26

Mário de Faria Bello Júnior

PROJEÇÃO ORTOGONAL, CASO PARTICULAR DA PROJEÇÃO BI-CENTRAL

Tese de concurso para provimento da cadeira de Geometria Descritiva da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil.

1951

MÁRIO DE FARIA BELLO JÚNIOR

Engenheiro de minas e civil. Professor de "Geometria Descritiva" da Escola Politécnica da Universidade Católica do Rio de Janeiro, Professor de "Geometria" do Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia da Universidade Católica do Rio de Janeiro. Professor Regente de "Geometria Descritiva" da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil. Engenheiro da Estrada de Ferro Central do Brasil. Engenheiro da Companhia Vale do Rio Doce S.A. Membro do Conselho Federal de Engenharia e Arquitetura.

PROJEÇÃO ORTOGONAL, CASO PARTICULAR DA PROJEÇÃO BI-CENTRAL.

Tese de Concurso para provimento da cadeira de GEOMETRIA DESCRITIVA da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil.

INTRODUÇÃO :

A insistência, o incentivo, o entusiasmo e a generosidade de amigos e colegas, afinal, conseguiram vencer todas as dificuldades que se obstinavam em não permitir que nos inscrevessemos neste Concurso para Professor Catedrático de "Geometria Descritiva" da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil.

Na verdade, desde a primeira hora, estava em nossas cogitações disputar essa cadeira. Circunstâncias alheias à nossa vontade, inteiramente incontroláveis, perturbaram nossa vida, dando lugar a compromissos morais e materiais, que nos afligiam a alma e nos tiravam a tranquilidade de espírito indispensável à feitura de um trabalho de porte, que seria a nossa tese.

A conjugação de dificuldades de várias ordens (e elas quando aparecem não vêm sós) tirou-nos o entusiasmo, porque o prazo escoava e não tinhamos esperança de concluir, em tempo hábil, a tarefa pretendida.

Desistimos a meio do caminho, subjugados pelas vicissitudes que julgavamos não poder superar. E com isso amargamos a dor de uma retirada.

Mas o homem põe e Deus dispõe. Cientificados, os amigos não concordaram com a decisão. Nada os con-

venceu. Nem mesmo o fato de que já não havia tempo suficiente para a conclusão da tese. Apelaram para a amizade e às justificativas que lhes apresentavamos opunham argumentos que acabaram rompendo nossas últimas resistências.

Sempre entendemos que cada um de nós pertence muito mais à sua família e seus amigos que a sí próprio. Para não ficarmos sòzinhos aderimos a êles.

Porém, nessa altura, o prazo estava pràticamente esgotado. Não obstante, reunimos o que já havíamos feito, concatenamos capítulos esparsos e, afinal, conseguimos terminar êste nosso trabalho, com o qual atendemos a uma das exigências legais. Está claro que tivemos de reduzir nossos propósitos iniciais de produzir obra de fôlego, contentando-nos com êste pequeno e modestíssimo ensaio. Custou-nos muito, porque tivemos de realizar em poucos dias aquilo que poderíamos ter feito em quatro ou cinco meses.

Com estas palavras, um pouco longas, não queremos apresentar justificativas. As razões que invocamos, embora o façamos com toda sinceridade e lealdade, não se prestam, todavia, para esta oportunidade. Desejamos, apenas, penitenciar-nos perante nossos amigos e colegas e, principalmente, agradecer-lhes, de todo coração, a ajuda inestimável com que nos assistiram.

Esperamos que, a despeito da pressa, tenhamos

escrito algo de aproveitável, correspondendo,assim, com um esfôrço honesto e penoso, à confiança e à generosida de daqueles que acreditaram em nós.

-.-

O tema escolhido comporta um desenvolvimento longo. E nós queriamos chegar até lá. Todavia, deixamos, nas linhas que se seguem, o essencial para provar que, no estado atual da ciência, as PROJEÇÕES ORTOGONAIS SÃO CASO PARTICULAR DAS PROJEÇÕES BI-CENTRAIS.

A proposição, não temos dúvida, é verdadeira. Mas a grande evolução sofrida pela Geometria Descritiva, desde os seus primeiros passos pela mão de Gaspar Monge, trouxe como consequência um prestígio cada vez maior das projeções ortogonais, que constituem,conforme acentuamos no texto, a base necessária para a compreensão dos demais sistemas de projeções.

Para dar um exemplo da exuberância dos recursos oferecidos por êsse método, incluimos neste trabalho, a representação do DODECAEDRO ROMBOIDAL. A épura obtida, ao que nos consta, é inédita. Talvez aí esteja a originalidade da tese.

Rio de Janeiro, Novembro de 1 951

MÁRIO DE FARIA BELLO JÚNIOR

1. OBJETO DA GEOMETRIA DESCRITIVA

As relações de forma, posição e grandeza das figuras planas se determinam perfeitamente pela aplicação de dois métodos:

a)- o analítico

b)- o sintético ou gráfico

Pelo primeiro, a resolução dos problemas, depois de estabelecida sua tradução analítica, se reduz ao conjunto de operações sôbre "números", ou antes, sôbre quantidades algébricas.

Pelo segundo, as figuras representativas do fato geométrico indicado na tese da questão são obtidas por meio de construções realizadas com a régua e o compasso.

Tanto um como outro atendem, com todo rigor, às exigências teóricas e práticas.

Todavia, no momento em que surgiu a necessidade do estudo dessas mesmas relações de forma, posição e grandeza das figuras do espaço, o problema cresceu de dificuldade. O método analítico, dentro de seu objetivo, continuou satisfazendo às condições impostas pela teoria e pela prática. Enquanto isso, o método sintético teve de revitalizar-se, incorporando aos seus domí-

nios novos conceitos para que pudesse representar, sôbre a superfície do desenho, os corpos do espaço euclidiano.

A <u>Geometria Descritiva</u> se propõe à resolução científica dos problemas de representação das figuras de três dimensões sôbre uma superfície de duas dimensões.

Os novos conceitos introduzidos no método gráfico resultaram de intenso trabalho dos geômetras de todo o mundo, através de diversas gerações. É que, para as necessidades da técnica e da arte, cada vez maiores, mais instantes, não bastava que se soubesse, com acerto, desenhar sôbre uma superfície os corpos do espaço. Tornava-se imperioso, cada dia, que se pudesse <u>reproduzir</u> o corpo por meio de sua figura representativa. Bompiani acentua o fato e acrescenta, com absoluta justeza, que "sòmente quando isto se verifica é que a figura - ou representação - se torna <u>equivalente</u> ao objeto representado".

A Geometria Descritiva ensina as operações capazes de estabelecer entre as figuras representativas e as representadas essa <u>equivalência</u>, de que nos fala Bompiani, e de tal modo que seja possível resolver em uma superfície bi-dimensional problemas do espaço.

A planta, a elevação e os cortes auxiliares do projeto de um edifício são aplicações da Geometria Descritiva, feitas de acôrdo com os requisitos que aca-

bamos de fixar.

