

COPPEAD/UF RJ

RELATÓRIO COPPEAD Nº 56

SOBRE O USO INCORRETO DE NÚMEROS  
ALEATÓRIOS EM SIMULAÇÃO: UM ESTUDO  
DA DISTRIBUIÇÃO DA AMPLITUDE  
DE UMA AMOSTRA UNIFORME

Eduardo Saliby\*

Fevereiro de 1981

## I. INTRODUÇÃO

Desde suas origens, a utilização do método de Monte Carlo e, de forma equivalente, do de simulação,<sup>1</sup> tem como fundamento o uso de amostras aleatórias, comumente obtidas em computador através do uso de rotinas de geração ao acaso e de suas transformações, conforme citado em Kleijnen [2], Naylor et alii [4], Shimizu [6] e Tocher [7], entre outros autores.

Na realidade, o uso de números ao acaso para esse tipo de estudo é algo mais antigo, conhecido anteriormente como amostragem experimental, e que foi largamente utilizado, no início deste século, conforme Tocher [7, p. 43], como uma técnica experimental para obtenção de resultados numéricos para problemas estatísticos de difícil solução analítica.

Talvez uma das mais antigas aplicações desta abordagem de que se tem conhecimento foi a feita por Student, em 1908, ao estudar as características da distribuição  $t$ , que ele havia deduzido teoricamente, mas que ainda se encontrava incompleta.

Mais tarde, o método foi "rebatizado" como "Método de Monte Carlo" [3], e, com o advento do computador, o uso da simulação como técnica de pesquisa operacional ganhou muitos adeptos, que estavam, contudo, mais preocupados com sua utilidade prática do que com o estudo em maior profundidade desta metodologia.

No entanto, apesar dos marcantes progressos verificados em relação aos seus aspectos computacionais, o método de simulação pouco evoluiu a partir de suas idéias iniciais, perdurando, por exemplo, até hoje, o uso de números aleatórios como uma de suas características básicas.

Porém, num estudo recentemente apresentado [5], apontamos a existência de um erro metodológico no uso de números aleatórios em simulação, e que em lugar de amostragem aleatória simples, deve

ria ser utilizado o método proposto denominado amostragem descritiva.

Embora simples, o método da amostragem descritiva representa uma grande mudança conceitual em relação ao uso corrente de simulação, uma vez que, segundo este procedimento, os valores amostrais deveriam ser deterministicamente selecionados conforme a distribuição que se quer representar na simulação, tendo apenas sua seqüência randomizada.

Apesar de já terem sido apresentados alguns resultados confirmando a validade da crítica feita, tornou-se necessário, para sua aceitação mais generalizada, que se obtivessem novos resultados empíricos.

Neste trabalho, apresenta-se o primeiro destes estudos destinados a comprovar que o procedimento amostral correto a ser empregado numa simulação é, de fato, a amostragem descritiva. Para isso, foi estudado o problema relativo à distribuição da amplitude de uma amostra proveniente de uma população uniformemente distri  
buída.

Uma vez que o objetivo do presente estudo é o de comparar a eficiência do método de amostragem aleatória simples com o de amostragem descritiva, a metodologia adotada consistiu na determinação, para cada um destes métodos, da variabilidade (precisão) associada aos respectivos resultados simulados. Como será visto mais adiante, ambas as abordagens conduzem a resultados que podem ser aceitos como não tendenciosos; em conseqüência, o procedimento amostral mais eficiente será aquele que produzir resultados cuja variância seja mínima.

Além da comparação entre os métodos amostrais, são tam  
bém apresentados alguns resultados obtidos da aplicação das idéias do Modelo Linear de Resposta [5], ou simplesmente MLR, a este pro  
blema. A teoria do MLR foi o ponto de partida para a crítica que

fizemos ao uso incorreto de números aleatórios em simulação. Segundo esta teoria, os resultados de uma simulação tendem a se relacionar, num grau de medida que depende da natureza do problema estudado, com os respectivos valores dos momentos amostrais das suas variáveis de entrada e de acordo com um modelo de regressão linear.

A teoria do MLR revela a importância do erro amostral na precisão final de um resultado de simulação e que, uma vez minimizado esse erro, chegar-se-á, provavelmente, a resultados mais precisos.

