Universidade Federal do Rio de Janeiro

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE DIFERENTES MODELOS DE CÁLCULO DE *VALUE AT RISK* PARA MEDIÇÃO DO RISCO DE UMA CARTEIRA DE RENDA FIXA

Breno Raemy Rangel Torres

Gustavo Amoras Souza Lima

2013

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE DIFERENTES MODELOS DE CÁLCULO DE *VALUE AT RISK* PARA MEDIÇÃO DO RISCO DE UMA CARTEIRA DE RENDA FIXA

Breno Raemy Rangel Torres

Gustavo Amoras Souza Lima

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia de Produção da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador: Régis da Rocha Motta, Ph. D.

Rio de Janeiro

Agosto de 2013

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE DIFERENTES MODELOS DE CÁLCULO DE *VALUE AT RISK* PARA MEDIÇÃO DO RISCO DE UMA CARTEIRA DE RENDA FIXA

Breno Raemy Rangel Torres

Gustavo Amoras Souza Lima

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO DE PRODUÇÃO.

Examinado por:

____

Prof. Régis da Rocha Motta, Ph. D.

____

Prof. Rosemarie Bröker Bone, D. Sc.

____

Prof. José Roberto Ribas, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Agosto de 2013

Torres, Breno Raemy Rangel

Lima, Gustavo Amoras Souza

Estudo comparativo entre diferentes modelos de cálculo de *Value At Risk* para medição do risco de uma carteira de renda fixa / Breno Raemy Rangel Torres e Gustavo Amoras Souza Lima – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2013.

XIII, 61 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Prof. Régis da Rocha Motta (Ph.D.)

Projeto de Graduação – UFRJ / Escola Politécnica / Curso de Engenharia de Produção, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 48-49.

1. Renda Fixa. 2. *U.S. Treasuries*. 3. Risco. 4. *Value at risk*.

I. da Rocha Motta, Régis II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica, Curso de Engenharia de Produção. III. Estudo comparativo entre diferentes modelos de cálculo de *Value At Risk* para medição do risco de uma carteira de renda fixa

Agradecimentos

Agradecemos em primeiro lugar às nossas famílias, que nos deus suporte em toda nossa formação, desde os tempos de maternal até a graduação.

Agradecemos à Helena de Almeida Tupinambá pelo seu empenho durante toda esta jornada.

Agradecemos também a todos os professores que fazem do curso uma referência nacional e que entregam aos seus alunos todo o arcabouço de conhecimento necessário a um grande profissional.

Agradecemos aos nossos colegas de faculdade que fizeram dessa jornada um período ainda mais prazeroso.

Por fim gostaríamos de agradecer a João Paulo de Aragon que nos ensinou que grandes desafios trazem grandes recompensas. Seu conhecimento agregou enorme valor não só à este trabalho mas aos autores do mesmo.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro de Produção.

ESTUDO COMPARATIVO ENTRE DIFERENTES MODELOS DE CÁLCULO DE *VALUE AT RISK* PARA MEDIÇÃO DO RISCO DE UMA CARTEIRA DE RENDA FIXA

Breno Raemy Rangel Torres

Gustavo Amoras Souza Lima

Agosto/2013

Orientador: Régis da Rocha Motta, Ph. D.

Curso: Engenharia de Produção

O trabalho a seguir apresenta um estudo comparativo entre três diferentes modelos para cálculo de *Value at Risk* (VaR): Paramétrico, Simulação Histórica e Simulação de Monte Carlo. Tal estudo foi desenvolvido a partir de uma carteira de renda fixa composta por títulos públicos do governo federal norte americano (*U.S. Treasuries*).

Primeiramente, apresentamos uma revisão da literatura de assuntos ligados tanto à renda fixa quanto à avaliação do risco de instrumentos financeiros. Esta revisão traz a base do conhecimento aplicado no estudo de caso.

No estudo de caso, por sua vez, mostramos todos os passos necessários para obter o VaR com 95% de confiança em uma janela de um dia para os três modelos apresentados. Os resultados obtidos foram submetidos a um teste de avaliação conhecido como *backtesting*. Por fim, trazemos as últimas considerações, que revelam que os três modelos resultaram em valores precisos, apesar do método de Simulação de Monte Carlo ser superior aos demais dada a flexibilidade disponível para alterar seus parâmetros.

Palavras-chave: Renda fixa, *U.S. Treasuries*, Risco e *Value at risk*.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

COMPARATIVE STUDY OF DIFFERENT MODELS FOR CALCULATING VALUE AT RISK FOR MEASURING THE RISK OF A FIXED INCOME PORTFOLIO

Breno Raemy Rangel Torres

Gustavo Amoras Souza Lima

August/2013

Advisor: Régis da Rocha Motta, Ph. D.

Course: Industrial Engineering

In this work, we present a comparative study of three different models for calculating Value at Risk (VaR): Parametrical, Historical Simulation and Monte Carlo Simulation. This study was developed for a fixed income portfolio comprising United States Treasury securities.

First, we perform a literature review of some main concepts related to fixed income and financial risk. This revision brings the necessary knowledge to develop the case study.

In the case study, we show all the steps required to get the 95% confidence VaR for a one-day window for the three models presented. The results were subjected to an assessment test known as backtesting. Finally, we bring the closing remarks that shows that the three models resulted in accurate values, although the method of Monte Carlo simulation can be considered superior to the other two due to the flexibility to change its parameters.

Key words: Fixed income, U.S. Treasuries, Risk and Value at risk.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

1. Introdução

1.1 *Apresentação do Tema*

A Gestão de Risco, no contexto financeiro, se tornou uma das discussões mais importantes da atualidade, depois que se verificou o grande estrago econômico causado por más dimensões de risco.

Dentre algumas crises financeiras recentes, ficaram mais conhecidas:

- A crise asiática de 1997, causa por acentuada desvalorização cambial de alguns países asiáticos;
- A crise da internet em 2001, quando a bolha de empresas do ramo da internet teve seu colapso;
- A crise de 2008, oriunda de uma crise imobiliária nos Estados Unidos.

Para tentar evitar que estas voltassem a se repetir, foram criadas novas ferramentas de gestão de risco, assim como as já existentes foram aprimoradas. Atualmente, uma das mais difundidas é o *Value at Risk* (VaR), oriunda de conceitos de estatística aplicados à finanças.

Sendo assim, esse trabalho apresentará um caso prático da aplicação da metodologia VaR e discutirá o resultado com foco na melhor adequação à previsão de risco.

1.2 *Objetivos do Trabalho*

O presente trabalho tem como principal objetivo comparar três métodos de cálculo do VaR: o VaR paramétrico, o VaR por simulação histórica e, por último, a simulação estocástica de Monte Carlo. A avaliação do risco será feita sobre uma carteira real de renda fixa, mais especificamente títulos pré-fixados do governo federal dos Estados Unidos (*U.S. Treasuries*).

Para que tal objetivo seja atendido, cumprimos objetivos secundários de rever importantes conceitos relacionados à renda fixa, como a precificação de títulos, *duration* modificada e convexidade.

Após a apresentação do estudo de caso, demonstramos as conclusões sobre qual seria o modelo mais adequado para o cálculo do risco da carteira.

1.3 *Metodologia da Pesquisa*

A pesquisa bibliográfica será importante no embasamento teórico do caso prático. De forma geral, a base bibliográfica é composta por artigos científicos que trazem casos envolvendo renda fixa e risco no mercado financeiro. Além disso, livros de importantes autores da área também foram comumente referenciados.

Será feito também um estudo prático que mostrará como o mercado (empresas, bancos e fundos de investimento) utiliza os conceitos teóricos apresentados.

2. Revisão da Literatura

2.1 *Renda Fixa*

2.1.1 Conceitos Gerais

Renda fixa é o termo que se refere a todo ativo e/ou investimento que possui remuneração paga em intervalos e condições pré-definidos. A remuneração, no entanto, pode ser tanto fixa – em ativos com taxas pré-fixadas – como variável – em ativos com taxas pós-fixadas (FABOZZI; MANN, 2012).

O investimento em renda fixa pode ser entendido como um empréstimo. O investidor compra um título fornecendo dinheiro ao emissor do papel (um governo ou uma empresa, em geral) que em troca o pagará juros até o resgate do título. Os juros são pagos por cupons.

A avaliação desses títulos é feita a partir do cálculo do fluxo de caixa prometido ao investidor, descontada a uma taxa que exprime o risco do investidor, que podem advir de (ALEXANDRE ASSAF NETO, 2011):

- Oscilações nas taxas de juros de mercado;
- Inadimplência do emitente;
- Liquidez do mercado;
- Oportunidades de reinvestimento dos fluxos de caixa recebidos pelo investidor.

2.1.2 Valor de Face, Vencimento, Cupom e *Yield to Maturity* (YTM)

Algumas das principais características de um título são seu valor de face, sua data de vencimento, seus cupons e sua *yield to maturity* (FABOZZI; MANN, 2012):

- O valor de face, nominal ou principal representa a quantia de dinheiro a ser paga pelo emissor do título no fim do acordo entre as partes. Apesar do preço do título oscilar, de acordo com a variação da taxa de juros do mercado, o valor de face é sempre constante.
- O vencimento é a data na qual o montante principal será paga pelo emissor. O prazo de vencimento do título é muitas vezes usado para classificá-lo como de curto, médio ou longo prazo.

- O cupom é a taxa de juros que o emissor paga ao proprietário. Normalmente é fixo durante toda a vida do título.
- A YTM é o rendimento efetivo dos títulos de renda fixa até o seu vencimento, levando em consideração as taxas correntes de mercado.

2.1.3 Precificação de um Título

Para determinarmos o valor de um título precisamos saber:

- O número de períodos até o vencimento (em geral, em meses);
- O valor de face;
- O cupom;
- A YTM.

Sendo assim, o cálculo deve ser feito dessa forma:

$$PU = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t} + \frac{VN}{(1+i)^t} \quad (1)$$

Onde:

- PU = preço unitário do título;
- C = valor do cupom;
- VN = valor nominal;
- i = taxa de desconto ou YTM.

2.1.4 Zero Coupon Bond

Quando o título não prevê nenhum pagamento de cupom até seu vencimento, ele é chamado de *zero coupon bond*.

Em substituição aos cupons de rendimento, o que se faz, geralmente, é negociar o título com um deságio, ou seja, por um preço inferior ao seu valor de face.

Assim, tem-se:

$$VT_{ZC} = \frac{VN}{(1+i)^n} \quad (2)$$

Onde:

- i = taxa de desconto ou YTM;
- n = prazo até o vencimento;
- VT_{ZC} = valor do título z*ero coupon;*
- VN = valor nominal.

2.1.5 *Duration* de Macaulay e *Duration* Modificada

Duration de Macaulay (ou somente *duration*) é o prazo que transforma a duração efetiva do fluxo de caixa de um título com parcelas de rendimentos intermediários no equivalente à opção de resgatar o investimento por meio de um único pagamento.

Nada mais é, portanto, que a média ponderada dos recebimentos do fluxo de caixa pago pelo título, onde os pesos são os períodos que cada pagamento é feito, e esses pagamentos estão trazidos a valor presente pela taxa de desconto considerada para o título.

A fórmula da *duration* é dada a seguir (MACAULAY, 1938):

$$Duration = \sum_{t=1}^{T} \frac{C_t / (1+y)^t}{P} \times t \tag{3}$$

Onde:

- t = prazo até o vencimento;
- C_t = fluxo no tempo t;
- y = y*ield to maturity*;
- P = preço de mercado do título.

Dessa forma, as aplicações da *duration* são as seguintes (FABOZZI; MANN, 2012):

- Gestão de risco de um título: quanto maior for a *duration*, mais o ativo estará exposto a volatilidade, podendo ter seu valor apreciado ou depreciado, em função dos choques nas taxas de juros. Comparando-se, por exemplo, dois títulos com o mesmo valor de mercado, o de menor *duration* estará exposto a uma menor probabilidade de perdas.
- Gestão de fluxo de caixa: na gestão de uma de carteira existe a necessidade de se garantir no futuro fluxos de entradas, geradas pela carteira de investimentos e

contribuições, em níveis compatíveis com os dos pagamentos aos seus associados ou pensionistas. O conhecimento da *duration* da carteira (ativo) e da *duration* das obrigações (passivo) podem auxiliar neste planejamento do caixa futuro, assim como na gestão dos riscos decorrentes das flutuações de taxas que impactam diretamente no valor dos ativos.

- Gestão de *gaps*: o descompasso entre as *durations* de ativos e dos passivos poderá acarretar também sérios danos nas posições financeiras e na situação patrimonial de empresas e de bancos. Tendo-se o conhecimento e controle das *durations* pode-se planejar a gestão dos ativos e passivos, através da troca ou cessão de posições ativas, alongando ou encurtando-se o perfil dos passivos etc.

