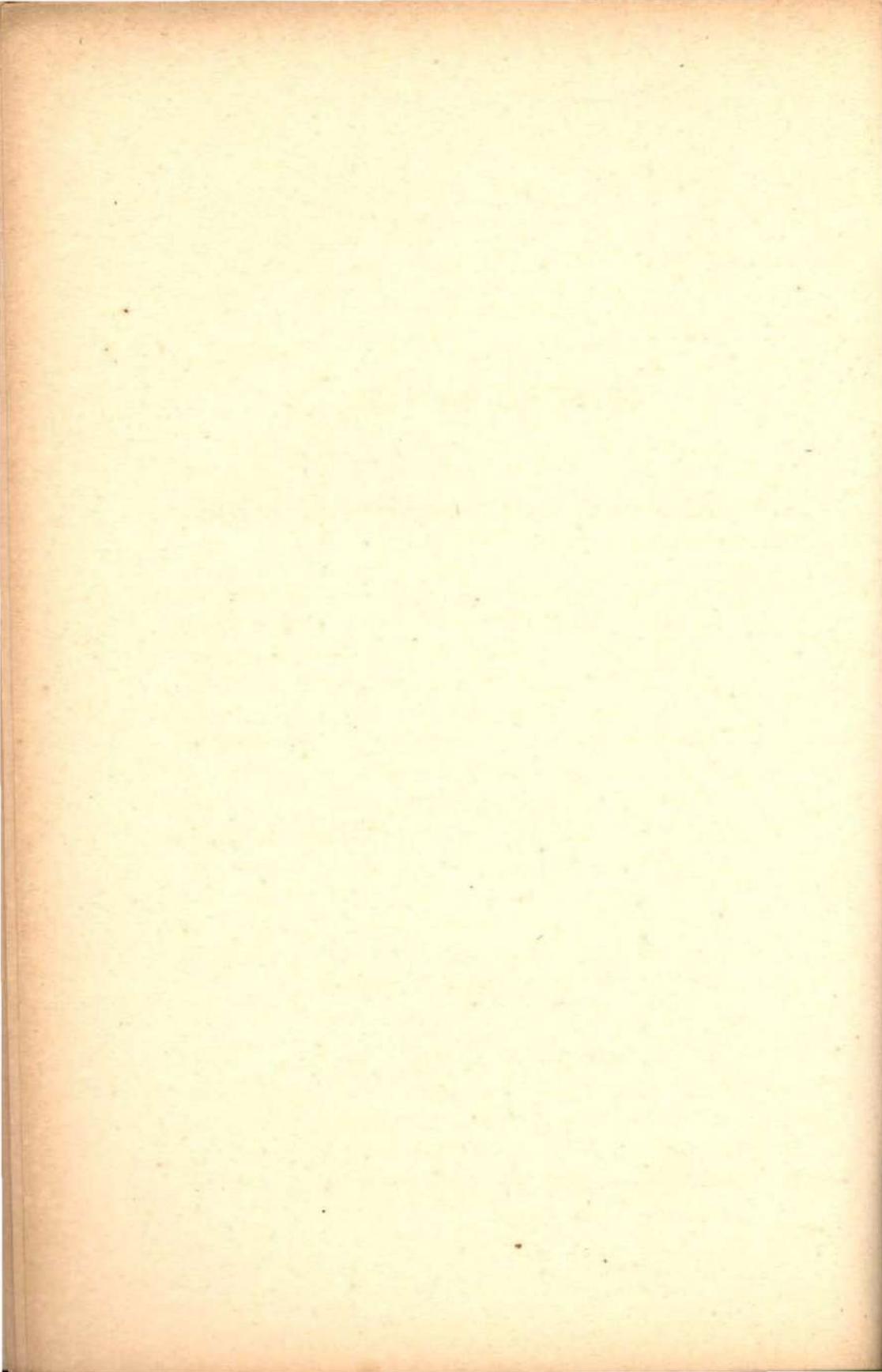
# O DESENHO ARTÍSTICO E A PERSPECTIVA LINEAR

TESE DE CONCURSO À CADEIRA DE DESENHO  
DA ESCOLA NACIONAL DE BELAS ARTES —  
UNIVERSIDADE DO BRASIL

4157/24-05-2016

A minha filha

MARIA.



## OBJETIVO DA TESE

Depara-se-nos no tratado de perspectiva de RAOUL BRICARD o seguinte passo:

“Les peintres ont respecté la perspective, au moins d'intention, tant que la photographie ne fut pas inventée. Jusqu'alors il passait pour méritoire de dresser une bonne perspective. Mais du jour où l'on vit un appareil y réussir mieux que le dessinateur le plus habile, la perspective cessa d'être admirée, parce que l'homme ne peut admirer que ce que fait l'homme (de même que l'invention du piano mécanique discrédite la virtuosité d'une certaine sorte). Les peintres, tournés vers un autre idéal que l'exactitude proclamèrent de plus en plus haut leur droit à “l'interprétation”, c'est-à-dire à la déformation”.

A superioridade a que se refere BRICARD é certa quanto a maior fidelidade da fotografia às leis da perspectiva. O maravilhoso processo fotográfico deve a sua grande aceitação à facilidade com que qualquer pessoa, sem mais estudos, consegue boas fotografias. No en-

tanto a sua esfera de acção se restringe à documentação dos fatos.

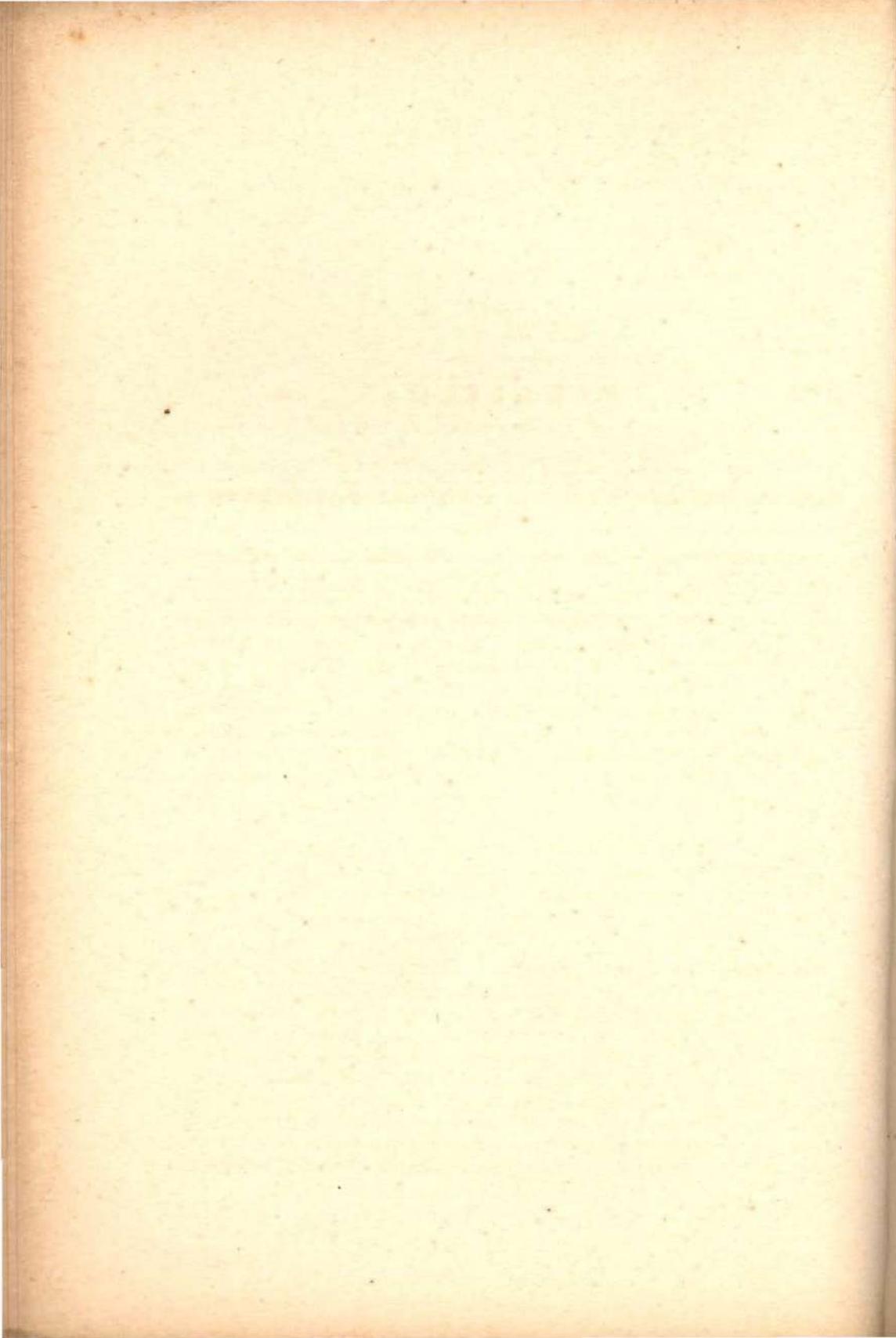
Compara-se comumente o globo ocular à máquina fotográfica, mas esta analogia é apenas aparente como se poderá deduzir do paralelo que vamos apresentar entre ambos. Ha profundas diferenças que os distinguem, diferenças essas que conduzem ao estabelecimento de normas, para a pratica da fotografia, baseadas no limite de tolerancia da perspectiva.

E' interessante recordar que J. DE LA GOURNERIE pensando melhorar certas formas arquitetônicas limitadas por superficies curvas, pintadas nos bordos dos quadros em desacordo com a projeção cônica, empreendeu-lhes a perspectiva exata chegando a contornos totalmente inadmissíveis. Nosso objetivo é contrariar a afirmação de BRICARD, quando assegura ser possível realizar mais corretamente com a máquina fotográfica do que com a observação a perspectiva artística própria da visão.

Contudo a perspectiva cônica é o método teórico de representação que mais se aproxima da visão; tem largo campo de aplicação nas artes plásticas quando empregada com verdadeira intenção artística. Por isso desenvolvemos ainda uma perspectiva resumida, segundo o método peculiar das projeções centrais, muito elegante, pouco generalizado entre nós e o mais interessante para o artista que procura resolver os seus problemas no próprio quadro.

## **PROGRAMA**

Iniciaremos a tese estabelecendo o paralelo entre a máquina fotográfica e o órgão de visão, procurando fazer resaltar os característicos mais importantes de cada um dêles. Em seguida ocupar-nos-emos da visão binocular. Por fim desenvolveremos a perspectiva linear segundo o método das projeções centrais.



## PARALELO

### ORGÃO VISUAL

A imagem forma-se no interior do globo ocular por intermédio do sistema ótico (cornea, humor aquoso e cristalino) e impressiona a retina, sensível aos raios luminosos, cuja forma é comparável à semiesfera (fig. 1). As grandezas das imagens são aproximadamente proporcionais aos ângulos que as compreendem.

O cristalino não é homogêneo; é constituído de camadas superpostas de índices de refração diferentes.

Os índices dos meios do globo ocular (o humor aquoso tem o índice de refração igual a 1,33 sensivelmente o mesmo do humor vítreo, o índice do cristalino varia de 1,379 a 1,419) sendo inferiores ao do vidro, fazem com que êle perca pouca luz pela reflexão. O sistema ótico perde cerca de 2,5%. A perda pela absorção aumenta

### MÁQUINA FOTOGRÁFICA

A imagem dos objetos exteriores forma-se por meio de um sistema ótico (a objetiva) e impressiona a superfície plana, sensível aos raios luminosos (fig. 2). As grandezas das imagens não são proporcionais aos ângulos que as compreendem: sob ângulos iguais variam grandemente com a obliquidade dos raios luminosos em relação à superfície plana sensível.

Os vidros da objetiva são homogêneos, bastante transparentes e as superfícies polidas.

Em igualdade de condições uma objetiva é tanto melhor quanto menos perder luz pela reflexão e pela absorção. A perda depende do número de superfícies refringentes e do índice de refração do material empregado na construção da objetiva. Uma lente simples (Meniskus) perde 9 %, uma objetiva (Periscop) composta

com a idade do indivíduo; nos velhos pode ser enorme.

No globo ocular a reflexão principal faz-se sobre a primeira superfície (a córnea), o que permite reduzir a luz prejudicial, refletida pelos outros meios sobre a retina, ao mínimo de 0,002%.

Todo o espaço entre o cristalino e a retina é ocupado pelo humor vítreo. Os raios luminosos, em virtude da grande diferença de índice de refração entre a córnea e o ar, sofrem grande desvio ao penetrar no globo ocular; em seu percurso posterior, são pouco influenciados pelos meios de índices de refração muito próximos entre si.

A esclerótica, bastante rígida e inextensível, protege a retina contra a luz. Sua metade posterior é envolvida por tecido graxo da órbita e a parte anterior é parcialmente protegida pelas pálpebras.

A íris, cuja abertura é variável, regula o feixe luminoso que impressiona a retina.

A acomodação (focalização) consiste na modificação da curvatura do cristalino.

A *visão direta* ou *central* é obtida por meio da fosseta cen-

de duas lentes 20%, as objetivas tipo Tessar compostas de quatro lentes perdem 30 a 35%, finalmente a objetiva Ernostar de seis lentes 48%.

A luz refletida pelas diferentes superfícies de uma objetiva sobre a primeira superfície, encontra, antes de sair, superfícies intermediárias, que enviam parte da luz sobre a camada sensível. É preciso construir a objetiva fotográfica de maneira a afastar essa luz, pois ela forma a mancha denominada *central*.

O interior da câmara fotográfica é ocupado pelo ar. O primeiro desvio que sofrem os raios luminosos é grande (diferença dos índices de refração do ar e da objetiva); além disso, em virtude de nova diferença de índice de refração entre a objetiva e o ar, as imagens se formam a uma distância mais curta relativamente à do globo ocular.

Das condições exigidas do aparelho fotográfico uma é que a luz não possa impressionar a camada sensível sem atravessar a objetiva. Constroem-se a máquina de material opaco.

O diafragma permite regular o feixe luminoso que impressiona a camada sensível.

A focalização obtém-se por deslocamento da placa sensível em relação a objetiva ou vice-versa.

A imagem de um objeto situado sobre o eixo óptico do sistema é

tral da retina (*fovea centralis*) e de seus bordos, sob extensão angular de 5° graus mais ou menos. Constituem a visão *indireta* ou *excentrica*, as percepções visuais que se conseguem por meio da parte restante da retina.

Constitue o *campo visual* o conjunto de pontos percebidos pela vista imóvel. A posição da pupila entre a córnea e o cristalino, a forma concava da retina permitem à vista abraçar um campo muito extenso. O campo visual médio abrange na direção horizontal, para cada um dos olhos, 90° do lado temporal e 60° do lado nasal; em sentido vertical mede aproximadamente 55° para cima e 70° para baixo. Dependendo da região da retina impressionada pode ser êle dividido em:

- a) *campo de visão nítida*. — As imagens dos pontos formam-se sobre a *fovea*; abrange uma cone visual de 1° aproximadamente.
- b) *campo de visão nula*. — As imagens dos pontos formam-se sobre o *punctum caecum*. Abrange um cone visual de 6° graus aproximadamente.
- e) *campo visual propriamente dito*. — As imagens dos pontos formam-se sobre as outras partes da retina. A visão é pouco nítida e tanto menos nítida quanto mais se aproximam as imagens da periferia da retina.

Em virtude de sua grande abertura a vista deveria ter sen-

sempre superior a dos objetos esféricos.

Constitue o *campo da objetiva* o conjunto de pontos de um plano bem focalizados que se acham compreendidos em um cone luminoso de determinado ângulo. Denominam-se as objetivas de acordo com o ângulo que abraçam:

- a) se inferior a 35° — *de pequeno ângulo* (Tele);
- b) se inferior a 60° — *de ângulo médio* (normal);
- c) se superior a 90° — *de grande angular*.