## II. O PROBLEMA ESTUDADO E A METODOLOGIA ADOTADA

O problema ora examinado refere-se ao estudo da distribuição da amplitude de uma amostra de  $K = 5$  observações provenientes de uma população com distribuição uniforme no intervalo  $(0,1)$ . O problema tem, inclusive, uma solução teórica exata, caracterizada pela função de densidade de probabilidade da amplitude amostral, que é dada por

$$g(r) = K \cdot (K-1) r^{K-2} (1-r) \quad \text{para } 0 \leq r \leq 1 \quad (1)$$

Segue-se de (1) que o valor esperado da amplitude é

$$E(R) = \frac{K-1}{K+1}, \quad (2)$$

e a sua variância

$$\text{Var}(R) = \frac{2(K-1)}{(K+1)^2(K+2)} \quad (3)$$

No caso específico de  $K = 5$ ,

$$E(R) = 2/3 \text{ e} \\ \text{Var}(R) = 2/63.$$

Na verdade, o fato de se ter uma solução exata para o problema elimina a necessidade do uso de simulação. Porém, como nosso objetivo era o de apenas comparar a eficiência de procedimentos amostrais em simulação, tornou-se conveniente que este estudo fosse feito para um problema de solução conhecida, o que permitiria avaliar com melhor precisão os resultados obtidos por ambos os métodos.

Através de simulação, o problema foi inicialmente estudado com base no uso do método convencional de amostragem aleatória. A precisão dos resultados foi medida pela variância associada

das estimativas obtidas.

A seguir, usando-se a amostragem descritiva, o mesmo problema foi novamente simulado, de tal forma que, a menos do particular método amostral adotado, não houve nenhuma outra variação em relação ao caso anterior, em que se usou a amostragem aleatória simples. Por exemplo, em ambas as situações foram utilizados os mesmos tamanhos de amostra, isto é, cada corrida baseou-se em  $N=100$  observações de amplitude ou, equivalentemente, em uma amostra de  $K.N = 500$  valores uniformemente distribuídos no intervalo  $(0,1)$ .

Portanto, qualquer diferença observada entre as variâncias dos resultados obtidos nos dois casos só poderá ser atribuída aos diferentes métodos amostrais empregados. O procedimento amostral mais eficiente será aquele que produzir resultados de menor variância.

### III. SIMULAÇÃO DO PROBLEMA USANDO-SE AMOSTRAGEM ALEATÓRIA SIMPLES

Dentro do objetivo de se estudar a distribuição da amplitude de uma amostra uniforme, procurou-se estimar, através de simulação, os valores dos dois primeiros momentos desta distribuição ou, de forma equivalente, estimar sua média e seu desvio padrão.

Com base em corridas constituídas cada uma por  $N=100$  observações de amplitudes amostrais, foram obtidas as estimativas

$$\bar{R} = \sum_{j=1}^N R_j / N$$

$$S_R = \left[ \sum_{j=1}^N (R_j - \bar{R})^2 / (N-1) \right]^{1/2}$$

Portanto, cada corrida baseou-se num total de  $K.N=500$  observações uniformes, uma vez que para cada amplitude foram necessárias cerca de  $K = 5$  observações. Utilizando-se amostragem aleatória simples, existem duas possibilidades para o estudo da variabilidade associada aos resultados:

- i) cálculo teórico;
- ii) estudo experimental.

Inicialmente, será apresentado o cálculo teórico e, a seguir, os respectivos valores obtidos experimentalmente, que vêm a comprovar a teoria.

Supondo  $\bar{R}$  e  $S_R$  como estimadores não tendenciosos da amplitude esperada e de seu desvio padrão, então

$$E(\bar{R}) = E(R) = 2/3$$

e

$$E(S_R) = \sigma_R = 0.178$$

Por outro lado, devido à independência das observações,

$$\text{Var}(\bar{R}) = \frac{\text{Var}(R)}{N} = 0.00031$$

De acordo com Cochran [1], tem-se para a variância amostral que

$$\text{Var}(S^2) = \frac{2\sigma^4}{N-1} \left( 1 + \frac{N-1}{2N} G_2 \right), \quad (4)$$

onde  $G_2$  é a medida do excesso de Kurtose, dada por

$$G_2 = \frac{E(R-\mu)^4}{\sigma^4} - 3.$$

Para amostras de tamanho relativamente grande, então,

$$\text{Var}(S^2) \approx \frac{2\sigma^4}{N} \left( 1 + \frac{G_2}{2} \right) \quad (5)$$