Sistematizando os traçados gráficos que, durante o século XVIII, eram conhecidos pelo nome de arte das projeções, Gaspar Monge constituiu um corpo de doutrina científica que se tornou cada vez mais indispensável na formação da cultura técnica e científica dos engenheiros, arquitetos, pintores, escultores e, em geral, dos que se destinam ao estudo e ensino das Matemáticas.

Como disciplina do raciocínio, permitindo o adestramento das faculdades de intuição espacial, a Geometria Descritiva é a "base fundamental da Perspectiva, da Estereotomia, das Sombras Geométricas, da Fotogrametria, dos estudos de Grafoestática e de Fortificações e dos projetos de Arquitetura", na palavra de Mestre do Professor Álvaro José Rodrigues.

É o próprio Gaspar Monge quem ressalta que "entre as diferentes aplicações que se pode fazer da Geometria Descritiva, duas existem que são notáveis por sua generalidade e pelo que possuem de engenho: são as construções da Perspectiva e a determinação rigorosa das sombras nos desenhos".

Êste conceito, não obstante, é hoje discutido e posto em dúvida por alguns tratadistas modernos, entre os quais se inclui o ilustre Professor Pierre Olmer, da Escola Nacional Superior de Belas Artes de Paris. Êste, por exemplo, julga até que a Geometria Des-

critiva teria "comprometido o desenvolvimento lógico" da Perspectiva, retardando "sua constituição como ciência independente, apoiando-se, sem dúvida, nas altas especulações da Geometria, porém, antes de tudo ciência das artes do desenho e da composição".

Parece-nos demasiadamente rigorosa esta observação. É certo mesmo que a autonomia da Perspectiva, pela organização de seus métodos próprios, seu desenvolvimento extraordinário, através dos tempos, só foram possíveis depois da codificação mongiana da Geometria Descritiva.

A respeito, o Professor Gerson Pompeu Pinheiro, com a sua dupla autoridade de Mestre, nos esclarece: "Ao célebre trabalho de Piero Della Francesca sucederam-se numerosos estudos e tratados, mas, sòmente após o advento da Geometria Descritiva, no século XVIII, é que a Perspectiva se desenvolveu com o caráter científico que hoje pode apresentar" ("Das artes plásticas, MCML, Gerson Pompeu Pinheiro", pg. 20).

Quais, no entanto, os recursos da Geometria Descritiva para a representação dos corpos do espaço, feita de acôrdo com o critério de equivalência a que nos referimos linhas passadas? Os métodos de representação.

2. CARACTERÍSTICAS GERAIS DOS MÉTODOS DE REPRESENTAÇÃO

Os métodos de representação da Geometria Descritiva, para atenderem à sua finalidade, devem possuir as seguintes características, segundo magnífica classificação de Campedelli:

1ª)- dar a representação plana dos elementos do espaço de tal forma que exista uma correspondência biunívoca entre os elementos do corpo do espaço e sua figura no plano. Quando esta correspondência comportar exceções, o método deve permitir a identificação exata dos elementos nessas condições.

2ª)- traduzir sôbre a figura representativa, unìvocamente, as propriedades e as relações que existem entre os elementos no espaço.

3ª)- executar sôbre as figuras representativas operações gráficas que correspondam a operações que se realizariam no espaço, diretamente sôbre o corpo representado.

4ª)- interpretar no espaço os resultados obtidos com as operações realizadas no plano.

Através da 1ª e 2ª características, os métodos devem indicar o modo de dispor sôbre o desenho os

elementos que constituem os dados dos problemas.

Através da 3ª característica, devem indicar os meios de utilizar dos dados, segundo construções adequadas, para chegar às incógnitas.

Finalmente, a 4ª característica firma a inteligência dos resultados obtidos, identificando as incógnitas.

Do que ficou dito, uma observação importante já se pode extrair. É a de que um problema de Geometria Descritiva é sempre um problema de Geometria do Espaço resolvido com as ferramentas científicas fornecidas pelos métodos de representação. Hachette, discípulo de Monge e seu sucessor na cátedra da Escola Politécnica de Paris, adverte, conforme transcrição de Roubou-di, que "em Geometria Descritiva é preciso primeiro resolver um problema de Geometria de três dimensões antes que a mão possa executar as operações que conduzem à solução gráfica do problema". E Roubaudi acrescenta que "de acôrdo com êsse preceito, distingue-se em um problema de Geometria Descritiva a solução geométrica, que descobre e indica as construções a efetuar sôbre a figura do espaço, e a solução gráfica, que realiza essas construções por meio de traçados executados sôbre a folha do desenho, segundo os métodos da Geometria Descritiva".

3. A OPERAÇÃO FUNDAMENTAL DA GEOMETRIA DESCRITIVA

A correspondência biunívoca, que deve existir entre os corpos representados e suas figuras representativas, estabelece-se, nos métodos de representação, por meio da operação fundamental da Geometria Descritiva: a *projeção*.

Projetar um ponto P, sôbre um plano *σ*, de um ponto S é determinar em *σ* o traço P' da reta SP. O plano *σ* é o *plano de projeção*, o ponto S, o *centro de projeção*, a reta SP, *raio projetante* ou simplesmente a *projetante*, e o ponto P' a *projeção* de P. Em alguns casos, o plano *σ* recebe o nome de *quadro*, o centro S, de *ponto de vista*, a reta SP, *raio visual* e o ponto P', *imagem* de P. (Fig. 1). No caso do ponto P pertencer ao plano de projeção, êle se confunde com a sua projeção P'.

Projetar uma reta *r* sôbre o plano *σ*, de um ponto S, reta que não passe por S, é determinar em *σ* o traço *r'* do plano *α*, formado por S e *r* (Fig. 2). A reta *r'*, projeção de *r* sôbre *σ*, feita de S, é o lugar geométrico das projeções de todos os pontos de *r*. O plano *α* é chamado *plano projetante*. O ponto T, comum a *r*

e a <u>r'</u>, é o <u>traço</u> da reta <u>r</u>, sôbre o plano de projeção.

A projeção de uma figura qualquer, constituída de pontos e retas, ficará determinada construindo-se as retas e os planos projetantes de seus pontos e retas (Fig. 3).

