AS CÔNICAS

NO ESTUDO COMPARATIVO DA PERSPECTIVA COM AS SECÇÕES CÔNICAS E COM A HOMOLOGIA PLANA

TESE APRESENTADA À DOUTA CONGREGAÇÃO DA ESCOLA NACIONAL DE BELAS ARTES

PELO

ENGENHEIRO ARQUITETO — ARMANDO COSTA PERRY.

RIO - 10 - 1 - 39.

AS CÔNICAS

NO ESTUDO COMPARATIVO DA PERSPECTIVA COM AS SECÇÕES CÔNICAS E COM A HOMOLOGIA PLANA

I

A IDENTIDADE DOS TRAÇADOS

Esta tese representa, para cumprimento de uma nova exigência na inscrição para o concurso que deverá selecionar o professor de desenho da Escola Nacional de Belas Artes, um estudo comparativo de três processos diferentes de representação, mostrando que, com definições diversas, conduzidas por meio de diferentes reciocínios, pode-se chegar com traçados idênticos aos mesmos resultados.

Estes processos são empregados na perspectiva linear, nas secções cônicas e na homologia plana.

É um estudo inteiramente teórico que não tem por fim uma aplicação prática imediata, mas não deixa de mostrar como comparando os traçados de uma épura (perspectiva) com os de duas figuras homólogas ou de uma secção cônica pode-se chegar a simplificar a épura (perspectiva) e provar a exatidão dos traçados por meio destas comparações.

A perspectiva linear é, em última análise, o lugar geométrico

dos traçds dos ráios visuais no quadro.

O raciocínio conduzirá a representar numa superfície plana a perspectiva do objéto.

A secção cônica é o lugar geométrico dos traços das geratrizes do cone no plano secante, o que nos dá assim a representação num plano, de uma figura plana que pode ser comparada a uma perspectiva.

A homologia plana consiste no traçado de duas figuras que obedecem a leis geométricas tais como: "dois pontos homólogos estão na mesma reta que passa por um ponto fixo que é o centro de homologia e duas retas homólogas cortam-se num ponto de uma reta fixa, a qual se denomina eixo de homologia, e podem ser comparadas a duas figuras uma como a perspectiva da outra.

Examinando os três processos, vê-se que a secção cônica é uma perspectiva se substituirmos as geratrizes pelos ráios visuais, o plano secante pelo quadro e o vértice do cone pelo ponto de vista.

E a hamologia, se considerarmos como a projeção horizontal de duas figuras em perspectiva, terá o centro de homologia como ponto de vista, as retas que ligam os dois pontos homólogos como ráios visuais e o eixo de homologia como traço do quadro.

Na perspectiva, o raciocínio basea-se em rebatimentos para chegar a um resultado.

Nas secções cônicas, a projeção horizontal é o resultado à que conduz o raciocínio.

Na homologia, o raciocínio basea-se apenas nas definições, dispensando, portanto, os rebatimentos e as projeções.

Os traçados são idênticos porque os dados são os mesmos com denominações diversas.

Os dados indispensaveis à colocação de uma figura em perspectiva são: "ponto de vista definido pelas duas projeções, quadro que pode ser o próprio plano vertical de projeção, traço do quadro ou linha de terra e as duas projeções da figura".

Com êstes elementos, podem-se traçar as outras linhas principais, tais como: a linha do horizonte e a linha neutra, pontos principais, etc...

Nas secções cônicas são: a diretriz da superfície, a projeção horizontal do vértice, o traço horizontal do plano secante, a projeção hprizontal de uma horizontal do plano secante, à mesma altura do vértice, ou o traço horizontal de um plano paralelo ao plano secante contendo o vértice do cone.

Na homologia são: o eixo de homologia, o centro e a reta limite de uma das figuras.

Vê-se, portanto, que dos três processos o mais simples é êste último. Baseando-se, porém, nos raciocímios da perspectiva, pode-se chegar a simplificar a épura assemelhando-a ao traçado de duas figuras homólogas.

A título de introdução aos nossos estudos damos os elementos indispensaveis a essa comparação e os meios que chegamos para a simplificação dos traçados, quer nas secções cônicas, quer na perspectiva linear.

II

A SIMPLIFICAÇÃO DAS ÉPURAS

Na perspectiva (fig. A) é costume colocar o objéto (m) sôbre o plano horizontal posterior e o ponto de vista (P.V.) no primeiro diedro.

A perspectiva (m') é obtida no plano vertical superior. Para evitar que esta se sobreponha às projeções ortogonais da figura dada (m) considerando o rebatimento no sentido das setas da figura (A), fazem-se transportes paralelos das projeções.

O rebatimento do plano horizontal posterior sôbre o vertical inferior (fig. B) evita esta superposição, o que não altera o método, apenas modifica uma convenção.

Verifiquemos em primeiro lugar que numa épura (perspectiva), quer se rebatendo os planos num sentido, quer noutro, o rebatimento de uma figura traçada no plano horizontal, e a sua perspectiva, são figuras homólogas.

O centro de homologia é o rebatimento sôbre o plano vertical do ponto de vista, girando êste em-torno da linha do horizonte e no mesmo sentido em que foi rebatido o plano horizontal (fig. C).

Tracemos então a épura que nos dá a perspectiva de duas retas (ab, a'b') e (bd, b'd') colocadas no plano horizontal. (Fig. D).

Rebatendo o ponto de vista (P.V.) sôbre o plano vertical, tomando a linha do horizonte para eixo, determina-se facilmente os pontos de fuga das horizontais.

O ráio visual (f. P.V.) paralelo a (a, b) forma com a linha do horizonte o mesmo ângulo (α) que a reta (ab) forma com traço do quadro. Êste ângulo não varia no rebatimento. Como o ráio visual vai dar o ponto de fuga (f) sôbre a linha do horizonte, conclue-se que, para obter o ponto de fuga de uma horizontal, basta traçar pelo rebatimento do ponto de vista uma paralela à projeção horizontal da reta dada, até cortar a linha do horizonte.

Ligando o ponto (f) a (a, a'), ponto em que a reta coincide com a sua perspectiva, obtem-se a direção da perspectiva da reta.

Daí deduz-se uma das leis da homologia: "A projeção (ac) de uma reta e a sua perspectiva cortam-se sempre num ponto do traço do quadro (eixo de homologia)".

Façamos agora passar por (b) uma reta (b, d) no plano horizontal, tomando a direção (b, P.V.). O rebatimento do ráio visual (P.V, f'), que dá o ponto de fuga (f'), coincide com o rebatimento da reta. Logo, ligando (d,d') a (f'), a perspectiva da reta coincide com o seu rebatimento.

Ora, para qualquer ponto do plano horizontal, tal como (b), pode-se fazer passar sempre uma reta nestas condições, com a perspectiva do ponto caindo sôbre a perspectiva da reta; conclue-se: "que qualquer ponto do plano horizontal e a sua perspectiva estão sempre numa reta que concorre num ponto determinado (rebatimento do ponto de vista)".

É esta a segunda lei que define duas figuras homólogas.

Qualquer método obriga a determinação da perspectiva de um ponto por meio das perspectivas de duas retas que concorrem nêste ponto; e a perspectiva de uma reta determina-se por seu ponto de fuga e sua intersecção com o traço do quadro.

Foi essa a orientação que seguimos, apenas empregando o rebatimento do ponto de vista para determinar mais facilmente o ponto de fuga, além de tomarmos para direção de uma das retas concurrentes, no ponto considerado, a direção especial acima citada, o que identifica a épura perspectiva ao traçado simples de duas figuras homólogas. Por êste traçado já se pode verificar que, dado o rebatimento do ponto de vista, é inutil indicar propriamente a sua projeção horizontal. Ela é conhecida porque o rebatimento dá o afastamento; a vertical principal dá a projeção vertical (ponto principal), sôbre a linha do horizonte, e o traçado da perspectiva de um ponto (b) de cota (c) reduz-se ao da figura (E) perfeitamente idêntico ao anterior, apenas suprimindo as linhas e os pontos desnecessários tais como: projeção horizontal (v), projeção vertical (b') e projeção vertical (v').

É ainda idêntico ao traçado de duas figuras homólogas como se verifica na (fig. F).

Nos traçados de duas figuras homólogas os dados necessários para determinar o ponto homólogo (b'2) de (b) são:

(c) centro de homologia;

(x) eixo de homologia;

(j') reta limite da figura que chamamos $(\triangle')$, indicada pelas letras com sinal.

Sendo dadas por exemplo: as retas (b,a) e (b,d) nós nos propomos a determinar as retas homólogas (b'^2, a') e (b'_2, d').

Tracemos a reta (C, f') paralela a (a, b) que liga o centro de homologia (c) ao ponto do infinito (f) da reta (a, b).

De acôrdo com a definição o ponto homólogo (f') de (f) está nesta reta e sôbre a reta limite (j') que representa os pontos no infinito da figura $(\triangle)$.

A reta homóloga (a', f') de (A, f), ainda de acôrdo com a definição, corta (x) no ponto (a), estando determinada.

O ponto homólogo (b'_2) de (b) está na reta que liga (b) ao centro (c) de homologia e pertence à reta homóloga (a', f') de (a, b), portanto, tambem, determinado.

Chega-se assim à simplicidade máxima de uma épura que é perfeitamente perspectiva, apenas deixando de indicar as linhas e os pontos desnecessários. É o que se observa comparando a figura (D) com a figura (E).

Isto que demonstramos para a perspectiva de uma reta e um ponto, fica demonstrado para uma figura plana qualquer, num plano horizontal, visto que qualquer figura plana é constituida por meio de retas, pontos ou curvas determinadas pelo movimento de um ponto.

Examinemos, agora, (fig. G) o caso da secção cônica, cujos dados são:

(C) projeção horizontal do vértice do cone;

(S) traço horizontal do plano secante;

(h) projeção horizontal de uma horizontal do plano secante à altura do vértice.

Considerando (b) um ponto da diretriz, (b, c) será a projeção de uma geratriz.

O plano (C, b, a) contendo esta geratriz corta o plano (C,h) segundo uma paralela a (aa',b) assim como corta o plano secan

te segundo (aa', f').

O ponto (b'_2) é, portanto, a projeção do traço da geratriz no plano secante. O movimento do ponto (b) descrevendo a diretriz, assim como o movimento do ponto (b'_2) descreve a seção dá para concluir-se: que a construção de um ponto pelas secções cônicas é idêntico às construções pela perspectiva e pela homologia.

Adotandp-se na perspectiva (fig. H) o rebatimento do plano horizontal posterior sôbre o vertical inferior, a figura dada, (ponto b), vem para baixo do traço do quadro. O resultado, que é a perspectiva (b'), fica acima do traço do quadro, da mesma maneira que o rebatimento do ponto de vista se coloca acima da linha do horizonte.

Êste rebatimento, no sentido opôsto ao adotado nas épuras de geometria descritiva, será empregado por nós em todas as figuras que se seguem devido a grande vantagem de dar os elementos do problema e os seus resultados: de cada lado do traço do quadro.

As figuras (H) (I) e (J) são os traçados correspondentes a essas figuras na perspectiva, na homologia e na secção cônica.

Todas as demonstrações feitas, anteriormente, para o rebatimento do vertical superior sôbre o horizontal posterior, podem ser aplicadas para o rebatimento nêste outro sentido.

Adotamos ainda as seguintes denominações: (fig. K)

Perspectiva real, é a que se obtem da figura (A) colocada no plano horizontal posterior, plano que tambem se denomina de terreno.

Perspectiva virtual, é a que se obtem da figura (B) colocada no plano hrizontal anterior, entre o traço do quadro e a linha neutra.

Perspectiva imaginária, é a que se obtem de uma figura (C) colocada no plano horizontal anterior e anterior ao plano neutro.

Para colocar a linha neutra na épura, basta notar que a distância desta ao traço do quadro é a mesma que a distância do ponto de vista à linha do horizonte.

Observamos agora que à linha neutra de uma perspectiva corresponde o traço horizontal de um plano paralelo ao plano secante, plano êste que contém o vértice do cone, nas secções cônicas, e uma das retas limites, na homologia.

Tomemos os mesmos dados das figuras (E), (F) e (G), fazendo o rebatimento no sentido que acabamos de adotar indicado pelas figuras (M), (N) e (O).

A linha neutra na perspectiva é a intersecção de um plano paralelo ao quadro contendo o ponto de vista, plano neutro, com o terreno, que é o plano horizontal de projeção. É, logo, uma reta paralela ao traço do quadro, situada à uma distância deste igual à distância do ponto de vista à linha do horizonte. Linha esta que, rebatida no mesmo sentido do ponto de vista, fica acima do traço do quadro, porque os afastamentos dos seus pontos são positivos.

A perspectiva de um ponto, tal como (m), (fig. M), cai no infinito na direção (PV) m) paralela a (a', f') da mesma sorte que

a perspectiva de (a m) encontra (m') tambem no infinito.

Nas secções cônicas (fig. N) o traço horizontal (A) de um plano paralelo ao plano secante, contendo o vèrtice do cone, é determinado; pois, está a uma distância do traço (S) do plano secante igual a distância do vórtice (v) à horizontal (h) dêsse plano secante. Êste traço (A) corresponde à linha neutra. O ponto (b'_a) poderá ser determinado sem recorrer à horizontal (h).

O plano (v, b, m) corta o plano (A), segundo (m, v), e o plano (S), segundo uma paralela (a' f'), mas (a' f') sendo uma reta do plano secante, (b'_2) é um ponto da secção.

Na homologia, é a reta limite (j) que corresponde a linha neutra. Nas três figuras mencionadas à linha do horizonte corresponderá à horizontal (h) e à reta limite (j').

Não tivemos, com estas demonstrações elementares, outro intuito senão mostrar que os traçados se identificam na procura da perspectiva, da secção cônica e da homologia, embora conduzidos por meio de diversos raciocínios. Traçados éstes, que conseguimos simplificar para perspectiva, como expusemos, graças aos recursos que a geometria descritiva e a homologia nos forneceram por seus processos e leis.

Daqui por diante, com excepção dos desenhos das figuras: 1,2, 3,11,12,13,14,15,16, que são iguais para facilitar a comparação, cada caso será solucionado da maneira mais prática.

Os dados são os mesmos quanto à questão a resolver, nas épuras correspondentes, mas as dimensões variam para desenvolver a capacidade de aplicação dêste ou daquêle meio, segundo a necessidade de obter pontos indispensaveis em posições accessiveis. Em duas épuras correspondentes secções cônicas e perspectiva, por exemplo, para achar um ponto da secção, empregamos uma construção que poderá ter [illegible] perspectiva de (a m) encontra (m') apenas no infinito.

[illegible] das secções cônicas (fig. 8) o traço horizontal (h) de um pla-
[illegible] paralelo ao plano secante, contendo o vértice do cone, é deter-
[illegible] pois, onde a [illegible] do traço (t) do plano secante, i-
[illegible] distância do vértice (V) é horizontal (h) desse plano secan-
[illegible] o traço (h) corresponde à linha limite, o ponto (t'$_2$) poderá
[illegible] sem recorrer à [illegible] (h).

O plano (V, S, m) corta o plano [illegible], segundo (m, V), e o pla-
[illegible], segundo uma paralela (a' f'); mas (a' f') sendo uma reta do
[illegible] secante, (t'$_2$) é um ponto da secção.

[illegible] da homologia, é a reta limite (j) que corresponde à linha neu-
[illegible] Nas duas figuras [illegible] à linha de [illegible] correspondente
[illegible] horizontal (h) e a reta limite (j).

[illegible], com estes [illegible] elementares, outro estu-
[illegible] será mostrar que os traçados da homologia [illegible] recursos da pers-
[illegible], da secção cônica e da homologia, [illegible] conseguidos por
[illegible] estudando [illegible] figuras [illegible] sim-
[illegible] perspectiva [illegible] com as [illegible] que
[illegible] descritiva e a homologia nos forneceram por seus pro-
[illegible] isto.

Daqui por diante, começaremos dos desenhos das figuras 1,2,
[illegible] 12, 13, 14, 15, 16, que até [illegible] para facilitar a compreensão, me-
[illegible] da geometria mais particular.

Os [illegible] quando é [illegible] mencionar, que [illegible]
[illegible] correspondentes, mas [illegible] e na-
[illegible]
[illegible] outros pontos indispensáveis [illegible]
[illegible] correspondentes [illegible] pontos e perspectiva, por exemplo, na
[illegible] um ponto da secção, empregando [illegible] que pelo [illegible]

a sua aplicação na épura correspondente, como já foi provado detalhadamente na perspectiva de duas retas, de um ponto.

Sendo um dos objetivos dêste trabalho chegar à maior simplicidade dos traçados em cada caso, simplicidade esta que é resultado da comparação dos três processos, achamos util variar a solução com o fim de mostrar, praticamente, como o estudo comparado foi util para solucionar a questão da maneira mais simples.

III

ESTUDO DAS CÔNICAS

Para exemplificar, estudemos as cônicas como curvas dadas para serem postas em perspectivas dentro da seguinte ordem:

CURVA DADA: Circunferencia.
Resultado

- Elipse
  - Diâmetros
    1. Perspectiva
    2. Secção cônica
    3. Homologia
  - Eixos
    4. Perspectiva
    5. Secção cônica
    6. homologia
    7. Homologia
- Parábola
  8. Perspectiva
  9. Secção cônica
  10. Homologia
- Hipérbole
  11. Perspectiva
  12. Secção cônica
  13. Homologia

- CURVA DADA: <u>Elipse.</u> Resultado
  - Elipse
    - 14 Perspectiva
    - 15 Secção cônica
    - 16 Homologia
  - Parábola
    - 17 Perspectiva
    - 18 Secção cônica
    - 19 Homologia
  - Hipérbole
    - 20 Perspectiva
    - 21 Secção cônica
    - 22 Homologia
- CURVA DADA: <u>Parábola.</u> Resultado
  - Elipse
    - 23 Perspectiva
    - 24 Secção cônica
    - 25 Homologia
  - Parábola
    - 26 Perspectiva
    - 27 Secção Cônica
    - 28 Homologia
  - Hipérbole
    - 29 Perspectiva
    - 30 Secção cônica
    - 31 Homologia
- CURVA DADA: <u>Hipérbole.</u> Resultado
  - Elipse
    - 32 Perspectiva
    - 33 Secção cônica
    - 34 Homologia
  - Parábola
    - 35 Perspectiva
    - 36 Secção cônica
    - 37 Homologia
  - Hipérbole
    - 38 Perspectiva
    - 39 Secção cônica
    - 40 Homologia

<u>Examinemos então o primeiro caso no qual se considera a perspectiva de um círculo no plano horizontal não encontrando a linha neutra.</u>

Comecemos por adotar na fig. 1 (vide nota) o rebatimento do pla

[1] NOTA. As figuras não estão dispostas nas páginas de acôrdo com a ordem de numeração, por causa das dimensões das mesmas no aproveitamento do "estensil"

no horizontal posterior sôbre o vertical inferior.

A circunferência fica abaixo do traço do quadro. O diâmetro (ab) divide ao meio as cordas paralelas a êsse quadro.

Como nêste caso a divisão em partes iguais conserva-se em perspectiva, conclue-se que a perspectiva (a' b') de (ab) é um diâmetro da perspectiva do círculo.

Tomando o ponto médio (c') e fazendo a projeção inversa, deduz se a posição da corda (ef), que tem para perspectiva (e' f'), diâmetro conjugado de (a' b') na elípse.

O caso que corresponde a êste, nas seccções cônicas, é o da superfície cônica tendo para diretriz uma circunferência no plano horizontal (Fig. 2), seccionada por um plano (S); Êsse plano (S) é paralelo a um plano (A) contendo o vértice do cone, cujo traço horizontal (A) não é tangente, nem corta a diretriz.

(S) é o traço horizontal do plano secante.

O diâmetro (1,2) divide as cordas paralelas ao plano secante em partes iguais. Esta divisão é projetiva se considerarmos a secção como uma projeção cônica da diretriz.

Tomando o ponto médio (m_1) de (1_1, 2_2) e traçando a reta (V,M) determinamos a corda (4,3) que corresponde a (4_1, 3_1) diâmetro conjugado de (1_1, 2_2) na secção.

Estudado êsse mesmo caso pela homologia plana na figura 3 temos:

(C) centro de homólogia;

(X) eixo de homólogia;

(J) reta limite das construções da figura do círculo

As cordas paralelas ao eixo de homologia conservam-se paralelas na figura homóloga e ainda divididas ao meio pelo diâmetro (c', d').

A reta homóloga (c', d') de (c, d) é, portanto, um diâmetro da elípse, figura homóloga da circunferência.

(m') é o centro da elípse. (m) é o ponto homólogo de (m').

A corda (b, a) é homóloga do diâmetro (b', a') conjugado de (c' d'), porque as cordas paralelas à direção (b' a') ficam divididas ao meio nas duas figuras pelos diâmetros (c' d') ou (c, d).

Por uma questão apenas de curiosidade abordamos a seguinte proposisão geométrica: "Seria possivel a construção dos eixos da elipse resultante dos três casos acima estudados, baseando-se apenas os traçados nos princípios da homologia plana, da secção cônica ou da perspectiva?"

Se o centro de projeção é levado ao infinito, resolve-se facilmente a questão, o que corresponde a uma projeção cilíndrica ou a uma seção cilíndrica. É, porém, necessário examinarmos êste caso para chegar aos da perspectiva, seção cônica e homologia.

O eixo de homologia que apresentamos na figura 4 é tangente à circunferência. (O, o') são dois pontos homólogos. Dois diâmetros retangulares da circunferência, tais como: (o, a) e (o, b) têm para re-

tas homólogas dos diâmetros conjugados da elipse, tais como: (o',a') e (o', b'). Fazendo passar, porém, uma circunferência por (o) e (o'), cujo centro esteja sôbre o eixo de homologia, os pontos de concurso desta circunferência com êste eixo, tais como: (aa') e (bb') determinam pontos dos lados de dois ângulos retos que têm (o, o') para vértices.

Observemos, agora, as transformações porque passam as figuras, quando se considera o centro de homologia a uma distância finita, afim de resolvermos os casos da perspectiva e seção cônica na procura dos eixos da elipse.

Ora, verificamos na figura 5 que o ponto (o) centro do círculo tem para homólogo o ponto (o'), que não é centro da elipse, mas o diâmetro (a, b) do críulo, perpendicular a (x) tem para reta homóloga (b', a'), que é um diâmetro da elipse, porque todas as cordas do círculo tais como: (m, n) paralelas a (x), têm para linhas homólogas cordas da elipse que tambem ficam divididas ao meio por (b', a').

Tomando o ponto médio (s') e procurando o ponto (S) homólogo, determina-se em (S) o ponto do círculo que corresponde ao centro da elipse.

Toda corda do círculo que passa por (S) dará, portanto, um diâmetro da elipse.

Resta determinar duas cordas, cujas linhas homólogas sejam retangulares e ainda diâmetros conjugados.

Sabemos que na elipse, a tangente na extremidade de um diâmetro dá a direção do conjugado.

Aproveitando-se êste princípio, traçamos uma corda qualquer (f, g) passando por (S), e a seguir procuramos a sua reta homóloga, que é o diâmetro (g', f'). Traçamos ainda pela extremidade de (f')

uma reta perpendicular a (f', g') e por (f) uma tangente à circunferência. Estas duas últimas retas cortam-se no ponto H.

(H, f') não é tangente à elipse, porque o ponto (H) não está no eixo de homologia, mas se variarmos a direção da corda (f, S, g) o ponto (H) descreve uma hipérbole que corta (x) no ponto (Y).

Do ponto (Y), tiramos uma tangente à circunferência. Do ponto de contato (f) dessa tangente traçamos a corda (f g). Procurando a linha homóloga (f', g') de (f, g), e ligando (f') a (Y) ficam determinadas as direções dos dois eixos.

É facil traçar o eixo menor, partindo de (S', w') para deduzir (w, S), e limitá-lo sôbre a circunferência nos pontos (h) e (i), para determinar os pontos homólogos (h') e (i'), extremidades do eixo menor.

Na figura 6 consideramos um caso semelhante ao anterior, cuja execução baseia-se em raciocínios peculiares aos traçados das secções cônicas.

(A) é o traço horizontal de um plano traçado pelo vértice (v) do cone e paralelo ao plano secante.

(S) é o traço do plano secante.

A secção é uma elipse, porque o traço (A) não é tangente nem secante à diretriz.

O diâmetro (a, b) perpendicular a (S) corresponde ao diâmetro (a', b') da elipse.

Tomando o ponto médio (e') dêste diâmetro, determinamos o correspondente (e) do círculo.

Toda corda do círculo que passa por (e) corresponde a um diâmetro da elipse. É necessário, porém, determinar um diâmetro tal, que traçando uma tangente na sua extremidade esta forme ângulo reto com o mesmo diâmetro.

Tomemos, então, uma corda qualquer (e, f), e procuremos o diâmetro correspondente (e', f').

Tracemos pela extremidade (f') uma perpendicular a (e' f') e por (f) uma tangente ao círculo.

O ponto (A), comum a estas duas últimas linhas descreve uma hipérbole se fizermos variar a corda (e, f) girando em torno de (e).

Do ponto (Y), onde esta hipérbole corta (S), traça-se a tangente (Y, g) à circunferência.

Tomemos em seguida a corda (g, e), para procurar o diâmetro correspondente (e', g').

Ligando-se (g' a Y) esta reta será a tangente procurada. Pelo ponto (e) tracemos, então, uma paralela a essa tangente.

A reta (e, i) é a corda do círculo, que tem para correspondente o eixo menor da elipse limitado pelas retas que ligam a projeção horizontal do vértice do cone aos pontos (i, j)

Na fig. 7 continuamos o estudo teórico propôsto nos casos anteriores resolvendo-o pela perspectiva, sendo ainda a curva dada a circunferência

Como nos casos anteriores a curva obtida é uma elipse.

O ponto (o) do círculo tem para perspectiva o ponto (o'), centro da elipse.

Toda corda, tal como: (d, b), passando por (o), tem para perspectiva um diâmetro da elipse (b', d').

Traçando a tangente à circunferência em (b) e a perpendicular a (d', b') por (b'), estas duas retas cortam-se em H.

Considerando o movimento de (d, b), girando emtorno de (o), o ponto (H) descreve uma hipérbole que corta o traço do quadro no ponto (M).

Dêsse ponto traçamos a tangente à circunferência que tem para ponto de contáto (e), extremidade da corda (e, o) cuja perspectiva é o diâmetro (o', b').

Ligando (b')a(M) determinamos a perspectiva da tangente (M, b) á circunferência, perspectiva esta que é tangente à elipse, formando ângulo reto com o diâmetro (b', o'), traçado pelo ponto de contáto. Êste diâmetro é, então, um dos eixos e a tangente dá a direção do outro.

É facil traçar por (o') uma paralela a (b' M) e procurar a reta do círculo (r, S), por uma projeção inversa. Esta reta limita-se sôbre a circunferência nos pontos (r) e (S), cujas perspectiva dão as extremidades do eixo menor da elipse.

<u>Examinemos o segundo caso proposto no quadro que estabelecemos</u>

para o estudo das cônicas, que é aquêle cuja curva dada é uma circunferência e cujo resultado, quer pela perspectiva, quer pelas secções cônicas, quer pela homologia plana é uma parábola.

Pela perspectiva essa circunferência 'e tangente à linha neutra como se vê na figura 8.

A perspectiva do ponto (A) é levada ao infinito na direção (B).

A perspectiva tendo um só ponto no infinito é uma parábola; e a reta (A, B) dá a direção do eixo.

Como a tangente no vértice de uma parábola é perpendicular ao eixo, para determinar êste vértice é necessário resolver o problema seguinte: traçar uma tangente à parábola (perspectiva) cuja direção é determinada (perpendicular a A, B).