Pode-se mostrar também que

$$\text{Var}(S) \approx \frac{\text{Var}(S^2)}{4\sigma^2} \quad (6)$$

Segue-se, pois, de (5) e (6) que

$$\text{Var}(S) \approx \frac{\sigma^2}{2N} \left( 1 + \frac{G_2}{2} \right) \quad (7)$$

Tem-se ainda que, para a função de densidade dada por (1),  $G_2 = -3/8$  e, após a substituição dos respectivos valores, chega-se a

$$\text{Var}(S_R) \approx 1.29 \times 10^{-4}$$



Apesar de sua determinação teórica, estes valores foram também estimados. Para isso, realizaram-se 4 conjuntos de corridas, cada um constituído de  $M = 100$  corridas independentes, cada uma das quais foi, por sua vez, obtida a partir de  $N=100$  observações de amplitude.

Para cada um dos 4 conjuntos de 100 corridas foram estimadas as variâncias associadas às respostas em estudo,  $\text{Var}(\bar{R})$  e  $\text{Var}(S_R)$ , além das respectivas médias. Estes valores são apresentados na Tabela 1, juntamente com os correspondentes valores teóricos, podendo-se pois verificar que existe, de fato, uma boa concordância entre ambos.

Tabela 1

Resultados Obtidos Com o Uso de Amostragem Aleatória e os Respective  
Valores Teóricos, no Estudo da Distribuição Amostral da Amplitude de  
Uma Amostra Uniformemente Distribuída

GRUPO DE 100 CORRIDAS	AMPLITUDE MÉDIA $\bar{R}$	DESVIO PADRÃO MÉDIO $\bar{S}_R$	VAR ( $\bar{R}$ ) ( $\times 10^4$ )	VAR ( $S_R$ ) ( $\times 10^4$ )
Conjunto 1	0.6668	0.1779	3.3412	1.6527
Conjunto 2	0.6671	0.1764	2.4705	1.4257
Conjunto 3	0.6658	0.1785	3.7315	1.3682
Conjunto 4	0.6657	0.1769	3.6829	1.3492
Valores Teóricos	0.6667	0.1782	3.1746	1.29

#### IV. SIMULAÇÃO DO PROBLEMA USANDO-SE AMOSTRAGEM DESCRITIVA

Segundo a teoria apresentada em Saliby [5], o uso de amostragem descritiva leva a resultados mais precisos, isto é, estimativas não tendenciosas, mas com menor variabilidade. Para comprovação, o experimento anterior foi repetido, tendo-se empregado, porém, a amostragem descritiva.

Neste caso, devido às dificuldades de cálculo, não foram obtidos os valores teóricos de  $\text{Var}(\bar{R})$  e  $\text{Var}(S_R)$ , sendo apenas estimados empiricamente.

Para efeito de utilização de amostragem descritiva, uma corrida foi definida como baseada numa amostra uniforme de tamanho  $K.N = 500$  observações. Os valores da amostra descritiva, deterministicamente selecionados, foram obtidos pela expressão

$$U_{(i)} = \frac{(i-1/2)}{K.N} \quad i = 1, \dots, K.N \quad (8)$$

isto é, tomando-se o ponto médio de cada um dos  $K.N = 500$  subintervalos em que o intervalo  $(0,1)$  foi dividido. Em seguida, permutou-se aleatoriamente estes valores, de acordo com a teoria da amostragem descritiva.

Tomando-se agora os valores da amostra descritiva já "misturados" em grupos de  $K=5$  valores consecutivos e calculando-se a amplitude para cada um deles, tem-se, ao final, um conjunto de  $N = 100$  observações da amplitude.

Tal como anteriormente feito no caso da amostragem aleatória, foram realizados 4 conjuntos de corridas, cada um deles constituído de  $M = 100$  corridas independentes<sup>3</sup>. Um sumário dos resultados obtidos é apresentado na Tabela 2.