4. ELEMENTOS IMPRÓPRIOS

Estudemos a projeção feita de um centro S sôbre um plano β de uma reta r, situada sôbre um plano α (Fig. 4). A cada ponto A de r corresponde em r' um ponto A', e um único. Dêsse modo, o lugar descrito pelo ponto A', homólogo de A, quando êste percorre a reta r, é a reta r', projeção de r sôbre β. Todos os pontos de r têm, pois, sua projeção sôbre r'. A cada par de pontos tais que A e A' corresponde um raio projetante SA. E a cada raio projetante corresponde um par de pontos tais que A e A'. Quando o raio projetante se torna paralelo à reta r êle determina sôbre r' um ponto F', para o qual não há correspondente objetivo em r. Seria uma exceção a considerar, o que, evidentemente, acarretaria dificuldades para a generalização que sempre se deseja nos domínios das Matemáticas. Essas dificuldades, entretanto, são superadas pela consideração de um novo conceito que se introduz, fazendo corresponder ao ponto F' de r' o ponto situado no infinito sôbre a reta r. Daí decorre a proposição muito batida de que retas paralelas se encontram no infinito. Êsse ponto, que notaremos por R_∞, é denominado ponto impróprio de r, em contraposição com os pontos próprios, que são to-

dos os outros de identificação objetiva. A projeção, nestas condições, do ponto impróprio de r é o ponto próprio F', que se chama ponto de fuga ou ponto limite de r. Em geral, os pontos impróprios têm como projeções pontos próprios. Todas as retas de α, paralelas a r, têm o mesmo ponto de fuga F', porque por S só poderemos traçar um raio projetante a elas paralelo. Êsse princípio é fundamental em Perspectiva.

Outra observação que podemos tirar do exame da Fig. 4 é a de que todas as retas de α têm seus pontos de fuga sôbre 1', interseção de β com o plano γ, traçado por S paralelamente a α. Realmente, para construirmos êsses pontos de fuga teriamos de traçar por S os raios paralelos às citadas retas de α e determinariamos seus traços sôbre β. Ora, todos êsses raios formam um plano paralelo a α e seus traços estarão necessàriamente sôbre 1'. Esta reta é, portanto, o lugar geométrico dos pontos de fuga das retas de α. Recebe o nome de reta de fuga do plano α.

A reta 1' pode ainda ser considerada como a projeção ou imagem de uma reta especial do plano α: a reta imprópria. Também esta, como acabamos de ver, tem projeção objetiva, quer dizer, tem como projeção uma reta própria. Isto acontece, em geral.

Finalmente, poderemos considerar que os pontos impróprios de todas as retas do espaço e as retas impróprias de todos os planos do espaço estejam situa-

dos sôbre o plano no infinito, ou sôbre o plano impróprio.

Estas noções, dadas aqui, não nos parecem mal colocadas. Elas auxiliam a compreensão e favorecem o desenvolvimento da intuição geométrica que, no nosso entender, é uma das bases em que deve apoiar-se, com segurança, o desenho, seja êle técnico ou artístico. São abstrações lógicas de fácil concepção.

Exercícios: - Ainda nos permitimos, para fixação dêsses conhecimentos, resolver rápidos exercícios que envolvam considerações sôbre os elementos impróprios que acabamos de definir.

1º)- Projetar de um ponto S, sôbre um plano, duas retas, que não se encontram, segundo retas paralelas.

O problema se resume na determinação do plano de projeção, sôbre o qual as projeções das retas dadas resultem paralelas. Para isso, dadas as retas a e b (Fig. 5) e dado o centro S, construamos a reta 1 que passa por S e se apoia em a e b: ela será a interseção dos planos α e β, definidos, respectivamente, por S e a e por S e b.

Sôbre um plano π, paralelo a 1, as retas a e b se projetam segundo retas paralelas a' e b'. Com efeito: os pontos M e N em que 1 encontra a e b estão sôbre um mesmo raio projetante SM. Como SM é paralelo ao plano π, a projeção do ponto M sôbre o plano π é um

ponto impróprio. Também imprópria é a projeção de N sô bre π. Como S, M e N são colineares os dois pontos impróprios citados coincidem. Ora, a projeção de M deve ser um ponto de a', e a de N um ponto de b'. Logo essas 2 retas, projeções de a e b sôbre π, concorrem em um ponto impróprio. São paralelas, por conseguinte.

Poderíamos raciocinar de outra forma: escolhido o plano π, paralelo a 1, como plano de projeção, os planos α e β, cuja interseção é paralela a π, cortados por π dão interseções a' e b', paralelas a 1. É o que ensina a Geometria do Espaço.

2º)- Outro exemplo, êste de especial aplicação nos estudos de Perspectiva, pode ser apresentado. Trata-se de projetar de um ponto S, sôbre um plano, um feixe de retas (isto é, o conjunto de todas as retas de um plano que passam por um ponto, chamado centro do feixe) segundo retas paralelas.

O raciocínio é semelhante ao desenvolvido no exercício anterior. O plano de projeção deve ser paralelo ao raio que une o centro de projeção ao centro do feixe de retas. A solução está indicada sem maiores explicações, por desnecessárias, na Fig. 6.

3º)- Finalmente, outra aplicação simples e de interesse. Projetar de um ponto S, sôbre um plano, um quadrilátero plano qualquer segundo um paralelogramo.

Ainda aqui, o problema consiste na determinação do plano de projeção, sôbre o qual se verifique a

condição fixada no enunciado.

Sejam (Fig. 7) S o centro de projeção e ABCD o quadrilátero plano qualquer. Pelo enunciado, em projeção, as retas A'B' e C'D' devem ser paralelas. Assim também as retas A'D' e B'C'. Prolonguemos os lados do quadrilátero dado: AB e CD se encontram em E e AD e BC, em F. Valendo-nos da observação feita nos exercícios anteriores, verificamos que, depois de resolvido o problema, o raio SE e as projeções A'B' e C'D' devem ser paralelos, e paralelos devem ser o raio SF e as projeções A'D' e B'C'. Ora, SE e SF definem um plano α, que contém S e a reta EF, evidentemente. Se fizermos a projeção da figura ABCD sôbre um plano paralelo a α, as projeções dos pontos E e F, sôbre o plano γ, paralelo a α, são pontos impróprios. E as retas SE, A'B' e C'D' serão paralelas, por terem o mesmo ponto impróprio. O mesmo se pode dizer das retas SF, A'D' e B'C'. Logo A'B'C'D', projeção de ABCD sôbre γ, é um paralelogramo.

4º)- Como aplicação do exercício anterior, poderemos formular o problema seguinte, para ser resolvido com os métodos da Perspectiva - Dado no geometral um quadrilátero ABCD, escolher a posição do observador de tal forma que a perspectiva da figura seja um paralelogramo (Fig. 8).

Está claro que o traço do plano neutro no geometral deve coincidir com a reta EF, acima definida.

A resolução gráfica dispensa outros comentários.

5. OS MÉTODOS DE PROJEÇÃO

Definimos, nos parágrafos anteriores, a operação fundamental da Geometria Descritiva, identificando o centro e o plano de projeção. Verificamos que os raios e os planos projetantes passam todos pelo centro de projeção, constituindo o que se chama uma estrela (isto é, o conjunto formado por uma estrêla de retas e uma estrêla de planos com o mesmo centro).

Circunscrito ao corpo teríamos uma superfície cônica, de vértice coincidindo com o centro de projeção, conforme está indicado na Fig. 9. Esta superfície se reduz a uma superfície piramidal, em casos particulares.