Outro importante conceito é o da *duration* modificada. Como visto, a *duration* de Macaulay representa o tempo médio ponderado em que os fluxos de caixa são recebidos e é medido em anos. A *duration* modificada, por sua vez, é o nome dado à sensibilidade do preço e é a variação percentual no preço de uma unidade de variação na taxa de desconto. A fórmula a seguir representa o cálculo da *duration* modificada (HULL, 2006):

$$D = -\frac{1}{P} \times \frac{\Delta P}{\Delta y} \tag{4}$$

Onde:

- D = *duration* modificada;
- y = *yield to maturity;*
- P = preço de mercado do título.

Matematicamente, esta expressão corresponde à primeira derivada do preço em relação à taxa de juros.

Quando os rendimentos são continuamente compostos, a *duration* de Macaulay e a *duration* modificada são numericamente iguais. Entretanto, quando os rendimentos são periódicos, as ambas são ligeiramente diferentes e existe uma relação simples entre elas (HULL, 2006):

$$D = \frac{1}{(1+y)} MD \tag{5}$$

Sendo:

- D = *duration* de Macaulay;
- y = taxa de juros;
- MD = *duration* modificada.

No entanto, a principal crítica feita à utilização da *duration* é o fato de ter um comportamento linear, sendo que a variação das taxas de juros não é linear. Neste sentido, a *duration* é uma boa aproximação para descrever as mudanças no preço de um título somente quando a variação verificada for baixa. Para computar efeitos de segunda ordem, recorremos ao conceito de convexidade apresentado a seguir.

2.1.6 Convexidade

A relação verdadeira entre o preço de um título e a taxa de juros não é linear. O gráfico abaixo mostra a estimativa de relação feita pelo cálculo da *duration* e a real relação (convexa) entre o preço de um título (*bond*) e a taxa de juros (*yield*):

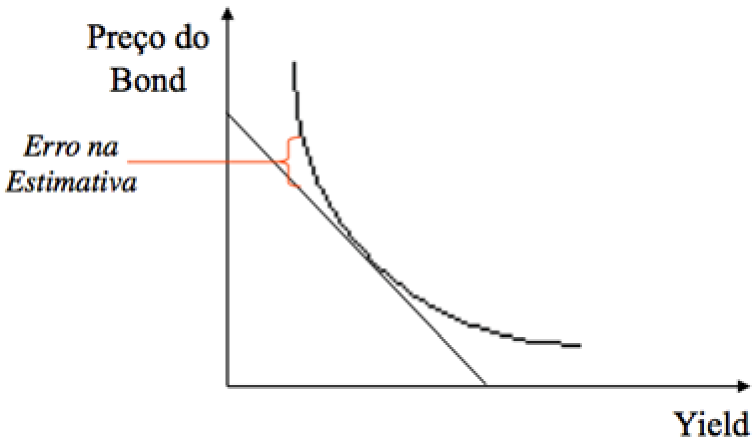

Figura 1 - Duration x convexidade

Fonte: Elaboração própria dos autores

Desta forma, a convexidade nada mais é do que a derivada primeira da *duration* modificada ou, então, a derivada segunda do preço do título em relação à taxa de juros. É calculada através da seguinte fórmula (FABOZZI; MANN, 2012):

$$CV = \frac{1}{P} \times \frac{\Delta^2 P}{(\Delta y)^2} \tag{6}$$

Onde:

- CV = convexidade;
- P = preço do título;
- y = taxa de juros.

Outra maneira de visualizar a convexidade é por meio de (FABOZZI; MANN, 2012):

$$CV = \frac{1}{P} \times \frac{\Delta^2 P}{(\Delta y)^2} = \frac{1}{(1+y)^2} \times \sum_{t=1}^{T} t \times (t+1) \times \frac{C_t / (1+y)^t}{P} \tag{7}$$

Na fórmula acima, temos:

- CV = convexidade;
- t = prazo até o vencimento;
- C_t = fluxo no tempo t;
- y = *yield to maturity*;
- P = preço de mercado do título.

2.1.7 *Delta Value for One Basis Point* (DV-01)

O DV-01 é muitas vezes apontada como a forma mais conveniente e amplamente utilizada de se mensurar o risco de mercado dos ativos de renda fixa. A medida traz em valores absolutos (quantia de dinheiro) quanto que o valor de mercado de um título se altera (ΔP) quando da oscilação de um *basis point* (0,01%) na taxa de juros (FABOZZI; MANN, 2012).

Dessa forma, títulos com DV-01 maiores, possuem maior volatilidade, e por consequência, maior risco.

2.2 *Value at Risk (VaR)*

2.2.1 Conceitos Gerais

- **Risco:**

Risco é a probabilidade de experimentar resultados diferentes do que se espera. No contexto financeiro, essa probabilidade é expressa pela possível perda de dinheiro devido à uma exposição ao mercado (PHILIPPE JORION, 2012).

Em geral pode-se dividir risco em diversas razões/origens (ASSAF NETO, 2011):

Assimetria de informações: é verificada quando os agentes que participam de uma transação possuem níveis de conhecimento diferentes sobre a mesma. Em toda transação financeira existe essa falha, que impede que os preços de mercado sejam formados de maneira mais eficiente.

Riscos Financeiros: os riscos financeiros são expressos por variação de taxas de juros, risco de crédito, risco de mercado, risco operacional, risco de câmbio, risco soberano, risco de liquidez e risco legal. Merece atenção especial o risco de mercado, que está relacionado com o preço que o mercado estipula para ativos e passivos negociados pelos intermediários financeiros, ou seja, com o comportamento verificado no preço de um bem no dia a dia. Este risco exprime quanto pode ser ganho ou perdido quando da aplicação em contratos e outros ativos diante de mudanças de seus preços de negociação.

- **Variância e Volatilidade:**

A volatilidade, no contexto financeiro, é a medida de dispersão dos retornos de um ativo. Assim, quanto maior for a variação dos preços desse ativo, maior será sua volatilidade e o risco de perdas (ou ganhos).

Em relação a títulos de renda fixa, a volatilidade é entendida como as mudanças ocorridas nos preços dos títulos em razão de alterações das taxas de juros do mercado.

A volatilidade é integrante essencial do cálculo de VaR, sendo necessário, portanto, calculá-la ou ainda prevê-la.

A forma de se calcular a volatilidade é por meio da raiz quadrada da variância.

- **Covariância e Correlação:**

A covariância fornece uma medida não padronizada do grau em que duas variáveis se movem juntas. Por não ser padronizada, as relações funcionais entre as variáveis é melhor julgada pela correlação (calculada a parir da covariância), segundo a fórmula a seguir :

$$Corr(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (8)$$

Onde:

- *Corr(X,Y)* = correlação de X e Y;

- σ_x = volatilidade do ativo x;
- σ_x = volatilidade do ativo x;
- *Cov(X,Y)* = covariância de X e Y;

A correlação é sempre um valor entre -1 e 1. Variáveis de correlação de valor próximo a 1 apresentam forte relação no mesmo sentido, isto é, quando uma cresce a outra também cresce. Variáveis com correlação próxima a -1 também apresentam forte relação, porém no sentido oposto. Variáveis com correlação próximas a zero não demostram sinais de relação direta.

- ***Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)*:**

Dentre as possibilidades para definição da volatilidade e correlação entre os ativos financeiros, alguns métodos conferem maior importância aos retornos recentes dos ativos. Aqui destacamos o EWMA – Média Móvel Exponencialmente Ponderada –, que será utilizado no estudo de caso adiante.

A metodologia do EWMA parte do princípio que as informações mais recentes tem um maior grau de importância, devendo ser, portanto, mais representativas no cálculo da volatilidade.

Essa abordagem promove dois ganhos: i) a estimativa da volatilidade reage mais rapidamente a saltos (grandes variações, positivas ou negativas) devido à maior força das observações recentes e ii) a volatilidade cai gradualmente à medida que a observação do salto se distancia da atualidade (LONGERSTAEY; SPENCER, 1996).

Sem nos estendermos em representações matemáticas, a fórmula final do EWMA para obtenção da variância é demonstrada abaixo:

$$\sigma_t^{\ 2} = \lambda \sigma_{t=1}^{\ 2} + (1-\lambda) r_t^{\ 2} \tag{9}$$

Onde:

- σ_t^2 = variância no tempo t;
- σ_{t-1}^2 = variância no tempo t-1;
- λ = fator de decaimento;
- r_t = retorno do ativo no tempo t.

A metodologia RiskMetrics, amplamente difundida no mercado financeiro, indica a utilização de um fator de decaimento de 0,94, o que corresponde à aplicar um peso de 6% ao quadrado do retorno mais recente. Além disso, vale ressaltar que o valor esperado dos retornos é definido como zero. Para que não haja erros na estimativa da volatilidade, uma amostra de 150 retornos deve ser utilizada com este fator de decaimento (LONGERSTAEY; SPENCER, 1996).

2.2.2 Cálculo do *Value at Risk (VaR)*

O VaR foi desenvolvido após sucessivas crises na década de 1990 que mostraram que bilhões de dólares podem ser perdidos devido à ineficiente supervisão e administração de risco financeiro (PHILIPPE JORION, 2012).

O método do VaR faz a mensuração do risco utilizando técnicas estatísticas comumente usadas em outras áreas técnicas. Por descrição, este método mede a pior perda esperada ao longo de determinado intervalo de tempo, sob condições normais de mercado e dentro de determinado nível de confiança. Por exemplo, uma carteira pode ter um VaR diário de R$ 35 milhões com um nível de confiança de 99%, isto é, há 1% de chance, em condições normais de mercado, que a perda diária seja maior que R$ 35 milhões (PHILIPPE JORION, 2012).

Uma grande vantagem do VaR, que explica parcialmente a sua grande utilização, é sua objetividade: um único "número VaR" transmite o risco de perda potencial em termos que podem ser compreendidos por qualquer pessoa.

A escolha do nível de confiança e do horizonte temporal depende da utilização e da organização que adota o VaR. Os bancos comerciais costumam declarar o VaR de suas operações para um horizonte diário, pois suas carteiras giram rapidamente. Em contraposição, fundos de pensão, por exemplo, ajustam suas exposições ao risco lentamente, razão pela qual um horizonte de um mês costuma ser adotado (PHILIPPE JORION, 2012).

O intuito desse trabalho não é fazer uma vasta análise da metodologia VaR mas, sim, mostrar os conceitos gerais com foco no caso prático a ser apresentado. Antes de detalhar os modelos principais que desejamos comparar no presente trabalho (paramétrico delta-normal, histórico e monte carlo), apresentaremos o VaR de forma mais abrangente. Tal recurso visa ilustrar de maneira mais clara a utilização do gerenciador de risco.

- **Passos para se calcular o VaR:**

Suponhamos que seja necessário medir o VaR de uma carteira de ações no valor 100 milhões de unidades monetárias num horizonte temporal de 10 dias, ao nível de confiança de 99%. Os passos a serem implementados serão os seguintes:

1. Determinar o valor da carteira hoje (isto é, 100 milhões de unidades monetárias);
2. Medir a variabilidade dos fatores de risco (por exemplo, 15% ao ano);
3. Definir o horizonte temporal (por exemplo, 10 dias úteis);
4. Definir o nível de confiança (por exemplo, 99%, que corresponde a um múltiplo, α, de 2,33, supondo -se uma distribuição normal);
5. Declarar a pior perda resultante do processamento de toda a informação acima (isto é, um VaR de 7 milhões de unidades monetárias).

- **Cálculo do VaR para distribuições gerais:**

Para computar o VaR de uma carteira, define-se (PHILIPPE JORION, 2012):

- W_0: investimento inicial;
- R: taxa de retorno do investimento, com retorno esperado μ e volatilidade σ;
- W: valor da carteira ao fim do horizonte considerado:

$$W = W_0 (1 + R) \tag{10}$$

- W^*: menor valor da carteira à determinado nível de confiança:

$$W^* = W_0 (1 + R^*) \tag{11}$$

O VaR pode ser definido como a perda, em unidades monetárias, em relação à média:

$$VaR\ (média) = E(W) – W^* = -W_0 (R^* - \mu) \tag{12}$$

O VaR também pode ser definido como a perda absoluta em unidades monetárias (sem levar em consideração o valor esperado):

$$VaR\ (absoluto) = W_0 – W^* = -W_0R^* \tag{13}$$

Nos dois casos, calcular o VaR é identificar o valor mínimo W^* ou o retorno crítico R^*.

De uma maneira mais geral, o VaR pode ser derivado da distribuição de probabilidade do valor futuro da carteira, *f(w)*. Considerando-se um nível de confiança *c*, queremos encontrar *W** de tal maneira que a probabilidade de se exceder este valor seja *c*:

$$c = \int_{W^*}^{\infty} f(w)dw \tag{14}$$

ou, alternativamente, de que a probabilidade de um valor menor que *W** seja *1- c*:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W^*} f(w)dw = P(w \leq W^*) = p \tag{15}$$

O valor *W** é denominado “quantil” da distribuição. Neste caso não se usou o desvio-padrão para determinar o VaR.

- **Cálculo do VaR para distribuições paramétricas:**

O método paramétrico tenta ajustar uma distribuição paramétrica (como, por exemplo, a distribuição normal) aos dados.

