COPPEAD/UFRJ

RELATÓRIO COPPEAD Nº 106

"ASPECTOS BÁSICOS DA FORMAÇÃO DE PRÊMIOS EM MERCADOS DE OPÇÕES"

Ney Roberto Ottoni de Brito*

Janeiro 1984

(Versão Revista)

* Professor de Finanças do Programa de Pós-Graduação em Administração (COPPEAD) da UFRJ. Este trabalho beneficiou-se dos comentários de James Hoag da Universidade da Califórnia em versão anterior. Os resultados do Anexo I foram derivados em conjunto com James Hoag. O autor agradece a colaboração geral da Bolsa de Valores do Rio de Janeiro.

I. INTRODUÇÃO

Uma opção sobre uma ação pode ser de compra ou de venda. Ela confere a seu comprador o direito de comprar ou vender a ação de referência no futuro a um preço determinado hoje. Este direito é expresso em um contrato e a parte que o cede é usualmente referida como o "lançador" da opção. Não se deve confundir contratos de opções com contratos futuros em ações. Um contrato futuro de ações confere a seu comprador a obrigação de comprar ou vender a ação no futuro a um preço determinado hoje. Esta obrigação contrasta fundamentalmente com o direito que é expresso em contratos de opções.

Mais precisamente, uma opção de compra confere a seu possuidor o direito de comprar a ação em ou até uma data determinada a um preço também determinado. A data limite para o exercício do direito da opção é usualmente referida como a data de vencimento da opção e o preço de compra previamente fixado é referido como o preço de exercício da opção. Este contrato de opção ou, na terminologia do mercado, esta opção é negociada em mercado e seu preço ou valor é denominado como o "prêmio" da opção.

O caso de opções de venda é absolutamente semelhante e seu possuidor tem o direito de vender a ação de referência em ou até a data do vencimento da opção a um preço de exercício determinado. Ele também paga o "prêmio" da opção de venda para adquirir este direito em mercado. Cabe observar que opções de compra e venda são também denominadas de *calls* e *puts*, respectivamente, na terminologia de mercado. Uma prática que está associada ao maior desenvolvimento de mercados de opções em países de língua inglesa.

Como deve ter ficado evidente, existiu uma certa indefinição com relação à data limite para exercício da opção podendo ser em ou até a data de vencimento. Esta indefinição decorre da existência de dois tipos de opções sendo negociadas em mercado: as opções Americanas e as Européias. As opções Americanas permitem o exercício do direito em qualquer data até o vencimento da opção. A opção Européia permite o exercício do direito apenas na data de vencimento da opção. Os dois tipos de opções têm entretanto uma coisa em comum, elas não oferecem a seus compradores qualquer proteção com relação à distribuição de dividendos pela ação de referência. O lançador da opção de compra compromete-se apenas a entregar as ações ao comprador quando de seu exercício retendo quaisquer dividendos que forem distribuídos antes de tal exercício. Por outro lado, tanto opções Americanas quanto Européias oferecem completa proteção com relação a direitos de bonificação e subscrição ao ajustar a quantidade de ações a serem entregues quando do exercício considerando tais direitos.

Apenas opções de compras são negociadas hoje em nossos mercados. Adicionalmente, nossas opções não são nem do tipo Americano nem do tipo Europeu e serão denominadas de opções Brasileiras. As opções Brasileiras são semelhantes às opções Americanas no tratamento do exercício que é permitido em qualquer data até o vencimento da opção. Entretanto, as opções Brasileiras diferem das anteriores por oferecer uma proteção com relação à distribuição de dividendos. Caso direitos a dividendos sejam distribuídos pela ação de referência, o preço de exercício da opção Brasileira em aberto é ajustado e reduzido pelo montante de dividendos distribuídos. O seu preço de exercício efetivo será igual ao preço de exercício nominal menos os dividendos distribuídos. Com relação aos direitos de bonificação e subscrição as condições de tratamento das opções Brasileiras é idêntico às práticas de opções Americanas e Européias oferecendo completa proteção a seus compradores.

Este trabalho se inicia discutindo o valor de opções de compra e de venda na sua data de vencimento. Esta discussão permitirá um melhor entendimento da natureza dos contratos de opções e de seus resultados. Ela evidenciará a assimetria fundamental de mercados de opções que ao tranferirem apenas o direito de compra ou venda deixam a seus compradores apenas oportunidades de ganhos, antes da consideração dos prêmios.

A terceira secção procura formalizar propriedades e limites básicos que devem ser satisfeitos por preços e prêmios de opções de compra. Estes limites são determinados exclusivamente por condições simples de arbitragem. A quarta secção discute as variáveis relevantes para a formação de prêmios de opções de compra bem como a sua integração em um modelo explícito de determinação de prêmios, as condições de Black e Scholes [2]. A quinta secção discute as propriedades básicas bem como a formação de prêmios de opções de venda e o trabalho termina com um capítulo de conclusões.

Cabe aqui destacar que as opções Brasileiras apresentam condições diferentes das opções Americanas e Européias anteriormente existentes por oferecer proteção com relação à distribuição de dividendos. Esta característica de nossas opções invalidam muitos dos teoremas e propriedades de opções que forem derivados sob a suposição que elas seriam do tipo Europeu ou Americano. Este trabalho personaliza a discussão de opções Brasileiras derivando explicitamente as condições a serem satisfeitas por seus prêmios.

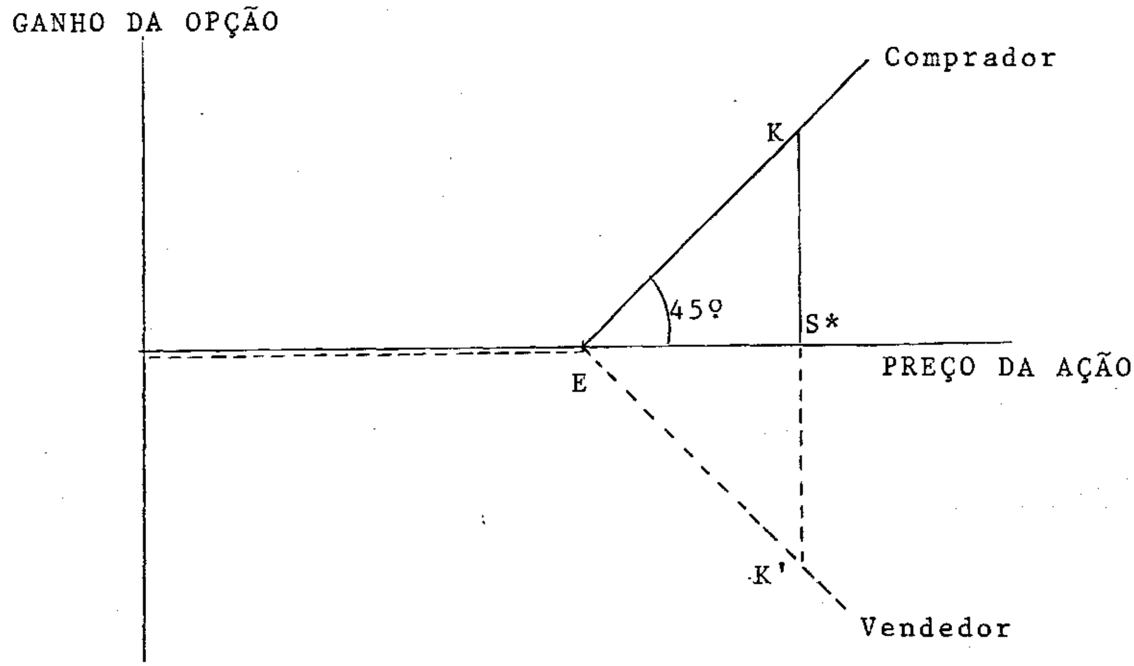
Finalmente, deve-se relembrar a relevância de mercados de opções como veículos de tranferência de risco. Esta relevância tem determinado o rápido crescimento de mercados de opções em outros países. O mercado de opções Americano que era um mercado puramente de balcão até 1973 foi formalizado e levado a pregão inicialmente pela Chicago Board of Trade e depois pela American Stock Exchange, pela Pacific Stock Exchange e por outras Bolsas. A negociação de opções em Bolsas organizadas ofereceu grandes vantagens de liquidez ao mercado de opções que hoje floresce nos Estados Unidos. O desenvolvimento do mercado de opções no Brasil deverá acompanhar a experiência de outros países e estará associado à grande flexibilidade oferecida a administradores de carteiras pela coexistência de mercados à vista, a futuro e de opções em ações.

II. O VALOR DE OPÇÕES NO VENCIMENTO

Para entender-se a natureza e muitas das características do mercado de opções é interessante considerar-se os resultados finais de posições na data de vencimento. Considere inicialmente o caso de opções de compra, as *calls*, sem levar em conta o valor do prêmio da opção. Os resultados de posições nestas *calls* são apresentados em maior detalhe na Figura 1a. Se o preço da ação na data do vencimento (S*) for superior ao preço de exercício (E) então o comprador da opção de compra exercerá o seu direito e terá ganhos associados a diferença S* - E. Graficamente, plotando esses ganhos na vertical, eles serão representados pelo segmento $\overline{S^*K}$ na figura que sendo igual a $\overline{S^*E}$ determinará uma reta associada aos ganhos em um ângulo de 45°, como apresentado na Figura 1a. A reta contínua indicará os ganhos do comprador da *call* se o preço da ação for superior ao preço de exercício E. Por outro lado, se o preço da ação for inferior ao preço de exercício da opção, ela não será exercida e o ganho da posição compradora será nulo. Pelo princípio de simetria dos ganhos/perdas de posições compradoras/vendedoras, os ganhos do vendedor da opção serão representados pela linha pontilhada sendo nulos se o preço de exercício for superior ao preço da ação e negativos se o preço da ação for superior ao preço de exercício[1].

A Figura 1a. já evidencia uma assimetria fundamental do mercado de opções. Sem considerar os prêmios, o comprador de uma opção só pode ganhar e o vendedor de uma opção só pode perder. Nesta situação o comprador estará sempre propenso a pagar um preço pela opção, o seu prêmio, e por outro lado o vendedor exigirá o pagamento de tal prêmio. Nestas condições vendedores e compradores interagem no mercado determinando o prêmio associado à opção. A formação deste prêmio será discutida em maior detalhe adiante.

Os resultados associados a posições em opções de compra, considerando os prêmios, são apresentados na Figura 1b. A existência do prêmio desloca as curvas de resultados de compradores e vendedores verticalmente pelo valor do prêmio. O prêmio torna-se então o ganho máximo do vendedor e a perda máxima do comprador de uma opção de compra. Se no vencimento da opção o preço da ação for igual a S*, 1a - Sem Considerar o Prêmio



1b - Considerando o Prêmio

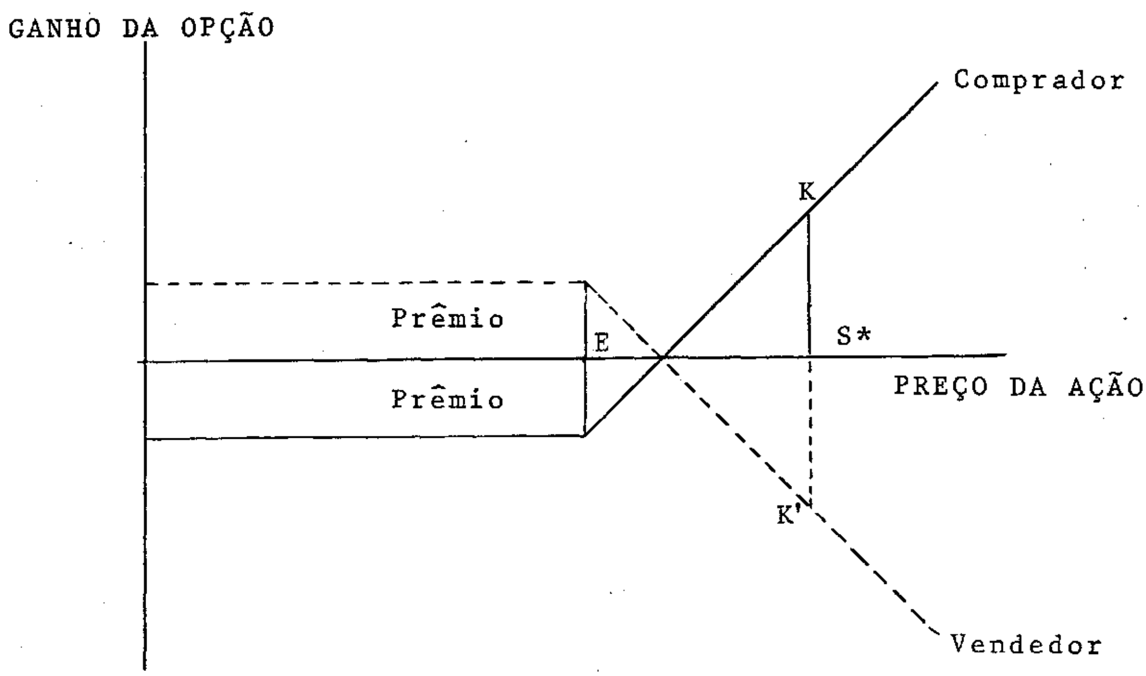


FIGURA 1

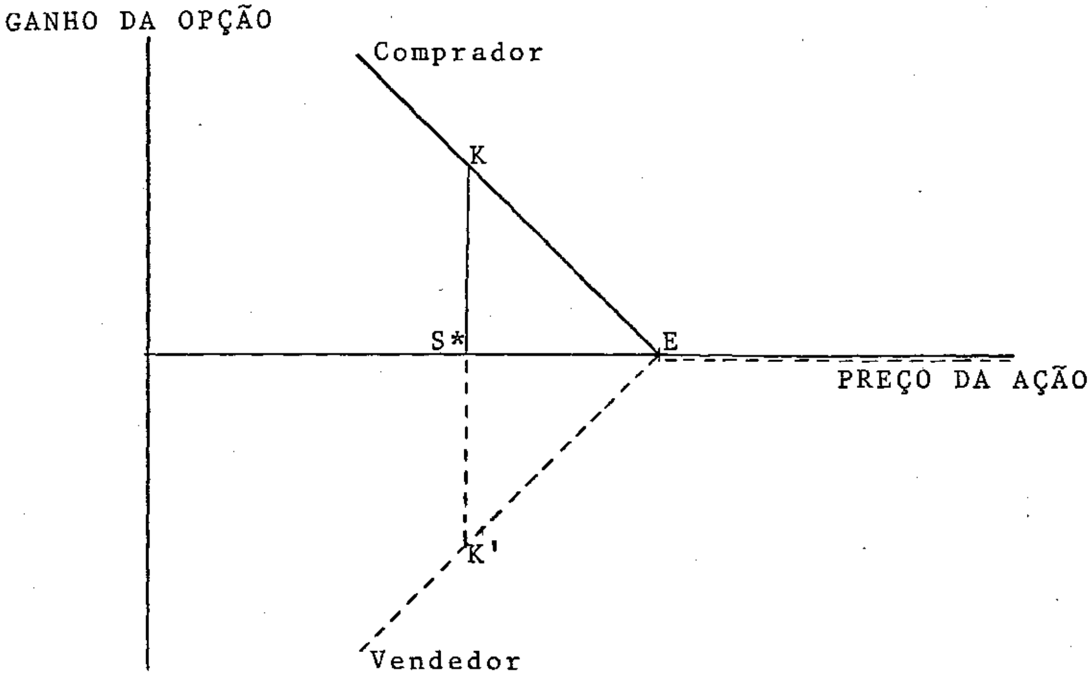
Os resultados de opções de compra - *Calls* os ganhos do comprador da opção serão representados pelo segmento $\overline{S^*K}$ e as perdas do vendedor serão simétricas e representadas pelo segmento $\overline{S^*K}$, de igual valor absoluto aos ganhos do comprador.

