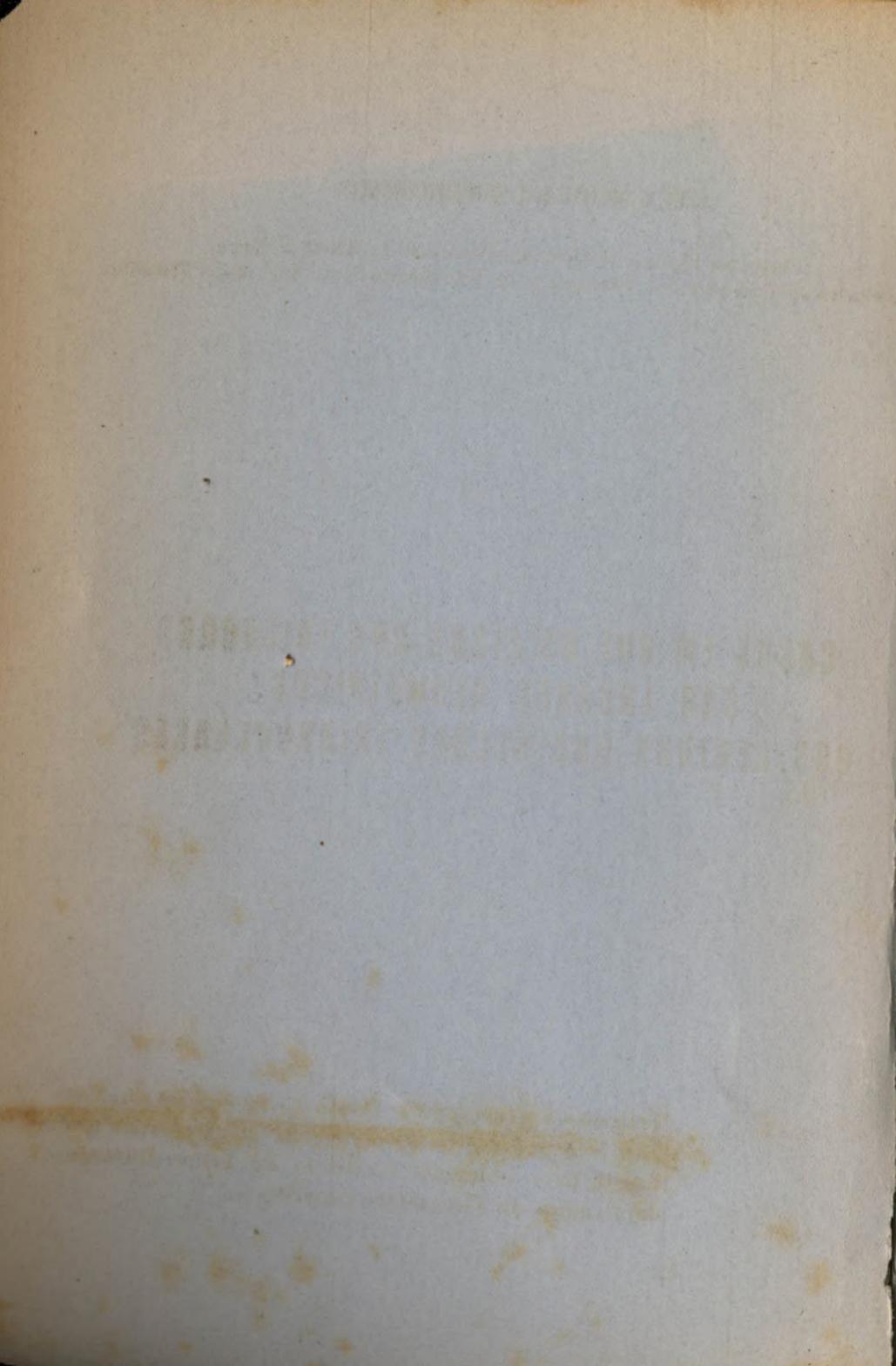


**LÉA SANTOS DE BUSTAMANTE**

Curso de Pintura da Escola Nacional de Belas Artes  
Professôra Licenciada em Desenho pela Faculdade Nacional de Filosofia

**CASOS EM QUE OS EIXOS DOS TRIEDROS  
SÃO LUGARES GEOMÉTRICOS  
DOS CENTROS DAS SEÇÕES TRIANGULARES**

Trabalho apresentado à Douta Congregação da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil, para obtenção do título de Livre Docente da Cadeira de Geometria Descritiva.



**LÉA SANTOS DE BUSTAMANTE**

Curso de Pintura da Escola Nacional de Belas Artes  
Professôra Licenciada em Desenho pela Faculdade Nacional de Filosofia

**CASOS EM QUE OS EIXOS DOS TRIEDROS  
SÃO LUGARES GEOMÉTRICOS  
DOS CENTROS DAS SEÇÕES TRIANGULARES**

Trabalho apresentado à Douta Congregação da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil, para obtenção do título de Livre Docente da Cadeira de Geometria Descritiva.

T/2  
1957



A meus queridos pais,

com todo carinho e admiração

A some quarters past,

and some quarters past,



# Í N D I C E

## 1ª Parte: - Preliminar

Páginas

I - Introdução . . . . .	1
II - Apreciação sucinta sôbre ângulo sólido Definição, elementos, ângulo sólido de duas fôlhas, avaliação de grandeza, clas sificação, ângulos sólidos em relação à esfera, retas isóclinas, planos isocli nos, analogia entre polígonos e polie dros . . . . .	9 a 17

## 2ª Parte: - Triedros

I - Definição, denominação, convenções . . . . .	18
II - Avaliação de grandeza . . . . .	19 a 21
III - Elementos: Semi-planos cevianos: bissetor, me diano, altura, isogonais. Plano me diador. Eixos: bissetores, media nos, alturas, mediadores . . . . .	21 a 23
IV - Analogia com triângulos . . . . .	23, 24
V - Classificação . . . . .	24 a 27
VI - Relação entre dois triedros: Triedros co-faciais: adjacentes, opos tos por uma face, co-espaciais. Trie dros opostos por uma aresta, Triedros opostos pelo vértice, simétricos ou de duas fôlhas. Triedros suplementa res e polares. Propriedades dos trie dros polares. Congruência de trie dros . . . . .	28 a 35
VII - Triedro fundamental, primitivo ou de refe rência - Sentido do triedro . . . . .	35 a 39
VIII - Triedro em relação à esfera: Interiores: centrais. Inscritos. Circunscritos	39 a 42

IX - Propriedades dos triedros e triângulos esféricos . . . . .	42, 43
X - Determinação, representação e resolução de triedros: Problema geral de Ernest Songaylo. Resolução dos casos clássicos. Variações do problema geral de Ernest Songaylo. Resolução de triedros: discussão dos diversos casos. Aplicações da resolução de triedros . . . . .	44 a 67
XI - Secções planas: Triedro de duas folhas - natureza da secção. Quadro esquemático. Natureza das secções triangulares de pontos próprios. Secção anti-paralela de um triedro . . . . .	67 a 85
<u>3ª Parte: - Casos em que os eixos dos triedros são lugares geométricos dos centros das secções triangulares</u>	
I - Lugar geométrico dos incentros . . . . .	86 a 94
II - Lugar geométrico dos baricentros . . . . .	94 a 97
III - Lugar geométrico dos ortocentros . . . . .	97 a 105
IV - Lugar geométrico dos circuncentros . . . . .	105 a 111
V - Quadro sinótico . . . . .	112
VI - Conclusões finais . . . . .	113 e 114
VII - Aplicações . . . . .	114 a 119
Bibliografia . . . . .	120 a 122

## I - INTRODUÇÃO

No 2º período letivo do ano de 1954 foi realizado, na Escola Nacional de Belas Artes, sob os auspícios da Universidade do Brasil, um Curso de Aperfeiçoamento para professores de Desenho, obedecendo à magnífica orientação do Prof. Dr. Roberto Muniz Gregory, catedrático da cadeira de Geometria Descritiva, respectivamente, das Escolas Nacional de Engenharia e de Belas Artes. Em uma de suas palestras, o referido professor chamou a atenção dos alunos para a importância do estudo de triedros e sua analogia com triângulos.

Assistindo a essa palestra, como aluna que fomos, no referido curso, tivemos o nosso interesse voltado para o assunto. Ocorreu-nos, então, fazer um estudo das relações entre triângulos e triedros, considerando os primeiros como resultantes de secções planas feitas nos segundos. Isto nos levou a uma pesquisa mais ampla, fazendo-nos concluir pela necessidade de um estudo prévio das secções planas dos ângulos sólidos ou poliedros e, em particular, dos triedros, do mesmo modo como é feito para secções cônicas. Daí a consideração de "ângulo sólido de duas fôlhas" (1ª parte, pgs. 11 a 13) e o capítulo sobre secções planas (2ª parte, pgs. 67 a 85).

Com o propósito de dar caráter didático a este trabalho, apresentamos, nas 1ª e 2ª partes, uma noção sucinta sobre ângulos sólidos e um estudo mais minucioso sobre triedros, que fundamentasse o que consideramos propriamente o assunto da tese ou seja, a matéria constante da 3ª parte.

Como resultado da pesquisa feita na 3ª parte, chegamos às "Conclusões Finais" apresentadas nas pgs. 113 e 114 e às "Aplicações" que sugerimos para resolução dos problemas constantes das pgs. 114 a 119.

Agradecemos o interesse tomado pelo Prof. Dr. Roberto Muniz Gregory, a quem temos a honra de servir como auxiliar, na cadeira de Geometria Descritiva da Escola Nacional de Belas Artes. Esse eminente professor propôs à Congregação desta Escola, fôsse incluído no programa da Cadeira de Geometria Descritiva, para o Curso de Professorado de Desenho, o seguinte assunto:

- "Ponto ... - Generalidades sôbre os ângulos poliedros. Estudo detalhado dos ângulos triedros".

Sendo sua proposta aceita, conforme comunicado nº 260, de 25/4/57, feita ao referido professor, nos foi possível apresentar à douta Congregação da Escola Nacional de Belas Artes, o presente trabalho, com o qual, pretendemos nos candidatar ao concurso para Docente Livre da Cadeira de Geometria Descritiva desta Escola, de acôrdo com o edital de abertura de inscrições, publicado no Diário Oficial de 23/5/57.

\* \* \*

\*

## II - APRECIÇÃO SUCINTA SÔBRE ÂNGULOS SÓLIDOS

### Definição:

Ângulo sólido ou poliedrico é a figura formada pela intersecção de três ou mais planos que têm um ponto comum e não pertencem a uma mesma reta.

### Elementos:

Os planos se cortam dois a dois, formando, nas respectivas intersecções, as arestas do ângulo sólido. A porção de cada plano compreendida entre duas arestas consecutivas é chamada face do ângulo sólido. O ponto de intersecção das arestas e faces pertence, simultâneamente, a tôdas as faces e é denominado vértice do ângulo sólido.

Esse vértice poderá ser próprio ou impróprio. No primeiro caso, o ângulo sólido é uma superfície piramidada fechada; no segundo caso, o vértice estará no infinito e a superfície passará a ser uma superfície prismática fechada.

Destacam-se, ainda, num ângulo sólido, seus ângulos planos ou ângulos de suas faces e seus ângulos diedros, ou os formados entre duas faces consecutivas.

### Denominações e convenções: (1)

Vértice: Será denominado por letra maiúscula do al

(1) Muitas das anotações que adotamos foram tiradas do estudo de projeções axonométricas e em particular, mongeanas, feito pelo Prof. Dr. Roberto Muniz Gregory (ao qual já fizemos referência na "Introdução"). Segundo sua anotação, um ponto, ou uma reta no espaço, terão a letra que os designa entre parêntesis. C mes

fabeto latino, (V), fig. 1.

Face - Será denominada por letra minúscula do alfabeto grego. Ex.:  $\alpha$ ,  $\beta$ , etc.

Quando se tratar do ângulo plano da face, acrescentar o símbolo de ângulo a essa letra. Ex.:

$\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ , etc., ou  $\sphericalangle\alpha$ ,  $\sphericalangle\beta$ ,

etc. No caso de dúvida, denominar o ângulo da face por três letras, uma delas correspondendo ao vértice e as outras duas a pontos pertencentes às arestas

que definem a face, acrescentan

do o símbolo de ângulo. Ex.:  $\widehat{(A)(V)(B)}$  ou  $\sphericalangle(A)(V)(B)$ .

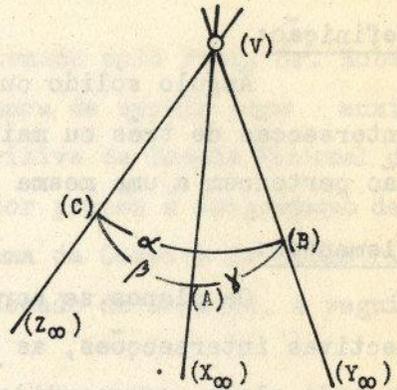


Fig. 1

Aresta - Pode-se adotar uma das seguintes designações:

1ª) dois pontos, um dêles será o vértice (V) e o outro, um ponto qualquer (A), próprio, pertencente à aresta. Ex.: (V)(A), etc.;

2ª) dois pontos, um dêles será o vértice (V), o outro, o ponto impróprio dessa aresta, denominado por letra minúscula do alfabeto latino (dar preferência às últimas), acrescida do símbolo  $\infty$  (infinito), colocado como índice. Ex.: (V)(X <sub>$\infty$</sub> ), etc.

3ª) pelas letra que denominam os planos, cuja inter

---

mo ponto ou reta, em projeção, serão designados pela mesma letra sem o parentesis. (Ver: "Representação da Linha Reta", monografia apresentada à Congregação da E.N. B.A. da U.B., pelo referido professor, para provimento do cargo de Professor Cate drático de Geometria Descritiva).

secção produziu a aresta. Assim:  $(\beta\alpha)$ , etc.

Ângulo diedro - Acrescentar o símbolo de ângulo à designação da aresta, de acôrdo com a 3ª sugestão para "aresta". Ex.:  $\widehat{\beta\gamma}$  ou  $\sphericalangle\beta\gamma$ , retirando-se o parêntesis por não indicar mais, a aresta no espaço.

Pode-se, ainda, usar uma das seguintes designações:

a) - A relativa à 1ª sugestão de "aresta", acrescida do símbolo de ângulo: Ex.:  $\widehat{(V)(A)}$  ou  $\sphericalangle(V)(A)$ .

b) - Uma convenção análoga a que se emprega para ângulo linear, ou seja, a designação da aresta ladeada pela das faces. Ex.:  $\widehat{\beta(V)(A)\gamma}$  ou  $\sphericalangle\beta(V)(A)\gamma$ .

c) - Pode-se, também, usar:  $\widehat{(B)(V)(A)(C)}$ , ou ...  $\sphericalangle(B)(V)(A)(C)$ , entendendo-se que as duas letras centrais referem-se à aresta do diedro e que as letras das extremidades, denominam pontos pertencentes às faces que determinam o diedro.

Ângulo sólido - Usar letras que denominam vértice e pontos pertencentes às arestas. Ex.:  $(V)-(A)(B)(C)$  ou  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , devendo-se colocar, em primeiro lugar, a letra que se refere ao vértice, separando-a das demais por um pequeno traço.

Ângulo sólido de duas fôlhas, ângulos simétricos ou opostos pelo vértice -

Da definição de ângulo sólido, concluímos que o conjunto de planos que determinam um ângulo sólido, formam, na realidade, vários ângulos sólidos (1), todos tendo como vértice

(1) O número de ângulos sólidos é dado pela fórmula:  $S = F(F - 1) \div 2$ , na qual,

ce o ponto (V), como arestas (V)(A), (V)(B), (V)(C) e como faces, os planos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (fig. 2).

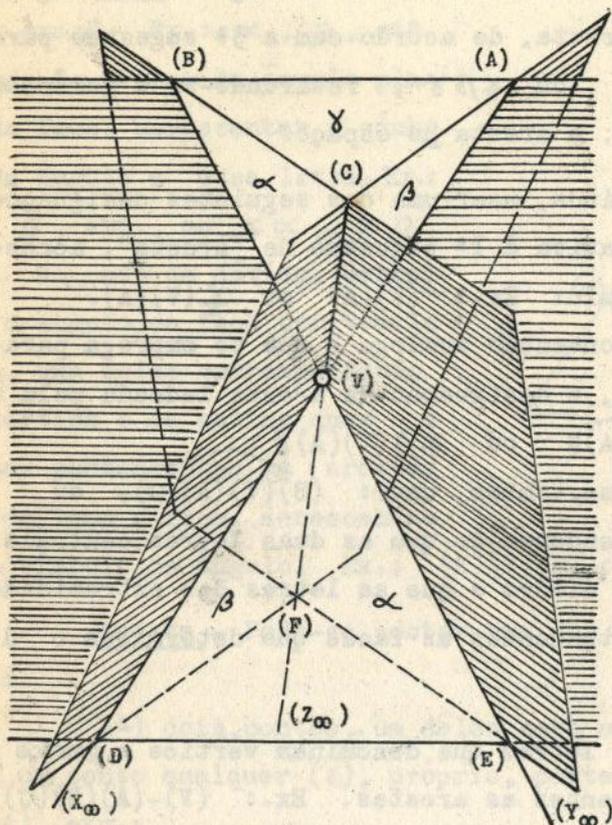


Fig. 2

sólidos que têm suas arestas na mesma direção, mas em sentidos contrários.

Assim, as faces  $\alpha$  e  $\beta$  se interceptam determinando uma reta que se subdivide em duas arestas (semi-retas) (V)(C) e (V)(F), etc.

Os ângulos planos das faces, serão opostos pelo vértice.

---

S é o número de ângulos sólidos; F, o número de faces que possui o ângulo sólido.

tice e um ângulo sólido ficará num semi-espaco, enquanto o outro estará no outro semi-espaco determinado pelo plano comum das faces.

Esses ângulos sólidos são denominados simétricos ou opostos pelo vértice. Na figura 2, deixamos de hachurar dois ângulos sólidos, como exemplo de poliedricos simétricos ou opostos pelo vértice.

Julgamos de interesse para o estudo de "secções planas do triedro", que pretendemos desenvolver posteriormente, considerar esses ângulos sólidos opostos, como sendo um ângulo sólido de duas fôlhas, admitindo-se que um ângulo sólido pode tender para uma superfície cônica fechada, se o número de faces se tornar infinitamente grande e os ângulos planos dessas faces, infinitamente pequenos.

Nesse caso, um estudo de secções planas de ângulos sólidos, pode ser feito por analogia com o de secções cônicas.

Considere-se, ainda, que ângulos sólidos opostos ou simétricos são iguais, embora não sejam congruentes, isto é, não sejam superponíveis.

#### Avaliação de grandeza -

Um ângulo sólido, sendo formado de ângulos planos e ângulos diedros, poderá ser apreciado quanto à grandeza dos ângulos dessas faces ou dos diedros.

A grandeza das faces é dada pela grandeza dos ângulos planos dessas faces. A grandeza dos diedros é dada pela grandeza do ângulo retilíneo do diedro.

Entretanto, existe estudo que sugere a avaliação de grandeza do ângulo sólido, sem levar em conta êsses elementos a que acabamos de nos referir.

Quando tratarmos de triedros, apresentaremos interessante apreciação sôbre êsse assunto, feita pelo Prof. Dr. Roberto Moniz Gregory (ver págs. 19 e 21).

### Classificação -

Quanto à grandeza dos ângulos de suas faces e de seus diedros, os ângulos sólidos se classificam em:

I) Regulares - quando têm ângulos planos e ângulos diedros iguais, ou seja: faces e diedros iguais (1).

II) Irregulares - quando têm:

- a) faces iguais e diedros desiguais;
- b) " desiguais e diedros iguais;
- c) " e diedros desiguais.

Quanto ao número de faces, os ângulos sólidos podem ser:

triedros - quando têm três faces;

quadriedros - quando têm quatro faces;

etc.

Entretanto, só se usa denominação especial para os triedros. Os demais ângulos sólidos não são conhecidos com denominação própria, sendo designados, simplesmente, por ângulos sólidos de 4 faces, de 5 faces, etc.

---

(1) Podemos empregar "face" e "diedro" numa expressão simplificada de "ângulo plano da face" e "ângulo retilíneo do diedro", respectivamente.

Ângulos sólidos em relação à esfera - polígonos esféricos -

Em relação a uma esfera, o ângulo sólido pode ter diversas posições. Destacaremos as seguintes, que nos parecem principais:

- a) ângulo sólido interior (caso particular: central),
- b) " " inscrito,
- c) " " circunscrito.

É interior quando o vértice do ângulo sólido está no interior da superfície esférica, passando a se denominar central se o vértice pertencer ao centro da superfície. É inscrito quando o vértice do ângulo sólido pertence à superfície esférica e circunscrito, quando as faces do ângulo sólido são tangentes à esfera.

Retas isóclinas -

São retas que formam ângulos iguais com as arestas de um ângulo sólido. Assim, no ângulo sólido ..

$(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$  (fig. 3), se traçarmos uma reta  $(V)(R_{\infty})$  de tal sorte que:

$$\begin{aligned} \sphericalangle(X_{\infty})(V)(R_{\infty}) &= \\ = \sphericalangle(Y_{\infty})(V)(R_{\infty}) &= \\ = \sphericalangle(Z_{\infty})(V)(R_{\infty}) \end{aligned}$$

$(V)(R_{\infty})$  será, então, uma reta isóclina do ângulo sólido  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ .

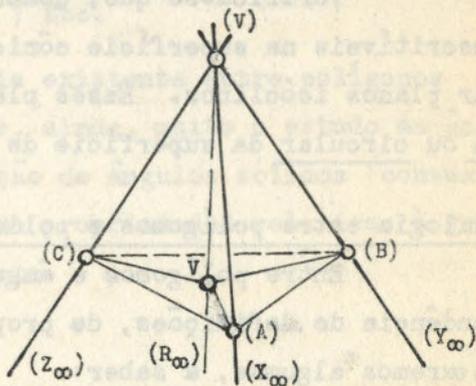


Fig. 3

Verifica-se que, somente os ângulos sólidos inscri-

tíveis na superfície cônica de revolução poderão ter reta isóclina, que será o eixo dessa superfície.

Planos isóclinos -

São planos que formam ângulos iguais com as arestas de um ângulo sólido.

Cortemos o ângulo sólido  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$  por um plano que intercepte as arestas nos pontos (A), (B) e (C), respectivamente, em relação a  $(V)(X_{\infty})$ ,  $(V)(Y_{\infty})$  e  $(V)(Z_{\infty})$ , (fig. 3).

Seja  $V$  a projeção ortogonal de  $(V)$  no plano  $(A)(B)(C)$ .

Se:  $\sphericalangle(V)(A)V = \sphericalangle(V)(B)V = \sphericalangle(V)(C)V$ , ou seja, os ângulos que as arestas  $(V)(X_{\infty})$ ,  $(V)(Y_{\infty})$  e  $(V)(Z_{\infty})$  formam com o plano  $(A)(B)(C)$  são iguais entre si, o plano  $(A)(B)(C)$  será isóclino do ângulo sólido  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ .

Verifica-se que, somente, para os ângulos sólidos inscritíveis na superfície cônica de revolução é possível traçar planos isóclinos. Esses planos corresponderão à seção reta ou circular da superfície de revolução.

Analogia entre polígonos e poliedros -

Entre polígonos e ângulos poliédricos há uma correspondência de definições, de propriedades, etc., das quais destacaremos algumas, a saber:

Correspondência de elementos e definições

<u>Polígonos planos</u>	<u>Ângulos sólidos ou poliédricos</u>
Vértice (ponto) .....	Aresta (reta)

Lado (determinado por dois vértices consecutivos).	Face (determinada por duas arestas consecutivas).
Diagonal (segmento: une dois vértices não consecutivos).	Plano diagonal (plano: une duas arestas não consecutivas)
Ângulo plano ou linear .....	Ângulo diedro

Correspondência de propriedades e classificações

Polígonos planos

Ângulos sólidos ou poliedricos

Lados e ângulos iguais (pol. regulares)

Faces e ângulos diedros iguais (ângulos sólidos regulares)

Lados iguais e ângulos desiguais }  
 Lados desiguais e ângulos iguais } pol.  
 Lados e ângulos desiguais } irreg.

Faces iguais e diedros desiguais } ang.  
 Faces desiguais e diedros iguais } sól.  
 Faces e diedros desiguais } irreg.

Cada lado de um polígono é menor que a soma de todos os outros

Cada face de um ângulo sólido é menor que a soma de todas as outras.

Etc.

Etc.

Dentro dessa analogia existente entre polígonos e poliédricos, podemos desenvolver, ainda, muito o estudo de ângulos sólidos; assim, a definição de ângulos sólidos convexos e côncavos, um grande número de propriedades relativas à grandeza de faces ou de diedros, etc.

\*

2ª PARTE - TRIEDROS

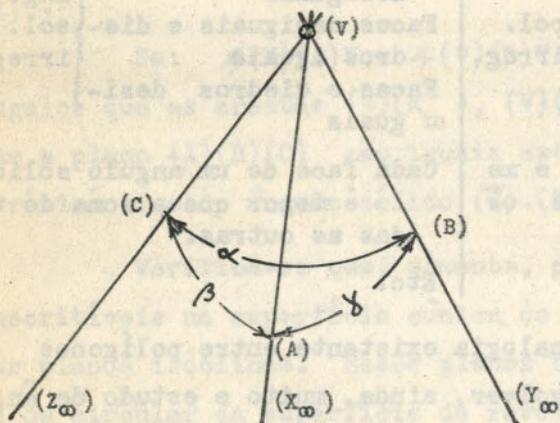
I - DEFINIÇÃO - DENOMINAÇÃO - CONVENÇÕES

Definição -

Triedro é o ângulo sólido que possui três faces.

Denominação - convenções -

São as mesmas já adotadas para ângulos sólidos, dando-se preferência a certas letras e convenções, por analogia com triângulos.



Vértice: representar por uma letra maiúscula do alfabeto latino. São mais usadas as seguintes: (V) (fig. 4), (O), (P).

Faces: representadas por letras minúsculas do alfabeto grego, dando-se preferência às letras  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  ou  $\pi$ ,  $\pi'$ ,  $\pi''$  (quando se tratar do triedro de

Fig. 4

referência, tri-retângulo.

Havendo dúvida, pode-se denominar a face pelas letras relativas às arestas e ao vértice que a determinam; exemplo: face (A)(V)(B) ou  $(X_\infty)(V)(Y_\infty)$ .

## II - AVALIAÇÃO DE GRANDEZA

Do mesmo modo que para os ângulos, podemos considerar num triedro a grandeza de suas faces ou de seus diedros ; entretanto, isso não satisfaz como elemento capaz de fazer a avaliação de grandeza, pois não estabelece uma única unidade como termo de comparação.

O prof. Dr. Roberto Moniz Gregory (já referido em nota de roda-pé da pág. 9), em trabalho manuscrito, sobre esse assunto, apresenta o seguinte:

### "Medidas de ângulo triedro"

São usadas as seguintes unidades:

- 1 - O estero-radiano, unidade internacional que designamos pela letra grega  $\Omega$  (omega), empregada para designar os ângulos sólidos, em geral.
  - 2 - O triedro trirretângulo, unidade prática para a qual adotaremos a anotação TE.
  - 3 - O esfero-radiano.
- 1 - Estero-radiano - Se as faces de um triedro regular de vértice no centro da esfera de raio unidade (lcm), de terminarem na superfície da esfera um triângulo esférico de área igual a  $1 \text{ cm}^2$ , este triedro assim definido será o estero-radiano.

Considerada a proporção: a porção ilimitada de espaço  $\Omega$  compreendida pelas faces do estero-radiano, estará para o espaço indefinido em torno de um ponto, como a área do triângulo esférico que lhe corresponde ( $1 \text{ cm}^2$ ) está para a área da esfera ( $S = 4\pi r^2$ ; sendo  $r = 1$ ,  $S =$

=  $4\pi \text{cm}^2$ )  $4\pi \cdot \text{cm}^2$ , isto é, sendo E o espaço indefinido

$$\frac{\Omega}{E} = \frac{1 \text{ cm}^2}{4\pi \text{cm}^2}; \quad \text{ou} \quad \Omega = \frac{1}{12,56} E$$

isto é, o estero-radiano equivale a menos de 1/12 do espaço indefinido de três dimensões.

2 - Triedro trirretângulo - Três planos entre si perpendiculares dividem o espaço em 8 partes iguais, valendo cada uma delas um TE, de onde resulta

$$\text{TE} = \frac{1}{8} E$$

3 - Esfero-radiano - Em seu trabalho "Unidades e medidas", Euclides Roxo assim definiu esta unidade legal:

"Ângulo sólido que subtende na superfície de qualquer esfera com centro em seu vértice, uma área igual a 1/4 da área da esfera".

Como se vê, a unidade assim definida não é mais do que um diedro reto, equivalendo a 2 TE e a 3,1415 $\Omega$

$$\left( \Omega = \frac{1}{4\pi} E, \text{ donde } \frac{1}{4} E = \pi \Omega = 3,1415 \Omega \right).$$

O esfero-radiano não é uma unidade prática, pois além de ser múltipla de TE, pois é equivalente a 2 TE, não tem a mesma forma das grandezas que mede (o estero-radiano e o triedro-trirretângulo são triedros).

Das relações acima conclui-se:

$$E = 12,56 \dots \Omega$$

$$E = 8 \text{ TE}$$

logo:

$$8 TE = 12,56 \dots \Omega$$

$$TE = 1,5707 \dots \Omega$$

### III - ELEMENTOS DE UM TRIEDRO

Além dos já estudados para tódo e qualquer ângulo sólido, podemos acrescentar aquêles que são próprios de um triedro e que são, geralmente, obtidos por um estudo comparativo com triângulos.

Destacaremos, apenas, os que se referem diretamente ao assunto desta tese:

- A) - Semi-planos cevianos
- B) - Planos mediadores
- C) - Eixos.