A suposição de normalidade da distribuição dos retornos simplifica o cálculo do VaR de forma considerável. Neste caso, o VaR pode ser calculado diretamente a partir do desvio-padrão da carteira, utilizando-se um multiplicador correspondente ao nível de confiança (PHILIPPE JORION, 2012),

Em primeiro lugar, é necessário transformar a distribuição geral *f(w)* em uma distribuição normal padronizada $\Phi(\varepsilon)$, em que a média de ε seja zero e seu desvio-padrão seja 1. *W** é associado ao retorno crítico *R**, como mostrado na equação 12. Geralmente, *R** é negativo e também pode ser escrito como - |*R**|. Pode-se, além disso, associar *R** a um fator $\alpha > 0$, proveniente de uma normal padronizada, por meio de:

$$-\alpha = \frac{-\left|R^*\right| - \mu}{\sigma} \tag{16}$$

e isto equivale a estabelecer que:

$$1 - c = \int_{-\infty}^{W*} f(w)dw = \int_{-\infty}^{-|R*|} f(r)dr = \int_{-\infty}^{-\alpha} \phi(\varepsilon)d\varepsilon \quad (17)$$

Deste modo, a questão de se encontrar o VaR é descobrir o fator α de forma que a área à sua esquerda seja *1 - c*. Isto é feito usando-se as tabelas da função distribuição normal padronizada cumulativa, que é a área à esquerda de uma variável normal padronizada, com valor igual a *d*:

$$N(d) = \int_{-\infty}^{d} \phi(\varepsilon)d\varepsilon \quad (18)$$

O retorno crítico é, então:

$$R^* = -\alpha\sigma + \mu \quad (19)$$

Supondo-se que os parâmetros μ e σ estejam expressos em bases anuais e que o intervalo de tempo considerado seja Δt (em anos), temos que o VaR em relação à média é:

$$VaR(média) = -W_0(R^* - \mu) = W_0\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} \quad (20)$$

O VaR é, portanto, um múltiplo do desvio-padrão da distribuição, multiplicado por um fator de ajuste que está diretamente relacionado ao nível de confiança e ao horizonte temporal.

O VaR absoluto é definido por:

$$VaR(absoluto) = -W_0 R* = W_0(\alpha\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu\Delta t) \quad (21)$$

2.2.3 VaR Paramétrico (Delta-Normal)

- **Definição:**

O VaR Paramétrico (Delta-Normal) parte do princípio que a distribuição de probabilidade dos retornos da carteira é normal. Assim, estimando os parâmetros dessa distribuição (no caso da normal apenas a média e o desvio-padrão), definimos o horizonte de tempo e o nível de confiança. Aplicando os passos apresentados anteriormente, pode-se chegar, para o pré-determinado nível de confiança, qual o pior retorno esperado para a carteira (VaR).

- **Vantagens e Desvantagens:**

A grande vantagem da utilização de tal método está na fácil implementação (em termos matemáticos e computacionais) baseado no pressuposto da distribuição de probabilidade.

No entanto, esta modelagem, assim como a grande maioria dos modelos matemáticos aplicados a finanças, foi desenvolvida pensando em mercados estáveis e uma vez mais assume-se, a priori, a normalidade dos retornos. No entanto, esta hipótese é bastante restritiva, o que faz com que sua adequação a mercados mais voláteis seja discutível. Em mercados voláteis, efeitos como "caudas gordas" (também conhecido como curtose, isto é, o "achatamento" da normal) e assimetria da distribuição não são desprezíveis e geram uma grande distorção entre os resultados do modelo e os eventos ocorridos.

Entretanto, DOWD (1998) considera que não se deve descartar a hipótese de normalidade dos retornos da carteira, mesmo depois de se concluir que os retornos individuais dos ativos não são normais. A justificativa para isto é que o Teorema do Limite Central postula que variáveis aleatórias independentes de qualquer distribuição bem comportada terão uma média que convergirá para a distribuição normal em grandes amostras. Isto implica que a hipótese de normalidade dos retornos da carteira funcionará bem, desde que ela seja bem diversificada e que os retornos individuais sejam suficientemente independentes entre si, mesmo que individualmente não apresentem d istribuição normal (MANUELA SILVA MACHRY, 2003).

2.2.4 VaR Histórico

- **Definição:**

O método da simulação histórica consiste em usar a distribuição histórica dos retornos dos ativos (ou fatores de risco) da carteira para simular os retornos futuros e, a partir daí, o VaR da carteira. Dentro desta proposta, identifica-se os fatores de risco da carteira e pega-se uma amostra dos retornos históricos destes fatores de risco em um determinado período. A partir daí, aplica-se os pesos da carteira hoje para simular os retornos que teriam sido observados caso a carteira permanecesse constante no período.

Supõe-se, então, que a distribuição histórica dos retornos seja uma boa representação ("*proxy*") para a distribuição dos retornos que se realizará no próximo período. O quantil escolhido da distribuição gerada com a simulação será o VaR esperado para a carteira (DOWD, 1998).

- **Vantagens e Desvantagens**

Também de fácil implementação, devido a grande disponibilidade dos retornos passados dos ativos, esse método também tem a vantagem de basear a construção da distribuição de probabilidade em dados históricos, o que é mais aceitável que o simples pressuposto de normalidade.

Há algumas desvantagens, porém em seu uso. Uma delas é assumir que o comportamento passado se repetirá no futuro, o que não será sempre verdade. Outro problema é o tamanho da série histórica, isto é, deve ser grande o suficiente para garantir veracidade da análise do passado (PHILIPPE JORION, 2012).

2.2.5 VaR Monte Carlo

- **Definição:**

Dada as limitações do modelo paramétrico, que considera a normalidade dos retornos da carteira (o que muitas vezes não é real), e da abordagem de simulação histórica, que assume que flutuações passadas do mercado são boas o suficiente para prever perdas futuras, uma alternativa para o cálculo do VaR é fazer inúmeras variações nas taxas de juros, com inúmeros retornos diferentes, a partir da geração de números aleatórios (LONGERSTAEY; SPENCER, 1996).

A simulação de Monte Carlo é utilizada para simular uma série de cenários distintos para uma carteira em uma certa data. A partir disso, o VaR poderá ser determinado diretamente da distribuição de valores simulados.

Para realizar tal simulação, é preciso levar em consideração a correlação entre os ativos que compõem a carteira para a qual se analisa o VaR. Dessa forma, devemos fazer o que se chama de simulação correlacionada, na qual os números aleatórios passam por um processo de transformação para torná-los correlacionados.

Uma das maneiras possíveis para realizar tal procedimento é a decomposição de Cholesky. A partir da matriz de correlação entre os ativos da carteira, A, deve-se encontrar a Matriz de Cholesky, G, que atenda à condição:

$$A = G \times G^T \tag{22}$$

Sendo:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & g_{22} & 0 \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{n1} \\ 0 & g_{22} & \vdots \\ 0 & 0 & g_{nn} \end{bmatrix} \tag{23}$$

Assim, o vetor de termos aleatórios utilizados no processo de simulação será, na verdade, um vetor de termos aleatórios multiplicado pela matriz de Cholesky.

De forma geral, o método de Monte Carlo é feito em três passos (LONGERSTAEY; SPENCER, 1996):

1. Geração de Cenários – Usando a volatilidade e a correlação estimadas para os ativos da carteira, estima-se inúmeros preços futuros;
2. Para cada cenário, deve-se computar o valor da carteira;
3. Relatar os resultados da simulação, tanto a distribuição da carteira como o risco medido.

- **Vantagens e Desvantagens:**

Esse método é uma maneira eficiente de calcular o risco, uma vez que cobre vários tipos de risco, incluindo o de não-linearidade. Desta forma, este método pode ser utilizado, por exemplo, para avaliar o risco de uma carteira com grande peso em opções. Porém ele é mais demorado e mais custoso computacionalmente e, em alguns casos, pode comprometer o tempo de processamento. Temos ainda um risco de modelagem econômica, já que precisamos de cenários para realizar as simulações, e cenários pouco condizentes com a situação econômica podem acarretar resultados ruins.

3. Estudo de Caso

Esta seção descreve a parte prática do trabalho. Acreditamos que após a leitura deste capítulo os assuntos abordados anteriormente se tornarão mais claros para o leitor. O estudo de caso visa calcular o VaR de um dia e 95% de confiança por três métodos diferentes (histórico, paramétrico e simulação de Monte Carlo) para uma carteira de renda fixa. As seguintes etapas serão cumpridas para atingir tal objetivo:

1. Criação de uma carteira de renda fixa composta por títulos pré-fixados do governo federal dos Estados Unidos (seção 3.1);
2. Verificação dos fluxos de caixa futuros dos títulos que compõem a carteira (seção 3.2);
3. Definição dos fatores de risco da carteira (seção 3.3);
4. Observação dos vértices dos fatores de risco a serem analisados (seção 3.4);
5. Obtenção do histórico de taxas dos fatores de risco da carteira (seção 3.5);
6. *Bootstrapping* do histórico de taxas dos fatores de risco da carteira (seção 3.6);
7. Mapeamento dos fluxos de caixa futuros da carteira nos vértices dos fatores de risco (seção 3.7);
8. Cálculo dos ganhos e perdas históricos da carteira para obtenção do VaR histórico, através da aproximação da *duration* e convexidade (seção 3.8);
9. Cálculo do vetor de volatilidades e da matriz de correlação entre os fatores de risco, utilizando o *EWMA* com fator de decaimento 0,94, para obtenção do VaR paramétrico (seção 3.9);
10. Cálculo do VaR através da simulação de Monte Carlo por meio de variáveis aleatórias correlacionadas (seção 3.10);
11. Realização do *backtesting* para comparação dos resultados obtidos, através do Teste de *Kupiec* (seção 3.11).

3.1 *Criação de uma carteira de Renda Fixa*

O ponto de partida para o trabalho deve ser a criação da carteira que será analisada, isto é, a escolha de títulos públicos americanos e o montante financeiro que estaria alocado em cada um deles.

Para cumprir esta tarefa, decidimos replicar a composição da carteira de um fundo de índice (ETF, do inglês *Exchange Traded Fund*), que nada mais é do que um fundo de investimento cuja cota é negociada diretamente em bolsas de valores, assim como uma ação (BM&FBOVESPA, [S.d.]).

O ETF escolhido foi o "*iShares Barclays 7-10 Year Treasury Bond Fund*", um fundo da *BlackRock*, a maior gestora global de ativos financeiro (ANDREWS, 2010). O objetivo deste fundo é "acompanhar os resultados de investimento de um índice composto de títulos do Tesouro dos EUA com vencimentos remanescentes entre sete e dez anos" (BLACKROCK, 2002).

No dia da realização desta etapa do trabalho, o ETF era composto pelos seguintes títulos (BLACKROCK, 2002):

Títulos	Percentual do ETF
US Treasury 1.625% 15/08/2022	14,8%
US Treasury 2.125% 15/08/2021	13,7%
US Treasury 1.625% 15/11/2022	12,9%
US Treasury 2.625% 15/08/2020	10,7%
US Treasury 3.125% 15/05/2021	8,6%
US Treasury 3.625% 15/02/2021	8,4%
US Treasury 2% 15/11/2021	7,0%
US Treasury 2% 15/02/2022	4,3%
US Treasury 2% 15/02/2023	4,1%
US Treasury 3.625% 15/02/2020	3,7%
US Treasury 1.75% 15/05/2022	3,1%
US Treasury 3.5% 15/05/2020	2,2%
US Treasury 2.625% 15/11/2020	1,7%
US Treasury 3.625% 15/08/2019	1,2%
US Treasury 8% 15/11/2021	0,7%
US Treasury 8.75% 15/08/2020	0,7%
US Treasury 8.125% 15/05/2021	0,7%
US Treasury 7.875% 15/02/2021	0,5%
US Treasury 8.125% 15/08/2021	0,5%
US Treasury 8.75% 15/05/2020	0,5%
Total da Carteira	**100%**

Tabela 1 - Títulos do ETF iShares Barclays 7-10 Years

Fonte: Elaboração própria baseada na carteira de 31/05/2013 divulgada pelo iShares

A tabela 1 mostra uma estrutura para os nomes dos títulos que trazem informações relevantes sobre os mesmos. Pegando o primeiro da lista como exemplo, temos a seguinte estrutura:

- *U.S. Treasury*: título de dívida pública do governo federal dos Estados Unidos, emitido pelo Departamento do Tesouro;
- 1.625%: equivalente anual do pagamento de cupons do título. Como os desembolsos são semestrais e o valor de face da emissão é de mil dólares, o título deve pagar um valor fixo de US$ 8,125 ao semestre até o vencimento.
- 15/08/2022: data de vencimento do título, na qual irá ocorrer o fluxo do pagamento do valor de face de US$ 1.000.

Desta forma, definimos quais títulos compõem a carteira do estudo. Para completar a atual etapa, falta decidir qual o montante financeiro investido. O valor escolhido, de forma arbitrária, foi US$ 1.000.000 (um milhão de dólares).