Tabela 2

Resultados Obtidos Com o Uso de Amostragem Descritiva, no Estudo da Distribuição Amostral da Amplitude de Uma Amostra Uniformemente Distribuída

GRUPO DE 100 CORRIDAS	AMPLITUDE MÉDIA $\bar{R}$	DESVIO PADRÃO MÉDIO $\bar{S}_R$	VAR. ( $\bar{R}$ ) ( $\times 10^4$ )	VAR ( $S_R$ ) ( $\times 10^4$ )
Conjunto 1	0.6674	0.1782	1.9733	1.3138
Conjunto 2	0.6687	0.1769	1.5117	1.0703
Conjunto 3	0.6671	0.1797	1.6460	1.6958
Conjunto 4	0.6682	0.1772	1.6469	1.0336

Um aspecto a salientar no procedimento acima adotado é que, para o cálculo da amplitude amostral, em vez dos valores uniformemente distribuídos no intervalo (0,1),  $U_{(i)}$ , poder-se-ia trabalhar com o próprio conjunto de índices, os quais, uma vez permutados numa certa forma, forneceriam os respectivos valores da amplitude através da expressão

$$R_j = \frac{\text{Max}(I_m) - \text{Min}(I_m)}{K \cdot N} \quad j = 1, \dots, N$$

onde  $P_j$  representa o  $j^{\text{ésimo}}$  subconjunto de  $K$  índices consecutivos  $I_m$ , obtidos após a permutação aleatória  $K \cdot N$  índices iniciais.

Outro ponto que merece destaque é a utilização para cada corrida de uma única amostra descritiva, formada por  $K \cdot N = 500$  observações. Uma segunda possibilidade teria sido o uso de  $K = 5$  amostras descritivas, cada uma delas constituída de  $N = 100$  valores uniformemente distribuídos.

Porém, neste segundo caso, ao utilizarmos uma amostra descritiva para cada uma das  $K$  observações que determinam um valor da amplitude amostral, estaríamos procurando diferenciar uma observação segundo a sua ordem de ocorrência dentro de um grupo de  $K$  observações. Ora, esta diferenciação não é necessária, pois a amplitude amostral não depende em nada da ordem de ocorrência dos valores na amostra.

Ao empregarmos uma única amostra descritiva, estaremos levando esta relação de simetria em consideração e com isso reduzindo nossa região de estudo a somente  $1/20$  ( $1/5!$ ) da região de estudo original, sem incorrer também em nenhuma perda de informação. A esta redução da região de estudo corresponderá, por certo, uma maior precisão dos resultados finais.

Em nossa opinião, este tipo de relação de simetria é

uma propriedade muito importante da maioria dos problemas de simulação e que deverá ser objeto de um estudo mais detalhado no futuro.

## V. ANÁLISE DOS RESULTADOS E UTILIZAÇÃO DO MODELO LINEAR DE RESPOSTA

Comparando-se os resultados das Tabelas 1 e 2, verifica-se os seguintes pontos:

i) Em ambos os casos, as estimativas mostraram-se não tendenciosas, uma vez que tanto os valores de  $\bar{R}$  como os de  $S_R$  estiveram sempre bastante próximos de seus correspondentes valores teóricos, isto é,  $E(R)$  e  $\sigma_R$ .

ii) Com relação à precisão das estimativas obtidas pelos dois métodos amostrais, medida pelas respectivas variâncias, nota-se que a utilização de amostragem descritiva é vantajosa, muito embora o ganho de eficiência com este método dependa do particular problema em estudo, conforme mencionado.

Assim, para a resposta amplitude média ( $\bar{R}$ ), o uso de amostragem descritiva conduziu a estimativas cuja variância foi de aproximadamente 50% do valor originalmente obtido usando-se amostragem aleatória simples, o que, sem dúvida alguma, representa uma substancial melhoria na precisão final dos resultados.

Já para a resposta desvio padrão da amplitude ( $S_R$ ), o ganho em precisão decorrente do uso de amostragem descritiva foi bem menor, situando-se em torno dos 10%.

De qualquer modo, consideramos estes resultados como mais uma confirmação de que o uso de amostragem aleatória em situações deve ser substituído pelo da amostragem descritiva.

Um aspecto a despertar curiosidade são os valores com os quais se obtiveram os resultados de eficiência obtidos com o uso de amostragem descritiva, ganho este bastante bom para a resposta  $\bar{R}$  e relativamente baixo para a resposta  $S_R$ . Embora tenha sido um resultado visto, a princípio, como inesperado, foi possível explicá-lo através da teoria do Modelo Linear da Resposta [5], ou simplesmente MLR.

A teoria do MLR foi desenvolvida visando a interpretar os resultados de simulação obtidos com amostragem aleatória. De acordo com esta teoria, o valor de uma resposta de simulação tem de se relacionar com os momentos amostrais das suas variáveis de entrada, segundo uma estrutura de regressão linear. A utilização desta teoria no presente estudo da distribuição da amplitude amostral foi feita como descrito a seguir.