Os resultados de posições em opções de venda, as *puts*, são apresentados e discutidos na Figura 2. A Figura 2a discute esses resultados sem considerar o prêmio da opção. Se no vencimento da opção o preço da ação for inferior ao preço de exercício da opção então o comprador da *put* exercerá o seu direito de venda. Por outro lado, se o preço da ação na data de vencimento da opção for superior ao seu preço de exercício então o comprador da *put* não exercerá o seu direito de venda. No caso específico da Figura 2a, se o preço da ação no vencimento for igual a S^* então os ganhos do comprador da *put* serão iguais a $\overline{S^*K}$ que será igual a $(S^* - E)$, o que determinará uma reta de ganhos a 45^{o}. Por simetria, os resultados do vendedor da opção estarão associados à reta pontilhada.

Como no caso de opções de compra, sem considerar o prêmio, o comprador de uma *put* só pode ter ganhos e nunca terá perdas e o vendedor de uma *put* só pode ter perdas e nunca terá ganhos. Nestas condições compradores estarão propensos a pagar o prêmio pela opção e vendedores certamente demandarão um prêmio que será determinado pela interação entre as duas partes do mercado. A existência de prêmios desloca verticalmente as curvas de resultados de compradores e vendedores de opções de vendas. Estes resultados, considerando o prêmio, são apresentados na Figura 2b. O prêmio torna-se o ganho máximo do vendedor e a perda máxima do comprador da opção de venda. Se no vencimento da opção o preço da ação for igual a S^* o comprador da opção de venda exercerá o seu direito tendo ganhos iguais a $\overline{S^*K}$ igual a $(E - S^* - \text{o prêmio})$. As perdas do vendedor da opção serão iguais a $\overline{S^*K'}$, simétricas e iguais em valor absoluto a $\overline{S^*K}$.

Considerando-se os resultados de posições em opções de compra e de venda, como apresentados nas Figuras 1 e 2, pode-se examinar os resultados de combinações entre posições em opções e em outros ativos associados à ação. Pode-se, por exemplo, examinar os

2a - Sem considerar o Prêmio



2b - Considerando o Prêmio

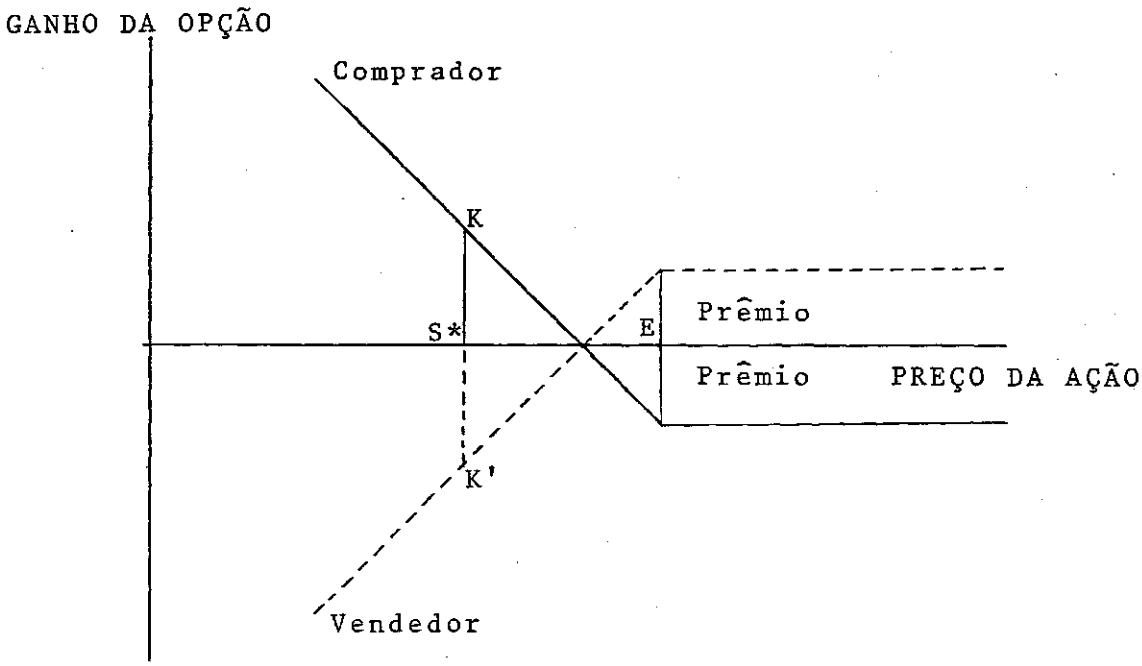
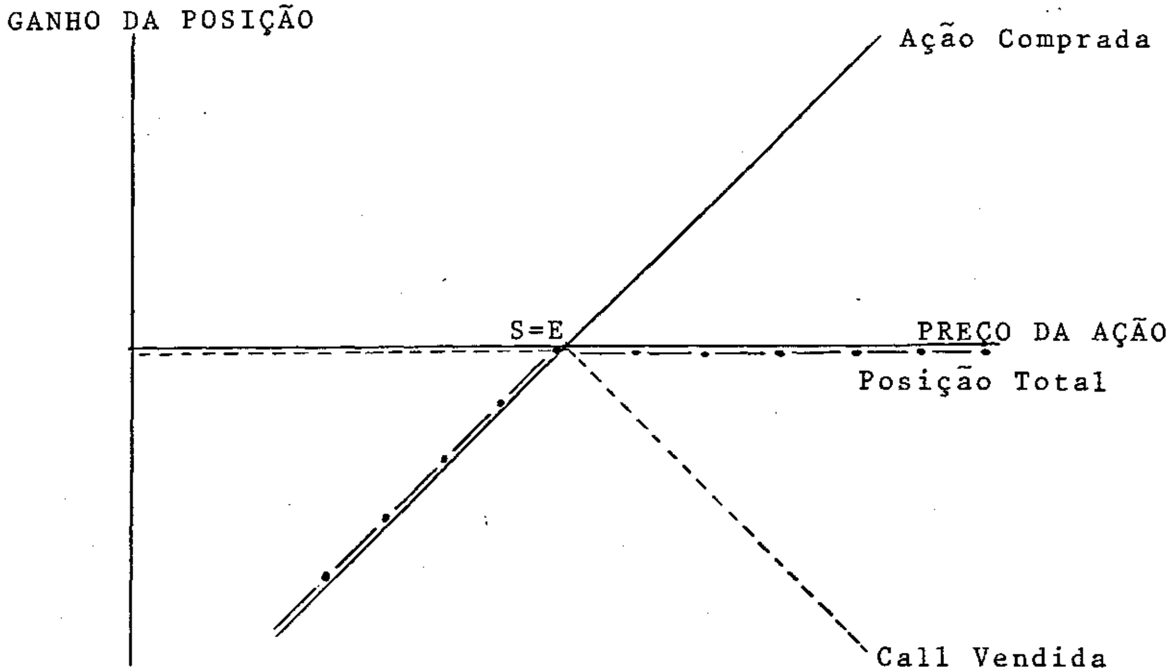


FIGURA 2

Os resultados de opções de venda - *Puts* resultados de combinações entre posições no mercado futuro e no mercado de opções na ação, o que será feito futuramente. Os resultados de posições e combinações envolvendo a ação e opções também podem ser examinados. Os resultados de uma posição envolvendo a compra da ação e simultânea venda de sua opção de compra são apresentados e discutidos na Figura 3. Estas posições representam as chamadas posições cobertas em opções de compra. Os resultados de tais posições, sem considerar o prêmio da opção, e supondo que o preço de compra da ação (S) seja igual ao preço de exercício da opção (E) são apresentados na Figura 3a. Como é lá indicado, se o preço da ação no vencimento da opção for superior ao seu preço de exercício então os ganhos associados à posição na ação são exatamente compensados pelas perdas associadas à opção vendida. Para preços da ação superiores ao preço de exercício da opção os ganhos da posição total são então nulos como indicado na Figura 3a. Por outro lado, se o preço da ação no vencimento da opção for inferior ao seu preço de exercício então a posição total apresentará perdas iguais às perdas associadas à posição na ação pois, nesta região, as perdas associadas à opção são nulas. Os resultados da posição total são indicados pela reta intervalada com pontos. É interessante observar que os resultados desta posição total são equivalentes aos resultados que seriam obtidos vendendo-se uma opção de venda, uma *put*.

Os resultados de posições cobertas em opções de vendas sem considerar o prêmio mas supondo-se que o preço de compra da ação (S) é diferente do preço de exercício da opção (E) são apresentados na Figura 3b. Os resultados da posição total são simplesmente deslocados verticalmente pelo diferencial (E - S) associados aos ganhos da posição na ação. O caso geral, considerando o prêmio e $S \neq E$, é apresentado na Figura 3c. Como indicado, os resultados da posição total são também deslocados verticalmente pelo diferencial (E - S - prêmio). Cabe aqui relembrar que todos os resultados das Figuras 3a. a 3c. não consideram o valor do dinheiro no tempo sendo pois aproximados. Como S é um valor a ser pago em moeda de hoje e E é um valor a ser pago na data de vencimento da opção, os resultados precisos de posições cobertas deveriam considerar o valor diferencial de dinheiro no tempo. Esta consideração será feita mais

3a - Sem considerar o Prêmio e Supondo S=E



3b - O Caso Sem Prêmio e S ≠ E

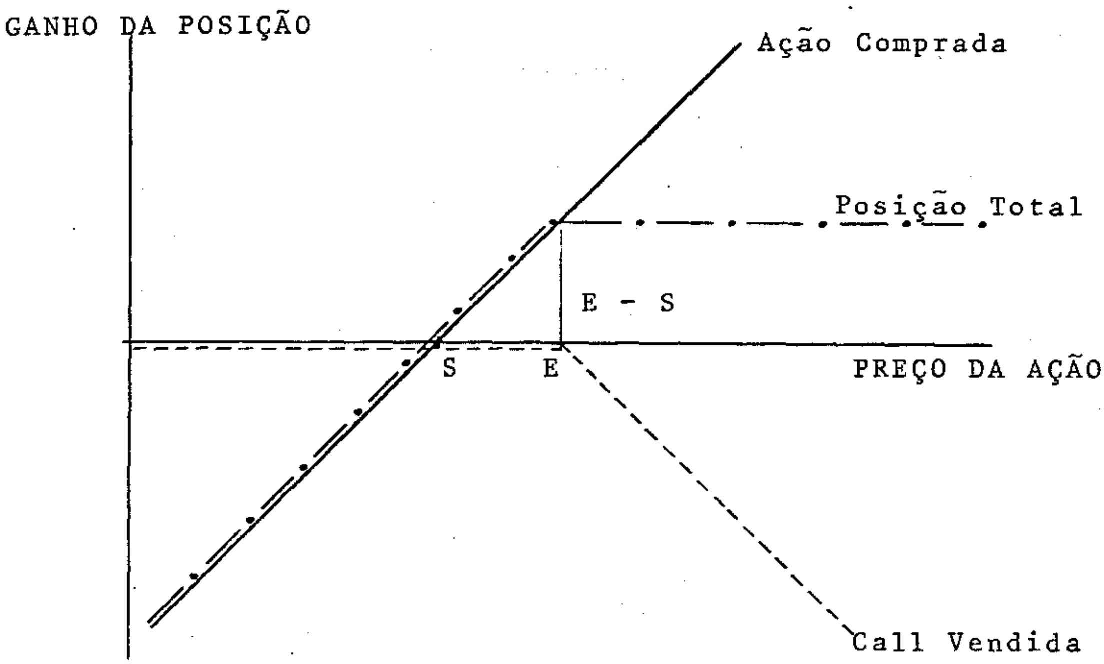
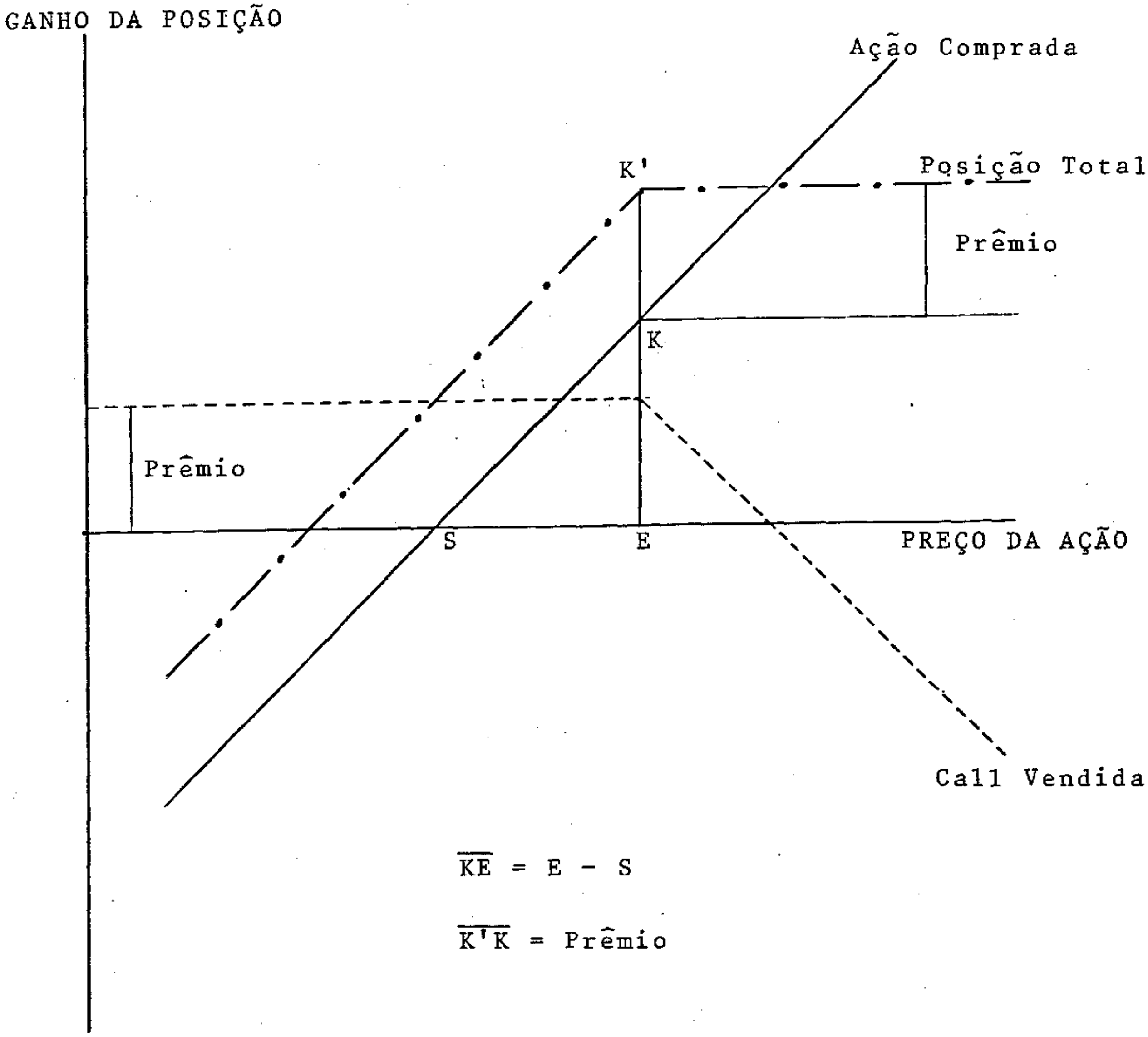