#### A) Semi-planos cevianos

São todos os semi-planos do triedro, cuja reta origem é uma das arestas do triedro.

Êstes semi-planos podem ser denominados, simplesmente: cevianos.

Os principais cevianos são: bissetores, medianos, alturas e os isogonais.

- a) Semi-plano bissetor - é aquêle que tem origem na aresta e divide o diedro em dois diedros iguais. Pode ser chamado, simplesmente, bissetor.
- b) Semi-plano mediano - é definido por uma aresta (origem) e a bissetriz do ângulo da face

oposta. Pode ser chamado, simplesmente, mediano.

c) Semi-plano altura - é aquêlê que tem origem numa aresta do triedro e é perpendicular à face oposta. Pode ser chamado, apenas, plano altura.

d) Semi-planos isogonais - são semi-planos que têm origem na aresta do triedro e são simétricos em relação ao plano bissetor do diedro relativo a essa aresta.

### B) Plano mediador

Também chamado, simplesmente, mediador, é o plano que pertence à bissetriz de uma face do triedro e é perpendicular ao plano desta face.

### C) Eixos

Os principais eixos de um triedro são:

- 1º) - dos bissetores
- 2º) - dos medianos
- 3º) - das alturas
- 4º) - dos mediadores

Os três primeiros são determinados pelos respectivos semiplanos cevianos, o quarto é determinado pela intersecção dos planos mediadores de um triedro.

Os teoremas que estabelecem a determinação desses eixos, e que podem ser demonstrados com os recursos da geometria elementar, são os seguintes:

#### 1º) - Eixo dos bissetores -

"Os três bissetores de um triedro cortam-se ao lon-

go de uma e somente uma reta, eixo dos bissetores, que é o lugar dos centros das esferas inscritas no triedro, ou o eixo do cone de revolução inscrito nesse triedro".

2ª) - Eixo dos medianos -

"Os três medianos de um triedro cortam-se ao longo de uma e somente uma reta, o eixo dos medianos".

3ª) - Eixo das alturas -

"Os três semi-planos altura de um triedro, cortam-se, ao longo de uma e somente uma reta, o eixo das alturas ou eixo órtico".

4ª) - Eixo dos mediadores -

"Os três mediadores de um triedro cortam-se ao longo de uma e somente uma reta, eixo mediador, que é o eixo do cone de revolução circunscrito ao triedro".

#### IV - ANALOGIA COM TRIÂNGULOS

Já chamamos a atenção para a analogia existente entre polígonos e ângulos poliédricos (ver pág. 16 e 17).

No caso particular dos triedros é interessante verificar essa analogia, sobretudo no que concerne à chamada "Geometria do Triângulo".

No quadro sinótico que apresentamos a seguir, podemos fazer uma idéia suscinta dessa analogia:

Correspondência de definições

<u>Triângulos</u>	<u>Triedros</u>
Figura formada pela intersecção de retas que se cortam duas a duas	Figura formada pela intersecção de planos que se cortam dois a dois

Correspondência de elementos e propriedades

<u>Triângulos</u>	<u>Triedros</u>
Três vértices .....	Três arestas
Três lados .....	Três faces
Três bissetrizes, co-punctuais, determinando o <u>incentro</u> , ou centro do círculo inscrito.	Três bissetores, co-axiais, de terminando o eixo da superfície cônica de revolução inscrita, <u>eixo dos bissetores</u> .
Três medianas, co-punctuais, de terminando o <u>baricentro</u> , <u>centróide</u> ou <u>centro de gravidade</u> da superfície.	Três medianos, co-axiais, de terminando o <u>eixo dos medianos</u> .
Três alturas, co-punctuais, de terminando o <u>ortocentro</u> .	Três planos altura, co-axiais, determinando o <u>eixo das alturas</u> .
Três mediatrizes, co-punctuais, determinando o <u>circuncentro</u> , ou centro do círculo circunscrito.	Três mediadores, co-axiais, de terminando o eixo dos <u>mediadores</u> ou eixo da superfície cônica circunscrita.
Três círculos ex-inscritos.	Três superfícies cônicas, de revolução, ex-inscritas.
Etc.	Etc.

V - CLASSIFICAÇÃO

Podemos adotar diversos critérios para fazer a clas

sificação de triedros. Esses critérios, em geral, se baseiam no grupamento de propriedades, como, por exemplo, igualdades ou desigualdades de faces, de ângulos, etc.

Assim, destacaremos as quatro seguintes modalidades de classificar um triedro, considerando a:

- 1 - igualdade das faces;
- 2 - igualdade dos ângulos diedros;
- 3 - grandeza dos ângulos das faces;
- 4 - grandeza dos ângulos diedros.

1ª) - Considerando a igualdade das faces -

É costume classificar os triedros pelos triângulos esféricos por eles determinados e em relação aos triângulos esféricos, adota-se as mesmas denominações empregadas para os triângulos estudados na Geometria Plana. Daí, a denominação de triedro isósceles, equilátero, etc.

Entretanto, parecem-nos mais expressivas as denominações que apresentamos a seguir, cujo significado está de acordo com a propriedade contida na figura.

Assim, o triedro pode ser: isoedro e anisoedro. Será isoedro o triedro que tiver, pelo menos, duas faces iguais e anisoedro o que possuir as três faces desiguais.

O triedro isoedro pode ser: bi-isoedro, quando tem duas faces iguais e tri-isoedro ou equiedro, quando tem as três faces iguais.

2ª) - Considerando a igualdade dos ângulos diedros -

O triedro pode ser isoângulo, quando possui, pelo menos, dois ângulos diedros iguais e anisoângulo, quando pos-



sui os três diedros desiguais.

O triedro isoângulo pode ter dois ou os três diedros iguais. No primeiro caso, será simplesmente, triedro isoângulo e, no segundo caso passará a se denominar triedro equiângulo.

3ª) - Considerando a grandeza dos ângulos das faces -

Um triedro pode ser ortloedro ou quadrantal (1) e loxoedro ou não quadrantal.

Triedro ortloedro é o que tem, pelo menos, uma de suas faces em ângulo reto, podendo ser: mono-ortloedro (mono-quadrantal), di-ortloedro (biquadrantal) ou tri-ortloedro (tri-quadrantal), segundo tenha, uma, duas ou as três faces em ângulo reto.

Triedro loxoedro (não quadrantal) é o que tem suas faces em ângulos oblíquos, podendo ter:

- a) tôdas as faces agudas (denominaremos triedro oxiedro).
- b) tôdas as faces obtusas (denominaremos triedro ambliedro).
- c) uma face aguda e duas obtusas ou vice-versa (daremos a denominação geral do grupo, ou seja triedro loxoedro).

4ª) - Considerando a grandeza dos ângulos diedros -

Um triedro pode ser retângulo, quando possui, pelo menos, um diedro retângulo e obliquângulo, quando não possui nenhum diedro retângulo.

(1) A denominação quadrantal foi tirada de um trabalho manuscrito, sobre triedros, de autoria do Prof. Dr. Roberto Moniz Gregory (já referida nesta tese).

O triedro retângulo pode ter um, dois ou os três ângulos diedros retos, sendo: monorretângulo, birretângulo ou trirretângulo, respectivamente.

O triedro obliquângulo pode ter diedros somente agudos, somente obtusos, ou agudos e obtusos. No primeiro caso será triedro acutângulo, no segundo, triedro obtusângulo e, no terceiro triedro obliquângulo.

Resumindo num só esquema os quatro critérios de classificação, temos:

CLASSIFICAÇÃO DOS TRIEDROS	1) Quanto à igualdade das faces	{	<u>ISOEDRO</u>	{	<u>bi-isoedro</u> ou <u>isoedro</u> (duas faces iguais)
			Pelo menos duas faces iguais		<u>tri-isoedro</u> ou <u>equiedro</u> (três faces iguais)
			<u>ANISOEDRO</u> - Tem faces desiguais		
			2) Quanto à igualdade dos diedros		<u>ISOÂNGULO</u>
Pelo menos dois diedros iguais	<u>equiângulo</u> (três diedros iguais)				
<u>ANISOÂNGULO</u> - Diedros desiguais					
3) Quanto à grandeza dos ângulos das faces	{	<u>ORTOEDRO</u> ou <u>QUADRANTAL</u>		{	<u>Mono-ortopedro</u> (monoquadrantal) (uma face em ângulo reto)
		Pelo menos uma face em ângulo reto	<u>Di-ortopedro</u> (biquadrantal) (duas faces em ângulo reto)		
			<u>Tri-ortopedro</u> (triquadrantal) (três faces em ângulo reto)		
			<u>LOXOEDRO</u>		{
Todas as faces oblíquas	<u>ambliedro</u> (todas as faces obtusas)				
	<u>loxedro</u> (faces agudas e obtusas)				
	4) Quanto à grandeza dos diedros	{	<u>RETÂNGULO</u>	{	
Pelo menos um diedro reto			<u>birretângulo</u> (dois diedros retos)		
			<u>trirretângulo</u> (três diedros retos)		
			<u>OBLIQUÂNGULO</u>		{
Todos os diedros oblíquos	<u>Obtusângulo</u> (três diedros obtusos)				
	<u>Obliquângulo</u> (diedros agudos e obtusos)				

VI - RELAÇÕES ENTRE DOIS TRIEDROS

1ª) - Triedros co-faciais -

São triedros que possuem uma face comum, consequentemente, duas arestas são, também, comuns.

Os triedros co-faciais podem ser:

- a) adjacentes,
- b) opostos por uma face,
- c) co-espaciais.

a) Triedros adjacentes - Se cortarmos um diedro  $\alpha(C)(B)\beta$  (fig. 5) por um plano  $\gamma$ , êsse diedro ficará dividido em dois triedros (V)-(A)(B)(C) e (V)-(A)(B)(D). Êsses dois triedros são denominados adjacentes.

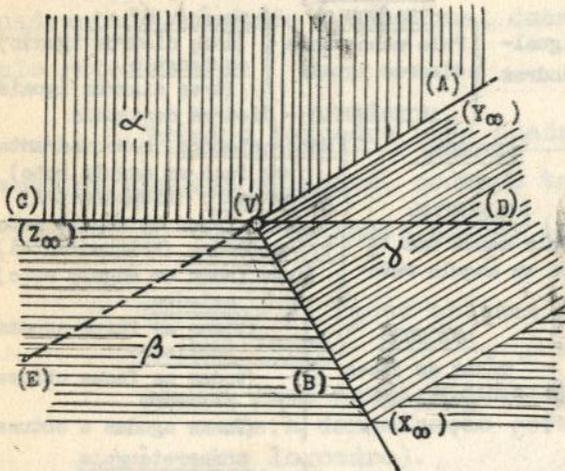


Fig. 5

As faces não comuns de um dos triedros são o suplemento das faces não comuns do outro. Assim

$$\sphericalangle(A)(V)(C) + \sphericalangle(A)(V)(D) = 180^\circ$$

e

$$\sphericalangle(B)(V)(C) + \sphericalangle(B)(V)(D) = 180^\circ$$

Os ângulos diedros adjacentes à face comum  $\gamma$  são suplementares, enquanto os terceiros ângulos diedros são iguais.

Assim:

diedros  $(A)(V)(B)(C) + (A)(V)(B)(D) = 180^\circ$

$$(C)(V)(A)(B) + (B)(V)(A)(D) = 180^\circ$$

e diedros

$$(A)(V)(C)(B) = (A)(V)(D)(B)$$

b) Triedros opostos por uma face - Assim denominamos aos triedros que possuem uma face comum  $(X_\infty)(V)(Z_\infty)$  (figura 6) compreendida entre as arestas não comuns  $(V)(U_\infty)$  e  $(V)(Y_\infty)$ .

As arestas não comuns não pertencem mais à mesma reta suporte, como acontece com os triedros adjacentes. O mesmo pode acontecer em relação às faces. Assim, por exemplo, o plano

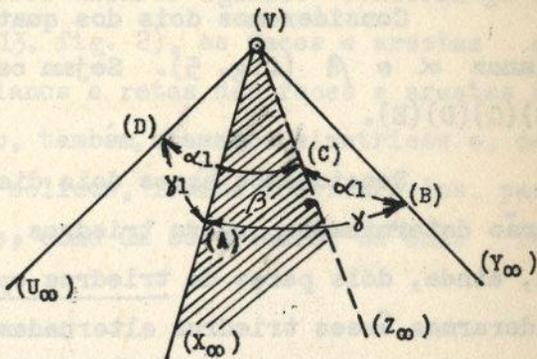


Fig. 6

da face  $(Z_\infty)(V)(Y_\infty)$  do triedro  $(V)-(A)(B)(C)$  é distinto do plano da face  $(Z_\infty)(V)(U_\infty)$  do triedro  $(V)-(A)(C)(D)$ .

Entretanto, pode, também, dar-se o caso de duas faces não comuns serem coplanares.

c) Triedros co-espaciais - São triedros que têm uma face comum e as arestas não comuns pertencem ao mesmo semi-espaco determinado pela face comum.

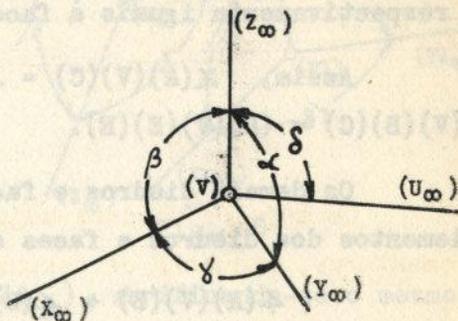


Fig. 7

Na fig. 7, os triedros  $(V)-(X_\infty)(Y_\infty)(Z_\infty)$  e

$(V)-(U_{\infty})(X_{\infty})(Z_{\infty})$ , são co-espaciais.

A face  $\beta$  é comum aos dois triedros e as arestas  $(V)(Y_{\infty})$  e  $(V)(U_{\infty})$  de um e outro triedro pertencem ao mesmo semi-espaço determinado pelo plano da face  $\beta$ .

2º) - Triédros opostos pela aresta -

Consideremos dois dos quatro diedros formados pelos planos  $\alpha$  e  $\beta$  (fig. 5). Sejam os diedros  $(A)(C)(D)(B)$  e  $(B)(C)(D)(E)$ .

Seccionemos êsses dois diedros por um plano  $\gamma$ . Ficarão determinados quatro triedros, adjacentes dois a dois, ou, ainda, dois pares de triedros opostos pela aresta, se considerarmos êsses triedros alternadamente.

Assim, são triedros opostos pela aresta aquêles que têm as faces coplanares e uma aresta comum.

Ex.:  $(V)-(A)(B)(C)$  e  $(V)-(B)(D)(E)$  são triedros opostos pela aresta.

Nesses triedros, uma face e o diedro oposto de um, são respectivamente iguais à face e diedro oposto do outro.

Assim,  $\sphericalangle(A)(V)(C) = \sphericalangle(D)(V)(E)$  e diedros  $(A)(V)(B)(C) = (D)(V)(B)(E)$ .

Os demais diedros e faces de um são os respectivos suplementos dos diedros e faces do outro:

$$\sphericalangle(A)(V)(B) + \sphericalangle(B)(V)(E) = 180^{\circ}$$

$$\sphericalangle(C)(V)(B) + \sphericalangle(B)(V)(D) = 180^{\circ}$$

e diedros

$$(B)(V)(E)(D) + (C)(V)(A)(B) = 180^\circ$$

$$(A)(V)(C)(B) + (B)(V)(D)(E) = 180^\circ$$

3ª) - Triedros opostos pelo vértice (simétricos ou de duas fôlhas).

Têm faces e ângulos diedros iguais. Conforme já estudamos (vide págs. 11, 12, 13, fig. 2), as faces e arestas de um pertencem aos mesmos planos e retas das faces e arestas do outro. Estes triedros são, também, chamados simétricos e, conforme propomos em ângulos sólidos, iremos considerá-los, para o estudo de secções planas, como um só triedro, de duas fôlhas.

4ª) - Triedros suplementares e polares

São chamados suplementares, os triedros nos quais, "o ângulo de cada face de um é suplemento de um diedro do outro".

Sejam os triedros  $(V)-(X_\infty)(Y_\infty)(Z_\infty)$  e  $(V_1)-(X_{1\infty})(Y_{1\infty})(Z_{1\infty})$ , (fig. 8). Esses triedros serão suplementares se  $\hat{\alpha}$  fôr o suplemento do ângulo de um diedro  $\beta_1 \gamma_1$ ,

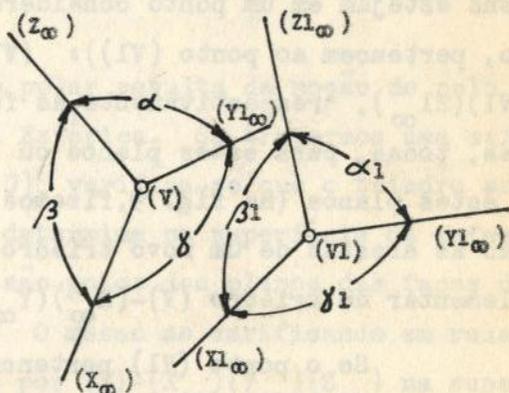


Fig. 8

do triedro  $(V_1)-(X_{1\infty})(Y_{1\infty})(Z_{1\infty})$ , verificando-se o mesmo em relação aos ângulos das demais faces e diedros de um e outro triedro, de modo a ter-se:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} + \hat{\alpha}_1 \gamma_1 &= 180^\circ & \text{e} & \hat{\beta}_1 + \hat{\alpha} \gamma &= 180^\circ \\ \hat{\gamma} + \hat{\alpha}_1 \beta_1 &= 180^\circ & \text{e} & \hat{\gamma}_1 + \hat{\alpha} \beta &= 180^\circ \\ \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 \gamma_1 &= 180^\circ & \text{e} & \hat{\alpha}_1 + \hat{\beta} \gamma &= 180^\circ \end{aligned}$$

Pode-se construir um triedro  $(V_1)-(X_{1\infty})(Y_{1\infty})(Z_{1\infty})$ , suplementar de um triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$  dado, (fig. 9),

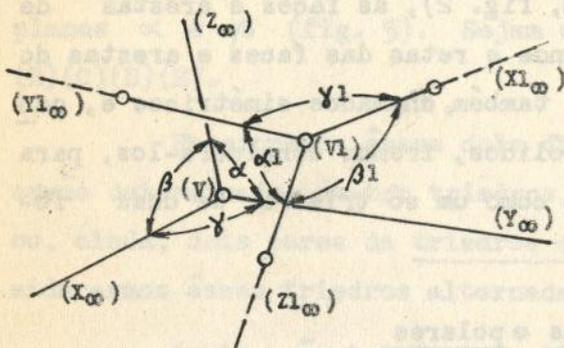


Fig. 9

traçando-se, de um ponto qualquer,  $(V_1)$  perpendiculars às faces  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  d'êste triedro. As semi-perpendiculares (empregamos semi-perpendiculares para exprimir as semi-retas pertencentes à perpendicular e cujas ori-

gens estejam em um ponto considerado da perpendicular, no caso, pertencem ao ponto  $(V_1)$ :  $(V_1)(X_{1\infty})$ ,  $(V_1)(Y_{1\infty})$ , e  $(V_1)(Z_{1\infty})$ , respectivamente, às faces  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , orientadas, tôdas, para êstes planos ou tôdas em sentido contrário a êstes planos (na fig. 9, fizemos orientadas para os planos), são as arestas de um novo triedro  $(V_1)-(X_{1\infty})(Y_{1\infty})(Z_{1\infty})$  suplementar do triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ .

Se o ponto  $(V_1)$  pertencer ao vértice do triedro dado, para que se forme um novo triedro, suplementar do primeiro, é preciso que as semi-perpendiculares pertençam, tôdas elas, aos mesmos semi-espacos das arestas correspondentes no triedro primitivo e relativamente aos planos de cada face que serviu de referência ou que estas semi-perpendiculares este-

jam, tôdas, nos respectivos semi-espacos opostos (fig. 10).

Quando o ponto (V) pertence ao vértice do triedro dado, o novo triedro obtido, passa a se denominar polar do triedro primitivo.

Assim, o "triedro polar" de um triedro dado é aquêle que tem seu vértice coincidindo com o

do triedro dado, suas arestas perpendiculares às do triedro dado e tôdas situadas nos mesmos semi-espacos ou tôdas pertencentes aos semi-espacos opostos aos das arestas correspondentes no triedro primitivo e relativamente aos planos das faces dêste triedro.

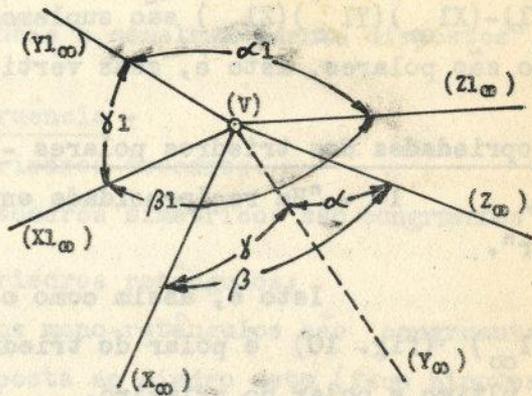


Fig. 10

A noção de triedro polar resulta da noção de polo e triângulo polar da Geometria Esférica. Se traçarmos uma esfera com centro em (V) (fig. 10), verifica-se que o triedro polar (V1)-(X1\_oo)(Y1\_oo)(Z1\_oo) determina na superfície da esfera um triângulo cujos vértices são polos dos planos das faces do triedro (V)-(X\_oo)(Y\_oo)(Z\_oo). O mesmo se verificando em relação ao triângulo determinado por (V)-(X\_oo)(Y\_oo)(Z\_oo) na superfície da esfera para os planos das faces de (V)-(X1\_oo)(Y1\_oo)(Z1\_oo). Êstes dois triângulos devem ser suplementares e são denominados polares (ver pgs. 39 a 42: Triedros em relação à esfera).

Verificamos, pois, que "todos os triedros polares

são suplementares mas, nem todos triedros suplementares são polares". Assim, na fig. 8, os triedros  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$  e  $(V_1)-(X_{1\infty})(Y_{1\infty})(Z_{1\infty})$  são suplementares por hipótese, mas não são polares, isto é, seus vértices não são coincidentes.

### Propriedades dos triedros polares -

1ª - "Há reciprocidade entre um triedro e seu polar".

Isto é, assim como o triedro  $(V_1)-(X_{1\infty})(Y_{1\infty})(Z_{1\infty})$  (fig. 10) é polar do triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , este último é polar do primeiro.

2ª - "Dois triedros polares são suplementares"

Nos livros de Geometria do Espaço encontra-se a demonstração destas propriedades.

### Congruência de triedros -

São bastante conhecidos e divulgados nos livros de "Geometria do Espaço", os casos de congruência de triedros, por isso, nos limitaremos aos enunciados: (note-se a analogia com "congruência de triângulos").

1ª) "Dois triedros são congruentes quando têm uma face igual, adjacente a diedros respectivamente iguais e semelhantemente dispostos".

2ª) "Dois triedros são congruentes quando têm um diedro igual formado por faces respectivamente iguais e semelhantemente dispostas".

3ª) "Dois triedros são congruentes quando têm as três faces respectivamente iguais e semelhantemente dispostas".

tas".

4ª) "Dois triedros são congruentes quando têm os diedros respectivamente iguais e semelhantemente dispostos".

Casos particulares de congruência -

Congruência de triedros isoedros:

"Dois triedros isoedros simétricos são congruentes".

Congruência de triedros retângulos:

1ª) "Dois triedros mono-retângulos são congruentes quando têm iguais, a face oposta ao diedro reto (face hipotenusa) e um diedro igual e semelhantemente disposto, adjacente a essa face".

2ª) "Dois triedros mono-retângulos são congruentes quando têm iguais e semelhantemente dispostas as faces, oposta e adjacente ao diedro reto".

VII - TRIEDRO FUNDAMENTAL, PRIMITIVO ou de REFERÊNCIA

- Sentido do triedro -

É um triedro para o qual são dadas as coordenadas de uma figura, isto é, para o qual se dá a posição de uma figura. Esta figura pode ser ponto, reta, etc.

No sistema de projeções axonométricas êsse triedro é trirretângulo.

Em relação aos triedros polares, podemos, também, considerar como fundamental, o triedro para cujas faces são traçadas as perpendiculares de um ponto (V), ver fig. 9.

O triedro fundamental também é chamado triedro primitivo ou de referência.

Fazendo um estudo comparativo com o da "geometria do triângulo", muito há que pesquisar na "geometria do triedro".

Não é nossa intenção desenvolver no presente trabalho sob este ponto de vista, por isso, nós limitaremos a destacar alguns triedros que podem ser traçados em relação ao triedro fundamental, inspirando-nos na geometria do triângulo. Assim, temos: triedro órtico, triedro podar, triedro complementar.

#### Sentido do triedro -

Sabemos da Analítica que o sistema de coordenadas retilíneas ou cartesianas considera três eixos  $(x_{\infty})$ ,  $(y_{\infty})$ ,  $(z_{\infty})$ , concorrentes num ponto  $(0)$ , comum a estes três eixos, admitido como origem objetiva. A partir da origem  $(0)$ , são considerados sobre os eixos  $(x_{\infty})$ ,  $(y_{\infty})$  e  $(z_{\infty})$ , o sentido positivo ou negativo das diversas coordenadas neles marcadas.

Esses três eixos definem três planos  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , que se cortam dois a dois, formando oito triedros, cujo vértice comum é a origem objetiva  $(0)$  (fig. 11).

Para considerarmos o sentido das coordenadas em relação aos oito triedros, adotaremos a mesma orientação já estabelecida pela Analítica. Com este propósito, vamos, primeiramente ordenar os oito triedros.

Para isso, suponhamos um observador  $(V)$  (fig. 11)

que esteja acima do plano  $\gamma$  (para melhor compreensão, suporemos que  $\gamma$  esteja horizontal), que tenha na sua frente o plano  $\beta$  e à sua esquerda o plano  $\alpha$ . O triedro, diretamente visto, em todas as suas faces por este observador (V), é o 1º triedro. Os 2º e 4º triedros serão adjacentes ao 1º e estarão, respectivamente, por

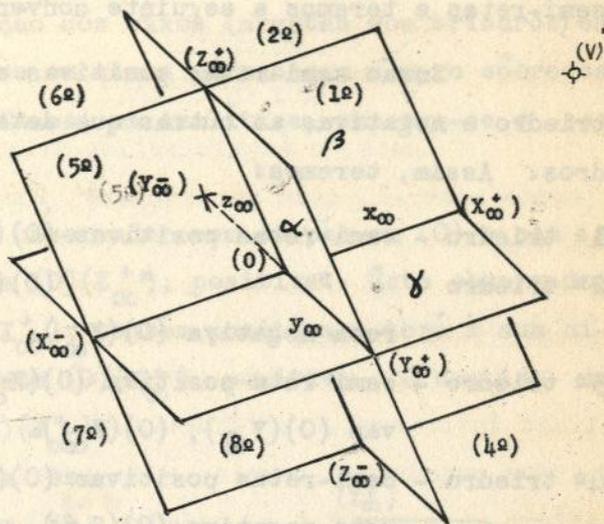


Fig. 11

trás e por baixo do 1º triedro, ou seja, por traz do plano  $\beta$  e por baixo do plano  $\gamma$ . O 3º triedro será oposto pela aresta, em relação ao 1º e estará por baixo do 2º e por traz do 4º triedro.

O 5º triedro é adjacente ao 1º, estando à esquerda do plano  $\alpha$ .

O 6º triedro é adjacente ao 2º, estando à esquerda do plano  $\alpha$ .

O 7º triedro é adjacente ao 3º, estando à esquerda do plano  $\alpha$ .

O 8º triedro é adjacente ao 4º, estando à esquerda do plano  $\alpha$ .

Para considerarmos o sentido positivo ou negativo

das coordenadas, determinadas sôbre os eixos que formam os triedros, admitiremos que o ponto (0) divida êstes eixos em semi-retas e teremos a seguinte convenção:

Serão semi-retas positivas as três que formam o 1º triedro e negativas as outras que determinam os demais triedros. Assim, teremos:

- 1º triedro - semi-retas positivas  $(0)(X_{\infty}^+)$ ,  $(0)(Y_{\infty}^+)$  e  $(0)(Z_{\infty}^+)$ .  
2º triedro - " "  $(0)(X_{\infty}^+)$ ,  $(0)(Z_{\infty}^+)$  e semi-  
reta negativa  $(0)(Y_{\infty}^-)$ .  
3º triedro - semi-reta positiva  $(0)(X_{\infty}^+)$  e semi-retas negati-  
vas  $(0)(Y_{\infty}^-)$ ,  $(0)(Z_{\infty}^-)$ .  
4º triedro - Semi-retas positivas  $(0)(Y_{\infty}^+)$ ,  $(0)(X_{\infty}^+)$  e semi-  
reta negativa  $(0)(Z_{\infty}^-)$ .  
5º triedro - semi-retas positivas  $(0)(Y_{\infty}^+)$ ,  $(0)(Z_{\infty}^+)$  e semi-  
reta negativa  $(0)(X_{\infty}^-)$ .  
6º triedro - semi-reta positiva  $(0)(Z_{\infty}^+)$  e semi-retas negati-  
vas  $(0)(X_{\infty}^-)$ ,  $(0)(Y_{\infty}^-)$ .  
7º triedro - semi-retas negativas  $(0)(X_{\infty}^-)$ ,  $(0)(Y_{\infty}^-)$  e  $(0)(Z_{\infty}^-)$ .  
8º triedro - semi-reta positiva  $(0)(Y_{\infty}^+)$  e semi-retas negati-  
vas  $(0)(X_{\infty}^-)$ ,  $(0)(Z_{\infty}^-)$ .

Verifica-se que os triedros simétricos têm suas orientações, sempre em sentidos opostos.