A tabela a seguir mostra a estrutura final da carteira, sendo a quantidade de títulos obtida pelo valor alocado àquele ativo dividido pelo seu preço no dia 31 de maio de 2013:

Títulos	Preço (US$)	Quantidade	Valor (US$)
US Treasury 1.625% 15/08/2022	97,22	152.234	14.799.999,19
US Treasury 2.125% 15/08/2021	103,10	132.879	13.700.032,52
US Treasury 1.625% 15/11/2022	96,36	133.868	12.899.959,73
US Treasury 2.625% 15/08/2020	108,05	99.031	10.699.990,08
US Treasury 3.125% 15/05/2021	110,57	77.776	8.600.020,44
US Treasury 3.625% 15/02/2021	115,29	72.858	8.400.015,12
US Treasury 2% 15/11/2021	101,24	69.141	6.999.986,09
US Treasury 2% 15/02/2022	101,37	42.418	4.299.959,05
US Treasury 2% 15/02/2023	99,85	41.063	4.100.044,31
US Treasury 3.625% 15/02/2020	115,29	32.092	3.699.981,95
US Treasury 1.75% 15/05/2022	98,36	31.518	3.099.967,66
US Treasury 3.5% 15/05/2020	113,58	19.370	2.200.008,28
US Treasury 2.625% 15/11/2020	107,18	15.861	1.700.038,98
US Treasury 3.625% 15/08/2019	115,00	10.435	1.199.984,24
US Treasury 8% 15/11/2021	149,48	4.683	700.035,33
US Treasury 8.75% 15/08/2020	152,30	4.596	699.956,44
US Treasury 8.125% 15/05/2021	148,74	4.706	699.962,35
US Treasury 7.875% 15/02/2021	147,83	3.382	499.967,93
US Treasury 8.125% 15/08/2021	151,71	3.296	500.052,13
US Treasury 8.75% 15/05/2020	148,93	3.357	499.956,96

Tabela 2 - Carteira do estudo de caso

Fonte: Elaboração própria dos autores

3.2 *Fluxos de Caixa Futuros da Carteira*

O alicerce da metodologia RiskMetrics para descrever qualquer posição é um fluxo de caixa. Um fluxo de caixa é definido como uma quantidade de moeda, uma data de pagamento e a posição de crédito do pagador – entrada ou saída de caixa (LONGERSTAEY; SPENCER, 1996).

Desta forma, uma vez definida a carteira, partimos para análise dos fluxos de caixa futuros gerados pelos títulos que a compõem. Os fluxos consistem no pagamento dos cupons semestrais e do valor nominal, no vencimento, de cada um dos títulos.

Assim, considerando a quantidade de contratos que temos de cada um dos títulos, sabemos os fluxos que cada um destes gerará para o nosso portfólio. Se observarmos o título "US Treasury 1.625% 15/08/2022" na data 31 de maio de 2013, podemos afirmar que os seguintes desembolsos ocorrerão:

US Treasury 1.625% 15/08/2022 - 152.234 Contratos		
Datas	**Fluxo Nominal (US$)**	**Fluxo da Carteira (US$)**
15/08/2013	$ 8,125	$ 123.690,125
15/02/2014	$ 8,125	$ 123.690,125
15/08/2014	$ 8,125	$ 123.690,125
15/02/2015	$ 8,125	$ 123.690,125
15/08/2015	$ 8,125	$ 123.690,125
15/02/2016	$ 8,125	$ 123.690,125
15/08/2016	$ 8,125	$ 123.690,125
15/02/2017	$ 8,125	$ 123.690,125
15/08/2017	$ 8,125	$ 123.690,125
15/02/2018	$ 8,125	$ 123.690,125
15/08/2018	$ 8,125	$ 123.690,125
15/02/2019	$ 8,125	$ 123.690,125
15/08/2019	$ 8,125	$ 123.690,125
15/02/2020	$ 8,125	$ 123.690,125
15/08/2020	$ 8,125	$ 123.690,125
15/02/2021	$ 8,125	$ 123.690,125
15/08/2021	$ 8,125	$ 123.690,125
15/02/2022	$ 8,125	$ 123.690,125
15/08/2022	$ 1.008,125	$ 15.347.090,125

Tabela 3 – Pagamentos feitos pelo título "US Treasury 1.625% 15/08/2022"

Fonte: Elaboração própria dos autores

Análise semelhante foi realizada para todos os ativos da carteira. Ao final desta etapa, o portfólio criado pode ser visualizado como diversos fluxos de caixa futuros e não mais como uma composição de diferentes títulos.

Após destrinchar cada ativo, agrupamos os fluxos que ocorrem exatamente na mesma data e passamos a visualizar a carteira de forma independente de cada um dos títulos. Esta visualização é representada na linha total da tabela a seguir:

Fluxo Real da Carteira (US$)							
Títulos	**15/08/2013**	**15/11/2013**	**15/02/2014**	**...**	**15/08/2022**	**15/11/2022**	**15/02/2023**
US Treasury 1.625% 15/08/2022	123.690,13	0,00	123.690,13	...	15.347.090,13	0,00	0,00
US Treasury 2.125% 15/08/2021	141.183,94	0,00	141.183,94	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 1.625% 15/11/2022	0,00	108.767,75	0,00	...	0,00	13.495.567,75	0,00
US Treasury 2.625% 15/08/2020	129.978,19	0,00	129.978,19	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 3.125% 15/05/2021	0,00	121.525,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 3.625% 15/02/2021	132.055,13	0,00	132.055,13	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 2% 15/11/2021	0,00	69.141,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 2% 15/02/2022	42.418,00	0,00	42.418,00	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 2% 15/02/2023	41.063,00	0,00	41.063,00	...	41.063,00	0,00	4.147.363,00
US Treasury 3.625% 15/02/2020	58.166,75	0,00	58.166,75	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 1.75% 15/05/2022	0,00	27.578,25	0,00	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 3.5% 15/05/2020	0,00	33.897,50	0,00	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 2.625% 15/11/2020	0,00	20.817,56	0,00	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 3.625% 15/08/2019	18.913,44	0,00	18.913,44	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 8% 15/11/2021	0,00	18.732,00	0,00	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 8.75% 15/08/2020	20.107,50	0,00	20.107,50	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 8.125% 15/05/2021	0,00	19.118,13	0,00	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 7.875% 15/02/2021	13.316,63	0,00	13.316,63	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 8.125% 15/08/2021	13.390,00	0,00	13.390,00	...	0,00	0,00	0,00
US Treasury 8.75% 15/05/2020	0,00	14.686,88	0,00	...	0,00	0,00	0,00
Total	**734.282,69**	**434.264,06**	**734.282,69**	**...**	**15.388.153,13**	**13.495.567,75**	**4.147.363,00**

Tabela 4 - Fluxos de caixa futuros da carteira agrupados por data

Fonte: Elaboração própria dos autores

Os fluxos de caixa futuros que o gestor da carteira receberá a partir de 31 de maio de 2013, considerando todos os ativos que a compõem, estão listados a seguir:

- 15/08/2013: US$ 734.282,69
- 15/11/2013: US$ 434.264,06
- 15/02/2014: US$ 734.282,69
- 15/05/2014: US$ 434.264,06
- 15/08/2014: US$ 734.282,69
- 15/11/2014: US$ 434.264,06
- 15/02/2015: US$ 734.282,69
- 15/05/2015: US$ 434.264,06

- 15/08/2015: US$ 734.282,69
- 15/11/2015: US$ 434.264,06
- 15/02/2016: US$ 734.282,69
- 15/05/2016: US$ 434.264,06
- 15/08/2016: US$ 734.282,69
- 15/11/2016: US$ 434.264,06
- 15/02/2017: US$ 734.282,69
- 15/05/2017: US$ 434.264,06
- 15/08/2017: US$ 734.282,69
- 15/11/2017: US$ 434.264,06
- 15/02/2018: US$ 734.282,69
- 15/05/2018: US$ 434.264,06
- 15/08/2018: US$ 734.282,69
- 15/11/2018: US$ 434.264,06
- 15/02/2019: US$ 734.282,69
- 15/05/2019: US$ 434.264,06
- 15/08/2019: US$ 1.777.782,69
- 15/11/2019: US$ 434.264,06
- 15/02/2020: US$ 3.924.569,25
- 15/05/2020: US$ 2.706.964,06
- 15/08/2020: US$ 11.019.902,50
- 15/11/2020: US$ 1.971.779,69
- 15/02/2021: US$ 8.131.116,81
- 15/05/2021: US$ 8.613.062,13
- 15/08/2021: US$ 13.979.245,06
- 15/11/2021: US$ 7.606.619,00
- 15/02/2022: US$ 4.448.971,13
- 15/05/2022: US$ 3.288.146,00
- 15/08/2022: US$ 15.388.153,13
- 15/11/2022: US$ 13.495.567,75
- 15/02/2023: US$ 4.147.363,00

3.3 *Fatores de Risco*

Antes de calcular o VaR, precisamos estimar à quais fatores de risco a carteira está exposta. Para tal, decompomos os instrumentos financeiros do portfólio em seus componentes individuais de fluxo de caixa (detalhes na seção anterior).

Se observarmos o dia 15 de agosto de 2013, temos que haverá o recebimento de uma quantia de US$ 734.282,69. O valor presente deste fluxo é dado por:

$$VP = \frac{VF}{(1+i)^n} \tag{24}$$

Sendo *VF* o valor futuro, *i* a taxa de juros e *n* o número de períodos, verificamos que uma variação na taxa de juros altera o valor presente dos investimentos da carteira de renda fixa.

Como os títulos escolhidos para compor a carteira são pré-fixados, ou seja, os fluxos de caixa futuros são conhecidos no instante da aquisição dos mesmos, o retorno real da carteira está diretamente exposta à variação da taxa de juros no mercado. Esta exposição é comumente denominada de risco de taxa pré.

3.4 *Vértices dos Fatores de Risco*

Instrumentos financeiros, em geral, podem gerar inúmeros fluxos de caixa, cada um ocorrendo em um momento único. Isto dá origem a um número significativo de combinações de fluxo de caixa quando diversos instrumentos são considerados. Conforme visto em seção anterior, títulos de renda fixa também podem ser facilmente representados como fluxos de caixa, dado seu padrão futuro de pagamentos.

Na prática, portanto, o que fizemos foi a decomposição em fluxos elementares dos ativos da carteira, cada qual relativo a um vencimento diferente e uma posição diferente da carteira. Os fluxos elementares são equivalentes à uma carteira composta por fluxos de títulos *zero-coupon*.

Como resultado, nos confrontamos com os 39 fluxos futuros listados. Para o cálculo do VaR, isto gera uma tarefa impraticável de precisar obter um grande número de volatilidades e correlações. É por conta disso que a metodologia RiskMetrics indica que o caminho para estimar os riscos associados com fluxos de caixa de instrumentos financeiros é simplificar a estrutura temporal dos mesmos (LONGERSTAEY; SPENCER, 1996).

Para tal simplificação, define-se um número fixo de vértices em que os fluxos de caixa devem ser mapeados, isto é, como cada fluxo de caixa estará situado, necessariamente, entre dois vértices adjacentes; mapeá-lo significa transformar o fluxo original em dois fluxos, um em cada vértice, e a carteira original, composta por 39 fluxos, com diversos vencimentos, em uma carteira padronizada, com fluxos em um número fixo de vértices (GUILHERME LINS ARCOVERDE, [S.d.]).

O RiskMetrics define 14 vértices padrões para os quais devem ser feitos o mapeamento dos fluxos de caixa. São eles: um mês, três meses, seis meses, um ano, dois anos, três anos, quatro anos, cinco anos, sete anos, nove anos, dez anos, quinze anos, vinte anos e trinta anos.

Como nenhum dos fluxos observados ocorrerá depois de dez anos, os vértices de quinze anos, vinte anos e trinta anos receberiam fluxo zero e, portanto, não serão mais mencionados a partir daqui. Além disso, pela dificuldade em obter dados para os vértices de quatro e nove anos, este trabalho também não os abordará.

Isto posto, o mapeamento dos fluxos observados serão distribuídos entre os seguintes vértices:

- Um mês;
- Três meses;
- Seis meses;
- Um ano;
- Dois anos;
- Três anos;
- Cinco anos;
- Sete anos;
- Dez anos.

3.5 *Histórico de Taxas dos Fatores de Risco*

A obtenção do histórico de taxas dos vértices dos fatores de risco se faz necessária tanto no VaR Paramétrico, como no Histórico e no Monte Carlo. Um a um, temos:

- VaR Paramétrico: base para cálculo das volatilidades dos fatores de risco e da matriz de correlação entre os mesmos;
- VaR Histórico: a variação histórica das taxas de juros dos fatores de risco é utilizada para estimar ganhos e perdas diários na carteira. Esta estimativa será feita através de uma aproximação quadrática ou de segunda ordem (*duration* e convexidade);
- VaR de Monte Carlo: matriz de correlação dos retornos dos fatores de risco será base para simular mesmo efeito nas variáveis aleatórias, através da decomposição de Cholesky.