Sabemos que duas horizontais, concurrentes num ponto da linha neutra, têm para perspectiva duas paralelas.

Tomemos, então, uma reta qualquer (C,D) perpendicular à direção do eixo (A, B), e determinemos o seu ponto de fuga (C) o a sua direção (D,E) no terreno.

Do ponto (E) tracemos uma tangente (E,F) à circunferência.

Como (D,E) e (F,E) cortam-se num ponto (E) da linha neutra, a perspectiva de (F,E) será paralela a (C,D).

A reta (E, F) é tangente à circunferência, logo sua perspectiva será tangente à parábola e a perspectiva de (F), ponto de contato da tangente será o vértico procurado.

Para obter a perspectiva desta tangente, determinemos o ponto de fuga (G), traçando por (P.V) uma paralela a (FE).

Liguemos a seguir o ponto (G) ao ponto (H), onde (F E) encontra o traço do quadro.

O ponto (T), no qual (F, P,V) encontra (G, H) é o vértice.

Sendo conhecida a direção do eixo e dois pontos da curva, tais como (I) e (J), fica determinada a parábola.

Pelas secções cônicas êsse caso é estudado na figura 9.

(V) vértice do cone;

(S) traço do plano secante;

(A) traço de um plano paralelo ao plano secante, traçado pelo vértice do cone.

O plano (A) é tangente à superfície cônica sendo (E. V) a geratriz de contáto. (E, V) estando no plano (A) paralelo a (S) é tambem paralela a (S), única geratriz que não encontra o plano secante numa posição finita.

A secção só tem um ponto no infinito, é uma parábola, portanto, e a geratriz (V E) dá a direção do eixo.

Para determinar o vértice da parábola resolvemos AINDA o problema seguinte: Traçar uma tangente à secção cuja direção seja determinada.

Partindo do teorema em que a tangente num ponto de uma secção é a intersecção de um plano tangente à superfície considerada com o plano secante, e lembrando ainda que a intersecção de um plano qualquer (x) com o plano (S) é paralela à intersecção dêste plano (x) com o plano (A), tracemos por (V) uma reta no plano (A), cuja projeção é perpendicular a (V E), tendo forçosamente o seu traço horizontal (C) sôbre o traço (A).

Essa reta determina com (C, D) um plano tangente à superfície

cônica, plano êste que corta o plano (S) segundo (F,B) paralela a (V C).

De acôrdo com o teorema citado, (F,B) é tangente à parábola, e, como forma ângulo reto com a direção do eixo, é tangente no vértice. O ponto de contáto é dado pela geratriz de contáto (DF) do plano tangente (B,F,D) à superfície cônica.

A parábola está, assim, determinada pelo vértice (F), pelo eixo e por mais dois pontos da curva (i) e (j), pontos de cota (O).

6 ——— ——— ———

Examinemo-lo, agora pelos traçados relativos à homologia. Temos na figura 10:

(j) reta limite das figuras da circunferência;

(X) eixo de homologia;

(C) centro de homologia.

No ponto (a) a circunferência é tangente a (j).

O ponto (a) tem para ponto homólogo o ponto (a') infinitamente afastado na direção (K, a') ou (C, a) que determina a direção do eixo.

É necessário traçar uma tangente à circunferência que tenha para reta homóloga uma tangente à parábola, cuja direção seja perpendicular a (K, a'), para que o ponto de contáto determine o vértice dessa parábola.

Duas retas do mesmo sistema, tais como (M, I,) e (I, D), que se cortam num ponto de (j), têm para linhas homólogas duas paralelas,

porque o ponto homólogo de (I) é levado ao infinito.

A reta (I, M) foi traçada de sorte que a sua reta homóloga (M, b') fôsse perpendicular à direção do eixo da parábola, assim, a tangente (I, D) à circunferência tem para homóloga (I, D'), tangente à parábola no vértice.

A reta (C D) dá o ponto de contáto (D'). Por êste ponto tracemos o eixo paralelo à direção conhecida. Os pontos (E) e (P), onde a circunferência encontra o eixo de homologia, são dois pontos da parábola, que fica assim, perfeitamente determinada.

<u>O terceiro caso do nosso estudo das cônicas consiste na resolução da seguinte questão representada na figura 11:</u>

"Dada uma circunferência no plano horizontal, colocar os dados indispensaveis na obtensão de sua perspectiva, de modo que esta seja uma Hipérbole".

Os dados são os seguintes:

Ponto de vista (P.V.) rebatido.

Linha do horizonte (L.H.).

Linha neutra (L.N.).

Traço do quadro (T.Q.).

Circunferência no plano horizontal.

A linha neutra foi colocada de modo a cortar a circunferência em dois pontos (m) (n).

As tangentes (m, o) e (m, p) nêstes pontos terão para perspectiva as assintotas da hipérbole (perspectiva) (o', t') e (p', t').

Estas perspectivas foram obtidas traçando os rebatimentos dos ráios (PV, f') e (PV, f") paralelas a (m, o) e (M, p) no intuito de determinarmos os pontos (f') e (f"). O que se consegue ligando êstes aos pontos (o') e (p') que coincidem com as duas perspectivas.

Determinemos a bissetriz (t', u') das assíntotas, a qual é o eixo da hipérbole. Tracemos por (P.V) a perpendicular (P.V. u_2) a (t', u'), perpendicular esta que coincide com a sua perspectiva.

Do ponto (u_2) tracemos as tangentes (u_2, z) e (u_2, l) à circunferência.

As perspectivas dessas tangentes (q', w') e (b, d') serão perpendiculares ao eixo da hipérbole e, portanto, tangentes nos vértices (w') e (d').

Uma delas foi determinada pela direção e pelo ponto (q, q'), que coincide com a sua perspectiva no traço do quadro, a outra pela direção e pelo ponto de intersecção com o eixo da reta (z, d') que coincide com a sua perspectiva, traçada pelo ponto de tangência (z).

Os pontos (e) e (g) tambem pertencem à curva, ficando a hipérbole perfeitamente determinada.

Êsse caso tratado pelas secções cônicas na figura 11 resume-se ao seguinte problema:

"Dada uma circunferência no plano horizontal, para diretriz de uma superfí cônica, colocar os dados de modo a obter para secções uma

hipérbole".

Os dados são:

Projeção horizontal do vértice do cone (v);

Horizontal (h) do plano secante à altura do vértice;

Traço horizontal (A) de um plano paralelo ao plano secante, contendo o vértice do cone;

Traço horizontal (S) do plano secante;

Diretriz circular no plano horizontal.

O traço horizontal (A) foi deslocado de modo a cortar a circunferência em dois pontos (M, N).

As tangentes (M, o) e (N, p) nêstes pontos são os traços horizontais de dois planos tangentes à superfície cônica que interceptam o plano secante, segundo as retas (o_1, t_1) e (p_1, t_1), assintotas da hipérbole (secção).

Estas intersecções foram obtidas traçando as horizontais (v, f_1) e (v, f_2) dos planos tangentes (v, Mo) e (v, n p) horizontais estas que encontram o plano secante nos pontos (f_1) e (f_2), visto a reta (h) ser a projeção de uma reta, cuja cota é igual a de (v), dando, em consequência, um ponto de cada uma das intersecções, as quais ligadas aos pontos (o) e (p) (comuns aos traços dos planos tangentes e secante) ficam determinadas.

Tracemos a bissetriz (t_1, u_1) das assintotas, para obtermos o eixo da hipérbole e tiremos por (v) a perpendicular à (t_1, u_2), que representa a intersecção de um plano tangente à superfície cônica com o plano (A).

Do ponto (u_2) tracemos as tangentes (u_2, z) e (u_2, 1) à circunferência.

Os planos (v, u_2, z) e (v, u_2, 1), tangentes à superfície côsuperfície.

Os dados são:

Projeção horizontal do vértice do cone [illegible];

Horizontal (h) do plano secante à altura do vértice;

Traço horizontal (base) do plano [illegible] do plano secante, que contém o vértice do cone;

Traço horizontal (S) do plano secante;

Diretriz circular no plano horizontal.

O traço horizontal [illegible] foi colocado de modo a cortar a circunferência em dois pontos (R_1, R_2).

As tangentes (R_1, o) e (R_2, p) nestes pontos são os traços dos planos tangentes à superfície, sendo que interceptam o plano secante, segundo as retas (o, L_1) e (p, L_2), assíntotas da hipérbole (secção).

Estas intersecções foram obtidas empregando as horizontais (v, r_1) e (v, r_2) dos planos tangentes (v, R_1, o) e (v, R_2, p) horizontais que encontram o plano secante nos pontos (r_1) e (r_2) visto a reta (h) ser a projeção de uma reta, cuja cota é igual à de (v), sendo, em consequência, um ponto de cada uma das intersecções. As retas ligadas aos pontos (o) e (p) (comuns aos traços dos planos tangentes e secante) ficam determinadas.

Traçamos a bissetriz (L_1, L_2) das assíntotas, para obtermos o eixo da hipérbole (traçado por (v) e perpendicular à (L_1, L_2)), que representa a intersecção de um plano tangente à superfície cônica e o plano (S).

Do ponto (u_1) traçamos as tangentes (u_1, z) e $(u_2, 1)$ à circunferência.

Os planos (v, u_1, z) e $(v, u_2, 1)$, tangentes à superfície nica, interceptam o plano secante segundo duas tangentes (q', w_1) e (d_1, b_1) à secção, tangentes estas perpendiculares ao eixo da secção, determinando, portanto, os vértices (w_1) e $(\bar{w}_1)$ da hipérbole.

A intersecção (q', w_1) foi achada pela direção conhecida e pelo ponto comum aos traços horizontais do plano secante e do plano tangente. Pelo mesmo processo encontramos a intersecção (d_1), determinada pela direção conhecida e pelo ponto de contáto com a hipérbole, ponto êsse, dado pelo traço da geratriz (z, v) no plano secante.

Os pontos (e) e (g) tambem pertencem à curva. Nesta épura o contorno aparente horizontal do cone não foi determinado, para facilitar a comparação dos traçados com as épuras correspondentes, cujos dados foram tomados com as mesmas proporções.

Na figura 13 resolvemos o mesmo caso propondo a questão da seguinte maneira: "dada uma circunferência, colocar os dados de modo a determinar para figura homóloga desta curva, uma hipérbole."

Os dados são:

Centro (C) de homologia;

Reta limite (j') da figura (Δ') (traçados correspondentes à hipérbole;

Reta limite (j) da figura (Δ) (traçados correspondentes à circunferência);

Eixo de homologia (X) e

Circunferência.

A reta limite (j) foi colocada de modo a cortar a circunferência em dois pontos (m) e (n).

As tangentes (m, o) e (n, p) nêstes pontos têm para retas homólogas as retas (o', t') e (p', t'), assintotas da hipérbole homóloga.

Estas retas homólogas foram obtidas, ligando os pontos (f') e (f'_1), que são os pontos homólogos dos pontos no infinito das retas (m, o) e (n, p), aos pontos (o') e (p') que coincidem com os seus pontos homólogos.

Determinemos a bissetriz (t', u') das assintotas, para conseguirmos o eixo da hipérbole, e tracemos a perpendicular (c, u_2) que coincide com a sua reta homóloga.

Do ponto (n_2) tracemos as tangentes (u_2, z) e (u_2, l) à circunferência.

As retas homólogas (q', w') e (b', d') destas tangentes serão perpendiculares ao eixo da hipérbole e tangentes nos vértices (w') e (d').

A reta (q', w') foi determinada pelo ponto (q'), que coincide com o seu ponto homólogo (q). Sabemos que ela concorre no ponto (n'_2) homólogo de (n_2), que está no infinito e na direção (n_2, C).

A reta (b', d') foi determinada pela direção de acôrdo com o mesmo raciocínio e pelo ponto (d'), homólogo de (z), por estar na reta (c, z) e pertencer ao eixo da hipérbole.

Os pontos (e) e (g) são pontos da curva.

Na épura da figura 14 estudamos o primeiro caso do segundo grupo do nosso quadro sinótico, isto é, a curva dada sendo uma elipse e o resultado pedido outra elipse.

Observando pela perspectiva, verificamos sua possibilidade uma vês que a elipse dada o seja no plano horizontal posterior, rebatido êste sôbre o vertical inferior, É claro que nessas condições a elipse dada não tem nenhum ponto sôbre a linha neutra, dêsse modo todos os pontos da sua perspectiva estão em posições finitas.

O diâmetro (f, e), que divide ao meio as cordas paralelas ao quadro, dará para perspectiva um diâmetro da elipse (perspectiva).

Para determiná-lo tracemos o rebatimento do ráio visual paralelo (PV, f'_1) que determina sôbre a linha do horizonte o ponto de fuga (f'_1), ligando-o ao ponto (a).

As retas (e, PV) e (f, PV), que coincidem com as suas perspectivas, limitam-no nos pontos (e') e (f'). O ponto médio (c') será o centro da elipse e corresponde ao ponto (C) que determina a corda (b, d).

Determinando a perspectiva (b', d) desta corda, que é paralela ao traço do quadro e limitando pelas retas (b, PV) e (d, PV), que coincidem com as suas proprias perspectivas, a elipse perspectiva fica determinada por dois diâmetros conjugados.

As tangentes à elipse dada, traçadas por (PV) são tambem tan-

gentes à perspectiva da curva, assemelhando-se às geratrizes que dão o contorno aparente do cone.

Pela figura -5- estudamos êsse mesmo caso admitindo-o como sendo a projeção horizontal de uma secção cônica.

(v) projeção horizontal do vértice, corresponde ao rebatimento (PV) do ponto de vista. (A) traço horizontal de um plano paralelo ao plano secante contendo o vértice do cone, corresponde à linha do horizonte. (h) projeção horizontal de uma horizontal do plano secante com a mesma cota do ponto (v) corresponde à linha neutra e (S) traço horizontal do plano secante, corresponde ao traço do quadro.

O plano (v, E, F), determinado pelo diâmetro que divide ao meio as cordas paralelas ao plano secante, corta êste plano secante segundo um diâmetro da secção. Para determiná-lo basta verificar que (v, f_1) é uma horizontal do plano (v, E, F), que encontra o plano secante no ponto (f_1) da horizontal (h) dêste plano.

(f_1) sendo um ponto da intersecção, basta ligá-lo ao ponto (D) comum aos traços horizontais dos planos considerados.

As geratrizes (F, v) e (E, v) limitam êste diâmetro. Podemos então, tomar o ponto médio(Ω)e determinar o ponto (C) correspondente no plano da diretriz.

Tracemos por (C) a corda (B, D) e determinemos a intersecção do plano (v, B, D) com o plano secante.

A direção desta intersecção é paralela à (B, D), porque o pla-

no (v, B, D) e o plano (S) têm traços horizontais paralelos.

Para determinar essa intersecção tracemos (b, d) por (e), que é um ponto da intersecção, e limitemo-la pelas geratrizes (B, v) e (D, v) nos pontos (b) e (d). Ficam, assim, determinados os diâmetros conjugados da elipse que será tangente ao contorno aparente do cone.

— — —

Abordemos agora na figura 18 o caso correspondente aos das figuras 14 e 15 para resolvê-lo por meio de raciocínios baseados apenas na definição de duas figuras homólogas,

Os dados são:

(j') reta limite da figura (que corresponde à perspectiva ou à secção) substitue a linha do horizonte.

(j) reta limite da curva dada corresponde à linha neutra ou ao traço do plano (A) empregado nas secções cônicas.

(X) eixo de homologia corresponde ao traço do quadro ou ao traço do plano secante.

As retas paralelas ao eixo de homologia têm para retas homólogas, tambem paralelas ao eixo (X). Por isto, o diâmetro (e, f) que divide ao meio as cordas, tais como (b, d), tem para reta homóloga um diâmetro (e', f') da curva homóloga.

Para determiná-lo basta lembrar que o ponto (f'_1) está sôbre a reta limite (j') e na paralela (C, f'_1) a (e, f) e o ponto homólogo do ponto (f_1) no infinito da reta (e, f). Ligando-o, então,

ao ponto (d_1) que coincide com o seu homólogo, fica determinada esta reta. Os pontos homólogos (e') de (e) e (f') de (f) limitam-na.

Tomando o ponto médio (c') e determinando o ponto homólogo (c), podemos traçar a corda (b, d) que tem para linha homóloga d diâmetro (b', d') da elipse homóloga.

As tangentes traçadas por (c) à curva dada coincidem com as suas retas homólogas e são tangentes as duas curvas.

O estudo do segundo caso do segundo grupo das cônicas, que distribuimos em sinótico refere-se a curva dada sendo uma elipse e o resultado pedido uma parábola.

Pela perspectiva será uma parábola se a elipse dada for colocada tangente à linha neutra. O ponto de tangência (a) tem para perspectiva o ponto (a') infinitamente afastado na direção (a, a').

É esta a direção do eixo. Tracemos uma reta (c, f) que tenha para perspectiva uma perpendicular (g, e) à direção do eixo.

Se pelo ponto (f) da linha neutra traçarmos uma tangente à elipse, tal como (f, h), a perspectiva desta reta (f_1, h_1) será tangente à parábola num ponto que é o vértice, visto esta reta ser perpendicular à direção do eixo.

Traçando pelo vértice uma paralela a (a, a') determina-se o eixo.

Os pontos (b) e (c) tambem pertencem à curva.

Pelas secções cônicas verificamos, estudando êsse caso, que sendo a diretriz uma elipse e a secção uma parábola, os traçados são os mesmos, mas os raciocínios são diferentes.

O plano secante tem para traço horizontal (S) (fig. 18). Êste traço encontra a diretriz nos pontos (b) e (c) que são pontos da secção.

(A) sendo o traço horizontal de um plano que, contendo o vértice do cone, é paralelo ao plano secante e (v, h) sendo a única geratriz nesse plano será tambem a única geratriz paralela ao plano secante e dará a direção do eixo da parábola.

Traçando por (V) uma reta (v, f) colocada no plano (A) e perpendicular a (v, h) e pelo ponto (f) traçando um plano tangente ao cone; êste plano que tem pata traço horizontal (f, g) corta o plano secante segundo uma paralela (e, d_1) a (f, v) tangente à parábola no vértice.

Determina-se o ponto de contáto traçando a geratriz (g, v).

Por êste ponto tracemos o eixo (d, j) paralelo à direção (V,h) já determinada.

Analizemos, agora, duas figuras homólogas, sendo uma a elipse

e a outra a parábola. (Fig. 19).

Para que a figura homóloga da elipse seja uma parábola, é necessário que a elipse só tenha um ponto sôbre a reta limite (j). É êste o ponto (a).

Sendo (C) o centro de homologia, o ponto homólogo (a') de (a) está no infinito e na direção (C, a).

Na figura dos pontos tais como (a') uma tangente à curva, perpendicular a (a, a') será tangente no vértice da parábola.

Tracemos uma perpendicular qualquer (o', n') à direção (a,a').

Esta perpendicular encontra (m', a') no ponto (n'). O ponto homólogo (n) do (n') está sôbre a reta homóloga (m, a) de (m', a') e sôbre a reta (n', C).

O ponto (o') coincide com o seu homólogo.

Ligando (n) a (o) e prolongando até encontrar a reta limite (j) no ponto (K), podemos traçar a tangente (K, e) à elipse que terá para reta homóloga uma perpendicular (p', l') a (a, a') visto o ponto de concurso (K) de (O, K) e da tangente (p, 1) estar sôbre a reta limite (j').

A reta homóloga da tangente (p, e) foi determinada pelo ponto (p, p') sôbre o eixo de homologia e por uma direção já conhecida.

O ponto de contáto (1') correspondente a (e) determina-se ligando (e, C).

Traçando por (1') a paralela à direção do eixo (a, a') e considerando que os pontos (u) e (v) pertencem à parábola, esta fica perfeitamente determinada.

O estudo do terceiro caso do segundo grupo do nosso quadro sinótico diz respeito ainda a elipse, como curva dada e a hipérbole como curva pedida.

Pela perspectiva para colocarmos a elipse no terreno, de modo que a sua perspectiva seja uma hipérbole, basta lembrar que a linha neutra pertence ao plano neutro, que é o lugar dos pontos, cujas perspectivas caem no infinito.

Tomando, então, na figura 20 uma elipse no terreno cortando a linha neutra em dois pontos, tais como: (c) e (d), a sua perspectiva será uma hipérbole cujas direções das assíntotas são determinadas por (PV, c) e (PV, d).

Tracemos as tangentes nêstes pontos (c) e (d). Estas tangentes (c, e) e (d, f) encontram o traço do quadro nos pontos (e) e (f), pontos que coincidem com as próprias perspectivas.

Determinemos, então, os pontos de fuga das perspectivas dessas tangentes traçando os ráios visuais paralelos as mesmas, que rebatidos encontram a linha do horizonte nos pontos procurados (h_1) e (g_1).

Determinadas as assíntotas por dois pontos (e, h_1) e (f, g_1) podemos traçar o eixo da hipérbole.

Determinemos a direção de uma reta no terreno (l, m) que tenha para perspectiva uma perpendicular (l, k) ao eixo da curva e tracemos pelo ponto (m), em que a reta do terreno encontra a linha neutra, duas tangentes (m, t_1) e (m, m_1) à elipse.

As perspectivas destas tangentes, sendo perpendiculares ao eixo da curva, serão tangentes nos vértices.

A curva fica, então, determinada pelas assíntotas, vértices e dois pontos (a) e (b).

Nas secções cônicas, dada pela fig. 21, o cone tem para diretriz uma elipse que encontra nos pontos (b) e (c) o traço horizontal (A) de um plano paralelo ao plano secante, plano êste traçado pelo vértice (V) do cone.

As geratrizes (V, c) e (V, b) são paralelas ao plano secante cujo traço é (S).

Os planos tangentes ao cone, segundo estas geratrizes, interceptam o plano secante determinando duas tangentes à secção nos pontos infinitamente afastados nas direções (V, b) e (V, c).

Estas tangentes são as assíntotas. E a bissetriz do ângulo das assíntotas o eixo da hipérbole.

Tracemos por (V, A), reta perpendicular ao eixo, dois planos tangentes à superfície cônica.

Determinemos as intersecções (d, e) e (F, g) dêstes planos tangentes com o plano secante.

Os vértices da hipérbole ficam determinados nos pontos (g) e (e) interzecção destas últimas retas com o eixo da curva.

As geratrizes de contáto (j, v) e (k, V) dos planos tangentes à superfície cônica, que determinaram as tangentes à curva (D, e) e (f, g), dão os pontos de contáto ou os vértices da hipérbole.

Os pontos (h) e (r) são mais dois pontos da curva.

Para completar as observações dêste caso, analizemos, agora, a seguinte questão: "determinar a figura homóloga de uma elipse, colocando os dados de modo a se obter uma hipérbole".

Tracemos (fig. 22) a elipse cortando a reta limite em dois pontos (a) e (b).

Os pontos homólogos (a') e (b') de (a) e (b) estão no infinito, nas direções (c, a') e (c, b').

As tangentes à elipse, nêstes pontos, terão para retas homólogas tangentes à curva homóloga em dois pontos infinitamente afastados e serão as assíntotas de uma hipérbole.

Conhecidas as direções e os pontos (c, c') e (dd') que coincidem com os seus homólogos, ficam determinadas estas assíntotas.

Traçando a bissetriz do ângulo que elas formam, determina-se o eixo.

Para os vértices da hipérbole a questão foi resolvida da seguinte maneira:

Traçam-se duas concurrentes num ponto da reta (j), (concurrentes estas que correpondem à figura da elipse).

Uma delas deverá ser tangente à elipse e a outra traçada por (C) formará ângulo reto com o eixo da hipérbole.

Suas retas homólogas têm dois pontos determinados sôbre o ei-

xo de homologia e concorrem no ponto (f'), homólogo de (f) no infinito, na direção (C, f).

Tracemos, então, por (h, h') a paralela à direção obtida (Cf) que será a tangente homóloga da tangente (f, m). Como a direção foi tomada perpendicularmente ao eixo, o ponto de contáto será o vértice da hipérbole.

Construções semelhantes determinam o outro vértice. Os pontos (o) e (p), onde a elipse corta o eixo (X) de homologia, são mais dois pontos da curva homóloga.

O primeiro caso do terceiro grupo do nosso quadro sinótico no estudo das cônicas é aquêle que se refere a parábola como curva dada e a elipse como curva obtida.

Analizemos, agora, os casos em que a curva dada é uma parábola da qual se quer obter a perspectiva, ou a secção do cone, ou ainda a sua deformada homóloga.

Na parábola todos os diâmetros são paralelos ao eixo.

Uma tangente na extremidade de um diâmetro dá a direção das cordas que ficam divididas ao meio por êste diâmetro.

Visto isto, seja (fig. 23) a perspectiva de uma parábola, no terreno, colocada de modo a não ter nenhum ponto na linha neutra.

A perspectiva desta curva será uma elipse.

A tangente no ponto (e) paralela ao traço do quadro determina o diâmetro (e, m'), que divide ao meio todas as cordas paralelas ao qua

dro.

A perspectiva (e, f') dêste diâmetro é um diâmetro da perspectiva da curva.

Determinemos o seu ponto de fuga (f_1).

Sendo o ponto de fuga a perspectiva do ponto no infinito de uma reta, (f_1) será a perspectiva da extremidade oposta a (e) do diâmetro considerado da parábola, o que limita, assim, êste diâmetro.

Tomemos o ponto (c) médio e determinemos no terreno o correspondente (m').

Tracemos por (m') a corda paralela ao quadro, a qual fica limitada pelos pontos (a') e (f).

Determinando (d') (f') perspectiva desta corda, traça-se o diâmetro conjugado de (e', f_1).

Os pontos (a) e (b), onde a parábola corta o traço do quadro, são pontos da elipse o que completa a determinação dessa curva.

———— ———— ————

Na (fig. 24) estudamos a secção cônica com os mesmos dados.

A diretriz é uma parábola no plano horizontal de projeção.

(S) é o traço horizontal do plano secante.

(A) o traço horizontal de um plano paralelo ao plano secante, traçado pelo vértice do cone.

A parábola não tem nenhum ponto sôbre (A). Nãa é possivel traçar nenhuma diretriz no plano (A).

Não haverá, portanto, nenhuma geratriz paralela ao plano secante.

A secção é uma elipse.

A tangente é a diretriz no ponto (e), paralela ao plano secante, determina o diâmetro (e, c), que divide ao meio todas as cordas paralelas ao plano secante.

Essa divisão é projetiva no plano (S), logo, o plano traçado por (g), vértice do cone, e pelo diâmetro (e, k) corta o plano secante segundo um diâmetro (m' e') da secção.

Diâmetro êsse cuja direção é determinada pelo ponto (k) que é um ponto da intersecção dos dois planos citados, e a reta (q, g), que dá a direção.

A geratriz (e, g) limita em (e') uma das extremidades do diâmetro da elipse.

A outra extremidade é limitada pela geratriz (g, m') paralela ao diâmetro (e, k).

Tomando o ponto médio (c') e ligando a (g) determina-se (c), ponto do diâmetro da parábola que corresponde ao centro da elipse.

A corda paralela a (S) traçada por (c) é limitada nos pontos (t) e (o).

As geratrizes traçadas por êstes pontos limitam o diâmetro conjugado da elipse (o', t'), cuja direção é paralela a (o, t).

Os pontos (i) e (j), onde o plano secante corta a diretriz, são pontos da secção.

Na (fig. 25) resolvemos a questão seguinte: "Dada uma parábola,

colocar o centro, o eixo e a reta limite de modo a obter-se uma elipse para figura homóloga da parábola".

O eixo de homologia pode cortar a parábola em dois pontos,mas a curva não pode ter nenhum ponto sôbre a reta limite.

Colocado êstes dados, o centro de homologia ocupará uma posição qualquer.