Inicialmente, para cada corrida empregando amostragem aleatória simples, foram também computados, além de  $\bar{R}$  e  $S_R$ , os valores  $\bar{U}$  e  $S_U$ , respectivamente, a média e o desvio padrão do conjunto de  $N \cdot K = 500$  valores uniformemente distribuídos no intervalo  $(0,1)$ , que definem uma particular corrida. Isto foi feito para todas as 400 corridas correspondentes aos 4 conjuntos anteriormente estudados na seção 2.

A seguir, para cada conjunto de 100 corridas independentes foram pesquisadas as regressões, relacionando as respostas  $\bar{R}$  e  $S_R$  com os respectivos valores de  $\bar{U}$  e  $S_U$ .

Visando uma normalização dos resultados, as formas funcionais estudadas foram do tipo

$$\bar{R} = \mu_R + \alpha_R (\bar{U} - 0.5) + \beta_R (S_U - 0.2887) + e \quad (9)$$

$$S_R = \sigma_R + \alpha_S (\bar{U} - 0.5) + \beta_S (S_U - 0.2887) + e \quad (10)$$

Para uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $(0,1)$ ,

$$\mu_U = \frac{b-a}{2} = 0.5$$

$$\sigma_U = (b-a) / \sqrt{12} = 0.2887$$

Os valores acima foram usados nas expressões (9) e (10)



com o objetivo de se fazer a regressão em relação aos desvios amostrais observados. Desse modo, a teoria do MLR afirma que o termo constante da regressão é um estimador não tendencioso e de mínima variância do parâmetro em estudo, correspondendo, neste caso, a  $\bar{u}_R$  e  $\sigma_R$ . Um sumário dos resultados obtidos da aplicação do MLR é fornecido na Tabela 3 para a resposta  $\bar{R}$  e na Tabela 4 para a resposta  $S_R$ .

É importante notar que para a resposta  $\bar{R}$ , a melhor regressão a explicar sua variação incorpora apenas uma variável independente,  $S_U$ . Este resultado é bastante coerente, uma vez que para amostras com uma maior dispersão ( $S_U$ ) correspondem também maiores amplitudes. Assim, os valores da Tabela 3 referem-se à equação de regressão que tem  $S_U$  como a única variável independente.

Note-se também que os valores calculados para  $R$  e  $R^2$ , respectivamente, o coeficiente de correlação e o coeficiente de determinação, foram relativamente altos. De particular importância é o valor de  $R^2$ , que serve como um indicador da parcela da variação da resposta  $\bar{R}$  que está sendo explicada pelos erros amostrais associados aos valores de entrada da simulação. Ora, empregando-se a amostragem descritiva, esta parcela de erro é controlada e, portanto, o valor  $R^2$  pode ser utilizado como um indicador do ganho de precisão a ser obtido com o procedimento proposto.

Note-se que enquanto o valor médio do coeficiente de determinação para a variável  $\bar{R}$  foi da ordem de 47%, o ganho médio de precisão advindo do uso da amostragem descritiva foi de 49%, mostrando a correspondência existente entre ambos os valores.

Já para a resposta  $S_R$ , o poder explicativo de sua variação através do MLR foi bastante baixo, como mostram os resultados da Tabela 4, que se referem à equação de regressão construída pelas duas variáveis independentes,  $\bar{u}$  e  $S_U$ . Em consequência, o ganho de precisão a ser obtido com o uso de amostragem descritiva deve ser baixo, tal como foi verificado na prática.

Sumário dos Resultados da Regressão Relacionando a Resposta  $R$  Com os Momentos Amostrais dos Valores Gerados

Tabela 3

Nº DO GRUPO DE 100 CORRIDAS	COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO R	COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO R <sup>2</sup>	TERMO INDEPENDENTE
1	0.71	51	0.66673
2	0.62	39	0.66707
3	0.75	57	0.66714
4	0.64	41	0.66602

Nº DO GRUPO DE 100 CORRIDAS	COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO R	COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO R <sup>2</sup> %
1	0.00	0
2	0.10	1
3	0.28	8
4	0.35	11

Sumário dos Resultados da Regressão Relacionando a Resposta  $S_R$  Com os Momentos Amostrais dos Valores Gerados

Tabela 4

Comparando-se a precisão dos resultados obtidos através dos dois métodos amostrais, verifica-se que, de fato, o uso da amostragem descritiva conduz a estimativas mais precisas.