Isto posto, lidamos com o desafio de encontrar um histórico de taxas que reflita a variação diária de títulos pré-fixados do governo norte-americano.

Os títulos negociados no mercado possuem data de vencimento fixa e, portanto, o prazo até o vencimento dos mesmos varia a cada dia. Desta forma, não reflitiriam o histórico de um vértice fixo de um mês, três meses, um ano etc, como no caso apresentado.

Para superar tal barreira, utilizamos a base de dados "*Federal Reserve Statiscal Release H. 15*". Esta publicação fornece um histórico de dados diário para as taxas negociadas em mercado das *U.S. Treasuries* com prazos de vencimento constante – exatamente como se faz necessário. Estas taxas artificiais são obtidas através de interpolações das taxas dos títulos negociados em mercado com vencimentos diferentes (MCKIBBIN; STOECKEL, [S.d.]).

A tabela abaixo ilustra os dados obtidos:

	Taxas Históricas dos Vértices dos Fatores de Risco								
Data	**Um mês**	**Três meses**	**Seis meses**	**Um ano**	**Dois anos**	**Três anos**	**Cinco anos**	**Sete anos**	**Dez anos**
31/05/2011	0,04	0,06	0,12	0,18	0,45	0,79	1,68	2,37	3,05
01/06/2011	0,04	0,05	0,11	0,18	0,44	0,74	1,60	2,28	2,96
02/06/2011	0,04	0,04	0,11	0,19	0,45	0,78	1,65	2,34	3,04
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
29/05/2013	0,04	0,05	0,08	0,14	0,30	0,49	1,02	1,51	2,13
30/05/2013	0,02	0,04	0,07	0,13	0,31	0,49	1,01	1,51	2,13
31/05/2013	0,03	0,04	0,07	0,14	0,30	0,52	1,05	1,55	2,16

Tabela 5 - Amostra das taxas históricas dos vértices dos fatores de risco

Fonte: Elaboração própria dos autores baseada no *Federal Reserve Statiscal Release H. 15*

3.6 *Bootstrapping do Histórico de Taxas dos Fatores de Risco*

As taxas históricas obtidas na seção anterior são criadas a partir de títulos com desembolsos financeiros antes do vencimento. Por conta disso, a taxa de cinco anos, por exemplo, não reflete diretamente a taxa exigida para remuneração de um investimento que matura em cinco anos. Esta taxa, contém de maneira implícita, o pagamento de todos os cupons semestrais até o vencimento.

Desta forma, é necessário fazer o *bootstrapping* das taxas obtidas para convertê-las em equivalentes *zero-coupon*. Tal procedimento requer esforço computacional e a realização do mesmo só foi possível através de programação na linguagem *Visual Basic for Applications – Excel*. O código desenvolvido se encontra no Apêndice A deste trabalho e forneceu resultado com estrutura semelhante à tabela seis, ou seja, um histórico diário de taxas para os vértices dos fatores de risco. Na tabela abaixo, mostramos parte destes resultados:

	Taxas *Zero-Coupon* dos Vértices dos Fatores de Risco								
Data	**Um mês**	**Três meses**	**Seis meses**	**Um ano**	**Dois anos**	**Três anos**	**Cinco anos**	**Sete anos**	**Dez anos**
31/05/2011	0,04	0,06	0,12	0,18	0,46	0,82	1,84	2,74	3,86
01/06/2011	0,04	0,05	0,11	0,18	0,45	0,77	1,75	2,63	3,73
02/06/2011	0,04	0,04	0,11	0,19	0,46	0,81	1,80	2,71	3,85
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
29/05/2013	0,04	0,05	0,08	0,14	0,31	0,51	1,10	1,70	2,60
30/05/2013	0,02	0,04	0,07	0,13	0,32	0,51	1,09	1,70	2,60
31/05/2013	0,03	0,04	0,07	0,14	0,31	0,54	1,13	1,75	2,63

Tabela 6 - Taxas equivalentes zero-coupon dos vértices dos fatores de risco

Fonte: Elaboração própria dos autores

3.7 *Mapeamento dos Fluxos de Caixa nos Fatores de Risco*

Existem diversos métodos possíveis para realizar o mapeamento dos vértices. Neste trabalho utilizaremos o **mapeamento linear**. A razão para tal escolha é baseada em ARCOVERDE (2000):

> *Não existe uma única forma para decompor um dado fluxo de caixa entre dois vértices. Com a edição, pelo Banco Central do Brasil, da Circular 2972, de março de 2000, que adota o mapeamento linear, descrito a seguir, pode-se imaginar que essa adoção advém das simplificações naturais de um modelo-padrão. Porém, não é esse o caso. A escolha do mapeamento linear foi feita no âmbito mais geral da especificação de um modelo de VAR. [...] A primeira (alternativa de mapeamento), popularizada no documento técnico RiskMetrics, é utilizada em larga escala pela comunidade financeira em seus sistemas de gerenciamento de risco desde a publicação do referido documento. A segunda, extremamente simples e, atualmente, recomendada*

> *como a mais eficiente pelo próprio RiskMetrics Group, em trabalho divulgado na internet ao final de 1999, baseia-se em uma decomposição do fluxo, na proporção dada pela razão entre a diferença do prazo associado ao vértice adjacente à direita do fluxo e o prazo do mesmo, sobre a diferença de prazos dos referidos vértices.*

Como exemplo do cálculo do mapeamento, iremos citar o fluxo de US$ 734.282,69 em 15 de agosto de 2013. No dia 31 de maio de 2013, este fluxo fica entre os vértices de um mês (30 de junho de 2013) e três meses (31 de agosto de 2013). Ele será desmembrado, portanto, entre estes dois vértices. Conforme explicado na citação acima, o fator da decomposição é dado pela "diferença do prazo associado ao vértice adjacente à direita do fluxo e o prazo do mesmo, sobre a diferença de prazos dos referidos vértices". Expresso em fórmula matemática teríamos:

$$\propto_0 = \frac{Prazo\ vértice2 - Prazo\ fluxo}{Prazo\ vértice\ 2 - Prazo\ vértice\ 1} \tag{25}$$

Desta forma, temos que o fator do nosso exemplo é 0,25. Isto acarreta em uma alocação de um fluxo de US$ 180.561,32 no vértice de um mês e US$ 553.721,37 no vértice de três meses. Na tabela mostramos o mapeamento feito para cada um dos trinta e nove fluxos iniciais:

Data Fluxo	Fluxo (US$)	Vértice 1	Vértice 2	Fator	Fluxo Vértice 1 (US$)	Fluxo Vértice 2 (US$)
15/08/2013	734.282,69	30/06/2013	30/08/2013	0,25	180.561,32	553.721,37
15/11/2013	434.264,06	30/08/2013	30/11/2013	0,16	70.803,92	363.460,14
15/02/2014	734.282,69	30/11/2013	30/05/2014	0,57	421.908,28	312.374,40
15/05/2014	434.264,06	30/11/2013	30/05/2014	0,08	35.988,73	398.275,33
15/08/2014	734.282,69	30/05/2014	30/05/2015	0,79	579.379,22	154.903,47
15/11/2014	434.264,06	30/05/2014	30/05/2015	0,54	233.193,85	201.070,21
15/02/2015	734.282,69	30/05/2014	30/05/2015	0,28	209.220,27	525.062,41
15/05/2015	434.264,06	30/05/2014	30/05/2015	0,04	17.846,47	416.417,59
15/08/2015	734.282,69	30/05/2015	30/05/2016	0,79	579.802,45	154.480,24
15/11/2015	434.264,06	30/05/2015	30/05/2016	0,54	233.743,22	200.520,84
15/02/2016	734.282,69	30/05/2015	30/05/2016	0,29	210.654,87	523.627,82
15/05/2016	434.264,06	30/05/2015	30/05/2016	0,04	17.797,71	416.466,36
15/08/2016	734.282,69	30/05/2016	30/05/2018	0,89	656.830,95	77.451,74
15/11/2016	434.264,06	30/05/2016	30/05/2018	0,77	333.728,96	100.535,10
15/02/2017	734.282,69	30/05/2016	30/05/2018	0,64	471.751,48	262.531,21
15/05/2017	434.264,06	30/05/2016	30/05/2018	0,52	226.055,27	208.208,80
15/08/2017	734.282,69	30/05/2016	30/05/2018	0,39	289.689,61	444.593,08
15/11/2017	434.264,06	30/05/2016	30/05/2018	0,27	116.596,93	317.667,14
15/02/2018	734.282,69	30/05/2016	30/05/2018	0,14	104.610,14	629.672,55
15/05/2018	434.264,06	30/05/2016	30/05/2018	0,02	8.923,23	425.340,83
15/08/2018	734.282,69	30/05/2018	30/05/2020	0,89	656.936,91	77.345,78
15/11/2018	434.264,06	30/05/2018	30/05/2020	0,77	333.866,49	100.397,57
15/02/2019	734.282,69	30/05/2018	30/05/2020	0,64	472.110,62	262.172,07
15/05/2019	434.264,06	30/05/2018	30/05/2020	0,52	226.340,09	207.923,97
15/08/2019	1.777.782,69	30/05/2018	30/05/2020	0,40	702.844,32	1.074.938,37
15/11/2019	434.264,06	30/05/2018	30/05/2020	0,27	117.031,49	317.232,57
15/02/2020	3.924.569,25	30/05/2018	30/05/2020	0,14	563.720,62	3.360.848,63
15/05/2020	2.706.964,06	30/05/2018	30/05/2020	0,02	55.546,46	2.651.417,60
15/08/2020	11.019.902,50	30/05/2020	30/05/2023	0,93	10.244.986,98	774.915,52
15/11/2020	1.971.779,69	30/05/2020	30/05/2023	0,85	1.667.459,35	304.320,34
15/02/2021	8.131.116,81	30/05/2020	30/05/2023	0,76	6.193.015,00	1.938.101,82
15/05/2021	8.613.062,13	30/05/2020	30/05/2023	0,68	5.860.028,57	2.753.033,56
15/08/2021	13.979.245,06	30/05/2020	30/05/2023	0,60	8.336.481,30	5.642.763,76
15/11/2021	7.606.619,00	30/05/2020	30/05/2023	0,51	3.897.089,73	3.709.529,27
15/02/2022	4.448.971,13	30/05/2020	30/05/2023	0,43	1.905.541,06	2.543.430,07
15/05/2022	3.288.146,00	30/05/2020	30/05/2023	0,35	1.141.091,76	2.147.054,24
15/08/2022	15.388.153,13	30/05/2020	30/05/2023	0,26	4.047.295,07	11.340.858,06
15/11/2022	13.495.567,75	30/05/2020	30/05/2023	0,18	2.415.645,00	11.079.922,75
15/02/2023	4.147.363,00	30/05/2020	30/05/2023	0,09	393.904,80	3.753.458,20

Tabela 7 - Mapeamento linear dos fluxos de caixa futuro

Fonte: Elaboração própria dos autores

Após finalizar o mapeamento, simplificamos o nosso modelo para o recebimento de nove fluxos de caixa futuros.

Segundo LONGERSTAEY (1996), uma vez determinados, tais fluxos de caixa devem ser marcados a mercado:

> *Uma vez determinados, os fluxos de caixa futuros são marcados a mercado. Marcar a mercado os fluxos de caixa de uma posição significa determinar o valor presente dos fluxos de caixa dado taxas correntes de mercado e preços. Este procedimento requer taxas correntes de mercado [...] e uma curva de juros de zero-coupon de instrumentos que não pagam o fluxo de caixa até o vencimento.* ***A taxa zero-coupon é a taxa relevante para descontar os fluxos de caixa recebidos em um período futuro particular.***

Para trazer os fluxos a valor presente, basta aplicar a fórmula de valor presente apresentada acima, já que temos o valor futuro e a taxa de juros *zero-coupon* (seção anterior). Desta forma, chegamos aos seguintes valores:

- 30/06/2013 (vértice de um mês): US$ 180.556,72
- 30/08/2013 (vértice de tres meses): US$ 624.460,97
- 30/11/2013 (vértice de seis meses): US$ 821.065,85
- 30/05/2014 (vértice de um ano): US$ 1.747.811,13
- 30/05/2015 (vértice de dois anos): US$ 2.325.221,51
- 30/05/2016 (vértice de três anos): US$ 3.447.495,34
- 30/05/2018 (vértice de cinco anos): US$ 5.295.247,84
- 30/05/2020 (vértice de sete anos): US$ 48.251.072,87
- 30/05/2023 (vértice de dez anos): US$ 36.407.248,07

3.8 *VaR Histórico*

A abordagem histórica, assim como a simulação de Monte Carlo, é baseada em um modelo de reavaliação completa do valor dos ativos da carteira. Além disso, não assume nenhum pressuposto sobre a distribuição dos retornos dos ativos.

O gestor de risco deve escolher uma janela histórica de quantos dias estarão compreendidos na observação. LONGERSTAEY (1996) aponta que esta janela é usualmente de seis meses a dois anos. Neste trabalho iremos utilizar uma janela histórica de dois anos.