Determinemos, então, duas retas homólogas (b, e) e (b', e'), sendo (b, e) limitada sobre (j) e (X).

A reta homóloga (b', e') de (b, e) encontra o ponto homólogo (e') de (e) no infinito e na direção (C, e). Tracemos, então, (b', e') paralela a (C, e).

Feito isto, temos todos os elementos para construir a figura homóloga da parábola que será uma elipse, visto esta não ter nenhum ponto no infinito.

Ora, o diâmetro (d, o) da parábola tem para reta homóloga um diâmetro da elipse.

Êste diâmetro (d, o) é determinado pela tangente paralela a (X).

O ponto homólogo (d') do (d) determina a extremidade do diâmetro considerado.

Para resolver esta questão tracemos por (d) uma reta qualquer (d, 1) cortando (b, e) num ponto (a).

Liguemos (C) a (a) para determinar sôbre (b' e') o ponto homólogo (a') de (a) e (a') a (1') para determinar a reta homóloga (a', d') de (a, d).

Prolongando-se esta última reta até encontrar (c, d) no ponto (d') obtem-se o homólogo de (d).

Ligando (d') a (o'), que coincide com (o), fica determinado o diâmetro da elipse pela direção e uma das extremidades.

Na parábola, a extremidade (m) oposta a (d) está no infinito e na direção (c, m), que liga (m) ao seu ponto homólogo (m).

O ponto homólogo (m) de (m) pertencendo também ao diâmetro (d',o'), fica, então, determinado pela intersecção destas retas.

Tomando o ponto médio (h) de (m', d') podemos determinar o ponto homólogo (h'), pelo qual passa a corda da parábola (g, f), que tem para reta homóloga o diâmetro (g', f') da elipse, diâmetro, que é conjugado de (d', m).

As retas que ligam (f) e (g) ao centro (C) de homologia limitam êste diâmetro.

O traçado da curva que passe pelos pontos de concurso da parábola com o eixo de homologia completa a épura.

Na (fig. 26) é dada uma parábola no terreno, tangente à linha neutra. A sua perspectiva é uma parábola, da qual podem ser determinados: o vértice e o eixo.

A perspectiva do ponto (a), em que a parábola é tangente à linha neutra está no infinito na direção (a, b), direção do eixo.

É necessário determinar a reta (c, d) que tem para perspectiva a perpendicular (d, e) à direção (a, b) do eixo.

Isto feito, do ponto (c) tracemos a segunda tangente (c, f) à parábola.

Determinando o foco e a diretriz da parábola, por um processo geométrico qualquer, podemos traçar esta tangente, embora o ponto de contáto esteja fora dos limites da épura.

A perspectiva (f, g) desta tangente é tangente à perspectiva da parábola e o ponto de contáto determina o vértice.

O ponto de contáto (h) pode ser determinado pelo encontro das perspectivas de duas retas concurrentes no ponto de contáto da tangente (c, f).

Uma dessas retas concurrentes será a própria tangente (f, h) e a outra, a perpendicular (i') à diretriz da parábola, perpendicular estas que já faz parte da construção geométrica no traçado da tangente (c, f).

A perspectiva da parábola é tangente à linha do horizonte e passa pelos pontos (k) e (l).

Na (fig. 27) temos a projeção horizontal de uma superfície cônica, tendo para diretriz uma parábola.

Para obter-se uma secção parabólica coloquemos o plano secante (S) de uma maneira conveniente. Bastará que êle seja paralelo a um plano (A) tangente à superfície cônica.

Se êsses planos são paralelos os seus traços horizontais são paralelos entre si, sendo (A) tangente à diretriz.

Por consequência, a geratriz (V, b) contida no plano (A), é paralela ao plano (S) e dá a direção do ponto (b) da secção, infinitamente afastado, ou ainda a direção do eixo da parábola.

Obtida uam direção tracemos por (V) a perpendicular (V, c) a (V, b) e pelo ponto (c) a segunda tangente à diretriz. A intersecção do plano determinado por (V) e esta tangente, com o plano secan-

te terá para projeção horizontal uma tangente no vértice da secção.

O eixo da parábola ficará determinado se pelo ponto de contáto da tangente traçarmos a paralela a direção já determinada.

É claro que os pontos de concurso da diretriz com o traço do plano (S) são tambem pontos da secção.

Na (fig. 28) estudamos uma parábola tangente à reta limite (j) com o fito de determinar a figura homóloga que será tambem uma parábola.

O eixo de homologia (X) corta a curva nos pontos (H, h') e (i, i') que pertencem à curva homóloga.

O ponto de tangência (a) da parábola dada, na linha (j), tem para ponto homólogo o ponto (a') no infinito e na direção (c, a). Essa direção (c, a) é tambem a direção do eixo da parábola homóloga.

Para determinar o vértice dessa parábola homóloga tracemos duas retas homólogas (e, d) e (e', d'), tomando para direção de (d', e') uma perpendicular a (c, a).

Do ponto (e) em que (d, e) encontra (j) tiremos uma tangente (e, g) à parábola.

A reta homóloga (e', g') será tangente no vértice da parábola homóloga por ser perpendicular à direção do eixo desta. Para determiná-la tracemos uma reta pelo ponto (f, f') nessa direção.

Ligando (g) a (c) obteremos o ponto de contáto (g') dessa tangente que é o vertice procurado.

A parábola fica, portanto, determinada pelo seu vértice, pelo

eixo e por dois pontos, que são os pontos em que a parábola dada encontra o eixo de homologia.

Consideremos, agora, na (fig. 29) uma parábola cortando a linha neutra, cujos pontos de intersecção (m) e (n) tenham suas perspectiva situadas no infinito, para estudarmos a hipérbole como perspectiva dessa curva.

As direções das assíntotas ficam determinadas pelas retas (PV, m) e (PV, n).

As tangentes (m, a) e (n, b) nos pontos (m) e (n) terão para perspectiva as assíntotas (a, o) e (b, o).

Para determinarmos o eixo da hipérbole tracemos a bissetriz (o, c) das assíntotas.

Os vértices serão determinados pelas tangentes que tenham para perspectiva perpendiculares à bissetriz.

Conseguem-se essas tangentes obtendo a reta (f, g) em perspectiva, formando ângulo reto com (o, c) e determinando a correspondente (h, e) no geometral.

Traçando por (e), ponto da linha neutra, as tangentes (e, f) e (e, j) à parábola, estas terão para perspectivas, retas perpendiculares à bissetriz (o, c) e serão tangentes nos vértices (i') e (j') à hipérbole.

Uma vês que os pontos (r) e (s) da parábola coincidem com a sua perspectiva, podemos traçar a hipérbole, observando que o ponto de fuga (p) do eixo da parábola é o ponto de tangência da hipérbole

na linha do horizonte.

A mesma questão da fig. 29 pode ser observada, considerando-a como uma secção cônica.

A fig. 30 dá a projeção horizontal da secção.

Seja (V, a, b) o contorno aparente do cone.

Para que a secção seja uma hipérbole é necessario que duas geratrizes do cone sejam paralelas ao plano secante.

Consideremos, então, um plano contendo o vértice do cone e tendo para traço horizontal a réta (A), cortando a diretriz em dois pontos(b) e (c), e tomemos o plano secante (S) paralelo a (A).

As geratrizes (v,b) e (v, c) são paralelas ao plano secante e dão as direções das assintotas da secção.

As tangentes á parábolas (b,d) e (c, e) nos pontos (b) e (c) determinam com o vértice (V) dois planos tangentes á superficie cônica, as quais interceptam o plano secante segundo as assintotas da secção.

Para determinar essas intersecções basta lembrar que os pontos (d) e (e) pertencem aos planos tangentes e ao plano secante e as direções são paralelas a (v?b) e (V, c).

A bissetriz (e, f) das assintotas será o eixo da hipérbole, o que nos reconduz ao problema muitas vezes debatido nesta tése: Determinar a tangente á secção feita por um plano num cône, segundo uma direção determinada.

Tracemos, então, dois planos tangentes (V,g,b) e (V, g, h) á superficie cônica de modo que as suas intersecções com o plano (A) sejam

a reta (V, g) perpendicular a (l, f).

As ìntersecções destes dois planos tangentes (i,j) (k, L) com o plano secante serão perpendiculares à bissetriz (l, f) e os pontos de contacto (j) e (l), determinados pelas geratrizes de contacto dos planos tangentes são os vértices da hipérbole.

A secção fica, assim, determinada, notando-se que os pontos (m) e (n) tambem pertencem à curva.

Pela homologia plana essa mesma questão pode ser enunciada da seguinte forma: dada uma parábola colocar os elementos necessários para construir a figura homóloga de modo a obter-se uma hipérbole.

Tracemos (fig. 31) a reta limite (j) cortando a parábola em dois pontos (b) e (a) e o eixo de homologia (X), podendo afastar-se mais ou menos da reta (j).

Seja o ponto (C) o centro de homologia. As retas que ligam (c) a (b) e (c) a (a) dão as direções dos pontos que terão para homólogos (b') e (a'), pontos infinitamente afastados.

Sejam, ainda, (a, m) e (a', m') duas retas homólogas quaisquer e as tangentes à parábola nos pontos (b) e (a).

As retas homólogas das tangentes (b, e) e (a, f), traçadas pelos pontos (e) e (f), em que estas cortam o eixo de homologia, são paralelas à (c, b) e (c, a) e por consequencia as assintotas da hipérbole.

Determinada as assintotas, tracemos a bissetriz (o', g') que é o eixo da hipérbole, e na mesma figura uma reta (c', d') formando angulo reto com esse eixo. Liguemos (d') a (c) para determinar sobre (a,n) o ponto homólogo (d) de (d') e tracemos (c, d) que determinará o ponto (b) sobre a reta (j).

Deste ponto (e) podemos então traçar a tangente (e, g) à parábola que terá para reta homóloga uma tangente à hipérbole, perpendicular ao eixo.

O ponto de contacto será o vértice.

A reta que liga (g) a (c) determina em (g'), sobre o eixo da hipérbole, o vértice procurado.

Os pontos (q, q') e (r, r') são pontos da curva.

Seja dada agora uma hipérbole no terreno de modo a obter-se para sua perspectiva uma elipse.

Os dados deverão atender, desde logo, que não haja nenhum ponto da perspectiva no infinito. Logo, a linha neutra não deverá cortar a curva do terreno, nem lhe ser tangente.

Tracemos na hipérbole, (vêr fig. que segue a de n° 21), um diâmetro (a, b) dividindo ao meio as cordas paralelas ao quadro.

A perspectiva (a_1, b_1) deste diâmetro será um diâmetro da elipse.

A direção foi determinada pelo ponto (d), que coincide com sua propria perspectiva e pelo ponto de fuga (C). As extremidades desse diâmetro foram determinadas pelas retas (P, V, b) e (P, V, a).

Para conseguir o outro diametro da elipse tomemos o ponto médio (m) de (b_1, a_1) e determinemos o ponto (o) do diâmetro (a, b), que tem para perspectiva esse ponto (m).

Tracemos a corda (s, t). A sua perspectiva (u, v) dará o diâmetro conjugado de (a_1, b_1) da elipse.

Os pontos (w) e (x) coincidem com as suas perspectivas. Os pontos de fuga das assintotas (y) e (z) são os pontos em que a elipse encontra a linha do horizonte.

Esse mesmo caso que abordamos pela perspectiva pode ser resolvido pelas secções conicas, se considerarmos uma superfície cônica dada por sua projeção horizontal na figura 33.

(V) é a projeção horizontal do vértice do cone.

(A) o traço horizontal de um plano que contém o vértice.

(S) é o traço horizontal de um plano secante paralelo a (A).

Para determinar os diametros da elipse de secção tracemos o diâmetro (c, d) que divide ao meio as cordas paralelas a (S), e determinemos a intersecção (e, f) do plano (V, C, d) com o plano secante.

As geratrizes (V, c) e (V, d), contidas neste plano, limitam esta intersecção, determinando por consequencia um diâmetro.

Tomemos o ponto médio (m) de (e, f). Tracemos a reta que liga (m) a (v) e prolonguemo-la até o ponto (M) em que esta reta encontra (c, d).

Por (M) passa uma corda (g, h) que determina com o vértice do cône um plano (V, g, h). Cortando o plano secante segundo a reta (u, m, v), as geratrizes (V, g) e (V, h) que a limitam determinam o diâmetro conjugado de (e, f).

Vejamos agora o mesmo problema pela homologia plana.

Para isso, determinamos na fig. 34 a elipse homóloga de uma hipérbole.

Nesta figura não há nenhum ponto da hipérbole na reta limite (J).

Não haverá portanto, nenhum ponto da figura homóloga no infinito.

A procura dos dois diâmetros conjugados da elipse faz-se do seguinte modo.

Na hipérbole as cordas paralelas a (X) são divididas ao meio pelo diâmetro (d, b).

Determinemos então a reta homóloga de (d, b), que será o diâmetro da elipse.

Ora o ponto (e) deste diâmetro tem para homólogo o ponto (e') no infinito e na direção (C, e), assim como tem um ponto (a) sobre (X) coincidindo com o seu homólogo.

Como a reta homóloga de (a, e) deve concorrer no ponto (e') na direção (e, e'), basta traçar por (a) uma paralela a (e, e'), para obter-se a reta homóloga procurada.

As retas (c, b) e (c, d) determinam as extremidades (d') e (b') do diâmetro.

Para traçarmos a diâmetro conjugado determinemos o ponto homólogo (m) de (m'), sendo (m') meio de (b', d') e tracemos por (m) uma corda da hipérbole.

As extremidades (o) e (p) desta corda darão para pontos homólogos as extremidades (o') e (p') do diâmetro conjugado de (b', d') na elipse.

Os pontos (q) e (r') pertencem às duas curvas homólogas.

Será interessante aos nossos estudos considerarmos os pontos homólogos dos pontos no infinito da hipérbole.

Chamando ($\triangle$) a figura dos traçados relativos à hipérbole e ($\triangle'$) a dos traçados relativos à elipse, determinemos a reta limite (j') da figura ($\triangle'$).

Determinando os pontos de intersecção (y') e (w') das retas homólogas das assintotas, (i, w') e (k, y'), com a reta (j') os pontos assim obtidos correspondem aos pontos no infinito da hipérbole.

As retas (i, w') e (k, y') são tangentes à elipse como retas homólogas das assintotas, que são tangentes à hipérbole.

Propomo-nos na questão que se segue no nosso quadro sinótico obter uma parábola como perspectiva de uma hipérbole. É o que conseguimos na figura 35, tornando a linha neutra tangente à hipérbole no ponto (a).

O rebatimento do raio visual (P V, a) dá a direação do eixo da parábola.

Em perspectiva, a reta (b', c') é perpendicular à (a, a') que tem para correspondente (c' d') no geometral.

Seu traçado obtem-se pelo rebatimento do raio visual (P V. b'), o qual dá a direção e o ponto (c), que é comum à perspectiva e à reta.

O vértice da parábola conseguimos admitindo que toda reta traçada por (d'), ponto da linha neutra, tem para perspectiva uma perpendicular a (a, a').

Traçando por (d') a tangente (d', e) à hipérbole, a sua perspectiva (e, f') será tangente no vértice da parábola.

Achamos o ponto de contacto dessa tangente ligando o rebatimento do ponto de vista ao ponto (j).

Para determinarmos o eixo (g' h') traçamos por este ponto o eixo (g', h') paralelo à (a, a').

Os pontos em que a hipérbole encontra o traço do quadro pertencem a perspectiva da curva.

As perspectivas dos pontos no infinito da hipérbole (k') e (l') são os pontos de fuga das assintotas, pontos esses em que a parábola corta a linha do horizonte.

Na disposição da hipérbole no terreno, de modo a obtermos uma parábola em perspectiva, o que se consegue fazendo uma das assintotas coincidir com a linha neutra, a perspectiva seria uma parábola, porque teria uma tangente no infinito, em quanto que o eixo da parábola seria paralelo ao traço do quadro.

Se o ponto de tangência da hipérbole na linha neutra estiver na vertical principal o eixo da parábola será vertical.

Esse mesmo problema pode com facilidade ser estudado pelas secções cônicas na figura 36, se considerarmos a projeção horizontal de uma superfície cônica como tendo para diretriz uma e se, ainda, colocarmos o plano secante de modo a que ele dê para secção uma parábola.

O plano secante dará uma secção parabólica se o seu traço horizontal (S) for paralelo a um plano tangente à superfície cônica, representado pelo traço horizontal (A).

Sabemos que a direção do traço (S) só pode variar numa rotação de um ângulo inferior ao maior ângulo das assintotas, que é o caso desta épura.

Para conseguirmos uma parábola, tendo o eixo paralelo a uma das assintotas da hipérbole, o traço (A) teria que coincidir com uma destas assintotas.

Para obtermos o eixo da parábola paralelo ao eixo da hipérbole seria necessário traçar por (V), vértice do cone, uma paralela ao eixo da hipérbole e traçar o plano (A) tangente à superfície cônica segundo a geratriz que tivesse para projeção horizontal a última reta considerada.

Essas considerações servem para elucidar alguns casos particulares.

Abordemos agora a solução do problema de uma maneira geral que é o caso fig. 36.

A geratriz (V,a) que liga (V) ao ponto de tangência do traço (A) dá a direção do eixo da secção.

Tracemos um plano (V, d, e) tangente à superfície que corte o plano secante, segundo uma reta tendo para projeção horizontal uma perpendicular (d, f) a (V, a).

Essa projeção (d, f) é tangente no vértice da parábola e o ponto de contacto (f) é dado pela geratriz. (V, e).

Traçando por (f) uma paralela a (V, a) determinamos o eixo da secção.

Os pontos (g) e (h) pertencem a essa curva.

Se considerarmos a intersecção (X) com o plano secante, do plano horizontal contendo o vértice do cone, esta intersecção corresponde à linha do horizonte de uma perspectiva. Os pontos onde esta linha encontra a superfície cônica são pontos da parábola os quais correspondem aos pontos em que esta corta a linha do horizonte na épura perspectiva.

Vê-se, então, que a parábola corta a linha (x) nos pontos (i) e (j), pontos estes determinados pelas paralelas às assintotas, traçadas pelo vértice do cone,

----

Consideremos agora (fig. 37), a mesma questão resolvida de acôrdo com as definições de duas figuras homólogas, isto é pela homologia plana.

(J) reta limite da figura ( ) da hipérbole, é tangente a esta curva no ponto (m).

O ponto homólogo (m') de (m) está no infinito na direção (C, m).

Para determinar o vértice da parábola tracemos por (C) uma reta (g, f) da figura ( ) perpendicular a (C, m').

A reta homóloga (f', g') coincide com (f, g). Do ponto (g) sobre (J), tiremos a tangente à hipérbole, cujo ponto de contacto é (h).

A reta homóloga (i', g') de (i, g) tem uma direção conhecida que é (C, g).

Para traçá-la basta considerar que o ponto (i) coincide com (i') sobre o eixo (E).

O ponto homólogo (h') de (h), determinado pela intersecção da reta (C, h) com a tangente é o vértice procurado.

Comparando com a épura de uma secção cônica, verifica-se que, as construções são idênticas.

A reta (g, f) e (g', f'), que na figura 37 são duas retas homólogas coincidentes, na épura de uma secção cônica correspondente à projeção da intersecção de um plano tangente à superfície cônica com um plano paralelo ao plano secante traçado pelo vértice do cone.

Continuando a comparar os traçados encontram-se relações idênticas entre as outras linhas.

<u>Na épura da figura 38 resolvemos a seguinte questão do nosso quadro sinótico: dada uma hipérbole colocar os dados do problema, de modo que sua perspectiva seja outra hipérbole.</u>

Nessas condições a linha neutra pode cortar a curva em dois pontos.

As retas que ligam estes dois pontos ao rebatimento do ponto de vista dão as direções das assintotas. Resulta daí que, se os pontos em que a linha neutra encontra a hipérbole estão equidistantes da vertical principal, o eixo da hipérbole perspectiva será vertical ou horizontal.

Se colocarmos esses dados noutras condições, por exemplo, sendo uma das assintotas coincidente com a linha neutra, a perspectiva não será mais uma hipérbole e sim uma parábola.

Na épura considerada os rebatimentos dos raios visuais que determinam as direções das assintotas são (P.V, a) e (P, V, b).

As tangentes, (a, c) e (b, d) nos pontos (a) e (b) têm para perspectivas as assintotas da hipérbole (perspectiva) (c, e) e (d, f).

A bissetriz destas dará o eixo (g, h).

Tracemos, então, em perspectiva, uma reta (i, j), perpendicular à (g, h) e determinemos (i, k), reta que tem para perspectiva (i, j).

Do ponto (k) tracemos as tangentes à hipérbole (geometral). As retas que ligam o rebatimento do ponto de vista aos pontos de contacto (P. V, L) e (P. V, m) cortam o eixo (g, h) nos pontos (n) e (o), que são os vértices da hipérbole em perspectiva.

Os pontos de fuga (p) e (q) das assintotas da hipérbole (geometral) são pontos da hipérbole (perspectiva).

O mesmo problema tratado pelas secções cônicas, na figura 39, foi estudado levando-se em conta a projeção horizontal da secção feita numa superfície cônica, que tivesse para diretriz uma hipérbole no plano horizontal.

Desse modo:

(A) e (S) são os traços horizontais de dois planos paralelos, sendo (S) o plano secante e (A) o plano contendo o vértice do cone.

O traço (A) encontra a hipérbole nos pontos (a) e (b).

(V, a) e (V, b) são as direções das assintotas da secção.

Os planos tangentes (V, b, c) e (V, a, d) interceptam o plano secante segundo as retas (c, o) e (d, o), assintotas da secção.

Tracemos a bissetriz (o, e) para determinarmos o eixo.

Se por (V) traçarmos uma perpendicular a essa bissetriz, limitada no ponto (f) sobre o traço (A), e se determinarmos as intersecções (h, i) e (k, j) dos planos tangentes (V, f, h) e (V, f, g) com o plano secante, essas intersecções são tangentes à hipérbole.

Os pontos (i) e (j) em que estas intersecções encontram o eixo da secção hiperbólica são os vértices da curva.

Os pontos (k_1) e (l) tambem pertencem à curva, porque suas perspectivas coincidem com suas projeções.

Tratado pela homologia plana esse problema se reduz ao seguinte: (Fig. 40) dada uma hipérbole colocar o eixo, a reta limite e o centro de homologia de modo a obtermos para figura homóloga uma hipérbole.

(X) será o eixo de homologia;

(J') reta limite da figura (△) da hipérbole dada, assim como

(C) centro de homologia.

As retas (C, a) e (C, b) dão as direções das assintotas da hipérbole homóloga.

Traceмos então as tangentes (b, e) e (a, d) à hipérbole da (fig. △), determinando em seguida as retas homólogas (b', e') e (a', d').

Estas retas são as assintotas da hipérbole homóloga (fig. △').

A bissetriz dará o eixo (g', f').

Traçando por (C) uma perpendicular (c, i) a esta bissetriz, a reta homóloga (c', i') coincide com (c, i) e corta a reta limite (J) no ponto (h).

Deste ponto, tiramos as tangentes (h, m) e (h, n).

Os pontos homólogos dos pontos de contacto (m') e (n') são os v'ertices da hipérbole homóloga.

Os pontos (o, o') e p, p') tambem pertencem à curva, porque são homólogos e coincidentes.

APLICAÇÃO ARTISTICA

Paraaconcluir, mostramos numa perspectiva artistica a possibilidade da aplicação vantajosa dos diversos traçados estudados nesta tese nas perspectivas das cônicas.

Foi nosso objetivo nossa aplicação prática, deixando no desenho as linhas necessárias sem fazer nenhuma construção a parte, determinar os eixos de todas as elipses. Facilitamos assim os traçados destas curvas, dando-lhes a necessária precisão sem complicar a épura, o que não se obteria pelos processos correntes.

Para melhor exemplificar tomamos um motivo que nos dá para perspectiva uma parábola e uma hipérbole.

Foi essa idéia, então, que nos levou a por em perspectiva, uma fonte, cuja projeção horizontal resume-se em diversos círculos concêntricos (o, a) (o, b) (o, c) (o, d) (o, e) (o, f) (o, g).

A projeção vertical é definida pelo corte (O_1, 1, 6, 2, 3, 4, 5, 7), que nos dá as alturas dos círculos.

O rebatimento do ponto de vista (P.V) permite a colocação da linha neutra. (L.N), linha neutra esta que é tangente à cirfunferência (o, f), e corta a circunferência (o, g) nos pontos (h) e (i). Desse modo a circunferência (o, f) tem para perspectiva a praábola e a circunferência (o, g) a hipérbole.

Vê-se pelo assunto que o observador está colocado na margem de um pequeno lago circular, caso que muitas vezes se apresenta na prática.

Para determinar pelos eixos a perspectiva da circunferência (o, d) de cóta (o), uma vez que a vertical principal é um eixo de simetria, basta determinar as perspectivas (d') de (d) e (s') de (s), que limitam o eixo menor. A perspectiva (d') de (d) foi determinada pelo ponto de concurso da perspectiva (n', f') de (d, n') com a vertical principal.

Construções identicas foram empregadas para determinar a perspectiva (s') de (s).

O ponto (v'), que divide (s', d') ao meio, nos dá a corda (v, 1), cuja perspectiva (v', 1') é o semi-eixo menor da elipse.

Se a circunferência (o, e), por exemplo, está a uma altura igual a$(O_1$, 2), as construções são as mesmas, considerando-se a linha de terra na altura (2), o que obriga a elevar o ponto (y) para a horizontal (2), antes de ~~o~~ ligar a (f).

E assim procederiamos sucessivamente para limitar os eixos menores de todas as elipses.

Determinado, que seja, o eixo menor e o meio deste, procuramos, a corda correspondente na projeção horizontal, sem esquecer que a reta em perspectiva, traçada a uma determinada altura, tem o seu traço no quadro sobre a horizontal que determina esta altura, o que importa em transportá-lo verticalmente para a horizontal de cota (O_1), antes de traçar a paralela ao rebatimento do raio visual, que nos dá a projeção horizontal da reta.

Para limitar o eixo maior de uma elipse a uma determinada altura, depois de traçada a corda correspondente, tal como (w, m,), podemos empregar a direção especial que coincide com a sua perspectiva. Se considerarmos a elevação da linha de terra para (2) será necessário elevar tambem (m) para (m_1), altura igual a $(O_1$, 2), antes da ligação a (P.V).

E assim sucessivamente para as outras elipses.

PARÁBOLA.

A parábola foi determinada pelo vértice (f 1), pelo eixo que é a vertical principal e por um ponto (10') dessa curva. O diâmetro $(f\ f_1)$ tem a sua extremidade (f_1) fora dos limites da épura, mas a reta (11, 12) concorre neste ponto (f_1), visto ser paralela a (f, 13) numa distancia (12, o) igual a (o, 13). Determinando a perspectiva $(11, f_1)$, da reta (11, 12), esta cortará a vertical principal no vértice procurado.

A perspectiva (10') do ponto (10), que pertence a circunferência considerada dará um ponto da parábola.

HIPÉRBOLE.

A hipérbole foi determinada pelo vértice (g') elevado a altura (1), obtido pelos meios identicos aos empregados para a determinação do vértice e do eixo da parábola. Eixo este que é a vertical principal.

Para concluirmos esta demonstração bastará traçar as assintotas (M_4, N_4) que são definidas por um ponto (Z_4) e a direção (P V, h).

F I M

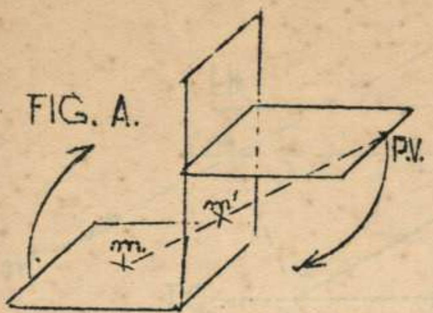


FIG. A.