O centro de projeção, todavia, pode ser impróprio. A estrêla seria de centro impróprio, e, nessa hipótese, as projetantes (e os planos projetantes) tornar-se-iam paralelos a uma direção dada. Circunscrita ao corpo teríamos uma superfície cilíndrica, que, em casos particulares, se reduz a uma superfície prismática. (Fig. 10).

Temos aí definidos os dois métodos fundamentais da Geometria Descritiva. Aliás, os dois poderiam ser reunidos em um único, fazendo-se a discriminação pela característica de ser próprio ou impróprio o centro

de projeção.

O primeiro, de centro próprio, é denominado método de projeções centrais ou cônicas, ou, ainda, perspectiva, e o segundo, de centro impróprio, método de projeções paralelas ou cilíndricas.

Êste último admite subdivisão, de acôrdo com a direção das projetantes relativamente ao plano de projeção: se esta for oblíqua, o método se diz de projeção cilíndrica oblíqua; se for perpendicular ao plano de projeção, o método recebe a designação de projeção cilíndrica ortogonal.

Estas as grandes divisões dos métodos de representação, baseadas nas diversas espécies de projeção.

6. A PROJEÇÃO BI-CENTRAL

Todavia, com os conceitos até aqui formulados, não conseguimos estabelecer a correspondência bi-unívoca, imposta pela 1ª característica dos métodos de representação. Realmente, dada a figura espacial podemos, com as noções já indicadas, construir sua figura representativa na superfície do desenho. No entanto, não temos ainda os meios que nos permitam restabelecer a figura do espaço partindo de sua representação plana. Em outras palavras: conhecida a projeção P' de um ponto P (Fig. 1) do espaço não sabemos como determinar P, uma vez que todos os pontos da projetante SP' se projetam em P'. Da mesma forma (Fig. 2), dada a projeção r' não podemos, por enquanto, conhecer a reta r do espaço, visto que todas as retas do plano α se projetam em σ segundo r'. Há, portanto, uma deficiência que deve ser superada. O problema se apresenta indeterminado, quando, do corpo do espaço, se conhece apenas a sua projeção sôbre um plano. Uma projeção não basta, é insuficiente para reproduzir a figura espacial. E, assim, não se estabelece a correspondência bi-unívoca necessária. Como levantar essa indeterminação?

O artifício lógico está em construir as proje

ções da figura, feita de dois centros distintos, sôbre um ou dois planos de projeção. Nisto consiste o método geral de representação, que se designa pelo nome de <u>método de projeção bi-central</u>.

Na fig. 11, o ponto P é projetado sôbre σ de S e S', dois centros distintos, obtendo-se, respectivamente, P' e P", suas projeções sôbre êsse plano. Conhecidos P' e P", constroem-se os raios projetantes SP' e S'P", que determinam, por sua interseção, o ponto P do espaço. Assim, conseguimos a correspondência bi-unívoca desejada e necessária. Observe-se que dois pontos quaisquer de σ não podem representar as projeções bi-centrais de um ponto P. Para que representem efetivamente é mister que P' e P" sejam colineares com o ponto U, que é o traço sôbre σ da reta SS' que liga os dois centros de projeção. A explicação é simples: basta notar que as retas SP' e S'P" e SS' são coplanares, e, por isso, a reta U P" P' é o traço do plano por elas determinado sôbre o plano σ. Se não houver essa colinearidade, as retas SP' e S' P" não se encontram, e, portanto, não definem o ponto P do espaço.

Na fig. 12, representamos as projeções bi-centrais de P, feitas sôbre dois planos σ e π, obtendo-se os pontos P' e P". Vale o mesmo raciocínio anterior. Apenas neste caso, a condição para que os dois pontos P' (de σ) e P" (de π) representem as projeções de um mesmo ponto P do espaço é a de que as retas TP' (de σ)

e U P" (de π) se encontrem em R, sôbre AB, interseção de σ e π. É que a coplanaridade necessária das retas SP', S'P" e SS' acarreta a coplanaridade de TP' e UP" e como estas retas não são paralelas encontram-se em um ponto R, que deve estar sôbre AB, porque êste deve ser um ponto comum aos planos σ, π e (SP', S'P", SS').

A correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e suas projeções bi-centrais admite, no entanto, uma exceção: a dos pontos situados sôbre a reta SS', que liga os dois centros. De maneira que, para êsses pontos, o método ficaria em falta. A dificuldade é transposta admitindo-se um terceiro centro auxiliar S" (Fig. 13). As projeções do ponto Q, por exemplo, serão U, sôbre π e Q, sôbre σ.

O método das projeções bi-centrais é, na realidade, o mais geral de todos, uma vez que inclui em si os demais, conforme demonstraremos a seguir. Na verdade, portanto, poderíamos dizer que os métodos de representação da Geometria Descritiva poderão ser reduzidos a um só, tal a generalização que nos permitem os conceitos fundamentais dos elementos impróprios. Já afirmamos, linhas atrás, que as noções de ponto, reta e plano do infinito favoreciam a compreensão e o desenvolvimento da intuição geométrica. Além dêsses méritos, veremos que essas noções facilitam a generalização dos processos didáticos de ensino, faculdade de inegável relevân-

cia, especialmente quando se tem em vista a formação de Professores de Desenho.

7. A PROJEÇÃO CENTRAL

Suponhamos que um dos centros do método de projeções bi-centrais seja impróprio. Isto é, suponhamos que S',por exemplo, se tenha deslocado para o infinito,na direção Δ(Fig. 14). Então as retas SS' e S'P' se tornarão paralelas à direção Δ. A projeção P' se obtém ligando S a P e a projeção P", traçando por P uma paralela a Δ. Conhecidos P' e P", reproduz-se P: 1º)- ligando P' a S; 2º)- traçando por P" paralela a Δ; P é o ponto de interseção dessas duas retas coplanares. Ainda aqui, P', P" e U devem ser colineares. O método assim definido é o de <u>projeções centrais</u>. Alguns autores denominam-no também e simplesmente de Perspectiva Central. Convém ressaltar-se que, em rigor, método de projeções centrais e perspectiva central não são a mesma coisa, embora os traçados de Perspectiva sejam feitos através da aplicação das projeções centrais. A Perspectiva linear, como esclarece A.Comessatti, "não é, <u>no sentido descritivo</u> (o grifo é nosso), um método de representação, uma vez que uma perspectiva não possui, em geral, elementos bastantes para identificar, em forma e grandeza, a figura objetiva". "Em outras palavras, acrescenta o mesmo autor, o problema de reproduzir a fi-

gura objetiva não é, em geral, determinada por uma só perspectiva, embora possa sê-lo por várias perspectivas (tomadas de pontos de vista diversos), mas, neste caso êle se apresenta sob um aspecto diferente e mais complexo do que aquêle oferecido pelos problemas comuns de representação". Há, realmente, uma parte da Geometria Descritiva que cuida de tais problemas: a Fotogrametria. Na Fotogrametria temos um exemplo magnífico da aplicação das projeções bi-centrais.