Por exemplo:

- o 1º triedro é positivo e o 7º negativo.
- o 2º triedro tem duas arestas (semi-retas) posi-  
vas, que correspondem a duas arestas negativas no 8º triedro  
e uma aresta negativa que corresponde a uma positiva no 8º

triedro.

Com o propósito de orientar as faces do triedro, ou seja, o sentido de rotação dos eixos (arestas dos triedros) em torno de  $(O)$ , de modo que os eixos permaneçam sempre sôbre os respectivos planos das faces, em Analítica, emprega-se o seguinte raciocínio:

- Supõe-se um observador com os pés em  $(O)$  e com a cabeça sôbre a semi-reta  $(O)(Z_{\infty}^+)$ , positiva. Este observador fitará a semi-reta  $(O)(X_{\infty}^+)$ , também positiva e terá à sua direita a terceira semi-reta  $(O)(Y_{\infty}^+)$ , positiva. O sentido de rotação da semi-reta  $(O)(X_{\infty}^+)$

será positivo, se fôr da esquerda para a direita do ob-

servador (fig. 12). Se este observador tiver a cabeça em

$(O)(Y_{\infty}^+)$ , fitando  $(O)(Z_{\infty}^+)$ , te-

rá à sua direita  $(O)(X_{\infty}^+)$ ; o sentido direto de rotação do

eixo  $(O)(Z_{\infty}^+)$  será, ainda, da esquerda para a direita. O mes-

mo se verifica em relação à rotação de  $(O)(Y_{\infty}^+)$  quando a ca-

beça do observador se coloca sôbre  $(O)(X_{\infty}^+)$ . Quando as três faces são orientadas no sentido direto, diz-se que o sistema

é direto, ou seja, que o triedro tem suas faces de sentido di-

reto. Quando isso não acontece o sentido é retrógrado.

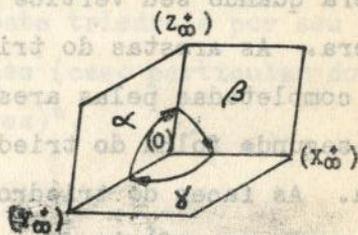


Fig. 12

### VIII - TRIEDROS EM RELAÇÃO À ESFERA

No estudo que fizemos de ângulo sólido em relação

à esfera, destacamos as seguintes posições de ângulos sólidos:

- a) Interiores, nos quais estão incluídos os centrais como caso particular.
- b) Inscritos
- c) Circunscritos.

Assim, o ângulo sólido triedro pode ser: interior (sendo central, caso particular), inscrito e circunscrito à esfera.

#### Triedros interiores -

Pelo conceito estabelecido no estudo de ângulos sólidos interiores, verificamos que um triedro é interior a uma esfera quando seu vértice é um ponto qualquer do interior da esfera. As arestas do triedro são trechos de cordas da esfera, completadas pelas arestas do triedro simétrico do primeiro (segunda fôlha do triedro), que também será interior à esfera. As faces do triedro interior determinam, na intersecção com a superfície da esfera um triângulo.

"Todo triedro interior tem seu simétrico, também, interior. Os respectivos triângulos que se formam na superfície esférica são homólogos entre si e o centro de homologia é o vértice dos dois triedros".

Este teorema demonstra-se com os recursos da geometria elementar.

#### Triedros centrais -

São triedros interiores cujo vértice pertence ao centro da esfera.

A intersecção dos triedros centrais com a superfície da esfera determina nessa superfície os chamados "triângulos esféricos".

Tôdas as propriedades que se aplicam aos triedros aplicam-se, também, aos triângulos esféricos. Assim, aquelas que se referem à congruência, à simetria, etc.

Ex.: - "A todo triângulo esférico corresponde, também, um triângulo esférico polar".

"Ao triedro simétrico corresponde um triângulo esférico simétrico".

"Quando o triedro é central, os triângulos determinados na superfície esférica por êste triedro e por seu simétrico são semelhantes ou homotéticos (caso particular do teorema referido em triedros interiores)".

#### Triedros inscritos -

De acôrdo com o estudo feito para qualquer ângulo sólido inscrito, admitimos que um triedro esteja inscrito numa esfera quando seu vértice pertencer à superfície da esfera e suas arestas sejam cordas da esfera. Todo triedro inscrito determina na superfície esférica um triângulo.

#### Observação:

Comparando os triângulos determinados na superfície de uma esfera pelos triedros interiores, centrais ou inscritos, verificamos que, somente os triedros centrais determinam triângulos cujos lados são arcos de círculo máximo da esfera e cujos ângulos têm sua grandeza igual à grandeza dos ângulos

diedros do triedro. Por isso, só se consideram triângulos esféricos os definidos por triedros centrais.

Triedros circunscritos -

É o ângulo sólido circunscrito que possui três faces. É pois um triedro cujo vértice é exterior à esfera e cujas faces são tangentes à esfera.

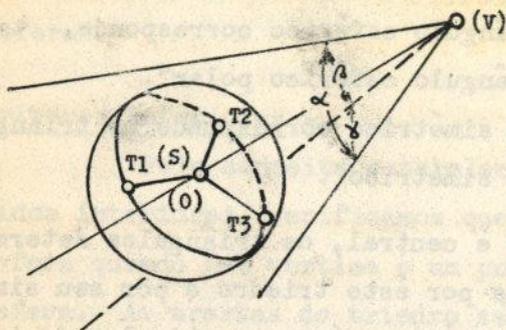


Fig. 13

"O centro da esfera pertence ao eixo dos bissetores do triedro nela circunscrito" (pg. 22).

As arestas do triedro são exteriores à esfera.

"Os pontos de contato  $T_1, T_2, T_3$  (fig. 13), das faces  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ , estão equidistantes do vértice e pertencem a um círculo da esfera, cujo plano é perpendicular ao eixo dos bissetores".

IX - PROPRIEDADES DOS TRIEDROS E TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Limitar-nos-emos a enunciar as propriedades que nos parecem principais. Algumas, embora não sejam muito divulgadas, são facilmente demonstráveis.

1ª) "Em todo triedro ou triângulo esférico, uma face ou lado qualquer é menor que a soma das outras duas ou outros dois

e maior que a diferença".

- 2ª) "Em todo triedro a soma das faces é menor que quatro retos e maior que zero".
- 3ª) "Em todo triedro ou triângulo esférico, a faces iguais, ou lados iguais, opõem-se ângulos iguais".
- 4ª) Recíproca da 3ª: "Um triedro ou triângulo esférico que tem dois ângulos iguais é isoedro ou isósceles".
- 5ª) "Em todo triedro ou triângulo esférico, à maior face ou lado, corresponde o maior ângulo".
- 6ª) Recíproca da 5ª: "Em todo triedro ou triângulo esférico, ao maior ângulo opõe-se a maior face ou lado".
- 7ª) "Todo triedro acutângulo é oxiedro e recíprocamente".
- 8ª) "Todo triedro ambliedro é obtusângulo". Note-se, porém, que a recíproca não é verdadeira.
- 9ª) "Todo triedro trirretângulo é tri-ortoedro e recíprocamente".
- 10ª) "Todo triedro birretângulo tem as faces opostas aos diedros retângulos em ângulos retos (é di-ortoedro) e recíprocamente".
- 11ª) "Em todo triedro a soma de dois diedros é menor que o terceiro aumentado de dois retos".
- 12ª) "Em todo triedro a soma dos diedros é maior que dois e menor que seis retos".

## X - DETERMINAÇÃO, REPRESENTAÇÃO e RESOLUÇÃO DE TRIEDROS

O triedro pode ser estudado através diversos setores da matemática.

Dentro da Geometria Descritiva é possível estudar esta figura de modo a permitir seu completo conhecimento com satisfatória precisão.

Num triedro podemos destacar diversos de seus elementos, que, combinados, geralmente, em grupos de três, permitem resolver, ou seja, conhecer todos os elementos dessa figura (como grandeza de faces, diedros, etc.), empregando-se, para isso, operações especiais, que a Geometria Descritiva fornece.

Assim, pois, um triedro fica determinado sendo dados três elementos. Esses elementos são escolhidos, comumente, entre: faces, diedros, projeção numa face de ponto pertencente à aresta oposta, etc.

Os elementos que são dados para a determinação e resolução de triedros devem possibilitar uma satisfatória representação gráfica da figura ou seja, uma representação tal que permita completa informação sobre a mesma, dando conhecimento da posição relativa entre as arestas do triedro, o que equivale a permitir conhecer a grandeza de faces, diedros, ou de qualquer outro elemento que se torne necessário. Essa representação importa em projeção, geralmente, sobre o plano de uma das faces e rebatimentos sobre o referido plano.

Seja um triedro  $(V)-(X_{OO})(Y_{OO})(Z_{OO})$  (fig. 14).

Poderemos pedir a resolução dêste triedro, fornecen-  
do os dados para sua de-  
terminação dentro de um  
dos seis casos seguin-  
tes:

1<sup>o</sup> - Dá-se as três fa-  
ces:  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$ .

2<sup>o</sup> - Dá-se duas faces:  
 $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e o diedro  
compreendido:  $\hat{\alpha}\beta$ .

3<sup>o</sup> - Dá-se duas faces:  
 $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e o diedro  
oposto a uma delas:  $\hat{\alpha}\gamma$

4<sup>o</sup> - Dá-se uma face:  $\hat{\alpha}$  e os diedros a ela adjacentes:  $\hat{\alpha}\beta$  e  
 $\hat{\alpha}\gamma$ .

5<sup>o</sup> - Dá-se dois diedros:  $\hat{\alpha}\beta$  e  $\hat{\alpha}\gamma$  e a face oposta  $\hat{\beta}$ , a um  
dêstes diedros.

6<sup>o</sup> - Dá-se os três diedros  $\hat{\alpha}\beta$ ,  $\hat{\alpha}\gamma$  e  $\hat{\beta}\gamma$ .

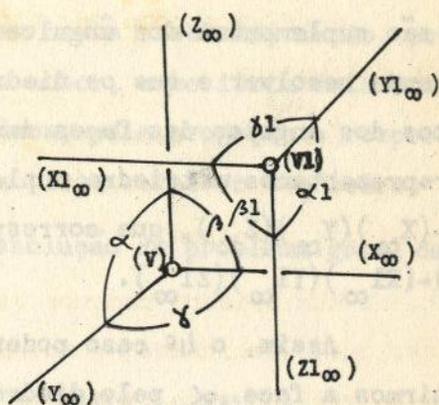


Fig. 14

Êsses seis casos utilizam exclusivamente três dos  
seis elementos que formam o triedro: três faces:  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  
 $\hat{\gamma}$  e três diedros  $\hat{\alpha}\beta$ ,  $\hat{\alpha}\gamma$  e  $\hat{\beta}\gamma$ .

De fato, sabemos da Geometria do Espaço, que, conhe-  
cidos três dêsses seis elementos, é sempre possível determi-  
nar os outros três.

Êstes seis casos são considerados clássicos. É co-  
mum, em Geometria Descritiva, só estudar os 3 primeiros, por-  
que os outros podem ser reduzidos a êsses 3 primeiros, desde

que se empregue o triedro suplementar.

Sabemos que os ângulos diedros do triedro suplementar são suplementos dos ângulos das faces do triedro que se pretende resolver e que os diedros dêsse último são os suplementos dos ângulos das faces daquêle (ver pg. 31). Na fig. 14 representamos um triedro suplementar ~~pelo qual~~ do triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , que corresponde ao triedro .....  $(V1)-(X1_{\infty})(Y1_{\infty})(Z1_{\infty})$ .

Assim, o 4º caso poderá ser reduzido ao 2º se substituirmos a face  $\alpha$  pelo diedro  $\widehat{\beta 1 \gamma 1}$  do triedro suplementar  $(V1)-(X1_{\infty})(Y1_{\infty})(Z1_{\infty})$  e diedros  $\widehat{\alpha \beta}$  e  $\widehat{\alpha \gamma}$  pelas faces  $\widehat{\delta 1}$  e  $\widehat{\beta 1}$  do referido triedro suplementar.

Resolvendo o triedro suplementar, será possível representar o triedro fundamental.

O mesmo raciocínio permitirá reduzir o 5º caso ao 3º e o 6º ao 1º caso.

Entretanto todos êstes seis casos, quando estudados pela Geometria Descritiva, têm uma marcha geral de resolução, analisada por Ernest Songaylo, em seu "Traité de Géométrie Descriptive", pág. 81, nº 228, première partie, edité par la Bibliothèque de Kurnik, Paris, 1882. Êste autor, formulou o seguinte problema, que considerou geral para a resolução de triedros:

Problema geral de Ernest Songaylo:-

"Dá-se uma face  $\widehat{\alpha}$ , a projeção de um ponto (A) da aresta oposta  $(V)(X_{\infty})$ , sôbre o plano desta face e a cota de (A) relativamente a êste plano. Pede-se resolver

o triedro".

De fato, verificaremos que os seis casos clássicos de resolução de triedros recaem neste problema, sendo, portanto, problema básico. O citado autor, substituiu dois dos elementos clássicos, faces e diedros, pela projeção e respectiva cota de um ponto tal, que permitisse resolver o triedro.

Estudemos então a resolução do problema geral de Sonnylo.

Seja  $\alpha$  a face dada, A, projeção de um ponto (A) da aresta  $(V)(X_{\infty})$ , oposta à face  $\hat{\alpha}$  e a cota de (A) (figura 15).

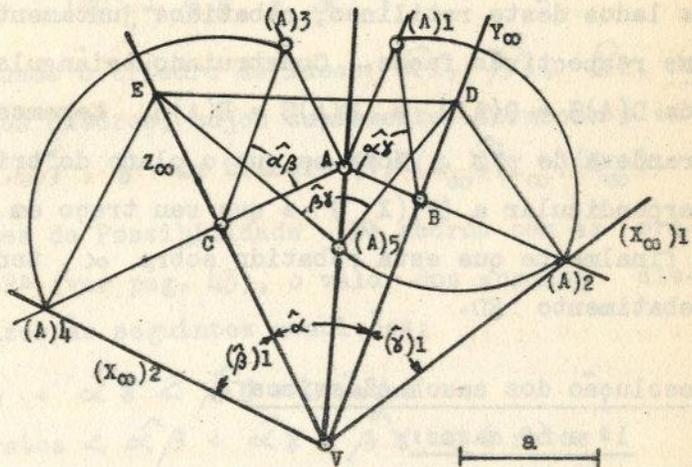


Fig. 15

Façamos passar por (A) um plano perpendicular a  $(V)(Y_{\infty})$ . Seu traço no plano  $\alpha$  será a reta  $AB \perp VY_{\infty}$ . Rebatamos esse plano em torno de  $AB$ , até coincidir com  $\alpha$ . Teremos então o triângulo  $A(A)1B$ , retângulo em A e cujo cateto  $A(A)1 = a$ , ou seja, a cota de (A) e  $A(A)1B$  é a distância de (A) à aresta de rebatimento  $(V)(Y_{\infty})$ . Então  $\sphericalangle AB(A)1$  é o retilíneo do diedro  $(V)(Y_{\infty}) \equiv \hat{\alpha}\hat{\gamma}$ . Para determinar  $\hat{\gamma}$  bastará rebater a face  $\gamma$  sobre  $\alpha$ , tendo

$(V)(Y_{\infty})$  como eixo. Após essa operação o ponto (A) ficará rebatido em  $(A)2$ . Podemos verificar que  $V(A)2$  é a aresta  $(V)(X_{\infty})$  rebatida sobre  $\alpha$  e o ângulo da face  $\gamma$  corresponderá a  $(\hat{\gamma})1$ .

Com emprêgo de raciocínio idêntico determinaremos  $\sphericalangle AC(A)3 \equiv \hat{\alpha}\beta$  e  $\hat{\beta} \equiv CV(A)4$ .

O diedro  $\hat{\beta}\gamma$  será determinado traçando o seu retilíneo relativo a um ponto qualquer da aresta  $(V)(X_{\infty})$ , seja (A), por exemplo. Teremos em  $(A)2D \perp V(A)2$  e  $(A)4E \perp V(A)4$  os lados dêste retilíneo, rebatidos juntamente com os planos das respectivas faces. Construindo triângulo  $ED(A)5$ , de lados  $D(A)5 = D(A)2$  e  $E(A)5 = E(A)4$ , teremos no  $\sphericalangle E(A)5D$  a grandeza de  $\hat{\beta}\gamma$ . Note-se que o plano do triângulo  $ED(A)5$  é perpendicular a  $(V)(X_{\infty})$  e que seu traço em  $\alpha$  é a reta  $DE$  e finalmente que está rebatido sobre  $\alpha$ , tendo como eixo de rebatimento  $ED$ .

### Resolução dos casos clássicos -

#### 1º e 6º casos:

1º Caso - "Dá-se as três faces  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e  $\hat{\gamma}$ . Pe-de-se determinar o triedro".

Resolução: Empregar raciocínio semelhante ao do problema geral de Songaylo, seguindo marcha inversa (ver fig.15).

Condições de possibilidade - De acôrdo com as propriedades 1ª e 2ª (ver pág. 42), o valor do ângulo das faces deve satisfazer as seguintes condições:

$$a) \hat{\beta} + \hat{\gamma} > \hat{\alpha} > \hat{\beta} - \hat{\gamma}$$

$$b) 0^\circ < \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \gamma < 360^\circ$$

Esse problema só admite uma solução.

6º Caso - "Dá-se os três diedros  $\hat{\alpha}\beta$ ,  $\hat{\alpha}\gamma$ ,  $\hat{\beta}\gamma$ .

Pede-se determinar as faces do triedro"

Resolução - Fazer o problema recair no 1º caso, com auxílio do triedro suplementar, cujas faces são dadas pelos suplementos de  $\hat{\alpha}\beta$ ,  $\hat{\alpha}\gamma$ ,  $\hat{\beta}\gamma$  (fig. 14). Assim,

$$180^\circ - \hat{\alpha}\beta = \hat{\gamma}1; \quad 180^\circ - \hat{\alpha}\gamma = \hat{\beta}1;$$

$$180^\circ - \hat{\beta}\gamma = \hat{\alpha}1$$

Determinado o triedro de faces  $\hat{\alpha}1$ ,  $\hat{\beta}1$ ,  $\hat{\gamma}1$ , ficam conhecidos seus diedros, cujos suplementos fornecem o valor das faces  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  do triedro  $(V)-(X_\infty)(Y_\infty)(Z_\infty)$ .

Condições de Possibilidade - De acôrdo com as propriedades 11ª e 12ª (ver pág. 43), o valor dos ângulos diedros deve satisfazer às seguintes condições:

$$a) \hat{\alpha}\beta + \hat{\alpha}\gamma < \hat{\beta}\gamma + 2 \text{ retos}$$

$$b) 2 \text{ retos} < \hat{\alpha}\beta + \hat{\alpha}\gamma + \hat{\beta}\gamma < 6 \text{ retos}$$

Esse problema admite uma única solução.

2º e 4º casos:-

2º Caso - "Dá-se duas faces  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e o diedro com preendido  $\hat{\alpha}\beta$ . Pede-se determinar o triedro.

Resolução - Sobre um plano horizontal, o plano  $\pi$ , por exemplo, tracemos  $\angle Z_\infty V Y_\infty = \hat{\alpha}$ , de tal sorte que  $Z_\infty V \perp \pi$ ;  $\pi$ . (ver fig. 16). Construir  $\angle Z_\infty V (X_\infty)1 = \hat{\beta}$ .

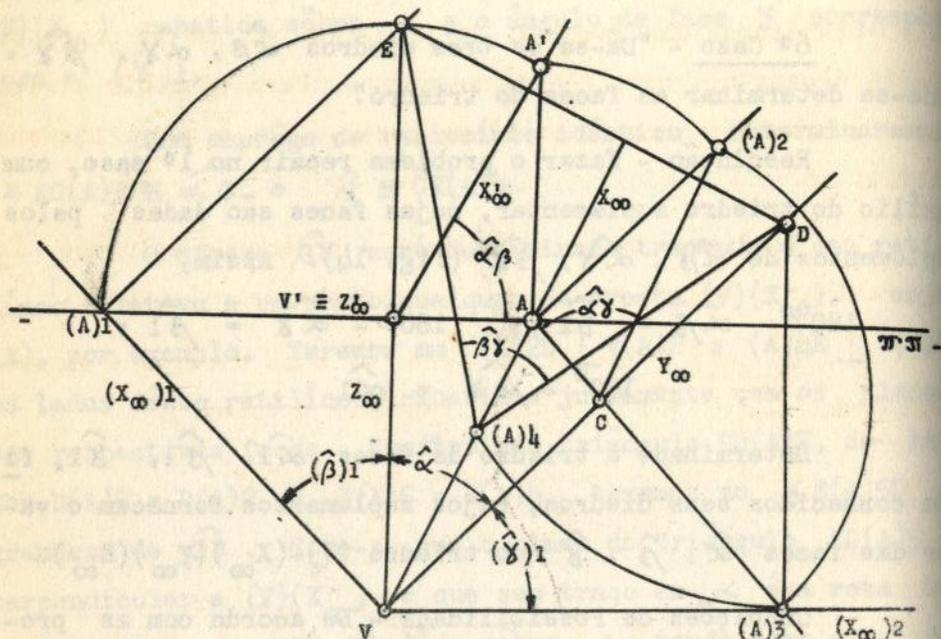


Fig. 16

Esse ângulo corresponderá à face  $\hat{\beta}$  rebatida sôbre  $\pi$ , sendo eixo de rebatimento  $VZ_{\infty}$ . Por se tratar de face rebatida, chamaremos  $(\hat{\beta})_1$ . Tendo para vértice  $V' \equiv Z'_{\infty}$  e para um dos lados  $\pi' \pi$ , construir um ângulo igual ao retilíneo do diedro  $\hat{\alpha}/\beta$ . Para isso, tracemos  $V'X'_{\infty}$  inclinado sôbre  $\pi' \pi$  (inclinação para a direita) de tal sorte que

$$X'_{\infty} V' \pi' \pi = \hat{\alpha}/\beta.$$

Alçar a face  $\hat{\beta}$  à sua verdadeira posição, considerando, para isso, o ponto (A) de intersecção da aresta  $(V)(X_{\infty})$  com  $\pi'$ . Esse ponto, após o alçado, irá para  $A'$ , sôbre ..

$V'X'_{\infty}$ , sendo A sua projeção horizontal.

Caimos, assim, no problema geral de Ernest Songaylo, pois, conhecemos uma face  $\alpha$ , a projeção A, de um ponto da aresta oposta e a cota A'A dêsse ponto. Para concluir a resolução é proceder como no problema geral. Foi o que fizemos na fig. 16

Condições de possibilidade e número de soluções - Este problema é sempre possível e admite uma única solução.

4º caso - "Dá-se uma face  $\hat{\alpha}$  e os diedros a ela adjacentes,  $\hat{\alpha}\beta$  e  $\hat{\alpha}\gamma$ . Pede-se resolver o triedro!"

Resolução - Pelo triedro suplementar

$$(V1)-(X1_{\infty})(Y1_{\infty})(Z1_{\infty}),$$

sabemos que:

$$180^{\circ} - \hat{\alpha}\beta = \hat{\gamma}1; \quad 180^{\circ} - \hat{\alpha}\gamma = \beta 1;$$

$$180^{\circ} - \hat{\alpha} = \hat{\beta}1\hat{\gamma}1$$

Construindo o triedro suplementar, na qual conhecemos duas faces  $\hat{\beta}1$  e  $\hat{\gamma}1$  e o diedro  $\hat{\beta}1\hat{\gamma}1$ , compreendido (2º caso), podemos conhecer os demais elementos do triedro suplementar e, conseqüentemente, deduzir as demais faces e diedros do triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$  que se procura.

Condições de possibilidade e número de soluções - O mesmo que para o 2º problema.

3º e 5º casos:

3º Caso - "Dá-se duas faces  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  e o diedro  $\hat{\alpha}\gamma$ , oposto a uma delas. Determinar o triedro".

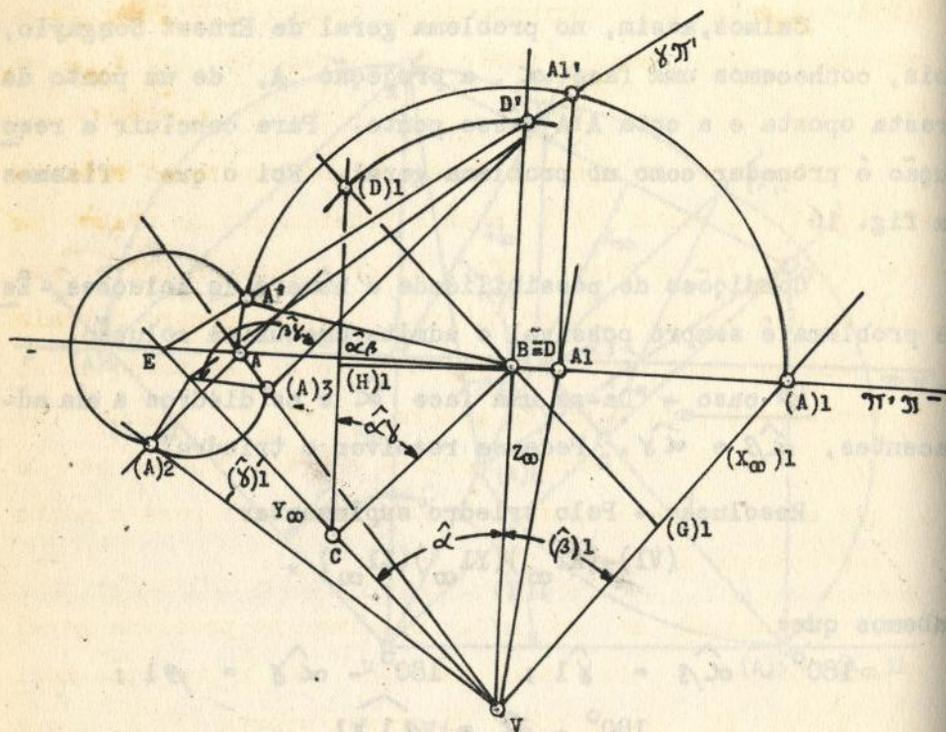


Fig. 17

Resolução - Ver fig. 17. Construir dois ângulos adjacentes  $\widehat{Y_\infty V Z_\infty} = \hat{\alpha}$  e  $Z_\infty V(X_\infty)1 = (\hat{\beta})1$ . Supor que  $\hat{\alpha}$  pertença a  $\Pi$ , que  $(\hat{\beta})1 = \hat{\beta}$ , rebatida sôbre  $\alpha$ , em tórno de  $(V)(Z_\infty)$  e que  $VZ_\infty \perp \Pi'\Pi$  (por conveniência). Se o diedro dado é  $\hat{\alpha}\gamma$ , então, supor seja êle oposto a  $\hat{\beta}$ . Construir o retilíneo dêste diedro  $\hat{\alpha}\gamma$  que passa pelo traço B de  $(V)(Z_\infty)$  em  $\Pi'$ . Para isso, baixemos  $BC \perp VY_\infty$ . Rebater o plano dêsse retilíneo em tórno de seu traço horizontal BC; sendo, agora, possível traçar  $BC(D)1$ , verdadeira grandeza de  $\hat{\alpha}\gamma$ , conhecendo-se, também,  $D(D)1$ , traço do reti

l\u00edneo em  $\mathcal{P}'$ . Al\u00e7ando tri\u00e2ngulo  $BC(D)l$ , ter-se-\u00e1  $DD' = D(D)l$ . A reta  $D'E$  corresponde ao tra\u00e7o  $\gamma \mathcal{P}'$ , da face  $\gamma$  no plano  $\mathcal{P}'$ , sendo o ponto  $E$  o tra\u00e7o de  $(V)(Y_\infty)$  em  $\mathcal{P}'$ .

Considere-se agora a face  $\hat{\beta}$  que supuzemos rebatida em  $(\hat{\beta})l$ . O ponto  $(A)l$  ser\u00e1 o rebatimento do tra\u00e7o da aresta  $(V)(X_\infty)l$  no plano  $\mathcal{P}'$ . Al\u00e7ar a face  $(\beta)l$  at\u00e9 que ela atinja sua posi\u00e7\u00e3o primitiva. O arco, centro  $B$ , raio  $B(A)l$ , indica o movimento que faz o tra\u00e7o  $(A)$  em t\u00f4rno do eixo de rebatimento, ou seja, da aresta  $(V)(Z_\infty)$ , quando se al\u00e7a  $(\beta)l$ . Nesse movimento, cortar\u00e1 o tra\u00e7o  $\gamma \mathcal{P}'$  em  $A'$  e  $Al'$ , que correspondem a duas posi\u00e7\u00f5es poss\u00edveis para o ponto  $(A)$ , pertencente \u00e0 aresta  $(V)(X_\infty)$ .

Conhecido  $A'$  ou  $Al'$ , recaimos no problema geral de Ernest Songaylo, pois, temos uma face  $\alpha$ , a proje\u00e7\u00e3o horizontal  $A$  ou  $Al$ , de um ponto da aresta oposta  $(V)(X_\infty)$  e a cota d\u00eas esse ponto  $AA'$  ou  $AlAl'$ .

Para determinar os diedros  $\hat{\beta}\gamma$  e  $\hat{\alpha}\beta$ , bem como a face  $\hat{\gamma}$ , \u00e9 s\u00f3 empregar o mesmo racioc\u00ednio daquele problema geral, como fizemos na fig. 17.

Verifica-se que o problema pode apresentar duas solu\u00e7\u00f5es, uma correspondente \u00e0 cota  $A'A$  e outra \u00e0  $Al'Al$ . Isso porque o arco de centro em  $B$  e raio  $B(A)l$ , intercepta o tra\u00e7o  $\gamma \mathcal{P}'$  nos pontos  $A'$  e  $Al'$ . Mas se \u00eas esse mesmo arco f\u00f4sse tangente a \u00eas esse tra\u00e7o ou n\u00e3o o atingisse, o problema s\u00f3 teria uma solu\u00e7\u00e3o ou n\u00e3o teria solu\u00e7\u00e3o alguma.