Em igualdade de condições são melhores os aparelhos que têm maior campo. A ampliação do campo exige maiores recursos técnicos e as objetivas devem ser construídas de modo a satisfazer entre outras condições, as seguintes:

- 1) o plano de frente tem sua imagem em outro plano de frente (*objetiva aplanática*, isto é, isenta de curvatura de campo);
- 2) a linha reta tem por imagem outra linha reta (*objetiva retilínea*, isto é, isenta de distorsão);
- 3) a iluminação da imagem é proporcional em todos os pontos à luminosidade correspondente do objeto.

A objetiva deve ser desprovida de aberração de esfericidade.

sível aberração de esfericidade. Entretanto, a íris com a sua regulação, a córnea achatada na periferia e a diminuição do índice de refração do cristalino para os bordos concorrem para diminuir sua importância.

A aberração cromática não pode ser desprezada; nada existe para corrigi-la na estrutura ótica do globo ocular. O cromatismo mede 1 trigésimo da distância focal. O decrescimento rápido da luz, do centro para a periferia, nos círculos de difusão permite a definição da imagem e o acromatismo aparente. Contribue o cromatismo para julgar as distâncias.

E' bastante o ângulo  $\alpha$  para justificar a existência de um leve astigmatismo na vista normal.

A retina é formada de elementos sensíveis à luz (cônes e bastonetes) dos quais os menores têm o diâmetro aproximado de 2 micra. Esses elementos não se distribuem uniformemente; na região da mácula os bastonetes vão rareando para o centro, ao passo que os cônes são mais numerosos e finos. A fovea é constituída exclusivamente de cônes. No punctum caecum não existem elementos sensíveis à luz.

A objetiva *aplanática*, isto é, a associação de lentes convergente e divergente, concomitantemente ao emprego de vidros de índices de refração diferentes, corrige o defeito (tambem a aberração cromática) dando imagens nítidas no centro e nos bordos do campo. Diminue-se tambem a aberração de esfericidade diafragmando.

A aberração cromática da objetiva, mesmo pequena, prejudica a nitidez da imagem. A objetiva deve ser *acromática*, isto é, formar em mesmo plano as imagens das diversas radiações emitidas por pontos situados em um plano. A diafragmação concorre para diminuir este defeito pouco sensível no centro do campo.

As objetivas devem ser desprovidas de astigmatismo, isto é, permitir focalizar ao mesmo tempo com igual nitidez as verticais e horizontais e, em geral, todas as linhas inclinadas situadas em um mesmo plano (*objetiva anastigmática*). A diafragmação diminue esta aberração.

A camada da emulsão é homogênea nos bons materiais. No negativo o escurecimento é obtido por um depósito de prata metálica em estado de enorme subdivisão (grãos). A dimensão dos grãos depende da natureza da emulsão, do revelador e da temperatura.

A percepção das formas ou a *acuidade visual* é medida pelo menor ângulo sob o qual a vista pode distinguir a forma de um objeto dado. Na vista normal, o limite máximo de separação é de 1 minuto. Abaixo desse ângulo os círculos de difusão superpoem-se na retina.

A área de visão distinta é restringida à fosseta central (*fovea centralis*) da mácula lútea, de diâmetro correspondente a um cône de grandeza angular de 1 grau aproximadamente. Não existe delimitação precisa entre a acuidade visual central e a periférica. A acuidade decresce progressiva e continuamente do centro para a periferia da retina.

Passa a linha visual pela *fovea centralis*, forma um ângulo de 5° a 7° graus (ângulo  $\alpha$ ) com o eixo de simetria ântero-posterior. O órgão visual não é um sistema exatamente centrado.

A percepção diferencial simultânea (distinção das diferenças de claridade apresentadas simultaneamente) decresce nítida e rapidamente do centro para a periferia da retina.

O órgão visual percebe diferenças de claridade que se podem apresentar na relação de 1 para 5.000.000.

A sensibilidade à côr, característica da visão central, é máxima em torno da região de visão nítida (*bordos da fovea centralis*).

A nitidez da imagem é dada pela grandeza de seus círculos de difusão. Seus diâmetros, conforme a finalidade da fotografia, não devem exceder de 1/10 a 1/30 de mm, para aparecerem punctiformes sob o ângulo em que devem ser vistos.

A qualidade da imagem ótima no centro do campo, peora gradativamente para a periferia.

As lentes da objetiva da máquina devem estar exatamente centradas.

A sensibilidade da emulsão à luz branca ou à côr é uniforme em toda a extensão da camada sensível desde que esta seja homogênea.

O negativo mostra, com proporcionalidade, diferenças de claridade que correspondem à relação de 1 para 1000. Claridades essas cuja gradação no papel de cópia está na relação de 1 para 30.

A sensibilidade da emulsão às cores depende do seu tipo.

Em igualdade de energia a impressão luminosa recebida depende da radiação. É máxima para 560 m $\mu$ . correspondente ao amarelo esverdeado; muito fraca para as extremidades do espectro, é praticamente nula para os infravermelhos e os ultravioletas.

Damos os principais:

- a) *comum* — Sensível apenas ao violeta e azul. Por meio dêle na cópia o amarelo, vermelho e preto reproduzem-se em preto, o azul e violeta em cinza mais ou menos claro e o branco reproduz-se em branco.
- b) *ortocromático* — Sensível ao violeta, azul, verde e amarelo com máximo de sensibilidade para o azul e mínimo para o amarelo. Na fotografia reproduzem-se o alaranjado e o vermelho em cinzentos quasi negros, o amarelo em cinzento muito forte, o verde em cinzento acentuado, o azul e o violeta em cinzentos claros, finalmente o branco reproduz-se em branco.
- c) *pancromático* — Sensível às cores do violeta ao vermelho com máximo de sensibilidade para o azul e mínimo para o verde. Na fotografia o branco reproduz-se em branco, o azul em cinza claro, o verde em cinza escuro, todas as outras cores em cinzentos esbatidos entre êsses dois extremos.

Com finalidades especiais pode a emulsão ser sensibilizada para certas regiões do espectro, como por exemplo, para o ultravioleta, o infravermelho, que não têm correspondência no globo ocular.

Os filtros são empregados para dar ao negativo maior contraste em determinadas regiões do espectro.

Para que a visão seja nítida é necessário que a imagem se for-

Para que o negativo seja nítido é necessário que a imagem se

me sôbre a retina (acomodação) e além disso sôbre a *fovea centralis* (ponto de fixação), unico lugar da retina em que a distinção dos detalhes atinge o máximo desenvolvimento.

Para ver um objeto realizam-se numerosos movimentos oculares afim de deslocar o ponto de fixação pela sua superficie.

As imagens parciais do objeto são sucessivas e coordenadas pela visão indireta.

A pequenez do órgão visual faz com que o seu campo seja profundo. O olho emétopo, sem acomodação, estará em foco para qualquer ponto situado além de 4 ou 5 metros. Acomoda-se para ver nitidamente os objetos nas distâncias mais aproximadas.

forme sôbre a camada sensível (focalização). A melhor imagem total consegue-se diafragmando bastante de modo a eliminar da objetiva os raios marginaes. Utiliza-se assim a parte central da objetiva isenta de aberrações e aumenta-se a profundidade do campo em virtude da formação de círculos de difusão com diâmetros menores.

A absoluta imobilidade da máquina é requisito indispensável para uma boa fotografia.

A imagem total do objeto é obtida em uma única exposição.

O aparelho fotográfico tem uma certa profundidade de campo que depende da distância focal e da abertura da objetiva. Os pequenos aparelhos têm maior profundidade de campo. Em geral os objetos cujas distâncias estão acima de 100 vezes a distância focal têm suas imagens situadas no plano focal.

## RESUMO

A forma da retina sendo aproximadamente semiesférica, não altera sensivelmente as grandezas das imagens, vistas sob mesmo ângulo, pelo fato de se formarem em diferentes partes da mesma; outros fatores porém, concorrem para que a nitidez das imagens seja grandemente afetada, podendo até nem haver imagem se ela vier formar-se sobre o *punctum caecum*. Para precisar as nossas observações utilizamos sempre de uma região muito limitada, a mais sensível do órgão visual, com a qual percorremos toda a extensão interessante do campo. As observações de detalhes são feitas sucessivamente e a visão indireta assegura-nos a sua continuidade.

Para fazer uma comparação material diríamos que as imagens parciais nítidas são para nós como as inúmeras pedrinhas do mosaico que, justapondo-se umas ao lado das outras, constituem em conjunto a composição.

Na fotografia a imagem total é obtida de uma só vez e, leva-se a parte principal do motivo para o centro do quadro, porquanto apesar de todos os progressos que se possam introduzir na máquina, aí a imagem é sempre melhor. Em oposição ao órgão visual, que está em constante movimento, a imobilidade da máquina é condição absoluta de êxito. No negativo as grandezas das imagens obtidas sob mesmo ângulo variam com a obliquidade dos raios luminosos ou, por outras palavras, elas seguem as leis da perspectiva linear; mas os insucessos fotográficos aparecem quando as formas não se ajustam às que estamos acostumados a ver. Todos os tratados de fotografia evidenciam essa preocupação, dando normas para evitar que tais deformações desagradáveis e inadmissíveis venham a produzir-se. Afasta-se também da visão no que diz respeito ao claro escuro do negativo pois que o seu escurecimento se faz mais pela sensibilidade da emulsão às diversas cores do que aos valores.

## VISÃO BINOCULAR

A fovea centralis tem uma importância capital na visão binocular; seu diâmetro variando de 2 — 4 décimos de milímetro, fica compreendido em um cône visual de 1.º grau aproximadamente. E' o campo de visão nítida e, para dar um exemplo, já fóra desse cône visual a acuidade diminue tanto que não podemos ler um livro.

A observação de um ponto obriga à fixação; consiste em orientar os olhos de modo que as imagens do ponto se dirijam para as foveas (fundamento da visão binocular). A acomodação faz-se concomitantemente em cada vista para que a imagem se forme sôbre a retina. Origina-se assim em cada um dos olhos uma imagem; essas duas imagens, diferentes entre si, dão-nos impressão visual única especialmente para os pontos que incidem nas foveas.

Os olhos em separado têm a faculdade de acomodar-se para que a imagem se forme sôbre a retina e em movimento coordenado a faculdade de variar o ângulo de convergência das linhas visuais (eixos dos cônes de visão nítida).

Ver o objeto é ensaiar uma série de triangulações (a base dos triângulos é a distância pupilar), em que a variação dos ângulos de convergência faz ressaltar os pontos que estão mais próximos de nós dos mais dis-

tanciados. Em determinada direção, o ângulo sob o qual é visto um objeto é precisado pela rotação que devem efetuar os olhos nessa direção, afim de levar as imagens das extremidades do objeto a formarem-se sobre as fóveas. Não se dá, portanto, a fusão nem mesmo a comparação imediata das imagens totais do objeto. Interessante é que, quando fixamos um ponto, se prestarmos atenção a outro, situado no plano de simetria dos olhos, mais próximo ou mais distanciado, êle nos aparece desdobrado. A sensibilidade para avaliar as distâncias relativas vai diminuindo até anular-se no limite em que não haja mais desdobramento de imagem entre os pontos próximos do fixado; daí por diante recorreremos a outros meios para julgá-las.

A visão indireta chama a nossa atenção para os pontos que devem ser fixados, dá-nos a aparência dos objetos e coordena os detalhes sucessivamente observados.

A imagem dos objetos, desde que a cabeça fique imóvel e o campo do olhar seja limitado, segue sensivelmente as regras da perspectiva cônica. As impressões visuais únicas que nos dão, por exemplo, os pontos duma linha reta perpendicular ao quadro, fixados em visão binocular, localizam-se sobre uma reta  $b$  entre as perspectivas  $a$  e  $c$  das retas que contêm as imagens dos referidos pontos, obtidas para cada vista isoladamente (fig. 3); a reta  $b$  concorre ao ponto  $P$ , medio entre os pontos principais da vista direita  $P.D.$  e da esquerda  $P.E.$  As perspectivas das retas perpendiculares ao quadro feitas pela vista direita concorrem ao ponto  $P.D.$  e feitas pela vista esquerda ao ponto  $P.E.$  Por outro lado não conseguimos ver simultaneamente o objeto e sua perspectiva em visão binocular;

porquanto, se fixarmos um ponto da perspectiva e prestarmos atenção ao seu correspondente sôbre o objeto, vê-lo-emos desdobrado sôbre as perspectivas próprias de cada vista isolada. No caso da referida reta se encontrar no plano do horizonte desdobra-se êle sôbre a linha do horizonte. Além disso, o objeto permite a exploração parcial de sua forma por qualquer dos olhos em separado, obtendo-se assim a impressão de que êle cubra uma superfície menor do que a desenhada em visão binocular (impressão que se obtem combinando, entre si, linhas das perspectivas independentes de cada vista, por exemplo *c* com *d*), contrariamente ao desenho ou pintura em que a ilusão é maior se êle for observado apenas com um dos olhos. LEONARDO DA VINCI chamou a atenção para êsse fato, tratando da impossibilidade da pintura apresentar o relevo das cousas naturais.

Quando o campo visual exigir movimentos da cabeça já não podemos falar mais em ponto principal fixo. As deformações que apareceriam nas extremidades do quadro, feito rigorosamente de acordo com a perspectiva, poderiam assumir grandes proporções. A perspectiva deve então ser aplicada com verdadeiro critério artístico. Mesmo no renascimento, profundamente dominado por essa descoberta, não é difícil encontrar grandes artistas que se não restringiram às suas leis. Um exemplo decisivo e simples de inobservância é a deformação que deveriam ter as figuras situadas nos bordos dos quadros e que se fossem praticadas (só a máquina fotográfica conseguiria realizá-las) seriam repugnantes aos nossos olhos; a necessidade de fixá-las para as estudar tem por consequência a mobilidade do ponto principal no quadro.

Os artistas que se preocuparam com o assunto procuraram os limites de tolerância da perspectiva, pelo menos, no que diz respeito às linhas retas. Das regras práticas a mais conhecida é a de LEONARDO que aconselha a distância principal três vezes maior que a grandeza do objeto ou duas vezes maior que a largura do quadro.

Em nossa opinião nos trabalhos de grande vulto a perspectiva deve ser experimental, isto é, deve obedecer a um critério superior do sentimento artístico.

### DESENHO

Ao artista o problema da perspectiva se apresenta de duas maneiras conforme se trata de estudo do natural ou de composição. No primeiro caso os elementos fundamentais da perspectiva são deduzidos da observação, no segundo êles são postos pelo artista.

E' conhecidíssima a comparação do plano de projeção com o vidro, sôbre o qual podemos desenhar em visão monocular os contornos visíveis dos corpos; mas a posição desse plano de projeção fictício, em relação ao observador, depende da escala do desenho. Se este for menor que o natural o plano estará situado entre o observador e o objeto, em caso contrário ficará depois do mesmo. Como é sabido, em perspectiva, as secções feitas por planos paralelos ao plano de projeção não deformam os desenhos, apenas os representam em escala diferente ou, por outras palavras, as figuras desses planos são homotéticas em relação ao ponto principal.