Sôbre o mesmo assunto, afirmam O. Chisini e G. Masotti Biggiogero em sua obra "Lezioni di Geometria Descrittiva", o seguinte: "Note-se, finalmente, que a perspectiva é uma projeção central,mas preocupa-se apenas com a construção da <u>imagem</u> de uma figura dada F, prescindindo da <u>efetiva representação</u> (o grifo é dos autores) dos elementos (pontos, retas e planos) que compõem F. Isto é, a perspectiva <u>não dá</u> de F <u>uma representação, no sentido próprio da palavra</u>...".

8. A PROJEÇÃO CILÍNDRICA

Quando os dois centros de projeção se tornam impróprios temos o método de projeção cilíndrica. O raciocínio pode considerar um ou dois planos de projeção, conforme já acentuamos em tempo.

Admitamos um plano de projeção (Fig. 15) e que os centros impróprios definam: um, uma direção oblíqua ao plano de projeção e o outro, a direção ortogonal a êsse plano.

O método de projeções cilíndricas assim caracterizado recebe a designação especial de método de projeções cilíndricas oblíquas. Uma de suas aplicações mais notáveis está na teoria geométrica das sombras.

Formulemos, agora, a hipótese de serem dois os planos de projeção e de que os dois centros impróprios definam direções perpendiculares a êsses dois planos. O método se diz de projeções cilíndricas ortogonais (Fig. 16).

No caso particular em que os dois planos de projeção sejam ortogonais, temos o sistema idealizado por Gaspar Monge, donde a demonstração especial do sistema mongiano, em homenagem a seu inventor (Fig. 17).

Em todos êstes casos, vemos que estão atendi-

dos todos os requisitos impostos pelas duas primeiras características dos métodos de projeção. A correspondência biunívoca, tão citada e tão necessária, aí está estabelecida em todos êsses métodos particulares, o que os torna de grande utilidade para a representação dos corpos do espaço.

Notamos, ainda, que todos êles resultaram, de fato, de um método geral, o das projeções bi-centrais, como havíamos afirmado inicialmente.

No quadro sinótico, apresentado a seguir, indicamos todos os métodos de representação dos corpos do espaço, dando-lhes as características principais e as denominações por que são conhecidos.

<table>
<tr><td colspan="4">PROJEÇÕES BI-CENTRAIS
(2 centros de projeção, 1 centro auxiliar - um ou dois planos de projeção)</td></tr>
<tr><td>2 centros próprios</td><td>1 centro próprio e 1 impróprio</td><td colspan="2">2 centros impróprios</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Método das projeções bi-centrais</td><td rowspan="2">Método das projeções centrais</td><td>1 centro define uma direção oblíqua ao plano de projeção e o outro 1 direção perpendicular a êsse plano</td><td>os centros definem direções perpendiculares aos 2 planos de projeção</td></tr>
<tr><td>Método das projeções cilíndricas oblíquas</td><td>Método das projeções cilíndricas ortogonais</td></tr>
<tr><td>Fotogrametria</td><td>Perspectiva linear; sombras ao archote; Perspectiva Axonométrica</td><td>Sombras ao sol; Perspectiva cavaleira; Projeções clinográficas; Axonometria oblíqua</td><td>Projeções de Denise; Projeções cotadas (um só plano de projeção). Axonometria ortogonal. Método de Monge. (2 planos ortogonais)</td></tr>
</table>

9. OS RECURSOS DAS PROJEÇÕES ORTOGONAIS

Estudando os progressos que teve a Geometria Descritiva, num rápido retrospecto, verificamos que em primeiro lugar foi constituida a Perspectiva, através dos estudos e trabalhos de Filippo Brunelleschi (1377-1446), Paolo Uccello (1396-1477), Leon Battista Alberti (1404-1472), Piero dei Franceschi (1415 - 1492), Andrea del Verrocchio (1435 - 1488) e Leonardo da Vinci (1452-1519). Muito mais tarde, em 1795, foi que Gaspar Monge (1745-1818) deu publicidade ao seu método das projeções ortogonais, creando a Geometria Descritiva. Desde logo, aos novos conceitos ficaram subordinadas as idéias que dominavam a Perspectiva. E esta se tornou um ramo da primeira.

Entre os trabalhos de Piero dei Franceschi e os de Monge, apareceram em 1715 os estudos de Brook Taylor, sôbre as projeções centrais, posteriormente sistematizados por Bartholomeu Cousinery e por Willhelm Dufour. Êste método, muito depois, evoluiu para o das projeções bi-centrais, que nos aparece como a origem de todos os outros.

Essa evolução se processou partindo-se do particular para o geral. Da arte para a ciência.

E, fato interessante, foram os artistas, principalmente, os pioneiros da Geometria Descritiva, aqueles que estabeleceram os primeiros princípios fundamentais da ciência que Monge, afinal, transformou em um corpo de doutrina de recursos inestimáveis.

Neste ponto, não podemos resistir ao prazer de transcrever êste trecho de Enrico Bompiani: "Non c'e dubbio che l'eccellenza de questi nostri artisti sui loro contemporanei (e l'influenza da quelli esercitata su questi, como per es. sul Dürer) é dovuta, oltre che alla loro abilitá esecutiva, alla netta visione geometrica, dei problemi loro affaccìantisi e all'introduzione di un elemento razionale quale guida della loro sensibilita artistica. Le regole ricavate dai Maestri con le loro acute meditazioni sui fatti geometrici ancora inesplorati relativi alle operazioni di proiezioni e di sezioni si diffusero, spesso senza alcuna traccia scritta all'inizio, nelle botteghe d'arte fra i loro discepoli: e concorsero cosi alla formazione dell'ambiente adatto alla fioritura de uno dei periodi di cui maggiormente s'inorgoglisce l'intelletto umano. Altri artisti, anch'essi sommi, possono ormai dare libera espressione alle loro concezioni artistiche poiche e gia in essi quel senso della divina proporzione, di armonia geometrica, da cui non potranno derogare. Scienza ed arte insieme hanno raggiunto in piu alto livello di comprensione e di espressione".

Não poderiamos encontrar melhores palavras em favor da Geometria Descritiva, justificando amplamente sua inclusão no curriculo de Belas Artes.

A análise empreendida nas páginas anteriores, deu-nos a conhecer as ampliações sofridas pela Descritiva, tornando o método das projeções ortogonais um caso particular.

Por paradoxal que pareça, a compreensão do geral só será possível tendo como base, sôbre a qual devem apoiar-se todos os demais, o conhecimento das projeções de Monge.

Esta precedência, de fato e de direito, as projeções ortogonais devem aos recursos magníficos para a resolução de todos os problemas espaciais, sejam êles apenas descritivos ou métricos.