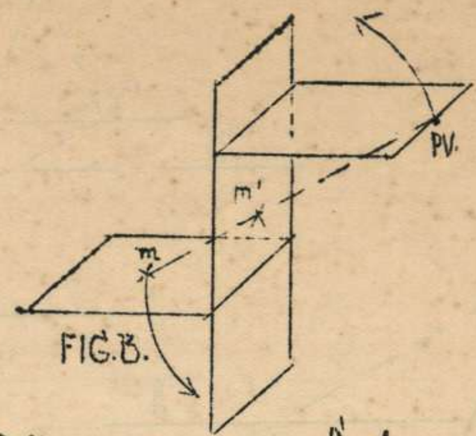


FIG. B.

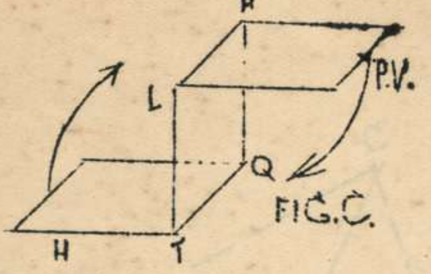


FIG. C.

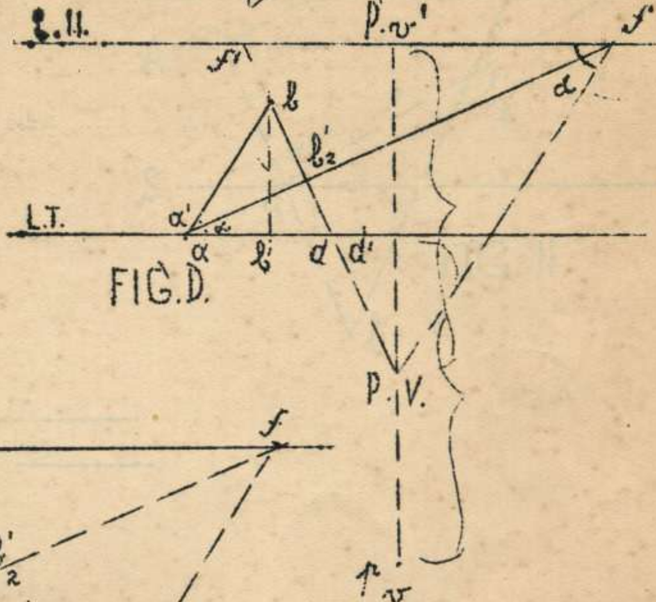


FIG. D.

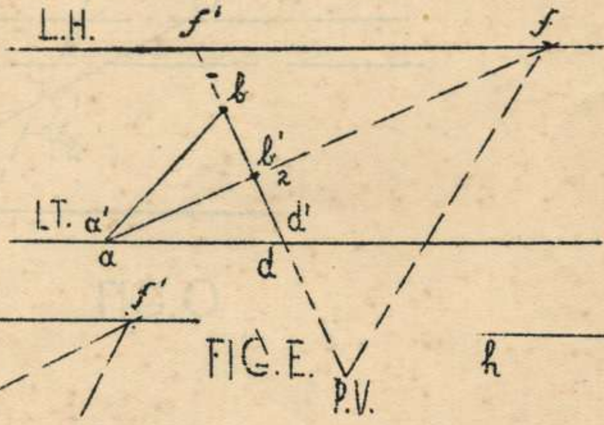


FIG. E.

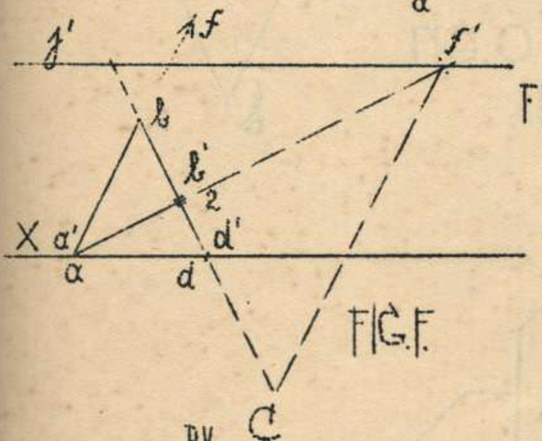


FIG. F.

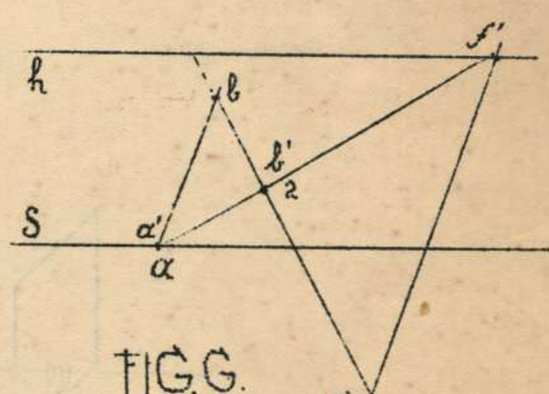


FIG. G.

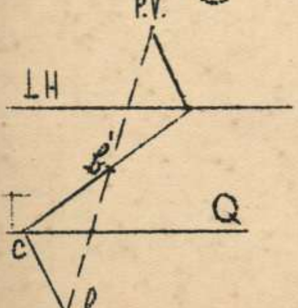


FIG. H.

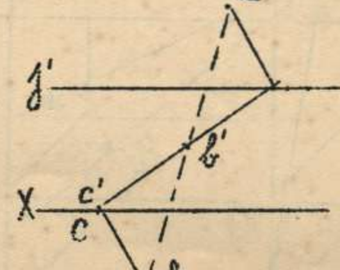


FIG. I.

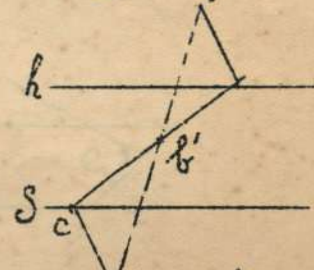


FIG. J.

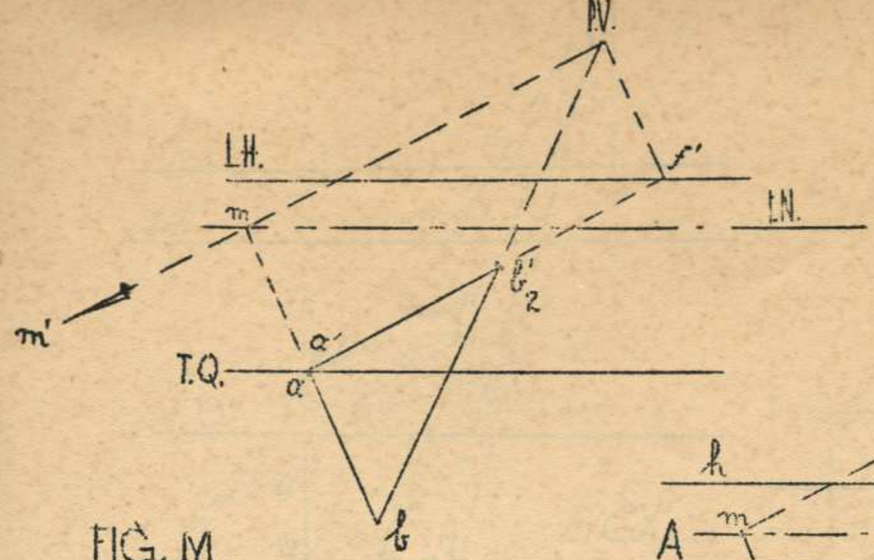


FIG. M.

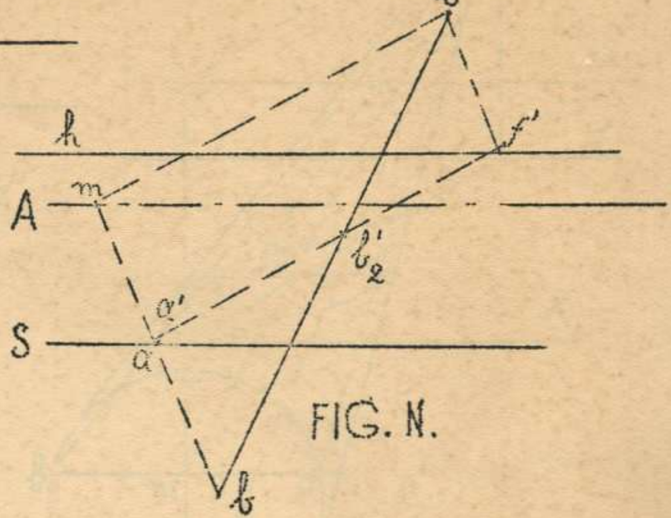


FIG. N.

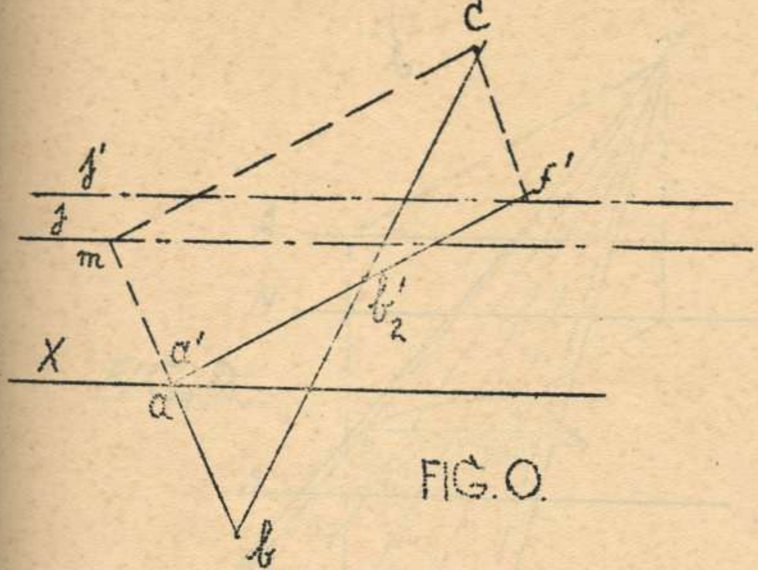


FIG. O.

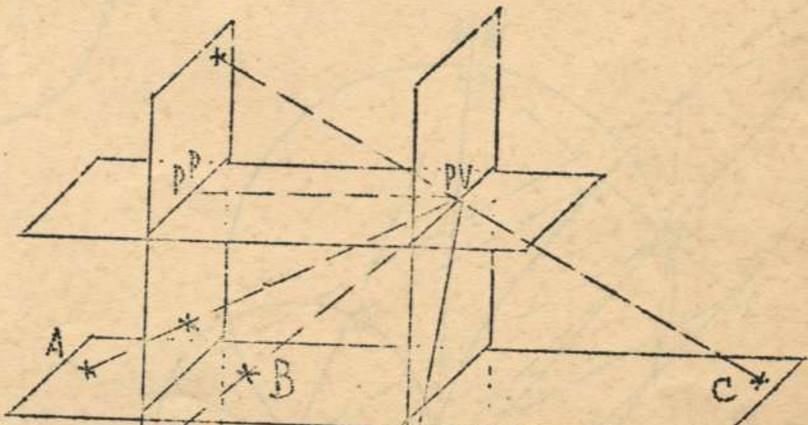


FIG. K.

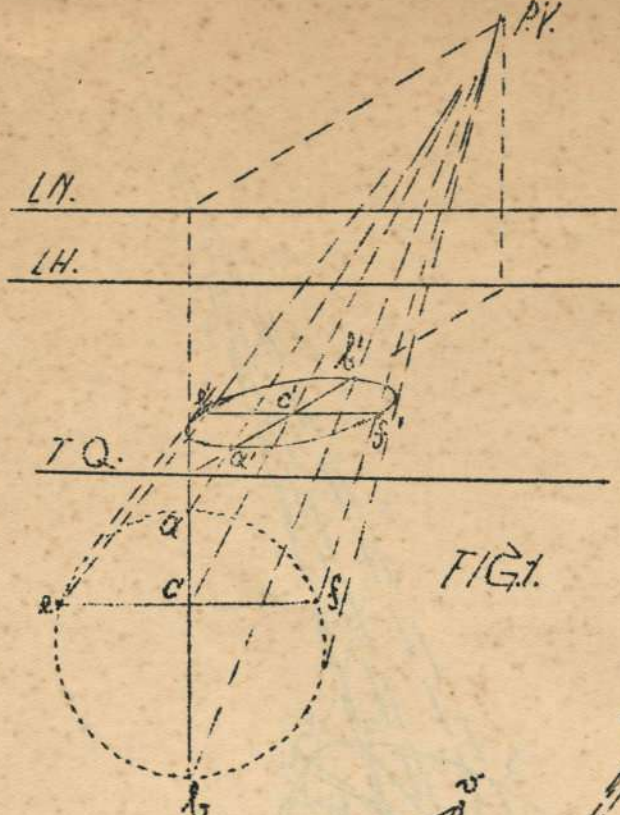


FIG.1.

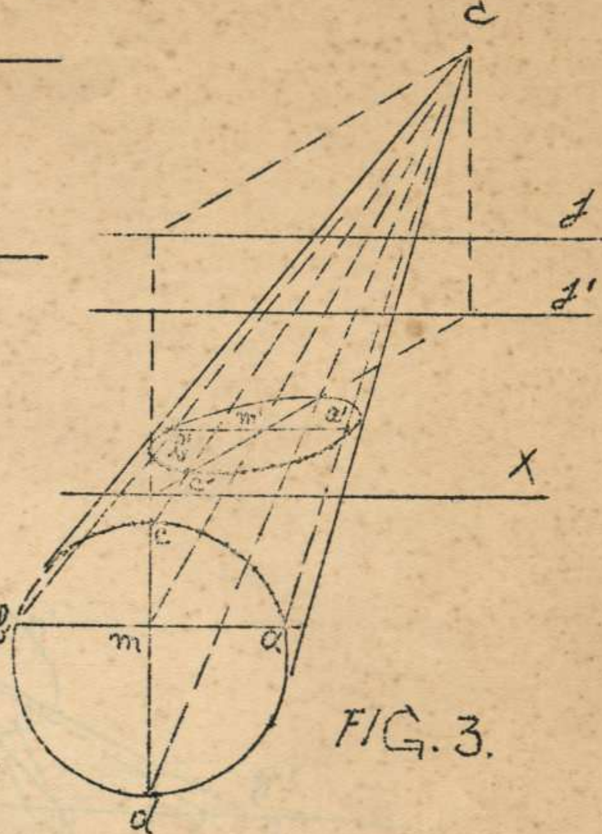
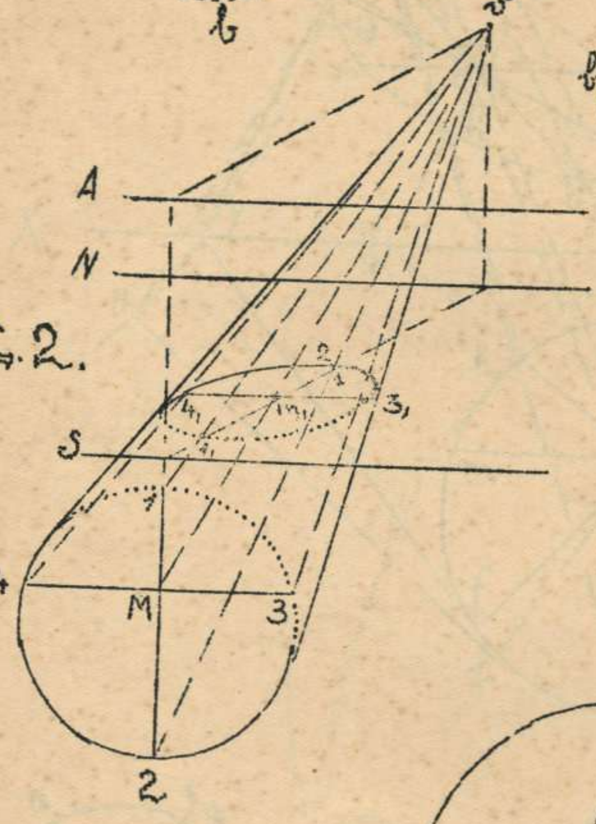


FIG. 3.

FIG.2.



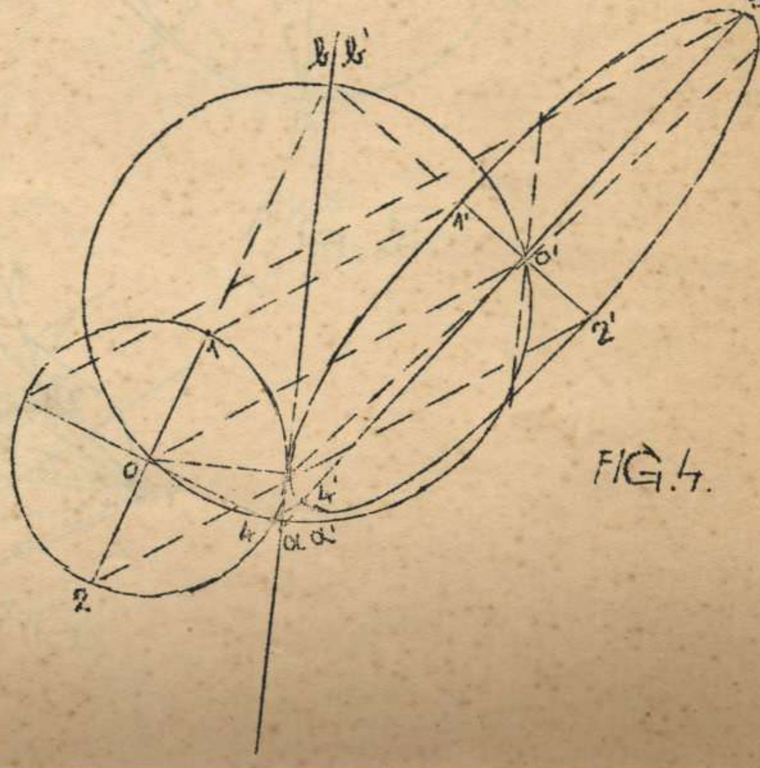


FIG.4.

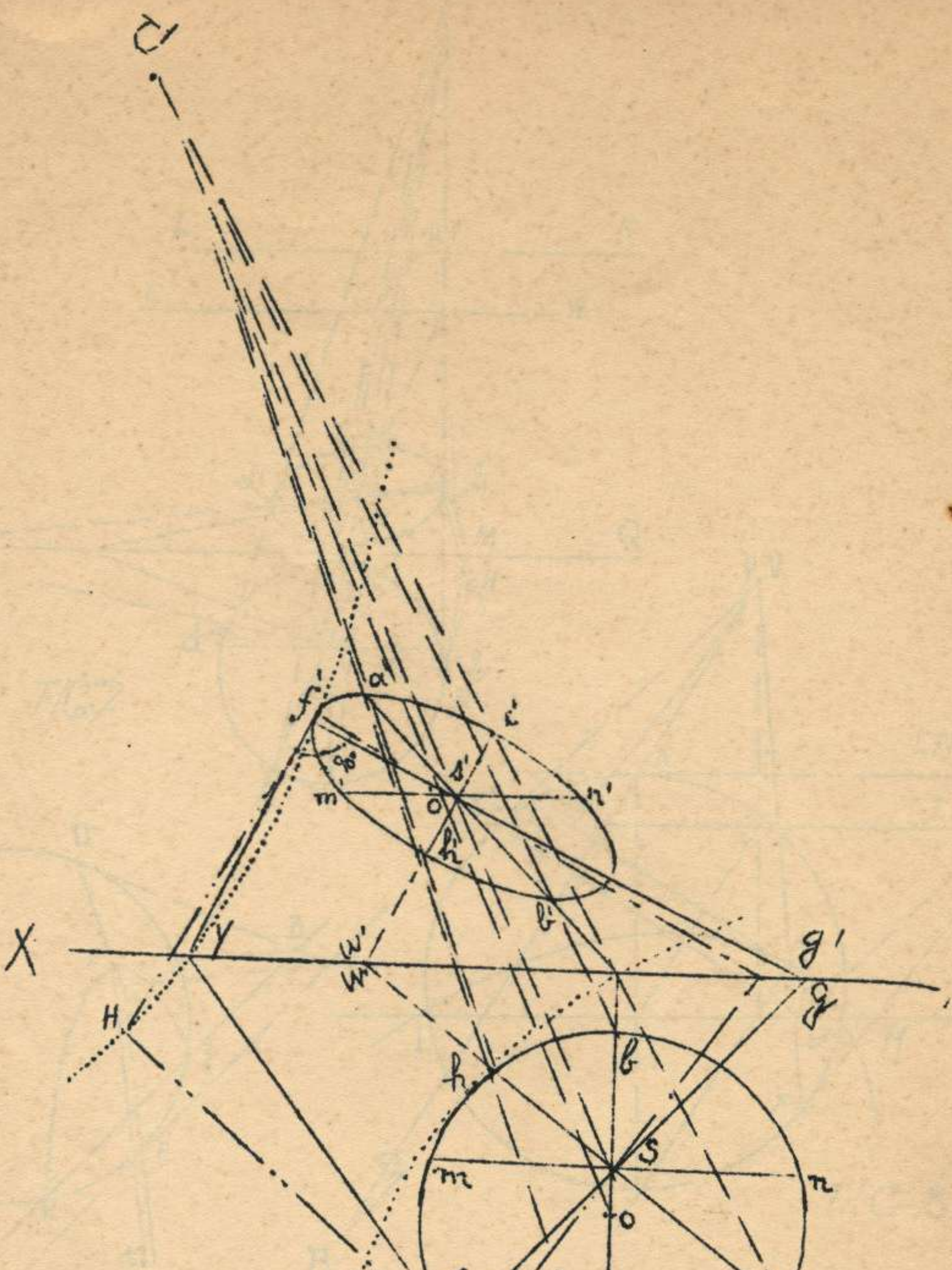


FIG. 5.

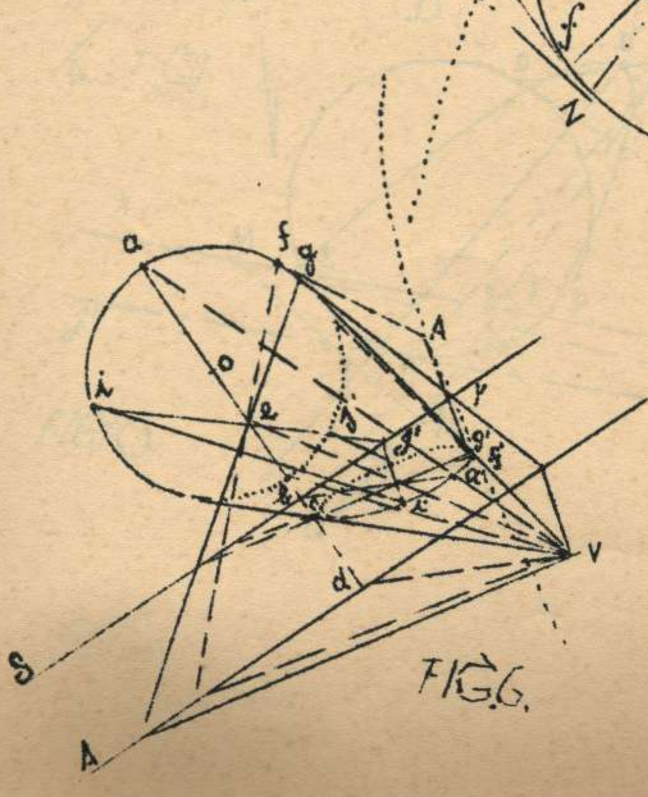


FIG. 6.

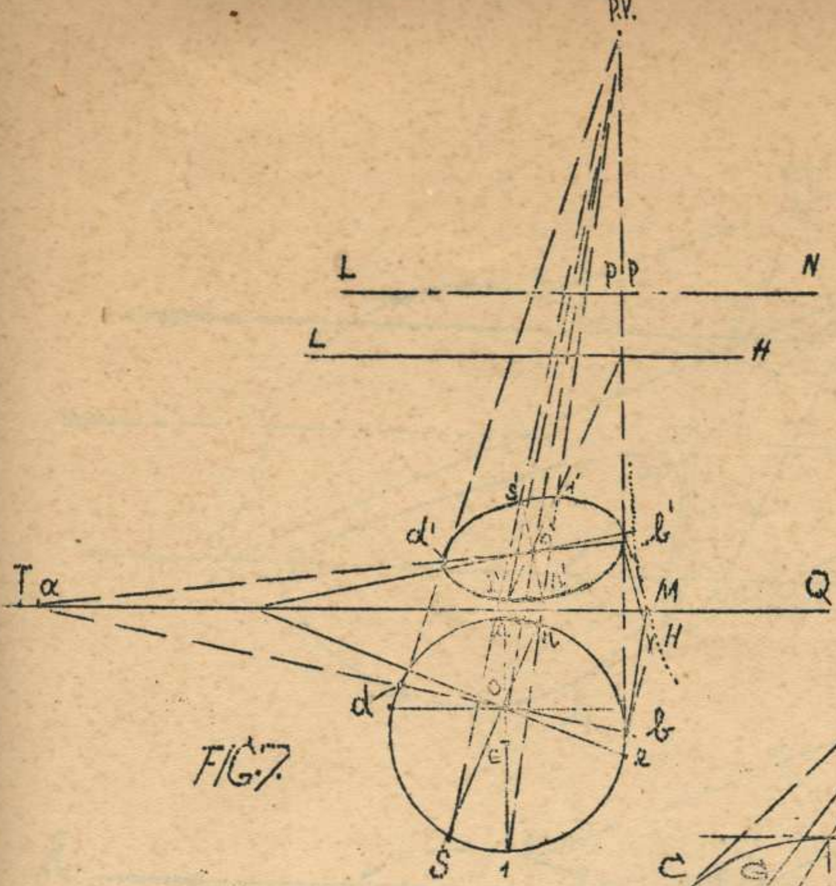


FIG.7.

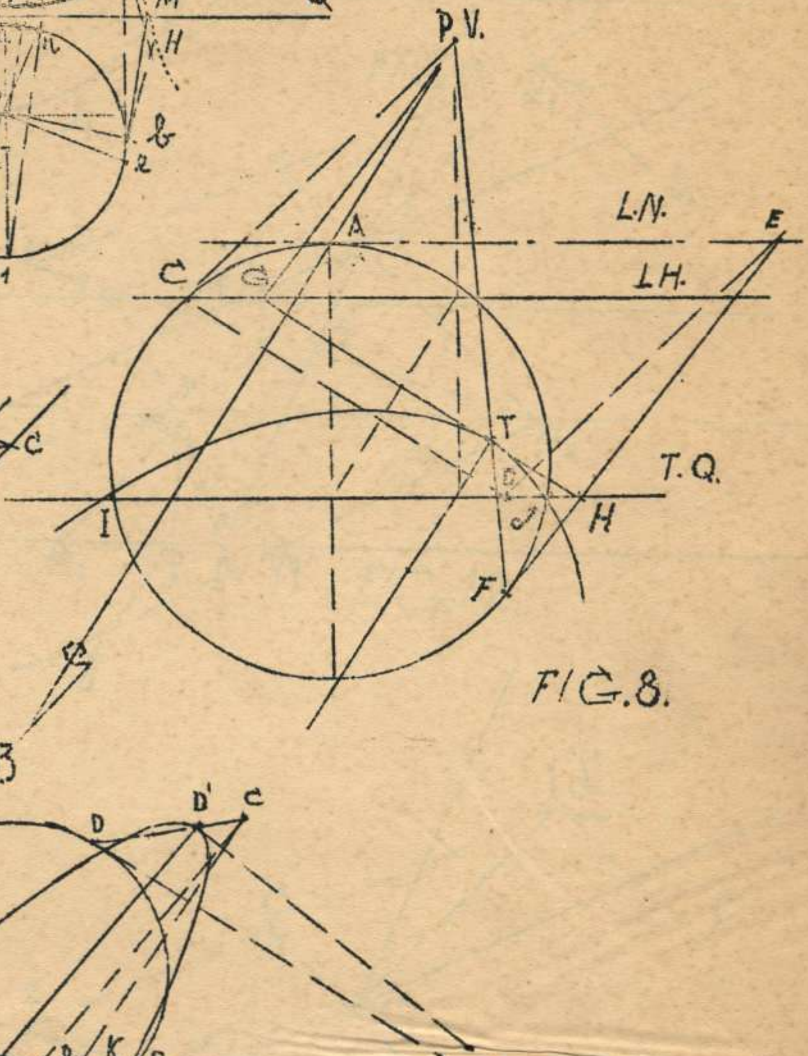


FIG.8.