O desenho é comparavel a um problema cuja resolução procede por aproximações sucessivas. O esboço limita-se às linhas dominantes do motivo com suas pro-

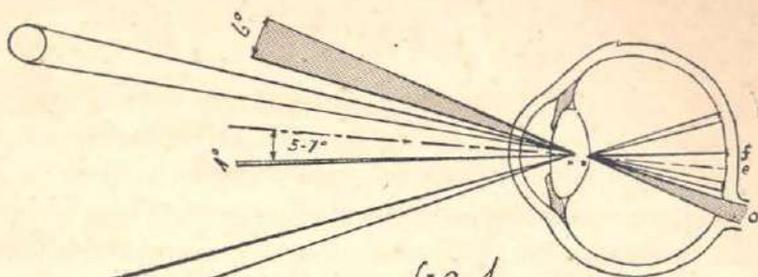
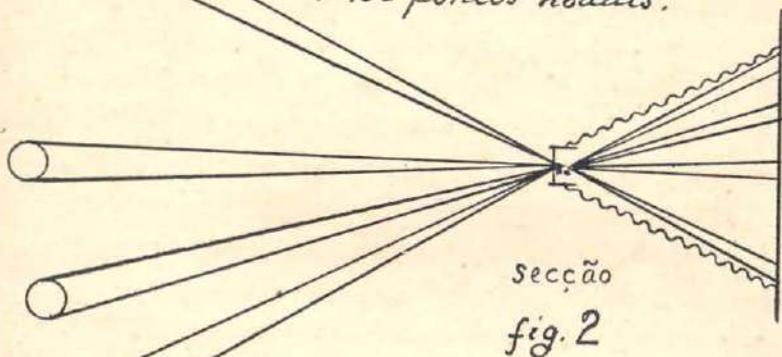


fig. 1  
 secção horizontal da vista  
 direita:  
 f - fovea centralis  
 e - eixo antero posterior  
 o - nervo ótico (punctum caecum)  
 n n - pontos nodais.



secção  
 fig. 2

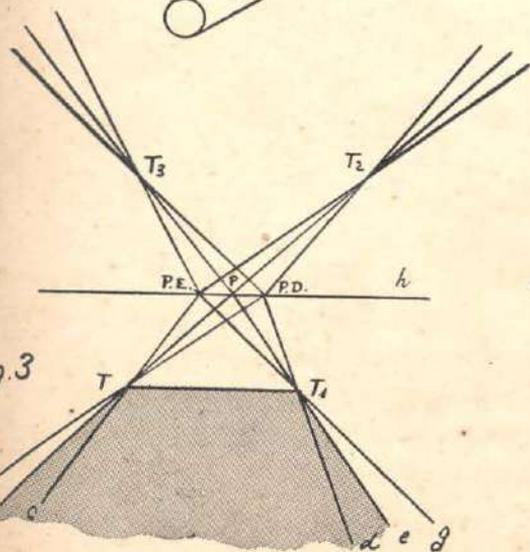


fig. 3

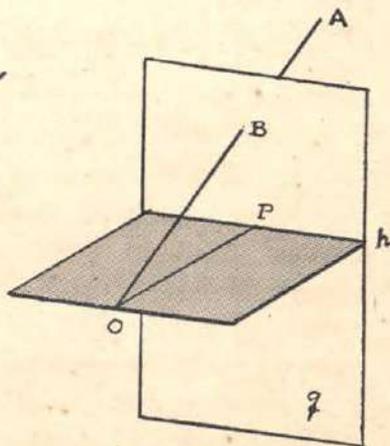


fig. 4



porções relativas e ao melhor aproveitamento do quadro. Desde que hajam sido precisadas no desenho, pelo menos, a posição e grandeza de uma linha, de preferência vertical, devemos proceder ao traçado definitivo da linha do horizonte.

Ha várias maneiras praticas de procurar a referida linha, já com auxílio de um cartão, esquadro ou de um espelho. Para isso, com o cartão ou esquadro, mantido em posição horizontal, diante dos olhos semi-cerrados, de modo a olharmos atravez dos cílios, procuraremos notar bem os pontos por onde passa essa linha no motivo. E' necessário observar atentamente para não esquecer os pontos de referência. Com um pequeno espelho ou simplesmente um pedaço de vidro enfumacado em uma das faces, suspenso por um fio de modo a ficar vertical, deslocá-lo-emos até que possamos ver nele a imagem de um dos olhos; nessa posição a horizontal que passar pelo centro da imagem representará a linha do horizonte.

A melhor maneira de verificar, se não houve engano na procura do horizonte, é colocar, quando possível, uma superfície plana na altura observada, em posição de um plano horizontal, que se reduzirá a uma linha sendo vista na altura correta.

Para marcar o ponto principal, com auxílio de um fio a prumo, determinamos suas posições no desenho para cada um dos olhos em separado e tomamos finalmente o ponto médio. Para isso, fechando-se um dos olhos, colocamos o fio diante do outro, observamos a superposição da linha sôbre os objetos e reproduzimo-la no desenho. Repetindo-se a operação para a outra vista admitimos finalmente, pela vertical que conterà o ponto principal, a posição média entre as duas. Como este se

encontra também sôbre a linha do horizonte, a intersecção dessas duas linhas dará o ponto procurado.

A distância principal podemos determiná-la uma vez que tenhamos posto no papel uma linha em posição e grandeza. Ela deve ser uma dominante do motivo, para que a medida deduzida não seja afetada de grandes erros. Medimos a linha com a maior precisão possível da seguinte maneira: com o lapis paralelo aos olhos, procuramos obter a superposição aparente do comprimento da linha desenhada com o comprimento correspondente no motivo. Afastando ou aproximando o braço conseguiremos a superposição; neste momento a distância entre os olhos e o lapis representa a distância principal. Ela é medida e transformada em múltiplo do comprimento da linha que serviu de base à medida, afim de representarmos-la na sua devida grandeza no desenho. A medida deve ser verificada em outras linhas para evitar grandes erros.

Por essa maneira já temos achado experimentalmente para o quadro os dados fundamentais da perspectiva; vamos agora precisar-lhes a significação.

A perspectiva linear, cônica ou central é a projeção feita de um ponto (*centro de projeção, ponto de vista*) sôbre um plano (*quadro*). Projeter um ponto *A* do centro *O* sôbre o plano *q* é unir por uma reta (*raio perspectivo*) o ponto *A* a *O* e procurar sua intersecção *B* com o plano *q* (fig. 4). O ponto *B* é a perspectiva (também denominada *imagem*) do ponto *A*. Para a nossa finalidade suporemos o *quadro vertical*.

A linha do horizonte *h* é a intersecção do plano horizontal, que passa por *O*, com o quadro.

**Ponto principal  $P$**  é o traço do raio principal (a perpendicular ao quadro traçada pelo ponto de vista) sobre o quadro; está situado sobre a linha do horizonte.

**Distância principal** é a distância  $OP$  do ponto de vista ao quadro.

O característico fundamental deste sistema de projeção consiste em que, embora a correspondência entre o objeto e sua perspectiva seja pontual, é possível representar na superfície do quadro os elementos ponto, reta e plano situados à distância infinitamente grande.

A perspectiva de dois pontos basta para representar a reta no quadro, mas só ha dois, dignos de menção, capazes de individuá-la no espaço entre todas as retas que apresentam mesma perspectiva (fig. 5). Um, o traço da reta (ponto  $T$ , intersecção da reta com o quadro) que coincide com sua própria perspectiva por estar situado sobre o quadro. Outro, o ponto de fuga  $F$  da reta, projeção sobre o quadro do ponto da reta situado à distância infinitamente grande ou, por outras palavras, a intersecção com o quadro da paralela à reta, traçada pelo ponto de vista. Donde concluimos imediatamente que todas as retas paralelas entre si têm um único ponto de fuga, já que pelo ponto de vista só podemos traçar uma única reta paralela ao mesmo tempo a todas elas. Portanto, o ponto de fuga define uma direção de reta no espaço, que é dada pela projetante  $OF$ . Qualquer reta que tenha por ponto de fuga o ponto  $F$ , localiza-se no espaço fazendo passar pelo seu traço  $T_1$  a paralela ao raio projetante  $OF$ .

De passagem lembramos ainda que o ponto principal é o ponto de fuga de todas as perpendiculares ao quadro.

Para individuar o plano bastam duas de suas retas representadas naturalmente com os seus traços e pontos de fuga (fig. 6). Entretanto precisamos destacar duas delas pelas suas notáveis propriedades. Uma, a intersecção do plano com o quadro, que é o seu *traço*  $t$ ; por estar situado sôbre o plano de projeção confunde-se com a sua própria perspectiva. Outra, a sua *linha de fuga*  $f$ , a intersecção com o quadro, do plano que lhe é paralelo, traçado pelo ponto de vista. E' o lugar geométrico dos pontos de fuga de todas as retas contidas no referido plano.

Todos os planos paralelos entre si têm mesma linha de fuga, porque só podemos traçar pelo ponto de vista um plano paralelo a êles. Portanto, a linha de fuga define uma direção de plano; individuada no espaço pelo plano  $Of$  que passa pelo ponto de vista  $O$  e pela linha de fuga  $f$ . Qualquer plano que concorra à linha de fuga  $f$ , localiza-se no espaço fazendo passar pelo seu traço  $t_1$  o plano paralelo ao plano projetante  $Of$ .

A linha do horizonte é a linha de fuga de todos os planos horizontais e sôbre ela encontram-se os pontos de fuga de todas as retas horizontais.

## PERSPECTIVA

Au XVI<sup>e</sup> siècle, la perspective remplace la vision successive des objets par la vision simultanée et réunissant tous les éléments du spectacle en un faisceau convergeant vers un point unique, troue le mur que respectaient les primitifs.

ANDRÉ LHOÏE,  
*Arts et Littératures.*

### DADOS FUNDAMENTAIS

Uma vez desenhada a linha do horizonte, conhecidos o ponto principal  $P$ , projeção ortogonal de  $O$ , e a distância principal  $OP$ , traçamos logo sobre o quadro a *circunferência de distância* com o centro em  $P$  e raio  $OP$  (fig. 7).

A linha do horizonte  $h$  encontra a circunferência de distância em dois pontos  $D_1$  e  $D_2$ , chamados *pontos laterais de distância*. Os pontos  $D_3$  e  $D_4$ , em que a *linha principal* (a vertical que passa pelo ponto principal) encontra a circunferência de distância, são denominados *pontos superior e inferior de distância*.

Os pontos de fuga de todas as retas inclinadas de  $45^\circ$  em relação ao *quadro* perspectivam-se sobre a circunferência de distância.

### CONVENÇÕES

Designam:

- $P$  — o ponto principal;
- $D_1, D_2, D_3, D_4$  — os pontos de distância;
- $O$  — o ponto de vista (no espaço);
- $O', O''$  — os rebatimentos do ponto de vista  
sôbre o quadro nas posições  
corretas;
- $V$  — o ponto de vista rebatido sôbre o  
quadro para a construção do  
triângulo de rebatimento;
- $T, T_1, T_2, \text{etc.}$  — traços de retas;
- $F, F_1, F_2, \text{etc.}$  — pontos de fuga;
- Reta  $OC$  — a reta que passa pelo ponto de  
vista e pelo ponto  $C$ , reta  $OA$  a  
que passa pelo ponto de vista e  
pelo ponto  $A$ , e assim por diante;
- $A, B, C, E, \text{etc.}$  — pontos;
- $A', B', C', E', \text{etc.}$  — pontos rebatidos sôbre o quadro;
- Reta  $AB$  — a reta que passa pelos pontos  $A$  e  
 $B$ , reta  $CD$  a que passa pelos  
pontos  $C$  e  $D$ , e assim por diante;
- Plano  $ABC$  — o plano que passa pelos pontos  $A$ ,  
 $B$  e  $C$ , plano  $BCD$  o que passa  
pelos pontos  $B, C$  e  $D$ , e assim  
por diante;
- Triângulo  $ABC$  — o triângulo cujos vértices são os  
pontos  $A, B$  e  $C$ , triângulo  $BCE$   
aquele cujos vértices são os pon-  
tos  $B, C$  e  $E$ , e assim por diante;

- Reta  $TF$  — a reta representada pelo seu traço  $T$  e pelo seu ponto de fuga  $F$ , reta  $T_1F_1$  pelo seu traço  $T_1$  e pelo seu ponto de fuga  $F_1$ , e assim por diante;
- $h$  — a linha do horizonte;
- $a, b, c, e,$  etc. — linhas retas;
- $f, f_1, f_2,$  etc. — linhas de fuga;
- $t, t_1, t_2,$  etc. — traços de planos;
- Plano  $tf$  — o plano representado pelo seu traço  $t$  e pela sua linha de fuga  $f$ , plano  $t_1f_1$  pelo seu traço  $t_1$  e pela sua linha de fuga  $f_1$ , e assim por diante;
- Plano  $Of$  — plano que passa pelo ponto de vista e pela linha de fuga  $f$  (plano projetante da linha  $f$ ), plano  $Of_1$  o que passa pelo ponto de vista e pela linha de fuga  $f_1$ , e assim por diante.

## REPRESENTAÇÃO DA RETA

a) A reta (que não seja paralela ao quadro nem passe por  $O$ ) representada por seu traço  $T$  e pelo seu ponto de fuga  $F$  fica determinada sem ambiguidade no espaço (fig. 8).

b) A representação da reta que passa por  $O$  (raio perspectivo) reduz-se a um ponto (superposição de  $T_1$  e  $F_1$ ) que é ao mesmo tempo seu traço e ponto de fuga. Ele basta ainda para precisar a reta no espaço.

c) A reta de frente (paralela ao quadro) tem seu traço e ponto de fuga lançados à distância infinita, o

que não serve para individualá-la; para defini-la no espaço será necessário na sua representação precisar um dos pontos de sua perspectiva (vide representação do ponto).

### REPRESENTAÇÃO DO PLANO

a) Um plano (que não seja paralelo ao quadro e não passe por  $O$ ) fica definido no espaço quando representado por seu traço  $t$  e sua linha de fuga  $f$  que devem ser paralelos entre si (fig. 9). Supondo-o ilimitado êle cobre no quadro a superfície compreendida entre as referidas paralelas.

b) A representação do plano que passa por  $O$  (plano perspectivo) reduz-se a uma reta que é ao mesmo tempo seu traço e sua linha de fuga (superposição de  $t_1$  e  $f_1$ ); ela basta ainda para individuar o plano no espaço.

c) O plano de frente tem seu traço e sua linha de fuga lançados à distância infinitamente grande, o que não serve para determiná-lo. Basta individuar um de seus pontos para definir completamente sua posição em relação ao quadro (vide representação do ponto).