Entre as inúmeras aplicações que poderiamos citar para provar o acêrto da afirmativa, escolhemos uma que nos parece adequada, uma vez que dela resultará uma épura que, pelo que sabemos, é inédita. Tratando-se êste trabalho de uma tese (modesta, sem dúvida, mas sempre um trabalho a ser discutido perante uma ilustre e competente comissão julgadora) acreditamos fosse interessante apresentá-la.

-o-

A REPRESENTAÇÃO DO DODECAEDRO ROMBOIDAL

O dodecaedro romboidal ou, como também é chamado, rombododecaedro é um poliedro formado de 12 faces, que são losangos.

Trata-se de um sólido muito conhecido em cristalografia, onde aparece como forma derivada do cubo ou, para usarmos da terminologia especializada, é uma forma pertencente ao grupo holoédrico do sistema cúbico.

Êste sólido se deduz do cubo por meio do que, em cristalografia, recebe o nome de truncamento tangente.

"Os truncamentos, explica-nos o Professor Rui de Lima e Silva, são substituições mecânicas dos ângulos ou arestas do cristal, feitas por planos que passam a constituir as novas faces da forma cristalina".

"O truncamento é tangente - é ainda o Professor Lima e Silva quem nos ensina - quando feito por um plano igualmente inclinado em relação às faces que formam o ângulo ou a aresta do cristal".

No caso do dodecaedro romboidal o truncamento tangente é feito nas arestas do cubo - que é a forma primitiva.

Na fig. 18 representamos o cubo primitivo ABCDEFG. Os truncamentos tangentes relativos às arestas que concorrem no vertice C são determinados pelos planos MNPQ, PRST e NRUV, definidos linhas atrás. Para

as demais arestas, correspondentes aos sete outros vértices, planos igualmente dispostos como êstes completariam todos os truncamentos necessários.

As interseções dêstes planos entre si e com o cubo determinam as arestas e os vértices do sólido resultante, que, por definição é o dodecaedro romboidal.

Aí está indicada a lei de derivação de um poliedro em relação ao outro.

Para se representar, em projeções ortogonais, um sólido precisamos conhecer sua definição geométrica. Partindo dela, é sempre possível construir as duas projeções mongianas dêsse sólido, determinando as projeções de suas arestas e vértices.

Já possuimos a definição geométrica do dodecaedro romboidal.

Na fig. 19, representamos em 1,2,3,4,5,6,7,8-1',2',3',4',5',6',7',8' o cubo primitivo.

No vértice 8,8' concorrem as arestas 4,8-4'8'; 5,8-5',8' e 7,8-7'8'. Os truncamentos tangentes, segundo essas arestas, são feitos pelos planos definidos pelas retas

a)- 11,13-11',13'; 13,15-13',15'; 15,14--15',14' e 14,11-14'11'.

b)- 9,10 - 9',10'; 10,12 - 19',12'; 12,11-12',11' e 11,9 - 11',19'.

c)- 13,17 - 13',17'; 17,16 - 17',16'; 16,9 - - 16', 9' e 9,13 - 9',13'.

se [illegible], correspondentes aos seis [illegible]
[illegible] [illegible] estão completa-
dos [illegible] [illegible] necessários.

[illegible] planos dados [illegible]
[illegible] e os vértices do sólido
[illegible] é o dodecaedro romboidal.

[illegible] a lei de derivação [illegible]
[illegible] [illegible]

[illegible] em projeções ortogonais,
[illegible] definição geométrica
[illegible] construir as duas pro-
jeções [illegible] sólido, determinando as proje-
ções de [illegible] vértices.

[illegible] a definição geométrica do [illegible]
[illegible]

[illegible], [illegible] em 1,2,3,4,5,6,7,8,
[illegible] primitivo.

[illegible] as arestas [illegible]
[illegible] correspondentes [illegible]
[illegible] pelos planos definidos [illegible]
[illegible]

[illegible] 12,13-13',15' [illegible]
[illegible] 11-11'.
[illegible] 12 - 19',12' [illegible]
[illegible] 19'.
[illegible] 16 - 27',16' [illegible]
[illegible] 13 - 9',15'.

Percebe-se logo que o ponto aa', centro da face superior (tal como o ponto o o', centro da face inferior) do cubo, vai tornar-se um vértice do novo poliedro. Êsses três planos determinam, por suas interseções, as arestas ad, a'd' ; dg, d'g' e dh, d'h'. e portanto, os vértices a, a' ; dd' ; gg' e hh'. Agindo da mesma forma para as demais arestas do cubo primitivo, chegamos finalmente às projeções do dodecaedro romboidal:

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, l, m, n, o -
a', b', c', d', e', f', g', h', i', j', l', m', n', o'

A construção, a partir de certa fase fica muito facilitada em virtude de simetrias evidentes que aparecem.

Do exame da épura podemos retirar algumas propriedades interessantes dessa representação.

1ª)- o contôrno aparente horizontal é ainda um quadrado de lado igual a $\frac{L\sqrt{2}}{2}$, L sendo o comprimento da aresta do cubo.

2ª)- os vértices estão dispostos em quatro planos paralelos à base do cubo (admitida esta sôbre o P.H.: em quatro planos horizontais). Êsses planos estão separados por distâncias iguais a $\frac{L}{4}$, onde L continua sendo o comprimento da aresta do cubo. Assim o vértice aa' está no plano horizontal de cota L, os vértices bb', cc', dd', ee', no plano horizontal de cota $\frac{3L}{4}$; os vértices ff', gg', hh' e ii, no plano horizontal de cota $\frac{L}{2}$; os vértices jj', ll', mm' e nn', no plano hori-

zontal de cota $\frac{L}{4}$ e finalmente, o vértice oo', no plano horizontal de cota zero.

3ª)- O poliedro é constituido de duas calotes, simétricas em relação ao plano horizontal de cota $\frac{L}{2}$.

-.-

Construida a épura, seguindo ao pé da letra a definição geométrica do sólido, chegamos à representação do poliedro. Já agora, para reproduzir essa representação em outros casos não precisamos acompanhar o roteiro a que aludimos e que nos guiou nessa caminhada que acabamos de percorrer.

O exame da épura nos permite, imediatamente, deduzir um processo simples de representação do dodecaedro romboidal:

a)- em projeção horizontal:- os lados do quadrado que constitui o contorno aparente horizontal se obtém ligando os meios dos lados do quadrado projeção horizontal do cubo. A projeção horizontal se completa traçando as retas que unem os meios dos lados opostos.

b)- em projeção vertical:- divide-se a altura do cubo em quatro partes iguais; por meio de linhas de chamadas determinam-se as projeções verticais dos 14 vértices do sólido, tal como se deduz da épura (fig.19).

-.-

Aí está um exemplo, que nos parece eloquente, dos recursos extraordinários da Geometria Descritiva,

Realmente, o que fizemos para construir as projeções do poliedro? Conheciamos sua definição geométrica e apenas suspeitavamos de como poderia ser sua forma exterior. Seguimos o roteiro estabelecido por aquela definição. Construimos a épura.