Assim, analisemos as:

Condições de possibilidade - Para que se forme o triedro, é preciso que a aresta  $(V)(X_{\infty})$ , em seu movimento de rotação em torno da aresta  $(V)(Z_{\infty})$ , corte ou seja tangente ao plano da face  $\gamma$ . Para que isso aconteça, a distância  $B(G)l$ , do ponto B (pertencente ao eixo  $(V)(Z_{\infty})$ ), à aresta  $(V)(X_{\infty})$ , deverá ser igual ou maior que a distância  $B(H)l$  desse mesmo ponto ao plano  $\gamma$ .

$$\text{Então: } B(G)l \geq B(H)l \quad (1)$$

$$\text{Porém: } B(G)l = BV \cdot \text{sen } \hat{\beta} \quad (2)$$

$$\text{E: } B(H)l = BC \cdot \text{sen } \hat{\alpha}\gamma \quad (3)$$

$$\text{Sendo que: } BC = BV \cdot \text{sen } \hat{\alpha} \quad (4)$$

Substituindo BC na igualdade (3) pelo seu valor dado na igualdade (4), vem:

$$B(H)l = BV \cdot \text{sen } \hat{\alpha} \cdot \text{sen } \hat{\alpha}\gamma \quad (5)$$

Substituindo, na desigualdade (1) os valores de  $B(G)l$  e  $B(H)l$ , dados igualdades (2) e (5), respectivamente, vem:

$$BV \cdot \text{sen } \hat{\beta} \geq BV \cdot \text{sen } \hat{\alpha} \cdot \text{sen } \hat{\alpha}\gamma$$

Donde, finalmente:

$$\text{sen } \hat{\beta} \geq \text{sen } \hat{\alpha} \cdot \text{sen } \hat{\alpha}\gamma$$

Preenchida essa condição, deveremos considerar, também, a natureza do diedro  $\hat{\alpha}\gamma$  e das faces  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$ .

Assim, verificamos:

- 1)  $\hat{\alpha}\gamma$  sendo agudo, haverá uma solução se  $\hat{\alpha} \leq \hat{\beta}$ ; duas soluções se  $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$ .

2)  $\hat{\alpha}\gamma$  sendo reto ou obtuso haverá uma solução se  $\hat{\alpha} < \hat{\beta}$ ; nenhuma solução se  $\hat{\alpha} \geq \hat{\beta}$ .

5º Caso - "Dá-se dois diedros  $\hat{\alpha}\beta$  e  $\hat{\alpha}\gamma$  e a face oposta  $\hat{\beta}$ , a um desses diedros. Resolver os diedros".

Resolução - Fazer o problema recair no 3º caso com auxílio do triedro suplementar, cujas faces e diedro oposto a uma delas, são dados pelos suplementos de  $\hat{\alpha}\beta$ ,  $\hat{\alpha}\gamma$  e  $\hat{\beta}$  (ver fig. 14).

Assim:

$$\begin{aligned} 180^\circ - \hat{\alpha}\beta &= \hat{\gamma}1; & 180^\circ - \hat{\alpha}\gamma &= \hat{\beta}1; \\ 180^\circ - \hat{\beta} &= \widehat{\alpha 1 \beta 1} \end{aligned}$$

Resolvido o triedro suplementar, é possível conhecer todos os demais elementos do triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , pois:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}\gamma &= 180^\circ - \hat{\alpha}1 \\ \hat{\alpha} &= 180^\circ - \widehat{\beta 1 \gamma 1} \\ \hat{\gamma} &= 180^\circ - \widehat{\alpha 1 \beta 1} \end{aligned}$$

Como o triedro suplementar (resolvido de acordo com o 3º caso), pode ter duas, uma ou nenhuma solução, conforme já analisamos, o 5º caso, também, poderá apresentar as mesmas possibilidades.

NOTA - Os 4º, 5º e 6º casos podem ser resolvidos diretamente, sem o emprego do triedro suplementar. (Ver "Geometria Descritiva", Prof. Dr. Robert Haussner, pg. 134 a 150, segunda edição, trad. del alemán por Carlos Mendizábal Brunet. Colección Labor, Biblioteca de Iniciación Cultural, XI, 167-168).

Variações do problema geral de Ernest Songaylo -

1º Problema:

"Resolver um triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , no qual são conhecidos um diedro  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ , uma das faces,  $\hat{\alpha}$ , que o determina, e a projeção  $A$ , sobre o plano dessa face, de um ponto  $(A)$ , da aresta oposta,  $(V)(X_{\infty})$ , a essa face".

Resolução: Considerar a face  $\hat{\alpha}$  horizontal e traçar  $Y_{\infty}VZ_{\infty} = \hat{\alpha}$  (fig. 18). Seja o ponto  $A$ , considerado

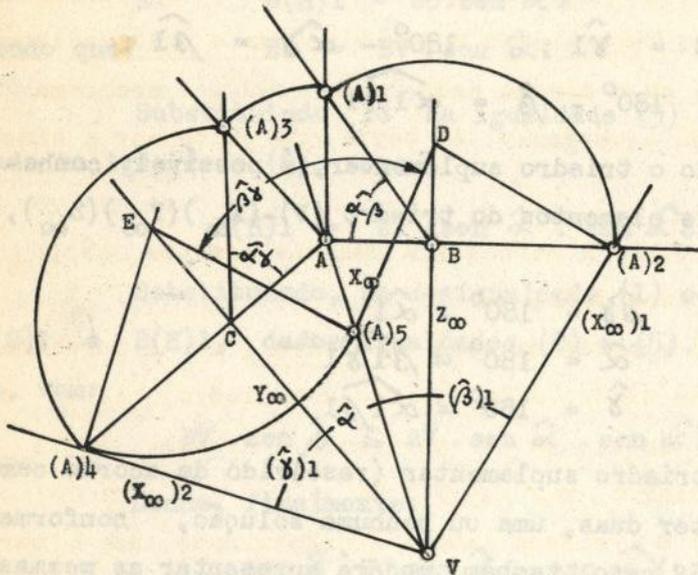


Fig. 18

sobre  $\alpha$ , a projeção de  $(A)$  no plano  $\alpha$ . Traçar o retilíneo do diedro  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$  que passa pelo ponto  $(A)$ . Para isso, traçar  $AB \perp VZ_{\infty}$ , que determina  $B$  em  $VZ_{\infty}$ . Rebater o plano dêsse retilíneo sobre  $\alpha$  e em torno de  $AB$ , a fim de determinar a verdadeira grandeza de  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$  (devido do problema). Isso importa em traçar  $AB(A)1 = \hat{\alpha}\hat{\beta}$ . A cota do ponto  $(A)$  ficará imediatamente conhecida pelo segmento  $A(A)1 \perp AB$ .

Caimos, assim, no problema geral de Ernest Songaylo

Para conhecer  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\alpha\gamma}$  é só empregar o mesmo raciocínio já apresentado nesse problema.

Condições de possibilidade: O ponto A, pode ser um ponto qualquer da face  $\alpha$ , fora das arestas, pode pertencer a uma das arestas, ou, finalmente, ao vértice. A face  $\hat{\alpha}$  e o diedro  $\hat{\alpha\beta}$ , podem ter um valor qualquer igual ou diferente de  $90^\circ$ , desde que não seja nulo.

I) - O ponto A é um ponto qualquer fora das arestas:

a) se o diedro dado  $\hat{\alpha\beta} \neq 90^\circ$ , o problema está perfeitamente determinado e admitirá uma e única solução;

b) se o diedro dado  $\hat{\alpha\beta} = 90^\circ$ , o problema é impossível, porque a projeção A teria que pertencer à aresta  $(V)(Z_\infty)$ .

II) - O ponto A pertence a uma das arestas  $(V)(Z_\infty)$  ou  $(V)(Y_\infty)$  da face dada,  $\alpha$ :

a) o problema será impossível, se A pertencer à aresta  $VZ_\infty$  do diedro dado, sendo êsse diedro, isto é,  $\hat{\alpha\beta} \neq 90^\circ$ ; ou, então, se A pertencer à aresta  $(V)(Y_\infty)$  do diedro desconhecido, mas  $\hat{\alpha\beta} = 90^\circ$ ;

b) o problema estará indeterminado, se A pertencer à aresta  $(V)(Z_\infty)$  do diedro dado  $\hat{\alpha\beta}$ , sendo  $\hat{\alpha\beta} = 90^\circ$ ;

c) o problema estará determinado, se A pertencer à aresta  $(V)(Y_\infty)$  do diedro desconhecido, sendo  $\hat{\alpha\beta} \neq 90^\circ$ . Neste caso, o diedro desconhecido só poderá ser reto e o problema só admitirá uma solução.

III) - O ponto A pertence ao vértice.

a)  $\widehat{\alpha/\beta} = 90^\circ$ , o problema será possível e terá uma solução;

b)  $\widehat{\alpha/\beta} \neq 90^\circ$ , o problema será impossível.

2º Problema:

"Dá-se uma face  $\widehat{\alpha}$ , o diedro oposto a essa face,  $\widehat{\beta/\gamma}$ , e a projeção A, no plano dessa face, de um ponto (A) da aresta relativa ao diedro dado".

Resolução: Considerar a face  $\widehat{\alpha}$  horizontal e construir  $\widehat{Y_\infty VZ_\infty} = \widehat{\alpha}$  (fig. 19).

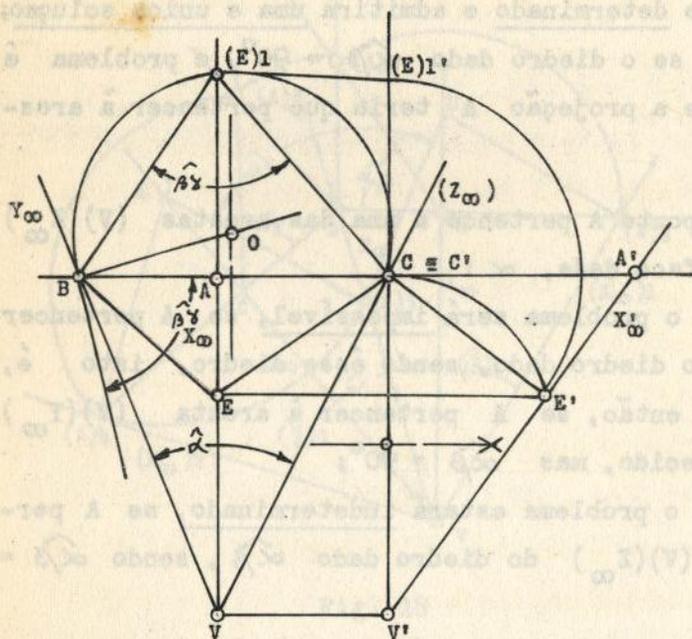


Fig. 19

Seja A, um ponto tomado sobre o plano  $\alpha$ , e considerado como projeção de (A) em  $\alpha$ .

Traçar pelos pontos V e A uma reta  $VX_\infty$  que será a projeção da aresta (V)( $X_\infty$ ) na face  $\alpha$ . Pelo ponto A, traçar uma reta perpendicular a  $VX_\infty$ , que deter-

minará em  $VY_\infty$ , o ponto B e em  $VZ_\infty$  o ponto C. Aconselhamos o traçado dessa perpendicular passando pelo ponto A, apenas para evitar sobrecarga na épura, pois o traçado pode-

ria ser feito em relação a um ponto qualquer da reta  $VX_{\infty}$ .

A reta BC corresponde ao traço, no plano  $\alpha$ , do plano de um retilíneo do diedro  $\hat{\beta}\gamma$ , que, por ser perpendicular a  $(V)(X_{\infty})$ , cortará  $\alpha$  numa reta perpendicular a  $VX_{\infty}$ . Rebatendo o plano desse retilíneo sobre  $\alpha$  e em torno de BC, teremos um triângulo, no qual o ângulo oposto a BC, corresponderá ao diedro dado  $\hat{\beta}\gamma$ . Para construir esse ângulo, bastará recorrer ao "ângulo capaz do segmento BC", sendo ângulo capaz  $\hat{\beta}\gamma$ . O arco de círculo O, que resolve este problema, cortará  $VX_{\infty}$  no ponto (E)1, que corresponderá ao vértice do  $\widehat{B(E)1C} = \hat{\beta}\gamma$ . O raio de rebatimento do vértice (E) será A(E)1 e o movimento por êle descrito será projetado num plano vertical, paralelo a  $(X_{\infty})VA$ , segundo o arco de centro  $C \equiv C'$  e raio  $A(E)1 = C'(E)1'$ . A projeção vertical da aresta  $(V)(X_{\infty})$  será a tangente  $V'X'_{\infty}$  traçada de  $V'$  (projeção vertical de  $(V)$ ) ao arco de centro  $C'$ . A linha de chamada de A, determinará, na intersecção com  $V'X'_{\infty}$ , o ponto  $A'$ . A cota de (A) será  $C'A'$ . Conhecida a cota de (A), recaímos no problema geral de Ernest Songaylo e por êle, resolveremos o triedro.

Condições de possibilidade: A projeção A pode ser um ponto qualquer da face  $\hat{\alpha}$ . Esta face, bem como o diedro oposto, também dados, podem ter valor angular igual ou diferente de  $90^{\circ}$ , desde que não seja nulo.

1) Se o ponto A não pertencer às arestas  $(V)(Y_{\infty})$  ou  $(V)(Z_{\infty})$ , que determinam a face  $\hat{\alpha}$ , o problema poderá ter duas soluções, uma solução ou não ter solução, segundo a aresta  $VX_{\infty}$  corte o círculo O, seja tangente a este círculo

ou não o atinja.

2) Se o ponto A pertencer a uma das arestas,  $(V)(X_{\infty})$  ou  $(V)(Z_{\infty})$ :

a)  $\hat{\beta}\gamma \neq 90^{\circ}$ , problema sempre possível, tendo uma única solução, qualquer que seja o valor angular de  $\hat{\alpha}$ ;

b)  $\hat{\beta}\gamma = 90^{\circ}$ :

I -  $\hat{\alpha} = 90^{\circ}$  - o problema será possível e terá uma solução. Nesse caso, o triedro será birretângulo.

II -  $\hat{\alpha} \neq 90^{\circ}$  - o problema será impossível.

3) Se o ponto A pertencer ao vértice:

a)  $\hat{\beta}\gamma = \hat{\alpha}$ , o problema será sempre possível e terá uma solução (o triedro será birretângulo);

b)  $\hat{\beta}\gamma \neq \hat{\alpha}$ , o problema será impossível.

### Resolução de triedros - Discussão dos diversos casos -

O Prof. Dr. Roberto Muniz Gregory, catedrático de Geometria Descritiva, ao qual já fizemos referência em diversos pontos deste trabalho, faz interessante estudo sobre este assunto, que passamos a transcrever:

#### "Resolução de triedros"

"Não considerando o processo estereométrico ou de montagem, que consiste em determinar os elementos desconhecidos de um triedro, por sua medida direta sobre as figuras materialmente realizadas, com o auxílio dos elementos conhecidos e os processos mais ou menos expeditos empregados na navegação marítima, para resolver os triângulos esféricos, podemos utilizar os três métodos gerais seguintes:

1º - pela trigonometria esférica

2º - pela geometria analítica

3º - pela geometria descritiva

Na resolução pela geometria descritiva o instrumento empregado sendo o desenho projetivo, funciona como cálculo gráfico: as soluções poderão ter a aproximação exigida na prática, desde que sejam adotadas escalas adequadas.

Na resolução dos triedros há que atender sempre ao duplo objetivo:

- a) determinação dos elementos desconhecidos;
- b) construção prática dos triedros e de outras figuras por eles formadas.

Sabe-se que, em geral, devem ser dados três dos seis elementos de um triedro para ser possível sua resolução, sendo de interesse recordarmos quantos e quais são os casos de resolução para cada um dos quatro tipos, a saber:

1 - Trirretângulos - Todos os elementos sendo conhecidos não há casos de resolução, mas, apenas, problemas relativos à sua construção ou representação gráfica projetiva.

2 - Birretângulos - Apesar de serem conhecidos quatro dos seis elementos ( $\hat{\beta} = \hat{\alpha}\gamma = \hat{\gamma} = \hat{\alpha}\beta = 90^\circ$ , por exemplo) sua resolução exige o conhecimento de um quinto elemento, não havendo casos de resolução, mas, apenas, problemas sobre sua construção, visto como, dado o 5º elemento, o 6º ficará conhecido por ter o mesmo valor numérico (o diedro  $\hat{\beta}\gamma$  e a face  $\hat{\alpha}$  que é o seu retilíneo no exem

plo acima) isto é,  $\widehat{\beta\gamma} \hat{=} \widehat{\alpha}$ . O símbolo  $\hat{=}$ , de emprêgo em trigonometria esférica, se lê "tem o mesmo número de graus que".

3 - Monorretângulos - Sendo conhecido um dos seis elementos (é uso designá-lo por  $\widehat{\alpha\beta} = 90^\circ$  de modo contrário ao que se adota em geometria plana para o triângulo retângulo), são necessários mais dois elementos dos 5 restantes, o que dá:

$C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10$  casos que se reduzem aos seis distintos seguintes:

- |  |                |
|--|----------------|
| 1ª) Dados $\widehat{\gamma}$ e $\widehat{\beta\gamma}$ ou $\widehat{\gamma}$ e $\widehat{\alpha\gamma}$ , determinar $\widehat{\alpha}$ , $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\alpha\beta}$ }<br>ou $\widehat{\alpha}$ , $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\beta\gamma}$ } | 2 combinações  |
| 2ª) Dados $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\beta\gamma}$ ou $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\alpha\gamma}$ , determinar $\widehat{\gamma}$ , $\widehat{\beta}$ , $\widehat{\alpha\beta}$ }<br>ou $\widehat{\gamma}$ , $\widehat{\alpha}$ , $\widehat{\beta\gamma}$ } | 2 combinações  |
| 3ª) Dados $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta}$ , determinar $\widehat{\gamma}$ , $\widehat{\beta\gamma}$ e $\widehat{\alpha\beta}$   | 1 combinação   |
| 4ª) Dados $\widehat{\gamma}$ e $\widehat{\alpha}$ ou $\widehat{\gamma}$ e $\widehat{\beta}$ , determinar $\widehat{\beta}$ , $\widehat{\beta\gamma}$ e $\widehat{\alpha\beta}$ }<br>ou $\widehat{\alpha}$ , $\widehat{\beta\gamma}$ e $\widehat{\alpha\beta}$ }  | 2 combinações  |
| 5ª) Dados $\widehat{\beta\gamma}$ e $\widehat{\alpha\beta}$ , determinar $\widehat{\alpha}$ , $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\gamma}$   | 1 combinação   |
| 6ª) Dados $\widehat{\alpha}$ e $\widehat{\beta\gamma}$ ou $\widehat{\beta}$ e $\widehat{\alpha\gamma}$ , determinar $\widehat{\beta}$ , $\widehat{\alpha\beta}$ e $\widehat{\gamma}$ }<br>ou $\widehat{\alpha}$ , $\widehat{\beta\gamma}$ e $\widehat{\gamma}$ } | 2 combinações  |
| Total -  | 10 combinações |

4 - Obliquângulos - Devem ser dados três dos seis elementos:  $\widehat{\alpha}$ ,  $\widehat{\beta}$ ,  $\widehat{\gamma}$ ,  $\widehat{\alpha\beta}$ ,  $\widehat{\alpha\gamma}$ ,  $\widehat{\beta\gamma}$ , havendo, as-

sim, um número total de casos

$${}^3C_6 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

que podem se reduzidos nos casos distintos abaixo:

- 1ª) Dadas as três faces  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  determinar os três diedros  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$ ... 1 combinação
  - 2ª) Dadas duas faces  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  e o diedro compreendido  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ , ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$ , determinar  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}$  ou  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}$  3 combinações
  - 3ª) Dadas duas faces e o diedro oposto a uma delas:  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$  ou  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$  determinar:  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  ... 6 combinações
  - 4ª) Dados os três diedros  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  determinar as três faces  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  1 combinação
  - 5ª) Dada uma face e os diedros adjacentes:  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\gamma}\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\gamma}\hat{\beta}$  determinar:  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  3 combinações
  - 6ª) Dados dois diedros e a face oposta a um deles:  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$  ou  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$  ou  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  determinar:  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$  ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$  ou  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\alpha}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  ou  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\gamma}$ ,  $\hat{\beta}\hat{\gamma}$  ..... 6 combinações
- Total - 20 combinações

Pela discussão dos seis casos dos triedros obliquângulos, sabe-se que, de acôrdo com os elementos dados, pode haver: 0 solução (impossibilidade); 1 solução (determinação); 2 soluções (ambigüidade); ou um número infinito de soluções (indeterminação)."

Aplicações da resolução de triedros -

I) Reduzir um ângulo ao horizonte:

Êste problema, de aplicação em topografia, consiste no seguinte:

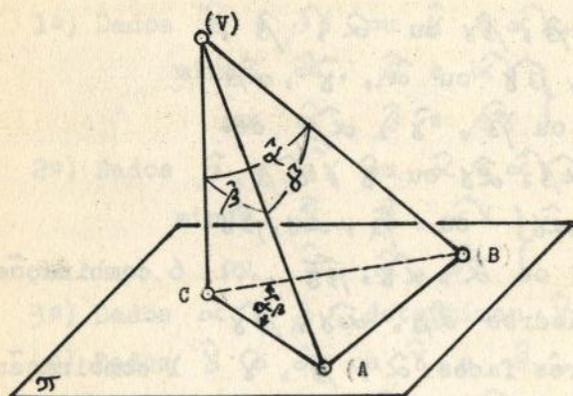


Fig. 20

"De um ponto (V) do espaço (considerado como olho de um observador), fixam-se dois pontos A e B, pertencentes a um plano horizontal π (fig. 20) e desse mesmo ponto (V) traça-se (V)C perpendicular a π. Temos, as-

sim, as retas (V)A, (V)B e (V)C, determinando um triedro de faces  $\widehat{C(V)A} = \beta$ ;  $\widehat{C(V)B} = \alpha$  e  $\widehat{A(V)B} = \gamma$ .

Nesse triedro procura-se o valor do diedro  $\widehat{\alpha\beta}$ , ou seja, a grandeza do ângulo, projeção ortogonal de  $\widehat{A(V)B} = \gamma$ , sobre o plano horizontal π (daí "reduzir um ângulo ao horizonte"). Êsse problema é considerado como uma aplica-

ção do 1º caso clássico.

II) Determinação do semi-ângulo do vértice do cone de revolução circunscrito a um triedro

Dado um triedro, o problema resume-se em determinar seu eixo dos mediadores e o ângulo que êsse eixo forma com uma das arestas do triedro. Basta, para isso, conhecer o plano determinado pelo eixo mediador (ver pág. 22) e uma das arestas do triedro. Êsse plano cortará a face oposta à aresta que o contém, segundo uma reta, a qual servirá como eixo de rebatimento dêsse plano sôbre a face em questão. Essa operação de rebatimento permitirá conhecer a verdadeira grandeza do ângulo formado entre o eixo e a aresta do triedro.

Também podemos resolver êsse problema com auxílio do teorema sôbre o eixo dos mediadores (págs. 105 a 111).

III) Determinação da rota de um navio:

Êsse problema serve de fundamento teórico para compreensão dos cálculos que se empregam na avaliação da rota de um navio.

Consiste no seguinte:

- Dá-se a colatitudo de um ponto (A) (fig. 21),

considerado como ponto de partida do navio, e a colatitudo de um ponto (B), considerado como ponto de chegada dêsse mesmo

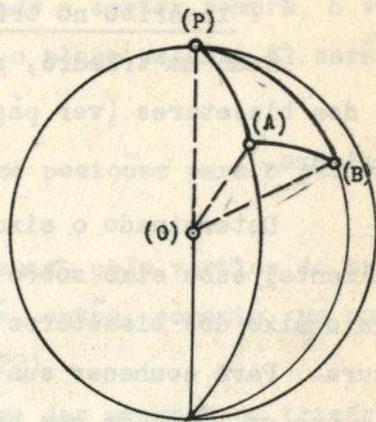


Fig. 21

navio. Trata-se de conhecer o percurso correspondente ao arco (A)(B).

Supondo que êsses pontos (A) e (B) sejam dois vértices de um triângulo esférico, o terceiro vértice estaria no polo (P). O triedro que determinou êsse triângulo esférico seria (O)-(A)(B)(P), no qual se conhecem duas faces (A)(O)(P) (colatitude do ponto (A), de partida) e (B)(O)(P) (colatitude do ponto (B), de chegada) e o diedro por elas formado, (A)(O)(P)(B).

A face correspondente à colatitude do ponto de chegada é considerada fixa. O diedro (A)(O)(P)(B) é dado pela diferença de longitudes entre os pontos (A) e (B), de partida e de chegada.

#### IV) Determinação do semi-ângulo do cone de revolução inscrito no triedro

Dado um triedro, procura-se conhecer o ângulo que o eixo dos bissetores (ver pág. 22) forma com uma das faces dêsse triedro.

Determinado o eixo dos bissetores, projeta-se, ortogonalmente, êsse eixo sôbre uma das faces. O ângulo formado entre o eixo dos bissetores e sua projeção é o ângulo que se procura. Para conhecer sua verdadeira grandeza, rebate-se o seu plano em tórno de sua projeção, sôbre o plano da face.

Nota: O exemplo nº IV comportaria, também, o seguinte problema, cuja marcha de resolução seria a mesma daquele caso: "Dado um triedro, determinar o centro de uma esfera de raio dado, inscrita nesse triedro".

Supondo conhecido o ângulo entre o eixo dos bissetores e a face (já determinado no exemplo nº IV), bastará traçar um plano paralelo à face, distante dela como o raio da esfera. O traço do eixo dos bissetores nesse plano é o centro da esfera.

## XI - SECÇÕES PLANAS

### Triedro de duas fôlhas - natureza da secção -

Este estudo, que pode ser generalizado para um ângulo sólido qualquer, será feito, considerando o triedro como sendo de duas fôlhas, ou seja, o triedro e seu simétrico (vide pgs. 11 e 13).

Admitiremos, estabelecendo analogia com "secções cônicas", um plano auxiliar  $S$ , obrigado a conter sempre o vértice ( $V$ ) do triedro e para o qual, o plano secante  $S_1$  será paralelo (1).

Poderemos considerar cinco posições para o plano auxiliar  $S$ :

1ª - O plano auxiliar  $S$ , passa, apenas, pelo vértice do triedro. Esse plano auxiliar terá, então, um ponto em comum com o triedro (fig. 22).

2ª - O plano auxiliar  $S$  contém uma das arestas do triedro. Esse plano auxiliar terá, então, uma reta em co-

---

(1) Seguimos raciocínio semelhante ao empregado para o estudo de "Secções cônicas" por C. Roubaudi, "Traité de Géométrie Descriptive", pág. 193, troisième édition, revue e mise à jour par A. Thybaut, Masson et Cie. Éditeurs, 1926, Paris.

mum com o triedro (fig. 24).

3ª - O plano auxiliar  $S$  contém uma das faces do triedro. Esse plano auxiliar terá, então, duas retas concorrentes que corresponderão a uma face do triedro, em comum com este ângulo sólido. O ponto de concorrência das arestas é o vértice do triedro (fig. 26).

4ª - O plano auxiliar  $S$  pertence a uma das arestas, e corta a face oposta, do triedro. Esse plano auxiliar terá, então, somente duas retas concorrentes em comum com o triedro. O ponto de concorrência é o vértice do triedro (fig. 28).

5ª - O plano auxiliar  $S$  pertence ao vértice e corta o triedro ao longo de duas faces. Esse plano auxiliar terá, então, somente duas retas concorrentes em comum com o triedro. O ponto de concorrência é o vértice do triedro (fig. 30).

1ª Posição - O plano auxiliar  $S$  passa, apenas, pelo vértice do triedro.

Qualquer plano  $S_1$ , paralelo a  $S$  (figs. 22 e 23) cortará somente uma das fôlhas do triedro e sempre segundo um triângulo, cujos vértices (A), (B) e (C) são os traços das arestas  $(V)(X_{\infty})$ ,  $(V)(Y_{\infty})$  e  $(V)(Z_{\infty})$  no plano secante  $S_1$  e cujos lados (A)(B), (B)(C) e (C)(A) são os traços das faces  $\gamma$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  nesse mesmo plano secante.

Os vértices do triângulo de secção (A)(B)(C) são todos pontos próprios. Por analogia com secções cônicas, essa posição corresponde, no teorema de Apollonius, ao caso da secção elíptica, em que a figura de secção não tem pontos impróprios. A fig. 23 corresponde à épura no sistema mongeano.

