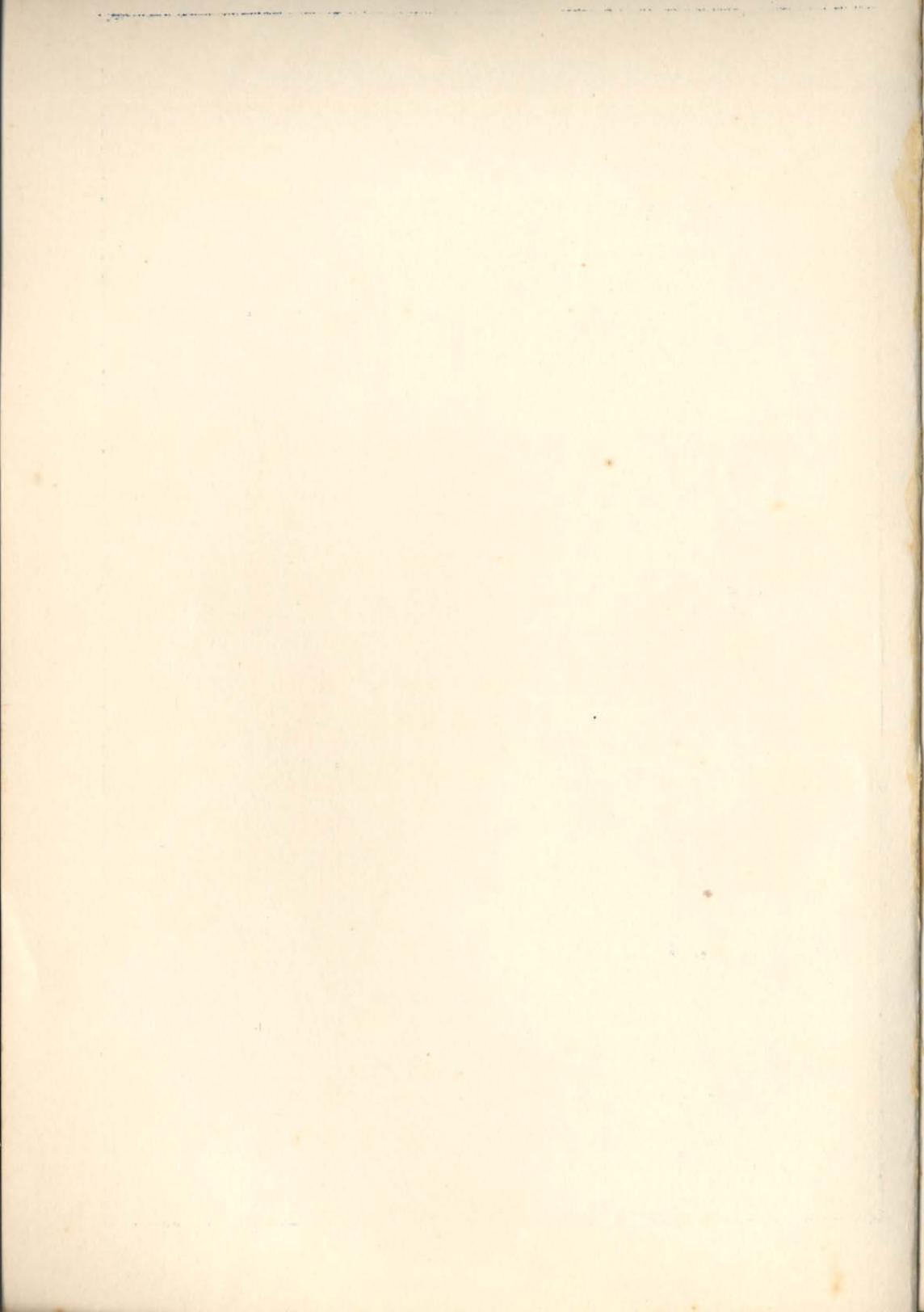


Curvas
Assintóticas
na Superfície
do Cilindro de
Revolução

MENDEL COIFMAN

RIO DE JANEIRO
1965 ANO DO 4.º CENTENÁRIO



A querida colega Geovanna
Marta de Menezes Oliveira
com a consagração educacional
do autor Rio, 30-04-82
Aurelio.

DEDICATÓRIA

À minha espôsa Esther e filhos
Hélio e Olga

REVISÃO

A revisão refere-se à...

...

4177/30-05-2016

HOMENAGEM

Desejo manifestar neste pequeno espaço, a grande estima pelos mestres, aos quais devo grande parte de minha formação:

Prof. Alvaro José Rodrigues

Prof. Felipe dos Santos Reis

Prof. Luis Caetano de Oliveira

Prof. Gerson Pompeu Pinheiro

Prof. Domingos J. da Silva Cunha.

Homenagem póstuma:

Prof. Roberto Muniz Gregory

A todos, os sinceros agradecimentos pelos exemplos e estímulos que sempre me proporcionaram.

MEMORANDUM

On the subject of the proposed new organization, a general outline of the proposed structure is given in the attached report.

The proposed new organization is as follows:

1. The proposed new organization is as follows:

2. The proposed new organization is as follows:

3. The proposed new organization is as follows:

4. The proposed new organization is as follows:

Very truly yours,

Prof. Robert M. Gregory

A copy of the proposed new organization is being sent to the various departments for their consideration.

"A liberdade é frágil se os cidadãos são ignorantes".

Lyndon B. Johnson

"A educação é tão importante, quanto um valioso diamante em estado nativo. A educação estética consiste na lapidação dêste diamante, pondo à mostra tôda beleza que a natureza lhe deu".

Do Autor

A educação é fundamental para o desenvolvimento do indivíduo.

Lyndon B. Johnson

A educação é tão importante, quanto um veículo de
transmissão em estado normal. A educação oferece condições
de trabalho para o indivíduo, porque é através dela
que se desenvolve a personalidade do ser.

Dr. Azeite

I N T R O D U Ç Ã O

Capítulo I

Temos a elevada honra de apresentar à Eminente Comissão Julgadora do Concurso para Titular de Geometria Descritiva no setor " I " do Departamento de Técnicas de Representação da E.B.A. - C.L.A. - U.F.R.J., a tese especialmente escrita para um concurso desta natureza cuja área compreende- " Geometria Descritiva I e II e Axonometria".

De acordo com o edital, a tese é inédita, não tendo sido ainda objeto de julgamento em concurso, nem publicada em revistas especializadas, em parte ou totalmente.

O presente trabalho data, conforme a capa, do ano de 1965 e desde esta época aguarda oportunidade para divulgação.