FIGURA 3

Os resultados de posições cobertas em opções de compra

3c - O Caso Geral com Prêmio e $S \neq E$



$\overline{KE} = E - S$

$\overline{K'K} = \text{Prêmio}$

FIGURA 3

Os resultados de posições cobertas em opções de compra
(Continuação)

adiante.

Finalmente, cabe observar que as figuras e toda a análise desta secção evoluiu com a suposição implícita de que dividendos não foram distribuídos para a ação de referência da opção. A eventual distribuição de dividendos não modificaria a análise e figuras para o valor de opções Americanas e Européias no vencimento. Estas opções não contêm cláusulas de proteção contra a distribuição de dividendos. Entretanto, a eventual distribuição de dividendos modificaria a análise e figuras para o valor de opções Brasileiras no vencimento. Nossas opções têm proteção contra dividendos e seu preço de exercício é ajustado e reduzido pelo montante distribuído. A análise e figuras teriam que ser ajustadas para nossas opções, substituindo-se o preço de exercício E pelo preço de exercício efetivo E-D onde D indica o montante de dividendos distribuídos.

III. PROPRIEDADES BÁSICAS DA FORMAÇÃO DE PRÊMIOS EM MERCADOS DE OPÇÕES DE COMPRA

A derivação precisa de relações de formação de preços em mercados de opções de compra é bastante recente datando de princípios da década de 70 com os trabalhos de Black e Scholes [2] e Merton [9]. Uma discussão geral destas relações será apresentada em secção posterior. Esta secção procurará discutir as propriedades básicas e limites que devem ser satisfeitos pela formação de preços nos mercados de opções de compra. Estas propriedades e limites são determinados por condições simples de arbitragem pura e foram inicialmente desenvolvidas por Merton [9] com grande detalhe sendo revistas mais recentemente por Smith [12]. Estas propriedades foram originalmente derivadas considerando apenas a existência de opções Americanas e Européias. Esta secção estenderá os resultados considerando o mais novo tipo de opções sobre ações, as opções Brasileiras que oferecem proteção parcial com relação à distribuição de dividendos.

Para estudar-se quaisquer relações entre prêmios de opções torna-se necessário formalizar a nossa estrutura notacional. Defina

t = data de negociação,

t^* = data de vencimento da opção,

T = $t^* - t$ = período até o vencimento da opção,

$B(T)$ = preço de um título sem risco com maturidade T e que paga Cr$1,00 ao final deste período,

S = preço em t da ação objeto da opção, ex-dividendos,

E = preço de exercício da opção,

X_p = valor da carteira p em t,

$C(S,T;E)$ = preço em t de uma opção brasileira de compra com maturidade T (vencendo em t^*) e com preço de exercício E,

$c(S,T;E)$ = preço em t de uma opção Americana de compra com maturidade T e preço de exercício E;

$c'(S,T;E)$ = o preço em t de uma opção Européia de compra com as mesmas características,

D = dividendos distribuídos pela ação entre a data de aquisição e a data de vencimento da opção e

(*) - o superscrito * indicará variáveis associadas a preços em t*, a data de vencimento da opção.

Com essas definições pode-se prosseguir para derivar o primeiro resultado associado a formação de preços de opções, ele é o

Teorema 1: Os preços de opções de compra serão sempre não-negativos

$C(S,T;E) \geqslant 0$, $c(S,T;E) \geqslant 0$ e $c'(S,T;E) \geqslant 0$

Prova:

Como o exercício de uma opção é voluntário o seu valor não pode ser negativo.

QED

Este resultado decorre da assimetria fundamental que permite aos compradores assumirem apenas os resultados favoráveis associados à opção no vencimento. Como discutido anteriormente, nestas condições, compradores estarão propensos a pagar um preço pela opção e vendedores certamente exigirão um preço para vende-la.

A análise do valor de opções pode e deve ser inicialmente discutida considerando-se o caso mais simples, o da data de vencimento. O valor de opções na data de vencimento já foi discutido na secção anterior com suas Figuras 1 e 2. Decorre diretamente de tais figuras o

Teorema 2: Na data de vencimento da opção Brasileira o seu valor será igual ao máximo da diferença entre o preço da ação e o preço de exercício mais os eventuais dividendos distribuídos:

$$C(S^*,0;E) = \text{Max}\ (0,S^* - E + D)$$

Na data de vencimento da opção de compra Americana ou Européia o seu valor será o máximo da diferença entre o preço da ação e o preço de exercício ou zero:

$$c(S^*,0;E) = c'(S^*,0;E) = \text{Max}\ (0,S^* - E)$$

Prova:

No vencimento, como implícito na Figura 1a, o valor da opção Americana ou Européia será nulo se $S^* < E$ e será igual a $(S^* - E)$ se $S^* > E$. No caso da opção Brasileira o preço efetivo de exercício será $E - D$. O diferencial entre o preço da ação e tal preço efetivo de exercício será $S^* - E + D$ o que implica na relação correspondente acima.

QED

As opções Brasileiras, Americanas e Européias conferem diferentes direitos a seus compradores. Em consequência, os seus prêmios também devem, em geral, ser diferentes. As condições e relações entre os preços destas opções deverão satisfazer ao

<u>Teorema 3</u>: Uma opção Brasileira deve ter um valor pelo menos igual ao de uma opção Americana que, por sua vez, deve ter um valor pelo menos igual ao de uma opção Européia em idênticas condições:

$$C(S,T;E) \geqslant c(S,T;E) \geqslant c'(S,T;E)$$

Prova:

Uma opção Brasileira tem todos os direitos de uma opção Americana e mais proteção contra a distribuição de dividendos. A opção Americana tem todos os direitos de uma opção Européia , tendo ainda o direito adicional de poder ser exercida antecipadamente. Por argumentos de dominância a relação decorre diretamente.

QED

Ao criar a proteção parcial com relação a distribuição de dividendos, a opção Brasileira tornou-se mais valiosa entre todos os tipos de opções existentes, em condições gerais idênticas.

Como um ativo financeiro, parece intuitivo que os prêmios de opções devam depender dos níveis de taxas de juros prevalescentes no mercado. Esta dependência existe, entre outros motivos, porque o preço de exercício a ser pago no vencimento pode ser garantido hoje aplicando-se uma quantia menor às taxas de juros do mercado. Mais formalmente, pode-se estabelecer condições a serem satisfeitas pelos prêmios que são expressas no

Teorema 4: Qualquer opção de compra deve ter um valor inferior ao preço da ação e superior ao preço da ação menos o valor descontado do preço de exercício da opção.

$$S \geq C(S,T;E) \geq c(S,T;E) \geq c'(S,T;E) \geq \text{Max}\left[0, S - EB(T)\right]$$

Prova:

Considere o caso das duas carteiras apresentadas na Tabela 1, a primeira contém uma opção européia de compra e títulos de renda fixa com valor de face E e a segunda contém apenas a ação. Como demonstrado na tabela, a primeira carteira domina a segunda, o que implica em

$$c'(S,T;E) + E\,B(T) \geq S$$

Rearranjada, esta relação implica que

$$c'(S,T;E) \geq \text{Max}\left[0, S - E\,B(T)\right]$$

e pelo Teorema 3,

$$C(S,T;E) \geq c(S,T;E) \geq c'(S,T;E) \geq \text{Max}\left[0,\ S - E\ B(T)\right]$$

Adicionalmente, por arbitragem, o valor de uma opção deve ser sempre igual ou inferior ao ativo de referência, o que estabelece o teorema.

QED

Deve-se observar que o teorema, além de identificar um importante efeito de taxas de juros, também apresenta uma relevante condição de arbitragem: $C(S,T;E) + E\ B(T) \geq S$. Ou seja, uma opção mais uma aplicação do valor descontado do preço de exercício em títulos de renda fixa sempre domina a compra da ação não devendo ser mais barata. Também é preciso observar que no caso das opções brasileiras com dividendos distribuídos os limites se modificam e a relação do Teorema 4 passaria a

$$S + D \geq C(S,T;E) \geq \text{Max}\left[0,\ S - (E-D)\ B(T)\right] .$$

Uma outra variável fundamental para determinação do prêmio de uma opção de compra é o seu preço de exercício. A relevância e efeito de diferentes preços de exercício de opções, sob condições idênticas, é discutida no

<u>Teorema 5</u>: Se duas opções têm condições idênticas exceto por apresentarem diferentes preços de exercício, então a opção com menor preço de exercício deve ter um prêmio pelo menos igual ao da opção com maior preço de exercício:

$$C(S,T;E_1) \leq C(S,T;E_2),$$
$$c(S,T;E_1) \leq c(S,T;E_2) \text{ e}$$
$$c'(S,T;E_1) \leq c'(S,T;E_2) \text{ se } E_1 > E_2.$$

Prova:

A situação é apresentada graficamente na Figura 4. No venci

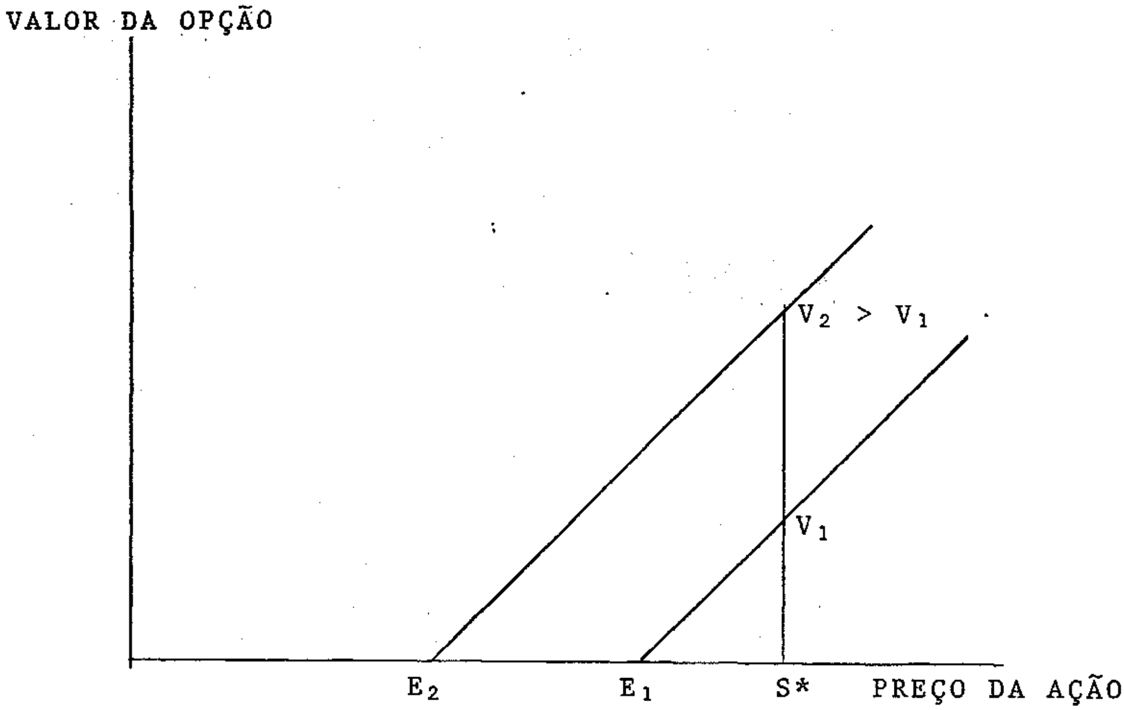


FIGURA 4

Prêmios de opções e preços de exercício

mento o valor da opção com preço de exercício E_2 é sempre maior ou igual ao valor da opção com preço de exercício E_1. Segue-se que seu prêmio também tem que ser pelo menos igual ao da opção com maior preço de exercício.