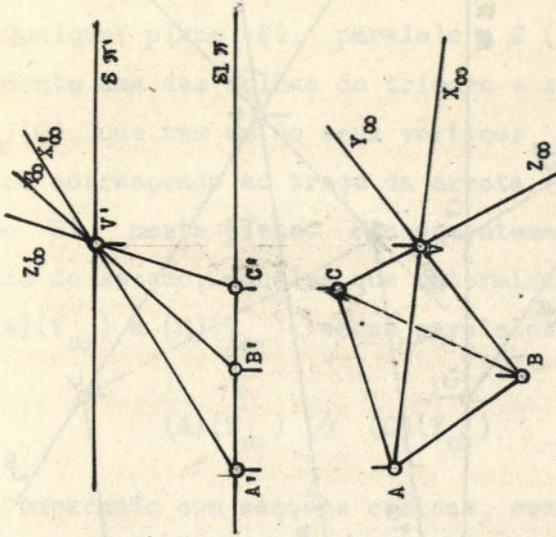


Fig. 23

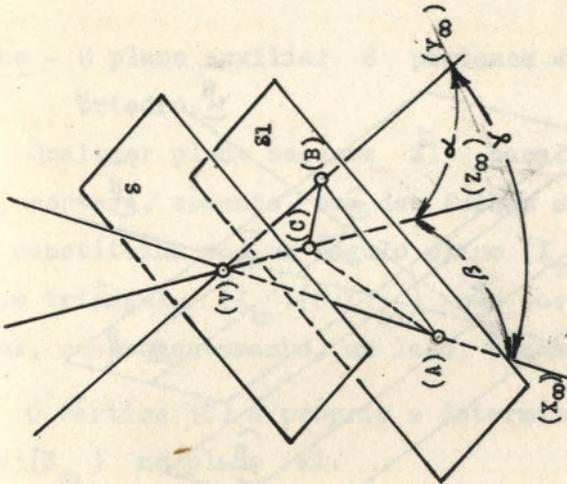


Fig. 22

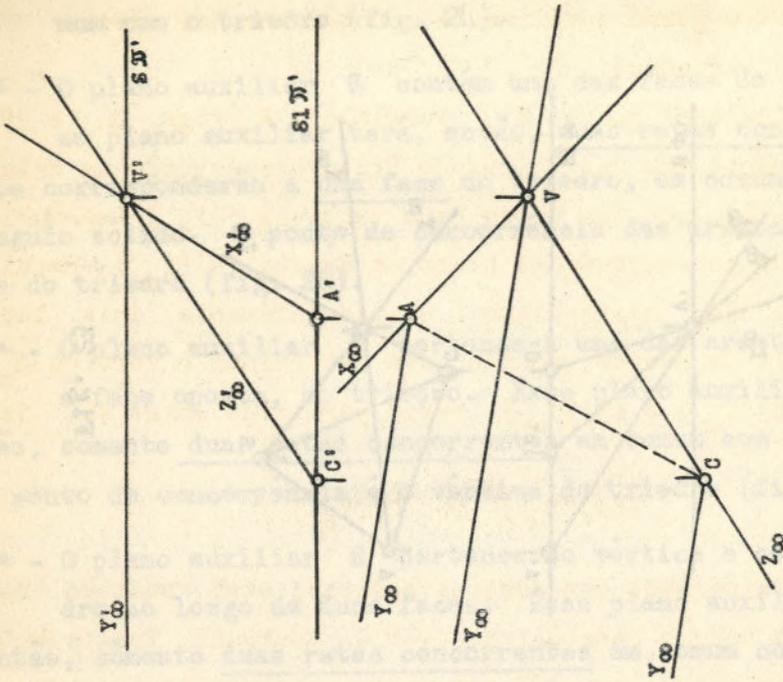


Fig. 25

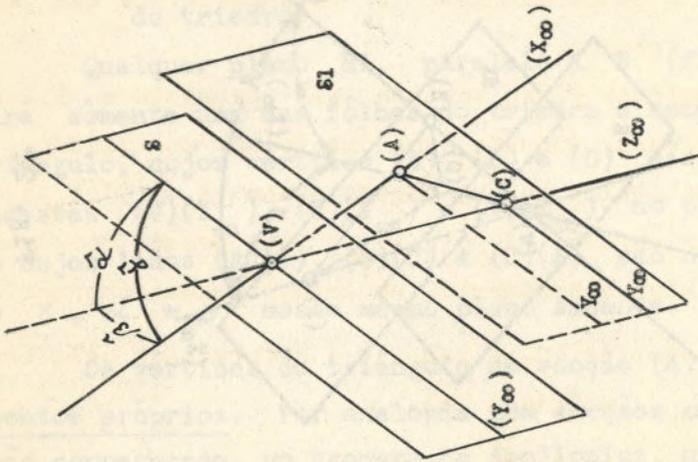


Fig. 24

2ª Posição - O plano auxiliar  $S$  contém uma das arestas do triedro.

Qualquer plano  $S_1$ , paralelo a  $S$  (figs. 24 e 25), cortará somente uma das folhas do triedro e segundo um triângulo  $(A)(Y_{\infty})(C)$ , que tem um de seus vértices  $(Y_{\infty})$  impróprio. Este vértice corresponde ao traço da aresta  $(V)(Y_{\infty})$ , paralela ao plano  $S_1$ , neste plano. Consequentemente, dois lados do triângulo de secção, aquêles que determinam o vértice  $(Y_{\infty})$ , ou seja,  $(A)(Y_{\infty})$  e  $(C)(Y_{\infty})$ , serão paralelos entre si, isto é:

$$(A)(Y_{\infty}) \parallel (C)(Y_{\infty})$$

Comparando com secções cônicas, essa posição corresponde, à secção parabólica, (ver C. Roubaudi, Traité de Géométrie Descriptive, pg. 193, já citado em nota de roda-pé da pág. 67). A fig. 25 corresponde à épura no sistema mongeano.

3ª Posição - O plano auxiliar  $S$  pertence a uma das faces do triedro.

Qualquer plano secante  $S_1$ , paralelo a  $S$ , (figs. 26 e 27), cortará, somente, uma das folhas do triedro. A secção será constituída por um ângulo plano  $(X_{\infty})(C)(Y_{\infty})$ , ou seja, por um triângulo  $(X_{\infty})(C)(Y_{\infty})$  que possui dois vértices impróprios, consequentemente, um lado, também, impróprio.

O vértice  $(C)$  é próprio e determinado pelo traço da aresta  $(V)(Z_{\infty})$  no plano  $S_1$ .

Os vértices  $(X_{\infty})$  e  $(Y_{\infty})$  são impróprios e determinados pelos traços  $(X_{\infty})$  e  $(Y_{\infty})$  das arestas  $(V)(X_{\infty})$  e

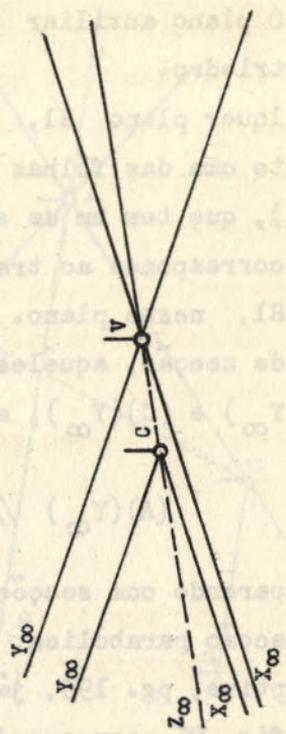
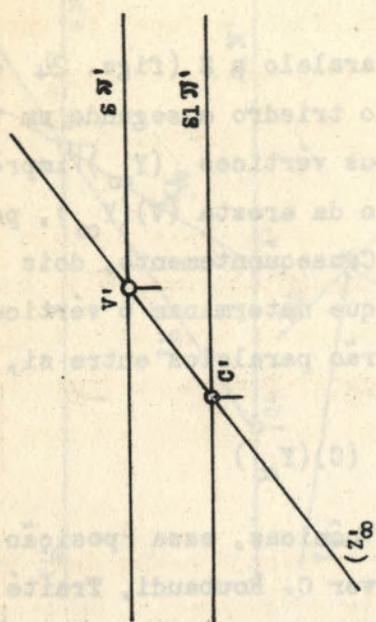


Fig. 27

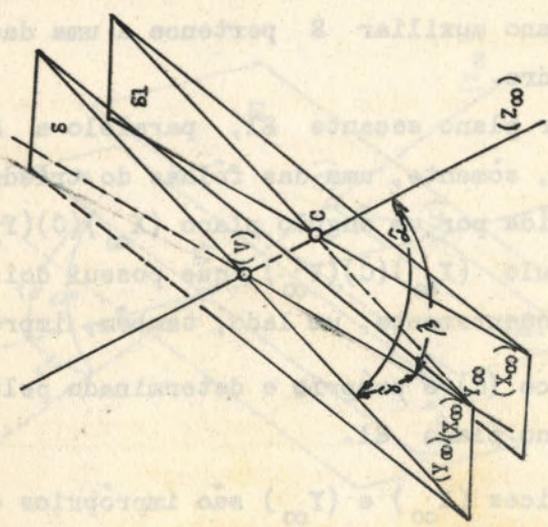


Fig. 26

$(V)(Y_{\infty})$ , respectivamente, no plano  $S_1$ , para o qual essas arestas estão paralelas. Do mesmo modo, a face  $\hat{Y}$  determinada por essas duas arestas do triedro, terá seu traço em  $S_1$ , impróprio, o que justifica ser o lado  $(X_{\infty})(Y_{\infty})$  do triângulo de secção, impróprio.

Comparando com secções cônicas, essa posição corresponde, ainda, ao caso da secção parabólica (ver a já citada obra de C. Roubaudi, pg. 193), porque as arestas  $(V)(X_{\infty})$  e  $(V)(Y_{\infty})$  correspondem a duas geratrizes da superfície cônica, infinitamente próximas. A fig. 27 corresponde à épura no sistema mongeano.

4ª Posição - O plano auxiliar  $S$  pertence a uma das arestas e corta a face oposta do triedro.

Qualquer plano  $S_1$ , paralelo a  $S$  (figs. 28 e 29), cortará as duas fôlhas do triedro. A fig. 29 corresponde à épura no sistema mongeano.

A secção plana será constituída por dois ângulos distintos  $(X_{\infty})(C)(R_{\infty})$  e  $(X_{\infty})(B)(R_{\infty})$ , que têm os lados  $(B)(R_{\infty})$  e  $(C)(R_{\infty})$  na mesma reta suporte.

Os vértices  $(B)$  e  $(C)$  são próprios e determinados pelos traços das arestas  $(V)(Y_{\infty})$  e  $(V)(Z_{\infty})$ , respectivamente, no plano  $S_1$ .

A secção apresenta dois pontos impróprios, que são:

- 1ª)  $(X_{\infty})$ , correspondente ao traço impróprio da aresta  $(V)(X_{\infty})$ , paralela a  $S_1$ , neste plano;
- 2ª)  $(R_{\infty})$ , correspondente ao traço impróprio da reta  $(V)(R_{\infty})$  no plano  $S_1$ , per

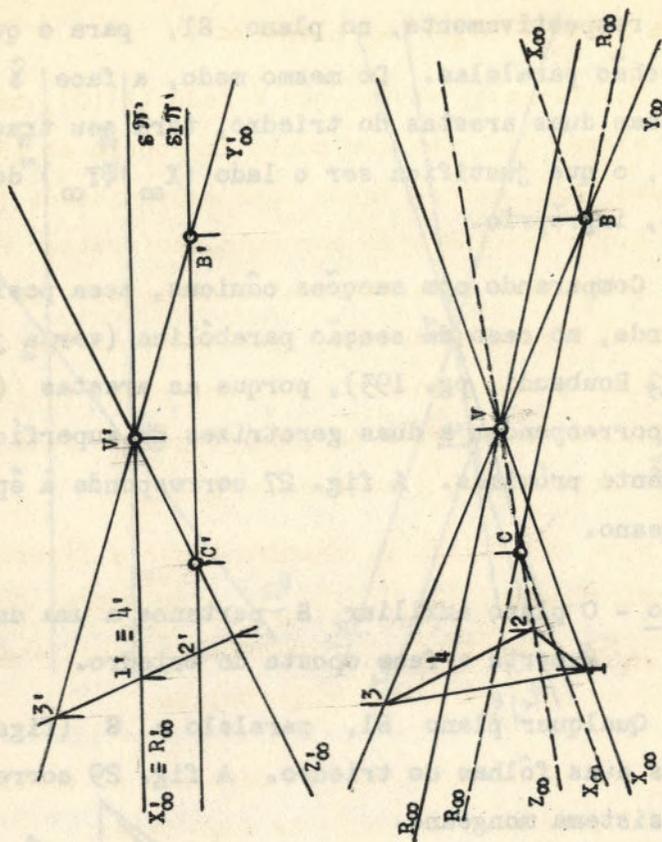


Fig. 29

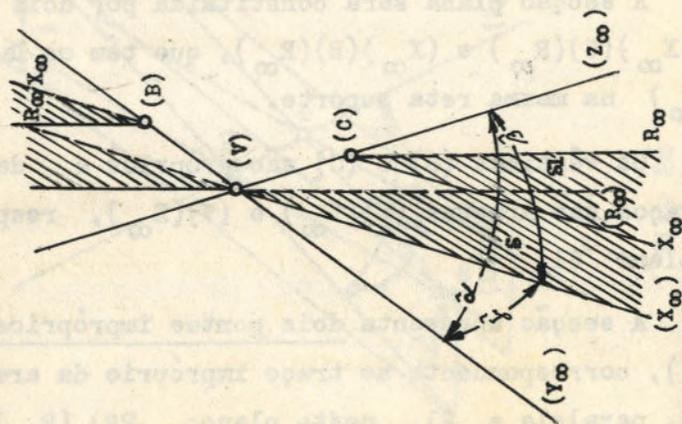


Fig. 28

tendendo a reta  $(V)(R_{\infty})$  ao plano  $\alpha$ .

Verificamos, assim, que o lado  $(B)(C)$ , traço da face  $\alpha$  no plano  $S_1$ , tem seu ponto impróprio em  $(R_{\infty})$ , o que faz que esse lado, embora tenha suas extremidades  $(B)$  e  $(C)$  próprias, fique representado por duas semi-retas  $(B)(R_{\infty})$  e  $(C)(R_{\infty})$ , colineares e de sentidos contrários. Do mesmo modo, o lado da figura de secção, resultante do traço da face  $\gamma$  no plano  $S_1$ , e representado pela semi-reta  $(C)(X_{\infty})$  é o lado dessa figura, resultante da intersecção da face  $\beta$  com o plano  $S_1$ , corresponde à semi-reta  $(C)(X_{\infty})$ .

Numa das fôlhas do triedro temos a figura de secção definida pelos pontos  $(X_{\infty})(B)(R_{\infty})$  e na outra fôlha temos  $(X_{\infty})(C)(R_{\infty})$ . Comparando com secções cônicas, sua posição corresponde ao caso da secção hiperbólica.

5ª Posição - O plano auxiliar  $S$  pertence ao vértice e corta o triedro ao longo de duas faces.

Qualquer plano  $S_1$ , paralelo a  $S$  (fig. 30, no espaço; fig. 31, na écura do sistema mongeano), cortará as duas fôlhas do triedro.

A secção será constituída por duas figuras distintas: o ângulo  $(S_{\infty})(C)(R_{\infty})$  e a poligonal  $(R_{\infty})(A)(B)(S_{\infty})$ .

Os vértices  $(A)$ ,  $(B)$  e  $(C)$  são próprios e determinados pelos traços das arestas  $(V)(X_{\infty})$ ,  $(V)(Y_{\infty})$  e  $(V)(Z_{\infty})$ , respectivamente, no plano secante  $S_1$ .

No entanto, a secção apresenta, também, dois pontos impróprios, que são, como se poderá observar,

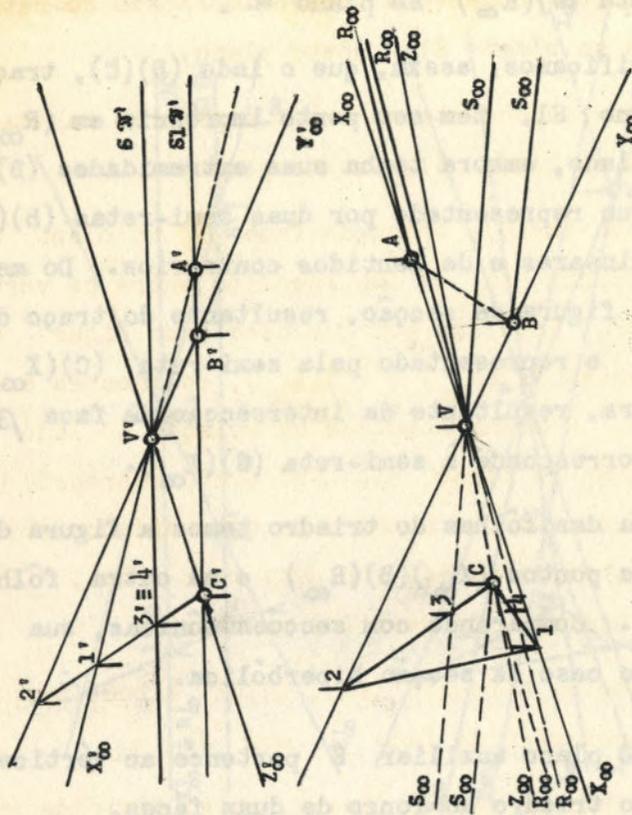


Fig. 31

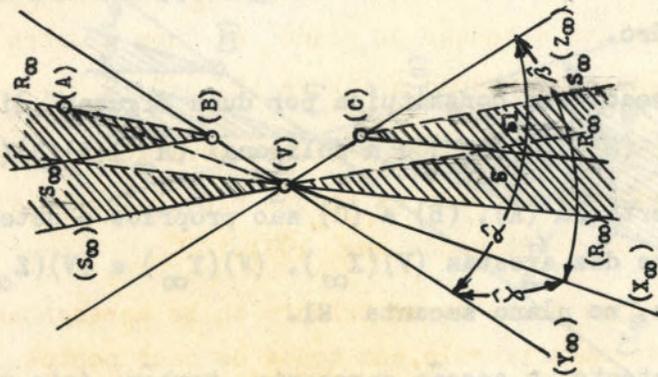


Fig. 30

1ª) -  $(R_{\infty})$ , correspondente ao traço impróprio da reta  $(V)(R_{\infty})$ , paralela ao plano  $S_1$ , neste plano.

2ª) -  $(S_{\infty})$ , correspondente ao traço impróprio da reta  $(V)(S_{\infty})$ , paralela ao plano  $S_1$ , neste plano.

O lado  $(A)(C)$ , traço da face  $\hat{\beta}$  no plano  $S_1$ , tem seu ponto impróprio  $(R_{\infty})$  compreendido entre os vértices  $(A)$  e  $(C)$ , próprios. Isto faz com que êsse lado fique dividido em duas semi-retas  $(A)(R_{\infty})$  e  $(C)(R_{\infty})$ , colineares e de sentidos contrários. O mesmo acontece em relação ao lado  $(B)(C)$ , traço da face  $\hat{\alpha}$  no plano  $S_1$ . Seu ponto impróprio  $(S_{\infty})$  faz com que êsse lado, embora tenha suas extremidades  $(B)$  e  $(C)$  próprias, fique representado por duas semi-retas,  $(B)(S_{\infty})$  e  $(C)(S_{\infty})$ , colineares e de sentidos contrários.

Quanto ao terceiro lado,  $(A)(B)$  é todo próprio e corresponde à intersecção da face  $\hat{\gamma}$  com  $S_1$ .

A figura de secção ficará, pois, dividida em dois ramos. Um dêles se refere à secção do plano  $S_1$  com uma das folhas do triedro, determinando a figura  $(R_{\infty})(A)(B)(S_{\infty})$ ; o outro ramo é relativo à secção do plano  $S_1$  com a outra folha do triedro, correspondendo à figura  $(R_{\infty})(C)(S_{\infty})$ .

Comparando com secções cônicas, verificamos que essa posição corresponde ao caso da secção hiperbólica (ver a obra, já citada, de C. Roubaudi, pg. 193).

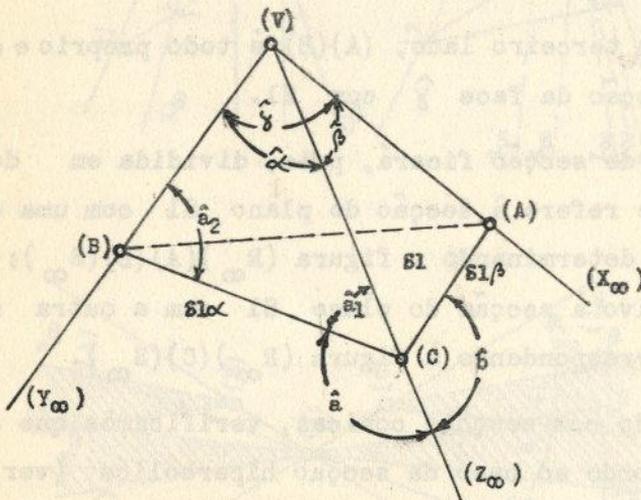
Conclusão - A secção plana de um triedro só se apresentará segundo um triângulo, com todos os seus pontos próprios, se o plano secante observar as condições estudadas na 1ª posição, ou seja, quando êle é paralelo a um plano  $S$  que

passa pelo vértice do triedro e sòmente pelo vértice.

Esta condição poderá ser expressa de outra maneira, considerando os ângulos das faces do triedro em relação aos ângulos que formam com as arestas, os traços do plano secante na face.

- "Para que o plano secante  $S_1$  determine uma secção de pontos próprios, torna-se necessário que dois de seus traços,  $S_1\alpha$  e  $S_1\beta$ , nas faces  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, sejam concorrentes com as arestas  $(V)(X_\infty)$ ,  $(V)(Y_\infty)$  e  $(V)(Z_\infty)$ , numa mesma fôlha". (fig. 32).

Sejam  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  os ângulos das faces  $\alpha$  e  $\beta$  do triedro  $(V)-(X_\infty)(Y_\infty)(Z_\infty)$  e  $S_1\alpha$ ,  $S_1\beta$ , os traços do plano



no secante  $S_1$  nas faces  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente.

Seja  $\hat{a}$ , o ângulo que o traço  $S_1\alpha$ , da secção  $S_1$ , forma com a aresta  $(V)(Z_\infty)$  (abertura voltada para o mesmo lado que  $\hat{\alpha}$ ).

Seja  $\hat{b}$  o ângulo que o traço

Fig. 32

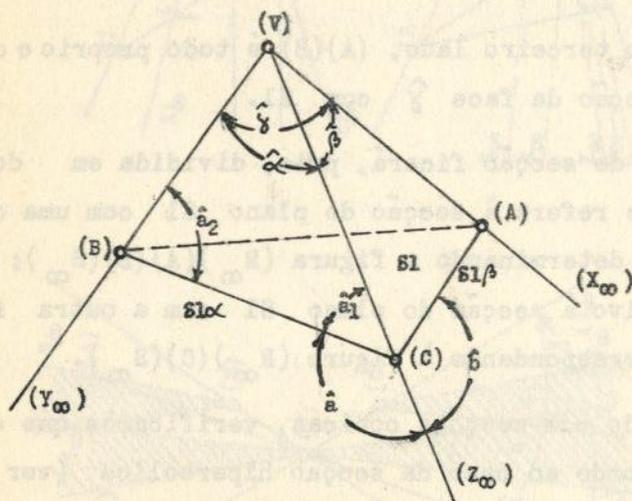
$S_1\beta$ , da secção  $S_1$ , forma com a aresta  $(V)(Z_\infty)$  (abertura considerada para o mesmo lado que  $\hat{\beta}$ ).

passa pelo vértice do triedro e sòmente pelo vértice.

Esta condição poderá ser expressa de outra maneira, considerando os ângulos das faces do triedro em relação aos ângulos que formam com as arestas, os traços do plano secante na face.

- "Para que o plano secante  $S_1$  determine uma secção de pontos próprios, torna-se necessário que dois de seus traços,  $S_1\alpha$  e  $S_1\beta$ , nas faces  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente, sejam concorrentes com as arestas  $(V)(X_\infty)$ ,  $(V)(Y_\infty)$  e  $(V)(Z_\infty)$ , numa mesma fôlha". (fig. 32).

Sejam  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  os ângulos das faces  $\alpha$  e  $\beta$  do triedro  $(V)-(X_\infty)(Y_\infty)(Z_\infty)$  e  $S_1\alpha$ ,  $S_1\beta$ , os traços do plano secante  $S_1$  nas faces  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente.



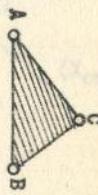
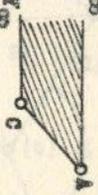
Seja  $\hat{a}$ , o ângulo que o traço  $S_1\alpha$ , da secção  $S_1$  forma com a aresta  $(V)(Z_\infty)$  (abertura voltada para o mesmo lado que  $\hat{\alpha}$ ).

Seja  $\hat{b}$  o ângulo que o traço

Fig. 32

$S_1\beta$ , da secção  $S_1$ , forma com a aresta  $(V)(Z_\infty)$  (abertura considerada para o mesmo lado que  $\hat{\beta}$ ).

QUADRO ESQUEMÁTICO DAS DIVERSAS SEÇÕES PLANAS DE UM TRIEDRO  
 Comparação entre  $\hat{a}$  e  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{b}$  com  $\hat{\beta}$

Comparação entre $\hat{\alpha}$ e o ângulo do trago $SI\hat{\alpha}$ com $(V)(Z_{\infty})$	Comparação entre $\hat{\beta}$ e o ângulo do trago $SI\hat{\beta}$ com $(V)(Z_{\infty})$	Posições	Tipos de secção
$\hat{a} > \hat{\alpha}$	$\hat{b} > \hat{\beta}$	1ª Posição	
$\hat{a} = \hat{\alpha}$	$\hat{b} > \hat{\beta}$	2ª Posição	
$\hat{a} = \hat{\alpha}$	$\hat{b} = \hat{\beta}$	3ª Posição	
$\hat{a} = \hat{\alpha}$	$\hat{b} < \hat{\beta}$	4ª Posição	
$\hat{a} < \hat{\alpha}$	$\hat{b} < \hat{\beta}$	5ª Posição	
Tem dois pontos impróp. Corresponde à hipérbole PL. SEC. ATINGE 2 FÔLHAS TRIE.	Tem dois pontos impróp.	Tem dois pontos impróp. Corresponde à parábola PLANO SECANTE SÓ ATINGE UMA FÔLHA TRIEDRO	Tem um ponto impróp.
Não tem pontos impróp. Corresp. à elipse			

Assim, pois, a secção plana de um triedro só poderá ter todos os seus pontos próprios se fôr satisfeita a condição:

$$\hat{a} > \hat{\alpha} \quad \text{e} \quad \hat{b} > \hat{\beta}$$

Verificamos, também, que determinados os dois traços  $S1\alpha$  e  $S1\beta$ , para os quais foram considerados  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$ , o plano  $S1$  está perfeitamente determinado.

Se  $\hat{\alpha} \cong 90^\circ$  e  $\hat{\beta} \cong 90^\circ$ , o plano secante  $S1$ , em relação ao diedro  $\hat{\alpha}\hat{\beta}$ , só poderá ser de sentido direto (1) para que se verifique a condição:  $\hat{a} > \hat{\alpha}$  e  $\hat{b} > \hat{\beta}$ .

### Natureza das secções triangulares de pontos próprios -

De acôrdo com o tipo de triedro e o modo de seccioná-lo, poderemos ter triângulos acutângulos, retângulos ou obtusângulos, como figuras resultantes da secção plana de um triedro.

Consideraremos os tipos de triedro, apenas em relação à grandeza de seus diedros, pois tôdas as conclusões tiradas sôbre o assunto são deduzidas do estudo de "secções planas de um diedro".

#### A - Triedros obliquângulos:

1º) Se o triedro fôr acutângulo, poderemos ter triângulos de três espécies, a saber:

I - triângulo acutângulo - o plano secante poderá ter uma posição qualquer desde que seja observada a condição:  $\hat{a} > \hat{\alpha}$  e  $\hat{b} > \hat{\beta}$ .

---

(1) Plano de sentido direto - É o plano cujos traços nas faces de um diedro são oblíquos à aresta do diedro e estão de um mesmo lado do retilíneo desse diedro, relativo ao ponto de concorrência dos traços. Plano de sentido inverso é o que tem seus traços de um e outro lado desse retilíneo.

- II - Triângulo retângulo  
ou  
III - triângulo obtusângulo
- } só será possível se, satisfazendo a condição:  $\hat{\alpha} > \hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta} > \hat{\beta}$ , o plano secante for de sentido inverso (1) para um dos diedros.

2º) Se o triedro fôr obtusângulo, teremos as seguintes espécies de secções:

- I - triângulo acutângulo  
ou  
II - triângulo retângulo  
III - triângulo obtusângulo
- } o plano secante só poderá ser de sentido direto, em relação a qualquer dos diedros do triedro para que:  $\hat{\alpha} > \hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta} > \hat{\beta}$ .
- o plano secante poderá ser de sentido direto, inverso ou ter um dos traços perpendiculares a uma aresta (duas últimas hipóteses quando há face aguda).

3º) Se o triedro fôr simplesmente obliquângulo, ou seja, possuir ângulos diedros agudos e obtusos, poderemos ter os três tipos de triângulos, de acôrdo com o número de diedros agudos ou obtusos que o triedro tiver e com a possibilidade dos traços do plano secante atenderem à condição:  $\hat{\alpha} > \hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta} > \hat{\beta}$ , podendo o plano secante ser de sentido direto ou inverso, relativamente a um dos diedros do triedro.

#### B - Triedros retângulos:

1º) Se o triedro fôr trirretângulo, o triângulo de secção só poderá ser acutângulo, porque, para que seja atendida a condição  $\hat{\alpha} > \hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta} > \hat{\beta}$ , o plano secante só poderá ser de sentido direto e tôda a secção plana de um diedro re-

---

(1) Vide nota da página anterior.

tângulo por plano de sentido direto é sempre um ângulo agudo.

2º) Se o triedro fôr birretângulo, poderemos ter triângulos das três espécies, a saber:

I - triângulo acutângulo - o plano secante em relação a qualquer dos diedros do triedro só poderá ser de sentido direto, para que  $\hat{a} > \hat{\alpha}$  e  $\hat{b} > \hat{\beta}$ .

II - triângulo retângulo:

a) Se o ângulo diedro não retângulo fôr agudo, o plano secante  $\mathcal{E}l$  deverá ser determinado em relação a um dos diedros retângulos, como  $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$ , do triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$  (fig. 33).