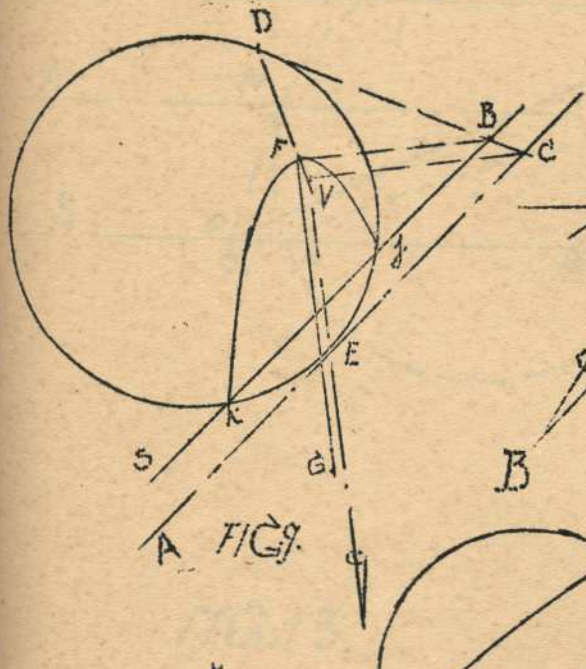


FIG.9.

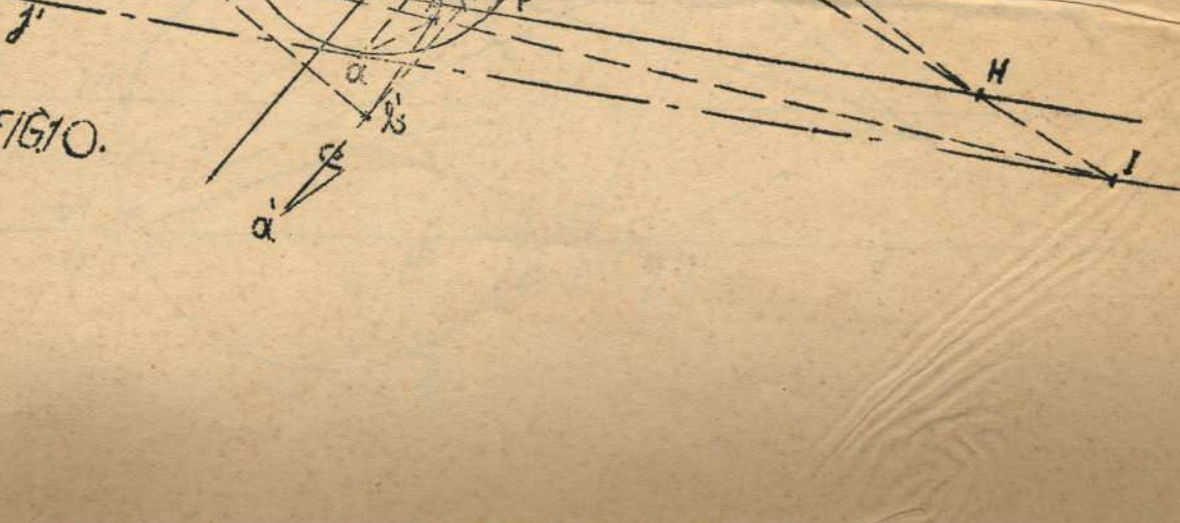


FIG.10.

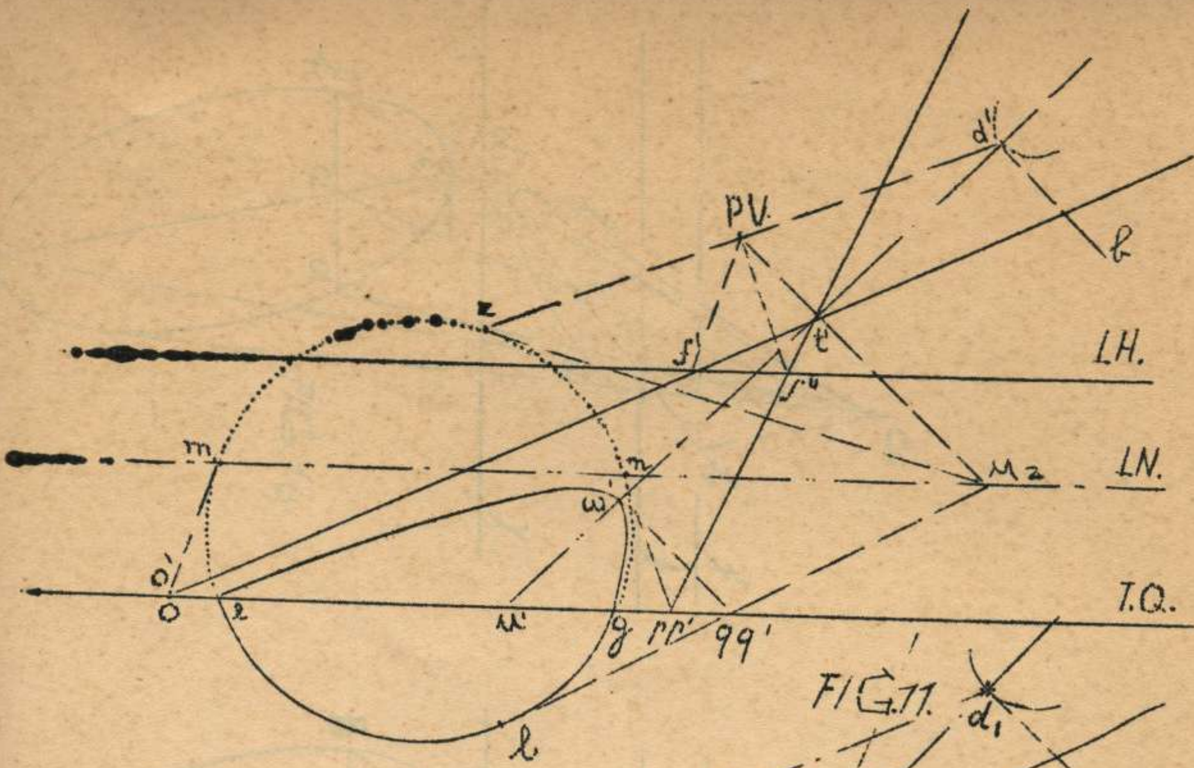


FIG.11.

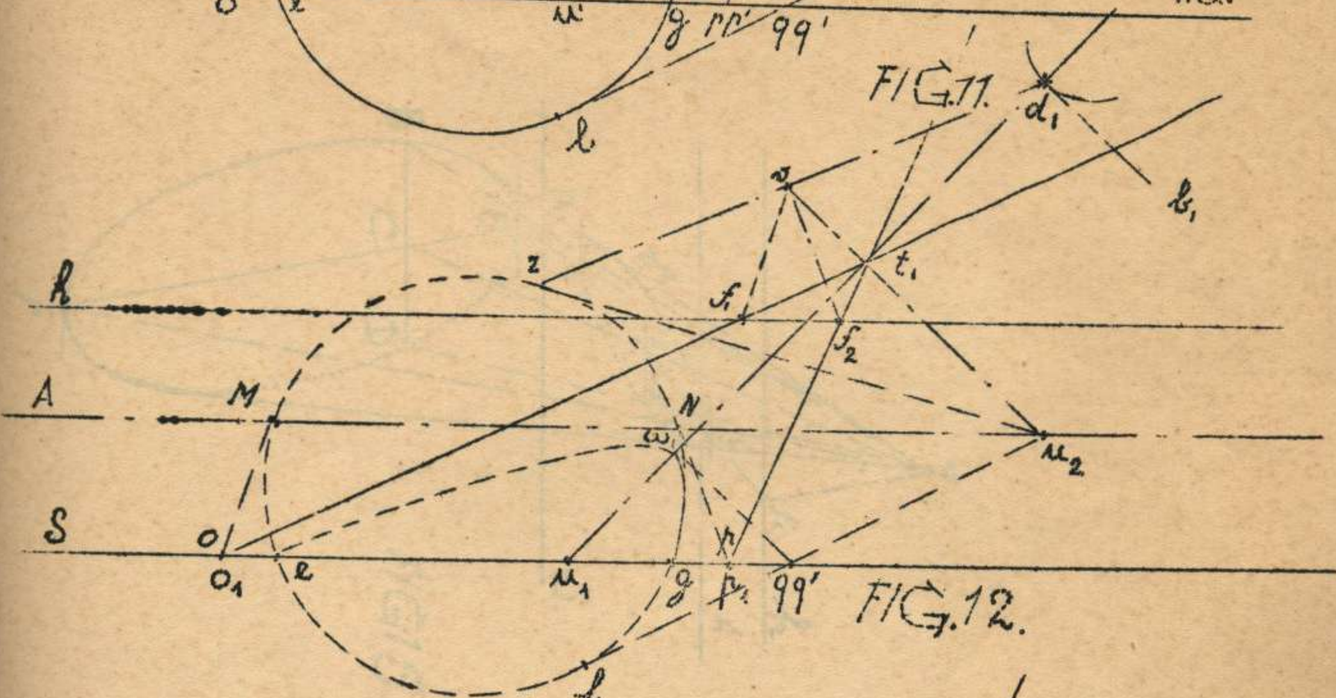
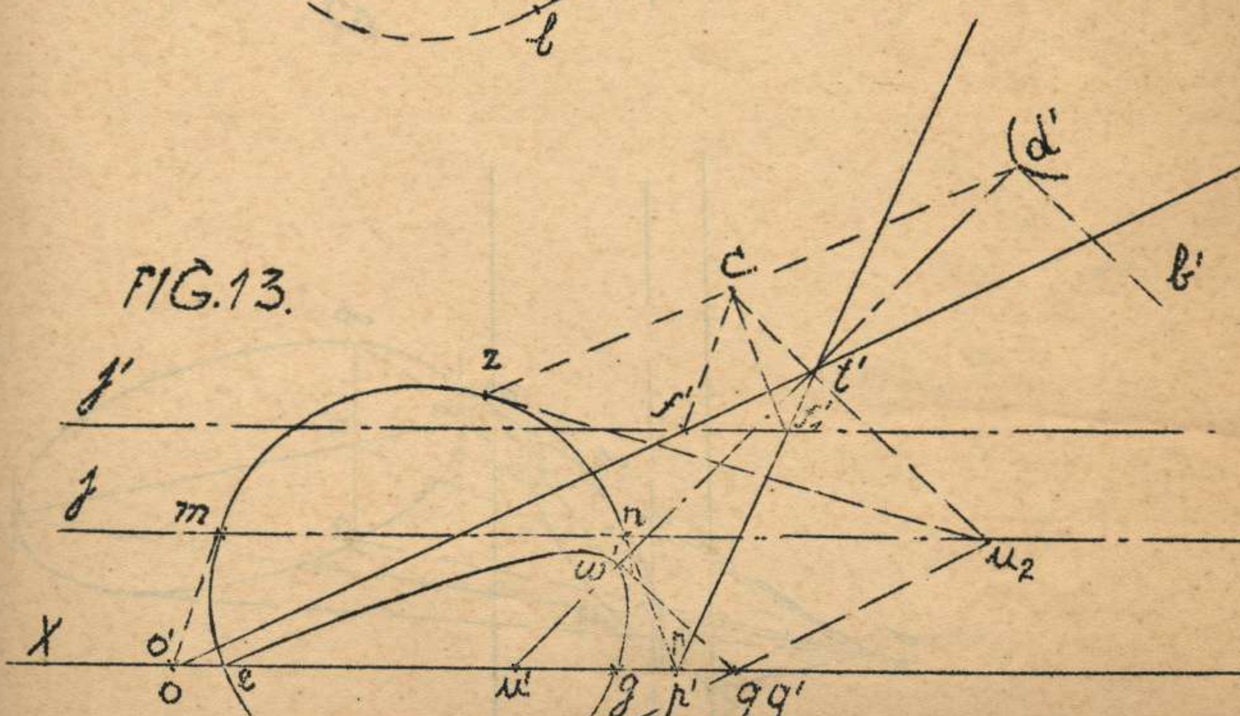


FIG.12.

FIG.13.



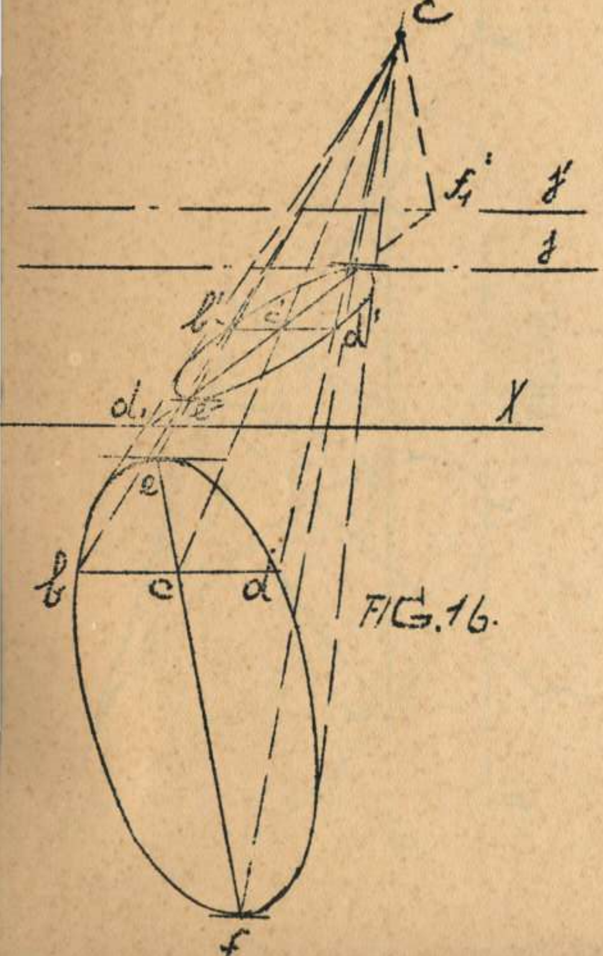


FIG.16.

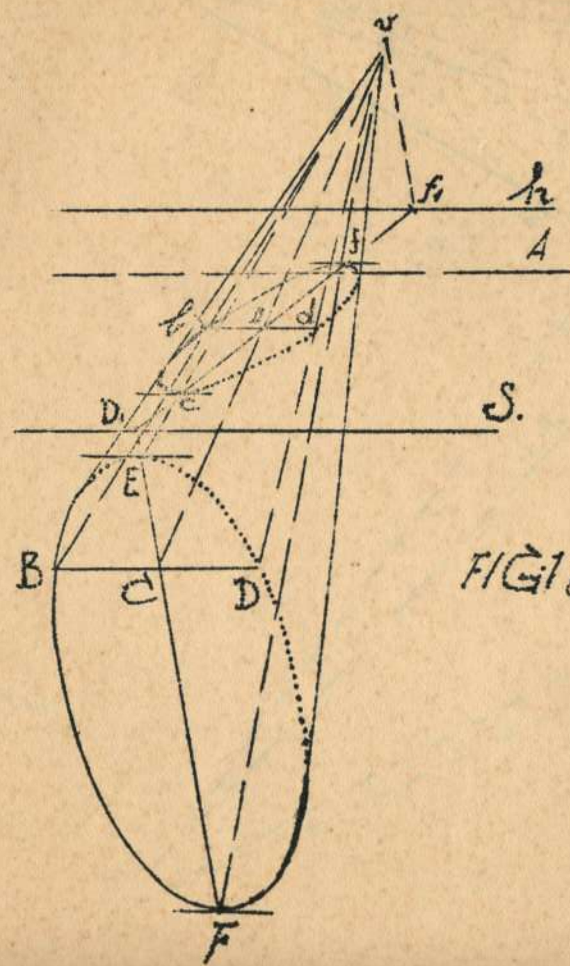


FIG.15.

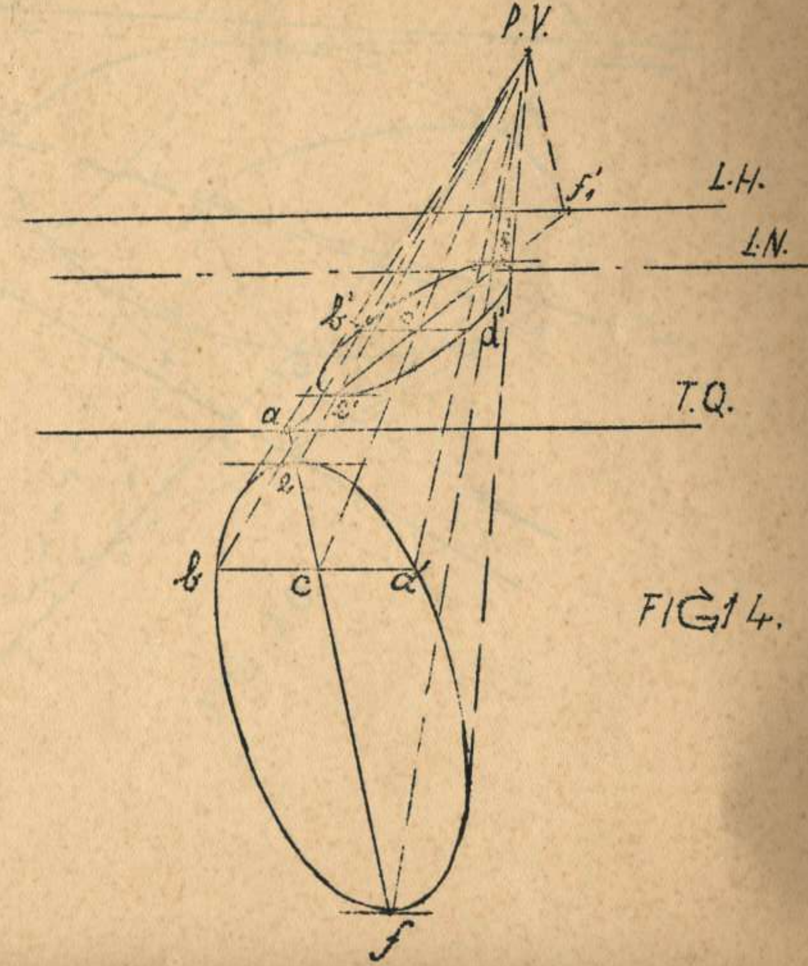


FIG.14.

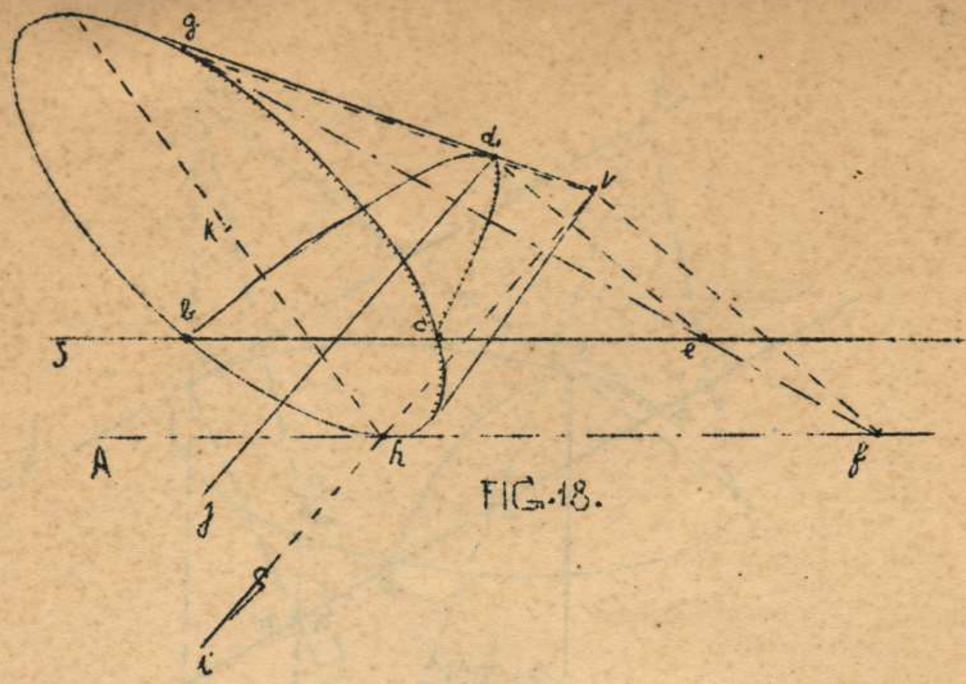


FIG. 18.

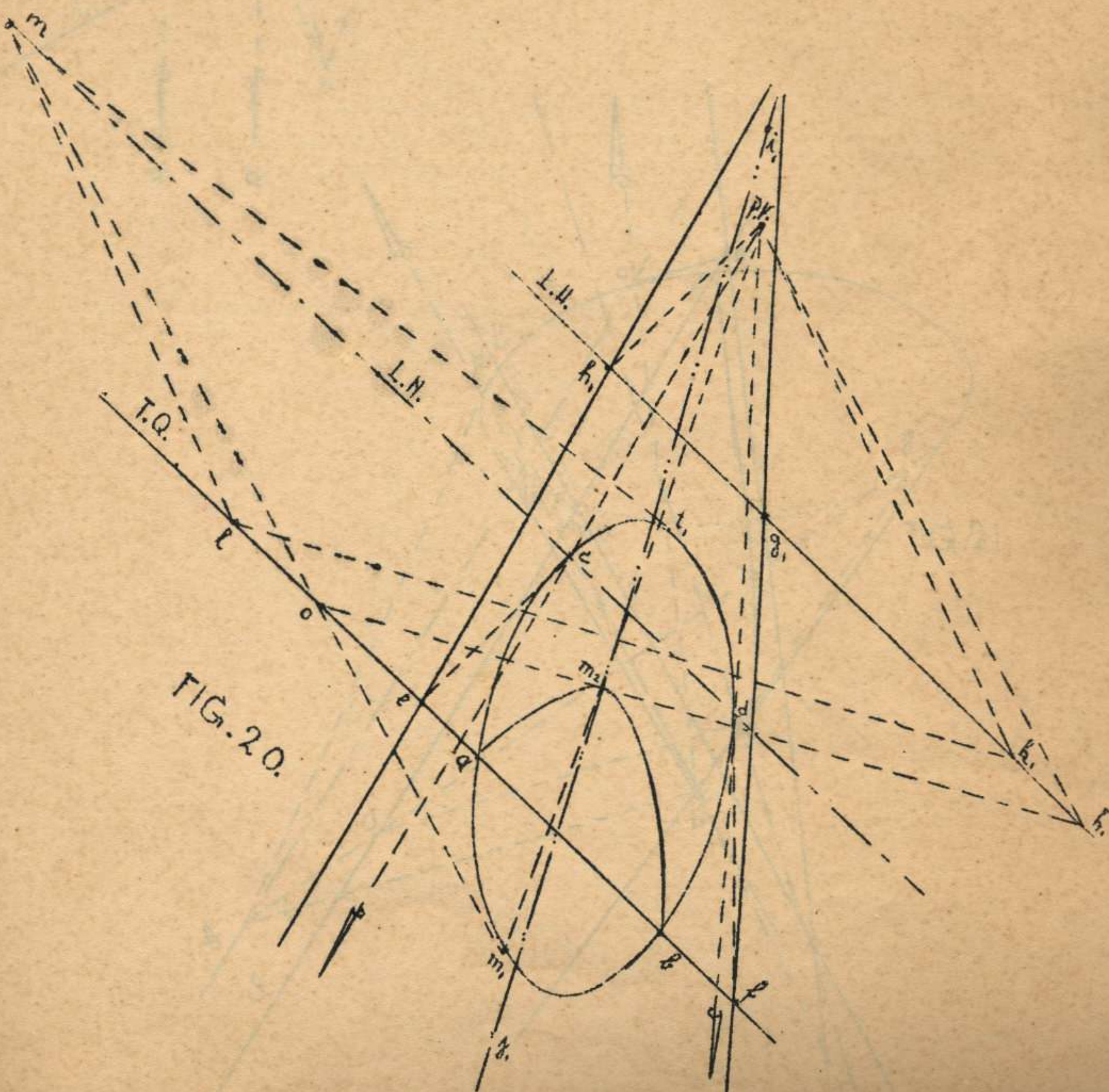


FIG. 20.

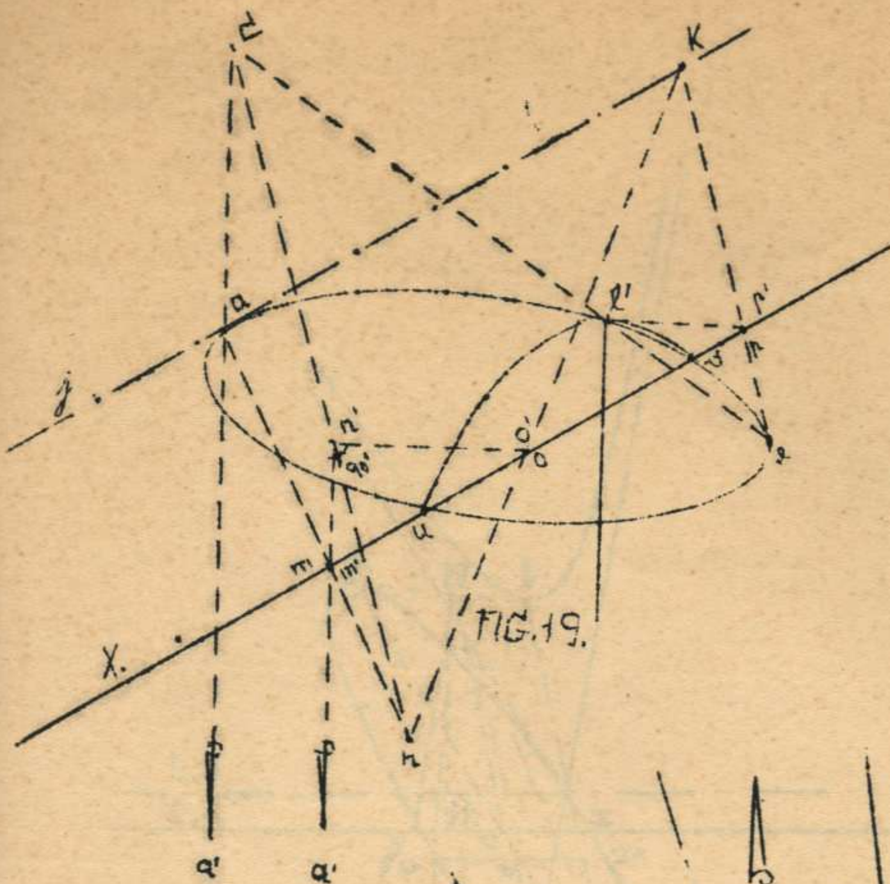


FIG.19.