QED

Uma das importantes variáveis que determinam o preço de uma opção é a sua maturidade. O efeito da maturidade de uma opção sobre o seu prêmio é discutida no

Teorema 6: Entre duas opções de compra Brasileiras ou Americanas com termos idênticos exceto pela maturidade de vencimento, a de maior valor será aquela com maturidade mais longa:

$C(S,T_1;E) \geq C(S,T_2;E)$ e

$c(S,T_1;E) \geq c(S,T_2;E)$ se $T_1 > T_2$

Prova:

A opção mais longa pode ser exercida em condições idênticas à opção mais curta durante toda a sua validade. Adicionalmente ela pode ser ainda exercida durante $(T_1 - T_2)$ e como este direito opcional não pode ter valor negativo o teorema decorre imediatamente.

QED

Como será visto adiante, este teorema também vigora para opções européias. Como elas não permitem o exercício antecipado, a demonstração formal torna-se mais complicada[2] . Uma análise intuitiva pode entretanto ser desenvolvida pelos resultados do Teorema 4. Como E B(T) diminui a medida que T aumenta, o limite inferior do valor de todas as opções se eleva, o que sugere a elevação de todos os prêmios.

O efeito de taxas de juros sobre opções atua na direção de impedir o exercício antecipado. Entretanto, a eventual distribuição de dividendos antes do vencimento das opções atua na direção de favorecer o exercício antecipado. A conjugação dos dois efeitos ora favorecerá o exercício antecipado e ora não, como será discutido nos Teoremas 7 a 9 a seguir.

Teorema 7: Uma opção Americana de compra sobre uma ação que não pagará dividendos até o vencimento nunca será exercida antes deste vencimento e

$$c(S,T;E) = c'(S,T;E)$$

Prova:

Se exercida, uma opção Americana de compra vale
$\text{Max}\left[0, S - E\right]$ e como
$\text{Max}\left[0, S - E\,B(T)\right] \geq \text{Max}\left[0, S - E\right]$
o Teorema decorre diretamente do Teorema 4.

QED

Teorema 8: Existindo o pagamento de dividendos uma opção Americana de compra poderá ser exercida antes de seu vencimento.

Prova:

Considere uma ação que passa a ex-dividendo distribuindo dividendos certos e iguais a D na data de vencimento da opção. Sejam ainda duas carteiras A e B contendo

A . uma opção européia de compra e
. títulos de renda fixa com vencimento junto com a opção tendo valor de face E + D

B . uma ação da empresa.

Pelos mesmos argumentos do Teorema 4 e da Tabela 1 obteríamos que a carteira A apresenta um valor nunca inferior ao da carteira B o que implica que

$$c(S,T;E) + (E + D)\ B(T) \geqslant S.$$

Esta relação reorganizada implica que

$$c(S,T;E) \geqslant \text{Max}\left[0, S - (E + D)\ B(T)\right]$$

Como uma opção Americana de compra pode ser exercida antecipadamente, seu valor deve satisfazer a

$$C(S,T;E) \geqslant \text{Max}\left[0,\ S - E\right]$$

e,dependendo do valor de D,

$$\text{Max}\left[0, S - (E + D)\ B(T)\right] \gtreqless \text{Max}\left[0, S - E\right].$$

Caso $E < (E + D)\ B(T)$ então a opção Americana pode ser exercida antes de seu vencimento.

QED

Estes teoremas evidenciam os pontos básicos na consideração de taxas de juros e dividendos em opções Americanas. Eles são

(a) existem ganhos associados à aplicação de $E\ B(T) < E$, para a geração do preço de exercício no vencimento da opção e

(b) estes ganhos devem ser comparados às perdas associadas aos dividendos distribuídos e aplicados até o vencimento da opção.

O caso de opções Americanas difere das opções Brasileiras que oferecem proteção parcial com relação a distribuição dos dividendos. Cabe destacar que esta proteção é parcial por limitar-se ao montante dos dividendos distribuidos não cobrindo os ju

TABELA 1

A DOMINÂNCIA DE CARTEIRA DE

CALLS E RENDA FIXA

CARTEIRA		VALOR DA AÇÃO NO VENCIMENTO	
Composição	Valor	$S^* < E$	$S^* \geqslant E$
A	$c(.) + E\ B(T)$	$0 + E$	$(S^* - E) + E$
B	S	S^*	S^*
Relação Entre Valores		$X^*_A > X^*_B$	$X^*_A = X^*_B$

COMPOSIÇÃO DE CARTEIRAS:

A: uma *call* européia com prêmio c(.) e títulos de renda fixa com valor de Face E, valor de mercado E B(T), e vencimento com a opção e

B: a ação com valor de mercado S.

ros que seriam recebidos com a aplicação dos dividendos desde a data de sua distribuição até a data de exercício ou vencimento da opção. Em princípio, as mesmas variáveis básicas, a taxa de juros e o nível de dividendos, podem ser relevantes na análise da formação de prêmios de opções Brasileiras. Esta análise é desenvolvida no

<u>Teorema 9</u>: Uma opção Brasileira só será exercida antes de seu vencimento se a ação de referência distribuir dividendos D tais que D > E.

Prova:

Se a ação não distribuir dividendos a opção Brasileira será equivalente à Americana e, pelo Teorema 7, ela não será exercida antes do vencimento.

Se a ação distribuir dividendos D < E, pelos mesmos argumentos de valor do dinheiro no tempo do Teorema 4, sua opção

(i) nunca será exercida antes do último dia de negócios da ação e da opção com direitos a dividendos e

(ii) nunca será exercida durante o período de negociações ex-dividendos.

Em suma, uma opção Brasileira só poderá ser exercida antecipadamente no último dia com direitos a dividendos

Considere o caso deste último dia e seja T o período dele até o vencimento da opção. Sejam duas carteiras:

A: uma opção Brasileira e
um investimento de (E - D) B(T) + D em títulos de renda fixa

B: uma ação com dividendos.

Como indicado na Tabela 2, no vencimento a carteira A dominará a carteira B o que implica em

$$C(S,T;E) + (E - D)\,B(T) + D \geqslant S$$

Como a opção Brasileira vale Max $\left[0,\ S - E\right]$ se exercida então o exercício só ocorrerá se

$$E < (E - D)\,B(T) + D \Longrightarrow (E - D) < (E - D)\,B(T).$$

Para $E > D$ esta condição só será satisfeita se $B(T) > 1$, o que é impossível de acontecer com taxas de juros positivas. Decorre imediatamente que a opção nunca será exercida antecipadamente se $E > D$.

Por outro lado, se $D > E$, a condição para exercício antecipado será satisfeito se $B(T) < 1$, o que sempre ocorrerá. A opção Brasileira será pois exercida antecipadamente no último dia com direitos a dividendos se $D > E$.

QED

O valor do dinheiro no tempo fará com que uma opção Brasileira nunca seja exercida antes do vencimento se seus dividendos distribuídos forem inferiores ao preço de exercício. O exercício antecipado somente ocorrerá na situação inversa, se os dividendos distribuídos forem maiores que o preço de exercício.

O efeito do valor do dinheiro no tempo aliado ao efeito de maturidade produz interessantes resultados associados a opções perpétuas. Eles são discutidos no

<u>Teorema 10</u>: Uma opção Brasileira ou Americana perpétua sobre uma ação que não paga dividendos deve ter um prêmio igual ao preço da ação.

TABELA 2

O Exercício antecipado de Call Brasileira

CARTEIRA		VALOR DA AÇÃO NO VENCIMENTO	
Composição	Valor	$S^* < E - D$	$S^* \geqslant E - D$
A	$C(.)+[(E-D)B(T)+D]$	$E - D + \dfrac{D}{B(T)}$	$S^* + \dfrac{D}{B(T)}$
B	S	$S^* + \dfrac{D}{B(T)}$	$S^* + \dfrac{D}{B(T)}$
Relação Entre Valores		$X_A^* > X_B^*$	$X_A^* = X_B^*$

COMPOSIÇÃO DE CARTEIRAS:

A: uma *call* Brasileira com prêmio C(.) e um investimento de $[(E-D)B(T) + D]$ em títulos de renda fixa.

B: a ação com dividendos e valor de mercado igual a S

Prova:

Para ações que não pagam dividendos $C(S,T;E) = c(S,T;E)$. Pelos Teoremas (4) e (8) anteriores.

$$C(S,\infty;E) \geq \text{Max}\left[0,\ S - E\ B(\infty)\right]$$

e como $B(\infty) = 0$ esta relação reduz-se a $C(S,\infty;E) \geq S$. Como pelo Teorema 3 $C(S,\infty;E) \leq S$ decorre que

$$C(S,\infty;E) = c(S,\infty;E) = S$$

QED

Cabe relembrar que este teorema é válido apenas para ações que não pagam dividendos. Em caso contrário, as opções Americanas perderão todo o valor da série de dividendos distribuídos até o vencimento infinito da opção e a opção Brasileira receberá a soma dos dividendos distribuidos apenas no vencimento infinito da opção. Em ambos os casos a ação dominará a opção tendo, necessariamente, um valor superior ao seu prêmio.

Em qualquer mercado existem sempre diversas séries lançadas de opções com diferentes preços de exercício. É importante examinar-se o relacionamento que deve ser mantido entre os prêmios das diversas séries. Este relacionamento é discutido no

Teorema 11: Os preços de opções Européias e de opções Brasileiras e Americanas de compra que sejam exercidas apenas no vencimento são uma função convexa de seu preço de exercício.

Prova:

Considerando $E_2 = \alpha E_1 + (1-\alpha) E_3$ deve-se demonstrar que

$$C(S,T;E_2) \leq \alpha\ C(S,T;E_1) + (1-\alpha)\ C(S,T;E_3)$$

se $E_1 > E_2 > E_3$ e $0 < \alpha < 1$. Defina duas carteiras A e B tais que

A: contém α calls Brasileiras com E_1 e $(1-\alpha)$ calls Brasileiras com E_2 e

B: contém uma call Brasileira com preço de exercício E_2.

As calls serão exercidas apenas no vencimento e, como apresentado na Tabela 3, nesta data a carteira A terá um valor maior ou igual ao da carteira B[3] o que implica que

$$C(S,T;E_2) \leqslant \alpha\, C(S,T;E_1) + (1-\alpha)\, C(S,T;E_3).$$

O caso de opções Européias é idêntico ao caso de opções Brasileiras com D = 0 e para elas a convexidade em preços decorre diretamente. Como opções Americanas exercidas apenas no vencimento são equivalentes a opções Européias, a sua convexidade em preços também decorre imediatamente.

QED

Finalmente, parece interessante discutir-se o efeito de oscilações no preço de exercício sobre o prêmio de opções. Os limites que devem ser satisfeitos por estas oscilações são determinados pelo

Teorema 12: Se os preços de opções Européias e de opções Brasileiras e Americanas de compra que sejam exercidas apenas no vencimento forem funções diferenciáveis do preço de exercício então suas derivadas devem ser negativas e menores em valor absoluto, que o preço do título descontado de renda fixa.

$$-B(T) \leqslant \partial\, C(S,T,E) \,/\, \partial E \leqslant 0$$
$$-B(T) \leqslant \partial\, c(S,T;E) \,/\, \partial E \leqslant 0$$
$$-B(T) \leqslant \partial\, c'(S,T;E) \,/\, \partial E \leqslant 0$$

TABELA 3

A Convexidade de prêmios de *Calls*

CARTEIRA		VALOR DA AÇÃO NO VENCIMENTO			
Composição	Valor	$S^* \leqslant E_3$	$E_3 < S < E_2$	$E_2 \leqslant S^* < E_1$	$S^* \geqslant E_1$
A	$\alpha C(S,T;E_1)$ +	0 +	0 +	0 +	$\alpha(S^*-E_1)$ +
	$(1-\alpha)\ C(S,T;E_3)$	0	$(1-\alpha)(S^*-E_3)$	$(1-\alpha)(S^*-E_3)$	$(1-\alpha)(S^*-E_3)$
B	$C(S,T;E_2)$	0	0	S^*-E_2	S^*-E_2
Relação Entre Valores		$X_A^* = X_B^*$	$X_A^* > X_B^*$	$X_A^* > X_B^*$	$X_A^* = X_B^*$

COMPOSIÇÃO DE CARTEIRAS:

A: α *calls* Brasileiras com preço de exercício E_1 e $(1-\alpha)$ *calls* Brasileiras com preço de exercício E_3

B: uma *call* Brasileira com preço de exercício E_2.

Apenas para simplificar assume-se que dividendos não foram distribuídos pela ação de referência.

Prova:

Considere duas opções de compra com diferentes preços de exercícios tais que $E_1 > E_2$. Sejam ainda duas carteiras:

A. uma call Brasileira com preço de exercício E_1 e
. títulos de renda fixa com valor $E_1 - E_2$ no vencimento e

B. uma call Brasileira com preço de exercício E_2.

Como apresentado na Tabela 4, no vencimento a carteira A terá um valor maior ou igual ao da carteira B[4] , o que implica em

$$C(S,T;E_1) + B(T)(E_1 - E_2) \geqslant C(S,T;E_2)$$

Reorganizando-se esta relação e observando-se o Teorema 6 obtém-se

$$-B(T)(E_1 - E_2) \leqslant C(S,T;E_1) - C(S,T;E_2) \leqslant 0$$

Dividindo-se esta relação por $E_1 - E_2$ e tomando-se o limite quando $E_2 \to E_1$ obtêm-se

$$-B(T) \leqslant \partial C(S,T;E) / \partial E \leqslant 0$$

Como opções Européias representam um caso idêntico ao de opções Brasileiras com D = 0 na Tabela 4, o resultado também decorre para elas. Como opções Americanas exercidas no vencimento são equivalentes a opções Européias os resultados a elas se estendem.

QED

Este teorema evidencia novamente a relevância de taxas de juros na formação do prêmio de opções.