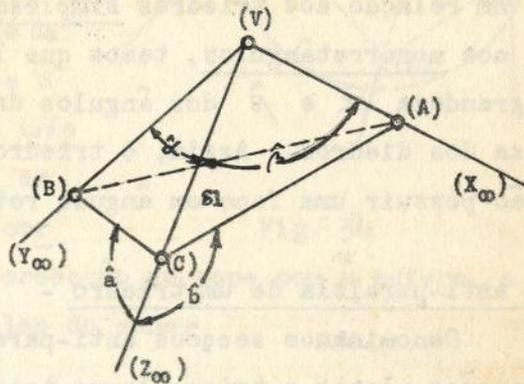


Fig. 33

O traço na face  $\alpha$ , a que supomos ser aguda, poderá ser perpendicular ou oblíqua a  $(V)(Z_{\infty})$ . Nesta última hipótese, o plano secante deverá ser de sentido inverso em relação ao diedro  $\hat{\alpha} > \hat{\beta}$ , tendo-se o cuidado de verificar que  $\hat{a} > \hat{\alpha}$  e  $\hat{b} > \hat{\beta}$ .

b) Se o ângulo diedro não retângulo fôr obtusângulo, o plano secante só poderá ser de sentido direto.

III - Triângulo obtusângulo:

a) se o ângulo diedro não retângulo fôr acutângulo, o plano secante só poderá ser de sentido inverso e, somente em relação a um dos diedros retângulos, observando-se que

$$\hat{\alpha} > \hat{\alpha} \quad \text{e} \quad \hat{\beta} > \hat{\beta} .$$

b) se o ângulo diedro não retângulo fôr obtusângulo, o plano secante só poderá ser de sentido direto e o ângulo obtuso do triângulo de secção só poderá corresponder ao diedro obtusângulo do triedro.

3ª) Se o triedro fôr monorretângulo - poderemos ter triângulos de secção das três espécies desde que  $\hat{\alpha} > \hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta} > \hat{\beta}$  .

Nota:- Em relação aos triedros simplesmente obliquângulos e aos monorretângulos, temos que levar em consideração que a grandeza  $\hat{\alpha}$  e  $\hat{\beta}$  dos ângulos das faces, independem da grandeza dos diedros. Assim, o triedro pode ser monorretângulo e não possuir uma face em ângulo reto.

#### Secção anti-paralela de um triedro -

Denominamos secções anti-paralelas de um triedro, duas secções planas e triangulares tais que seus vértices .. (A)(B)(C) e (D)(E)(F), pertencem à superfície de uma esfera.

Assim, qualquer triedro, cujas arestas sejam secantes a uma esfera, determinará, nos pontos de penetração (A), (B) e (C), os vértices de um triângulo, e nos de saída, (D), (E) e (F), os de outro triângulo. Êsses dois triângulos correspondem a duas secções anti-paralelas dêsse triedro.

Sabemos que o plano (V)(D)(E) secciona a esfera segundo um círculo que passa pelos pontos (A), (B), (D) e (E) e para o qual, o ponto (V) é potência. O mesmo podemos ob-

servar em relação às demais faces do triedro.

Portanto:

$$\begin{aligned} (V)(A).(V)(D) &= (V)(B).(V)(E) = \\ &= (V)(C).(V)(F) \end{aligned}$$

Verificamos, ainda, que os planos (A)(B)(C) e (D)(E)(F) são secantes à esfera, determinando, conseqüentemente, duas secções circulares, na superfície da esfera. Se considerarmos o cone circunscrito a esse triedro, observaremos que as duas secções circulares correspondem, também, a intersecção do cone com a esfera e são duas secções anti-paralelas do cone.

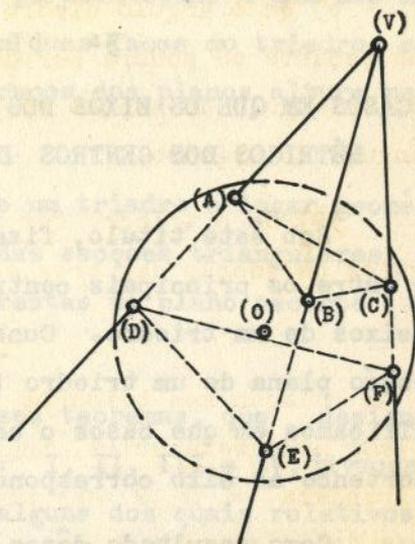


Fig. 34

\*

3ª P A R T E

CASOS EM QUE OS EIXOS DOS TRIEDROS SÃO LUGARES GEO  
MÉTRICOS DOS CENTROS DAS SECÇÕES TRIANGULARES

Sob êste título, fizemos um estudo da relação existente entre os principais centros de um triângulo e os principais eixos de um triedro. Consideramos o triângulo obtido pela secção plana de um triedro (1ª posição, ver págs. 67 e 69) e verificamos em que casos o centro de uma secção triangular (1) pertence ao eixo correspondente do triedro.

Como resultado dêsse estudo, apresentamos quatro teoremas principais, que pretendemos demonstrar e que são os seguintes:

Teorema I - "O eixo dos bissetores de um triedro é o lugar geométrico dos incentros das secções triangulares cujos traços nas faces do triedro formam ângulos iguais com duas de suas arestas".

Teorema II - "O eixo dos medianos é o lugar dos baricentros (ou centróides) de tôdas as secções triangulares de um triedro, feitas de modo que os traços de suas arestas no plano secante estejam equidistantes do vértice dêsse triedro".

Teorema III - "O eixo das alturas de um triedro é o lugar geo

---

(1) Adotaremos secção triangular, para exprimir as secções no triedro, cujos pontos sejam todos próprios.

métrico dos ortocentros de tôdas as secções triangulares cujo plano seja perpendicular a uma das arestas ou cujos traços em duas faces do triedro sejam perpendiculares aos traços dos planos altura nessas mesmas faces".

Teorema IV - "O eixo mediador de um triedro é lugar geométrico dos circuncentros das secções triangulares feitas de modo que os traços das arestas no plano secante que estejam equidistantes do vértice".

Para demonstração dêsses teoremas, que designamos com números em algarismo romano: I, II, III e IV, tivemos que nos basear em outros teoremas, alguns dos quais relativos a diedros e que designaremos com números em algarismos arábicos para distinguir dos primeiros.

Teorema I - Lugar geométrico dos incentros -

"O eixo dos bissetores de um triedro é o lugar geométrico dos incentros das secções triangulares cujos traços nas faces do triedro formam ângulos iguais com duas arestas".

Demonstração - Discussão -

A demonstração dêsse teorema baseia-se num outro relativo ao plano bissetor de um diedro e que se enuncia:

Teorema 1: "O lugar geométrico das bissetrizes dos ângulos lineares cujos lados estão sôbre as respectivas faces de um diedro, formando ângulos iguais com sua aresta, e sômente ângulos iguais, é o plano bissetor dêsse diedro".

Observada a condição de igualdade de ângulos dos tra

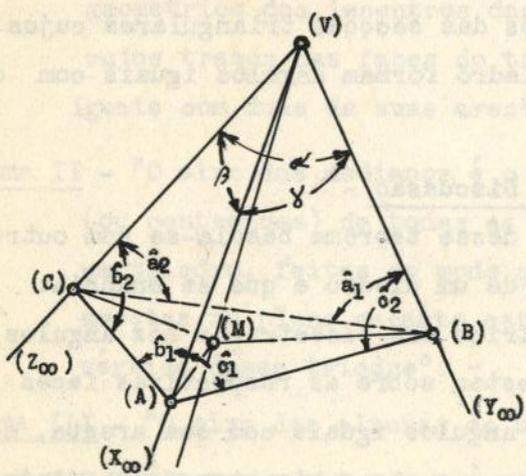
ços em relação às arestas do triedro, de acôrdo com o teorema que acabamos de enunciar, verificamos que, bastará considerar essa condição, sòmente em relação a duas arestas, porque:

Teorema nº 2: "Se os traços de um plano secante ao triedro formarem ângulos iguais com duas arestas de um triedro, com a terceira aresta, também formarão ângulos iguais".

Isto em virtude de serem co-punctuais as bissetrizes de um triângulo e co-axiais os bissetores de um triedro.

Teorema nº 3: "Se houver uma aresta de um triedro para a qual os traços do plano secante não façam ângulos iguais, haverá também outra nessas condições e o incentro do triângulo de secção não pertencerá mais ao eixo dos bissetores".

Demonstração do teorema 2: (fig. 35)



Hipótese:

$$\hat{c}_1 = \hat{b}_1 \quad \text{e} \quad \hat{b}_2 = \hat{a}_2$$

Tese:

$$\hat{c}_2 = \hat{a}_1$$

Seja o triedro

$$(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$$

Sejam  $(M)(C)$  e  $(M)(A)$  as bissetrizes de

$\overline{(A)(C)(B)}$  e  $\overline{(C)(A)(B)}$  do triângulo de secção  $(A)(B)(C)$ . De acôrdo com o teorema nº 1, es-

Fig. 35

as bissetrizes devem pertencer aos bissetores dos diedros correspondentes, ou sejam  $\hat{\alpha}\beta$  e  $\hat{\beta}\gamma$  (considerar a hipótese).

$(M)(B)$  será bissetriz de  $(A)(B)(C)$  em virtude de serem co-punctuais as bissetrizes de um triângulo. O ponto  $(M)$ , pertencendo a  $(M)(V)$ , eixo dos bissetores, pertencerá também ao bissetor do diedro  $\hat{\alpha}\gamma$ , em virtude de serem co-axiais os bissetores de um triedro.

Se  $(M)(B)$  pertence ao bissetor do diedro  $\hat{\alpha}\gamma$ , então:

$$\hat{c}_2 = \hat{a}_1 \quad (1)$$

Demonstração do teorema 3: (fig. 36)

Hipótese:  $\hat{c}_1 \neq \hat{b}_1$ . Tese:  $\hat{a}_2 \neq \hat{b}_2$ .

Seja  $(A)I$  a bissetriz de  $(C)(A)(B)$  da secção

$(A)(B)(C)$  do triedro

$(V)-(X_\infty)(Y_\infty)(Z_\infty)$ .

Seja  $I$  o incentro do triângulo .....

$(A)(B)(C)$ . Pelo teorema nº 1 conclui-se que,

se  $\hat{c}_1 \neq \hat{b}_1$  (hipótese),

$(A)I$  não pertence ao bissetor do diedro  $\hat{\beta}\gamma$ ,

logo  $I$  não pode pertencer ao bissetor de  $\hat{\beta}\gamma$  e, consequentemente,

ao eixo dos bissetores  $(V)(M)$ .

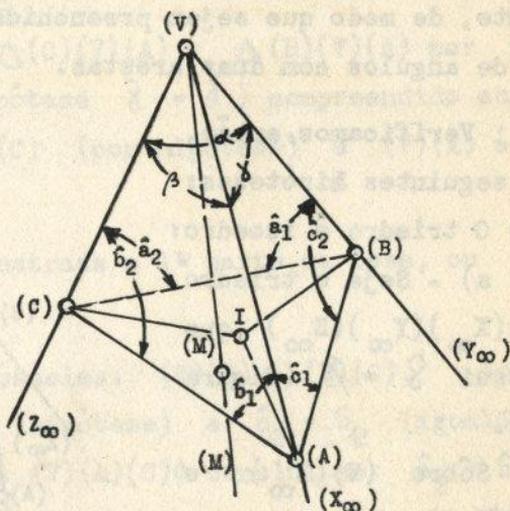


Fig. 36

(1) Recíproca do teorema "O lugar geométrico das bissetrizes dos ângulos lineares...", ver pag. 87, "Demonstração e Discussão".

Mas o incentro I, pertence, também, à bissetriz (C)I de  $\widehat{(A)(C)(B)}$  e como não está sobre (V)(M), não pode pertencer ao bissetor do diedro  $\widehat{\alpha/\beta}$ . Estando (C)I fora do bissetor do diedro  $\widehat{\alpha/\beta}$ , então:

$$\hat{a}_2 \neq \hat{b}_2 \quad (2)$$

Condições de possibilidade para aplicação do Teorema I:

Analiseemos em que casos é possível determinar um plano secante a um triedro para que seus traços nas faces do triedro formem ângulos iguais com duas arestas.

Consideremos que, determinados os traços em duas faces do triedro, estará determinado na terceira face. O problema se resume, pois, em determinar dois traços do plano secante, de modo que sejam preenchidas as condições de igualdade de ângulos com duas arestas.

Verificamos, então, as seguintes hipóteses:

1ª) O triedro é isocetro:

a) - Seja o triedro  $(V)(X_\infty)(Y_\infty)(Z_\infty)$  que possui  $\hat{\delta} = \hat{\beta}$  (figura 37).

Sobre  $(V)(Y_\infty)$  e  $(V)(Z_\infty)$ , determinemos, respectivamente, os pontos (B) e (C), de tal

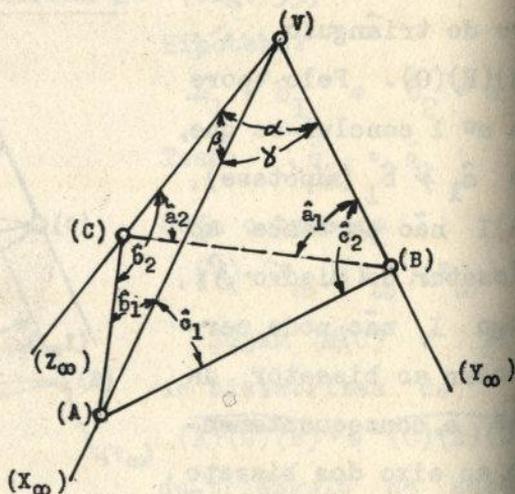


Fig. 37

(2) Teorema referido em (1) (página anterior) e citado na pág. 87.

sorte que  $(V)(B) = (V)(C)$ . Traçemos na face  $\alpha$  a reta  $(C)(B)$ , que formará com  $(V)(B)$ :  $\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2$  formado por essa reta com  $(V)(C)$ , visto ser isósceles o triângulo  $(B)(V)(C)$ .

Tracemos sôbre a face  $\gamma$  uma reta  $(A)(B)$  que forme com  $(V)(B)$   $\hat{c}_2 = \hat{a}_1$ .

"A secção triangular  $(C)(B)(A)$  terá seu incentro sôbre o eixo dos bissetores do triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ ".

Para isso, bastará provar que  $\hat{c}_1$ , formado por  $(A)(B)$  com  $(V)(X_{\infty}) = \hat{b}_1$ , formado por  $(A)(C)$  com  $(V)(X_{\infty})$  e que  $\hat{b}_2 = \hat{a}_2$ , ângulos de  $(A)(C)$  e  $(B)(C)$  com a aresta  $(V)(Z_{\infty})$ . Temos, então:

$$\text{Hipótese } \begin{cases} \hat{\gamma} = \hat{\beta} \\ (V)(B) = (V)(C) \\ \hat{a}_1 = \hat{c}_2 \end{cases} \quad \text{Tese } \begin{cases} \hat{c}_1 = \hat{b}_1 \\ \hat{a}_2 = \hat{b}_2 \end{cases}$$

Demonstração:  $\Delta(C)(V)(A) = \Delta(B)(V)(A)$  por terem ângulos iguais (por hipótese  $\hat{\gamma} = \hat{\beta}$ ) compreendido entre lados iguais  $(V)(B) = (V)(C)$  (por hipótese) e  $(V)(A)$  é comun.

Então, está demonstrada a 1ª parte da tese, ou seja, que  $\hat{c}_1 = \hat{b}_1$ .

$\Delta(V)(B)(C)$  é isósceles:  $(V)(B) = (V)(C)$ , então  $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$  e como:  $\hat{a}_1 = \hat{c}_2$  (hipótese) e  $\hat{c}_2 = \hat{b}_2$  (igualdade dos triângulos  $(V)(B)(A)$  e  $(V)(A)(C)$ ) conclui-se:  $\hat{a}_2 = \hat{b}_2$ .

b) - Suponhamos agora que a reta  $(B)(C)$  faça com as arestas  $(V)(Y_{\infty})$  e  $(V)(Z_{\infty})$ :  $\hat{a}_1 \neq \hat{a}_2$  e tracemos  $(A)(B)$  formado com  $(V)(Y_{\infty})$ :  $\hat{c}_2 = \hat{a}_1$ .

Teremos que  $\Delta(V)(B)(A) \neq \Delta(V)(C)(A)$ , porque  $\Delta(V)(B) \neq \Delta(V)(C)$ , então:  $\hat{c}_1 \neq \hat{b}_1$  (se  $\hat{c}_1 = \hat{b}_1$ , como  $\hat{\gamma} = \beta$ ,  $\Delta(V)(B)(A) = \Delta(V)(C)(A)$ , o que é impossível, visto  $\Delta(V)(B) \neq \Delta(V)(C)$ ), e, pelo teorema nº 1, a bissetriz do  $\widehat{(B)(A)(C)}$  não pertencerá mais ao bissetor do diedro.

c) - Se considerássemos a aresta  $(V)(X_\infty)$  determinada pelas faces iguais  $\hat{\gamma}$  e  $\hat{\beta}$  e traçássemos  $(A)(B)$  e  $(A)(C)$  de tal sorte que essas retas fizessem com  $(V)(X_\infty)$ :  $\hat{c}_1 = \hat{b}_1$ . Embora fôsem iguais os triângulos  $(B)(V)(A)$  e  $(C)(V)(A)$  (por terem ângulos iguais e adjacentes a lado igual), sendo  $\hat{c}_2 = \hat{b}_2$ , nada nos autoriza a concluir que  $\hat{c}_2 = \hat{a}_1$  ou que  $\hat{b}_2 = \hat{a}_2$ .

Nota: Se o triedro fôr equiedro, poderemos fazer as mesmas interpretações, pois se trata, apenas, de um aspecto particular.

2ª) O triedro é anisocedro:

Seja o triedro  $(V)-(X_\infty)(Y_\infty)(Z_\infty)$ , que tem  $\hat{\gamma} \neq \hat{\beta} \neq \hat{\alpha}$  (fig. 38).

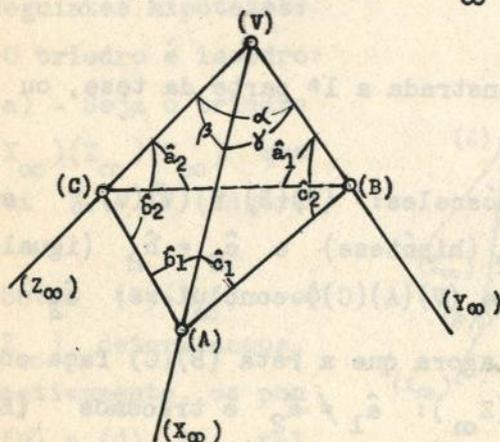


Fig. 38

Sobre  $(V)(Y_\infty)$  e  $(V)(Z_\infty)$ , determinemos, respectivamente, os pontos (B) e (C), de tal sorte que  $(V)(B) = (V)(C)$ .

Tracemos na face  $\alpha$  a reta  $(C)(B)$ , que formará com  $(V)(B)$ :

$\hat{a}_1$  e com (V)(C):  $\hat{a}_2$ , sendo, pois:  $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$ .

Tracemos sobre a face  $\gamma$  uma reta (A)(B) que forme com (V)(B):  $\hat{c}_2 = \hat{a}_1$ . Temos:

$$\text{Hipótese: } \begin{cases} \hat{\alpha} \neq \hat{\beta} \neq \hat{\gamma} \\ (V)(B) = (V)(C) \\ \hat{a}_1 = \hat{c}_2 \end{cases} \quad \text{Tese: } \begin{cases} \hat{c}_1 \neq \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \neq \hat{a}_2 \end{cases}$$

Demonstração: Os triângulos (V)(B)(A) e (V)(A)(C) têm (V)(B) = (V)(C) e (V)(A) comum e como  $\hat{\beta} \neq \hat{\gamma}$  (hipótese), êsses triângulos são desiguais.

Duas suposições podemos fazer em relação aos ângulos  $\hat{c}_1$  e  $\hat{b}_1$ :

1ª)  $\hat{c}_1 = \hat{b}_1$ ;      2ª)  $\hat{b}_1 \neq \hat{c}_1$

Se, de acôrdo com a primeira suposição,  $\hat{c}_1 = \hat{b}_1$ , verificamos que  $\hat{c}_2 \neq \hat{b}_2$ , pois, do contrário, ou seja  $\hat{c}_2 = \hat{b}_2$ , os triângulos (V)(B)(A) e (V)(C)(A) seriam semelhantes, o que é impossível, visto  $\hat{\gamma} \neq \hat{\beta}$  (hipótese).

Sendo, então,  $\hat{c}_2 \neq \hat{b}_2$  e como:  $\hat{c}_2 = \hat{a}_1$  (hipótese) e  $\hat{a}_1 = \hat{a}_2$  (construção), conclui-se que:  $\hat{a}_2 \neq \hat{b}_2$ .

Mas isso contraria o teorema nº 3: "Se houver uma aresta de um triedro para a qual os traços do plano secante não façam ângulos iguais, haverá, também outra nessas condições..." (ver pág. 88).

Logo: se  $\hat{a}_2 \neq \hat{b}_2$ , verifica-se que  $\hat{b}_1 \neq \hat{c}_1$ .

Conclusão: O teorema I só se aplica aos triedros isoedros, e no caso particular do plano secante obedecer às

seguintes condições:

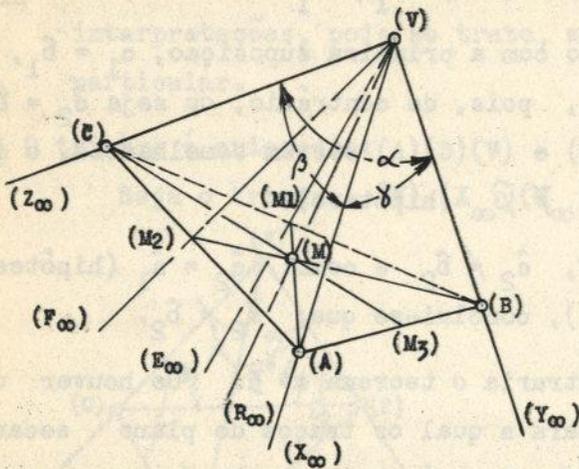
1ª - o traço na face desigual deve formar ângulos iguais com as arestas dessa face;

2ª - serem iguais os ângulos formados entre os traços do plano secante e uma das arestas da face desigual.

Teorema II - Lugar geométrico dos baricentros

"O eixo dos medianos é o lugar dos baricentros (ou centróides) de tôdas as secções triangulares, feitas num triedro, de modo que os traços de suas arestas no plano secante estejam equidistantes do vértice dêsse triedro"

Demonstração: Seja o triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ . (fig. 39).



Determinemos sôbre  $(V)(X_{\infty})$ ,  $(V)(Y_{\infty})$  e  $(V)(Z_{\infty})$ , respectivamente, os pontos (A), (B) e (C), equidistantes do vértice (V).

Tracemos sôbre as faces  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , as retas (A)(B), (B)(C) e (C)(A).

Fig. 39

Tracemos as medianas (A)(M<sub>1</sub>) e (B)(M<sub>2</sub>) do triângulo de secção (A)(B)(C). O ponto (M), de intersecção dessas medianas, será o baricentro do triângulo (A)(B)(C).

Temos:

$$\text{Hipótese } \begin{cases} \overline{(V)(A)} = \overline{(V)(B)} = \overline{(V)(C)} \\ (M) = \text{baricentro } \Delta(A)(B)(C) \\ (V)(R_{\infty}) = \text{eixo dos medianos} \end{cases}$$

Tese: (M) pertence a  $(V)(R_{\infty})$ .

A mediana  $(A)(M_1)$  do  $\Delta(A)(B)(C)$ , cortará o lado  $(B)(C)$  no ponto  $(M_1)$ , meio do lado  $(B)(C)$ , e como  $(V)(B) = (V)(C)$  (hipótese), conclui-se que  $(V)(M_1)$  é altura e bissetriz do  $\Delta(V)(B)(C)$ . Então:  $(V)(M_1) \equiv (V)(E_{\infty})$  (traço do plano mediano  $(X_{\infty})(V)(E_{\infty})$ , relativo à face  $\alpha$  nessa face).

Mas, como a mediana  $(A)(M_1)$  e o plano mediano  $(X_{\infty})(V)(E_{\infty})$  passam pelos mesmos pontos  $(A)$  e  $(M_1)$ , verifica-se que  $(A)(M_1)$  é também traço desse plano mediano no plano secante  $(A)(B)(C)$ .

Raciocínio idêntico nos permite concluir que  $(B)(M_2)$  é mediana do  $\Delta(A)(B)(C)$  do plano secante ao triedro e, também, traço do plano mediano  $(Y_{\infty})(V)(F_{\infty})$  nesse plano secante.

Então, o ponto  $(M)$ , intersecção das medianas  $(A)(M_1)$  e  $(B)(M_2)$ , ou seja, o baricentro do  $\Delta(A)(B)(C)$ , pertence também à intersecção dos planos medianos  $(X_{\infty})(V)(E_{\infty})$  e  $(Y_{\infty})(V)(F_{\infty})$ , ou seja, ao eixo dos medianos do triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ .

Em virtude de serem co-punctuais as medianas e co-axiais os planos medianos, bastará fazer o estudo relativamente a duas medianas e dois planos medianos.

Discussão: "Se o plano secante cortar as arestas do triedro em pontos não equidistantes do vértice (V), o baricentro do triângulo de secção não pertencerá mais ao eixo dos medianos".

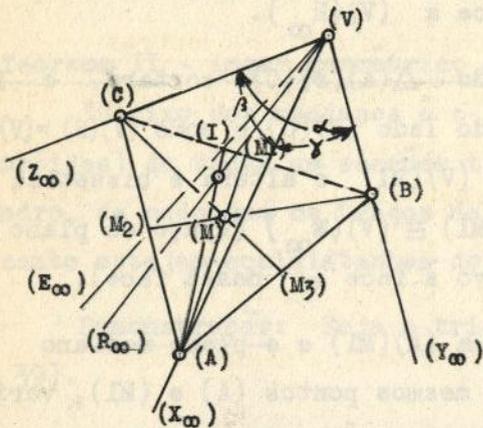


Fig. 40

Demonstração: Seja o triedro (V)-(X<sub>∞</sub>)(Y<sub>∞</sub>)(Z<sub>∞</sub>) (fig. 40).

Consideremos o plano secante (A)(B)(C), que determina nas arestas do triedro os pontos (A), (B) e (C) de tal sorte que: (V)(A) ≠ (V)(B) ≠ (V)(C).

Temos:

$$\text{Hipótese} \quad \begin{cases} (V)(A) \neq (V)(B) \neq (V)(C) \\ (M) = \text{mediana } \triangle(A)(B)(C) \\ (V)(R_{\infty}) = \text{eixo dos medianos} \end{cases}$$

Tese: (M) não pertence a (V)(R<sub>∞</sub>).

Como (V)(B) ≠ (V)(C) (hipótese), o ponto (M) não pertence mais à bissetriz (V)(E<sub>∞</sub>) do  $\widehat{(Z_{\infty})(V)(Y_{\infty})}$ . Seja (I) o ponto em que essa bissetriz corta o lado (C)(B). Relativamente ao lado (C)(B), temos, pois, duas retas distintas (A)(M), mediana do  $\triangle(A)(B)(C)$  e (A)(I), traço do plano mediador (E<sub>∞</sub>)(V)(X<sub>∞</sub>) no plano secante.

O plano mediador não contendo (A)(M) não conterá o baricentro do  $\triangle(A)(B)(C)$ , ou seja, (M), que pertence àquela mediana. Como (V)(R<sub>∞</sub>) é uma reta desse plano mediador, con-

conclui-se que  $(M)$  não pertence a  $(V)(R_{\infty})$ .

Conclusão: O teorema II se aplica a qualquer triedro, desde que o plano secante determine sôbre as arestas do triedro pontos equidistantes do vértice.

Teorema III Lugar geométrico dos ortocentros

"O eixo das alturas de um triedro é o lugar geométrico dos ortocentros de tôdas as secções triangulares, cujo plano seja: 1) perpendicular a uma das arestas, ou 2) cujos traços em duas faces do triedro sejam perpendiculares aos traços dos planos altura nessas mesmas faces".

Demonstração: Dividiremos a demonstração dêsse teorema em duas partes. Na primeira parte trataremos da hipótese nº 1. Demonstrada a tese, de acôrdo com essa hipótese, faremos a sua discussão, para, dessa discussão, concluirmos a hipótese nº 2, que, será, em seguida, confirmada pela demonstração da tese.

Hipótese nº 1:

"O plano secante é perpendicular a uma das arestas".

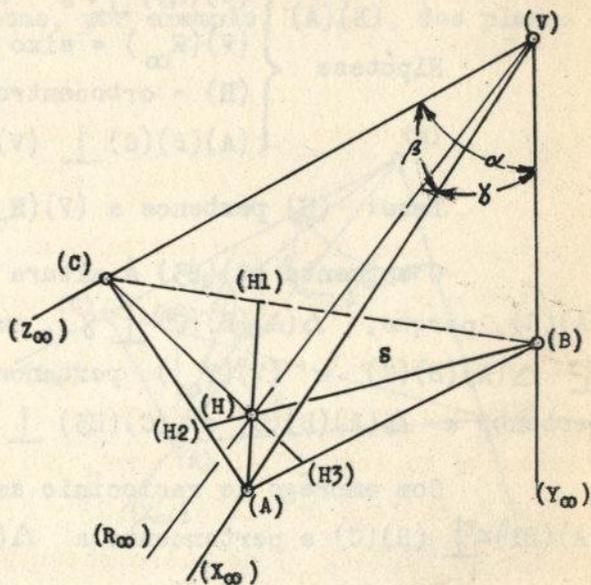


Fig. 41

Faremos a demonstração considerando, somente, duas faces do triedro e os lados do triângulo de secção nelas situados, pois, sendo co-axiais os planos altura de um triedro, dois são suficientes para determinar o eixo das alturas e sendo co-punctuais as alturas de um triângulo, duas alturas bastam para determinar o ortocentro do triângulo de secção.

Seja o triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$  (fig. 41), cortado por um plano  $\mathcal{E}$ , perpendicular a uma das arestas,  $(V)(Y_{\infty})$ , determinando a secção triangular  $(A)(B)(C)$ .