A partir de nossas primeiras pesquisas iniciadas em 1958, com a publicação e defesa de vários trabalhos, fomos alvo de críticas por basearmos nossas conclusões em simples resultados gráficos. A experiência anterior fez com que os nossos trabalhos posteriores apresentassem um lestro de fundamento matemático; para tal, recorremos ao ilustre Prof. Jayme Machado Cardoso, do Departamento de Matemática e Desenho da Universidade Federal do Paraná e atual Titular da cadeira de Geometria Descritiva, que com sua habilidade matemática deu ao nosso trabalho uma ênfase neste campo. Deixamos aqui ao Prof. Jayme os nossos sinceros agradecimentos, pela tarefa que corrobora com a solução gráfica da curva que concebemos.

De posse do trabalho que ora apresentamos, a Comissão Julgadora tem em mãos o material para examinar e criticar dando ao candidato, na prova de defesa de tese, a oportunidade de reforçar suas afirmações postas, com maior ou menor ênfase, neste trabalho.

Rio de Janeiro, 01 de julho de 1961

Capítulo I

APRESENTAÇÃO DE UM ESTUDO REALIZADO NA SUPERFÍCIE DE UM CILINDRO DE REVOLUÇÃO :

TRAÇADO DE CURVAS ASSINTÓTICAS

A nossa incursão pelo terreno das curvas revêssas não é recente, dando-nos a oportunidade de trazer para a geometria descritiva um grupo extenso de curvas geométricas.

Baseando-nos no espírito criador e dando asas à nossa imaginação, faremos nova incursão nos domínios do cilindro de revolução de eixo vertical, no sentido de obtermos uma curva revêssa na sua superfície e que projetada num plano paralelo ao seu eixo, possibilite em determinadas condições, obter curvas geométricas planas usuais.

As curvas que vamos tratar, apareceram no cenário da matemática em épocas diferentes, sendo que algumas delas foram inventadas para atender a diversas necessidades da época.

No entanto, embora tenham características distintas e construções planimétricas próprias, pretendemos unificá-las através uma estrutura genérica, dando-lhes um tratamento igual.

As curvas geométricas planas a que nos referimos, são as seguintes :

- 1 — Conchóides da reta ou conchóides de Nicomedes.
- 2 — Cissóide reta de Dioclés.
- 3 — Trissetriz de Maclaurin.
- 4 — Estrofóide reta ou Logocíclica de Booth.
- 5 — Hélice cilíndrica normal.

Um dos objetivos dêste estudo que fazemos é divulgar que as curvas anteriormente referidas podem ser obtidas por um processo geral.

O artifício que permite obter a curva revêssa na superfície do cilindro de revolução, consiste na trajetória de um ponto animado de dois movimentos, a saber:

- 1.º — Girar com velocidade angular constante em tórno do eixo do cilindro.
- 2.º — Pertencer durante o deslocamento, a um plano que gira com velocidade angular constante em tórno de um eixo fixo ortogonal ao eixo do cilindro. Denominamos a este plano: "plano de apoio".

Em virtude das condições impostas ao deslocamento do ponto, teremos:

- a) a curva gerada pelo ponto, apresentará ponto impróprio, sempre que a posição do plano de apoio fôr paralela ao eixo do cilindro;
- b) o eixo fixo ortogonal ao eixo do cilindro, em tórno do qual gira o plano de apoio, poderá ser exterior, tangente ou secante ao cilindro. Devemos observar em tempo, que êste eixo pode também ser impróprio;
- c) estabelecendo relações para as velocidades angulares do ponto e do plano de apoio, podemos obter diferentes aspectos para a curva revêssa gerada, incluindo também a situação do eixo fixo em relação ao eixo do cilindro.

Observação: — O eixo fixo em tórno do qual gira o plano de apoio será de tópo, o que vem facilitar a identificação de suas posições em época.

Examinemos algumas condições para que se possa obter as curvas planas mencionadas:

Para obtermos uma curva assintótica cuja projecção vertical seja a conchóide da reta, o ponto gerador e o plano de apoio efetuam rotações simultâneas, o primeiro em tórno do eixo do cilindro e o segundo em tórno do eixo fixo, com amplitudes de 360° , para retornarem ao ponto de partida.

Para obtermos uma curva revêssa cuja projecção dê uma Cissóide reta de Dioclés, o ponto gira de 360° em tórno do eixo do cilindro, enquanto o plano de apoio descreve simultâneamente ângulo de 180° em tórno do eixo fixo, que situa-se tangente à superfície do cilindro.

A trissetriz de Maclaurin aparece como projeção da curva revêssa descrita por um ponto que efetua em tórno do eixo do cilindro um giro de 360° enquanto o plano de apoio descreve simultâneamente em tórno do eixo fixo, ângulo de 180° . O eixo fixo deverá ser aquidistante da geratriz de contórno aparente e do eixo do cone.

A estrofóide reta ou logocíclica de Booth é a projeção veriteal da curva revêssa obtida quando o eixo fixo é concorrente com o eixo do cilindro. O plano de apoio e o ponto, giram simultâneamente, o primeiro de 180° e o segundo de 360° .

Quando o eixo fixo é impróprio, o feixe de planos paralelos e perpendiculares ao eixo do cilindro, corta as geratrizes do cilindro, dando origem à posições de pontos cujo lugar é uma hélice cilíndrica normal. Como a projeção de uma hélice sôbre um plano paraledo ao eixo do cilindro núcleo é uma sinusóide, podemos associar a senóide como pertencente ao grupo das curvas anteriormente referidas. Vemos, portanto, em linhas gerais, que as curvas revessas de que vamos tratar, são obtidas por secções das geratrizes do cilindro por um feixe de planos cujo eixo é ortogonal ao eixo do cilindro.

BREVE RESUMO HISTÓRICO

Conchóide da reta ou conchóide de Nicomedes:

Os problemas geométricos sempre ocuparam lugar de destaque no desenvolvimento da algebra. Desde o tempo de Diofantos viram-se os matemáticos impelidos à procura de soluções algébricas para a duplicação do cubo, a divisão da circunferência e para a trisseção do ângulo.

Para resolver o problema da trisseção do ângulo, o geômetra grego Nicomedes, que se supõe ter vivido entre 250 e 150 aC, concebeu a notável curva algébrica de quarta ordem que é a conchóide. Esta é descrita pela extremidade livre A de um segmento de reta (denominado: intervalo) cujo suporte passa por um ponto fixo O (pólo), sendo que a outra extremidade B percorre uma reta fixa r, que é a base. Como a base determina no plano duas regiões, o segmento de reta (intervalo) pode percorrer ora uma, ora outra região. Assim teremos duas curvas, uma na região do plano a qual não pertence o pólo e cuja forma se assemelha à abertura de uma concha e que justifica o nome dado à curva.