### REPRESENTAÇÃO DO PONTO

Um ponto do espaço fica determinado quando se conhece a sua perspectiva  $A$  e a perspectiva de uma reta  $TF$  ou de um plano  $tf$ , que passe por êle, porém não passe por  $O$  (fig. 10). A reta escolhida pode ser de topo ao quadro, neste caso seu ponto de fuga é o ponto prin-

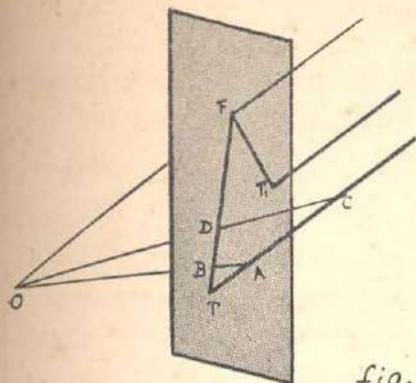


fig. 5

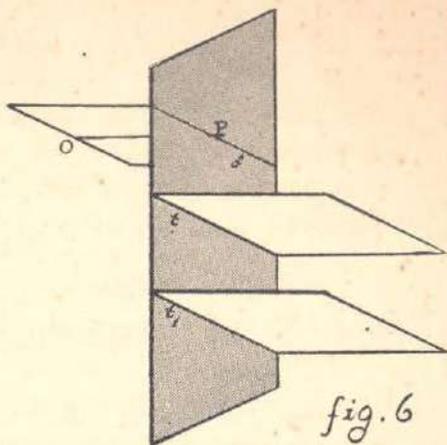


fig. 6

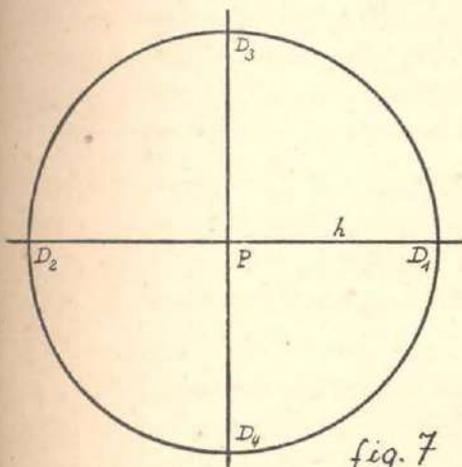


fig. 7

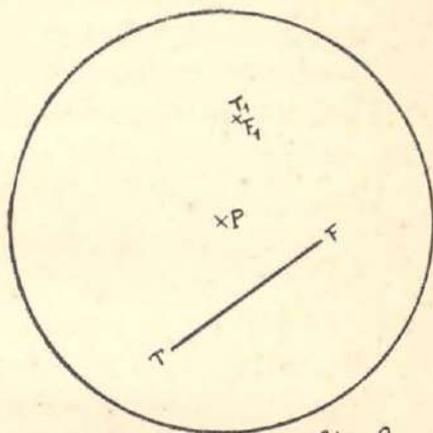


fig. 8

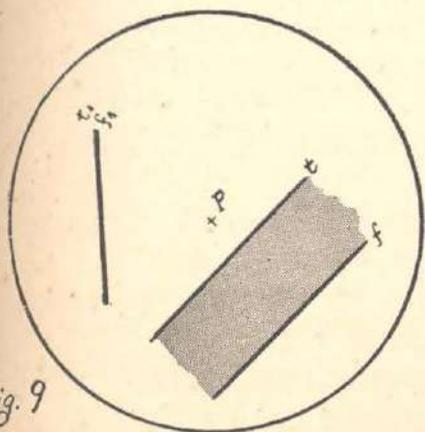


fig. 9

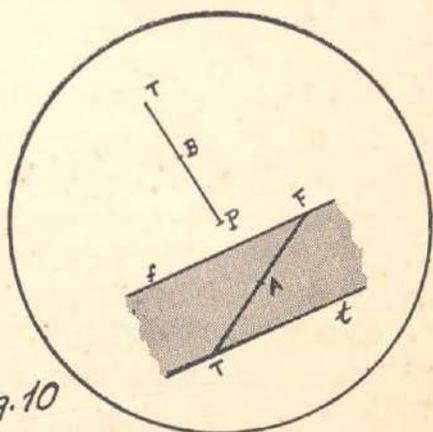
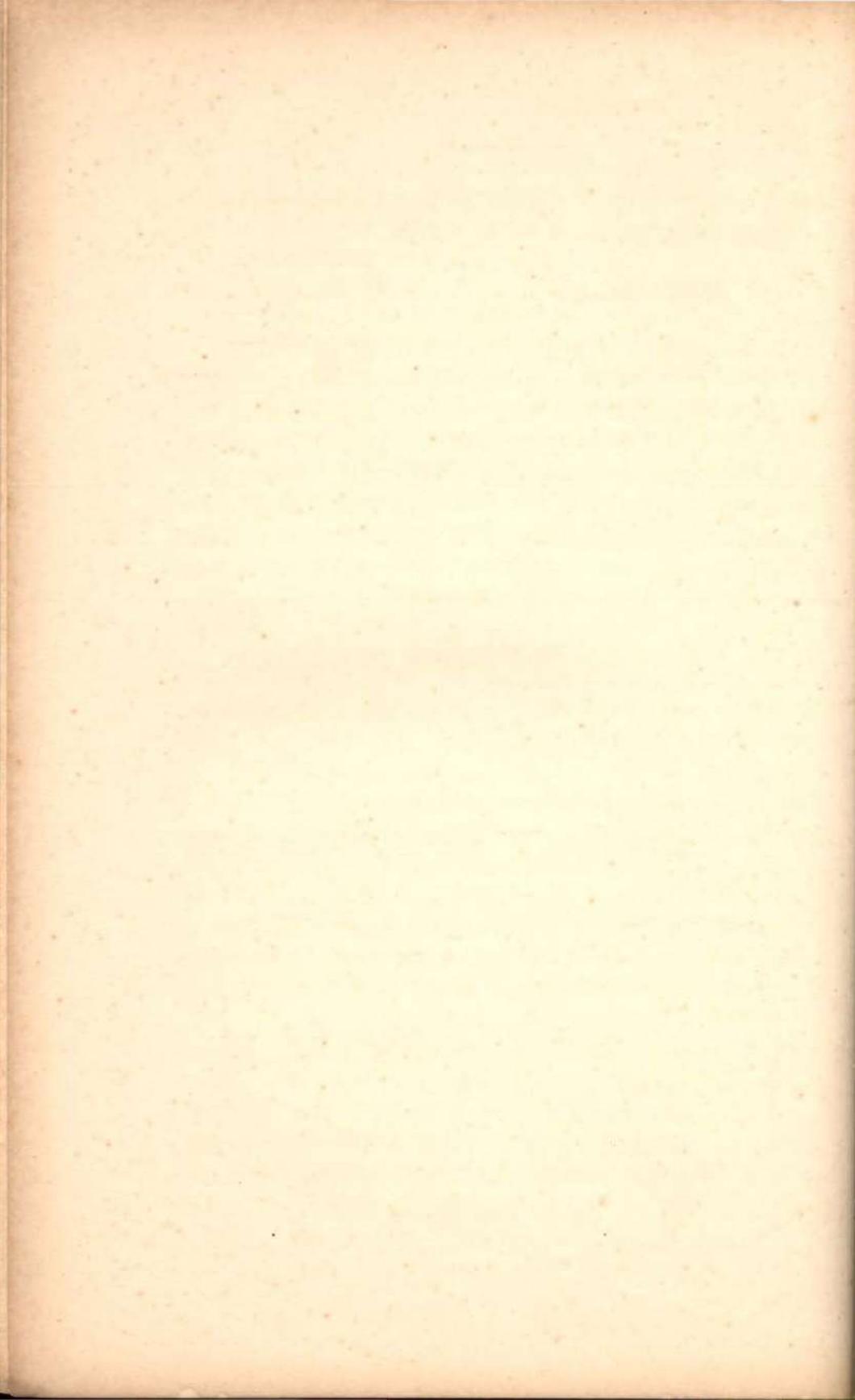


fig. 10

C. Del Negro.



cipal  $P$  e o seu traço  $T$  é a projeção ortogonal do ponto sobre o quadro (ponto  $B$  sobre a reta  $TP$ ).

## PROBLEMAS

Classificam-se os problemas em duas categorias: os *descritivos* ou *gráficos* e os *métricos*. Os primeiros ocupam-se da situação relativa dos elementos ponto, reta e plano. Dispensam o emprêgo da circunferência de distância; por isso, nesses problemas omitiremos propositadamente os dados fundamentais por desnecessários à sua resolução. Os segundos ocupam-se da medida de ângulos e de comprimentos. Não se resolvem sem o auxílio da circunferência de distância.

### PRINCIPAIS PROBLEMAS DESCRITIVOS

- 1) — Determinar o plano e o ponto de intersecção de duas retas que se cortam (fig. 11).

Sejam  $T_1F_1$  e  $T_2F_2$  as perspectivas de duas retas cujos traços e pontos de fuga são respectivamente  $T_1, T_2$  e  $F_1, F_2$ . As retas  $t$  e  $f$ , que unem respectivamente os traços das retas  $T_1, T_2$  e seus pontos de fuga  $F_1, F_2$ , representam o traço e a linha de fuga do plano procurado. Obtemos a perspectiva  $A$  do ponto comum às duas retas na intersecção das imagens  $T_1F_1$  e  $T_2F_2$ .

**Condição para que duas retas estejam em um mesmo plano (fig. 11).**

A reta que une os traços ( $T_1, T_2$ ) das retas dadas deve ser paralela a que lhes une os pontos de fuga ( $F_1, F_2$ ).

2) — Construir a reta de intersecção de dois planos (fig. 12).

Representem  $t_1, t_2$  e  $f_1, f_2$  respectivamente os traços e as linhas de fuga dos planos. A reta de intersecção pertence ao mesmo tempo aos dous planos; seu traço  $T$  está na intersecção de  $t_1$  e  $t_2$ , o ponto de fuga no encontro de  $f_1$  e  $f_2$ . Assim ficam fixados o traço e o ponto de fuga da reta de intersecção e ela se perspectiva em  $TF$ .

Caso particular — Um dos planos é paralelo ao quadro (fig. 13).

O plano paralelo é determinado por um de seus pontos  $A$  situado sôbre a reta  $TF$ , o outro é representado por seu traço  $t$  e pela linha de fuga  $f$ . A perspectiva da reta de intersecção será paralela a  $t$  (\*); para desenhá-la basta encontrar um de seus pontos. Tracemos um plano arbitrário  $t_1, f_1$  pela reta  $TF$ ; êle encontrará o plano  $tf$  segundo a reta que se representará em  $T_1F_1$ , e o plano paralelo ao quadro segundo uma reta que passará por  $A$  e cuja perspectiva será paralela à  $t_1$  (\*). O ponto  $B$ , pertencendo ao mesmo tempo aos três planos, é o ponto procurado por onde traçaremos a paralela à  $t$ .

NOTA — Este problema nada mais é do que achar a intersecção de três planos dos quais um é paralelo ao quadro. Os planos cortam-se dois a dois segundo uma reta, passando todas três pelo ponto  $B$  que é a perspectiva da intersecção dos três planos.

---

(\*) Teorema — Se dois planos paralelos forem cortados por um terceiro, as intersecções são paralelas.

3) — Determinar a reta que passa por dois pontos (fig. 14).

As perspectivas dos pontos são representadas no quadro por  $A$  e  $B$ ; estes são definidos respectivamente sôbre as retas  $TF$  e  $T_1F_1$ .

Em geral as retas  $TF$  e  $T_1F_1$  não estão situadas em um mesmo plano. A perspectiva da reta procurada é a reta  $AB$ ; para individuá-la, consideremos a reta que tem por imagem  $T_1A$ , seu traço é  $T_1$ . Está situada em um plano com a reta  $TF$ ; o traço deste plano é  $TT_1$  e sua linha de fuga a paralela à  $TT_1$  traçada por  $F$ , que define em  $F_2$  o ponto de fuga da reta  $T_1A$ . As retas  $T_1F_1$  e  $T_1F_2$  determinam o plano que contem a reta  $AB$ ; sua linha de fuga é  $F_1F_2$  que encontra a reta  $AB$  em  $F_3$ ; seu traço  $T_1T_3$  é a paralela à  $F_1F_2$ , traçada por  $T_1$ , que encontra a referida reta em  $T_3$ . Os pontos  $T_3$  e  $F_3$  são respectivamente o traço e o ponto de fuga da reta  $AB$  e bastam para individuá-la.

Caso particular — Os pontos são dados respectivamente por suas perspectivas e projeções ortogonais (fig. 15).

Neste caso, os pontos representados definem-se sôbre retas que têm por ponto de fuga o ponto principal e por traços as projeções ortogonais dos pontos. Essas retas são imagens de duas perpendiculares ao quadro e determinam um plano. A reta  $AB$  pertence ao plano  $ABP$ , cujo traço é a reta  $T_1T_2$  e cuja linha de fuga é  $PF_3$ , a paralela à  $T_1T_2$  traçada por  $P$ . Os pontos  $T_3$  e  $F_3$  são respectivamente o traço e o ponto de fuga da reta que passa por  $A$  e  $B$ .

- 4) — Determinar o plano que passa por um ponto e por uma reta dada (fig. 16).

Sejam  $TF$  a reta dada, e  $A$  a perspectiva do ponto definido pela reta  $T_1F_1$ .

Tracemos a reta que passa por  $F$  e  $A$ . As retas  $FA$  e  $F_1A$  definem um plano, sua linha de fuga é  $FF_1$  e seu traço  $T_1T_2$  é a paralela à  $FF_1$  traçada por  $T_1$ . Determinamos assim o traço  $T_2$  da reta  $FA$ .

A reta  $t$ , que passa por  $TT_2$ , e a sua paralela  $f$ , traçada por  $F$ , representam respectivamente o traço e a linha de fuga do plano definido pelo ponto  $A$  e pela reta  $TF$ .

- Caso particular — Determinar o plano que passa por um ponto e por uma reta paralela ao quadro (fig. 17).

Seja  $A$  a perspectiva do ponto definido sobre a reta  $TP$ ; a reta paralela ao quadro é representada por sua imagem  $c$  e individuada por um de seus pontos  $B$  sobre a reta  $T_1P$ . Neste caso, o traço e a linha de fuga do plano que os contém (o ponto  $A$  e a reta  $c$ ) são paralelos à  $c$ . Basta portanto marcarmos um ponto de cada um deles, o que conseguimos procurando o traço e o ponto de fuga da reta  $AB$ , contida no plano procurado. As construções são as mesmas do número 3 (caso particular).

- 5) — Achar o ponto de intersecção de uma reta com um plano (fig. 18).

A reta e o plano estão representados respectivamente por  $TF$  e  $tf$ . Conduzamos um plano qualquer por