TABELA 4

A relação entre a variação de prêmios de *calls* e a variação de preços de exercício

CARTEIRA		VALOR DA AÇÃO NO VENCIMENTO		
Composição	Valor	$S^* \leqslant E_2$	$E_2 < S^* < E_1$	$S^* \geqslant E_1$
A	$C(S,T;E_1) + (E_1 - E_2)\ B(T)$	$0 + (E_1 - E_2)$	$0 + (E_1 - E_2)$	$(S^* - E_1) + (E_1 - E_2)$
B	$C(S,T;E_2)$	0	$S^* - E_2$	$S^* - E_2$
Relação Entre Valores		$X^*_A > X^*_B$	$X^*_A > X^*_B$	$X^*_A = X^*_B$

COMPOSIÇÃO DE CARTEIRAS:

A: uma *call* Brasileira com preço de exercício E e títulos de renda fixa com valor de face $(E_1 - E_2)$

B: uma *call* Brasileira com preço de exercício E.

Apenas para simplificar assume-se que dividendos não foram distribuídos pela ação de referência.

IV. A FORMAÇÃO DE PRÊMIOS DE OPÇÕES DE COMPRA BRASILEIRAS

Da discussão das secções anteriores deve estar claro que o prêmio de uma opção Brasileira de compra depende de algumas variáveis institucionais diretas. Estas variáveis seriam o preço S da ação, o preço E de exercício, a maturidade T até o vencimento da opção e o nível D de dividendos distribuídos pela ação de referência e a que tem direito a opção. O efeito de uma elevação do preço da ação de referência sobre a formação do prêmio da opção fica bastante claro no Teorema 3 anterior. Elevando-se o preço da ação de referência eleva-se o patamar mínimo do valor da opção e deve também elevar-se o seu prêmio. O efeito de modificações na maturidade de vencimento sobre o valor de uma opção é explicitamente discutido no Teorema 7, ele mostra que quanto maior a maturidade e mais distante o vencimento da opção maior será o seu prêmio. O efeito de modificações no preço de exercício de opções também é explicitamente discutido na secção anterior em seu Teorema 5. Ele mostra que, em condições idênticas, quanto maior o preço de exercício de uma opção menor será o seu prêmio. Finalmente, a última variável institucional direta que influi na formação do prêmio da opção, os dividendos D distribuídos a que tem direito a opção, tem o efeito inteiramente semelhante ao de uma redução no preço de exercício. O preço de exercício efetivo de uma opção Brasileira é igual ao preço de exercício formal E menos o valor dos dividendos distribuídos D. Esta característica institucional de nosso mercado faz com que o efeito associado a uma elevação nos níveis de dividendos, em condições idênticas, seja equivalente a uma redução no preço de exercício da opção elevando o seu prêmio em mercado.

Além das variáveis institucionais diretas duas variáveis de mercado influenciarão o processo de formação de prêmios de opções de compra: a taxa de juros do mercado e o nível de risco de oscilações de preço da ação de referência. A relevância da taxa de juros decorre da possibilidade de se fazer uma aplicação hoje menor do que o preço de exercício mas que aplicada à taxa de juros gerará o seu valor no vencimento da opção. Esta relevância da taxa de juros foi explicitamente discutida nos Teoremas 7 a 9 da secção anterior, entre outros. Como uma elevação no nível da taxa de juros de mercado reduz o montante que deve ser aplicado hoje para gerar o preço de exercício no vencimento, o seu efeito é semelhante e equivalente a uma redução no nível do preço de exercício da opção. Decorre diretamente que o prêmio de uma opção deverá elevar-se junto com a elevação dos níveis de taxa de juros prevalecente no mercado.

O efeito do nível de risco da ação de referência sobre o prêmio da opção não foi discutido nas secções anteriores e não parece claro neste estágio. A consideração dos efeitos de risco sobre o prêmio de opções pode ser melhor desenvolvida considerando-se duas ações que tenham idêntico valor esperado em uma data futura, na qual vencem suas opções, mas que apresentem diferentes níveis de risco. Assuma ainda que o preço de exercício das duas opções (E) seja igual ao valor esperado das duas ações. Sendo a segunda ação a de maior risco de variação de preços e medindo-se risco pelo desvio padrão (σ) de variáveis de preços, a situação é apresentada graficamente na Figura 5. Como é lá indicado, a ação com maior nível de risco apresenta uma maior probabilidade de atingir níveis mais elevados de preços no vencimento da opção. Decorre que a ação com maior nível de risco deve pois ter um prêmio superior ao da opção com menor nível de risco. Na realidade, este resultado está associado à assimetria fundamental de opções que permite aos compradores limitarem as suas perdas apenas ao valor do prêmio. Esta assimetria implica em que o lado "ruim" de risco, ou seja o lado de perdas, não é relevante para os compradores de opções. Apenas o lado "bom" de risco, isto é, o risco de elevações substanciais no preço da ação, afeta o valor das opções e sendo um risco "bom" só pode afetar o seu prêmio favoravelmente.

A relevância das variáveis institucionais e de mercado acima para o processo de formação de preços de opções já era reconhecido há algum tempo. Entretanto, a sua integração em um modelo de equilíbrio, de formação de prêmios de opções custou a se desenvolver. Os trabalhos iniciais nesta direção são devidos a Bachelier [1] datando do princípio de século. Em meados da déca

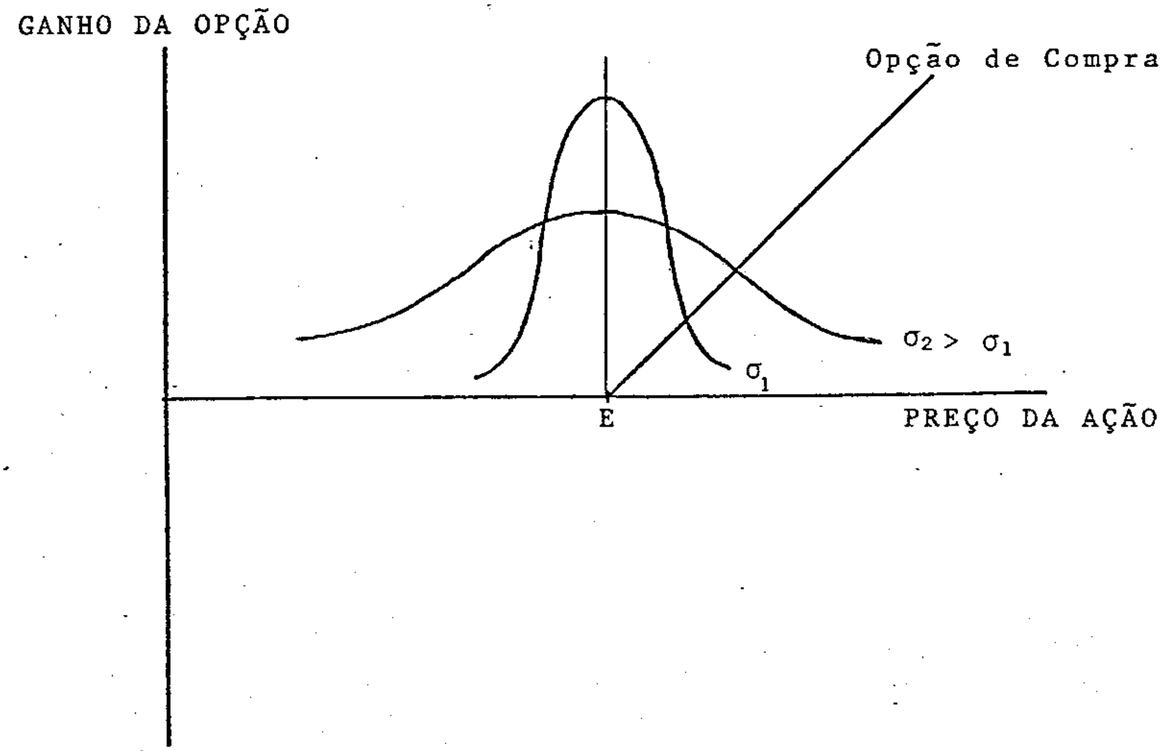


FIGURA 5

O efeito de risco sobre o valor de opções da de 60 novas incursões foram feitas na área por Sprenkle [13], Boness [3] e Samuelson [11] sem atingir a derivação de preços de equilíbrio e dependendo sempre de suposições e parâmetros determinados de forma *ad hoc*. A derivação de um modelo de equilíbrio geral de formação do prêmio de opções de compra deve-se a Black e Scholes [2] e Merton [9] em princípios da década de 70.

A derivação formal do modelo de equilíbrio de Black e Scholes [2] é razoavelmente complexa[5] devendo ser discutida em maior detalhe em trabalho futuro. Entretanto, o argumento fundamental desta derivação é fundamentalmente simples e merece ser discutido. Defina

$w = \frac{\Delta C}{\Delta S}$ = variação no prêmio da opção de compra Brasileira como proporção da variação do preço da ação de referência.

Esta variação proporcional, como discutido anteriormente, deve sempre acompanhar a direção da variação do preço da ação de referência sendo $w > 0$. Nestas condições considere a carteira X formada com posições simultâneas na opção e na sua ação de referência através de

compra de 1 ação e

venda de $\frac{1}{w}$ opções de compra.

Esta carteira não terá qualquer exposição a risco. Se o preço da ação subir as perdas na venda de opções compensarão exatamente a subida no nível do preço da ação. No caso contrário, se observar-se uma queda no nível de preço da ação os ganhos na posição de venda de opções compensarão as perdas na ação. Nestas condições, o valor da carteira X será

$$X = S - \frac{1}{w} C$$

e como seu nível de risco é nulo ela deverá apresentar uma rentabilidade igual à taxa de juros de renda fixa. Sendo

Δt = período de aplicação

ΔX = variação no valor da carteira X no período t e

r = taxa de juros de renda fixa

então o valor X da carteira deverá satisfazer à condição diferencial

$$\frac{\Delta X}{X} = r \quad \Delta t$$

Este é o argumento central de Black e Scholes [2] que prosseguem para obter a solução desta equação diferencial[6]. Esta solução determina o valor de opções Brasileiras de compra através da relação[7]

$$C(S,T;E) = S \; N(d_1) - e^{-rT} \; (E - D) \; N \; (d_2) \qquad (1)$$

sendo

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{E - D}) + (r + 1/2 \; \sigma^2) \; T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S}{E - D}) + (r - 1/2 \; \sigma^2) \; T}{\sigma\sqrt{T}}$$

onde

$C(S,T;E)$ = prêmio da opção Brasileira,

S = valor da ação,

E = preço de exercício da opção

D = dividendos distribuídos a que tem direito a opção Brasileira

e = 2,71828 = base neperiana,

T = maturidade até o vencimento da opção, em anos,

r = a taxa de juros composta continuamente e equivalente à taxa de renda fixa,

σ = desvio padrão da taxa anual de retorno, composta continuamente, da ação de referência da opção,

$\ln\left(\frac{S}{E-D}\right)$ = logaritmo neperiano de $\frac{S}{E-D}$ e

$N(d)$ = probabilidade que uma variável normal padrão (com média 0 e desvio unitário) assuma um valor menor que d.

Nestas relações as variáveis r e σ estão associadas à composição contínua de juros e merecem uma discussão mais detalhada. Comece em um ambiente onde a taxa de juros anual de renda fixa é 130%. O seu equivalente contínuo será

$$r = \ln(1 + 1{,}30) = 0{,}833$$

Considere agora o caso da ação e sua medida de risco. Determinando se a sua série de rentabilidades mensais em um determinado período pode-se prosseguir para determinar o desvio padrão σ_m desta série. O desvio padrão σ da taxa anual composta continuamente pode então ser estimado por

$$\sigma = \sigma_m \sqrt{12} = 3{,}46\ \sigma_m$$

A relação (1) pode também ser utilizada para determinar a razão w que determina a carteira sem risco envolvendo a ação e a opção. Esta razão é usualmente denominada de "razão de *hedge*" e decorre da relação (1) que[8]

$$w = N(d_1) \qquad (2)$$

Deve-se observar que d_1 é uma função de diversas variáveis entre as quais S, E, D, T, r e σ. Qualquer alteração nestas variáveis modificará a razão de *hedge* w.

A possibilidade de determinar a razão de *hedge* w explicitamente permite a composição de carteiras teoricamente sem risco nos mercados de ações e de opções. A administração de carteiras desta forma segue a chamada estratégia de "delta *hedge*"[9] e envolve o contínuo rebalanceamento de posições em ações e opções de modo a acompanhar as variações na razão w induzidas por variações nas variáveis que a determinam.

Com base na relação (1) pode-se também prosseguir para uma derivação formal dos efeitos de variações em cada um dos cinco parâmetros relevantes. Esta derivação é apresentada no Anexo I sob a hipótese simplificadora de dividendos nulos (D = 0)[10].

NR

V. PROPRIEDADES BÁSICAS DA FORMAÇÃO DE PRÊMIOS EM MERCADOS DE OPÇÕES DE VENDA

Opções de venda, as *puts*, não são ainda negociadas nos mercados brasileiros. Entretanto, tanto a Bolsa de Valores do Rio de Janeiro quanto a Bolsa de Valores de São Paulo já solicitaram à Comissão de Valores Mobiliários autorização para o início de negociações em opções de venda de ações. Neste contexto, o início de negociações em opções de venda parece ser apenas uma questão de tempo, o que torna relevante o seu melhor entendimento.

Como no caso de opções de compra as *puts* atualmente negociadas em mercados estrangeiros são de dois tipos: a Americana e a Européia. Também como no caso de opções de compra, os dois tipos de *puts* se distinguem apenas pela data de possível exercício . As *puts* Européias permitem o exercício apenas na data de vencimento enquanto as *puts* Americanas permitem o exercício em qualquer época até a data de vencimento da opção. Os dois tipos de opções oferecem completa proteção com relação à distribuição de direitos de subscrição e bonificação para as ações de referência mas não fazem qualquer ajuste sobre condições ou preço de exercício associado à distribuição de dividendos.

A *put* Brasileira, apesar de não existir, já foi em princípio projetada. Ela permitiria o exercício em qualquer época até a data de vencimento da opção, oferecendo proteção com relação à distribuição de direitos de bonificações e subscrição pelas ações de referência ao ajustar a quantidade de ações a serem entregues quando do eventual exercício. Adicionalmente, a *put* Brasileira oferece proteção com relação à distribuição de dividendos pela ação de referência ao reduzir o preço de exercício da opção pelo montante de dividendos distribuídos. O preço efetivo de exercício da *put* Brasileira será igual ao preço de exercício original da série (E) menos o valor dos dividendos distribuídos (D).