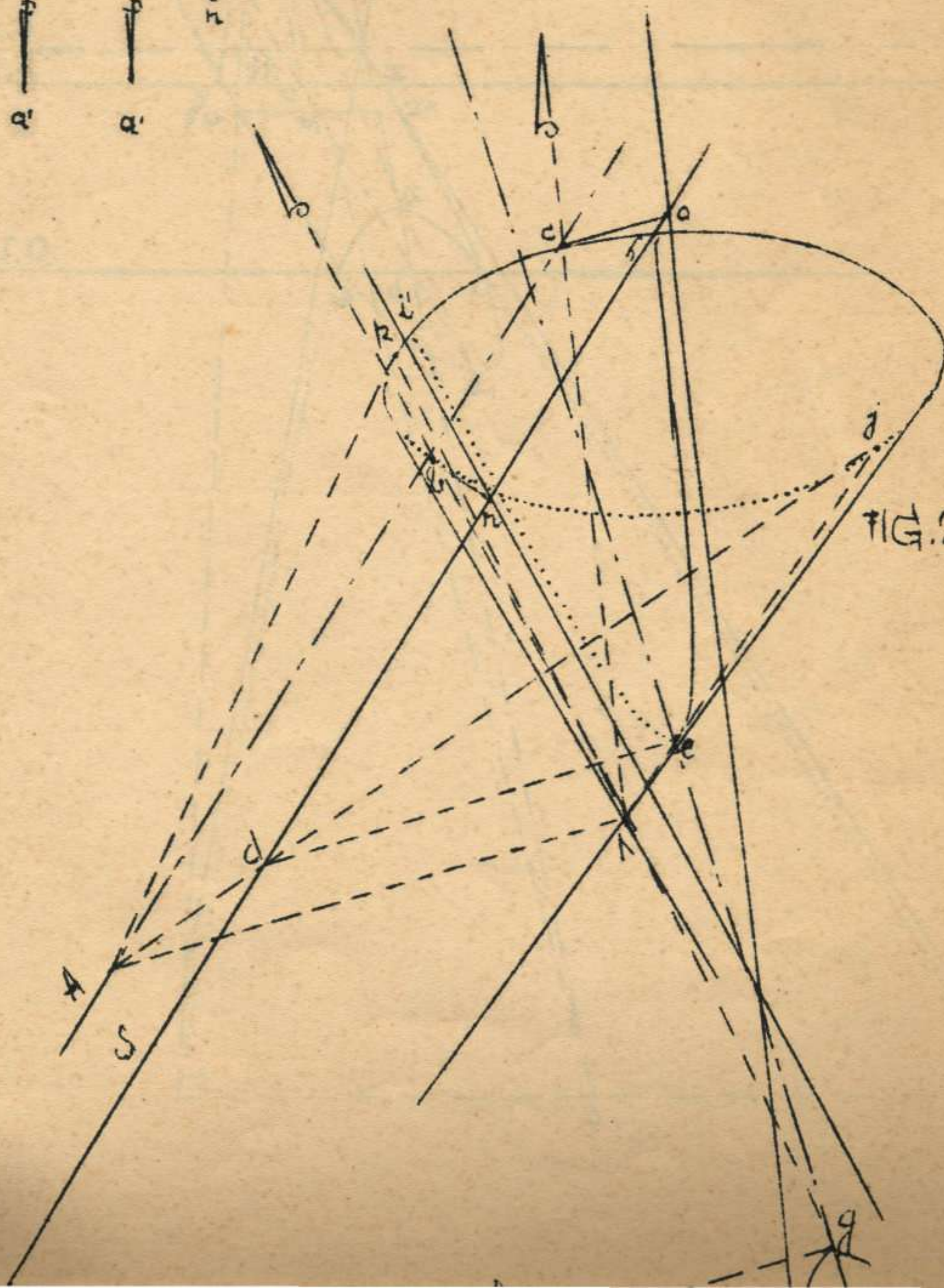
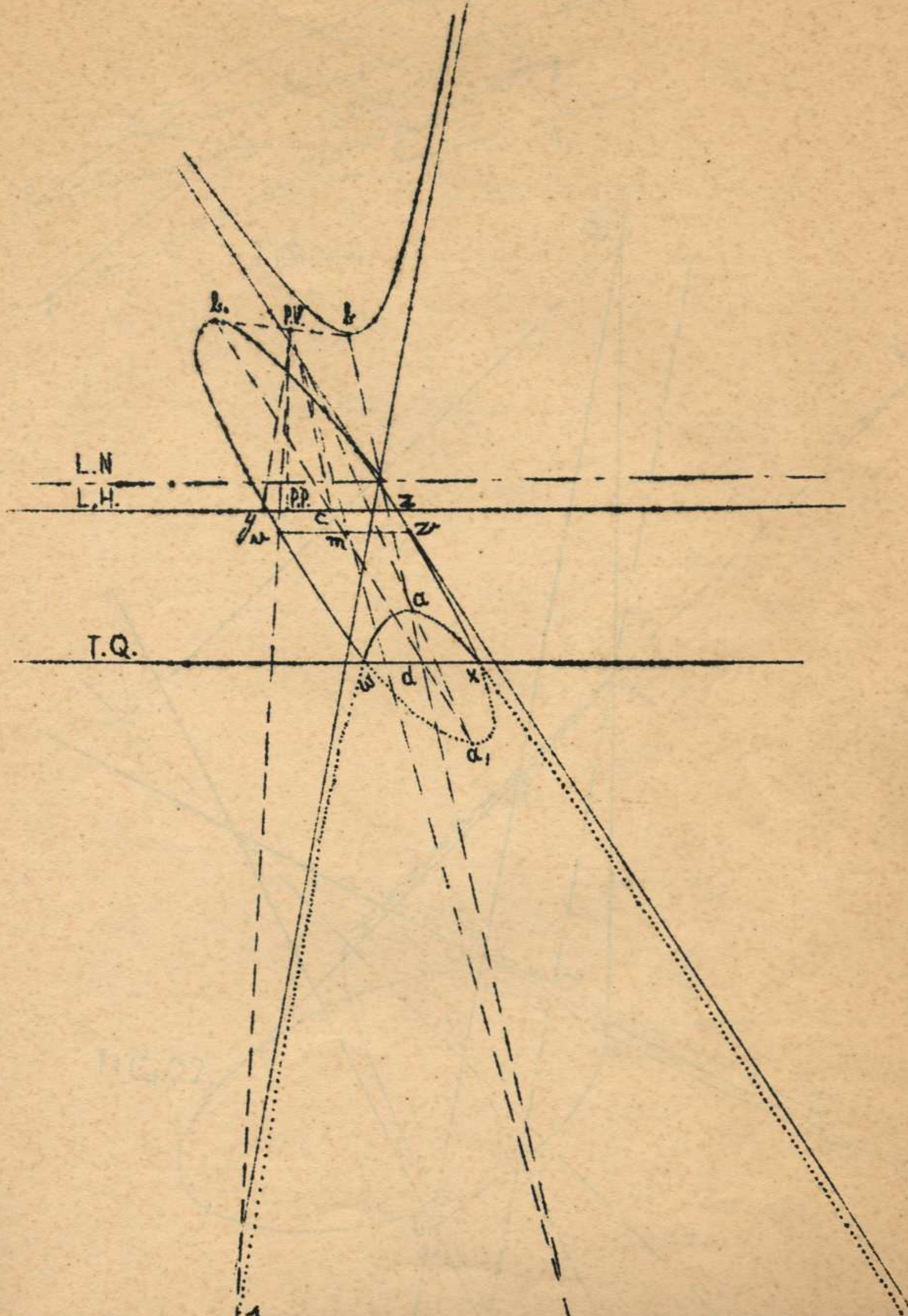
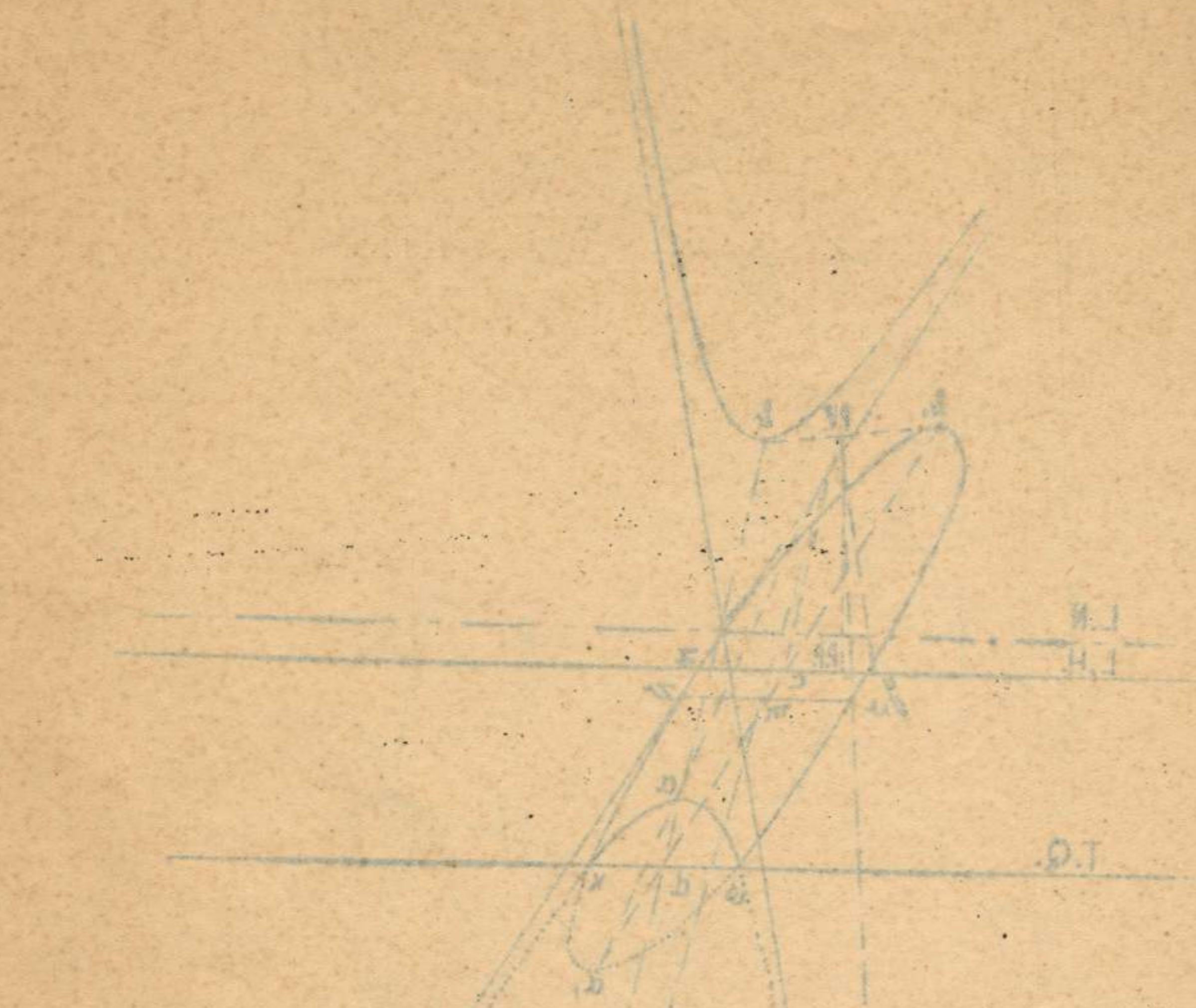


FIG.21.



L.N
L.H.
T.Q.
P.V.
P.P.
b
z
y
w
c
m
v
a
w
d
x
a,
s
o
t



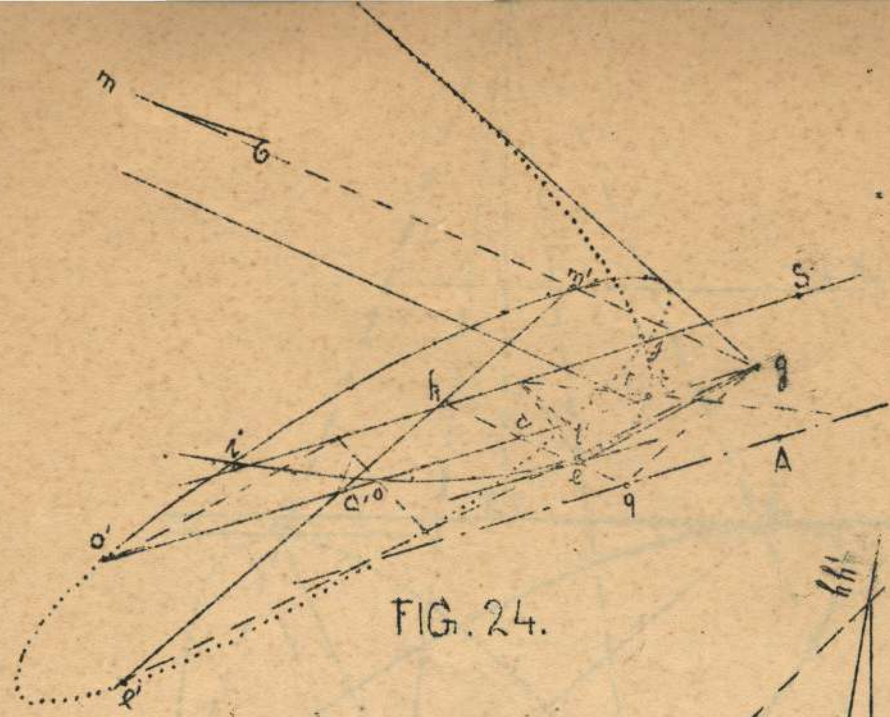


FIG. 24.

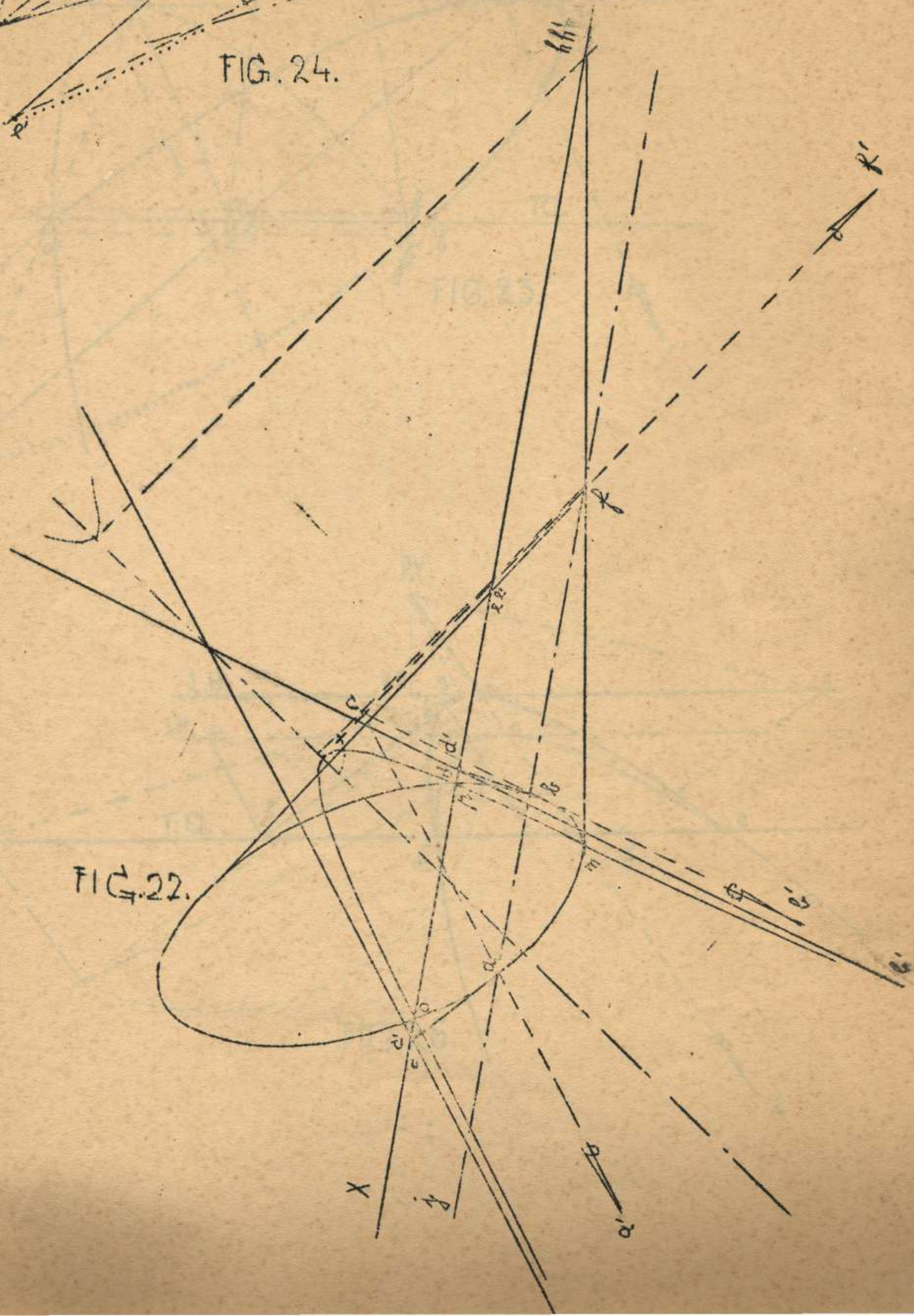


FIG. 22.

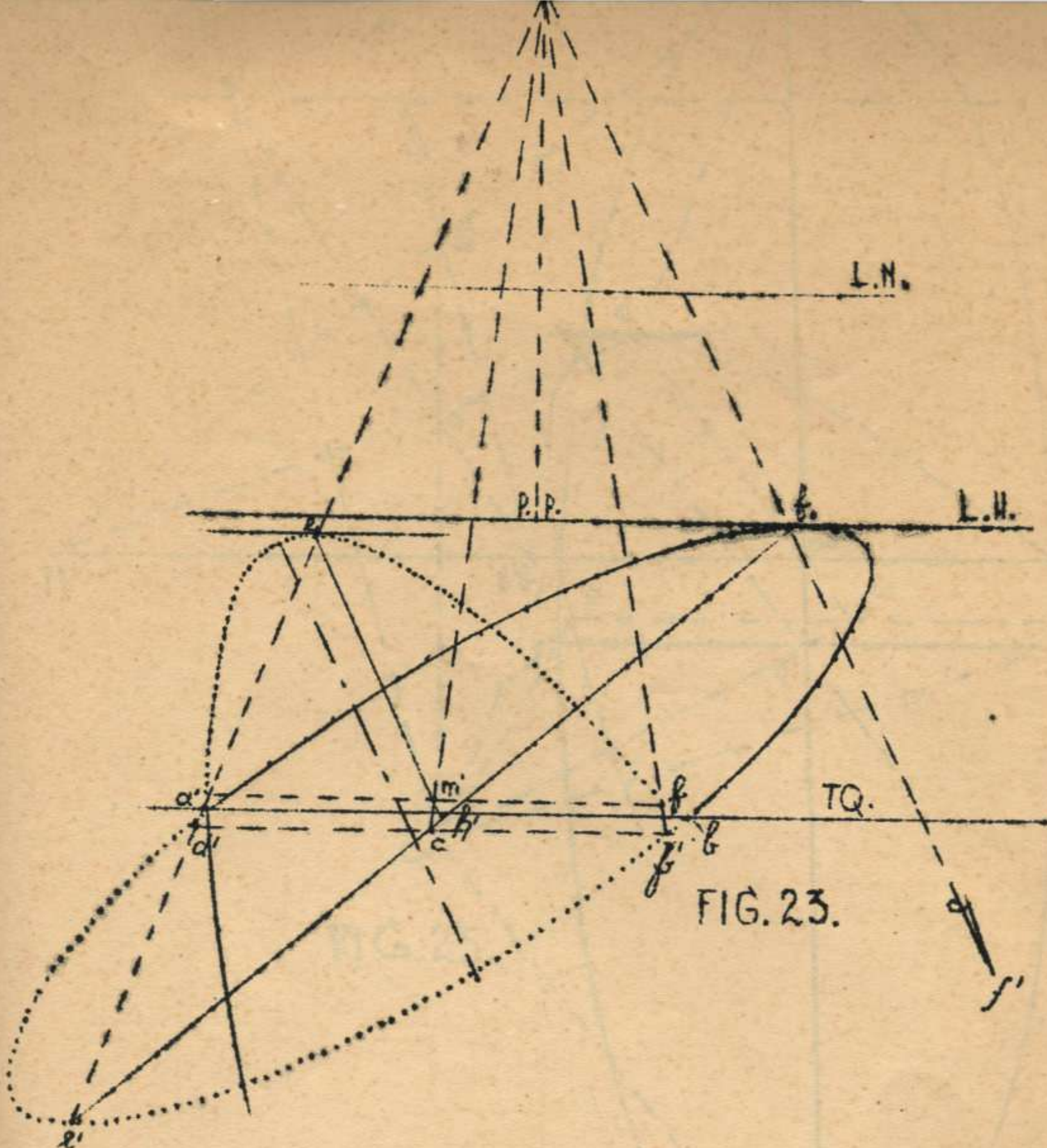


FIG. 23.

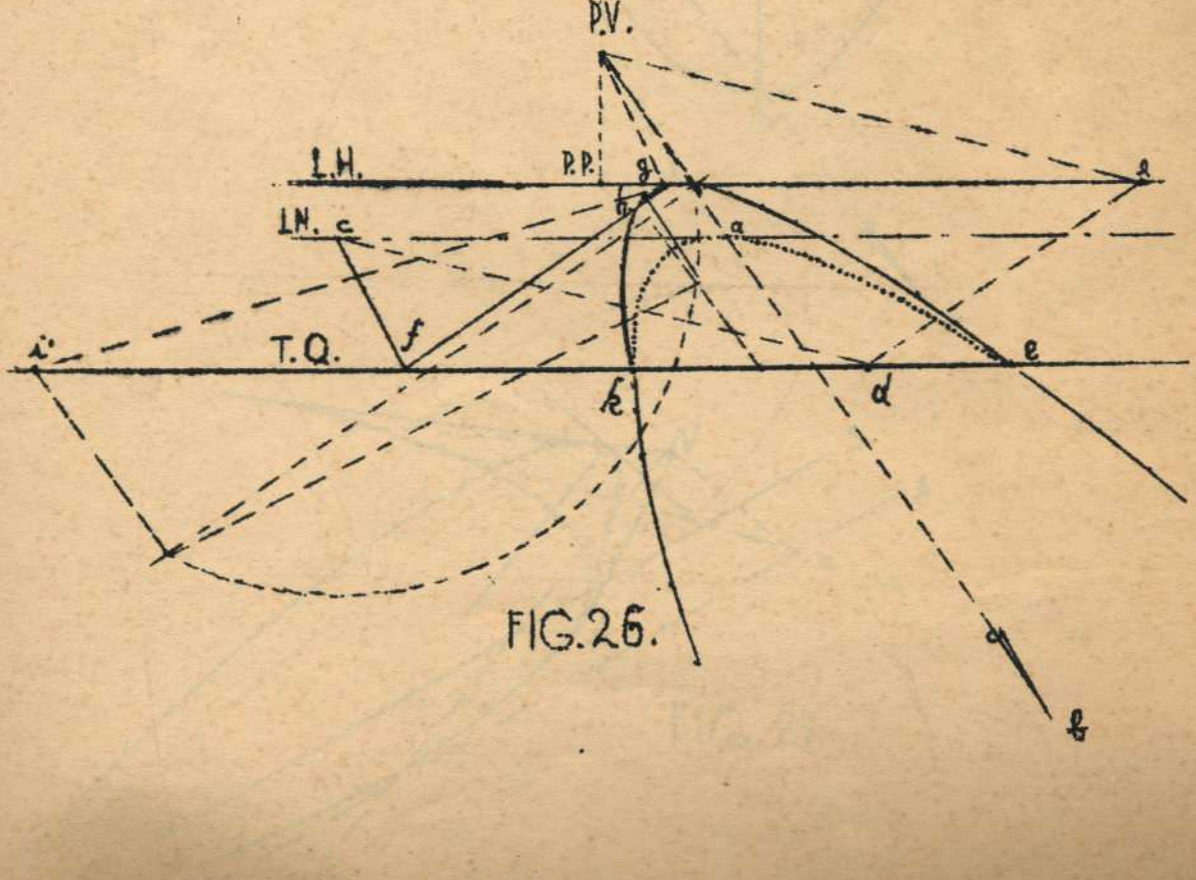


FIG. 26.

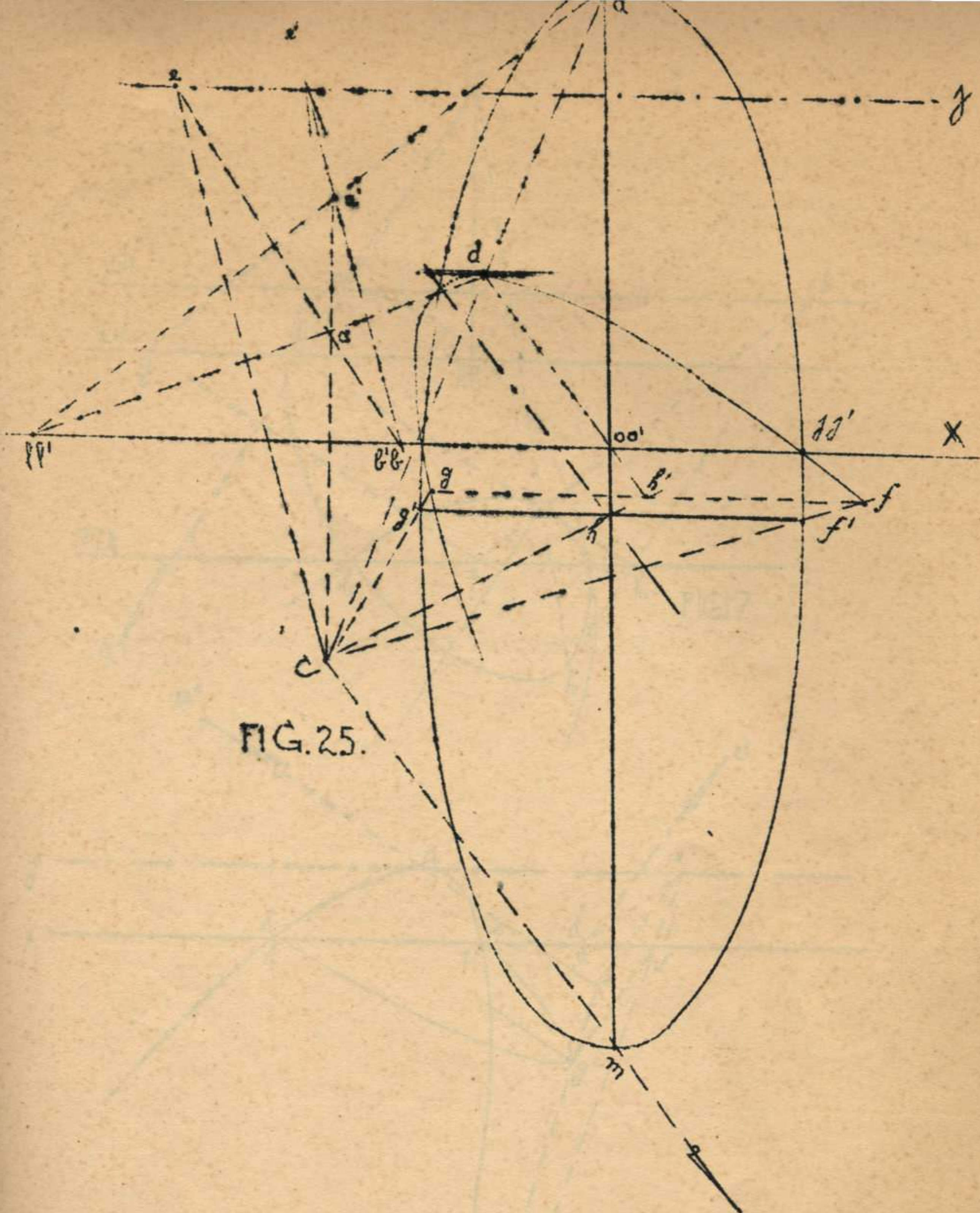


FIG. 25.