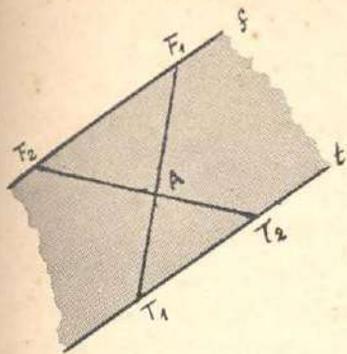


fig. 11

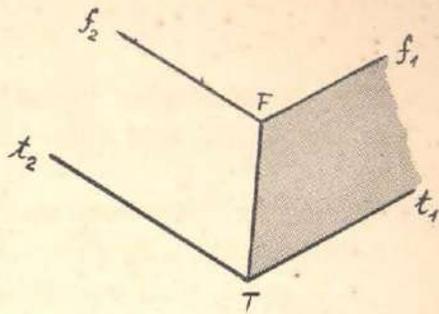


fig. 12

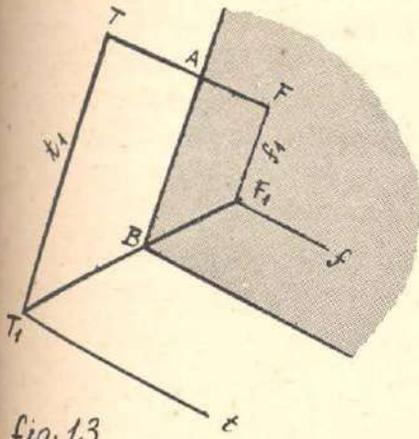


fig. 13

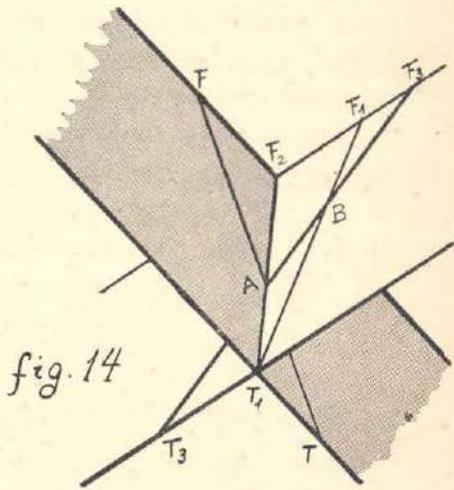


fig. 14

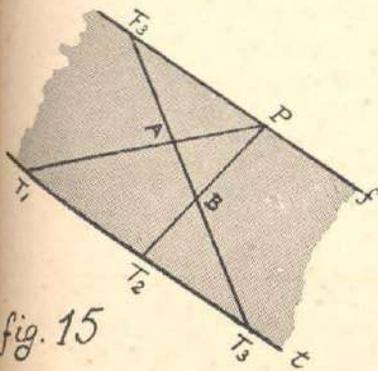


fig. 15

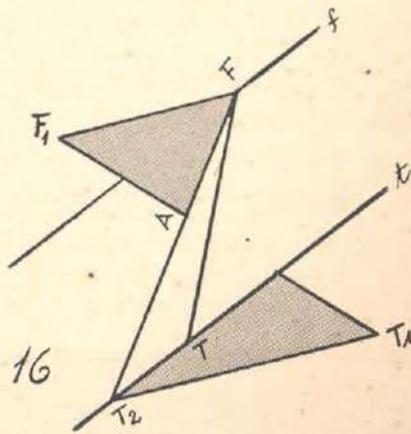
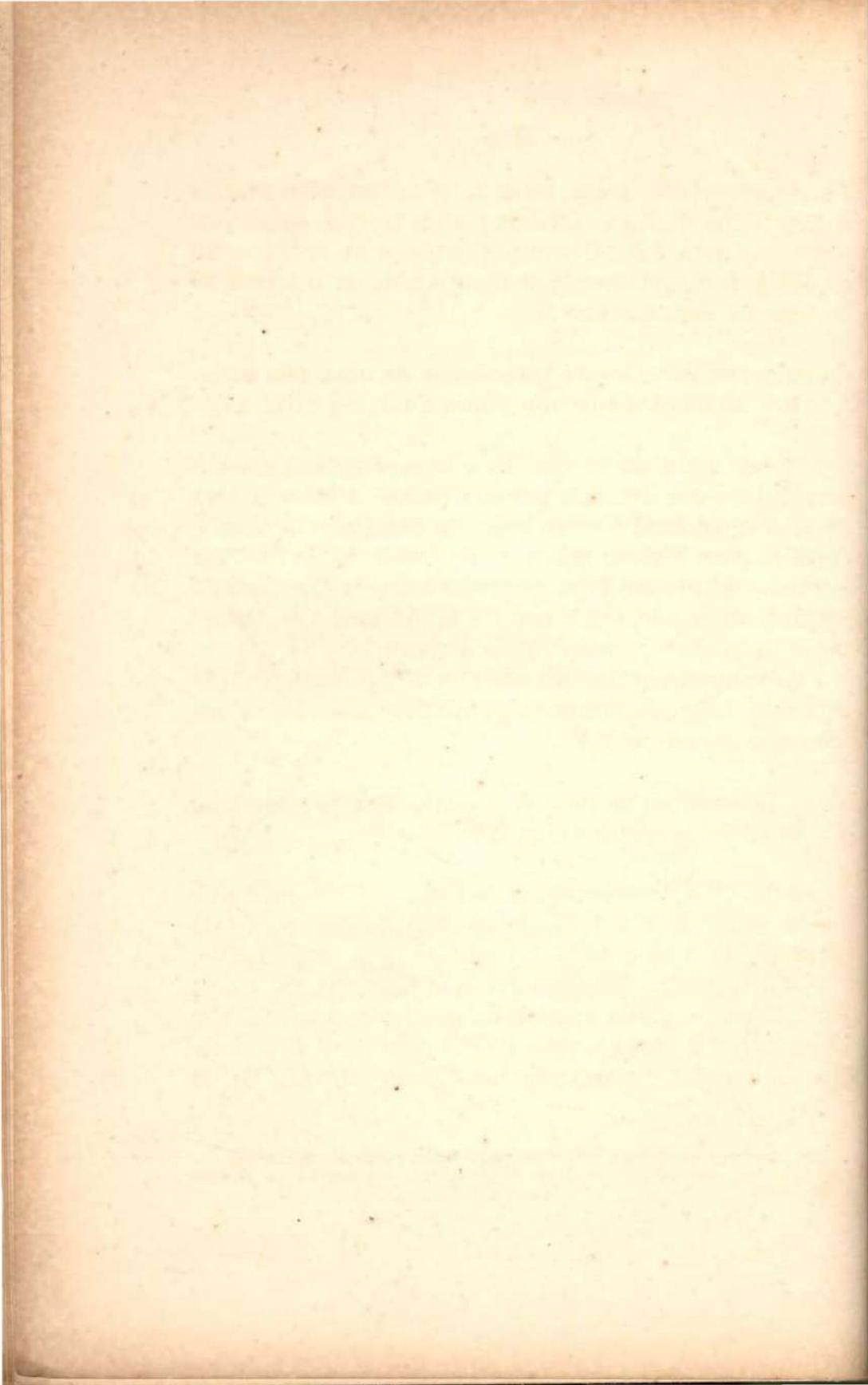


fig. 16

C. Del Negro.



$TF$  representado pelas retas  $t_1$  e  $f_1$ , respectivamente traço e linha de fuga. Os dois planos  $tf$  e  $t_1f_1$  cortam-se segundo a reta  $T_1F_1$ . O ponto  $A$ , situado no cruzamento de  $TF$  e  $T_1F_1$ , representa a perspectiva da intersecção da reta  $TF$  com o plano  $tf$ .

**Casos particulares — a) Intersecção de uma reta paralela ao quadro com um plano qualquer (fig. 19).**

A reta paralela ao quadro é representada pela sua perspectiva  $c$  e definida por um ponto  $A$  sôbre a reta  $TF$ ; o plano é dado por seu traço  $t$  e pela linha de fuga  $f$ . O plano determinado pela reta de frente e por  $TF$  tem o traço e a linha de fuga paralelos à  $c$ . (\*) Conduzindo portanto as paralelas à  $c$  por  $T$  e  $F$ , obtemos a representação do plano  $t_1f_1$  que contem a reta  $c$ .

A intersecção dos planos  $tf$  e  $t_1f_1$  é representada pela reta  $T_1F_1$  que fornece o ponto procurado  $B$ , na intersecção de  $c$  com  $T_1F_1$ .

**b) — Intersecção de uma reta qualquer com um plano paralelo ao quadro (fig. 20).**

Seja  $TF$  a representação da reta;  $A$  é um ponto situado sôbre a reta  $T_1F_1$ , perspectiva de um ponto do plano paralelo ao quadro, o bastante para individualo.

A intersecção do plano definido pela reta  $TF$  e pelo ponto  $A$  com o plano paralelo ao quadro é uma reta que passa por  $A$  e corta a reta  $TF$  no ponto procurado  $B$ . Traçaremos  $TA$  e procuraremos o ponto de fuga  $F_2$ . O

---

(\*) Teorema — Se uma reta e um plano forem paralelos, todo plano traçado pela reta não paralelo ao primeiro plano terá sua intersecção paralela à reta dada.

plano determinado por  $TA$  e  $T_1A$ , tem por traço a reta  $TT_1$  e por linha de fuga  $F_1F_2$ , paralela à  $TT_1$ , traçada por  $F_1$ .

O plano que contem  $TF$  e o ponto  $A$  tem por linha de fuga  $FF_2$ . Sua intersecção com o plano paralelo ao quadro é a paralela  $c$  à  $FF_2$ , traçada por  $A$ , que encontra a reta  $TF$  no ponto  $B$  procurado.

6) — Determinar o plano que passa por três pontos.

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  as perspectivas dos pontos definidos respectivamente sôbre as retas  $TF$ ,  $T_1F_1$  e  $T_2F_2$ . Este problema recai num dos precedentes, por exemplo, no n. 3, procurando os traços e pontos de fuga de dois lados do triângulo  $ABC$ . A reta que une os traços e a outra que liga os pontos de fuga dos dois lados, são respectivamente o traço e a linha de fuga do plano procurado.

7) — Traçar por um ponto uma reta paralela à outra (fig. 21).

Sejam o ponto  $A$  definido sôbre a reta  $TF$  e  $F_1$  o ponto de fuga da reta dada, este último suficiente para definir-lhe a direção. Unindo  $A$  com  $F_1$  temos a perspectiva da reta procurada. Obtemos o traço  $T_1$  traçando por  $T$  a paralela à  $FF_1$ .

NOTA — Se a reta dada for paralela ao quadro seu ponto de fuga distanciar-se-á indefinidamente e o problema se resolve traçando por  $A$  a paralela à perspectiva da reta dada.

8) — Traçar por um ponto um plano paralelo a outro dado (fig. 22).

Sejam o ponto  $A$  definido sôbre a reta  $TF$  e  $f$  a direção do plano representada pela sua linha de fuga. Se

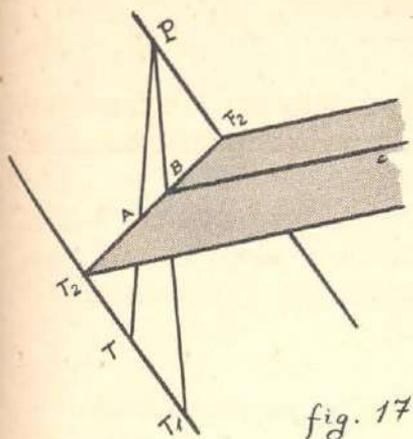


fig. 17

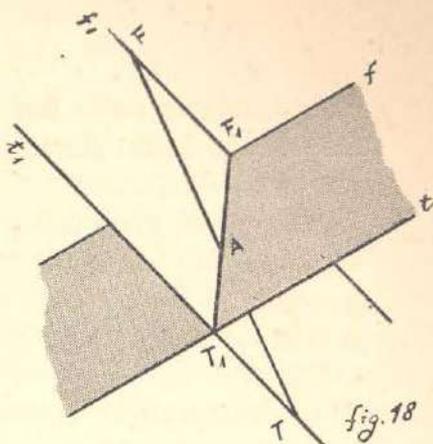


fig. 18

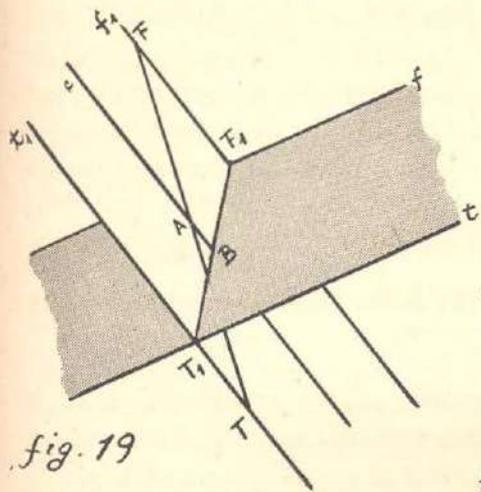


fig. 19

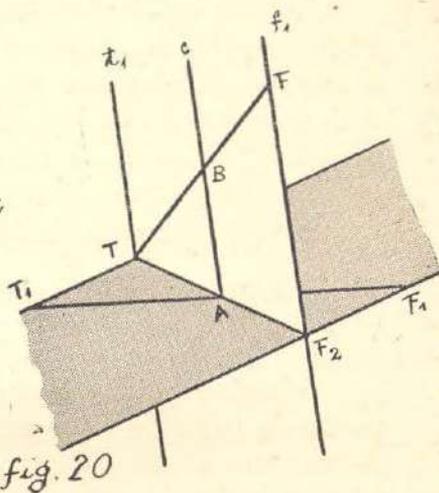


fig. 20

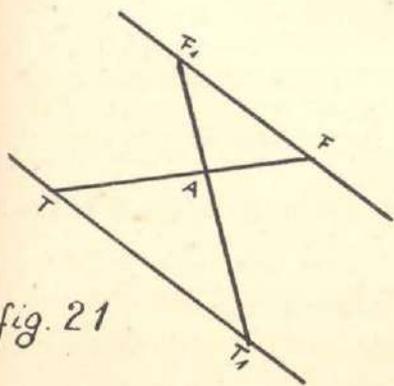


fig. 21

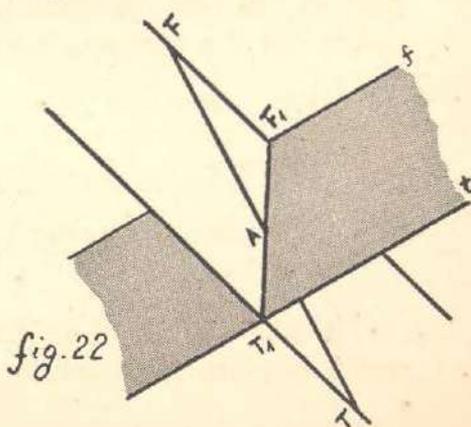
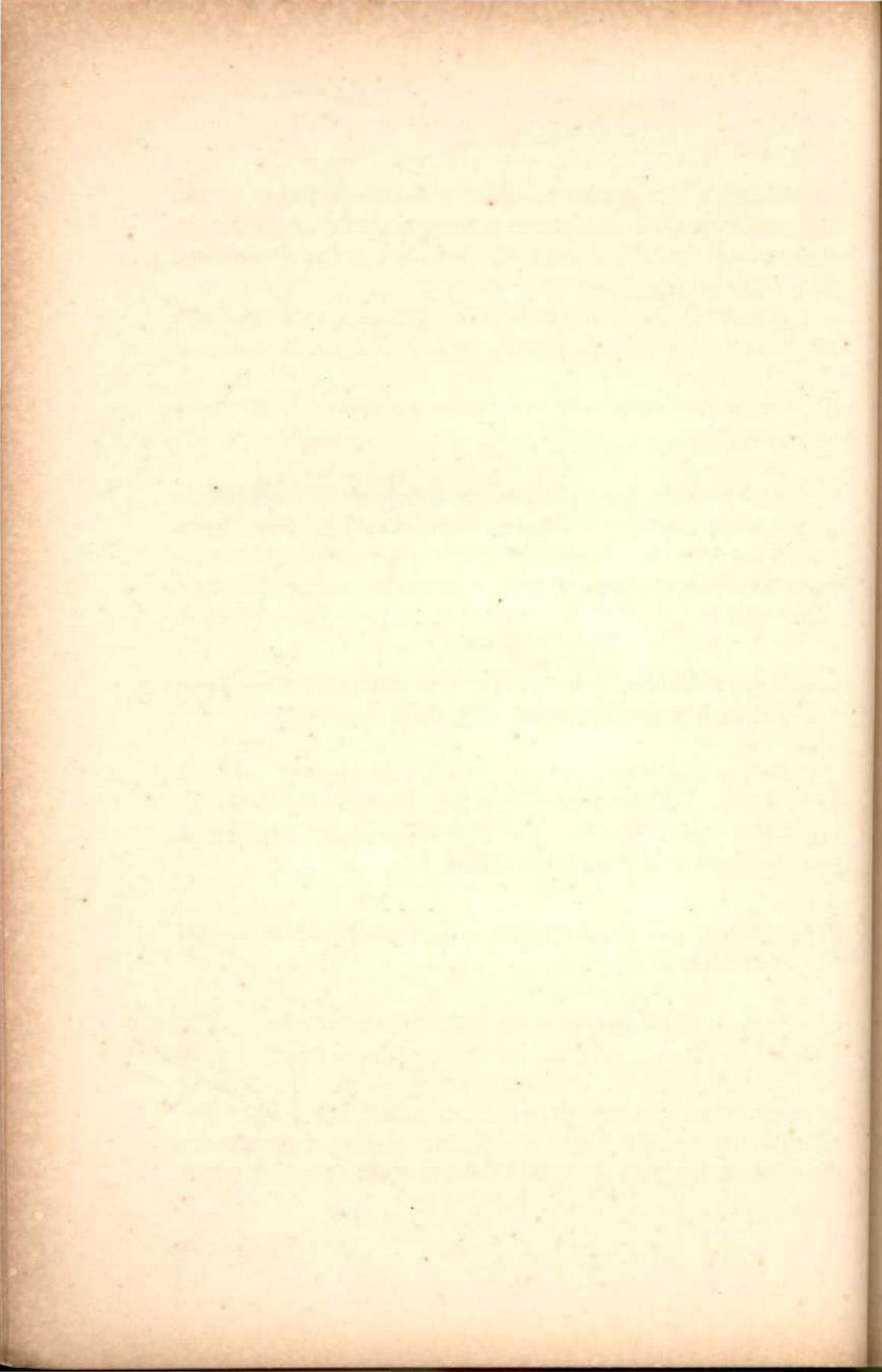


fig. 22

c. Del Negro.



escolhermos um ponto  $F_1$  sôbre a linha de fuga, a reta  $AF_1$  determinará um plano com a reta  $TF$ . A linha de fuga desse plano é a reta  $FF_1$  e o seu traço a paralela  $TT_1$  traçada por  $T$ .