Na região em que se situa o pólo, a curva pode apresentar diversos aspectos, segundo a distância do pólo à base seja maior, igual ou menor do que o segmento de reta que corresponde ao intervalo, nesse caso a curva gerada apresentará respectivamente: um ponto isolado, um ponto de reversão ou um ponto duplo (Figs. a, b e c).

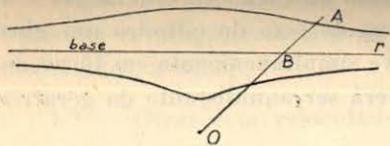


FIG. a

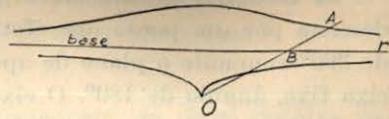


FIG. b

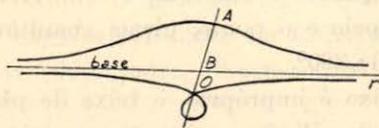


FIG. c

Substituindo-se a base retilínea por uma circunferência que passa pelo pólo, chega-se ao limaçon de Pascal.

CISSÓIDE DE DIOCLÉS

Dioclés, geômetra posterior a Arquimedes, idealizou uma curva cuja geração pode ser exposta, considerando um círculo de centro O e dois de seus diâmetros AB e CD , perpendiculares entre si (Fig. d). Se to-

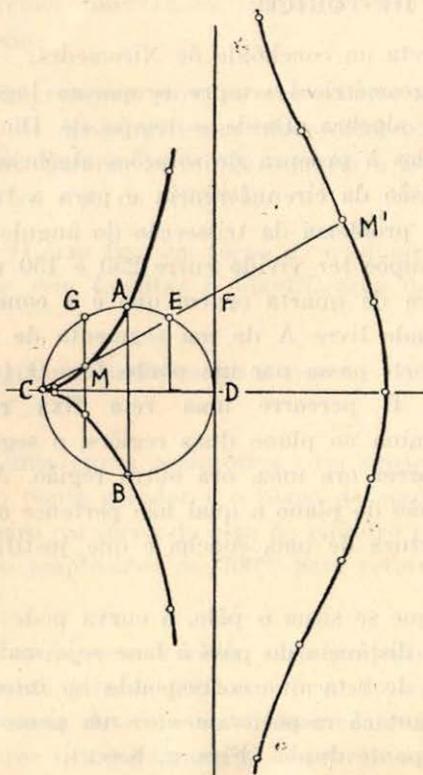


FIG. d

marmos na periferia do círculo dois arcos iguais $AG = AE$ e se conduzirmos por G uma paralela ao diâmetro AB, esta corta CE em um ponto M da curva de Dioclés. O lugar dos pontos M apresenta uma certa semelhança com a fôlha de héra. Há controvérsias quanto ao nome atribuído à curva, todavia, ao lugar dos pontos M é dado o nome de Cissóide de Dioclés.

Nota-se que se a reta CE corta em F a tangente ao círculo dado em D, os dois segmentos CE e MF resultam iguais e concluimos que a cissóide pode ser construída mais fâcilmente tomando-se sôbre a reta CF o comprimento FM igual e de sentido contrário a CE e se tomarmos sôbre a mesma reta FM' igual a CE, teremos uma nova curva determinada pelo lugar dos pontos M', denominada: "gêmea da cissóide" ou cissóide ulterior.

Embora a curva tenha ramos assintóticos em relação à tangente à circunferência do ponto D, os antigos consideravam sômente os dois arcos internos ao círculo, que partem de C até os pontos A e B. No estudo que ora apresentamos, êstes arcos terão importância total, isto é, em tôda a sua extensão.

Capítulo II

A CONCHÓIDE DA RETA OU CONCHÓIDE DE NICOMEDES

1) Conchóide da reta com ponto isolado:

Seja um cilindro de revolução de eixo vertical dado por suas projeções em *épura*, figura 1. Consideremos o eixo fixo (r), de t \acute{o} po, exterior ao cilindro e cujas projeções são dadas por r e r' . Sejam ainda A e A' as projeções do ponto (A) gerador da curva, em sua posição inicial situado na geratriz que contém o plano de frente que passa pelo eixo do cilindro.

Logo após movimentos simultâneamente, ponto e plano de ap \acute{o} io, o primeiro em t \acute{o} rno do eixo do cilindro e o segundo em t \acute{o} rno do eixo fixo, verificamos que o feixe de planos de apoio cujo eixo é (r) secciona o eixo do cilindro nos pontos $1' 2' 3' 4' 5' 6'$ e na posição $7'$ o plano correspondente será paralelo ao eixo e às geratrizes do cilindro. Este feixe determina nas geratrizes os pontos cujas projeções serão B e B' , C e C' , D e D' , E e E' , F e F' sendo que o ponto seguinte (G) correspondente à geratriz para a qual o plano de apoio lhe é paralelo, será um ponto impr \acute{o} prio G_{∞} G'_{∞} . Assim, deste modo, a curva revêssa apresentará ponto impr \acute{o} prio nesta geratriz e sua projeção vertical será assíntota à geratriz que contém o plano de perfil que passa pelo eixo.

Prosseguindo a trajetória do ponto, a curva gerada passará pelos pontos H e H' , I e I' , J e J' , K e K' , L e L' e quando atingir a posição M e M' o ponto gerador e plano de apoio terão efetuado um giro de 180° , o primeiro em t \acute{o} rno do eixo do cilindro e o segundo em t \acute{o} rno do eixo fixo (r).

Daí em diante, prosseguindo com o mesmo raciocínio, o ponto gerador será novamente impr \acute{o} prio S_{∞} S'_{∞} quando o plano de apoio assume uma posição paralela à geratriz correspondente. Finalmente, ao efetuarem o giro de 360° , tanto o ponto gerador como o plano de apoio, retornam à posição inicial (A).

É simples verificarmos que a projeção vertical da curva revêssa gerada apresenta a forma típica da conchóide da reta com ponto isolado, cuja base é a projeção do eixo do cilindro.

Com efeito, a semi reta que parte de r' cortando o eixo no ponto $4'$, apresenta: $P'4' = 4'D'$ e esta relação persiste em qualquer posição: $Q'5' = 5'E'$ e como $4'D' = 5'E' = 1'A' = 9'U'$ correspondendo, portanto, ao intervalo cuja grandeza é o raio $1'A'$ do cilindro. O ponto isolado da conchóide é o correspondente à projeção vertical r' do eixo fixo do feixe de planos de apoio.