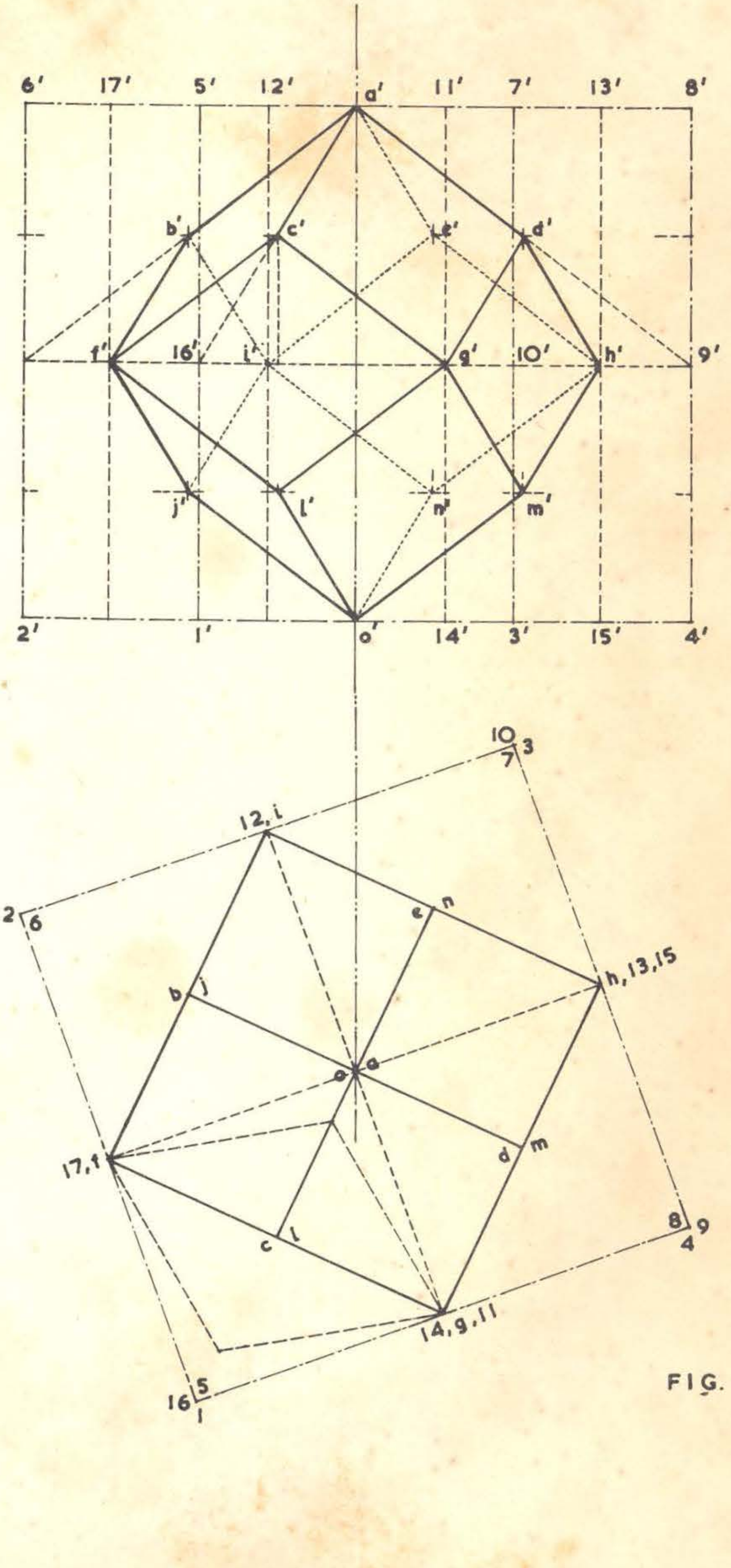
Estava terminada uma etapa. Fizeramos a representação do sólido.

Mas a épura nos possibilitara deduzir certas propriedades que não podiamos conhecer antes de concluida a representação.

Outras propriedades seriam deduzidas se nos dispusessemos analisar o poliedro. Assim: seriam determinados os ângulos diedros das faces, a verdadeira grandeza dessas faces etc.

Isto é a Geometria Descritiva.

-o-



6'
17'
5'
12'
a'
11'
7'
13'
8'
b'
c'
e'
d'
f'
16'
i'
g'
10'
h'
9'
j'
l'
n'
m'
2'
1'
o'
14'
3'
15'
4'
10
7
3
12, i
2
6
e
n
h, 13, 15
b
j
o
a
d
m
17, f
8
4
9
c
l
14, g, 11
16
5
1