A reta  $T_1F_1$  está contida no plano procurado e a paralela  $t$  à  $f$ , traçada por  $T_1$ , representa-lhe o traço.

**9) Traçar por uma reta um plano paralelo a outra reta (fig. 23).**

A reta pela qual pretendemos traçar o plano é representada por  $TF$ ; da outra basta-nos conhecer-lhe o ponto de fuga  $F_1$ . O plano procurado tem por linha de fuga a reta  $f$  que une  $F$  e  $F_1$  e por traço a paralela que passa por  $T$ .

**Casos particulares — a) Traçar por uma reta um plano paralelo a uma frontal (fig. 24).**

Seja a reta  $TF$ ; a reta  $b$ , paralela ao quadro, está representada pela sua perspectiva. Pretendemos traçar por  $TF$  o plano paralelo à  $b$ . Basta para isso traçarmos pelos pontos  $T$  e  $F$  as paralelas à  $b$ .

**b) — Traçar por uma frontal um plano paralelo a uma reta (fig. 25).**

Seja a reta paralela ao quadro representada por sua perspectiva  $c$  e definida pelo ponto  $A$  sôbre a reta  $TF$ ; seja  $F_1$  o ponto de fuga da outra reta. A linha de fuga do plano é  $f$ , paralela à  $c$  traçada por  $F_1$ . Para determinarmos o seu traço basta unir  $F_1$  à  $A$  e procurar-lhe o traço. As retas  $TF$  e  $F_1A$  determinam um plano cuja

linha de fuga é  $FF_1$  e cujo traço é a paralela  $TT_1$  à  $FF_1$  traçada por  $T$ . A paralela  $t$  à  $c$ , traçada por  $T_1$ , representa o traço do plano procurado.

- 10) — **Dado um segmento dividi-lo em partes iguais** (fig. 26).

Seja dada a perspectiva do segmento  $AE$  cujo ponto de fuga é  $F$ .

Embora o segmento não possa ser individuado no espaço, o problema se resolve sem incertezas. Represente  $AL$  uma paralela ao quadro e suponhamos que se queira dividir o segmento dado em quatro partes iguais.

Sôbre a frontal, a partir de  $A$ , marquemos os pontos  $G, H, I$ , e  $J$  igualmente distanciados. Se traçarmos  $FF_1$  paralela à  $AL$ , ela representará a linha de fuga de um plano que passa por  $AF$  paralelo à  $AL$ , aliás contem  $AL$  também. Unindo  $E$  com  $J$  obtemos o ponto  $F_1$ ; se reunirmos todos os outros pontos  $G, H, I$  à  $F_1$ , os pontos  $B, C, D, E$  representam a intersecção da reta  $AF$  com uma série de paralelas igualmente espaçadas; portanto os segmentos  $AB, BC, CD$  e  $DE$  são iguais entre si.

### PRINCIPAIS PROBLEMAS MÉTRICOS

- 1) — **Rebatimento de um plano projetante (plano perspectivo) sôbre o quadro** (fig. 27).

Este problema é fundamental para a resolução de todos os problemas métricos. Podemos enunciá-lo de outra maneira ainda: *rebater o ponto de vista sôbre o quadro em torno da perspectiva de uma reta.*

Estão representados no quadro o ponto principal  $P$ , a circunferência fundamental e a reta  $AN$ . Se ima-

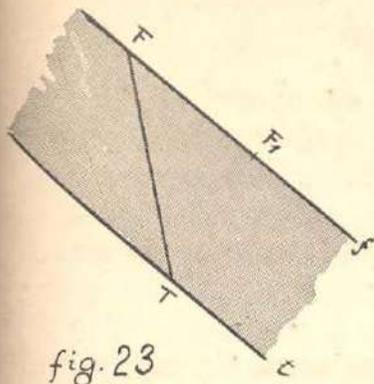


fig. 23

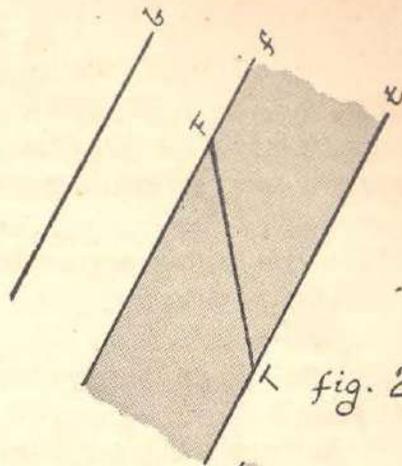


fig. 24

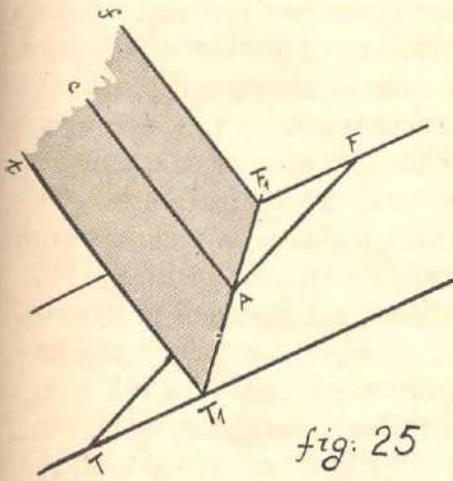


fig. 25

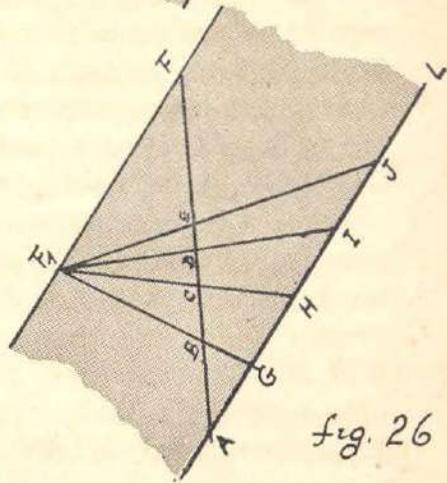


fig. 26

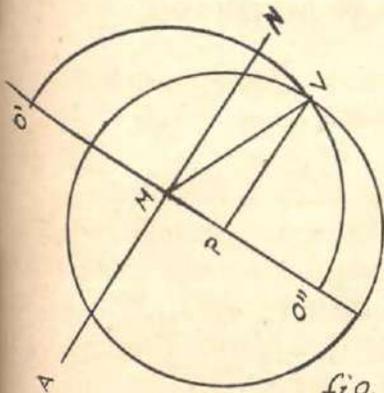


fig. 27

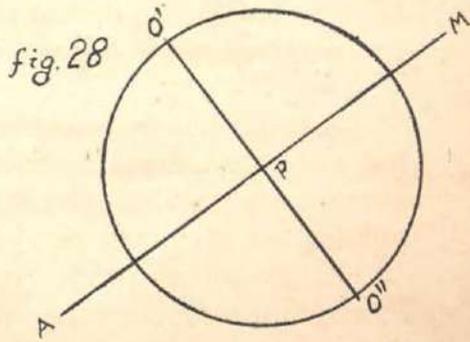
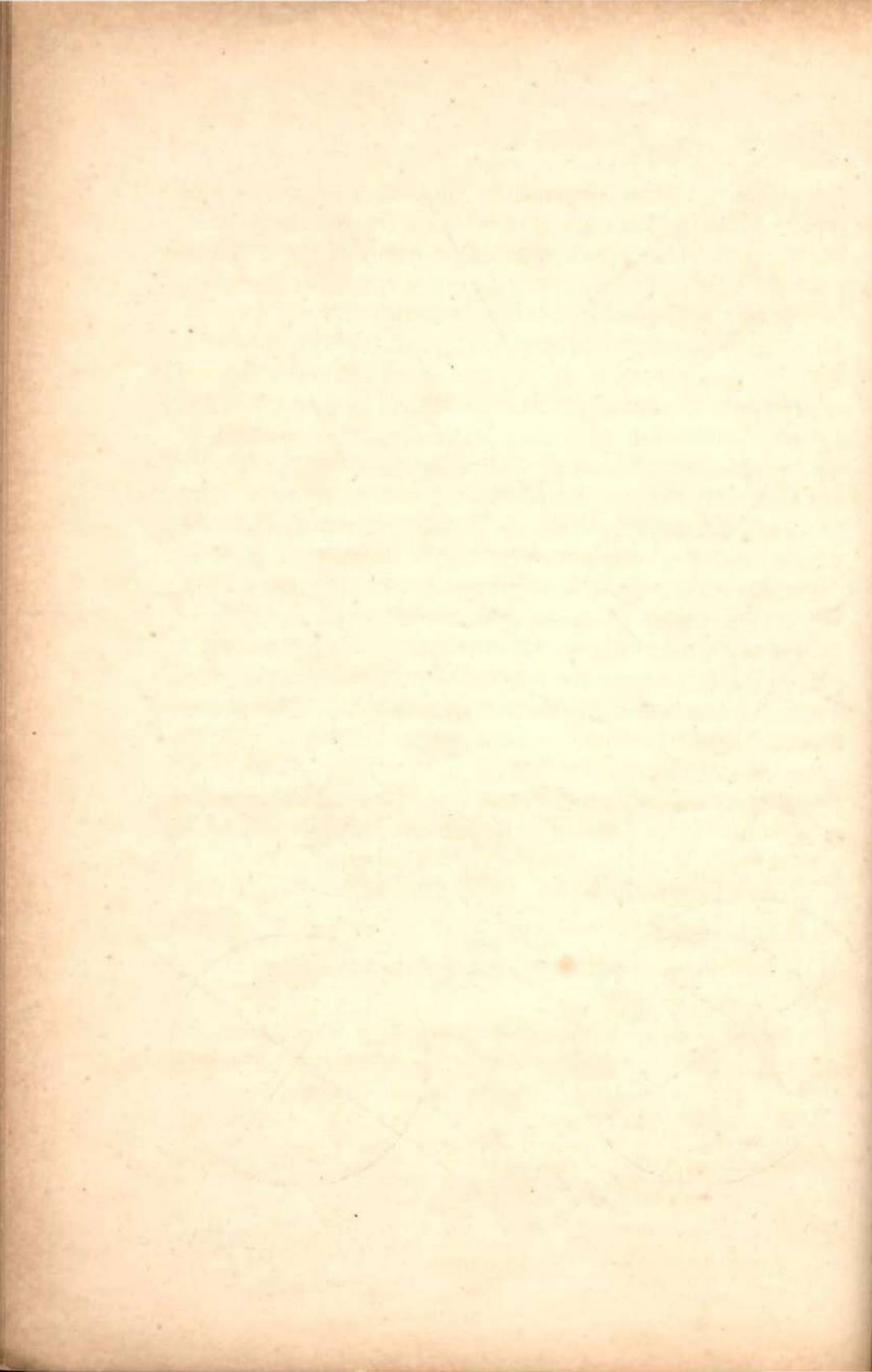


fig. 28



ginarmos o plano projetante de  $AN$ , que passa pelo ponto de vista  $O$  e pela reta  $AN$ , e cortarmo-lo por um plano perpendicular à reta  $AN$  o qual também passe pela reta  $OP$ , este último secciona o quadro segundo a reta  $PM$  e o plano projetante segundo  $OM$  no espaço. As retas  $OM$  e  $PM$  são perpendiculares à  $AN$  (teorema das três perpendiculares (\*)) e estão situadas em um mesmo plano com a projetante  $OP$  do ponto de vista. Fazendo  $PM$  de charneira rebate-se o triângulo  $OPM$  em verdadeira grandeza sobre o quadro. Traçamos então a reta  $PM$  normal à  $AN$ , o ponto de vista vem em  $V$  sobre a circunferência de distância na direção  $PV$  normal à  $PM$ . A distância do ponto de vista à  $M$  é representada em verdadeira grandeza em  $VM$ . No rebatimento em torno de  $AN$  a posição do ponto de vista se coloca no quadro sobre  $PM$ , perpendicularmente à  $AN$ , em  $O'$  ou  $O''$  conforme o sentido do rebatimento. Na execução tiraremos partido da possibilidade de rebater num ou noutro sentido para evitar superposição de linhas no desenho.

Simplifica-se a construção quando a reta  $AM$  passa pelo ponto  $P$ . O rebatimento far-se-á diretamente nas intersecções da circunferência fundamental, em  $O'$  ou  $O''$ , com a perpendicular à  $AM$  que passa por  $P$  (fig. 28).

## 2) — Distância entre dois pontos (fig. 29).

Estejam representados o ponto  $P$ , a circunferência fundamental e os pontos  $A$  e  $B$  individuados pela reta

---

(\*) Teorema — Se do pé duma perpendicular a um plano, traçarmos uma perpendicular a uma reta qualquer desse plano, a reta que junta um ponto qualquer da primeira ao ponto de encontro das duas outras é perpendicular à reta do plano.

$TF$ , entre os quais desejamos conhecer a verdadeira distância.

Rebatamos o plano projetante de  $TF$ , o ponto de vista vem se colocar em  $O'$ . No rebatimento os pontos  $T, A, B, F$  ficam fixos; a reta  $TF$  que no espaço é paralela ao raio projetante  $OF$ , quando rebatida vem colocar-se no quadro paralelamente a  $O'F$  passando por  $T$ . As intersecções dos raios  $O'A$  e  $O'B$  com a reta rebatida fornecem os pontos  $A'$  e  $B'$ , pois que êles durante o rebatimento, não cessaram de estar em linha reta respectivamente com os pontos fixos  $A$  e  $B$  e com o ponto de vista  $O$  que veio colocar-se finalmente em  $O'$ . A distância  $A'B'$  é a verdadeira grandeza no espaço porque ela também não mudou com a rotação em torno de  $TF$ .

**Caso particular — Distância de um ponto ao quadro** (fig. 30).

Neste caso o ponto é representado por sua perspectiva e por sua projeção ortogonal sôbre o quadro.

A projetante sendo perpendicular ao quadro sua perspectiva passa pela projeção  $T$  e concorre ao ponto principal. O rebatimento realiza-se em torno de  $TP$ . O ponto  $O$  vem rebater-se em  $O'$ , sôbre a circunferência de distância, perpendicularmente à  $TP$ . O rebatimento da projetante faz-se em  $TA'$  paralela à  $PO'$ ; seu comprimento é limitado pelo raio perspectivo rebatido em  $O'A$ , ficando assim determinada a sua verdadeira grandeza no segmento  $TA'$ .

3) — Achar o ângulo de duas retas dadas (fig. 31).

Sejam  $F$  e  $F_1$  os pontos de fuga das duas retas. Estejam ainda representados o ponto principal  $P$  e a circunferência de distância. Os raios projetantes  $OF$  e

$OF_1$  são respectivamente paralelos a todas as retas que têm o ponto de fuga em  $F$  e  $F_1$ . Basta portanto rebatermos o plano projetante de  $FF_1$  em torno de  $FF_1$ . O ponto de vista vem colocar-se em  $O'$  e unindo-o aos pontos fixos  $F$  e  $F_1$ , obtemos o verdadeiro ângulo, representado em  $FO'F_1$ .

- 4) — Conhecida a linha de fuga de um plano determinar o ponto de fuga das retas que lhe são perpendiculares (fig. 32).