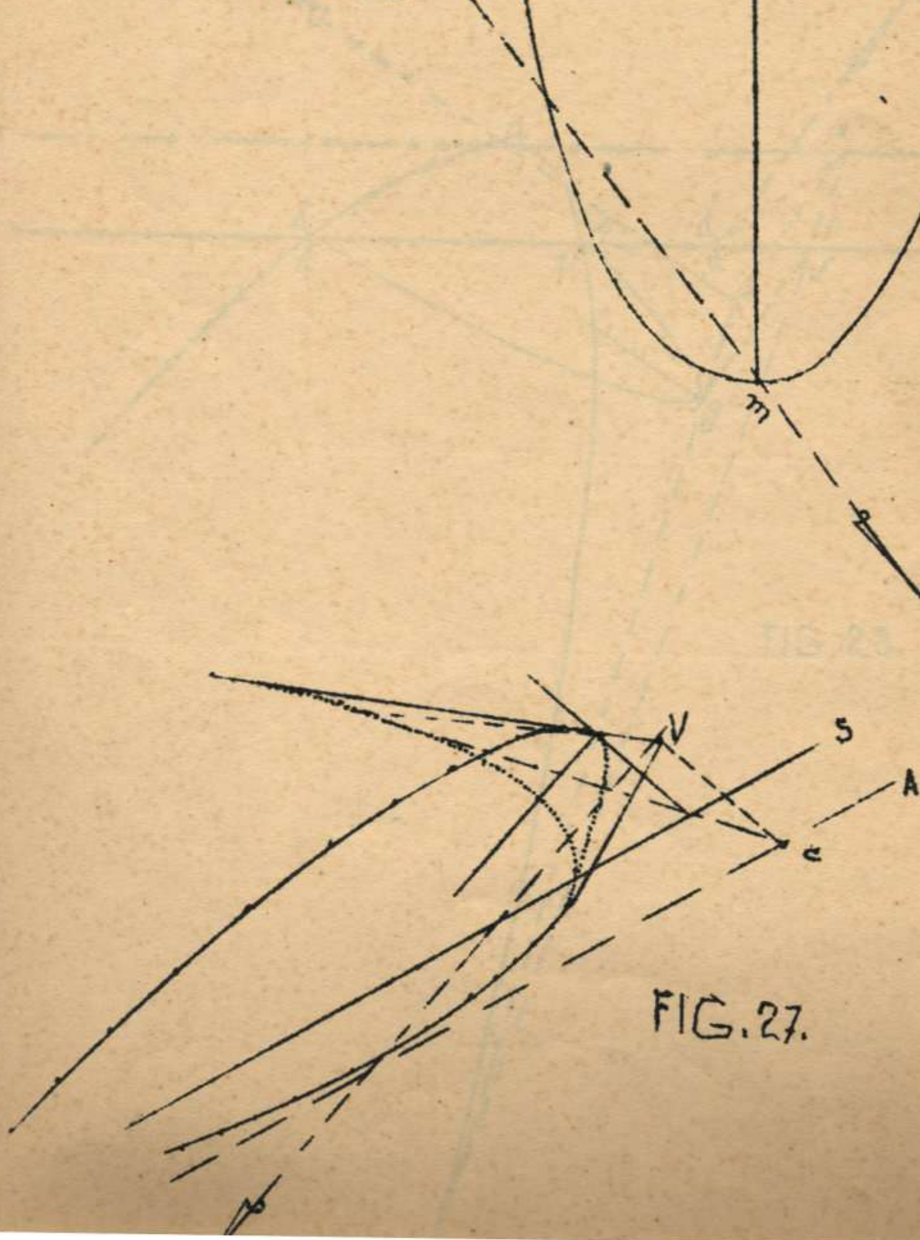


FIG. 27.

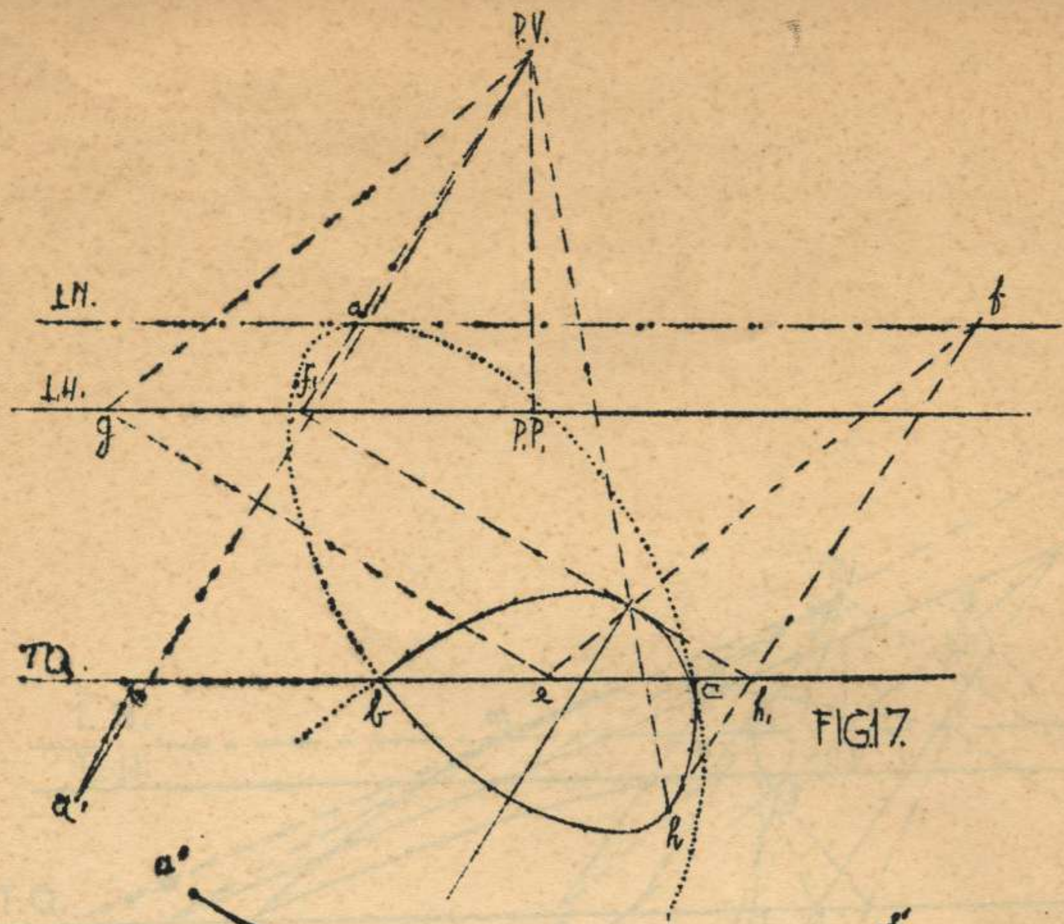


FIG.17.

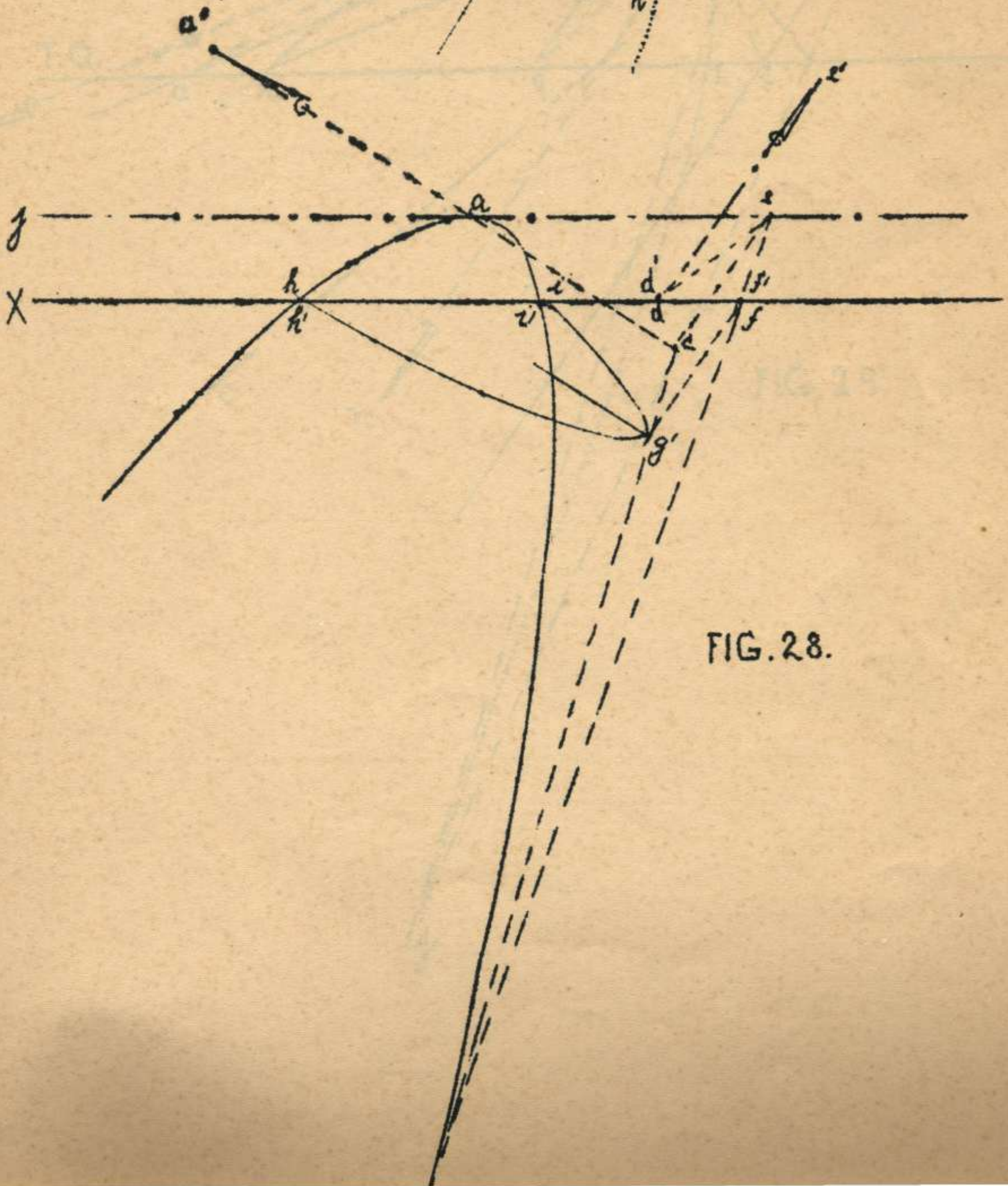


FIG.28.

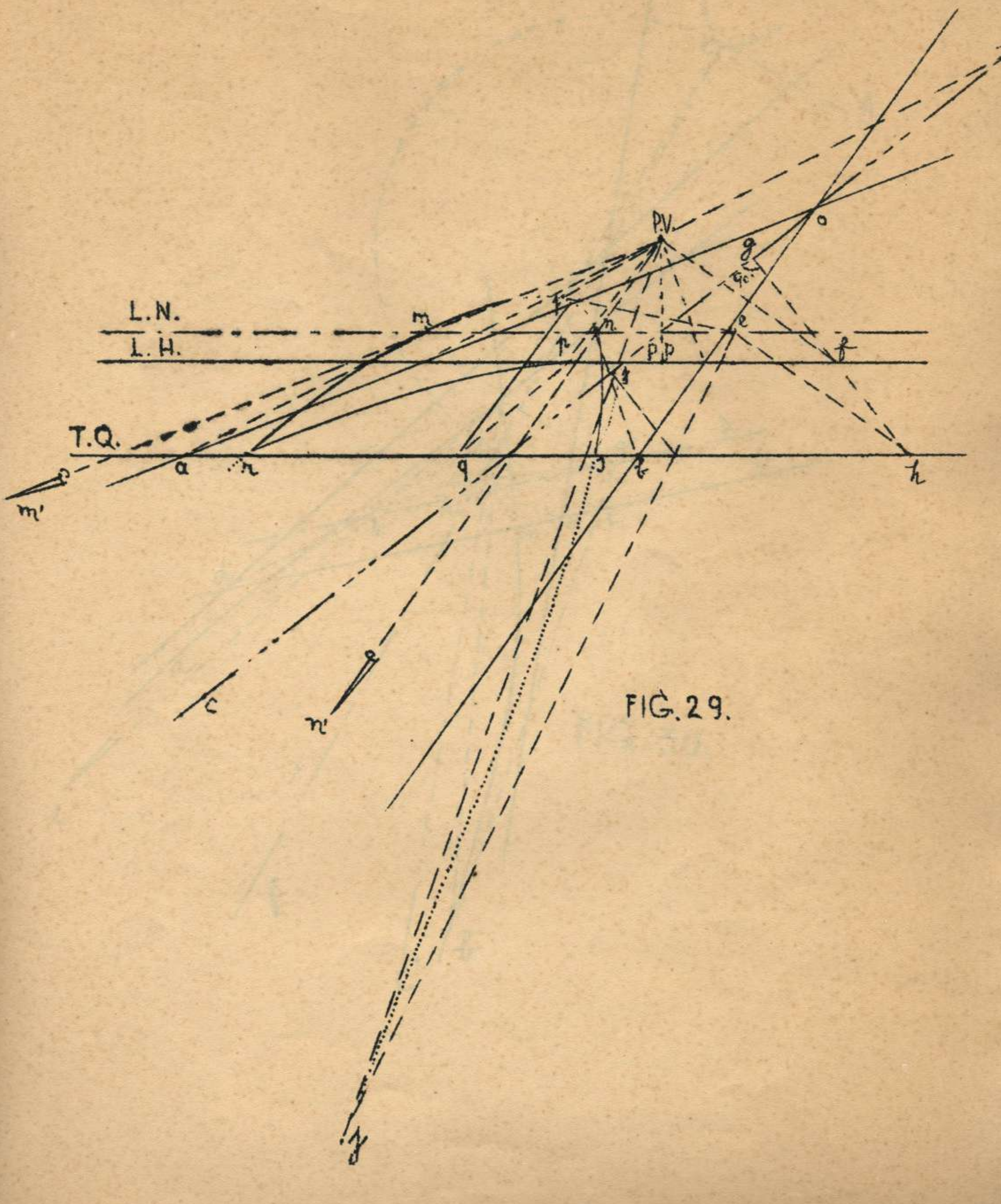


FIG. 29.

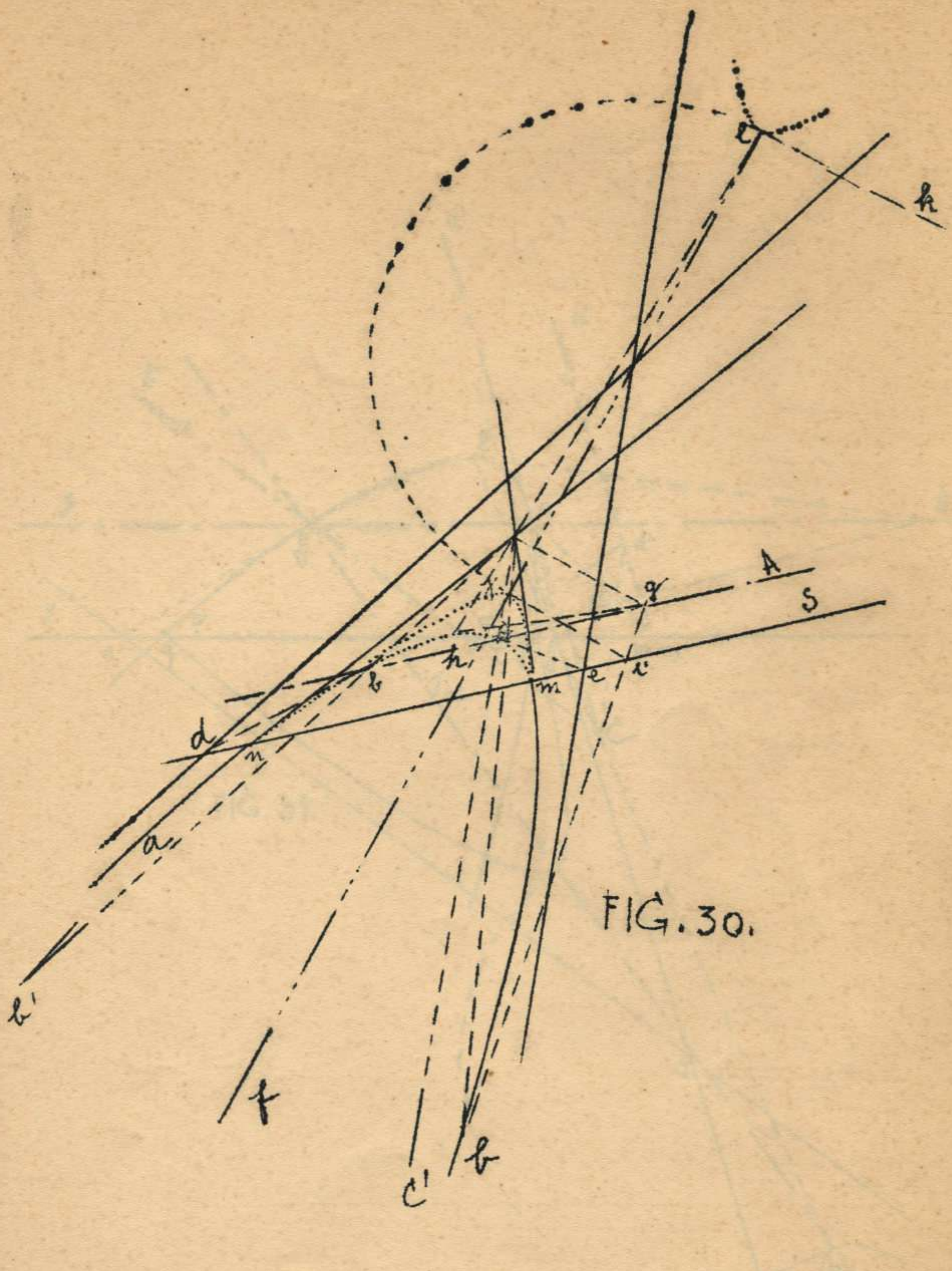


FIG. 30.

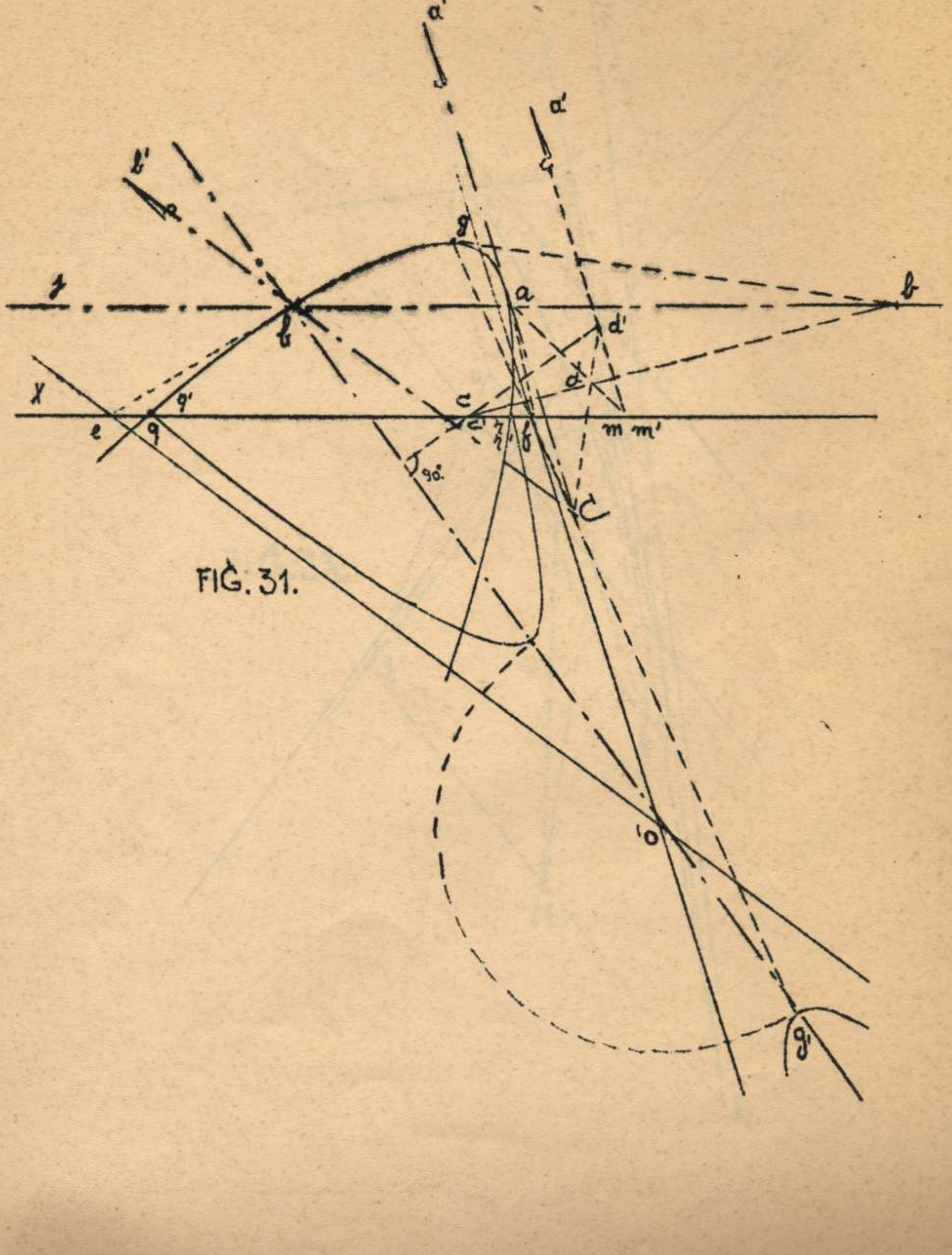


FIG. 31.

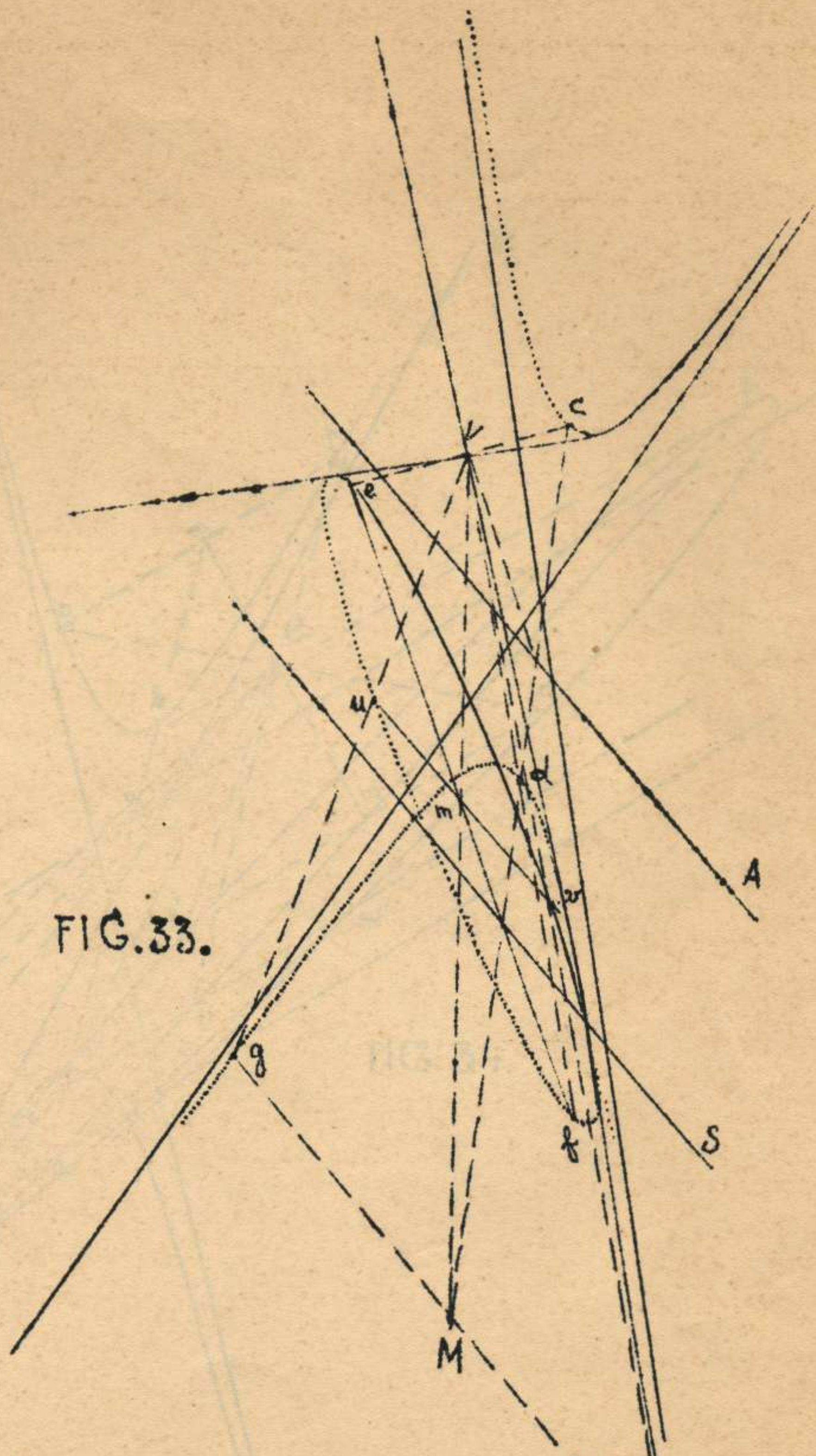


FIG. 33.