Outros problemas já estudados, tais como a simulação de um sistema de estoque e outro de filas, também mostraram um melhor desempenho do método da amostragem descritiva.

Convém salientar que, neste estudo, não se fizeram considerações acerca das eficiências computacionais de cada um dos métodos, por dois motivos:

i) A preocupação fundamental, no momento atual, se refere a aspectos conceituais, uma vez que, a nosso ver, e isto queremos comprovar, o uso de amostragem aleatória simples em simulação é um procedimento incorreto, fruto de um erro metodológico. Segundo a teoria que estamos propondo, a abordagem correta é o uso da amostragem descritiva.

Assim, o problema relevante, no momento atual, não é determinar método mais eficiente do ponto de vista computacional, o que é secundário, mas o de identificar aquele mais correto.

É importante salientar, no entanto, que, levando-se em conta os aspectos computacionais, o método da amostragem descritiva também revelou ser o mais eficiente, pelo menos nos estudos que até agora realizamos.

ii) Um outro ponto importante a ser considerado na comparação dos métodos é que ela também não seria justa. Isto porque a amostragem descritiva é um método novo, ainda desconhecido e com poucos algoritmos

te.  
Ao se utilizar amostragem aleatória simples numa simulação esta-se arriscando a introduzir, desnecessariamente, incertezas no estudo, o que serve unicamente para o empobrecimento da qualidade do resultado obtido e para tornar a simulação num método menos poderoso do que realmente é, desde que utilizado corretamente.

se quer representar.  
De qualquer forma, voltamos a ressaltar que a principal contribuição associada ao método proposto não é simplesmente de caráter prático, cuja importância, a nosso ver, é secundária. A importância maior deste método reside no plano conceitual, ou mesmo filosófico, já que serve para mostrar de que forma o conceito de probabilidade deve ser interpretado dentro do contexto de uma simulação: não como uma mera fonte de incerteza no estudo, mas como uma informação precisa acerca de um conjunto de fenômenos que se quer representar.

até agora desenvolvidos, enquanto a geração de amostras aleatórias simples constitui-se num dos tópicos mais pesquisados na área de simulação. Em consequência deste "investimento de esforços", a geração de amostras aleatórias simples encontra-se num nível de desenvolvimento bastante elevado, existindo para esse fim alguns métodos muito eficientes.

- [1] No presente trabalho, tanto o método de simulação como o de Monte Carlo serão vistos como sinônimos, de modo que as conclusões do estudo aplicar-se-ão a ambos os métodos. Na verdade, é opinião do autor que a diferenciação entre os dois métodos reside unicamente na área particular de aplicação. Assim, o método de Monte Carlo é identificado em aplicações visando a estimar integrais múltiplas ou a estimar parâmetros de alguma distribuição de probabilidade, enquanto que simulação é vista como uma técnica de Pesquisa Operacional. Porém, a abordagem adotada em ambos os casos é essencialmente a mesma e, em consequência, os métodos serão vistos como equivalentes.
- [2] Na realidade apenas  $\bar{R}$  é não tendencioso; no entanto, o  $\bar{b}_{ias}$  de  $S_R$  como estimador de  $\sigma_R^2$  é, neste caso, praticamente desprezível.
- [3] Independência neste caso refere-se às diversas permutações aleatórias utilizadas, uma vez que os valores amostrais empregados nas diversas corridas foram sempre os mesmos.

BIBLIOGRAFIA

1. COCHRAN, W.G. Sampling techniques. 2. ed., New York, John Wiley & Sons, 1963.
2. KLEIJNEN, J. P. C. Statistical techniques in simulation. New York, M. Dekker, 1974. part. I.
3. MARSHALL, A. W. An introductory note. In: MEYER, H. A. ed. Symposium on Monte Carlo Method. New York, John Wiley & Sons, 1956. p. 1-14.
4. NAYLOR, T. H. et alii. Técnicas de simulação em computadores. Petropolis, Vozes, 1971.
5. SALIBY, E. A Reappraisal of some simulation fundamentals. Lancaster, University of Lancaster, 1980 Tese (Doutorado).
6. SHIMIZU, T. Simulação em computador digital. São Paulo, Edgard Blücher, 1975.
7. TOCHER, K. D. The Art of simulation. London, English Universities Press, 1963.