A tabela a seguir mostra o cálculo de resultados diários para a posição atual da nossa carteira no vértice de cinco anos (US$ 5.295.247,84).

Vértice de 5 Anos		
Data	Taxa	Resultado
31/05/2011	1,84%	$8.474,93
01/06/2011	1,75%	$23.239,13
02/06/2011	1,80%	-$14.267,47
...	...	...
29/05/2013	1,10%	$88,48
30/05/2013	1,09%	$3.053,24
31/05/2013	1,13%	-$11.623,65

Tabela 8 - Resultados Diários Históricos para o Vértice de 5 Anos

Fonte: Elaboração própria dos autores

Como o cálculo do VaR Histórico considera a variação diária dos fatores de risco no passado, iremos utilizar a *duration* e a convexidade dos títulos para reavalizar os resultado da carteira na janela avaliada. Para chegar à coluna do resultado, calculamos o resultado da posição de acordo com a seguinte fórmula:

$$\Delta V = -D \times \frac{\Delta i}{(1+i)} \times V + \frac{1}{2} C (\Delta i)^2 \times V \qquad (26)$$

Sendo,

- ΔV: Resultado;
- *D*: *Duration*;
- *i:* taxa de juros;
- Δi: variação da taxa de juros;
- *V*: valor presente do fluxo;
- *C*: convexidade.

Vale observar que o primeiro termo da fórmula traz o conceito previamente abordado de *duration* modificada, enquanto o segundo termo mostra a contribuição da convexidade para o resultado da posição (segunda ordem do impacto da variação da taxa de juros do fator de risco).

A estimativa de resultados foi realizada para todos os vértices mapeados da carteira, por meio de processo idêntico ao apresentado acima. A soma dos resultados individuais dos vértices mostra o ganho ou perda real historicamente.

Uma vez levantados os retornos diários da carteira em análise dada variação histórica de preços dos títulos de renda fixa negociados no mercado, o VaR Histórico é o valor encontrado no quinto percentil.

Desta forma, chegamos ao primeiro resultado desejado:

- **VaR Histórico de 1 dia e 95% de confiança: US$ 727.199,65**

3.9 *VaR Paramétrico*

Para cálculo do VaR Paramétrico, primeiramente aplicamos o *EWMA* com fator de decaimento 0,94 para que as variações recentes das taxas de juros tenham maior impacto na análise.

Tal procedimento traz como resultado o vetor unitário (1xN) de volatilidades e a matriz NxN de correlação entre os retornos dos vértices mapeados:

	1 Mês	3 Meses	6 Meses	1 Ano	2 Anos	3 Anos	5 Anos	7 Anos	10 Anos
Vol (σ)	0.012%	0.008%	0.008%	0.008%	0.016%	0.025%	0.044%	0.061%	0.066%

Tabela 9 – Vetor de Volatilidade dos Vértices com *EWMA 0,94*

Fonte: Elaboração própria dos autores

	1 Mês	3 Meses	6 Meses	1 Ano	2 Anos	3 Anos	5 Anos	7 Anos	10 Anos
1 Mês	1	0,61	0,47	0,54	0,48	0,40	0,37	0,42	0,44
3 Meses	0,61	1	0,55	0,45	0,48	0,51	0,47	0,48	0,51
6 Meses	0,47	0,55	1	0,55	0,59	0,64	0,66	0,68	0,65
1 Ano	0,54	0,45	0,55	1	0,49	0,53	0,48	0,51	0,49
2 Anos	0,48	0,48	0,59	0,49	1	0,76	0,77	0,79	0,79
3 Anos	0,40	0,51	0,64	0,53	0,76	1	0,94	0,94	0,91
5 Anos	0,37	0,47	0,66	0,48	0,77	0,94	1	0,98	0,97
7 Anos	0,42	0,48	0,68	0,51	0,79	0,94	0,98	1	0,99
10 Anos	0,44	0,51	0,65	0,49	0,79	0,91	0,97	0,99	1

Tabela 10 - Matriz de Correlação entre os Vértices dos Fatores de Risco

Fonte: Elaboração própria dos autores

Uma vez que temos as matrizes acima, já temos todos os dados para calcular o VaR Paramétrico através da expressão abaixo:

$$VaR_t = \sqrt{\vec{\sigma}_{t|t-1} R_{t|t-1} \vec{\sigma}_{t|t-1}^{T}} \tag{27}$$

onde:

$$\vec{\sigma}_{t|t-1} = [1.65\sigma_{1,t|t-1}\omega_1\delta_1 \quad 1.65\sigma_{2,t|t-1}\omega_2\delta_2 \; \ldots \quad 1.65\sigma_{N,t|t-1}\omega_N\delta_N] \tag{28}$$

é o vetor individual (1xN) do VaR e

$$R_{t|t-1} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12,t|t-1} & \cdots & \rho_{1N,t|t-1} \\ \rho_{21,t|t-1} & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{N1,t|t-1} & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{29}$$

é a matriz NxN de correlação entre os retornos dos fluxos de caixa.

O resultado obtido nos retorna o valor :

- **VaR Paramétrico de 1 dia e 95% de confiança: US$ 731.682,80**

3.10 *VaR Monte Carlo*

De maneira geral, a simulação de Monte Carlo consiste na criação de um grande número de possíveis cenários e reavaliação do valor dos ativos que compõem a carteira em cada um dos cenários. O VaR é obtido pelo quinto percentil da distribuição de variação do valor da carteira.

Segundo LONGERSTAEY (1996), o VaR de Monte Carlo difere do Paramétrico não pela forma como os movimentos de mercado são previstos, já que ambos utilizam como entrada as mesmas volatilidades e correlações, mas pela forma como o valor do portfólio muda como resultado do movimento de mercado. A abordagem paramétrica aproxima as mudanças de valor – multiplicando uma mudança de taxa (volatilidade) pela sensibilidade à esta mudança (*duration* e convexidade) –, enquanto a simulação histórica e a de Monte Carlo recalculam completamente o valor do portfólio.

A simulação histórica quantifica o risco pela replicação de uma trajetória histórica específica de evolução do mercado, ao contrário da abordagem da simulação estocástica que busca gerar um número muito maior de trajetórias de retornos do mercado. Estes retornos são gerados por meio de um processo estocástico (por exemplo as taxas de juros seguirem um passeio aleatório) e parâmetros estastísticos (a média e variância das variáveis aleatórias).

Segundo Vlaar (2000), pelo menos 10.000 simulações devem ser feitas para calcular o VaR de carteiras de renda fixa. Desta forma, realizamos 15.000 simulações neste trabalho (VLAAR, 2000).

Seguindo o procedimento apresentado no capítulo dois para calcular o VaR de Monte Carlo, partimos para geração de variáveis aleatórias correlacionadas. Para tal, decompomos a matriz de correlação entre os fatores de risco apresentada na seção anterior de forma a obter a matriz triangular inferior *L*, denominada matriz de Cholesky. Aplicando esta matriz ao vetor de variáveis aleatórias com distribuição normal-padrão, *u*, obtermos o vetor *Lu* com as propriedades de covariância esperadas para o sistema modelado.

	1 Mês	3 Meses	6 Meses	1 Ano	2 Anos	3 Anos	5 Anos	7 Anos	10 Anos
1 Mês	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3 Meses	0,607	0,794	0	0	0	0	0	0	0
6 Meses	0,473	0,334	0,815	0	0	0	0	0	0
1 Ano	0,542	0,158	0,293	0,771	0	0	0	0	0
2 Anos	0,477	0,237	0,345	0,118	0,764	0	0	0	0
3 Anos	0,400	0,339	0,410	0,175	0,425	0,589	0	0	0
5 Anos	0,374	0,303	0,472	0,123	0,443	0,491	0,306	0	0
7 Anos	0,422	0,281	0,475	0,130	0,449	0,448	0,264	0,170	0
10 Anos	0,439	0,301	0,423	0,103	0,458	0,426	0,283	0,182	0,148

Tabela 11 - Matriz de Cholesky

Fonte: Elaboração própria dos autores

Com o vetor *Lu* obtido no processo anterior, recalculamos o valor do portfólio da mesma maneira realizada anteriormente no cálculo do VaR Histórico. Para tal, basta aplicar a equação 26, que emprega os conceitos de *duration* e convexidade.

Para concluir o cálculo do VaR por meio da simulação de Monte Carlo, repetimos o procedimento apresentado 15.000 vezes e, simplesmente, observamos o quinto percentil de resultados originados para a carteira.

- **VaR Monte Carlo de 1 dia e 95% de confiança: US$ 732.121,83**

3.11 *Backtesting dos Resultados*

KUPIEC (1995) gerou regiões regiões de não-rejeição com intervalo de confiança de 95% para o modelo de *backtesting*. A tabela abaixo apresenta a distinção de traz tais regiões:

		Região de não-rejeição para o número de exceções N		
Nível de probabilidade *p*	**Nível de confiança do VaR (%)**	**T = 255 dias**	**T = 510 dias**	**T = 1000 dias**
0,01	99	N < 7	1 < N < 11	4 < N < 17
0,025	97,5	2 < N < 11	6 < N < 21	15 < N < 36
0,05	95	6 < N < 21	16 < N < 36	37 < N < 65
0,075	92,5	11 < N < 28	27 < N < 51	59 < N < 92
0,1	90	16 < N < 36	38 < N < 65	81 < N < 120

Tabela 12 - Região de não-rejeição do modelo de *backtesting*

Fonte: KUPIEC (1995)

Como a janela de retornos utilizada no *backtesting* é a mesma desenvolvida para o VaR Histórico, a amostra *T* de dois anos fornece o parâmetro desejado. Ao mesmo tempo, utilizamos um nível de confiança de 95% nos três modelos. Desta forma, validaremos os modelos caso o número de exceções esteja entre 16 e 36 observações.

A tabela a seguir resume os valores encontrados após a realização de tal procedimento:

	VaR de 1 dia e 95% (US$)	N
Modelo Histórico	727.199,65	26
Modelo Paramétrico	731.682,80	25
Modelo Monte Carlo	732.121,83	25

Tabela 13 - *Backtesting* dos modelos

Fonte: KUPIEC (1995)

Conforme previsto, pela proximidade dos valores obtidos, todos os modelos desenvolvidos são aceitos com 95% de confiança por terem se enquadrado no intervalo de *N* definido por *Kupiec*.

4. Considerações Finais

O sucesso dos negócios de uma empresa está intimamente relacionado com a sua gestão de riscos. No âmbito das instituições financeiras este papel se mostra ainda mais relevante, pois a correta mensuração de possíveis perdas pode ter cunho estratégico relevante na tomada de decisões e proporcionar vantagens competitivas para a companhia.

O surgimento do *Value at Risk* e seu aprimoramento ao longo do tempo é um reflexo da importância cada vez maior que a administração de riscos vem assumindo no mercado financeiro. O método se difundiu por conseguir simplificar o risco de posições em ativos com características diferentes a um único valor. Este valor representa a perda estimada em quantidades monetárias para uma determinada janela de dias em um escolhido nível de confiança.

Assim sendo, cabe ressaltar que tal medida só é realmente capaz de agregar aos gestores de risco quando estes tem embasamento teórico suficiente para compreender o que ela representa. Isto é, como os pressupostos adotados são peça fundamental no resultado obtido, o VaR se torna muito mais poderoso quando entendido em profundidade.

Este trabalho apresentou aos leitores uma aplicação prática do cálculo do *Value at Risk* por três modelos diferentes. Nesta jornada, o caminho percorrido e se mostrou de grande valia pois demandou o estudo de relevantes conteúdos não só da área de risco como também da gestão financeira de ativos – caso da renda fixa.

Como últimos pontos, gostaríamos de destacar que apesar de todos os modelos terem sido aceitos – o que comprovou a eficiência das variáveis aplicadas a cada caso –, algumas diferenças merecem ser relembradas: o VaR Paramétrico aproxima mudanças de valor nas taxas de mercado, enquanto a abordagem histórica e a simulação de Monte Carlo recalculam completamente o valor do portfólio. Isto poderia apontar por uma preferência aos dois últimos modelos, mas como não há garantias de que o passado é um bom previsor do futuro, é preciso compreender também as limitações da abordagem histórica. Desta maneira, podemos apontar a simulação estocástica de Monte Carlo como o mais robusto dos modelos, pois sua flexibilidade gera o maior leque de possibilidades aos gestores de risco. Apesar do grande esforço computacional exigido, a aplicação deste modelo pode se tornar importante diferencial, no contexto em que cenários econômicos extremamente complexos se tornam cada vez mais presentes.

5. Referências Bibliográficas

ALEXANDRE ASSAF NETO. **Mercado Financeiro**. 10. ed. [S.l: s.n.], 2011.

ANDREWS, S. Larry Fink's $12 Trillion Shadow. **Vanity Fair**, n. April, 1 abr 2010.

ARCOVERDE, G. L. **Alocação de capital para cobertura de risco de mercado de taxas de juros de natureza pré-fixada**. Dissertation. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/handle/10438/225>. Acesso em: 15 jun. 2013.