Seja  $(C)(H_3) \perp \mathcal{Y}$  e  $(A)(H_1) \perp \mathcal{X}$ , determinando os planos altura  $(V)(C)(H_3)$  e  $(V)(A)(H_1)$ .

Temos:

$$\text{Hipótese} \begin{cases} (C)(H_3) \perp \mathcal{Y} & \text{e} & (A)(H_1) \perp \mathcal{X} \\ (V)(R_{\infty}) = \text{eixo das alturas} \\ (H) = \text{ortocentro } \Delta(A)(B)(C) \\ (A)(B)(C) \perp (V)(Y_{\infty}) \end{cases}$$

Tese:  $(H)$  pertence a  $(V)(R_{\infty})$

O segmento  $(C)(H_3)$  é altura  $\Delta(A)(B)(C)$  relativa a  $(A)(B)$ , porque,  $\Delta(A)(B)(C) \perp \mathcal{Y}$ , em virtude de  $(V)(Y_{\infty}) \perp \perp \Delta(A)(B)(C)$  e  $(V)(Y_{\infty})$  pertencer a  $\mathcal{Y}$ . Então,  $(C)(H_3)$  pertence a  $\Delta(A)(B)(C)$  e  $(C)(H_3) \perp (A)(B)$ .

Com emprêgo de raciocínio semelhante, concluímos ser  $(A)(H_1) \perp (B)(C)$  e pertencente a  $\Delta(A)(B)(C)$ .

Mas como  $(C)(H_3)$  e  $(A)(H_1)$  pertencem aos planos altura  $(V)(C)(H_3)$  e  $(V)(A)(H_1)$ , conclui-se que  $(C)(H_3)$  e  $(A)(H_1)$  são, simultaneamente, alturas  $\Delta(A)(B)(C)$  e traços dos pla-

nos altura,  $(V)(C)(H_3)$  e  $(V)(A)(H_1)$  no  $\Delta(A)(B)(C)$ .

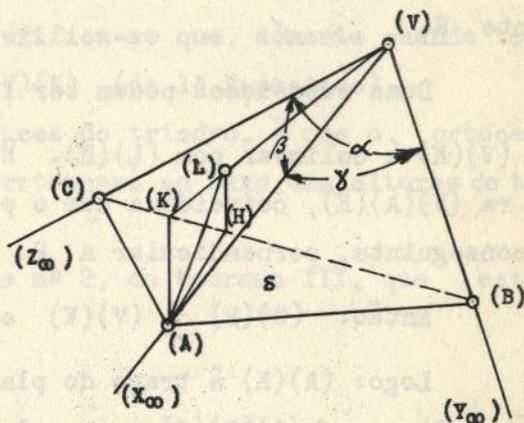
Logo, o ponto de intersecção das alturas, ou seja  $(H)$ , ortocentro do  $\Delta(A)(B)(C)$ , pertence, também, aos dois planos altura, portanto, só poderá estar na intersecção entre ambos, ou seja, sôbre o eixo das alturas  $(V)(R_{\infty})$ .

Então:  $(H)$  pertence a  $(V)(R_{\infty})$ .

Discussão: Verifiquemos se secções triangulares, não perpendiculares a uma aresta, terão seus ortocentros sôbre o eixo das alturas de um triedro.

Seja o triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , seccionado por um plano  $S$ , oblíquo a tôdas as arestas do triedro, determinando nesse triedro a secção  $(A)(B)(C)$ , (fig. 42).

Se os traços, como, por exemplo,  $(A)(K)$ , dos planos altura do triedro, no plano  $S$ , coincidirem com as alturas, como  $(A)(H)$ , do  $\Delta(A)(B)(C)$  de secção, então, os ortocentros de qualquer triângulo de secção pertencerão ao eixo das alturas do triedro.



Verifiquemos se isso é possível.

Fig. 42

Tracemos, do vértice  $(A)$ , a altura  $(A)(H)$  do triângulo de secção  $(A)(B)(C)$ , relativa ao lado  $(C)(B)$ .

Seja (H) o pé dessa altura no lado (A)(H).

Ainda, do vértice (A), baixemos uma perpendicular.. (A)(L), à face  $\alpha$ , determinando o ponto (L) em  $\alpha$ .

Pelo "teorema das três perpendiculares" (da Geometria do Espaço), conclui-se que:

1º) (L)(H)  $\perp$  (C)(B) e que o plano (A)(H)(L)  $\perp$   $\alpha$ ; logo: plano (A)(H)(L)  $\perp$  (C)(B);

2º) plano (A)(L)(H)  $\perp$   $\mathcal{S}$  (porque (C)(B) é traço de  $\mathcal{S}$ ) na face  $\alpha$ .

O traço do plano (A)(H)(L) em  $\mathcal{S}$  será (A)(H).

Consideremos, agora, o plano altura (A)(L)(V), relativo à face  $\alpha$ . Esse plano conterá (A)(L); seu traço em  $\alpha$ , será (V)(L), que intercepta (C)(B) no ponto (K). Então, (A)(K) será o traço do plano altura (V)(A)(K)  $\equiv$  (A)(L)(V) no plano secante  $\mathcal{S}$ .

Duas suposições podem ser feitas:

1ª - (V)(K) é colinear com (L)(H). Neste caso, o plano altura (V)(A)(K), coincidirá com o plano (A)(H)(L), sendo, por conseguinte, perpendicular a  $\mathcal{S}$ .

Então: (C)(B)  $\perp$  (V)(K) e (A)(K)  $\equiv$  (A)(H)  $\perp$  (C)(B).

Logo: (A)(K) é traço do plano altura no plano  $\mathcal{S}$  e, também, altura  $\Delta(A)(B)(C)$  para o lado (C)(B).

Se essa hipótese puder ser aplicada a mais outro plano altura, também se aplicará ao terceiro, e pode-se afirmar que:

"O ortocentro da secção triangular pertencerá ao eixo das alturas do triedro".

2ª - (V)(K) é distinto de (L)(H). Nêste caso, o plano altura (V)(A)(K) não coincidirá mais com o plano (A)(H)(L), tendo em comum com êsse plano, apenas a reta (A)(L).

Como (L)(H)  $\perp$  (C)(B), conclui-se que (V)(K)  $\perp$  (C)(B) e que (A)(K) é distinto de (A)(H); portanto .... (A)(K)  $\perp$  (C)(B).

Logo, o traço do plano altura no plano secante  $\delta$  não passará mais pelo ortocentro do triângulo de secção.

Basta que essa hipótese se verifique, em relação a um dos planos altura, para podermos afirmar que:

"O ortocentro da secção triangular não pertencerá mais ao eixo das alturas".

Assim, pois, verifica-se que, somente quando temos:

(C)(B)  $\perp$  (V)(K) (da 1ª suposição)

isso em relação a duas faces do triedro, é que o ortocentro do triângulo de secção pertencerá ao eixo das alturas do triedro.

Daí, a hipótese nº 2, do teorema III, que estamos demonstrando:

Hipótese nº 2:

"os traços do plano secante em duas faces do triedro são perpendiculares aos traços dos planos altura nas mesmas faces".

Seja o triedro (V)-(X<sub>∞</sub>)(Y<sub>∞</sub>)(Z<sub>∞</sub>) no qual temos

$(V)Y_{\infty}$  e  $(V)Z_{\infty}$  como projeções ortogonais de  $(V)(Y_{\infty})$  e  $(V)(Z_{\infty})$ , respectivamente, nas faces  $\beta$  e  $\gamma$  (fig. 43).

Por um ponto (A) de  $(V)(X_{\infty})$  tracemos  $(A)(C) \perp (V)Y_{\infty}$  e  $(A)(B) \perp (V)Z_{\infty}$ .

O traço  $(A)(C)$  determina (D), em  $(V)Y_{\infty}$ , e (C), em  $(V)(Z_{\infty})$ . O traço  $(A)(B)$  determina (E), em  $(V)Z_{\infty}$  e (B), em  $(V)(Y_{\infty})$ .

Temos:

Hipótese  $\left\{ \begin{array}{l} (V)Y_{\infty} \text{ e } (V)Z_{\infty} \text{ projeções ortogonais das arestas} \\ (V)(Y_{\infty}) \text{ e } (V)(Z_{\infty}) \\ (A)(C) \perp (V)Y_{\infty} \text{ e } (A)(B) \perp (V)Z_{\infty} \end{array} \right.$

Tese: (O), ortocentro  $\Delta(A)(B)(C)$  pertence a  $(V)(R_{\infty})$ , eixo das alturas do triedro.

O segmento  $(B)(D)$  é altura  $\Delta(A)(B)(C)$  relativa ao lado  $(A)(C)$ , por que  $(A)(C) \perp$  plano altura  $(D)(V)(B)$ , relativo face  $\beta$ , visto ser  $(A)(C) \perp (V)Y_{\infty}$  (hipótese) e pertencer à face  $\beta$ , que é  $\perp$  plano altura  $(D)(V)(B)$  (teorema da Geometria do Espaço: "Se dois planos são

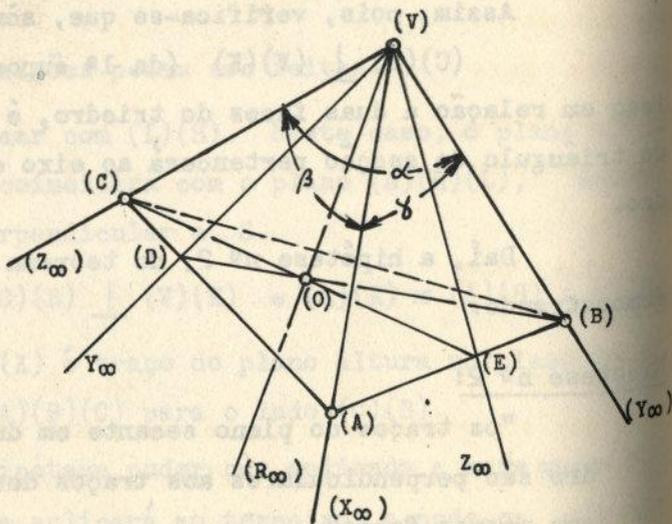


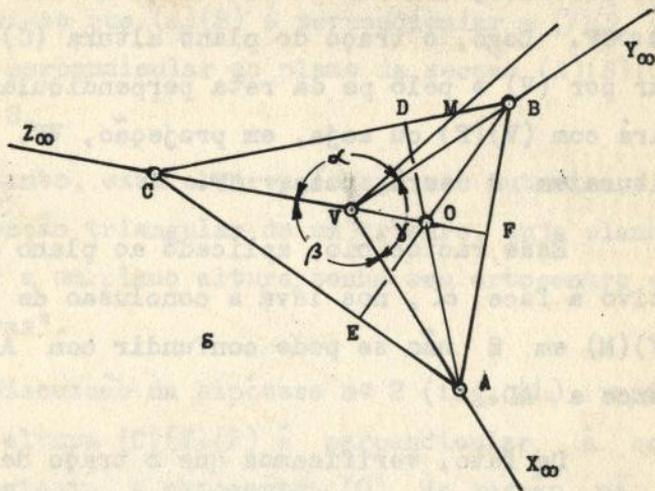
Fig. 43

perpendiculares entre si, qualquer reta de um dêles, perpendicular à intersecção entre ambos, é perpendicular ao outro").

O mesmo raciocínio nos permite concluir que  $(C)(E)$  é a altura do  $\Delta(A)(B)(C)$  relativa ao lado  $(A)(B)$ .

Mas,  $(B)(D)$  e  $(C)(E)$  são traços dos planos altura, relativos às faces  $\beta$  e  $\gamma$ , no plano secante, logo: "a intersecção das alturas do  $\Delta(A)(B)(C)$ , ou seja, o ponto  $(O)$ , ortocentro do  $\Delta(A)(B)(C)$ , pertence ao eixo  $(V)(R_{\infty})$  das alturas do triedro".

Discussão: "Se, somente um dos traços do plano secante  $S$  fôr perpendicular ao traço de um plano altura no plano de uma das faces, o ortocentro do triângulo de secção não pertencerá mais ao eixo das alturas do triedro".



Seja o tri

dro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$

Fig. 44

dado por sua projeção ortogonal no plano secante  $S$  (fig. 44).

Seja  $(A)(B)(C)$  o triângulo de secção do triedro pelo plano  $S$ .

Seja  $O$  o ortocentro, determinado pelas alturas  $AD$ ,

BE e CF do triângulo de secção.

Tomemos sôbre uma das alturas, CF, por exemplo, um ponto V, considerado como projeção de (V) sôbre  $\xi$ .

$VX_{\infty}$ ,  $VY_{\infty}$  e  $VZ_{\infty}$  serão as projeções das arestas sôbre  $\xi$ .

O traço do plano altura (C)(V)(F) na face  $\gamma$  confunde-se com a altura CF no triângulo ABC, porque, sendo aquêle plano perpendicular a  $\gamma$ , conterà uma reta perpendicular a  $\gamma$ , baixada de um ponto qualquer da aresta (V)( $Z_{\infty}$ ). Essa perpendicular se projetará em  $\xi$ , perpendicularmente ao traço AB (teorema da reta perpendicular ao plano), confundindo-se, portanto, com CF e seu traço na face  $\gamma$  se projetará em CF. Logo, o traço do plano altura (C)(V)(F), tendo que passar por (V) e pelo pé da reta perpendicular a  $\gamma$ , se confundirá com (V)(F) ou seja, em projeção, VF. O traço do plano altura em  $\xi$  será, pois, CF.

Esse raciocínio, aplicado ao plano altura (A)(V)(M), relativo à face  $\alpha$ , nos leva à conclusão de que o traço de (A)(V)(M) em  $\xi$  não se pode confundir com AD, porque V não pertence a AD.

De fato, verificamos que o traço de (A)(V)(M) em  $\alpha$  passará por (V) e pelo pé da perpendicular baixada de um ponto como (A), de (V)( $X_{\infty}$ ) à face  $\alpha$ . Sabemos que o pé dessa perpendicular só pode se projetar em  $\xi$ , sôbre a reta AD. Então a projeção do traço de (A)(V)(M) em  $\alpha$ , será a reta oblíqua a BC, passando por V e por um ponto de AD e encontrará BC num ponto M. O traço de (A)(V)(M) em  $\xi$  terá, pois, que

passar por  $A$  e por  $M$ . Será, então, a reta  $AM$ , distinta de  $AD$ . Logo:  $O$ , ortocentro  $\triangle ABC$ , não pertence ao eixo altura.

Observação: O plano secante  $S$  tanto na hipótese nº 1, como na nº 2, é sempre perpendicular a, pelo menos, um plano altura.

De fato, na hipótese nº 1, êle é perpendicular ao plano altura  $(B)(V)(H_2)$ , visto o plano  $(B)(V)(H_2)$  conter  $(V)(Y_\infty) \perp S$  (fig. 41). Na hipótese nº 2 (fig. 43), o plano secante  $S$  é perpendicular aos três planos altura, pois é perpendicular ao eixo das alturas. De fato, o lado  $(A)(C)$  da secção  $(A)(B)(C)$ , é perpendicular ao plano altura  $(B)(V)(D)$ , logo é perpendicular ao eixo das alturas  $(V)(R_\infty)$ ; pela mesma razão, conclui-se que  $(A)(B)$  é perpendicular a  $(V)(R_\infty)$ . Então,  $(V)(R_\infty)$  é perpendicular ao plano da secção  $(A)(B)(C)$  ou seja, ao plano  $S$ .

Entretanto, essa observação não nos autoriza a afirmar que "tôda secção triangular de um triedro, cujo plano seja perpendicular a um plano altura, tenha seu ortocentro sôbre o eixo das alturas".

Pela discussão da hipótese nº 2 (fig. 44), verificamos que o plano altura  $(C)(V)(F)$  é perpendicular à secção  $(A)(B)(C)$  e, no entanto, o ortocentro  $(O)$ , da secção, não pertence ao eixo das alturas.

#### Teorema IV - Lugar geométrico dos circuncentros

"O eixo mediador de um triedro é o lugar geométrico dos circuncentros das secções triangulares feitas de mo-

do que os traços das arestas no plano secante estejam equidistantes do vértice".

Demonstração: Faremos a demonstração considerando, sômente, duas faces do triedro e os lados do triângulo de secção nelas situados, pois, sendo co-axiais os planos mediadores, dois são suficientes para determinar o eixo mediador e, sendo co-punctuais as mediatrizes do triângulo de secção, duas bastam para determinar o circuncentro dessa secção.

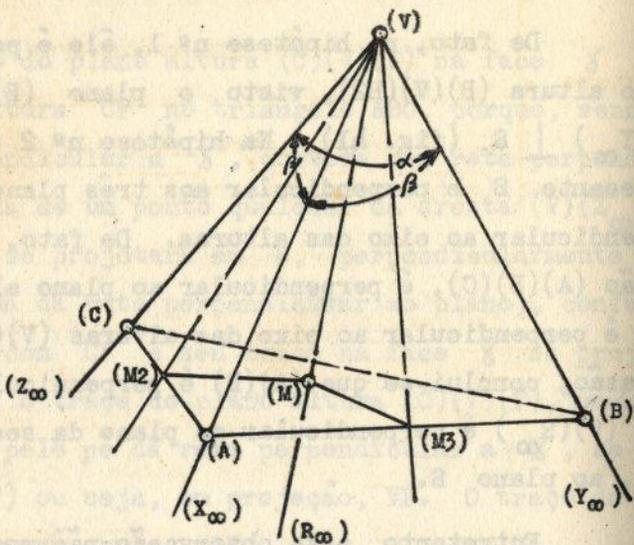


Fig. 45

Seja o triedro (V)-(X<sub>∞</sub>)(Y<sub>∞</sub>)(Z<sub>∞</sub>) (fig. 45). Sejam (M3)(V)(R<sub>∞</sub>) e (M2)(V)(R<sub>∞</sub>) dois de seus planos mediadores, que se cortam ao longo de (V)(R<sub>∞</sub>), eixo mediador do triedro. Sejam, ainda, (M3)(M) e (M2)(M) as mediatrizes do ...  $\Delta(A)(B)(C)$ , relativas aos lados (A)(B) e (A)(C), que se cortam em (M), circuncentro do  $\Delta(A)(B)(C)$ .

Pretendemos demonstrar que (M3)(M) é traço do plano mediador (M3)(V)(R<sub>∞</sub>) no plano (A)(B)(C).

O mesmo pretendemos fazer em relação a  $(M2)(M)$ , ou seja, que é traço do plano mediador  $(M2)(V)(R_{\infty})$  no plano  $(A)(B)(C)$  e, conseqüentemente, que  $(M)$  pertence a  $(V)(R_{\infty})$ .

Então, temos:

Hipótese  $\left\{ \begin{array}{l} (M3)(V)(R_{\infty}) \text{ e } (M2)(V)(R_{\infty}) = \text{planos mediadores das faces} \\ (V)(R_{\infty}) = \text{eixo dos mediadores} \\ (M2)(M) \text{ e } (M3)(M) = \text{mediatrizes de } \overline{(A)(C)} \text{ e } \overline{(A)(B)} \\ (M) = \text{circuncentro } \Delta(A)(B)(C) \\ \overline{(V)(A)} = \overline{(V)(B)} = \overline{(V)(C)} \end{array} \right.$

Tese:  $(M)$  pertence a  $(V)(R_{\infty})$ .

O triângulo  $(A)(V)(B)$  é isósceles, visto ser  $\dots$   
 $\overline{(V)(A)} = \overline{(V)(B)}$  (hipótese); e  $(V)(M3)$ , sendo bissetriz do ângulo oposto à base  $(A)(B)$ , é, também, altura desse triângulo e, portanto,  $(V)(M3) \perp (A)(B)$  e, ainda  $\overline{(M3)(A)} = \overline{(M3)(B)}$ .

Logo, pelo ponto  $(M3)$  deverá passar a mediatriz  $\dots$   
 $(M3)(M)$ , do lado  $(A)(B)$ , do  $\Delta(A)(B)(C)$  que, por ser mediatriz, também é perpendicular a  $(A)(B)$ .

Então, a mediatriz do lado  $(A)(B)$ , ou seja  $(M3)(M)$  é a bissetriz da face relativa a êsse lado, ou seja,  $(V)(M3)$ , são perpendiculares a  $(A)(B)$ ; logo, definem um plano perpendicular a  $(A)(B)$ , que passa pela bissetriz e pela mediatriz. Mas, em virtude da hipótese,  $(V)(M3)$  pertence ao plano mediador da face  $\gamma$  e, como plano mediador, também é perpendicular a  $\gamma$ . Então, são um e único, plano mediador, e plano definido pela mediatriz e bissetriz.

Se pelo ponto  $(M3)$  passa a mediatriz  $\Delta(A)(B)(C)$ ,

que pertence ao plano mediador  $(M3)(V)(R_{\infty})$ , então ela é, também, traço do plano mediador no plano do  $\Delta(A)(B)(C)$ .

Por um raciocínio idêntico, concluímos que  $(M2)(M)$  pertence ao plano mediador  $(M2)(V)(R_{\infty})$  e é traço desse plano no  $\Delta(A)(B)(C)$ .

Então, o ponto  $(M)$ , de intersecção entre  $(M3)(M)$  e  $(M2)(M)$ , ou circuncentro do  $\Delta(A)(B)(C)$ , é, também, ponto comum aos planos mediadores  $(M3)(V)(R_{\infty})$  e  $(M2)(V)(R_{\infty})$ , logo, pertence a  $(V)(R_{\infty})$ , eixo dos mediadores.

### Consequências:

Do estudo que acabamos de fazer, podemos verificar que: (fig. 45)

1ª) O eixo mediador é reta isóclina (ver pág. 25) do triedro, sendo o plano secante isóclino.

De fato, temos:

$$\Delta(V)(A)(M) = \Delta(V)(B)(M) = \Delta(V)(C)(M),$$

por terem os três lados iguais. Então:

$$\sphericalangle(A)(V)(M) = \sphericalangle(B)(V)(M) = \sphericalangle(C)(V)(M)$$

e

$$\sphericalangle(V)(A)(M) = \sphericalangle(V)(B)(M) = \sphericalangle(V)(C)(M)$$

2ª) O plano do  $\Delta(A)(B)(C)$  é perpendicular ao eixo mediador  $(V)(R_{\infty})$ , porque  $(V)(M)$  é lado comum aos triângulos iguais  $(V)(A)(M)$ ,  $(V)(B)(M)$  e  $(V)(C)(M)$ , sendo:

$$(V)(A) = (V)(B) = (V)(C) \quad \text{e} \quad (M)(A) = (M)(B) = (M)(C)$$

Então, pelo teorema "O lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de três pontos não em linha reta, é

uma reta, perpendicular ao plano dos três pontos, que passa pelo centro do círculo que os mesmos determinam". (Ver Ary Quintella: "Matemática - 1ª Colegial", pág. 21, nº 4, Companhia Editora Nacional, S. Paulo, 1955), verifica-se que: "o eixo mediador  $(V)(R_{\infty})$  é perpendicular ao plano  $(A)(B)(C)$ ".

3ª) O círculo que circunscreve  $\Delta(A)(B)(C)$  de secção é base do cone de revolução que tem para eixo o eixo mediador do triedro.

Basta, para isso, que admitamos que os triângulos ...  $(V)(B)(M)$  e  $(V)(C)(M)$  são posições que toma o triângulo ....  $(V)(A)(M)$  quando êle gira em tórno da reta  $(V)(M)$  (eixo mediador).

Discussão: "Se a distância entre o vértice do triedro e um dos traços de uma das arestas no plano secante for desigual em relação às distâncias dos outros dois traços ao vértice, o circuncentro do triângulo de secção não pertencerá mais ao eixo mediador".

Demonstração: Seja o triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , dado por suas projeções ortogonais  $V'-X'_{\infty}Y'_{\infty}Z'_{\infty}$  e  $V-X_{\infty}Y_{\infty}Z_{\infty}$  (fig. 46).

Consideremos uma das faces  $(X_{\infty})(V)(Z_{\infty}) \equiv \beta$ , de tópo, e o plano secante  $(A)(B)(C)$ , horizontal. Sejam  $(A)$ ,  $(B)$ ,  $(C)$  os traços das arestas  $(V)(X_{\infty})$ ,  $(V)(Y_{\infty})$  e  $(V)(Z_{\infty})$  no plano secante, sendo que  $(V)(A) \neq (V)(B) = (V)(C)$ .

Seja  $(O)$  o circuncentro do triângulo de secção, dado em  $O$  (proj. horizontal), pela intersecção das mediatrizes

FO e EO de AC e BC e em O', projeção vertical de (O).

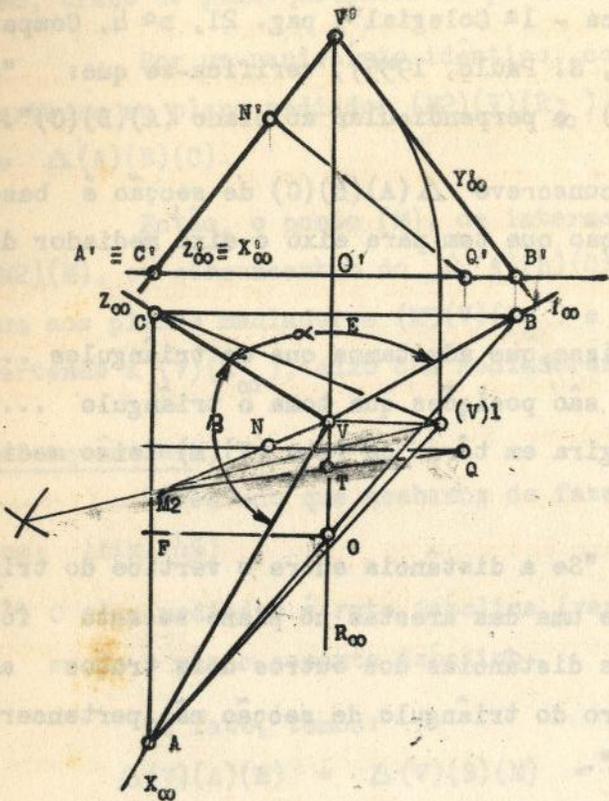


Fig. 46

Vamos demonstrar que (O) não pode pertencer a  $(V)(R_{\infty})$ , eixo mediador do triedro. Para que (O) pertença a  $(V)(R_{\infty})$ , é necessário que o traço de  $(V)(R_{\infty})$  em  $(A)(B)(C)$ , ou seja (T), coincida com (O). Mas, para que isto aconteça, é preciso que os traços dos planos mediadores no plano  $(A)(B)(C)$  se confundam com as mediatrizes.

$\Delta (A)(B)(C)$ .

Vejamos se isto é possível:

Tracemos a bissetriz VM2 da face  $\beta$ , rebatendo essa face em torno de  $(A)(C)$ . Seja  $\Delta(V)1C$  o resultado desta operação de rebatimento. A bissetriz  $(V)1M2$  de  $\Delta(V)1C$  determinará M2 em AC. Então, VM2 será a projeção horizontal dessa bissetriz. O plano mediador da face  $(X_{\infty})(V)(Z_{\infty})$  ficará determinado por essa bissetriz e pela perpendicular  $(N)(Q)$ , levantada em relação a essa face, por um ponto qualquer (N) de

(V)(M2). A perpendicular (N)(Q) terá sua projeção horizontal em NQ, perpendicular a AC, e sua projeção vertical em N'Q', perpendicular a V'N'. O traço de (N)(Q) no plano (A)(B)(C) pertencerá a NQ, e corresponderá ao ponto Q, compreendido entre as perpendiculares a AC, traçadas por M2 e por V, ou seja, projetando-se sempre sobre o menor segmento em que ficou dividido AC pela bissetriz (projeção ortogonal).

Então, M2Q será o traço do plano mediador da face  $\beta$  no plano (A)(B)(C). Esse traço será oblíquo a AC e penderá sempre para o lado do menor segmento determinado sobre AC. Portanto, não poderá conter FO  $\perp$  AC.

Em relação à face  $(Y_{\infty})(V)(Z_{\infty}) \equiv \alpha$ , verifica-se que o traço de seu plano mediador no plano (A)(B)(C) se confundirá com a mediatriz EO de BC (porque  $(V)(B) = (V)(C)$ ) e, portanto, deverá conter o circuncentro (O), em projeção horizontal O, do  $\Delta(A)(B)(C)$ .

Mas, o traço T, do eixo mediador  $(V)(R_{\infty})$ , estará, somente, na intersecção dos traços M2Q e ET, dos planos mediadores  $(V)(M2)(T)$  e  $(V)(E)(T)$  e, como já verificamos que QM2 não se confunde com OR, o eixo  $(V)(R_{\infty}) \equiv (V)(T)$ , não passará por (O).

O fato de QM2 não conter FO, não exclui a possibilidade de interceptar FO em O. Considere-se, porém, que QM2  $\perp$  AC, pende sempre para o lado do menor segmento (isso aplicado em relação a duas faces), tornando impossível essa possibilidade, porque (T) passa a ficar desigualmente afastado de (A), (B) e (C), enquanto (O) está, por hipótese, equidistante de (A), (B) e (C).

QUADRO SINÓTICO DAS SECÇÕES TRIANGULARES CUJOS CENTROS PERTENCEM AOS EIXOS DE UM TRIEDRO		
Lugar geométrico dos centros das secções triangulares	Denominação do centro da secção triangular	Condições a que deve satis- fazer o plano secante
(I) Eixo dos bissetores	Incentro	Traço do plano secante nas faces do triedro formam ângulos iguais com duas arestas
(II) Eixo dos medianos	Baricentro	Traço das arestas no plano secante, e- quidistantes do vértice do triedro.
(III) Eixo das alturas	Ortocentro	1) Plano secante perpendicular a uma das arestas do triedro. 2) Traços do plano secante em duas fa- ces do triedro, perpendiculares tra- ços planos altura nas mesmas faces.
(IV) Eixo mediador	Circuncentro	Traços das arestas no plano secante e- stao equidistantes do vértice do trie- dro.