2) Conchóide da reta com ponto de reversão:

Seja outro cilindro de revolução de eixo vertical, dado por suas projeções na figura 2.

Efetuem os raciocínio análogo ao da épura anterior, supondo agora o eixo fixo do feixe de planos de apoio tangente ao cilindro e perpendicular ao plano vertical, caracterizado pela projeção r' . Admitamos o ponto gerador da curva revêssa situado na geratriz contida no plano frontal que passa pelo eixo do cilindro, dado pelas projeções A e A' .

Iniciando ponto e plano de apoio a girar simultâneamente, o primeiro em tórno do eixo do cilindro e o segundo em tórno do eixo fixo (r), as posições do ponto passarão por B, C, D, \dots na projeção horizontal, enquanto as posições do plano de apoio seccionam o eixo do cilindro nos pontos $1', 2', 3' \dots$ determinando nas geratrizes do mesmo, pontos da curva revêssa cujas projeções verticais são: B', C', D', \dots etc.

A curva revêssa gerada terá pontos impróprios (G_{∞}) e (S_{∞}) quando o plano de apoio assumir uma posição paralela às geratrizes pelas quais passa o ponto gerador no seu movimento ao redor do eixo do cilindro. Quando o ponto retornar à posição de origem, haverá na superfície do cilindro uma curva revêssa constituída de dois ramos assintóticos em relação às geratrizes do mesmo.

A projeção vertical da referida curva apresenta um ponto de reversão em r' , projeção do eixo do feixe de planos de apoio.

Nesta projeção, as semi retas que partem de r' mostram que: $Q'5' = 5'E'$, $H'8' = 8'U'$ e que: $5'E' = 4'D' = 9'U' = 8'T' = 1'A'$. Ora, este procedimento conduz ao processo construtivo da conchóide da reta com ponto de reversão, tomando como pólo o ponto r' , como base a projeção vertical do eixo do cilindro e o intervalo $1'A'$ igual ao raio da base.

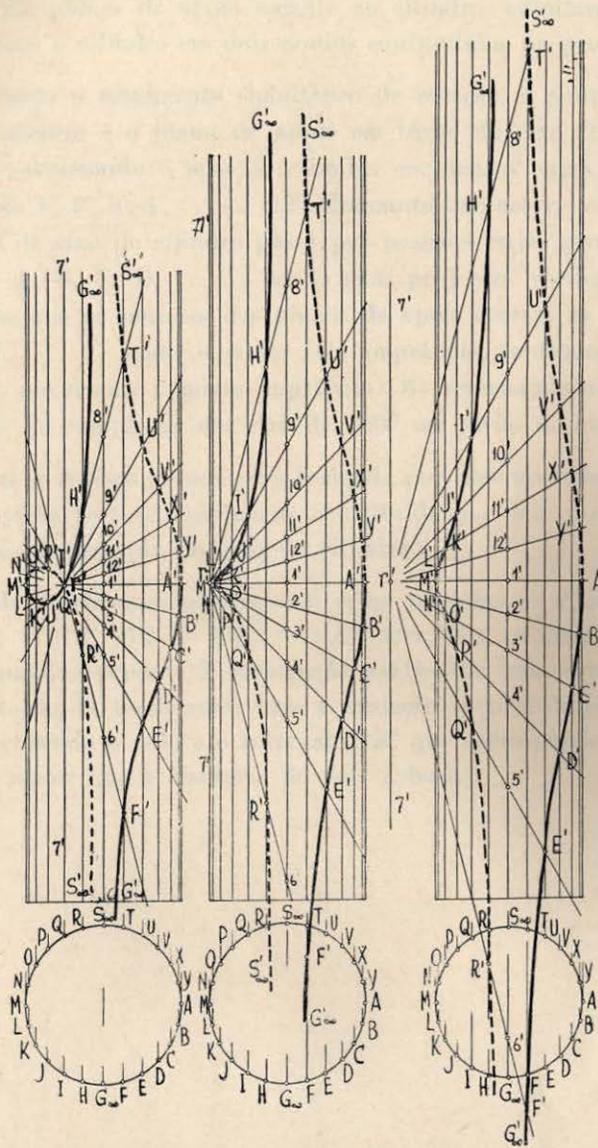


FIG. 3

FIG. 2

FIG. 1

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

Faint text at the bottom of the page, possibly a page number or footer.

3) Conchóide da reta com ponto duplo:

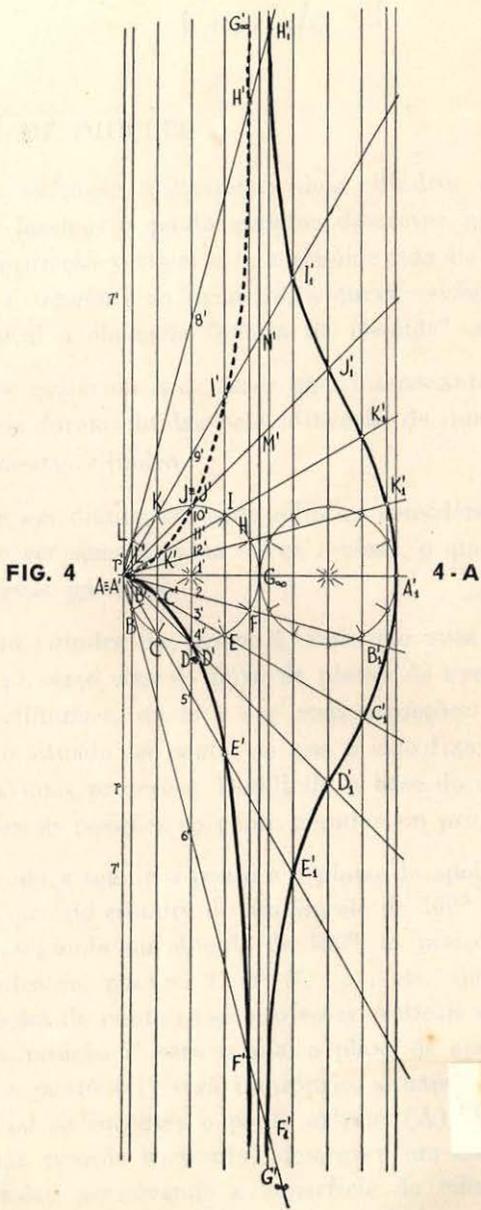
Na figura 3 admitamos um cilindro de revolução de eixo vertical dado por suas projeções em época.