BANCO DO BRASIL. **CIRCULAR 2972**. . [S.l: s.n.]. Disponível em: <http://www.bcb.gov.br/pre/normativos/circ/2000/pdf/circ_2972_v2_l.pdf>. Acesso em: 12 jun. 2013.

BLACKROCK. **iShares 7-10 Year Treasury Bond ETF**. Disponível em: <http://us.ishares.com/product_info/fund/overview/IEF.htm>. Acesso em: 01 jun. 2013.

BM&FBOVESPA. **ETFs – Fundos de Índices**. Disponível em: <http://www.bmfbovespa.com.br/etf/fundo-de-indice.aspx?Idioma=pt-br>. Acesso em: 12 jun. 2013.

DOWD, K. **Beyond value at risk: the new science of risk management**. [S.l.]: Wiley, 1998.

GUILHERME LINS ARCOVERDE. Uma nota sobre o procedimento de mapeamento em vértices nos modelos de cálculo do VAR de instrumentos de Renda fixa. [S.d.].

HULL, J. **Options, futures, and other derivatives**. Upper Saddle River, N.J.: Pearson/Prentice Hall, 2006.

KUPIEC, P. H. Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models. **The Journal of Derivatives**, v. 3, n. 2, p. 73–84, jan 1995.

LAMBADIARIS, G.; PAPADOPOULOU, L.; SKIADOPOULOS, G.; ZOULIS, Y. VAR: history or simulation? Risk, v. 16, n. 9, p. 122–127, 2003.

LONGERSTAEY, J.; SPENCER, M. RiskMetricsTM—Technical Document. **Morgan Guaranty Trust Company of New York: New York**, 1996.

MACAULAY, F. R. Some Theoretical Problems Suggested by the Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States since 1856. **NBER**, 1 jan 1938.

MANUELA SILVA MACHRY. **O uso do Value at Risk (VAR) como medida de risco para os fundos de pensão**. São Paulo, 2003.

MCKIBBIN, W. J.; STOECKEL, A. Paper presented to 13th Global Economic Analysis. [S.d.].

PHILIPPE JORION. **Value At Risk - a Nova Fonte de Referência Para a Gestão do Risco Financeiro**. 2. ed. [S.l.]: Bm&f, 2012.

THOMAS J. LINSMEIER; NEIL D. PEARSON. Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk. 07/1996. [S.d.].

VLAAR, P. J. Value at risk models for Dutch bond portfolios. **Journal of banking & finance**, v. 24, n. 7, p. 1131–1154, 2000.