É interessante observar que o ajuste para dividendos no caso das *calls* brasileiras objetivava proteger o comprador da opção em relação aos ganhos de vendedor coberto. O caso das *puts* Brasileiras é diferente e o ajuste para dividendos objetiva oferecer proteção ao vendedor em relação ao comprador coberto. As implicações desta assimetria entre a proteção oferecida por *calls* e *puts* serão mais evidentes adiante. Uma delas é imediata, por oferecer proteção ao comprador de *calls*, o ajuste para dividendos eleva seus prêmios. Ao contrário, por oferecer proteção ao vendedor de *puts*, o ajuste para dividendos reduz os seus prêmios.

Antes de prosseguir para uma discussão de propriedades e prêmios de opções de venda convém definir melhor a nossa estrutura notacional. Definindo

$V(S,T;E)$ = o preço ou prêmio em t de uma opção Brasileira de venda com maturidade T (vencendo em t*) e com preço de exercício E,

$v(S,T;E)$ = o prêmio em t de uma opção Americana de venda com as mesmas características e

$v'(S,T;E)$ = o prêmio em t de uma opção Européia de venda também com as mesmas características,

esta secção prossegue, mantendo a notação anterior para as demais variáveis envolvidas.

Alguns limites podem ser estabelecidos para a formação de prêmios de *puts*. O primeiro deles decorre imediatamente da natureza do seu contrato que confere ao portador apenas o direito de exercício futuro e nenhuma obrigação. Como um direito não pode nunca ter um valor nulo os prêmios de quaisquer opções terão que ser não-negativos e

$$V(.),\ v(.)\ \text{e}\ v'(.) \geq 0$$

Outro limite é expresso pelo

Teorema 13: O prêmio da *put* Brasileira em sua data de vencimento será determinado por

$$V(S^*,0;E) = \text{Max}\ (0, E - D - S^*)$$

e os prêmios das *puts* Européia e Americana serão idênticos e determinados por

$$v(S^*,0;E) = v'(S^*,0;E) = \text{Max}\ (0, E - S^*)$$

Prova:

Os dois resultados decorrem diretamente da Figura 2a anterior e da condição de não-negatividade de prêmios de opções. Uma *put* Americana ou Européia só será exercida se $E > S^*$ e uma *put* Brasileira se $E - D > S^*$.

QED

Como *puts* Brasileiras e Americanas podem ser exercidas antes da data de vencimento elas permitem a derivação do

Teorema 14: Os prêmios de *puts* Brasileiras e Americanas devem ser superiores a limites determinados por

$$V(S,T;E) \geqslant \text{Max}\ (0, E - D - S) \text{ e}$$
$$v(S,T;E) \geqslant \text{Max}\ (0, E - S),$$

respectivamente.

Prova:

O prêmio de uma opção não pode ser inferior ao seu valor de imediato exercício. Se isto ocorresse todos comprariam a put para exercê-la o que estabelece, por arbitragem, as condições acima

QED

Como apenas as opções Brasileiras e Americanas permitem o exercício em qualquer data e a atuação do argumento de arbitragem, tais limites podem ser estabelecidos apenas para elas [11]. Observe que neste teorema, como no anterior o efeito da proteção em relação à distribuição de dividendos já fica claro. Esta proteção reduz o valor da opção Brasileira no seu vencimento bem como reduz o limite inferior de seu prêmio antes do vencimento.

Os preços de opções de compra, de opções de venda e de ações não podem ser determinados independentemente. A análise de sua relação de dependência constitui-se em aspecto relevante para o entendimento de opções. Considere um mercado negociando *calls* e *puts* com o mesmo preço de exercício. Como indicado na Figura 6, comprando-se uma *call* e vendendo-se uma *put* pode-se atingir uma reta de resultados no vencimento que é exatamente paralela à reta de resultados associada a uma posição na ação. Suponha que a reta associada à ação seja a indicada na figura onde $S > E$. Argumentos de arbitragem tenderiam a levar a um posicionamento de compra da posição conjunta em opções e venda da ação para obter os ganhos da diferença horizontal entre as retas paralelas. Estes argumentos estabelecem o

<u>Teorema 15:</u> A relação entre os preços de *puts* e *calls* européias com o preço da ação de referência deve ser

$$[v'(S,T;E) - c'(S,T;E) - E\ B(T)] + S = 0$$

Prova:

Considere a situação da Figura 6. Comprando-se uma posição em opções (compra de *call* e venda de put) necessariamente exige-se um desembolso do preço de exercício E na data de vencimento. Os ganhos desta posição, considerando o valor do dinheiro no tempo serão

$$v'(S,T;E) - c'(S,T;E) - E\ B(T).$$

NR

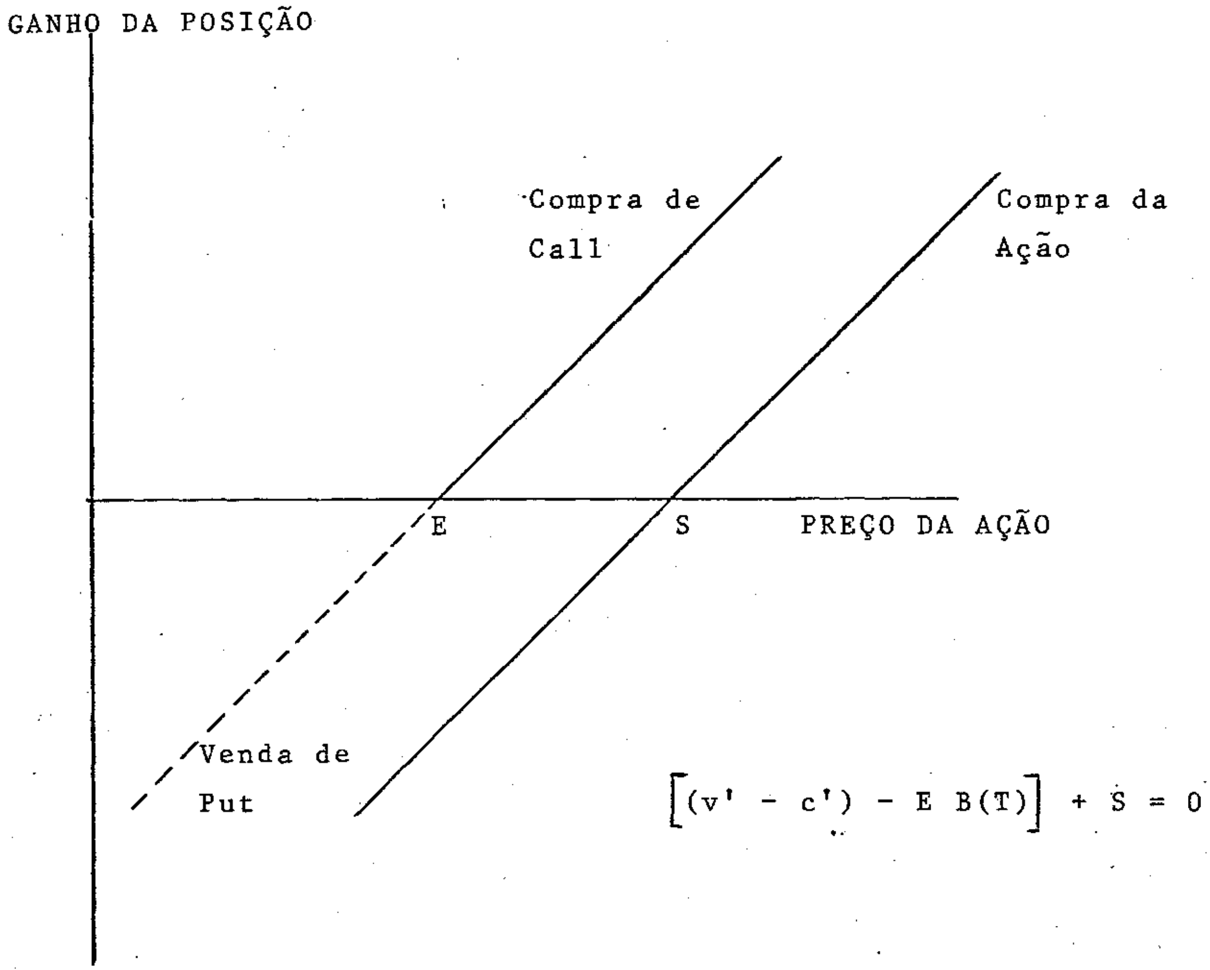


FIGURA 6

A paridade entre os prêmios de opções de compra e venda

Como os ganhos com a venda da ação serão iguais a S, o resultado total líquido da posição total envolvendo a compra da posição conjunta em opções e a venda da ação será

$$y'(S,T;E) - c'(S,T;E) - E\ B(T) + S$$

Esta posição total é de arbitragem pura e sem qualquer exposição a risco e seus resultados líquidos devem ser nulos, o que estabelece o teorema.

QED

Deve-se destacar que este teorema não é válido para opções Americanas e Brasileiras. Tanto as *calls* quanto as *puts* Americanas podem ser exercidas antes do vencimento. Apesar de nossas *calls* não serem exercidas antes do vencimento[12] nossas *puts* podem o ser. O exercício antecipado de *calls* Americanas está associado apenas à distribuição de dividendos mas, como discutido adiante, o caso dos dois tipos de *puts* é mais crítico e o exercício prematuro está associado ao comportamento de preços da ação de referência.

O teorema anterior é usualmente referido como teorema de paridade entre prêmios de opções de compra e de venda. Ele permite a derivação de um outro e importante teorema, relacionado à paridade entre preços em mercados futuros e prêmios de opções. Definindo-se

F = preço futuro da ação para entrega na mesma data de vencimento da opção,

pode-se estabelecer o

<u>Teorema 16</u>: A relação entre os prêmios de opções Européias de compra e venda de ações eo preço futuro da ação de referência para entrega na mesma data de vencimento da opção deve satisfazer a relação

$$y'(S,T;E) - c'(S,T;E) = (E - F)\ B(T)$$

Prova:

Como observado por Brito e Gibbon [5] e Brito e Sosin [6], a relação entre preços futuros e preços à vista de ações em equilíbrio deve ser determinada por

$S = F\ B(T)$

Substituindo-se esta relação na expressão do teorema anterior de paridade entre preços de opções obtém-se a relação deste teorema, estabelecendo-se a paridade entre preços de opções e preços futuros de ações.

QED

Como no caso anterior, este teorema é válido apenas para opções Européias que não permitem o exercício antecipado podendo pois ser comparadas a uma posição em mercado futuro cuja liquidação só se dará na data de vencimento[13]. A relação acima tem uma importante implicação, ela estabelece que posições em mercados futuros podem ser perfeitamente replicadas através do posicionamento em mercados de opções Européias de compra e venda. Neste contexto deve-se destacar dois aspectos,

(i) esta paridade só existe se o mercado de opções for do tipo Européia não vigorando em mercados de opções Brasileiras ou Americanas. Mais precisamente, o mercado futuro de ações nunca poderá ser replicado perfeitamente através de posições no mercado de opções Brasileiras devido a possibilidade de seu exercício antecipado, e

(ii) mesmo em mercados de opções Européias, a perfeita paridade entre mercados futuros e de opções só pode ser obtida existindo a negociação de opções de venda.

Em suma, como será melhor discutido em trabalho futuro, a equivalência e paridade entre mercados futuros e de opções só ocorrerá com a negociação de *puts* e será perfeita apenas no caso de opções

Européias sendo aproximada para opções Brasileiras e Americanas.

A relação do teorema de paridade entre preços de opções pode ser reorganizada, obtendo-se

$$v'(S,T;E) = c'(S,T;E) - S + E\ B(T) \tag{3}$$

Desta expressão pode-se obter algumas propriedades adicionais dos prêmios de *puts* Européias. Uma é apresentada no

Teorema 17: O prêmio de uma *put* Européia deve satisfazer à relação

$$v'(S,T;E) \leqslant E\ B(T)$$

Prova:

Como discutido anteriormente, o valor de uma opção de compra será sempre inferior ou igual ao preço da ação de referência. Isto implica que $c'(S,T;E) \leqslant S$ uma propriedade que substituída na relação (3) implica diretamente no teorema.

QED

Um caso particular deste teorema é o

Teorema 18: O prêmio de uma *put* Européia sobre uma ação de preço nulo é o valor descontado do preço de exercício,

$$v'(0,T;E) = E\ B(T)$$

Prova:

Decorre do Teorema 4 que $c'(0,T;E) = 0$. Substituindo-se $c'(0,T;E) = S = 0$ na relação (3) obtém-se este teorema.

QED

Estes teoremas são válidos apenas para *puts* Européias mas indicam a tendência geral dos efeitos de movimentos nas taxas de juros sobre os prêmios de *puts*. Uma elevação de taxa de juros reduz $B(T)$ e reduz o limite superior $E\ B(T)$ do prêmio de uma *put* Européia. Elevações de taxas de juros tendem a reduzir os prêmios de *puts*.

Uma importante variável no processo de determinação dos prêmios de *puts* é a sua maturidade T até o vencimento. Uma idéia do efeito desta maturidade sobre a formação dos prêmios de *puts* Européias é obtida no

Teorema 19 : O prêmio de uma *put* Européia perpétua deve ser nulo,

$$v'(S,\infty;E) = 0$$

Prova:

Como $B(\infty) = 0$, o resultado decorre diretamente do Teorema 17.

QED

Este resultado sugere que o efeito de um aumento na maturidade de uma opção Européia estará associado a uma redução no seu prêmio. Como será melhor discutido adiante, tal propriedade da formação dos prêmios de *puts* efetivamente se verifica a partir de uma determinada maturidade. Curiosamente, o efeito de maturidade sobre a formação dos prêmios de *puts* Brasileiras e Americanas é exatamente oposto. O aumento na maturidade para estas *puts* nunca poderá reduzir o seu prêmio como evidenciado no

Teorema 20: O prêmio de uma *put* Brasileira ou Americana com vencimento mais distante não pode ser inferior ao prêmio da *put* do mesmo tipo com vencimento mais próximo e em condições idênticas:

$$V(S,T_1;E) \geqslant V(S,T_2;E) \text{ e}$$
$$v(S,T_1;E) \geqslant v(S,T_2;E) \text{ se } T_1 > T_2$$

Prova:

Uma *put* Brasileira ou Americana com vencimento em T_1 tem todos os direitos de uma *put* com vencimento em T_2 e direitos adicionais no período $T_1 - T_2$. Por arbitragem a *put* mais distante não pode valer menos do que a próxima.