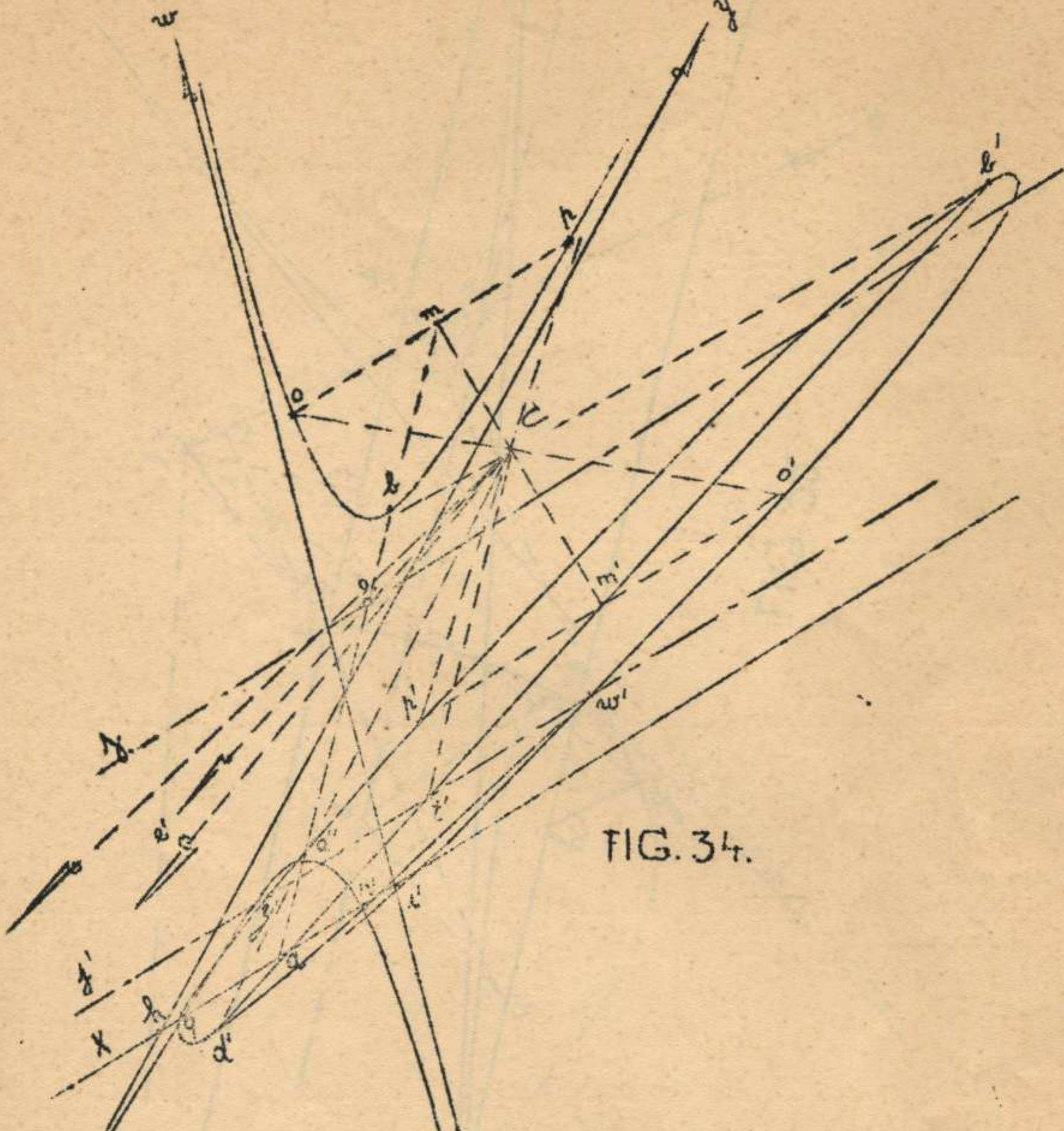


FIG. 34.

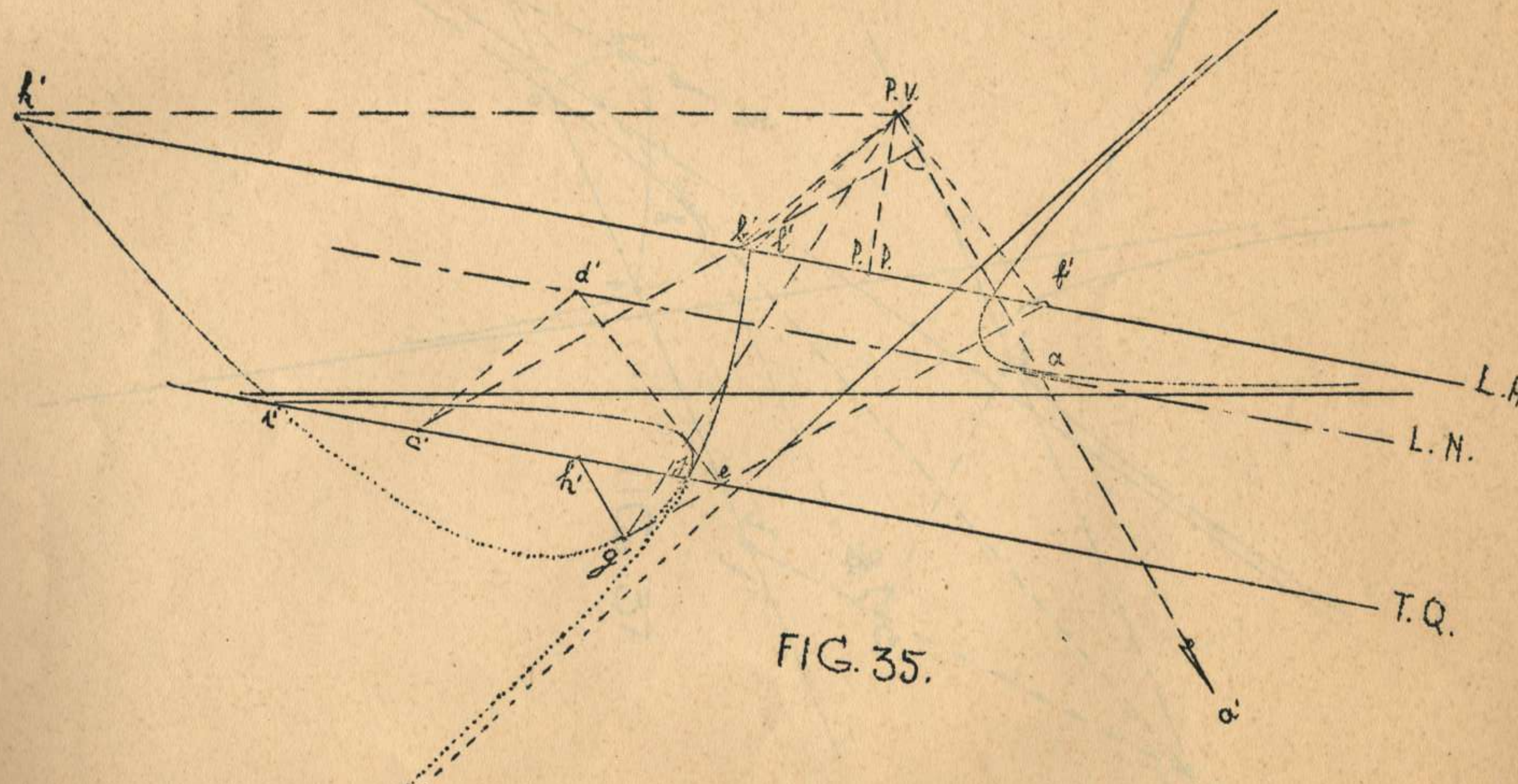


FIG. 35.

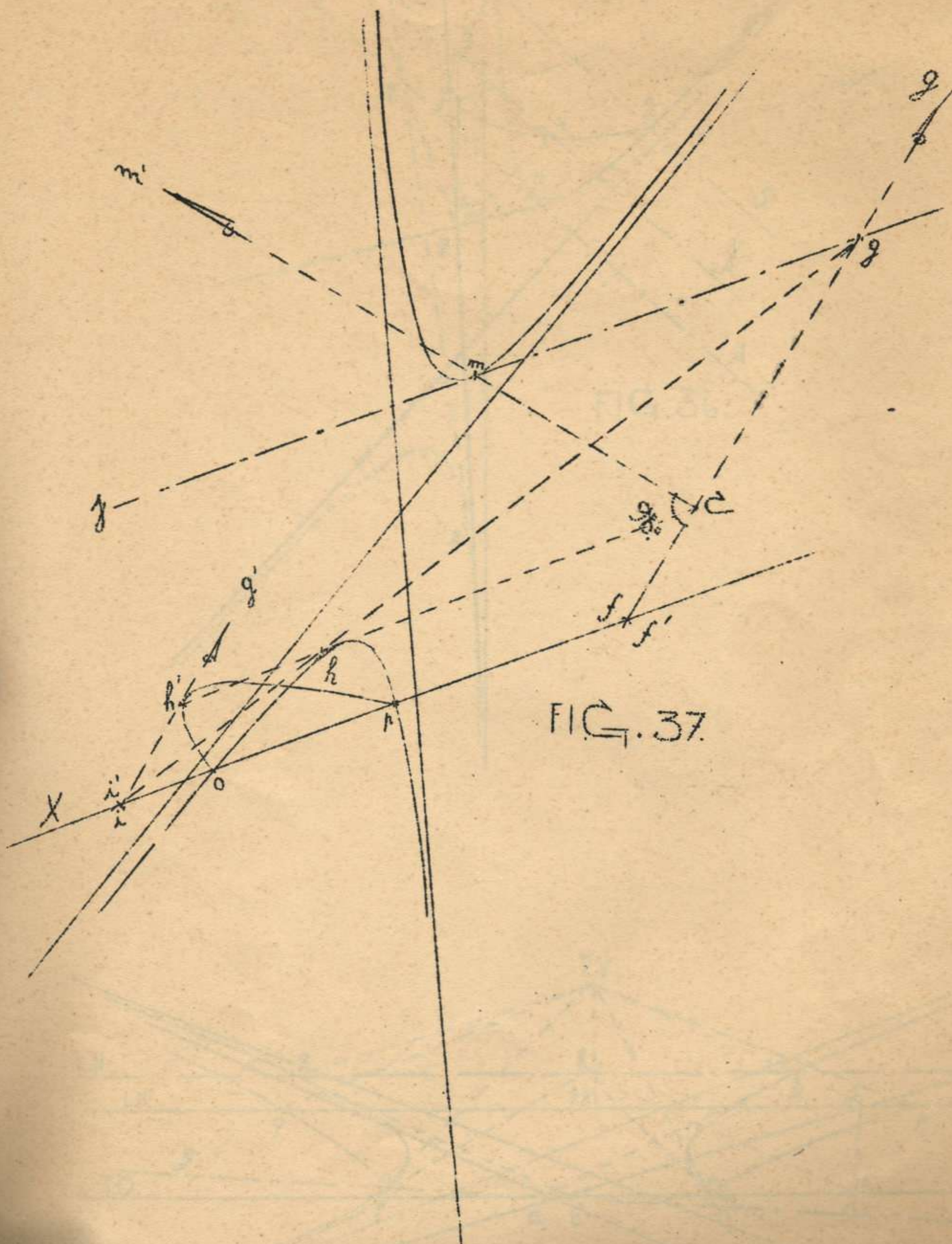


FIG. 37

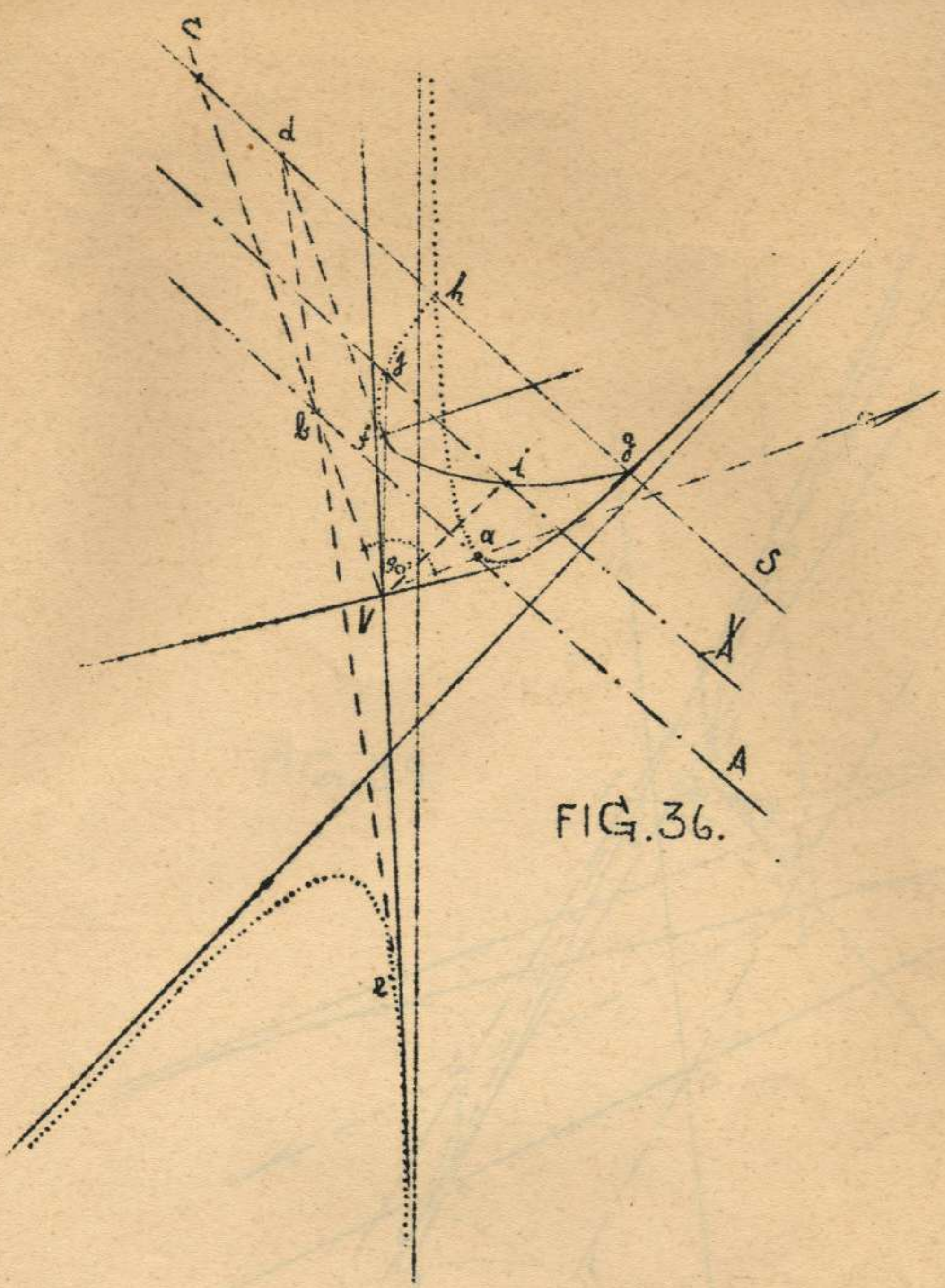
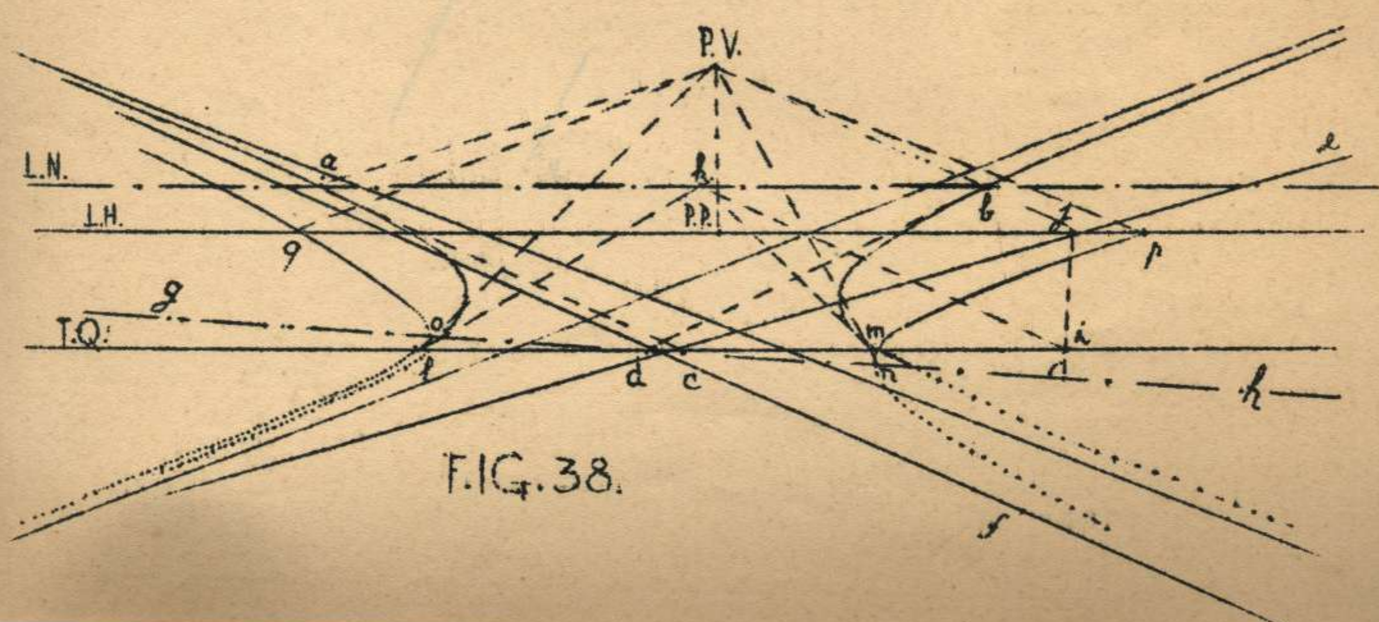
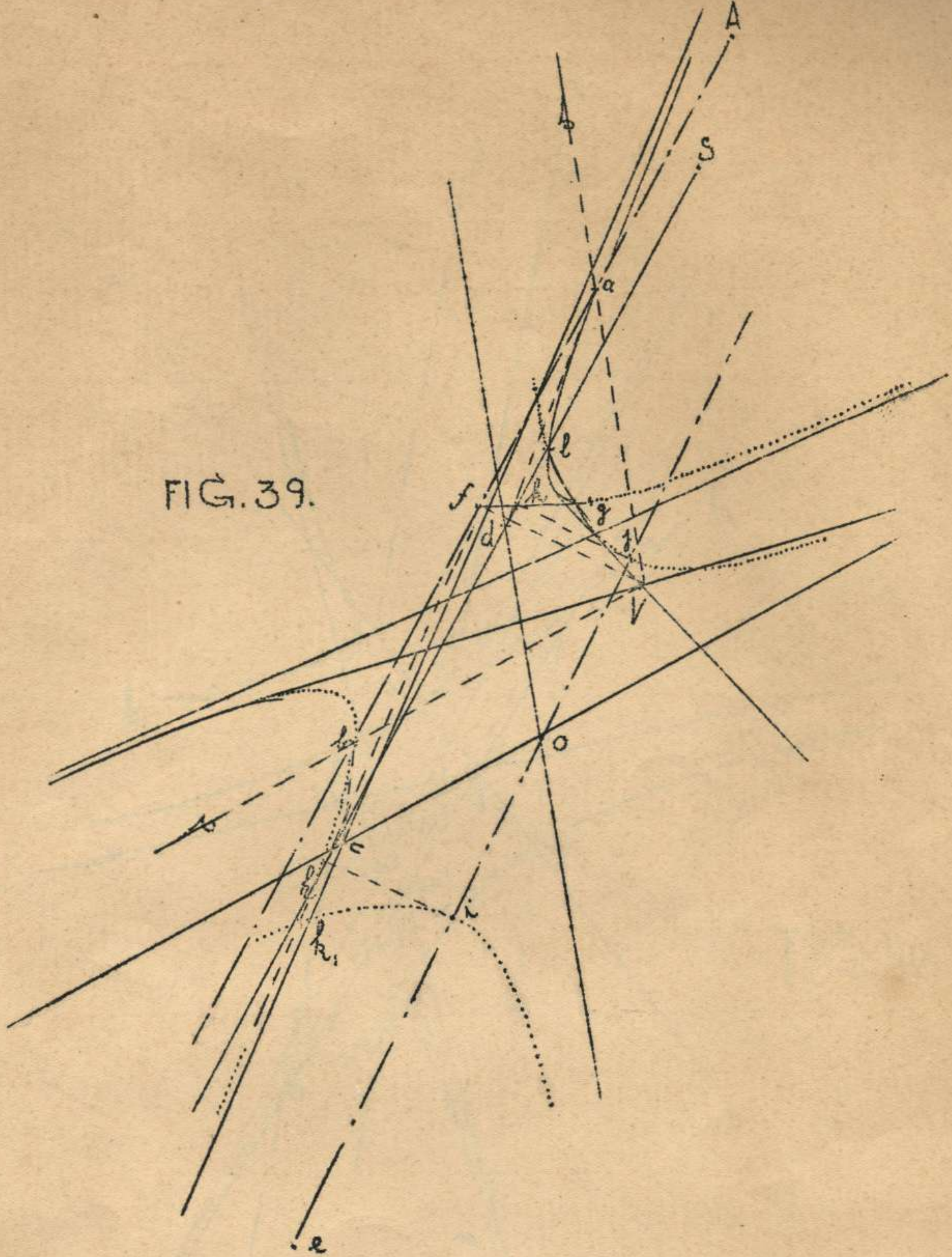


FIG. 36.



F.IG. 38.

FIG. 39.



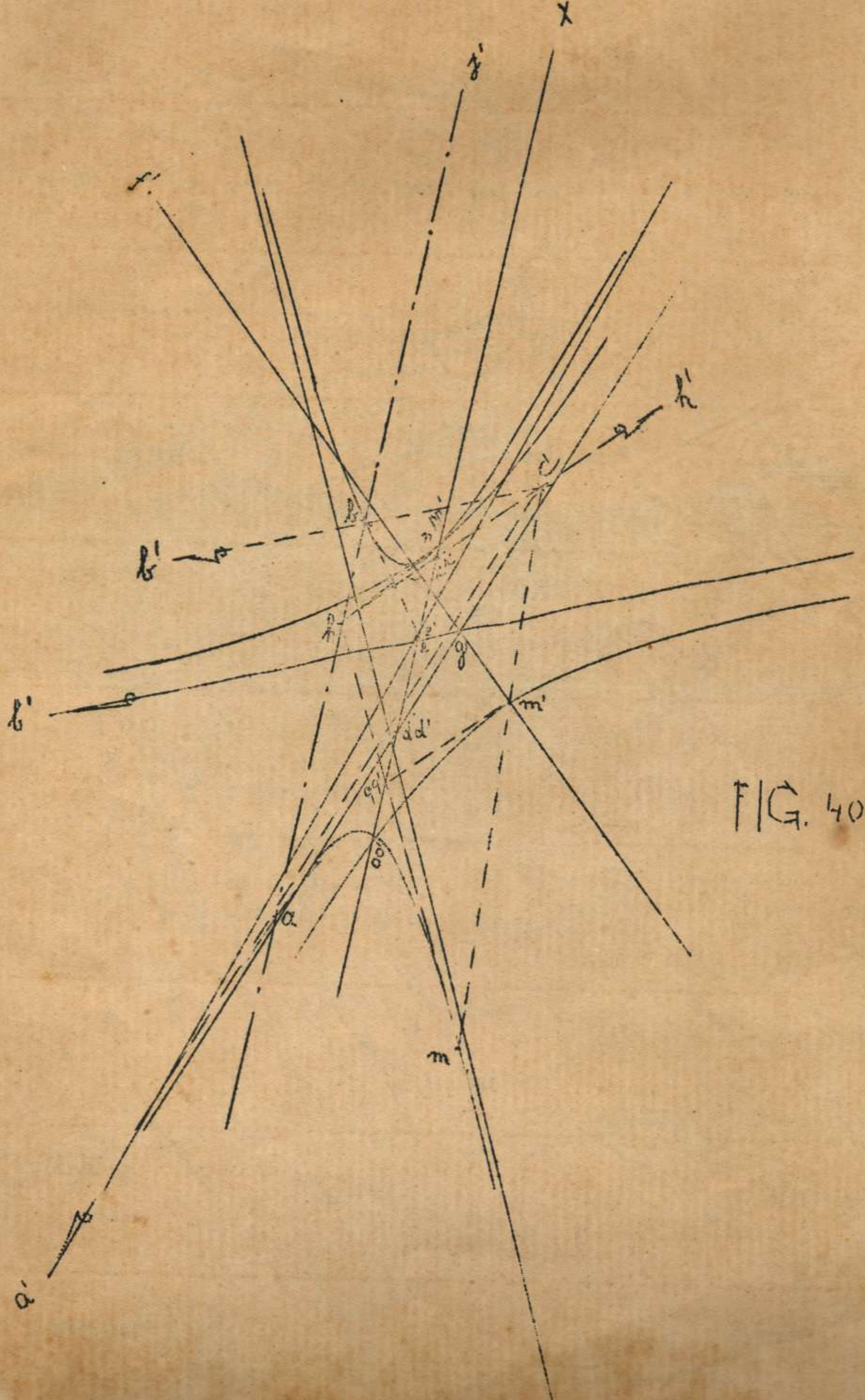
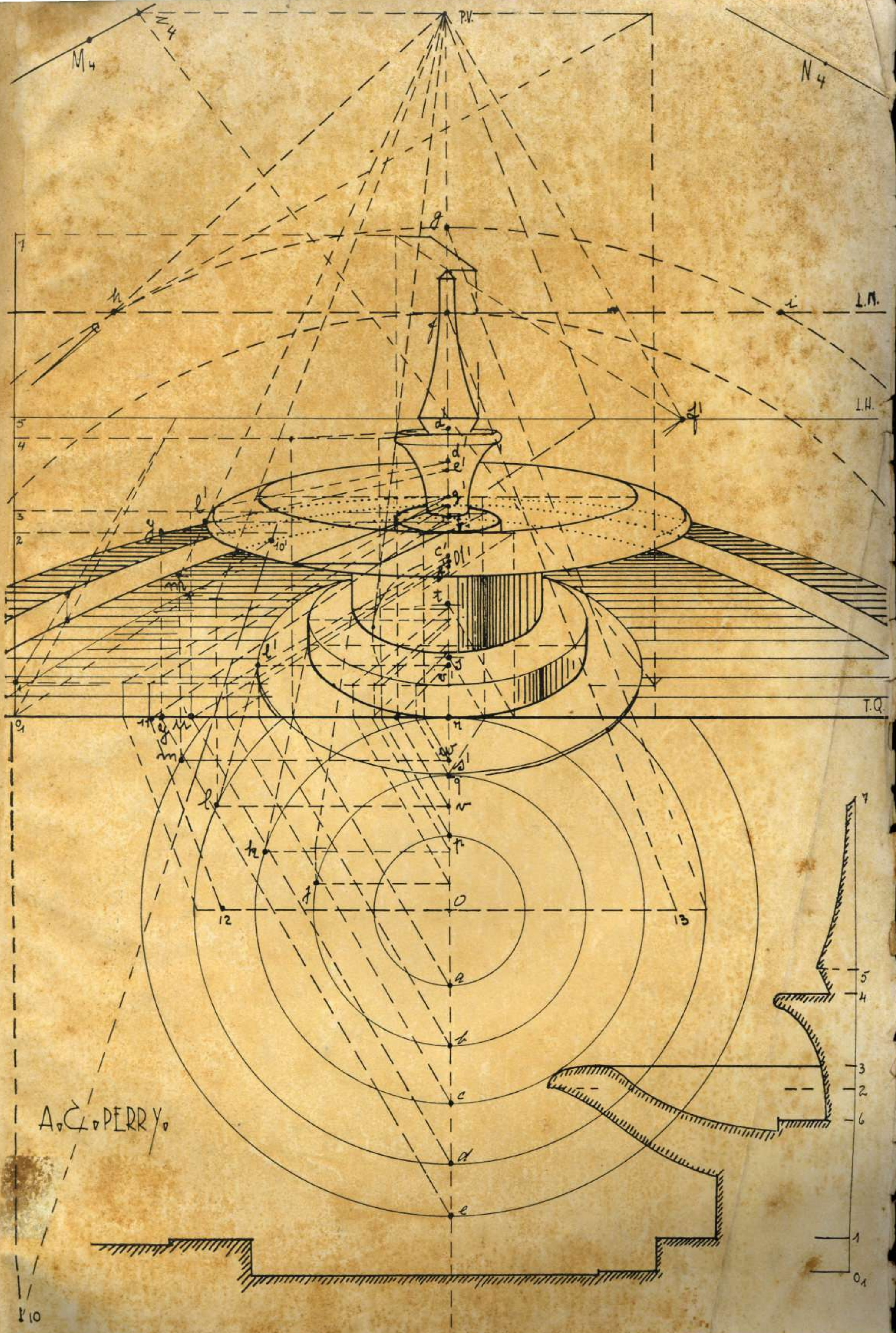


FIG. 40.


P.V.
M4
N4
L.M.
L.H.
T.Q.
12
13
A. C. PERRY.