## VI - CONCLUSÕES FINAIS

1ª) Comparando as condições relativas aos eixos II e IV, verificamos serem as mesmas, de modo que podemos enunciar o seguinte teorema:

"Seccionando um triedro por planos de modo que as secções sejam triangulos, cujos vértices estejam equidistantes do vértice do triédro:

- a) o lugar geométrico dos baricentros das secções é o eixo dos medianos dos triedros;
- b) o lugar geométrico dos circuncentros das secções é o eixo mediador do triedro."

2ª) Observamos, ainda, que se o triedro fôr equiedro, é possível, num só triângulo de secção, obter os quatro centros do triângulo sôbre os quatro eixos do triedro.

As condições estabelecidas para os eixos I e III (êsse último, item 2). não excluem as determinadas para os eixos II e IV, quando se trata do triedro equiedro. Neste triedro, um plano secante que o seccione de modo que os vértices do triângulo de secção estejam equidistantes do vértice do triédro, satisfará as condições relativas aos quatro eixos.

De fato:

Para as condições estabelecidas no teorema I:- os traços do plano secante formarão ângulos iguais com as arestas (condição relativa ao eixo dos bissetores).

Para as condições estabelecidas nos teoremas II e IV:- já estão incluídas na própria suposição dos vértices do triângulo de secção estarem equidistantes do vértice do triedro.

Para as condições estabelecidas no teorema III:- os traços do plano secante nas faces do triedro serão perpendiculares aos traços dos planos altura nas mesmas faces.

Assim, pois, podemos concluir o seguinte teorema:

"Seccionando um triedro, equiedro ou equiângulo, por um plano, de modo que as secções sejam triângulos, cujos vértices estejam equidistantes do vértice do triedro:

- I) o lugar geométrico dos incentros das secções é o eixo dos bissetores;
- II) O lugar geométrico dos baricentros das secções é o eixo dos medianos;
- III) o lugar geométrico dos ortocentros das secções é o eixo das alturas;
- IV) o lugar geométrico dos circuncentros das secções é o eixo mediador".

Sabemos que a figura de secção de um triedro, atendendo a essas condições, é um triângulo equilátero e que, nesse triângulo, seus centros são superpostos, bem como colineares os eixos do triedro (por ser equiedro).

#### A P L I C A Ç Õ E S

Os teoremas que acabamos de estudar permitem a resol

lução de problemas, como:

1º Problema:

"Dado um triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , determinar o eixo do cone de revolução circunscrito ao triedro".

Resolução: O problema consiste em determinar o eixo mediador do triedro (págs. 22 e 23, 105 a 112).

Para isso, vamos aplicar o teorema IV (págs. 105 a 112), fazendo uma secção no triedro de modo que os traços das arestas no plano secante fiquem equidistantes do vértice do triedro. Pelo circuncentro do triângulo de secção deverá passar o eixo mediador do triedro, ou seja, o eixo do cone de revolução circunscrito ao triedro.

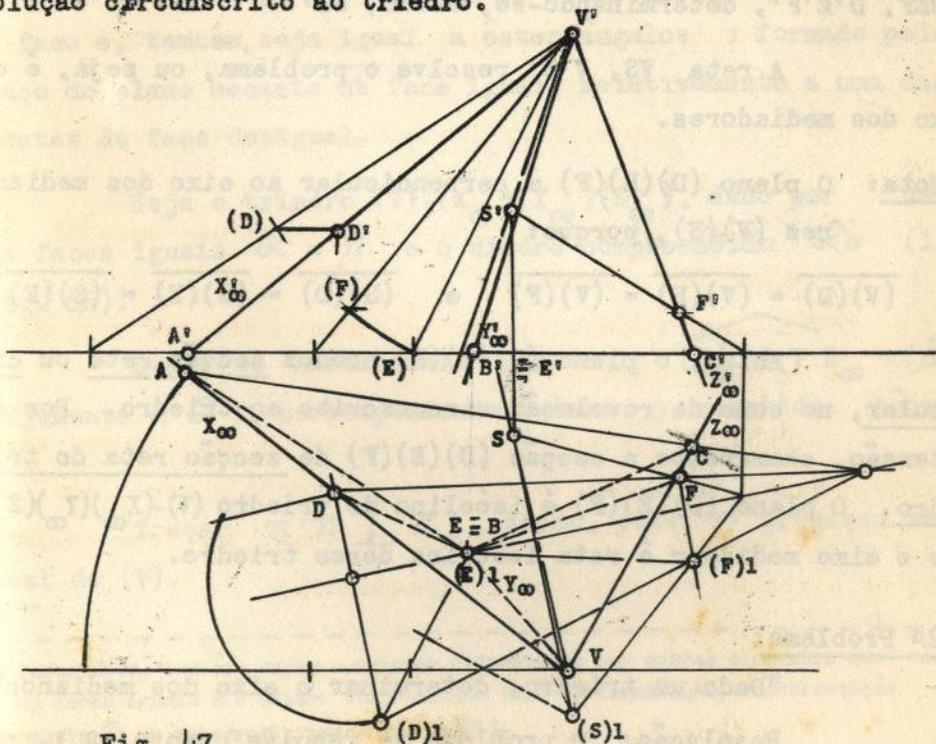


Fig. 47

Seja o triedro  $(V)(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , dado por suas projeções  $V'X'_{\infty} Y'_{\infty} Z'_{\infty}$  e  $VX_{\infty} Y_{\infty} Z_{\infty}$  (fig. 47).

Determinar uma secção auxiliar, por um plano horizontal, Como resultado dessa operação temos a secção auxiliar  $ABC, A'B'C'$ . Por meio de um dos métodos relativos à determinação da verdadeira grandeza, construir sobre os segmentos  $(V)(A), (V)(B)$  e  $(V)(C)$ , grandezas  $\overline{(V)(D)} = \overline{(V)(E)} = \overline{(V)(F)}$ . Temos, assim, a secção  $(D)(E)(F)$  que satisfaz as condições do teorema IV. Rebatendo a secção sobre o plano horizontal ..  $(A)(B)(C)$ , teremos em verdadeira grandeza o triângulo .....  $(D)l(E)l(F)l$ . Determinado o circuncentro de  $(D)l(E)l(F)l$ , ou seja, o ponto  $(S)l$ , alça-se a secção à posição primitiva, em  $DEF, D'E'F'$ , determinando-se, assim,  $SS'$ .

A reta  $VS, V'S'$  resolve o problema, ou seja, é eixo dos mediadores.

Nota: O plano  $(D)(E)(F)$  é perpendicular ao eixo dos mediadores  $(V)(S)$ , porque:

$$\overline{(V)(D)} = \overline{(V)(E)} = \overline{(V)(F)} \quad \text{e} \quad \overline{(S)(D)} = \overline{(S)(E)} = \overline{(S)(F)}$$

Então, o plano  $(D)(E)(F)$  produz secção reta ou circular, no cone de revolução circunscrito ao triedro. Por extensão, chamaremos a secção  $(D)(E)(F)$  de secção reta do triedro. O plano  $(D)(E)(F)$  é isóclino do triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$  e o eixo mediador é reta isóclina desse triedro.

## 2º Problema:

"Dado um triedro, determinar o eixo dos medianos".

Resolução: O problema se resolve como o nº 1, por-

que, o teorema II (págs. 94 a 97), que se aplica à resolução deste problema, estabelece, também, que o plano secante corte as arestas do triedro em pontos equidistantes do vértice deste triedro. Logo, pelo baricentro do triângulo de secção (D)(E)(F) passará o eixo dos medianos (fig. 47).

### 3º Problema:

"Dado um triedro isoedro,  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , determinar uma secção triangular, de modo que seu incentro pertença ao eixo dos bissetores do triedro".

Resolução: Vamos aplicar o teorema I (págs. 86 a 94), fazendo uma secção de tal sorte que o traço do plano secante, na face desigual, forme ângulos iguais com as arestas dessa face e, também, seja igual a estes ângulos o formado pelo traço do plano secante na face igual, relativamente a uma das arestas da face desigual.

Seja o triedro  $(V)-(X_{\infty})(Y_{\infty})(Z_{\infty})$ , dado por uma das faces iguais  $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$  e o diedro compreendido  $\hat{\alpha}\beta$  (1) (fig. 48).

Supor  $\alpha$  horizontal. Construir  $(X_{\infty})l \vee Z_{\infty} = (\hat{\beta})l$  (adjacente a  $\hat{\alpha}$ ), correspondendo à face  $\beta$  rebatida sobre  $\alpha$ .

Traçar  $\pi' \pi \perp VZ_{\infty}$ , sendo, pois,  $V'$  projeção vertical de (V).

---

(1) Poderíamos, também, supor o triedro determinado por outros elementos que não as faces iguais e o diedro compreendido (Ver "Determinação, representação e resolução de triedros", págs. 44 a 67).



Construir  $\widehat{A'V'B} = \widehat{\alpha/\beta}$ . Note-se que (A) e (B) são os traços das arestas (V)( $X_{\infty}$ ) e (V)( $Y_{\infty}$ ), em  $\mathcal{P}'$  e, portanto,  $A'V'$  pertence a  $\beta\mathcal{P}'$ , traço de  $\beta$  em  $\mathcal{P}'$ . O ponto  $A'$  é determinado fazendo  $V'A' = V'(A)1$ .

A reta  $BA'$  é o traço  $\gamma\mathcal{P}'$  de  $\gamma$  em  $\mathcal{P}'$ . Rebatendo  $\gamma$  sobre  $\alpha$ , teremos em (A)2V a aresta (V)( $X_{\infty}$ ) no seu segundo rebatimento, sendo  $V(A)2 = VB$ .

Traçando BC, de modo que  $\widehat{VBC} = \widehat{VB(A)2}$ , determina-se C, na intersecção de BC com  $VZ_{\infty}$ .

As retas (A)2B e BC são os traços, nas faces  $\gamma$  e  $\alpha$ , do plano que produz a secção procurada. Em projeção horizontal (na face  $\alpha$ ), essa secção será  $\triangle ABC$ . Rebatendo  $\hat{e}s$  se triângulo em B(A)2(C)1, poderemos determinar o incentro (I),  $\hat{e}s$ se triângulo, que na projeção ABC estará em I. Pelo ponto (I), passará (V)(I), eixo dos bissetores do triedro.

\* \* \*

\*

B I B L I O G R A F I A

- 1) ALVARO JOSÉ RODRIGUES - Geometria Descritiva - 1ª vol., 3ª ed., pg. 167 e segts. - Agir Editora - 1950 - Rio.
- 2) ARY QUINTELLA - Matemática - 1º ano Colegial - Pág. 21, nº 4, Companhia Editora Nacional, S. Paulo - 1955.
- 3) A. JAVARY - Traité de Géométrie Descriptive - 1<sup>ère</sup> p.; 9<sup>ª</sup> ed., pag. 192 a 203; Librairie Ch. Delagrave - Paris.
- 4) A. TAIBO FERNANDEZ - Geometria Descritiva - 2ª ed., pg. 277 a 284; El Ateneo, Buenos Aires - 1947.
- 5) C. F. A. LEROY - Traité de Géométrie Descriptive - 3<sup>ème</sup> ed., 1<sup>ère</sup> t., pg. 65 a 83; 1888; Gauthier-Villars et Fils - Paris.
- 6) C. ROUBAUDI - Traité de Géométrie Descriptive - 3<sup>ème</sup> ed., pgs. 300 a 307; 1926; Masson et Cie. - Paris.
- 7) ERNEST SONGAYLO - Traité de Géométrie Descriptive - 1<sup>ère</sup> p., pg. 81 a 84; Bibliothèque de Kurnik, 1882 - Paris.
- 8) EUCLIDES ROXO, ROBERTO PEIXOTO, HAROLDO CUNHA, DACORSO NETTO - Matemática, 2º Ciclo, 1ª Série - 3ª ed., pg. 297 e segts.; Livraria Francisco Alves, 1946 - Rio.
- 9) EUGÈNE ROUCHÈ et CH. COMBEROUSSE - Traité de Géométrie

- 7<sup>ème</sup> ed. 2 e. p. - 31 a 43, pg. 105 a 135 e 166 a 192; 1900; Gauthier-Villars, Paris.

10) FRANCESCO SEVERI - Elementos de Geometria - 2<sup>ta</sup>., 2<sup>a</sup> ed., pg. 173 a 222; 1940; Editorial Labor, S.A.

11) F. G. M. - Exercices de Géométrie - 5<sup>ème</sup> ed., pgs. 864 e segs.; 1912; J. de Gigord; Paris.

12) F.I.C. (em português) Rev., adapt. E.B.R. GABAGLIA - Elementos de Geometria - Pgs. 201 e segs.; Livraria Garnier - Rio.

13) F.I.C. (em português) Rev., adapt. E.B.R. GABAGLIA - Elementos de Geometria Descritiva - Pgs. 111 a 118 ; Livraria Garnier - Rio.

14) F. J. - Elements de Géométrie Descrptive - 3<sup>ème</sup> ed., pgs. 108 e segs.; 1887; Poussielgue Frères, Paris; Alfred Mame & Fils, Tours.

15) F. J. - Exercices de Géométrie Descrptive - 3<sup>ème</sup> ed., pgs. 34, 246 a 258 e 869; mesmos editores do nº 14, 1893

16) Coleção F.T.D. - Geometria elementar - Curso médio - Pgs. 146 a 150; Livraria Paulo de Azevedo - Rio.

17) JULES DE LA GOURNERIE - Traité de Géométrie Descrptive - 3<sup>ème</sup> ed., 1<sup>ère</sup> p.; pgs. 27 a 46; Gauthier-Villars et Fils, 1891 - Paris.

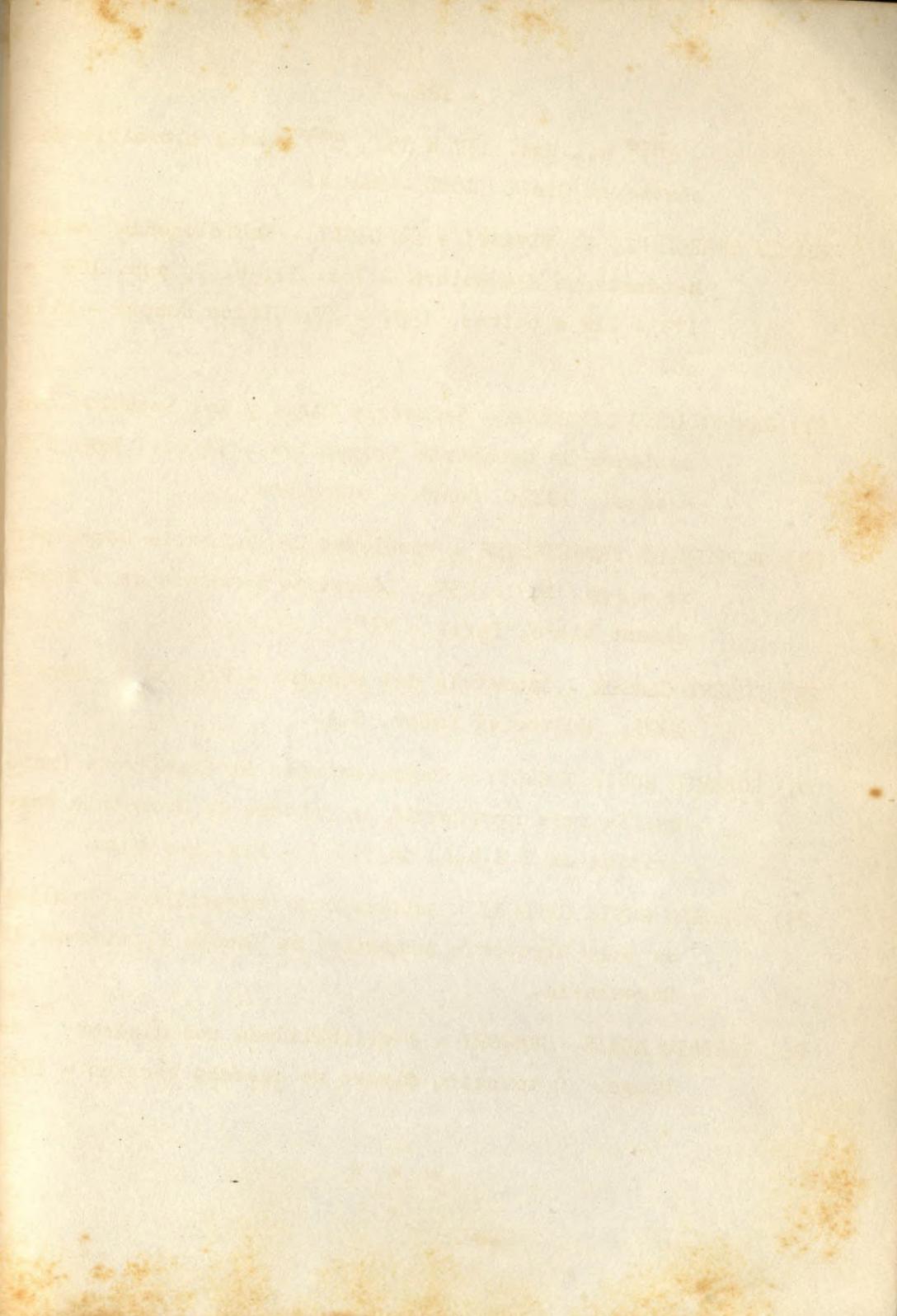
18) JULES PILLET - Traité de Géométrie Descrptive - Pgs. 43 a 45; 1887; Librairie Ch. Delagrave - Paris.

19) J. KLAES - Traité Élémentaire de Géométrie Descrptive -

- 1<sup>ère</sup> p., pgs. 137 a 151, 8<sup>ème</sup> ed.; Librairie Ha-  
chette et Cie.; 1888 - Paris.
- 20) L. BERZOLARI, G. VIVANTI e D. GIGLI - Enciclopedia delle  
Matematiche Elementari - Vol. II, p. I, pgs. 109 a  
179 a 212 e outras, 1937 - XV; Ulrico Hoepli - Mila-  
no.
- 21) MANUEL GUIU CASANOVA - Geometria Plana y del Espacio con  
nociones de Geometria Projectiva - 7<sup>a</sup> ed., pgs. 355  
e segs., 1942; Bosch - Barcelona.
- 22) REUNION DE PROFESSEURS - Problèmes de Géométrie Descripti-  
ve - Pgs. 149 a 153; Librairie Générale de l'Enseig-  
nement Libre; Paris - VI<sup>e</sup>.
- 23) ROBERT GLASER - Geometria del espacio - Pgs. 57 e segs.;  
1927; Editorial Labor, S.A.
- 24) ROBERTO MUNIZ GREGORY - Representação da linha reta (mono-  
grafia para provimento da cátedra de Geometria Des-  
critiva da E.N.B.A. da U.B.) - Pgs. 9 e segs.
- 25) ROBERTO MUNIZ GREGORY - Axonometria (apostilha) - Publica-  
da pelo Diretório Acadêmico da Escola Fluminense de  
Engenharia.
- 26) ROBERTO MUNIZ GREGORY - A visibilidade nos diedros de  
Monge. O terceiro diedro no desenho técnico - 1953

\* \* \*

\*



- 1<sup>o</sup> ed. p. 137 e 151, 6<sup>ma</sup> ed.: Librairie des  
chevres et Cie.; 1880 - Paris.

20) L. BRESOLARI, G. VIVANTI e D. GIGLI - Enciclopedia della  
Matematica Elementare - Vol. II, p. I, pag. 109 e  
179 e 212 e outras, 1937 - IV; Vitorio Hoepli - Mila-  
no.

21) MANUEL GUSTO CASAROVA - Geometria Plana y del Espacio. En  
ocasion de Geometria Proyectiva - 7<sup>a</sup> ed., pag. 39  
e segs., 1942; Bosch - Barcelona.

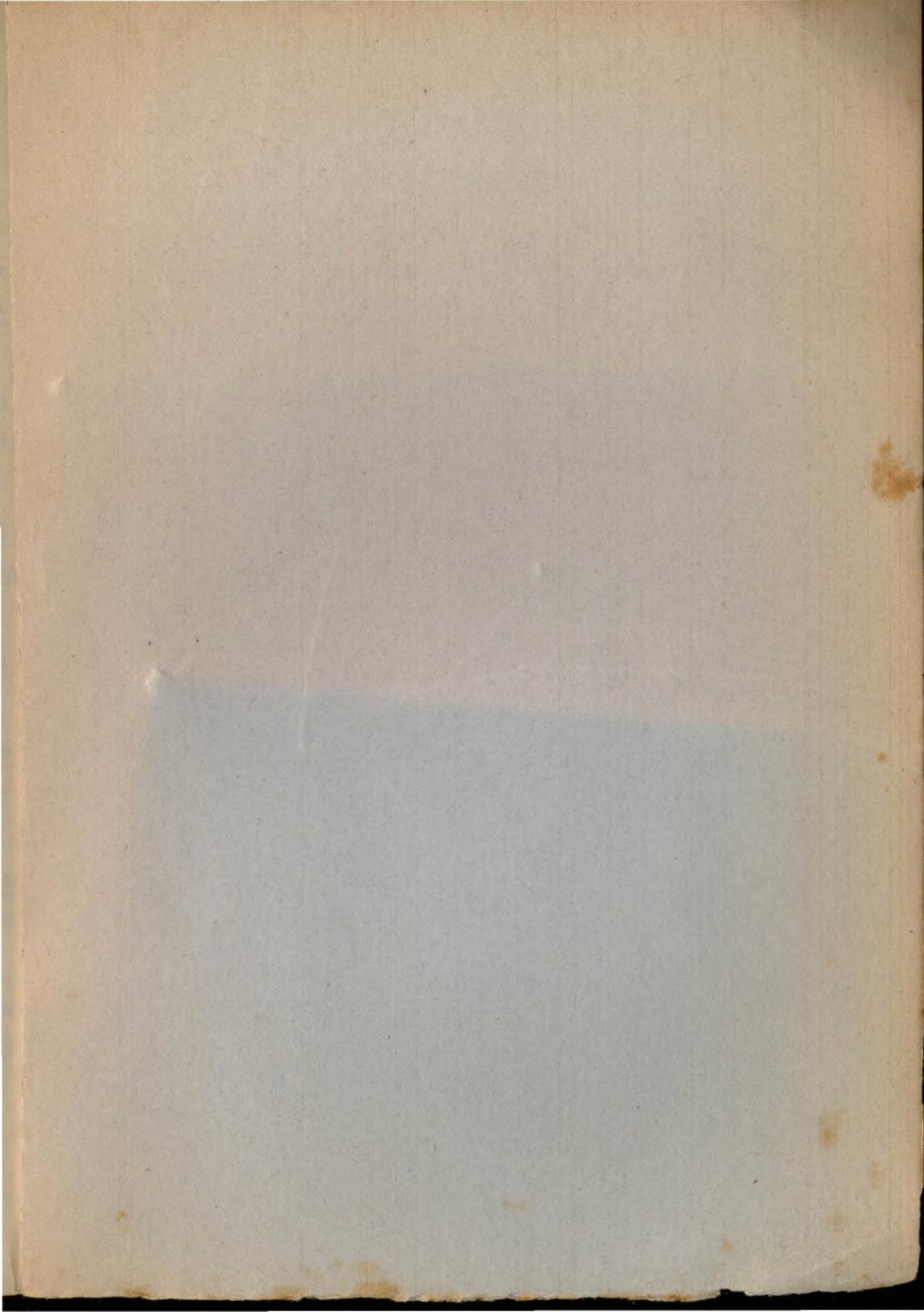
22) REUNION DE PROFESORES - Problemas de Geometria Descripti-  
va - Pgs. 147 e 153. Librairie Generale de l'Ensei-  
nement Libre, Paris - VI<sup>o</sup>.

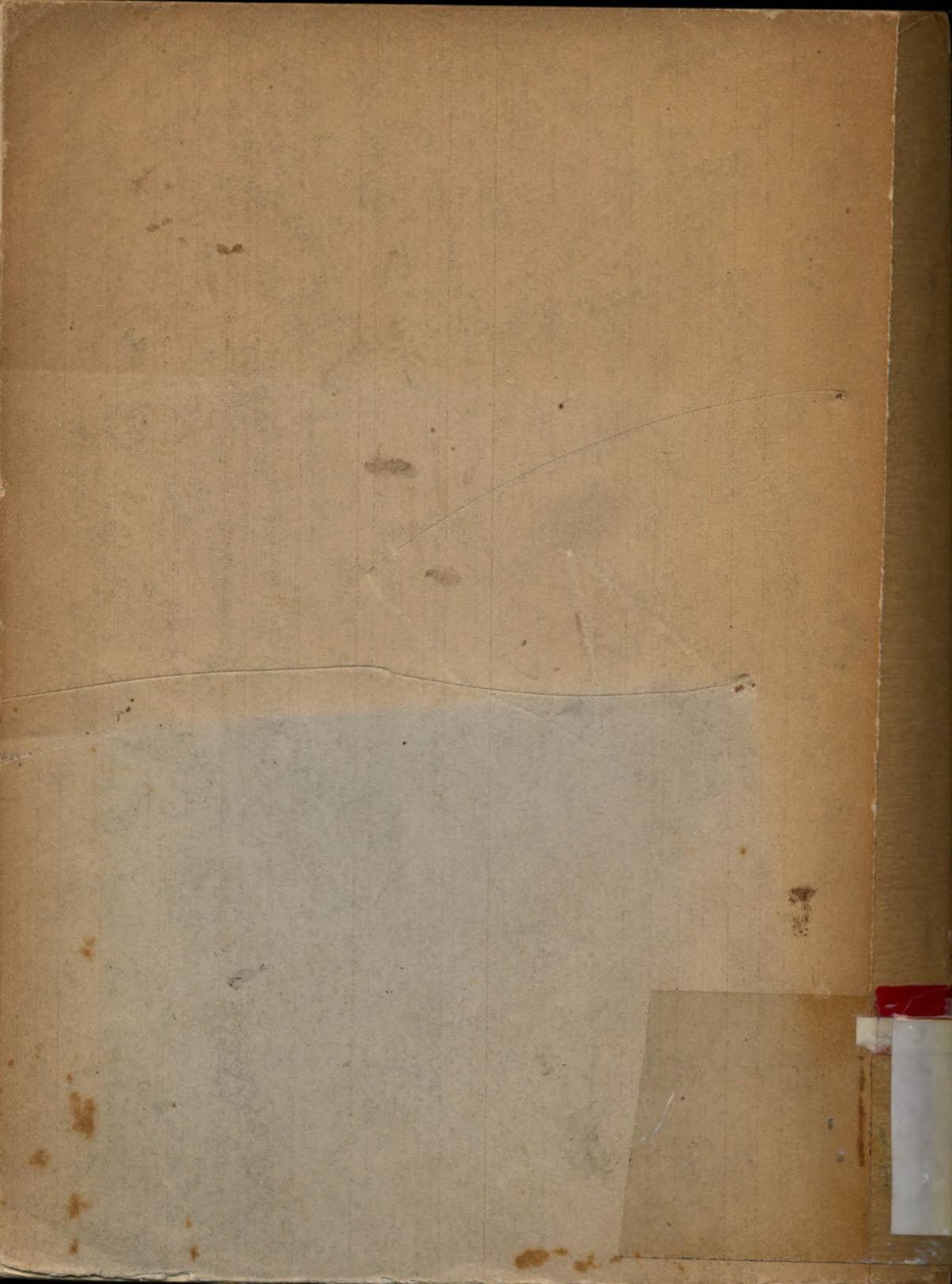
23) ROBERT GLASER - Geometria del espacio - Pgs. 51 e segs.,  
1927; Editorial Labor, S.A.

24) ROBERTO MUNIZ GONCALVES - Representação da linha reta (con-  
grafia para o proximo da cadeira de Geometria Des-  
critiva de S.N.S.A. da U.B.) - Pgs. 9 e segs.

25) ROBERTO MUNIZ GONCALVES - Ar-geometria (apostilhe) - Proje-  
ta pelo Directorio Academico da Escola Fluminense de  
Engenharia.

26) ROBERTO MUNIZ GONCALVES - A visibilidade nos diedros  
de triângulo. O terceiro diedro no mesmo vértice - 1928

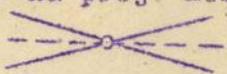
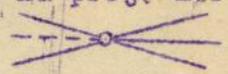




CASOS EM QUE OS EIXOS DOS TRIEDROS  
SÃO LUGARES GEOMÉTRICOS DOS CENTROS DAS SECÇÕES TRIANGULARES

Tese apresentada pela Profa. Léa Santos de Bustamento, para  
obtenção do título de Docente Livre da Cadeira de Geometria  
Descritiva da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade  
do Brasil.

Fôlha de errata

<u>Pag.</u>	<u>Linha</u>	<u>Errado</u>	<u>Certo</u>	<u>Pag.</u>	<u>Linha</u>	<u>Errado</u>	<u>Certo</u>
20	1†	letra-	letras	96	12†	Mediana	Baricentro
43	2†	Em todo triedro a soma ...	Em todo triedro cu triângulo es férico a soma..	101	6†		
				107	8†	ê	e
				108	13†	(ver pag. 25)	(ver pag. 16)
47	Fig. 15		X	111	5†		
50	4†	$X_{\infty} V \cap \pi = \hat{\alpha} \hat{\beta}$	$\Delta X_{\infty} V \cap \pi = \hat{\alpha} \hat{\beta}$	111	9†	OR	OF
51	14†	$\beta$	$\hat{\beta}$	112	3†	Traço	Traços
51	10†	na	no	112	8†	Traço	Traços
52	Fig. 17		traçar reta. (A) $\perp V(X_{\infty})$				
74	Fig. 29	na proj. hor.	na proj. hor.				
75	8†						
		(C) $(X_{\infty})$	(B) $(X_{\infty})$				

NOTA - A seta colocada ao lado do número correspondente a linha, indica o sentido de contagem da linha, na página, a partir de cima ou a partir de baixo