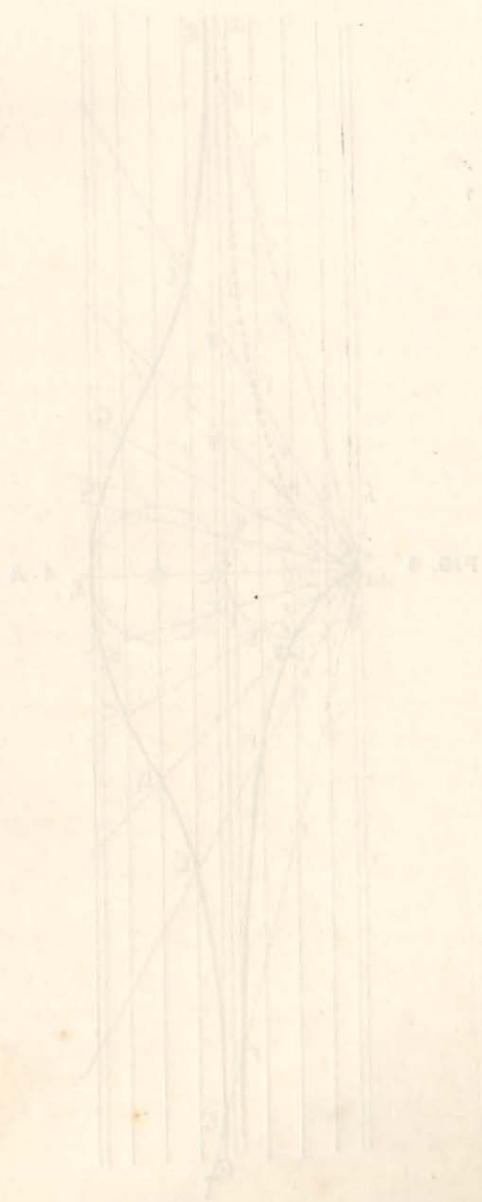
Induzindo o raciocínio anteriormente usado e supondo o eixo fixo do feixe de planos de apoio secante ao cilindro, admitamos que o eixo fixo seccione o cilindro em dois pontos confundidos na projeção r' .

• Iniciando o movimento simultâneo de rotação, o ponto em torno do eixo do cilindro e o plano de apoio em torno do eixo fixo, as posições do plano seccionarão o eixo do cilindro em pontos cujas projeções verticais serão $1', 2', 3', 4', \dots, 12'$. Enquanto isso ocorre, o ponto girando em torno do eixo do cilindro passa por posições cujas projeções horizontais são: A, B, C, D, \dots sendo suas projeções verticais obtidas nos pontos em que as posições dos planos de apoio cortam as geratrizes em: A', B', C', \dots sendo o ponto (G) impróprio, continuará por H', M' , atingindo novamente o ponto impróprio (S) retornando ao ponto de origem (A), ao completar um giro de 360° em torno do eixo do cilindro.

A curva revêssa gerada será formada por dois arcos assintóticos, tendo a projeção vertical igualmente constituída por dois ramos assintóticos em relação à projeção do eixo do cilindro.

Ainda verificamos que as semi retas traçadas de r' permitem analisar: $F'6' = 6'R', B'2' = 2'N' = 1'A'$. Ora, esta propriedade só é utilizada quando se procede à construção gráfica de uma conchóide da reta com ponto duplo, tendo como base a projeção vertical do eixo do cilindro, o ponto r' sendo o pólo e o intervalo $1A'$ que corresponde ao raio do cilindro, é maior que a distância do pólo à base.





Capítulo III

A CISSÓIDE DE DIOCLÉS

Para sua obtenção utilizaremos dois cilindros das figuras 4 e 4a. No primeiro, faremos o ponto gerador descrever no espaço uma curva revêssa cuja projecção vertical seja a cissóide reta de Dioclés. No segundo cilindro, que é tangente ao primeiro, a curva revêssa gerada, terá como projecção vertical a chamada "gêmea da cissóide" ou "cissóide ulterior".

Nesta fase gostaríamos de fazer uma interessante observação: as conchóides da reta foram obtidas pela utilização de duas curvas assintóticas traçadas no mesmo cilindro.

De agora em diante, em cada cilindro considerado, faremos o ponto gerador descrever somente uma curva revêssa, o que possibilitará atingir as demais curvas previstas.

Assim, no cilindro da figura 4, dado por suas projecções, consideremos o eixo (r) como eixo do feixe de planos de apoio, de tópo, tangente à superfície cilíndrica, sendo r e r' suas projecções. O ponto gerador da curva suposto situado no ponto em que o eixo fixo tangencia o cilindro, sendo A e A' suas projecções. Dividindo a base do cilindro em 12 partes iguais, obtemos as posições do ponto gerador em projecção horizontal.

Submetendo a seguir o ponto e o plano de apoio, o primeiro girando em tórno do eixo do cilindro de um ângulo de 360° e o segundo em tórno do eixo fixo segundo um ângulo de 180° , as posições dêste seccionam o eixo do cilindro em pontos: $1', 2', 3', \dots$ etc., determinando nas geratrizes as posições do ponto cujas projecções verticais serão: A', B', C', \dots sendo que na posição $7'$ para a qual o plano de apoio é paralelo ao eixo do cilindro, o ponto (G) será impróprio, situando-se na geratriz oposta àquela na qual se encontra o ponto origem (A). O plano de apoio que partiu de uma posição horizontal, descreveu um ângulo de 90° enquanto o ponto gerador percorrendo a superfície do cilindro, girou em tórno do eixo de um ângulo de 180° . Prosseguindo no movimento, as posições

do plano de apoio cortarão o eixo do cilindro nos pontos 8', 9', 10' determinando em suas geratrizes os pontos cujas projeções serão H', I', J' ... retornando à origem (A). Podemos notar que a projeção vertical da curva revêssa gerada, terá um ponto de reversão em A'.

Vemos ainda nesta projeção que $K'N' = A'I'$ e $J'M' = A'J'$, procedimento gráfico que se emprega quando se deseja construir uma cissóide reta.

Por outro lado, na figura 4a o segundo cilindro tangente ao anterior terá suas geratrizes resultantes da divisão de sua base em 12 partes iguais, cortadas pelas posições do plano de apoio nos pontos A', B', C', I', J', K'.

Êstes pontos determinam uma curva plana representativa da projeção vertical da curva revêssa que é assintótica em relação à geratriz de contato dos dois cilindros inicialmente considerados.

Nesta projeção, vemos que: $N'I'_1 = I'N'$ e $J'_1M'_1 = J'M'$ o que corresponde ao procedimento gráfico para a construção da cissóide ulterior.