APÊNDICE A – Código em VBA para procedimento de *Bootstrapping*

```
Function AtualizaBancoCurvas(datainicio As String, datafim As String, Curvas() As
TCurva)

    Dim Date1 As String
    Dim Date2 As String
    Dim Arr() As String

    i = 0

    For i = 0 To UBound(Curvas) - 1
        a = 1
        For j = 0 To UBound(Curvas(i).Taxas) - 1

            Worksheets("Zero Coupon").Select()
            Worksheets("Zero Coupon").Range("A" & j + 1) = Date1
            Worksheets("Zero Coupon").Range("B" & j + 1) = Date2
            Worksheets("Zero Coupon").Range("C" & j + 1) = Value

            On Error GoTo erro
            a = a + 1
            If a = 11 Then
                j = 0
            End If
        Next j
        Curvas(i).encontrou = "Procedimento realizado com sucesso"
    Next i
    Exit Function
erro:
    MsgBox("Erro no procedimento.")
End Function

Private Sub CommandButton_Click()

    Dim i, j, z, x, Tam, ifinal, jfinal, jcurvas, count As Long
    Dim Resultado(), curvas_banco(), comparacao() As Object
    Dim Curvas() As TCurva
    Dim Arr() As String
    Dim Interp As TInterpolador

    If Not IsDate(TextBox1.Text) Then
        MsgBox "Preencher data de início"
        Exit Sub
    Else
        Data1 = CDate(TextBox1.Text)
    End If

    If Not IsDate(TextBox2.Text) Then
        MsgBox "Preencher data final"
        Exit Sub
    Else
        Data2 = CDate(TextBox2.Text)
    End If

    ifinal = Worksheets("Term Structures").Range("A65000").End(xlUp).Row()
    jfinal = Worksheets("Term Structures").Range("XFC9").End(xlToLeft).Column()
    jcurvas = Worksheets("Term Structures").Range("XFC6").End(xlToLeft).Column()

    ReDim Curvas(0)
```

```
    z = 0

    For j = 2 To jcurvas
       Curvas(z).Nome = Worksheets("Term Structures").Cells(6, j).Value
       ReDim Preserve Curvas(UBound(Curvas) + 1)
       z = z + 1
    Next j

    For k = 0 To UBound(Curvas)
        z = 0
        ReDim Curvas(k).Ativo(z)
        For j = 2 To jfinal
            If (Worksheets("Term Structures").Cells(6, j) = Curvas(k).Nome) And (Not
(Worksheets("Term Structures").Cells(7, j) = "")) Then
                Curvas(k).Ativo(z).Nome = Worksheets("Term Structures").Cells(9, j)
                Curvas(k).Ativo(z).tipoAtivo = Worksheets("Term Structures").Cells(7,
j)
                Curvas(k).Ativo(z).DiretivaVencimento = Worksheets("Term
Structures").Cells(5, j)
                Curvas(k).Ativo(z).CuponsPorAno = Worksheets("Term
Structures").Cells(3, j)
                Curvas(k).Ativo(z).Cupons = Worksheets("Term Structures").Cells(4, j)
                Curvas(k).Ativo(z).day_Count = Worksheets("Term Structures").Cells(1,
j)
                Curvas(k).Ativo(z).tipoTaxa = Worksheets("Term Structures").Cells(2,
j)
                ReDim Curvas(k).Ativo(z).Taxas(0)
                ReDim Preserve Curvas(k).Ativo(UBound(Curvas(k).Ativo) + 1)
                i = ifinal
                Do While i >= 10
                    If Worksheets("Term Structures").Cells(i, 1).Value <= Data2 Then
                        If Worksheets("Term Structures").Cells(i, 1).Value >= Data1
Then
                            ReDim Arr(2)
                            Arr(0) = Worksheets("Term Structures").Cells(i, 1).Value
                            Arr(1) = ""
                            Arr(2) = Worksheets("Term Structures").Cells(i, j).Value
                            Curvas(k).Ativo(z).Taxas(UBound(Curvas(k).Ativo(z).Taxas))
= Arr
                            ReDim Preserve
Curvas(k).Ativo(z).Taxas(UBound(Curvas(k).Ativo(z).Taxas) + 1)
                        Else
                            i = 9
                        End If
                    End If
                    i = i - 1
                Loop
                z = z + 1
            End If
        Next j
    Next k

    For j = 0 To UBound(Curvas) - 1
        ReDim Curvas(j).Taxas(0)
    Next j

    If Not (UBound(Curvas(0).Ativo) = 0) Then
        For j = 0 To UBound(Curvas) - 1
            z = 0
            For i = 0 To UBound(Curvas(0).Ativo(0).Taxas) - 1
```

```
                Interp = New TInterpolador
                Interp.Create()
                x = z
                count = 0
                For k = 0 To UBound(Curvas(j).Ativo) - 1
                    If IsNumeric(Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(2)) Then
                        count = count + 1
                    End If
                Next k
                If count >= 5 Then
                    For k = 0 To UBound(Curvas(j).Ativo) - 1
                        If IsNumeric(Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(2)) Then
                            If IsDate(Curvas(j).Ativo(k).DiretivaVencimento) Then
                                Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(1) =
Curvas(j).Ativo(k).DiretivaVencimento
                            Else
                                Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(1) =
CalculaVencimento(Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(0),
Curvas(j).Ativo(k).DiretivaVencimento)
                            End If

                            If LCase(Curvas(j).Ativo(k).tipoAtivo) = "basic" Then
                                CalculaResultadoBasic(Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(0),
Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(1), Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(2),
Curvas(j).Ativo(k).tipoTaxa, Curvas(j).Ativo(k).day_Count, Interp, Curvas(j).Taxas(z))
                                z = z + 1
                                ReDim Preserve Curvas(j).Taxas(UBound(Curvas(j).Taxas)
+ 1)
                            ElseIf LCase(Curvas(j).Ativo(k).tipoAtivo) = "bond" Then
                                If Not (z - x = 0) Then

CalculaResultadoBond(Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(0), Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(1),
Curvas(j).Ativo(k).Taxas(i)(2), Curvas(j).Ativo(k).tipoTaxa,
Curvas(j).Ativo(k).day_Count, CInt(Curvas(j).Ativo(k).Cupons),
Curvas(j).Ativo(k).CuponsPorAno, Interp, Curvas(j).Taxas(z))
                                    z = z + 1
                                    ReDim Preserve
Curvas(j).Taxas(UBound(Curvas(j).Taxas) + 1)
                                End If
                            End If
                        End If
                    Next k
                End If
            Next i
        Next j
    End If

If UBound(Curvas) <> 0 Then
      AtualizaBancoCurvas(TextBox1.Text, TextBox2.Text, Curvas())
End If

    For k = 0 To UBound(Curvas)
        For z = 0 To UBound(Curvas(k).Ativo)
            ReDim Curvas(k).Ativo(z).Taxas(0)
        Next z
        ReDim Curvas(k).Ativo(0)
        ReDim Curvas(k).Taxas(0)
    Next k

    ReDim Curvas(0)
```

```
End Sub

Function Create()
    Limpa()
End Function

Function Limpa()
    ReDim VetorInterpoladoX(0)
    ReDim VetorInterpoladoY(0)
End Function

Function CalculaVencimento(ByVal DataBase As Date, ByVal Informacao As String) As Date
    Dim Dia As Integer, Mes As Integer, Ano As Integer
    Dim Dias As Integer, Meses As Integer
    Dim PosicaoInicial As Integer
    Dim Tam As Integer

    Tam = Len(Informacao)
    CalculaVencimento = 0
    If Tam = 0 Then
        Exit Function
    End If

    CalculaVencimento = 0

    If CalculaPeriodoTerminador(Informacao, Dias, Meses) Then
        CalculaVencimento = Int(DataBase + Dias)
        If (Meses <> 0) Then
            CalculaVencimento = AvancaMeses(CalculaVencimento, Meses)
        End If
        If WorksheetFunction.Weekday(CalculaVencimento) = 7 Then
            CalculaVencimento = CalculaVencimento + 2
        ElseIf WorksheetFunction.Weekday(CalculaVencimento) = 1 Then
            CalculaVencimento = CalculaVencimento + 1
        End If
        Exit Function
    End If
End Function

Function CalculaPeriodoTerminador(Terminador As String, Dias As Integer, Meses As
Integer) As Boolean
    Dim LenTerminador As Integer, FatorDia As Integer, FatorMes As Integer, valor As
Integer
    LenTerminador = Len(Terminador)

    If LenTerminador = 0 Then
        Meses = 0
        Dias = 0
        CalculaPeriodoTerminador = False
        Exit Function
    End If

    If LCase(Right(Terminador, 1)) = "m" Then
        FatorMes = 1
    ElseIf LCase(Right(Terminador, 1)) = "y" Or IsNumeric(Right(Terminador, 1)) Then
        FatorMes = 12
    Else
        FatorMes = 0
    End If

    If Not IsNumeric(LCase(Right(Terminador, 1))) Then
```

```
        Terminador = Left(Terminador, LenTerminador - 1)
    End If

    If IsNumeric(Terminador) Then
        valor = CInt(Terminador)
    Else
        Meses = 0
        Dias = 0
        CalculaPeriodoTerminador = False
        Exit Function
    End If

        Meses = FatorMes * valor
        Dias = FatorDia * valor
        CalculaPeriodoTerminador = True
End Function

Function AvancaMeses(data As Date, NMeses As Integer) As Date

    Dim Dia As Integer, Mes As Integer, Ano As Integer
    Dim MaxDias As Integer

    Ano = Year(data)
    Mes = Month(data)
    Dia = Day(data)

    Mes = Mes + NMeses

    While Mes > 12
        Mes = Mes - 12
        Ano = Ano + 1
    End While

    While Mes < 1
        Mes = Mes + 12
        Ano = Ano - 1
    End While

    AvancaMeses = DateSerial(Ano, Mes, 1)
    MaxDias = Day(FinalMesCorrente(AvancaMeses))

    If Dia > MaxDias Then
        Dia = MaxDias
    End If

    AvancaMeses = DateSerial(Ano, Mes, Dia)
End Function

Function FinalMesCorrente(data As Date) As Date
    Dim Dia As Integer, Mes As Integer, Ano As Integer
    FinalMesCorrente = WorksheetFunction.EoMonth(data, 0)
End Function

Function CalculaResultadoBasic(ByVal data As Date, ByVal maturity As Date, ByVal valor
As Double, ByVal tipo_Taxa As String, ByVal day_Count As String, Interpolador As
TInterpolador, Resultado As Object)
    Dim Fator As Double
    Dim Prazo As Double
    Dim Arr() As String
    Dim basis As TBasis
```

```
    basis = New TBasis
    basis.Create(day_Count)

    Prazo = basis.calculaperiodoanual(data, maturity)

    If LCase(tipo_Taxa) = "linear" Then
        Fator = 1 + valor / 100 * Prazo
    Elseif LCase(tipo_Taxa) = "composto" Then
        Fator = (1 + valor / 100) ^ Prazo
    End If

    Interpolador.Adiciona(Prazo, Fator)

    ReDim Arr(3)
    Arr(0) = data
    Arr(1) = Prazo
    Arr(2) = Fator
    Arr(3) = maturity
    Resultado = Arr
End Function

    Function CalculaResultadoBond(ByVal data As Date, ByVal maturity As Date, ByVal
TaxaPre As Double, ByVal tipo_Taxa As String, ByVal day_Count As String, ByVal Cupons
As Integer, ByVal Cupons_Ano As Double, Interpolador As TInterpolador, Resultado As
Variant)

    Dim preco As Double
    Dim TaxaPos As Double
    Dim FatorTaxaPos As Double
    Dim Prazo As Double
    Dim Arr() As String
    Dim basis As TBasis

    basis = New TBasis
    basis.Create(day_Count)

    Prazo = basis.calculaperiodoanual(data, maturity)
    preco = CalculaPrecoRFYTM(Prazo, 6, TaxaPre, Cupons, Cupons_Ano, tipo_Taxa)

    If FindRoot(0, 100, Interpolador, Prazo, 6, TaxaPos, Cupons, Cupons_Ano,
tipo_Taxa, preco) Then
        If LCase(tipo_Taxa) = "linear" Then
            FatorTaxaPos = (1 + TaxaPos / 100 * Prazo)
        Elseif LCase(tipo_Taxa) = "composto" Then
            FatorTaxaPos = (1 + TaxaPos / 100) ^ Prazo
        End If
        Interpolador.Adiciona(Prazo, FatorTaxaPos)

        ReDim Arr(3)
        Arr(0) = data
        Arr(1) = Prazo
        Arr(2) = FatorTaxaPos
        Arr(3) = maturity
        Resultado = Arr
    End If

End Function

    Function CalculaPrecoRFYTM(Prazo As Double, TaxaPre As Double, ytm As Double,
Cupons As Integer, Cupons_Ano As Double, tipo As String) As Double
    Dim TempoCupomSemestral
```

```
    Dim NPontos As Integer
    Dim VP As Double
    Dim T As Double
    Dim FatorDesconto As Double
    Dim FatorPre As Double
    Dim i As Integer

    TempoCupomSemestral = 1 / Cupons_Ano

    VP = 0
    T = Prazo

    FatorPre = 1 + TaxaPre / 100 * TempoCupomSemestral

    i = Cupons
    While i >= 1
        FatorDesconto = (1 + ytm / 100) ^ T
        VP = VP + 100 * (FatorPre - 1) / FatorDesconto
        T = T - TempoCupomSemestral
        i = i - 1
    End While
    FatorDesconto = (1 + ytm / 100) ^ Prazo
    VP = VP + 100 / FatorDesconto
    CalculaPrecoRFYTM = VP
End Function

Function Create(tipo_recebido As String)
    tipo = tipo_recebido
End Function

Function calculaperiodoanual(inicio As Date, final As Date) As Double

    If (LCase(tipo) = "actual365") Then
        calculaperiodoanual = calculaPeriodoAnualActual365(inicio, final)
    Else
        calculaperiodoanual = 0
    End If

End Function

Private Function calculaPeriodoAnualActual365(inicio As Date, final As Date) As Double
    calculaPeriodoAnualActual365 = calculaPeriodoDiarioActual365(inicio, final) / 365
End Function

Private Function calculaPeriodoDiarioActual365(inicio As Date, final As Date) As
Integer
    calculaPeriodoDiarioActual365 = Int(final) - Int(inicio)
End Function

Function Adiciona(x As Double, Y As Double)
    Dim Tam As Integer
    Dim i As Integer, j As Integer

    Tam = UBound(VetorInterpoladoX)

    For i = 0 To Tam
        If VetorInterpoladoX(i) > x Then
            ReDim Preserve VetorInterpoladoX(Tam + 1)
            ReDim Preserve VetorInterpoladoY(Tam + 1)
            j = Tam
            While (j >= i)
```

```
                VetorInterpoladoX(j + 1) = VetorInterpoladoX(j)
                VetorInterpoladoY(j + 1) = VetorInterpoladoY(j)
                j = j - 1
            End While
            VetorInterpoladoX(i) = x
            VetorInterpoladoY(i) = Y
            Exit Function
        End If

        If VetorInterpoladoX(i) = x Then
            VetorInterpoladoY(i) = Y
            Exit Function
        End If
    Next i

    ReDim Preserve VetorInterpoladoX(Tam + 1)
    VetorInterpoladoX(Tam) = x

    ReDim Preserve VetorInterpoladoY(Tam + 1)
    VetorInterpoladoY(Tam) = Y
End Function

Function CalculaVencimento(ByVal DataBase As Date, ByVal Informacao As String) As Date
    Dim Dia As Integer, Mes As Integer, Ano As Integer
    Dim Dias As Integer, Meses As Integer
    Dim PosicaoInicial As Integer
    Dim Tam As Integer

    Tam = Len(Informacao)
    CalculaVencimento = 0
    If Tam = 0 Then
        Exit Function
    End If

    CalculaVencimento = 0

    If CalculaPeriodoTerminador(Informacao, Dias, Meses) Then
        CalculaVencimento = Int(DataBase + Dias)
        If (Meses <> 0) Then
            CalculaVencimento = AvancaMeses(CalculaVencimento, Meses)
        End If
        If WorksheetFunction.Weekday(CalculaVencimento) = 7 Then
            CalculaVencimento = CalculaVencimento + 2
        ElseIf WorksheetFunction.Weekday(CalculaVencimento) = 1 Then
            CalculaVencimento = CalculaVencimento + 1
        End If
        Exit Function
    End If
End Function

Function CalculaPrecoRF(Interpolador As TInterpolador, Prazo As Double, TaxaPre As
Double, TaxaPos As Double, Cupons As Integer, Cupons_Ano As Double, tipo As String) As
Double
    Dim TempoCupomSemestral
    Dim NPontos As Integer
    Dim VP As Double
    Dim T As Double
    Dim UltimoPrazo As Double
    Dim UltimoFator As Double
    Dim FatorDesconto As Double
    Dim FatorPre As Double
```

```
    Dim FatorTaxaPos As Double
    Dim Alfa As Double
    Dim i As Integer

    TempoCupomSemestral = 1 / Cupons_Ano
    If Interpolador.PegaNumeroPontos > 0 Then
        NPontos = Interpolador.PegaNumeroPontos
        UltimoPrazo = Interpolador.PegaValorX(NPontos - 1)
        UltimoFator = Interpolador.PegaValorY(NPontos - 1)
    Else
        UltimoPrazo = 0
        UltimoFator = 1
    End If

    VP = 0
    T = Prazo
    FatorPre = 1 + TaxaPre / 100 * TempoCupomSemestral
    i = Cupons

    While i >= 1

        If T > UltimoPrazo Then
            Alfa = (T - UltimoPrazo) / (Prazo - UltimoPrazo)
            If LCase(tipo) = "linear" Then
                FatorTaxaPos = (1 + TaxaPos / 100 * Prazo)
                FatorDesconto = UltimoFator * (1 - Alfa) + FatorTaxaPos * Alfa
            Else
                FatorTaxaPos = (1 + TaxaPos / 100) ^ Prazo
                FatorDesconto = UltimoFator * ((FatorTaxaPos / UltimoFator) ^ Alfa)
            End If
        Else
            FatorDesconto = Interpolador.interpolaLogLinear(T)
        End If
        VP = VP + 100 * (FatorPre - 1) / FatorDesconto
        T = T - TempoCupomSemestral
        i = i - 1
    End While
    If tipo = "linear" Then
        FatorDesconto = (1 + TaxaPos / 100 * Prazo)
    Elseif tipo = "composto" Then
        FatorDesconto = (1 + TaxaPos / 100) ^ Prazo
    End If
    VP = VP + 100 / FatorDesconto
    CalculaPrecoRF = VP
End Function

Function FindRoot(Min As Double, Max As Double, Interpolador As TInterpolador, Prazo
As Double, TaxaPre As Double, TaxaPos As Double, Cupons As Integer, Cupons_Ano As
Double, tipo As String, preco As Double) As Boolean
    Dim Mean As Double
    Dim VMean As Double
    Dim VMax As Double
    Dim Error As Double
    Dim ACCEPTABLE_ERROR As Double
    Dim Iteractions As Integer
    Dim MAX_ITERACTIONS As Integer
    Dim VP As Double

    ACCEPTABLE_ERROR = 0.0000000001
    MAX_ITERACTIONS = 500
    Mean = (Min + Max) / 2
```

```
    VP = CalculaPrecoRF(Interpolador, Prazo, TaxaPre, Mean, Cupons, Cupons_Ano, tipo)
- preco

    If (Abs(VP) < ACCEPTABLE_ERROR) Then
        TaxaPos = Mean
        FindRoot = True
        Exit Function
    End If

  Error = 0

    For Iteractions = 0 To MAX_ITERACTIONS
        VMean = CalculaPrecoRF(Interpolador, Prazo, TaxaPre, Mean, Cupons, Cupons_Ano,
tipo) - preco
        VMax = CalculaPrecoRF(Interpolador, Prazo, TaxaPre, Max, Cupons, Cupons_Ano,
tipo) - preco
    Error = VMean

    If Abs(Error) < ACCEPTABLE_ERROR Then
            TaxaPos = Mean
            GoTo final
        End If
        If (VMean * VMax < 0) Then
            Min = Mean
        Else
            Max = Mean
        End If

        Mean = (Min + Max) / 2
    Next Iteractions
final:
  FindRoot = (Abs(Error) < ACCEPTABLE_ERROR)
    TaxaPos = Mean
End Function

Function PegaNumeroPontos() As Integer
    PegaNumeroPontos = UBound(VetorInterpoladoX)
End Function

Function PegaValorX(Indice As Integer) As Double
    If (Indice >= 0) And (Indice <= UBound(VetorInterpoladoX)) Then
        PegaValorX = VetorInterpoladoX(Indice)
    Else
        PegaValorX = 0
    End If
End Function

Function PegaValorY(Indice As Integer) As Double
    If (Indice >= 0) And (Indice <= UBound(VetorInterpoladoY)) Then
        PegaValorY = VetorInterpoladoY(Indice)
    Else
        PegaValorY = 0
    End If
End Function

Function interpolaLogLinear(x As Double) As Double
    Dim NPontos As Integer, i As Integer
    Dim Alfa As Double

    NPontos = UBound(VetorInterpoladoX)
```

```
    If NPontos = 0 Then
        interpolaLogLinear = 1
        Exit Function
    End If

    If NPontos <> UBound(VetorInterpoladoY) Then
        interpolaLogLinear = 1
        Exit Function
    End If

    If x <= 0 Then
        interpolaLogLinear = 1
        Exit Function
    End If

    If x <= VetorInterpoladoX(0) Or NPontos = 1 Then
        interpolaLogLinear = (VetorInterpoladoY(0) ^ (x / VetorInterpoladoX(0)))
        Exit Function
    End If

    For i = 1 To NPontos - 1
        If x < VetorInterpoladoX(i) Then
            Alfa = (x - VetorInterpoladoX(i - 1)) / (VetorInterpoladoX(i) -
VetorInterpoladoX(i - 1))
            If VetorInterpoladoY(i - 1) = 0 Then
                interpolaLogLinear = 1
            Else
                If VetorInterpoladoY(i) * VetorInterpoladoY(i - 1) < 0 Then
                    interpolaLogLinear = VetorInterpoladoY(i - 1) * (1 - Alfa) +
VetorInterpoladoY(i) * Alfa
                Else
                    interpolaLogLinear = VetorInterpoladoY(i - 1) *
((VetorInterpoladoY(i) / VetorInterpoladoY(i - 1)) ^ Alfa)
                End If
            End If
            Exit Function
        End If
    Next i

    If VetorInterpoladoX(NPontos - 1) = 0 Then
        interpolaLogLinear = VetorInterpoladoY(NPontos - 1)
    Else
        If (VetorInterpoladoY(NPontos - 1) < 0) And (x < VetorInterpoladoX(NPontos -
1)) Then
            interpolaLogLinear = 1
        Else
            interpolaLogLinear = VetorInterpoladoY(NPontos - 1) ^ (x /
VetorInterpoladoX(NPontos - 1))
        End If
    End If

End Function


Type TAtivo
       Nome As String
       tipoAtivo As String
       DiretivaVencimento As String
       Cupons As Integer
       CuponsPorAno As Double
       Taxas() As Variant
```

```
        tipoTaxa As String
        day_Count As String
End Type

Type TCurva
        idCurva As Integer
        encontrou As String
        Nome As String
        Ativo() As TAtivo
        Taxas() As Variant
End Type
```