Estejam representados o ponto principal, a circunferência de distância e a linha de fuga  $f$  do plano. Esta última define uma direção de plano; é a linha de fuga de uma infinidade de planos paralelos entre si. Todas as perpendiculares a êsses planos são paralelas entre si e concorrem portanto a um ponto de fuga  $F$  que depende somente de  $f$ . Ele está contido num plano, que passa pela reta  $OP$  e é perpendicular à  $f$ . O traço deste plano no quadro é  $PM$  e secciona o plano  $Of$  segundo uma reta que se rebate em  $VM$ . O rebatimento da perpendicular representa-se em  $VF$  normal à  $VM$  e tem o ponto de fuga no ponto  $F$  onde encontra  $PM$ .  $F$  é o ponto de fuga de todas as retas perpendiculares aos planos paralelos à  $Of$ .

Sendo dado o ponto de fuga  $F$  de uma reta, com a mesma construção em sentido inverso, deduziremos a linha de fuga  $f$  dos planos perpendiculares a essa direção.

- 5) — Conhecidas as linhas de fuga de dois planos, achar o ângulo que êles fazem entre si (fig. 33).

Estejam representados o ponto principal, a circunferência de distância e as linhas de fuga  $f$  e  $f_1$ . Os dois

planos perspectivos  $Of$  e  $Of_1$  cortam-se segundo o raio perspectivo  $OC$ . O plano normal à  $OC$ , que passa por  $O$ , secciona os planos  $Of$  e  $Of_1$  segundo duas retas que dão a medida do ângulo dos dois planos. A intersecção dos planos  $Of$  e  $Of_1$  rebate-se em  $VC$  sobre a perpendicular  $PV$  à  $PC$ . A normal à  $VC$  traçada por  $V$ , fornece um dos pontos de fuga  $F$  do plano normal à  $OC$ , cuja linha de fuga é  $AB$ . Finalmente o plano  $OAB$  se rebate em torno de  $AB$  e o ponto de vista vem colocar-se em  $O'$ . Unindo  $O'$  aos pontos fixos  $A$  e  $B$  no rebatimento, obtemos o triângulo  $AO'B$ ; ele fornece o ângulo desejado cujo vértice está em  $O'$ .

6) — **Rebatimento de um plano qualquer** (a fig. 34 representa uma secção feita no quadro).

Estejam representados perpendicularmente à folha do papel o traço  $t$  e a linha de fuga  $f$  do plano. Vemos as secções do plano dado em  $Bt$  e do plano que passa pelo ponto de vista e lhe é paralelo em  $Of$ . Todos os planos paralelos ao plano dado têm a mesma linha de fuga  $f$ . No rebatimento, o plano gira em torno de seu traço e vem colocar-se sobre o quadro em  $B't$ . Nesse movimento, se o ponto de vista  $O$  gira também concomitantemente em torno da linha de fuga, nas posições sucessivas assumidas pelo ponto de vista e pelo plano dado, os raios perspectivos deslocam-se no espaço mas se mantem constante a perspectiva dos pontos do plano. Na posição final o plano, o ponto de vista e os raios perspectivos estão rebatidos sobre o quadro; os pontos em perspectiva estão em linha reta com os rebatimentos do ponto de vista e dos pontos que lhe correspondem no plano (estes aparecem no quadro em relação ao traço do plano, em que estão situados,





Fig. 21

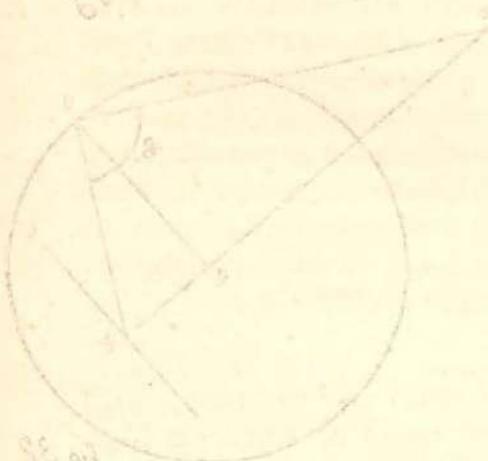


Fig. 22



Fig. 24



Fig. 23

o del Negro

em suas posições reais). O rebatimento do ponto de vista é independente do traço  $t$ , efetua-se em torno da linha de fuga  $f$ ; faz-se como de costume em  $O'$  (fig. 35). O rebatimento do plano realiza-se em torno do seu traço. Assim quando o ponto de vista vier se colocar no quadro em  $O'$ , o plano girando em torno de seu traço coincidirá com o quadro. A perspectiva de um ponto e seu correspondente rebatido concorrem ao ponto  $O'$ . Suponhamos a perspectiva do ponto  $A$  situado sobre a reta  $TF$ , a reta  $O'F$  dá a direção do rebatimento da reta  $TA'$ . O rebatimento do ponto  $A$  encontra-se em  $A'$  na intersecção do raio  $O'A$  com a paralela  $TA'$  à  $O'F$ , traçada por  $T$  (ponto fixo do rebatimento do plano). É preciso notar que ha duas possibilidades de rebatimento. Escolhida a direção de rebatimento do ponto de vista em relação à reta  $f$ , um ponto do espaço não situado do mesmo lado do ponto de vista relativamente ao quadro, rebater-se-á em direção oposta em relação a  $t$ .

- Resumo** — 1) — Rebatemos como de costume o ponto de vista em torno da linha de fuga (centro de homologia).
- 2) — O plano gira em torno de seu traço, que é uma reta fixa do rebatimento (eixo de homologia).
- 3) — A linha que une o ponto de vista rebatido ao ponto de fuga de uma reta do plano (ponto sobre a reta fixa do rebatimento do ponto de vista) dá a direção do rebatimento dessa reta; e ela, rebatida, passa pelo seu traço (ponto fixo do rebatimento do plano).

**Exemplos — a) Representar uma figura situada no plano horizontal (fig. 36).**

Estejam representados a linha do horizonte  $h$ , o ponto principal  $P$ , e a circunferência de distância. O rebatimento do ponto de vista faz-se neste caso em  $O'$  sobre a circunferência de distância e perpendicularmente à linha do horizonte.

A figura que pretendemos representar é conhecida na sua forma, grandeza e posição em relação ao traço do plano  $t$ . Para simplificar suporemos ser ela o quadrado  $A', B', C'$  e  $E'$  rebatido sobre o quadro, na escala escolhida, na posição que ocupa no plano em relação à reta  $t$ . Se escolhessemos o ponto  $O''$ , o quadrado  $A', B', C'$  e  $E'$  deveria ser representado na outra posição possível simétrica em relação à reta  $t$ . Os pontos  $A', B', C'$  e  $E'$  e seus correspondentes  $A, B, C, E$  estão em linha reta com  $O'$ .

Se traçarmos a reta  $O'F$  paralela à reta  $A'E'$ ,  $F$  representa o ponto de fuga da reta  $A'E'$ ; seu traço é o ponto  $T$  onde ela encontra a reta  $t$ . As perspectivas dos pontos  $A'$  e  $E'$  fazem-se respectivamente em  $A$  e  $E$  sobre a reta  $TF$  e nas intersecções com os raios  $O'A'$  e  $O'E'$ .

Da mesma maneira procedemos para a sua paralela  $B'C'$  cujo traço é  $T_1$  e tem o mesmo ponto de fuga  $F$ . A perspectiva dos pontos  $B'$  e  $C'$  representam-se respectivamente em  $B$  e  $C$  sobre a reta  $T_1F$  e nas intersecções com os raios  $O'B'$  e  $O'C'$ . Por fim desenharemos o quadrado  $ABCE$ .

Idênticas construções resolvem o problema inverso: *dada a perspectiva de uma figura no plano horizontal achar a sua verdadeira grandeza.*

Dão-se neste caso os elementos fundamentais, o traço do plano horizontal e a perspectiva da figura.

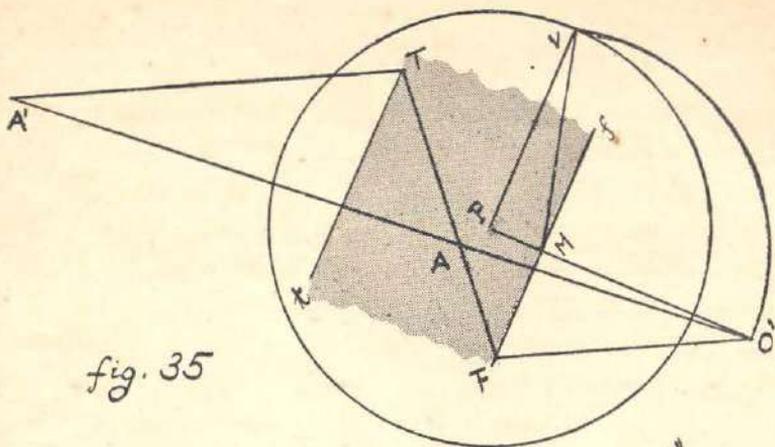


fig. 35

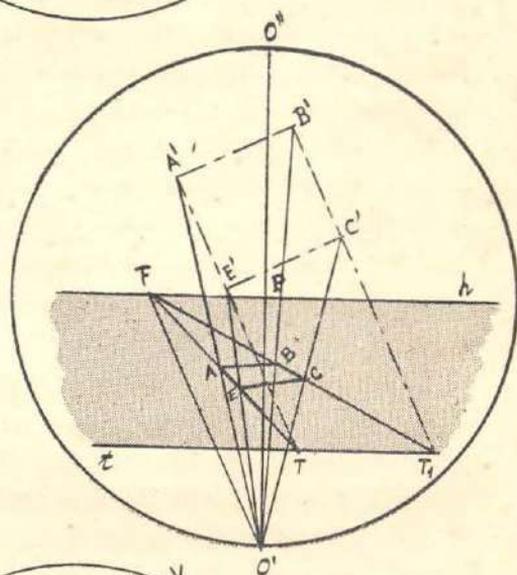


fig. 36

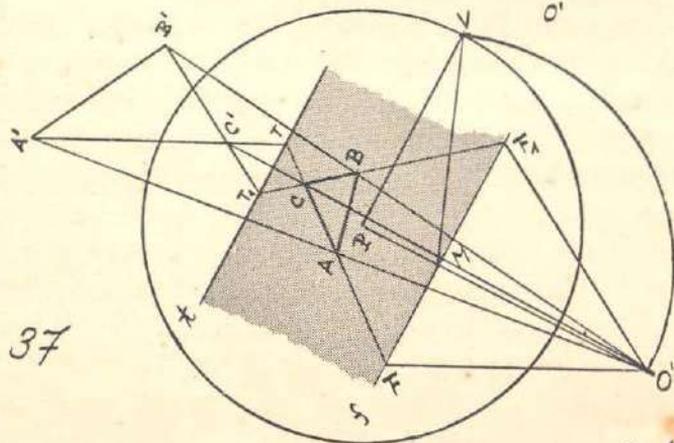
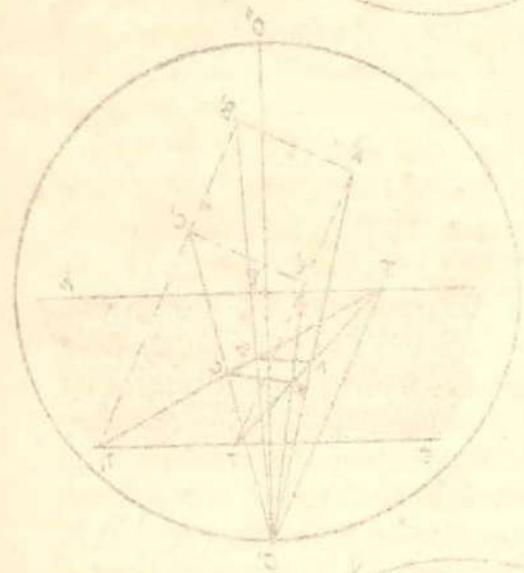
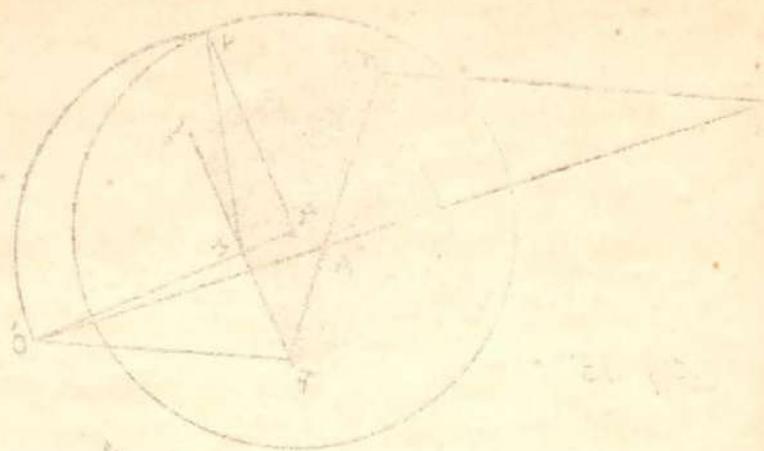


fig. 37

C. Del Negro



3. 2nd. 1790

b) — Representar uma figura situada num plano qualquer (fig. 37).

Estejam representados o ponto principal  $P$ , a circunferência de distância, o traço  $t$  e a linha de fuga  $f$  do plano.

O rebatimento do ponto de vista vem em  $O'$  como de costume.

A figura a representar será, por simplicidade, o triângulo  $A'B'C'$  que está desenhado sobre o quadro na escala escolhida e em posição que ocupa no plano dado relativamente ao traço  $t$ . Os rebatimentos adequados do ponto de vista e do plano realizam-se sempre em direções opostas em relação às suas charneiras quando o ponto de vista e o ponto rebatido não estão do mesmo lado do quadro. Os pontos  $A', B', C'$  e seus correspondentes  $A, B, C$  estão em linha reta com o ponto  $O'$ . As paralelas  $O'F$  e  $O'F_1$ , respectivamente à  $A'C'$  e  $B'C'$  dão sobre a reta  $f$  os pontos de fuga  $F$  e  $F_1$  desses lados. Seus traços encontram-se respectivamente nas intersecções de  $A'C'$  e  $B'C'$  com a reta  $t$  nos pontos  $T$  e  $T_1$ . As perspectivas das retas  $A'C'$  e  $B'C'$  são respectivamente  $TF$  e  $T_1F_1$ . A reta  $TF$  corta os raios  $O'A'$  e  $O'C'$  respectivamente nos pontos  $A$  e  $C$ . Da mesma maneira a reta  $T_1F_1$  corta os raios  $O'B'$  e  $O'C'$  respectivamente nos pontos  $B$  e  $C$ . Finalmente podemos traçar o triângulo  $ABC$ , perspectiva do triângulo  $A'B'C'$ , situado no plano dado.

Construções idênticas resolvem o problema inverso: *dada a perspectiva de uma figura situada em qualquer plano achar sua verdadeira grandeza.*

São conhecidos os elementos fundamentais, o traço, e a linha de fuga do plano, a perspectiva da figura.