FIG. 19

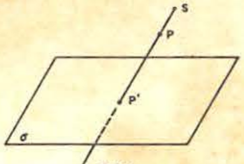


FIG. 1

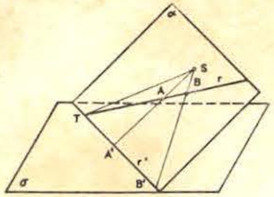


FIG. 2

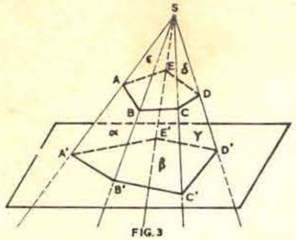


FIG. 3

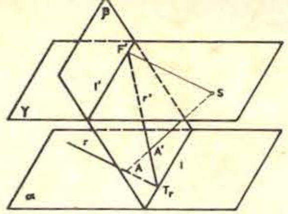


FIG. 4

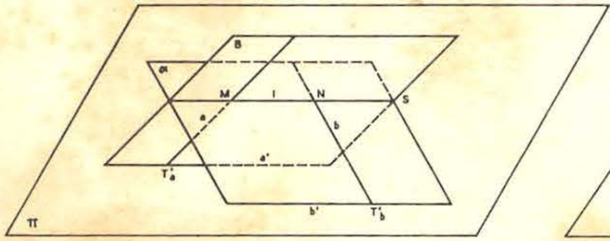


FIG. 5

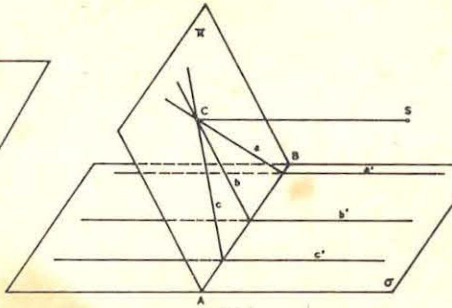


FIG. 6

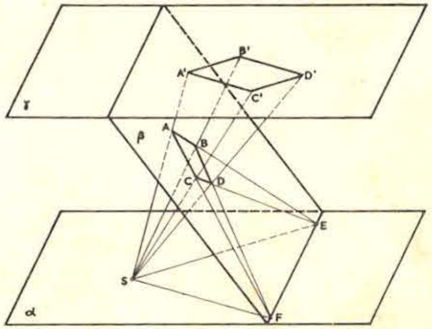


FIG. 7

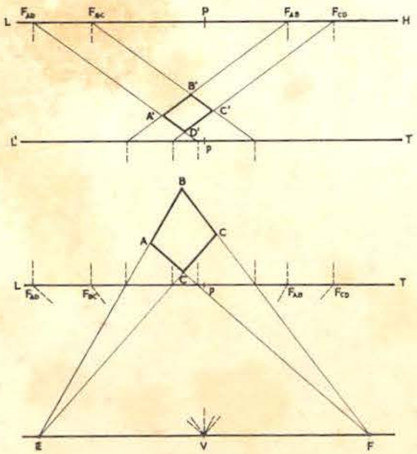


FIG. 8

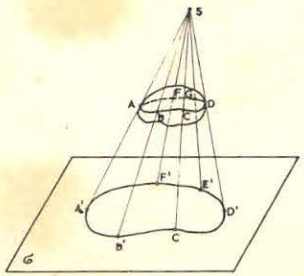


FIG. 9

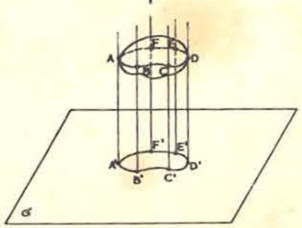


FIG. 10

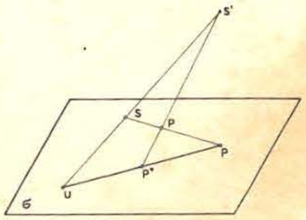


FIG. 11

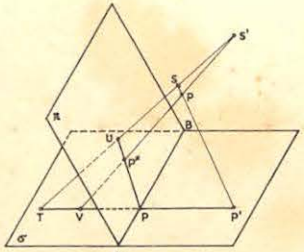


FIG. 12

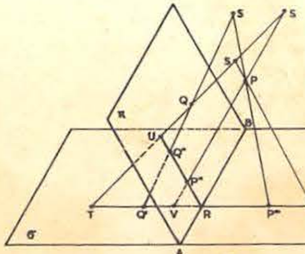


FIG. 13

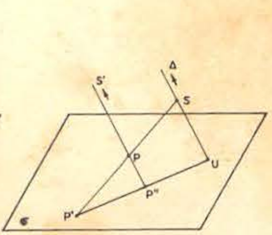


FIG. 14

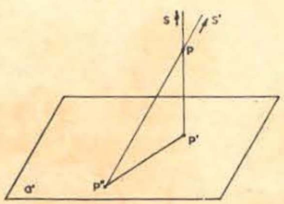


FIG. 15

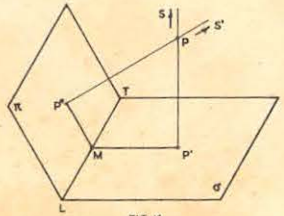


FIG. 16

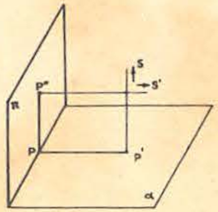


FIG. 17

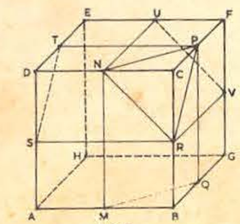


FIG. 18

BIBLIOGRAFIA :

1. ANTOMARI, X. - Cours de Géométrie Descriptive. 8ª edição.

2. APARICI, R. - Lecciones de Geometria Descriptiva, 1945.

3. BOMPIANI,ENRICO - Geometria Descrittiva. 2 vol.1948

4. BOUASSE, H. - Cristallographie Géométrique. 1 929.

5. BRICARD, R. - Géométrie Descriptive. 1 911.

6. BUTTGENBACH,H.- Notions elémentaires de Cristallographie Géométrique et Optique de Minéralogie et de Pétrographie. 4ª edição.

7. CAGNAC, G. e COMISSAIRE, H. - Cours de Mathématiques Speciales. 5º vol. 1º fascículo. 1 949.

8. CAMPEDELLI, L.- Lezioni de Geometria. Vol. I e II. 3ª edição.

9. CHISINI, O. e BIGGIOGERO, G.M. - Lezioni di Geometria Descrittiva. 4ª edição.

10. CHISINI, O. e BIGGIOGERO, G.M. - Esercizi e Complementi di Geometria Descrittiva. 1 946.

11. COMESSATTI, A.- Lezioni di Geometria Descrittiva con applicazioni. 1 946.

12. DEL NEGRO, CARLOS - Baixo-relêvo. O método das projeções centrais. 1 949.

13. ENRIQUES, F. - Lecciones de Geometria Descriptiva -Tradução de T.R. Bachiller.

14. FERNANDEZ, A. TAIBO - Tratado de Geometria Descriptiva. 1 947.

15. F. I. C. - Elementos de Geometria Descritiva.

16. GIESECKE, F.E., MITCHELL, A. e SPENCER, H.C. - Techical Drawing. 2ª edição.

17. HADAMARD, J. - Leçons de Géométrie elémentaire. 1 947.

18. JAVARY, A. - Traité de Géométrie Descriptive. 1 921.

19. LEROY, C.F.A. - Traité de Géométrie Descriptive. 1 881.

20. LORIA, GINO - Metodi di Geometria Descrittiva. 3ª edição.

21. LIMA E SILVA, R. e POTSCH, W. - Elementos de Mineralogia e Geologia. 1 929.

22. MANNHEIM, A. - Cours de Géométrie Descriptive. 1 886.

23. OLMER, PIERRE - Perspective Artistique. 2 vols. 1 943 e 1 949.

24. PAPELIER, G. - Précis de Géométrie Descriptive. 1 948.

25. PILLET, J. - Traité de Géométrie Descriptive. 1 921.

26. POMPEU PINHEIRO, GERSON - As Artes Plásticas. 1 950.

27. POMPEU PINHEIRO, GERSON - Perspectiva e Composição. 1 949.

28. RODRIGUES, ÁLVARO JOSÉ - Geometria Descritiva, 2 vol. 1 950 e 1 945.

29. RODRIGUES, ÁLVARO JOSÉ - Perspectiva Paralela. 1 948.

30. ROUBAUDI, C. - Traité de Géométrie Descriptive. 1 935.

31. ROUCHÉ et COMBEROUSSE - Traité de Géométrie.

32. RUSSINOFF, S.E.- Pratical Descriptive Geometry. 1948

33. SCHUMANN, C.H. - Descriptive Geometry. 4ª edição.

34. TAGLIAVINI, G. - La Geometria Descrittiva. 1ºvol.

35. WERNER, F.M. - Applied Descriptive Geometry.1946

36. WATTS, E.F. e RULE, J.T. - Descriptive Geometry.
4ª edição.

37. WELLMAN, B.L. - Technical Descriptive Geometry.
1 948.

lebq.