Capítulo IV

A TRISSETRIZ DE MACLAURIN

No tratado sôbre curvas de Gino Loria: "Curve Piane Speciali Algebriche e Trascendenti" a trissetriz de Maclaurin é analisada grâficamente da seguinte maneira:

Conhecidos três pontos O , O' e O'' (figura 5) colineares, de tal modo que o segmento $O''O'$ seja um têrço do segmento $O'O$, tracemos por O' uma perpendicular r ao segmento $O'O'$ e por O'' uma transversal qualquer $O''M$. A perpendicular a $O''M$ tirada pelo ponto M , corta a paralela $O''M$ traçada por O , num ponto P . O lugar dos pontos P é a trissetriz de Maclaurin.

No entanto, o próprio Gino Loria dá a indicação de uma curva muito interessante, de autoria de G. Cramer e que apresenta um aspecto mais geral do que a trissetriz de Maclaurin.

É a curva que resolve o seguinte problema:

Dado um círculo de centro C , raio r e um ponto O de seu plano (figura 6), chamemos de A e B os extremos do diâmetro que contém C . Tracemos por A a corda arbitrária AM . A perpendicular ao diâmetro AB traçada por M , corta a paralela a AM tirada por O , num ponto P cujo lugar é a curva estudada por Cramer.

A variação de posição do ponto O permite conhecer diversas curvas, como por exemplo:

- Quando O fôr o ponto meio do raio AC , o lugar dos pontos P é a trissetriz de Maclaurin.
- Quando $O \equiv C$, o lugar dos pontos P será a estrofóide reta ou logocíclica de Booth.
- Quando $O \equiv B$, o lugar dos pontos P é a cissóide deta de Dioclés.

Vamos tratar agora de obter uma curva revêssa traçada na superfície de um cilindro de revolução de eixo vertical, cuja projeção vertical

seja a trissetriz de Maclaurin. Para isto, consideremos um cilindro dado por suas projeções em épura conforme a figura 7.

Fixemos como ponto origem da curva revêssa, o ponto (A) situado na geratriz contida num plano de frente que contém o eixo do cilindro. Façamos o ponto móvel girar em tórno do eixo do cilindro de um ângulo de 360° , para isto efetuemos a divisão da base em 12 partes iguais e tracemos as projeções verticais das geratrizes correspondentes.

Localizemos o eixo fixo do feixe de planos de apoio, que é de tópo, numa posição tal que fique equidistante da geratriz de contórno aparente e do eixo do cilindro, representando r' sua projeção vertical.

Logo após movimentemos simultâneamente, ponto e plano de apoio, o primeiro para girar em tórno do eixo do cilindro de um ângulo de 360° e o segundo em tórno do eixo fixo de um ângulo de 180° .

As sucessivas posições do plano de apoio cujas projeções verticais serão $1'$, $2'$, $3'$, determinam nas geratrizes as projeções A' , B' , C' , D' , sendo que para a posição correspondente ao ponto (G) o plano será paralelo à geratriz correspondente, tornando-o impróprio, o que se verifica na posição $7'$ do plano de apoio. Em seguida teremos os pontos H' , I' , retornando o ponto gerador à sua posição de origem.

A curva revêssa descrita pelo ponto móvel na superfície do cilindro, terá sua projeção vertical segundo a trissetriz de Maclaurin.

Com efeito, podemos verificar as propriedades gráficas da curva projeção, de duas maneiras:

1) Tomemos um ponto O'' no prolongamento de $O O'$ de tal modo que $O' O''$ corresponda a um tórço de $O O'$. Por O'' tracemos uma transversal qualquer $O''M'$, por M' , a perpendicular a $O''M'$, que determina sôbre a paralela $O 4'$ tirada a $O''M'$, o ponto D' . Êste é efetivamente um ponto da trissetriz de Maclaurin.

2) Com diâmetro igual ao da diretriz, tracemos a semi circunferência $N'O'$. Tracemos uma corda qualquer $N'P'$ e por O uma paralela à corda traçada, corta a perpendicular ao diâmetro que passa por P' no ponto D' que também pertence à trissetriz de Maclaurin.

Vemos, portanto, que a curva plana obtida da projeção vertical da curva revêssa traçada na superfície do cilindro, corresponde à trissetriz de Maclaurin.

FIG. 6

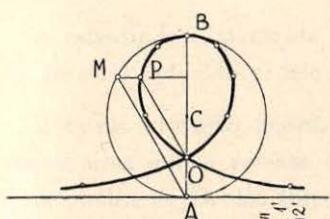


FIG. 5

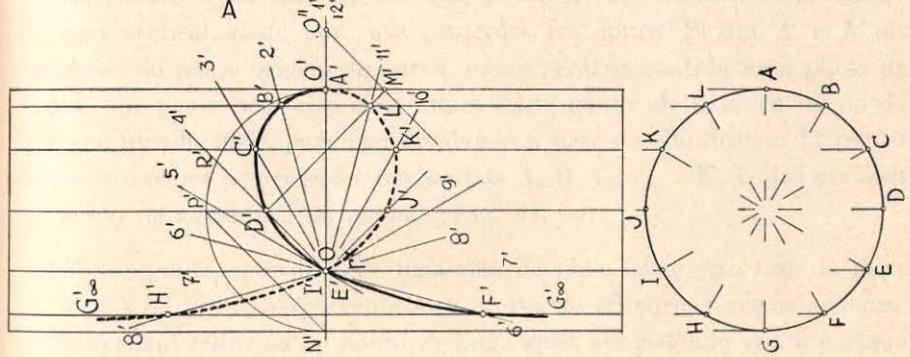
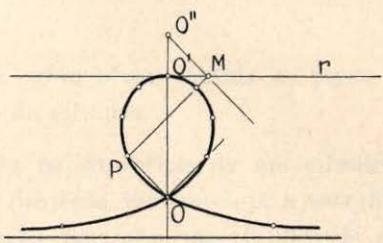


FIG. 7

Capítulo V

A ESTROFÓIDE RETA OU LOGOCÍCLICA DE BOOTH

Esta notável curva é, como sabemos, o lugar dos focos das cônicas resultantes das secções produzidas num cilindro de revolução por diversos planos que passam por uma tangente perpendicular a uma geratriz do cilindro.

A estrofóide é, portanto, uma curva plana contida no plano formado pela geratriz referida e pelo eixo do cilindro.

É nossa intenção agora, gerar na superfície de um cilindro de revolução, uma curva revêssa cuja projecção vertical seja a estrofóide reta ou logocíclica de Booth. Suponhamos, portanto, um cilindro de revolução de eixo vertical, dado por suas projecções em épura. Sejam A e A' as projecções do ponto origem da curva, numa geratriz contida num plano de frente que passa pelo eixo do cilindro. Êste ponto efetuará em tórno do eixo um giro de 360° , para isto dividamos a base do cilindro em 12 partes iguais e teremos as projecções horizontais $A, B, C, \dots K, L$ das posições do ponto na superfície do mesmo (Fig. 8).