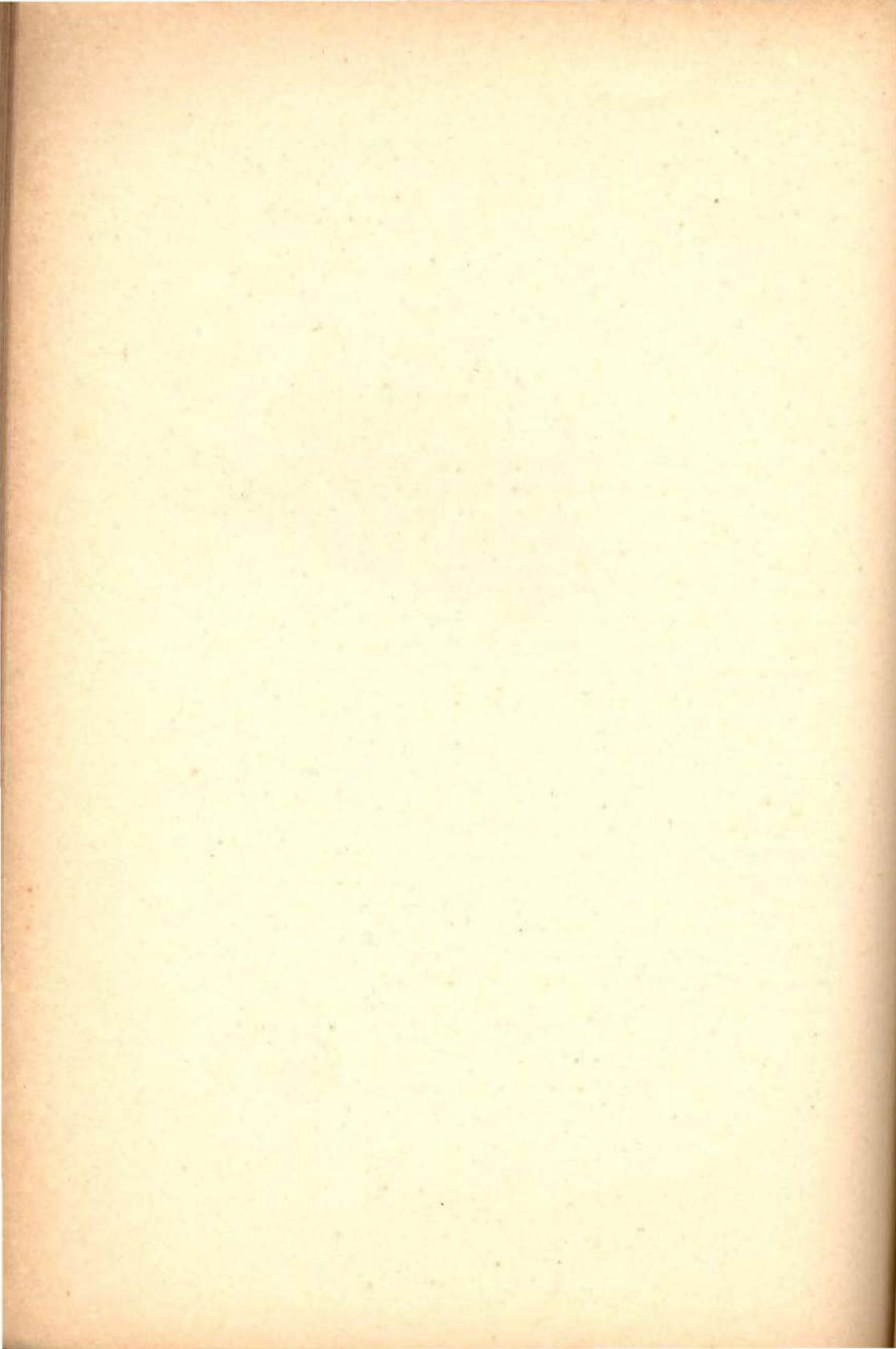
Dezembro de 1941.

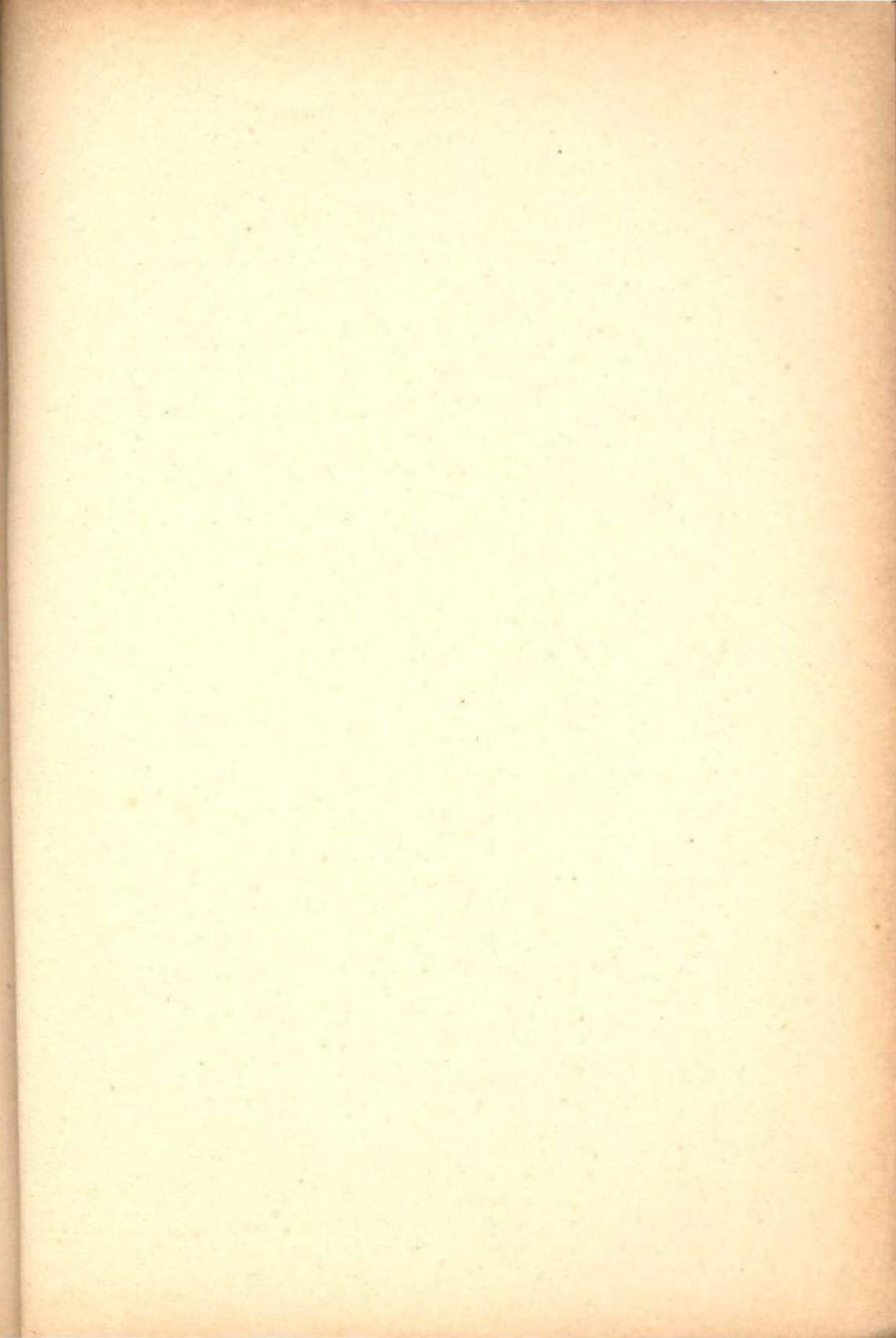
Carlos Del Negro.

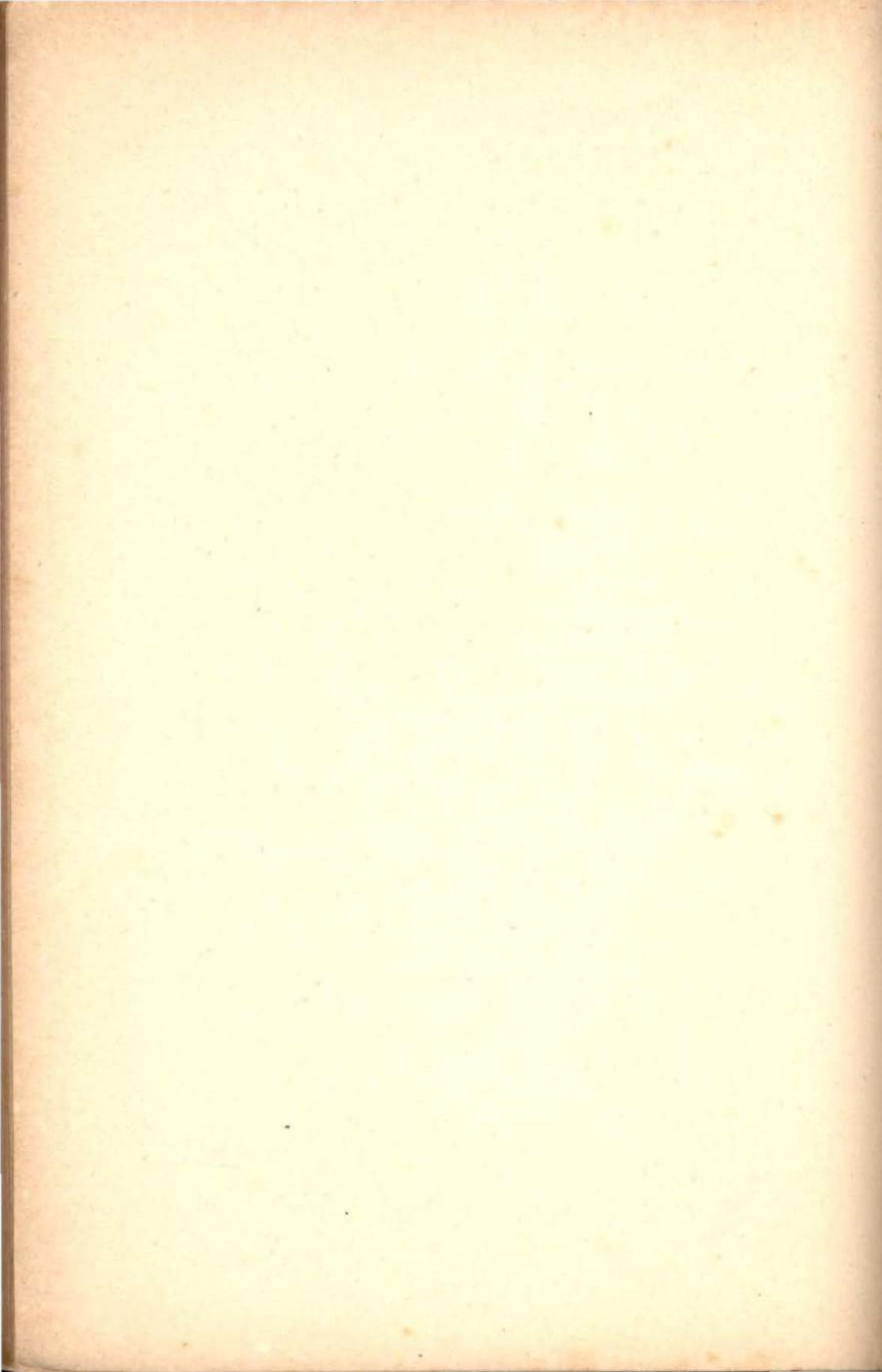


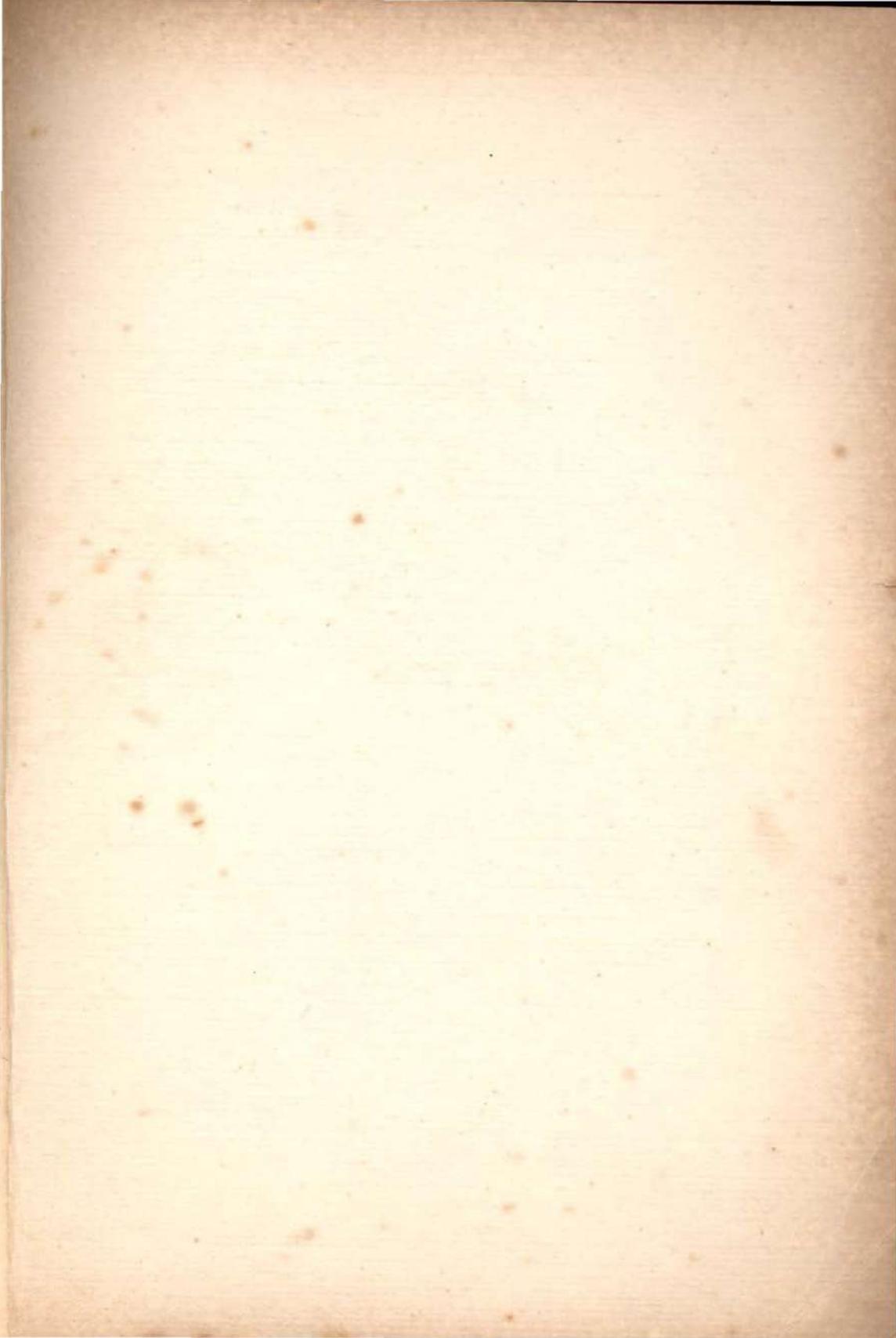
## BIBLIOGRAFIA

- BERLINER, A. — Lehrbuch der Physik.
- BERTRAND, I. ET JUSTIN-BESANCON, L. — La micrographie en lumière infra-rouge.
- BOUASSE, H. — Vision des formes et des couleurs.
- BRICARD, R. — Petit traité de perspective.
- BROCA, A. — Physique médicale.
- CASTRUCCIO, J. — El éxito en fotografia.
- CLOQUET, L. — Traité de perspective pittoresque.
- CLUZET, J. — Précis de physique medicale.
- ENCYCLOPÉDIE FRANÇAISE — Arts et Littératures. Matériaux et techniques.
- ENRIQUES, F. — Lezioni di geometria proiettiva.
- ENRIQUES, F. — Lezioni di geometria descrittiva.
- GOURNERIE (DE LA), J. — Traité de perspective linéaire.
- GRAMONT (DE), A. — Problèmes de la vision.
- GROSCLAUDE, A. — Méthode pratique de perspective.
- GUIDA, S. — Il fotolibro.
- NAMIAS, R. — Enciclopedia fotografica.
- OVIO, G. — L'ottica di Euclide.
- OVIO, G. — Scienza dei colori — Visione dei colori.
- PILLET, J. — Traité de perspective linéaire.
- SCHMIDT, F. — Kompendium der praktischen Photographie.
- SIMON, G. ET DOGNON, A. — Précis de physique.
- VINCI (DE), L. — Traité de la peinture.
- WEISS, M. — Traité de physique biologique.
- WINDISCH, H. — Die neue Foto-Schule.









Jornal do Commercio  
RODRIGUES & CIA.  
Avenida Rio Branco n. 117  
RIO DE JANEIRO  
— 1942 —