QED

A maioria dos resultados e propriedades anteriores foram derivados e são válidos apenas para opções de venda Européias. Isto decorre da probabilidade em geral positiva de que tanto as *puts* Brasileiras quanto as Americanas sejam exercidas antes de sua data de vencimento. Esta propriedade é demonstrada no

Teorema 21: Uma *put* Brasileira ou Americana apresenta sempre uma probabilidade finita e positiva de exercício antecipado

Prova:

Considere uma *put* Brasileira sobre uma ação com preço tal que

$$S < (E - D - S)\left(\frac{1}{B(T)} - 1\right)$$

ou seja, o valor da ação é menor do que os juros da aplicação do resultado líquido do exercício até o vencimento. Nestas condições, a opção será exercida pois o máximo ganho adicional até o vencimento será apenas S, se o preço da ação se anulasse.

Reorganizando-se a relação acima pode-se obter a condição do limite inferior do exercício antecipado da *put* Brasileira:

$$S < (E - D)\ 1 - B(T)$$

A probabilidade de que a *put* Brasileira seja exercida antecipadamente será pois superior à

$$\text{Probabilidade } \left[(0 < S < (E - D)(1 - B(T))\right]$$

sendo pois finita e positiva sempre que existir alguma probabilidade do preço da ação S situar-se em tal intervalo.

Os mesmos argumentos seriam desenvolvidos para opções Americanas apenas omitindo-se os dividendos distribuídos D.

QED

Ela resulta essencialmente da limitação superior que existe sobre os ganhos de uma posição em *puts*, uma limitação que não ocorre no caso de opções de compra. Tal limitação fica bastante clara na Figura 7. Como a ação não pode assumir valores negativos o valor máximo de uma *put* é determinado pelo seu preço de exercício, por outro lado, como não existe um limite superior para o preço de uma ação, os ganhos com a *call* também não são limitados superiormente. Esta assimetria resulta em uma probabilidade em geral positiva de exercício antecipado de *puts* Brasileiras e Americanas.

Considerando-se as cláusulas e condições das opções de venda Brasileiras, Americanas e Européias, as relações entre os seus prêmios devem satisfazer a algumas condições. Elas são expressas no

Teorema 22: Pode-se estabelecer as seguintes relações entre prêmios de opções de venda Brasileiras, Americanas e Européias:

$$v(S,T;E) \geqslant v'(S,T;E)$$
$$v(S,T;E) \geqslant V(S,T;E)$$
$$V(S,T;E) \gtreqless v'(S,T;E)$$

Prova:

A *put* Americana trata direitos de forma idêntica à Européia permitindo, entretanto, o exercício antecipado. Ela não pode pois valer menos, o que estabelece a primeira relação. A *put* Americana, como a Brasileira, permite o exercício antes do vencimento mas está imune ao ajuste para dividendos que vigora para nossas opções. Este ajuste reduz o valor da *put* Brasileira e estabelece a segunda relação.

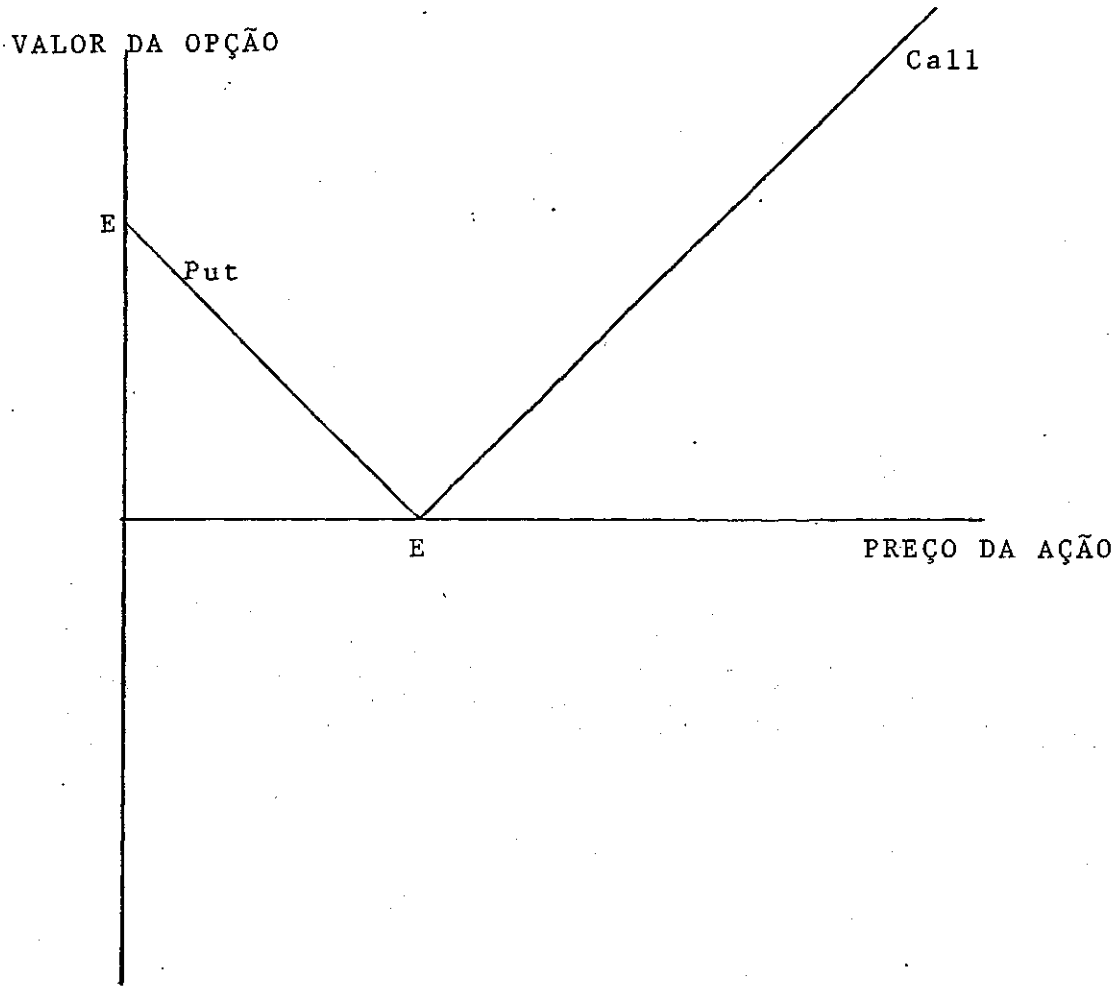


FIGURA 7

O limite do valor de opção de venda

Finalmente, a relação entre os prêmios de *puts* Brasileiras e Européias é indefinida. A *put* Brasileira tem a vantagem de permitir o exercício antecipado mas tem a desvantagem de ficar exposta ao ajuste de dividendos que reduz seu valor.

QED

Em suma, a opção de venda Americana deve apresentar um prêmio pelo menos igual ao de qualquer outro tipo de *put*.

VI. A FORMAÇÃO DE PRÊMIOS DE OPÇÕES DE VENDA

A derivação de expressões fechadas para a formação de preços de opções de venda Brasileiras e Americanas é uma tarefa complexa devido a sua possibilidade de exercício antecipado. Por outro lado, o teorema de paridade entre opções de compra e de venda, expresso na relação (3), permite a derivação do valor do prêmio de uma *put* Européia. Relembrando que o prêmio de uma *call* Européia é determinado por

$$c'(S,T;E) = S\ N(d_1) - E\ e^{-rT}\ N(d_2) \tag{4}$$

sendo um caso particular da expressão do prêmio de uma *call* Brasileira, derivada na secção 4. Todas as variáveis desta relação são definidas na secção 4, sendo d_1 e d_2 obtidos fazendo-se $D = 0$. Substituindo-se essa expressão do prêmio de uma *call* Européia na relação (3) pode-se obter o valor de uma *put* Européia que seria expresso por [14]

$$v'(S,T;E) = -\ S\ N(-d_1) + E\ e^{-rT}\ N(-d_2) \tag{5}$$

onde as variáveis seriam as mesmas definidas anteriormente, sempre fazendo-se $D = 0$.

Esta expressão do valor de uma *put* Européia permite o exame explícito do efeito de diversas variáveis sobre o seu prêmio. O efeito de variações no preço de exercício pode ser examinado através da relação

$$\frac{\partial v'(.)}{\partial E} = \frac{\partial c'(.)}{\partial E} + e^{-rT} = e^{-rT}\ N(-d_2) > 0, \tag{6}$$

ou seja, elevando-se o preço de exercício eleva-se o valor de uma *put* Européia. O efeito de variações no preço da ação pode ser examinado através da relação

$$\frac{\partial v'(.)}{\partial S} = \frac{\partial c'(.)}{\partial S} - 1 = -N(-d_1) < 0,$$

ou seja, elevando-se o preço da ação de referência reduz-se o prêmio de sua *put* Européia. O efeito de variações na taxa de juros pode ser examinado através da relação

$$\frac{\partial v'(.)}{\partial r} = \frac{\partial c'(.)}{\partial r} - TE\ e^{-rT} = -\ TE\ e^{-rT}\ N(-d_2) < 0, \tag{8}$$

ou seja, elevando-se o nível da taxa de juros reduz-se o prêmio de uma *put* Européia. O efeito de variações no nível de risco da ação de referência pode ser examinado através da relação.

$$\frac{\partial v'(.)}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial c'(.)}{\partial \sigma^2} > 0 \tag{9}$$

ou seja, elevando o nível de risco da ação de referência eleva-se o prêmio de sua *put*. O efeito de variações na maturidade T do vencimento da *put* Européia é um pouco mais complexo de ser analisado mas pode se mostrar que sempre existirá um valor limite superior da maturidade acima do qual o prêmio da *put* Européia se reduzirá com elevações em sua maturidade.

O valor do prêmio de uma *put* Americana é discutido por Brennan e Schwartz [4] e Cox, Ross e Rubinstein [8]. Estes autores mostram que o prêmio de uma *put* Americana não pode ainda ser determinado através de uma expressão fechada mas pode ser derivado por métodos numéricos, analíticos e assintóticos. Nestes procedimentos diversos componentes têm efeitos opostos o que torna a relação (5) uma relação inicial aproximada razoável para a formação do valor de uma *put* Americana sobre uma ação que não paga dividendos. A formação do prêmio de uma *put* Brasileira ainda não foi adequadamente examinada. Alguns aspectos são bastante evidentes, o valor de uma *put* Brasileira sobre uma ação de referência que não pagará dividendos até o vencimento deverá necessariamente ser igual ao valor de uma *put* Americana. Nesta situação, os resultados anteriormente derivados para tais *puts* Americanas tornam-se também válidos para nossas *puts*. Em particular, a relação (5) torna-se uma relação aproximada razoável para a formação do prêmio de *puts* Brasileiras. Entretanto, o valor de uma *put* Brasileira sobre uma ação que vai distribuir dividendos certos ou que apresenta uma probabilidade de distribuir dividendos incertos merece ser melhor examinado.

VII. CONCLUSÕES

Este trabalho examinou a formação de prêmios em mercados de opções de compra, as *calls*, e de venda, as *puts*. Mostra-se que estes prêmios são influenciados por diversas variáveis, a saber: o preço da ação de referência (S), o preço de exercício da opção (E), os dividendos distribuídos pela ação (D), a taxa de juros do mercado (r), a maturidade até o vencimento da opção (T) e o nível de risco da ação de referência (σ).

Limites básicos que devem ser satisfeitos por *calls* e *puts* Brasileiras, Americanas e Européias são derivados a partir de condições simples de arbitragem. O trabalho prossegue para apresentar relações fechadas de determinação dos prêmios de *puts* e *calls*, sempre que possível. Em particular, mostra-se que a derivação de tais relações para a formação de prêmios de *puts* Americanas e Brasileiras é uma tarefa bastante complexa.

Finalmente, este trabalho examinou alguns aspectos da paridade e equivalência entre mercados futuros e de opções. A equivalência entre estes mercados só poderá ocorrer com a existência de negociações em opções de venda. Mercados futuros e de opções de compra não são equivalentes nem comparáveis por transferir risco de forma fundamentalmente diferente. Mesmo com a negociação de *puts*, a equivalência entre mercados futuros e de opções só será perfeita para opções Européias sendo apenas aproximada para opções Americanas e Brasileiras devido à probabilidade de exercício antecipado destas opções.

NOTAS DE RODAPÉ

(1) A Figura 1a e a maior parte da discussão desta secção implicitamente assume que dividendos não foram distribuidos pela ação de referência da opção. Os efeitos de dividendos serão discutidos no final da secção.

(2) A derivação formal da validade da relação para opções de compra européias é apresentada no Anexo I que demonstra que $\frac{\partial c'}{\partial T} > 0$.

(3) Apenas para simplificar a derivação, a Tabela 3 assume que $D = 0$ e que a ação de referência não distribui dividendos.

(4) Também para simplificar assume-se que a ação não distribui dividendos e $D = 0$.

(5) Para ser preciso, Black e Scholes [2] derivam condições para a formação racional do prêmio de uma call Européia sob a suposição de que o preço da ação segue um processo do tipo movimento Browniano Geométrico. Os resultados podem ser precisamente estendidos para calls Brasileiras e Americanas que não distribuirão dividendos até seu vencimento mas serão apenas aproximados se dividendos forem distribuídos até o vencimento com certeza ou mesmo se existir alguma probabilidade de que tal evento ocorra.

(6) Cabe relembrar que a derivação de Black e Scholes [2] assume que o processo seguido por preços de ações é do tipo Movimento Browniano Geométrico. A derivação de prêmios para processos do tipo Poisson é discutida por Cox e Ross [7].Adicionalmente, Cox, Ross e Rubinstein 8 discutem prêmios para processos do tipo Binomial.

(7) Esta relação foi derivada para uma call Brasileira que distribuiu dividendos $D < E$. Na realidade, como estes dividendos influem sobre prêmios eles deveriam entrar explicitamen

te como argumento da função. A notação $C(S,T,D;E)$ seria talvez mais adequada para indicar o prêmio de uma call Brasileira. Ela não foi adotada apenas para manter consistência com a literatura anterior de opções.