Em seguida, considerando uma reta de tópo, como eixo fixo do feixe de planos de apoio, concorrente com o eixo do cilindro, teremos sua projecção vertical reduzida ao ponto r' . Logo após, submetendo ponto e plano de apoio à rotação simultânea respectivamente em tórno do eixo do cilindro e em tórno do eixo fixo (sendo que a amplitude de rotação do plano será de 180°), obtemos nas projecções verticais das geratrizes do cilindro, os pontos: A', B', C', D', \dots e teremos um ponto impróprio (G_∞), para em seguida obtermos $H', I', \dots L'$ para retornar à origem A .

A curva que une os pontos obtida na projecção vertical é assintótica em relação à geratriz de contórno aparente, oposta àquela em que foi situado o ponto de origem (A). A mesma curva apresenta um ponto duplo que se localiza na projecção do eixo fixo.

A seguir, podemos verificar que o ponto A' situa-se no prolongamento do lado $l'J'$ do ângulo reto $l'J'7'$. Se traçarmos por A' as transversais $A'M'$ e $A'N'$, teremos as relações:

$$M'P' = M'Q' = M'J'$$

$$\text{e } N'C' = N'I' = N'J'$$

Ora, esta relação é fundamental e necessária para construção planimétrica de uma estrofóide reta ou logocíclica de Booth.

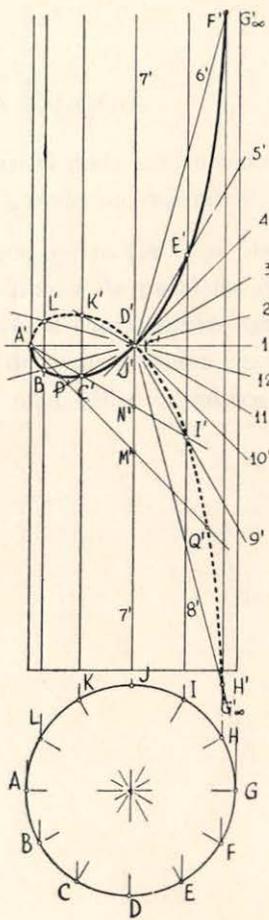


FIG. 8

PLATE I
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W
X
Y
Z
A
B
C
D
E
F
G
H
I
K
L
M
N
O
P
Q
R
S
T
U
V
W
X
Y
Z



FIG. 1

Capítulo VI

A HÉLICE CILÍNDRICA NORMAL

A hélice cilíndrica normal pode ser considerada com um caso particular da curva assintótica gerada na superfície do cilindro de revolução.

Com efeito, supondo que o eixo fixo dos planos de apoio seja impróprio, neste caso o feixe de planos de paralelos determinará na superfície do cilindro secções circulares e equidistantes que conjugadas com o movimento circular constante do ponto gerador em tórno do eixo do cilindro, os pontos de passagem de uma hélice cilíndrica normal.

A HISTÓRIA DO BRASIL

A história do Brasil, desde os primeiros descobrimentos até os dias atuais, é marcada por uma série de eventos que moldaram o país e sua sociedade. Desde a chegada dos portugueses em 1492, o Brasil passou por diversas fases de desenvolvimento, desde a colonização até a independência em 15 de Novembro de 1888. A história do Brasil é marcada por uma série de eventos que moldaram o país e sua sociedade. Desde a chegada dos portugueses em 1492, o Brasil passou por diversas fases de desenvolvimento, desde a colonização até a independência em 15 de Novembro de 1888.

Capítulo VII

CONCLUSÃO

Compreendida a obtenção das diversas curvas geométricas planas resultantes da projeção de curvas revêssas traçadas na superfície de um cilindro de revolução, projeção esta feita num plano paralelo ao seu eixo, desejamos concluir na possibilidade de simplificação imediata e o que nos parece muito mais importante, é a inovação de um processo geral que permite agrupar o traçado planimétrico das referidas curvas planas.

A não ser nas cônicas, desconhecemos um processo geral que permita construir curvas geométricas de propriedades diferentes.

Portanto, para que possamos atingir as curvas propostas, basta que tracemos as projeções verticais das geratrizes de um cilindro de revolução:

1) Para as conchóides: a fim de obtê-las com simplicidade e precisão procedemos de 24 geratrizes do cilindro e se desejarmos uma conchóide de ponto isolado, de ponto de reversão ou de ponto duplo, basta que consideremos respectivamente um ponto exterior (fig. 1), um ponto na geratriz de contôrno aparente (fig. 2) ou um ponto entre as geratrizes de contôrno aparente (com exceção do eixo) (fig. 3). Se traçarmos por cada um dos pontos 12 transversais que dividam o plano em partes iguais, estas cortarão as projeções das geratrizes do cilindro, em pontos que correspondem às conchóides desejadas.

2) Para obtermos a cissóide de Dioclés, basta determinar as projeções verticais de 12 geratrizes de um cilindro. A seguir tomemos um ponto na geratriz de contôrno aparente (fig.4) e tracemos pelo ponto 12 transversais cujo limite corresponde à direção das geratrizes, em pontos que correspondem à cissóide inferior.

A cissóide superior será obtida quando o ponto pelo qual traçamos as transversais é situado a uma distância da geratriz de contôrno aparente, igual ao diâmetro da geratriz circular como mostra a figura 4a.

3) A trissetriz de Maclaurin será obtida, quando efetuarmos a projeção vertical das geratrizes de um cilindro cuja diretriz circular é dividida em 12 partes iguais. Se tomarmos um ponto equidistante da geratriz de contôrno aparente e da projeção do eixo do cilindro e traçarmos por êste ponto 12 transversais, estas cortarão as geratrizes do cilindro em pontos que correspondem à trissetriz de Maclaurin, como mostra a figura 5.

4) A estrofóide reta ou logocíclica de Booth, pode ser obtida quando efetuamos a projeção vertical das geratrizes de um cilindro, cuja diretriz circular é dividida em 12 partes iguais. Em seguida, considerando um ponto situado sôbre a projeção do eixo do cilindro, traçamos pelo mesmo, 12 transversais que cortarão as projeções das geratrizes, em pontos que correspondem à estrofóide reta como mostra a figura 8.

Apêndice

Tratamento analítico dado às curvas assintóticas geradas na superfície de um cilindro de revolução, pelo Prof. Jayme Machado Cardoso.