(8) Esta razão de hedge w é definida por $\partial C(.)/\partial S$. Decorre diretamente da expressão de formação do prêmio que $\partial C(.)/\partial S = N(d_1)$

(9) Estratégias de "delta hedge" foram recentemente discutidas por Rubinstein e Leland [10] .

(10) A derivação dos resultados do Anexo I não é apresentada na literatura consultada. Os resultados finais das parciais são apresentados em Smith [12] com um erro em $\frac{\partial c'}{\partial T}$.

(11) Além de satisfazer a este limite inferior, todas as puts devem satisfazer a um limite superior associado a um preço nulo para a ação de referência:
$V(.) \leqslant E - D$ e $v(.)$, $v'(.) \leqslant E$

(12) Elas só seriam exercidas no improvável caso de $D > E$.

(13) Um caso especial do teorema acima ocorre quando $E = F$. Nele $v'(.) = c'(.)$ e opções de compra e venda devem assumir o mesmo valor.

(14) Além de substituir-se a relação (4) na relação (3) deve-se observar que, nas suposições de continuidade de Black e Scholes [2] , $B(T) = e^{-rT}$.

BIBLIOGRAFIA

(1) BACHELIER, L. "Theory of Speculation", in P. Cootner editor, The Random Character of Stock Market Prices, MIT Press, 1964.

(2) BLACK, F. e SCHOLES, M. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, Vol. 81, May 1973.

(3) BONESS, A. "Elements of a Theory of Stock Option Value", Journal of Political Economy, Vol. 72, April 1964.

(4) BRENNAN, M e SCHWARTZ, E. "The Valuation of American Put Options", Journal of Finance, May 1977.

(5) BRITO, N. e GIBBON, V. "Mercado Futuro de Ações: A evolução da base e suas implicações", COPPEAD - Pós-Graduação em Administração da UFRJ, Relatório de Pesquisa Nº 30, dez. 1981.

(6) BRITO, N. e SOSIN, H. "Os Fundamentos de testes empíricos do Mercado Futuro de Ações", COPPEAD - Pós-Graduação em Administração da UFRJ, Relatório de Pesquisa Nº 33, jun. 1982.

(7) COX, J. and ROSS, S. "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", Journal of Financial Economics, Jan. 1976.

(8) COX, J., ROSS, S. e RUBINSTEIN, M. "Options Pricing: A Simplified Approach", Journal of Financial Economics, Sept. 1979.

(9) MERTON, R. "Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science, Vol. 4, Spring 1973.

(10) RUBINSTEIN, M. e LELAND, H. "Replicating Options with Positions in Stock and Cash", Financial Analysis Journal, July 1981

(11) SAMUELSON, P. "Rational Theory of Warrant Pricing", Industrial Management Review, Spring 1965.

(12) SMITH, C. "Option Pricing: A Review", Journal of Financial Economics, Jan. 1976.

(13) SPRENKLE, C. "Warrant Prices as Indicators of Expectations and Preferences", in P. Cootner editor, The Random Character of Stock Market Prices, MIT Press, 1964.

ANEXO 1

OS EFEITOS PARCIAIS DAS VARIÁVEIS RELEVANTES PARA A FORMAÇÃO DE PRÊMIOS DE OPÇÕES

Os efeitos parciais serão analisados a partir da fórmula básica de Black e Sholes [2]:

$$C\ (S,T;E) = S\ N(d_1) - E\ e^{-rT}\ N(d_2)$$

onde:

$$d_1 = \frac{\left(\ln\ (S/E) + rT + \frac{\sigma^2 T}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

I - O Efeito de Taxa de Juros $\frac{\partial C}{\partial r}$

Da expressão básica de Black e Scholes [ ] obtêm-se

$$\frac{\partial C}{\partial r} = S\ N'(d_1)\ \frac{\partial d_1}{\partial r} - E\left\{e^{-rT}\ N'\ (d_2)\ \frac{\partial d_2}{\partial r} + N\ (d_2)(-T)\ e^{-rT}\right\} \quad (1)$$

$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{\partial d_2}{\partial r}$ e rearranjando d_1 obtêm-se

$$d_1 = \frac{\ln S/E + \ln\ e^{rT} + \frac{\sigma^2}{2}\cdot T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\ln\ (S\ e^{rT}/E) + \frac{\sigma^2}{2}\ T}{\sigma\sqrt{T}} \quad (1')$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial r} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\ \cancel{\frac{E}{S\ e^{rT}}}\ \cancel{\frac{S}{E}\ e^{rT}} \times T = \frac{T}{\sigma\sqrt{T}} = \frac{\sqrt{T}}{\sigma}$$

substituindo em (1)

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{S\sqrt{T}}{\sigma} N'(d_1) - E\ e^{-rT} \left\{ \frac{N'(d_2)\sqrt{T}}{\sigma} - N(d_2)\ T \right\} \qquad (2)$$

Da expressão da normal obtêm-se

$$N'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left[\text{Função Distribuição da Normal } (0,1) \right] =$$

$$= \text{função densidade da Normal } (0,1) \text{ em } x,$$

ou seja,

$$N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-x^2/2} \qquad (3)$$

Reorganizando-se (2)

$$\frac{\partial C}{\partial r} = \frac{S\sqrt{T}}{\sigma} N'(d_1) - E\ e^{-rT} \frac{N'(d_2)\sqrt{T}}{\sigma} + E\ e^{-rT} N(d_2)\ T$$

Vamos examinar os primeiros dois termos:

$$\frac{S\sqrt{T}}{\sigma} N'(d_1) - \frac{E\sqrt{T}}{\sigma} e^{-rT} N'(d_2) = \frac{\sqrt{T}}{\sigma} (S\ N'(d_1) - E\ e^{-rT} N'(d_2))$$

$$S\ N'(d_1) = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ S\ \ e^{-d_1{}^2/2}$$

$$- E\ \ e^{-rT} N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ E\ \ e^{-rT}\ \ e^{-d_2{}^2/2}$$

$$\text{SOMA} = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(S\ e^{-d_1^2/2} - E\ e^{-(rT + d_2^2/2} \right)$$

mas

$$S\ e^{-d_1{}^2/2} - E\ e^{-(rT + d_2{}^2/2)} = \frac{S - E\ e^{\left(-rT - \frac{d_2^2}{2} + \frac{d_1^2}{2}\right)}}{e^{-d_1{}^2/2}} \qquad (4)$$

observe que

$$d_2^2 = d_1^2 + \sigma^2 T - 2\, d_1\, \sigma \sqrt{T}$$

e

$$-rT + \frac{d_1^2 - d_2^2}{2} = rT + \frac{\cancel{d_1^2} - \cancel{d_1^2} - \sigma^2 T + 2 d_1\, \sigma \sqrt{T}}{2} =$$

$$= -rT - \frac{\sigma^2\, T}{2} + \sigma \sqrt{T}\, d_1 = \cancel{rT} - \frac{\cancel{\sigma^2}\, T}{\cancel{2}} + \ln S/E + \cancel{rT} + \frac{\cancel{\sigma^2}\, T}{\cancel{2}} =$$

$$= \ln S/E$$

O numerador de (4) reduz-se a

$$S - E\,\frac{S}{E} = 0 \rightarrow S\, N'(d_1) - E\; e^{-rT}\, N'(d_2) = 0 \qquad (5)$$

decorre que

$$\frac{\partial C}{\partial r} = E\; T\; e^{-rT}\; N(d_2) > 0$$

II - O EFEITO DE RISCO $\left(\frac{\partial C}{\partial \sigma^2}\right)$

Da expressão básica de Black e Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma^2} = S\;\; N'(d_1) - E\;\; e^{-rT}\;\; N'(d_2)\, \frac{\partial\, d_2}{\partial \sigma^2} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial d_1}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\left[\frac{\ln(S/E) + rT}{(\sigma^2)^{1/2}\sqrt{T}}\right] + \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial^2\ T}{2\ \sigma\sqrt{T}}}_{\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}}\Bigg) =$$

$$= \left[\ln(S/E + rT\right]\ \left(-\frac{1}{\sigma^2\ T}\right)\ \frac{\sqrt{T}}{2}\ (\sigma^2)^{-1/2} + \frac{\sqrt{T}}{2}\left(\frac{1}{2}\ (\sigma^2)^{-1/2}\right)$$

$$= -\ (\ln(S/E) + rT)\ \frac{\sqrt{T}}{2\ \sigma^3 T} + \frac{\sqrt{T}}{4\ \sigma}$$

$$\frac{\partial\ d_2}{\partial\ \sigma^2} = \frac{\partial\ d_1}{\partial\ \sigma^2} - \frac{\partial}{\partial \sigma^2}\ \sigma\sqrt{T} = \frac{\partial\ d_1}{\partial\ \sigma^2} - \frac{\sqrt{T}}{2\ \sigma} \qquad (7)$$

Substituindo-se (7) em (6) obtêm-se

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma^2} = \underbrace{S\ N'(d_1)\ \frac{\partial\ d_1}{\partial \sigma^2} - E\ \ e^{-rT}\ N'(d_2)\ \frac{\partial\ d_1}{\partial\ \sigma^2}}_{\emptyset} + \frac{\sqrt{T}}{2\ \sigma}\ E\ e^{-rT}\ N'(d_2))$$

Analisando-se os dois primeiros termos desta relação obtêm-se

$$\emptyset = \frac{\partial\ d_1}{\partial \sigma^2}\ (\ S\ N'(d_1) - E\ \ e^{-rT}\ \ N'(d_2))$$

e decorre da relação (5) anterior que

$$\frac{\partial\ C}{\partial\ \sigma^2} = \frac{\sqrt{T}}{2\ \sigma}\ \ E\ \ e^{-rT}\ \ N'(d_2)\ > \ 0$$

III - O EFEITO DE PREÇOS DE EXERCÍCIO $\frac{\partial C}{\partial E}$

Da expressão básica de Black e Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial E} = S\ N'(d_1)\ \frac{\partial d_1}{\partial E} - \left\{ e^{-rT}\ N(d_2) + E\ e^{-rT}\ N'(d_2)\ \frac{\partial d_2}{\partial E} \right\} =$$

$$= S\ N'(d_1)\ \frac{\partial d_1}{\partial E} - E\ \ e^{-rT}\ N'(d_2)\ \frac{\partial d_2}{\partial E} - \ e^{-rT}\ N(d_2)$$

como

$$\frac{\partial d_1}{\partial E} = \frac{\partial d_2}{\partial E}$$

decorre da relação (5) que

$$\frac{\partial C}{\partial E} = - \ e^{-rT}\ N(d_2) < 0$$

IV - O EFEITO DE MATURIDADE $\frac{\partial C}{\partial T}$

Da expressão básica de Black e Scholes:

$$\frac{\partial C}{\partial T} = S\ N'(d_1)\ \frac{\partial d_1}{\partial T} - E \left\{ - r\ e^{-rT}\ N(d_2) + e^{-rT}\ N'(d_2)\ \frac{\partial d_2}{\partial T} \right\} \qquad (8)$$

da relação (1')

$$\frac{\partial d_1}{\partial T} = \frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\ \sigma\sqrt{T} - \overbrace{\left(\ln\ (S\ e^{rT}/E + \frac{\sigma^2\ T}{2}\right)}^{d_1\ \sigma\sqrt{T}}\ \frac{\sigma}{2\sqrt{T}}}{\sigma^2\ T} =$$

$$= \frac{r}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\cancel{\sigma^2}\sqrt{T}}{2\cancel{\sigma^2}T} - \frac{d_1\cancel{\sigma}\sqrt{T}\cancel{\sigma}}{2\cancel{\sigma^2}T\sqrt{T}} = \frac{r}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{d_1 - \sigma\sqrt{T}}{2T} = \frac{r}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{d_2}{2T}$$

da definição de d_2,

$$\frac{\partial d_2}{\partial T} = \frac{\partial d_1}{\partial T} - \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} = \frac{r}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{d_2}{2T} - \frac{\sigma\sqrt{T}}{2T} = \frac{r}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{d_1}{2T}$$

$$N'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-d_1^2/2} \quad \text{e} \quad N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-d_2^2/2}$$

substituindo em (8) obtêm-se

$$\frac{\partial C}{\partial T} = E\, r\, e^{-rT} N(d_2) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[S\, e^{-\frac{d_1^2}{2}} \left(\frac{r}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{d_2}{2T} \right) - E\, e^{-\left(rT + \frac{d_2^2}{2}\right)} \times \left(\frac{r}{\sigma\sqrt{T}} - \frac{d_1}{2T} \right) \right] \qquad (9)$$

nesta relação o termo entre colchetes pode ser expresso por

$$[\,\cdot\,] = \frac{r}{\sigma\sqrt{T}} \underbrace{\left(S\, e^{-d_1^2/2} - E\, e^{-(rT + d_2^2/2)} \right)}_{= 0 \text{ pela relação } (5)} +$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{d_1}{2T}\, E\, e^{-rT}\, e^{-d_2^2/2} - \frac{d_2}{2T}\, S\, e^{-d_1^2/2} \right)}$$

o termo entre parentesis pode ser expresso por

$$(\cdot) = \frac{d_1}{2T} \; E \; e^{-rT} \; e^{-d_2^2/2} - \frac{d_1 - \sigma\sqrt{T}}{2T} \; S \; e^{-d_1^2/2} =$$

$$= \frac{d_1}{2T} \left(E \; e^{-rT} \; e^{-d_2^2/2} - S \; e^{-d_1^2/2} \right) + \frac{T}{2T} \; S \; e^{-d_1^2/2}$$

$$= 0 \text{ pela relação (5)}$$

Substituindo-se na relação (9) obtem-se

$$\frac{\partial C}{\partial T} = E \; r \; e^{-rT} \; N(d_2) + \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} \; S \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \; e^{-d_1^2/2} =$$

$$= E \; r \; e^{-rT} \; N(d_2) + \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} \; S \; N'(d_1)$$

da relação (5), $S \; N'(d_1) = E \; e^{-rT} \; N'(d_2)$, o que implica

$$\frac{\partial C}{\partial T} = E \; e^{-rT} \left(r \; N(d_2) + \frac{\sigma}{2\sqrt{T}} \; N'(d_2)\right) > 0$$