Animados com o tratamento analítico dado pelo ilustre prof. Jayme Machado Cardoso ao estudo das projecções hiperbólicas, solicitamos ao referido mestre uma análise do nosso problema e tivemos a satisfação de receber a seguinte carta resposta:

Curitiba, 17 de abril de 1964.

Caro Coifman:

Ainda hoje coloquei no Correio uma carta registrada para você contendo a demonstração analítica do teu trabalho para o caso conchóide. Isto foi de manhã. Hoje à noite consegui fazer uma demonstração para todos os casos tratados por você, e assim, amanhã colocarei esta carta no Correio. Pena que a trissetriz de Maclaurin não possa se enquadrar dentro do caso geral, havendo necessidade de inverter a rotação em torno do eixo y . Acredite que até hoje à noite eu duvidava da exatidão de teu trabalho; agora posso, em definitivo, te felicitar pelo brilhantismo do mesmo.

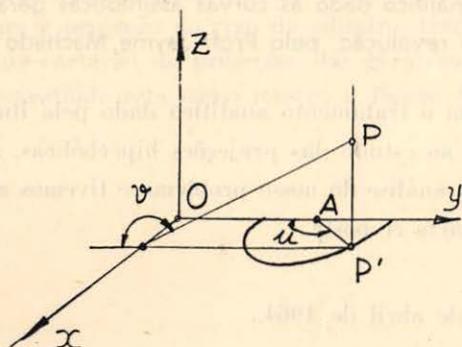
Aproveito o ensejo para te agradecer a oportunidade que você me proporcionou apresentando-me um problema tão bonito. Espero notícias tuas.

Abraços do

Jayme

Consideremos um cilindro de revolução cujo eixo é a paralela ao eixo z conduzida do ponto $A (0, a+r, 0)$, sendo r o raio da seção reta.

Seja P um ponto da superfície e P' sua projeção sôbre o plano xy . Indicando com u o ângulo que AP' forma com o eixo y e com v o ângulo que o plano determinado por P e o eixo x forma com o plano xy , teremos para equações do cilindro



$$x = r \cdot \text{sen } u$$

$$(i) \quad y = a + r (1 - \cos u)$$

$$z = - [a + r (1 - \cos u)] \text{tg } v$$

1. Se o ponto se desloca sôbre o cilindro girando em tórno do eixo do cilindro com velocidade angular igual à velocidade angular do giro em tórno do eixo x , a curva descrita será o lugar dos pontos da superfície sujeitos à condição $u = v$. Em conseqüência, a projeção ortogonal desta curva sôbre o plano yz é a curva de equações paramétricas

$$(ii) \quad y = a + r (1 - \cos u)$$

$$z = - [a + r (1 - \cos u)] \text{tg } u$$

Tal curva, como é fácil verificar, é uma conchóide da reta. A reta da conchóide é o eixo z ,

$$(iii) \quad (z^2 + y^2) [y - (a + r)]^2 = r^2 y^2$$

Em particular, se $a > 0$ temos conchóide com ponto isolado; se $a = 0$ temos conchóide com cúspide; e se $a < 0$ temos um ponto duplo.

(*) Denominação dada pelo prof. Jayme Machado Cardoso.

2. Se o ponto se desloca sôbre o cilindro girando em tórno do eixo da superfície com velocidade angular igual ao dôbro da velocidade com que gira em tórno do eixo x, a curva descrita será o lugar dos pontos da superfície, tais que $v = u/2$. Neste caso a projeção ortogonal desta curva sôbre o plano yz é a curva de equações paramétricas

$$(iv) \quad y = a + r(1 - \cos u)$$

$$z = -[a + r(1 - \cos u)] \sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}}$$

2.1. Se $a = 0$, as (iv) reduzem-se às

$$(v) \quad y = r(1 - \cos u)$$

$$z = -r(1 - \cos u) \sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}}$$

que são os equações paramétricas de uma cissóide de Dioclés,

$$(vi) \quad z^2(2r - y) = y^3$$

2.2. Se $a = -r$, as (iv) reduzem-se às

$$(vii) \quad y = -r \cos u$$

$$z = r \cos u \sqrt{\frac{1 - \cos u}{1 + \cos u}}$$

que são as equações paramétricas de uma estrofóide reta,

$$(viii) \quad z^2(r - x) = y^2(r + y).$$

3. Fazendo-se $\varphi = 180^\circ - v$, $\psi = 180^\circ - u$ e $a = -r/2$, as (i) revestem-se a forma

$$x = r \cdot \text{sen } \varphi$$

$$(ix) \quad y = r \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi \right)$$

$$z = r \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi \right) \text{tg } \psi$$

Se, além disso, tivermos $\psi = \varphi/2$, como no caso 2, as equações da projeção sobre o plano yz serão

$$(x) \quad y = r \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi \right)$$

$$z = r \left(\frac{1}{2} + \cos \varphi \right) \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}$$

que são as equações de uma trissetriz de Maclaurin,

$$(xi) \quad \left(y + \frac{r}{2} \right) z^2 = y^2 \left(\frac{3}{2} r - y \right).$$

Curitiba, 17 de abril de 1964.

BIBLIOGRAFIA

Storia delle matematiche — Gino Loria.

Curve piane speciali — Gino Loria.

Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi — L. Berzolari, G. Vivanti e D. Gigli.

Geometria Descrittiva, 2.^o vol. — Alvaro Rodrigues.

Desenho geométrico — Domingos J. S. Cunha.

Desarrollo de la capacidad creadora, 1.^o e 2.^o vols. — Viktor Lowenfeld.

Revista brasileira de estudos pedagógicos — MEC.

Desenho no ensino secundário, MEC — Luis A. S. Rangel.

A foundation for art education — Manuel Barkan.

Education through art. — Herbert Read.

Adolescence and art education — T. Munro.

Apostilas de didática de desenho — MEC, Cades. Rio.

BIBLIOGRAPHIA

- 1. ...
- 2. ...
- 3. ...
- 4. ...
- 5. ...
- 6. ...
- 7. ...
- 8. ...
- 9. ...
- 10. ...
- 11. ...
- 12. ...
- 13. ...
- 14. ...
- 15. ...
- 16. ...
- 17. ...
- 18. ...
- 19. ...
- 20. ...
- 21. ...
- 22. ...
- 23. ...
- 24. ...
- 25. ...
- 26. ...
- 27. ...
- 28. ...
- 29. ...
- 30. ...
- 31. ...
- 32. ...
- 33. ...
- 34. ...
- 35. ...
- 36. ...
- 37. ...
- 38. ...
- 39. ...
- 40. ...
- 41. ...
- 42. ...
- 43. ...
- 44. ...
- 45. ...
- 46. ...
- 47. ...
- 48. ...
- 49. ...
- 50. ...

