



GRAFOS ORTH[H, S, T]

José Wilson Coura Pinto

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Jayme Luiz Szwarcfiter

Rio de Janeiro
Setembro de 2018

GRAFOS ORTH[H, S, T]

José Wilson Coura Pinto

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

Prof. Claudson Ferreira Bornstein, Ph.D.

Prof. Marcia Rosana Cerioli, D.Sc.

Prof. Luérbio Faria, D.Sc.

Prof. Raquel de Souza Francisco Bravo, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
SETEMBRO DE 2018

Pinto, José Wilson Coura

Grafos ORTH[h, s, t]/José Wilson Coura Pinto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2018.

XIV, 82 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Jayme Luiz Szwarcfiter

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2018.

Referências Bibliográficas: p. 77 – 82.

1. Grafos de Interseção. 2. Grafos Linha. 3. Grafos ORTH[h, s, t]. 4. p -interseção. 5. Grafos de interseção de subárvores. I. Szwarcfiter, Jayme Luiz. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*À toda minha família,
principalmente às minhas avós
Naná e Neyde e meus amados
filhos Lucas e Carolina.*

Agradecimentos

Quando pensei em fazer o doutorado, não fazia ideia do quanto minha vida se transformaria. A boa notícia é que mudou para melhor ! O intenso contato com o ambiente de pesquisa dentro e fora da Coppe, assim como o agradabilíssimo convívio com meus colegas, professores e em especial com meus orientadores, me conquistaram.

Não poderia deixar de agradecer a algumas pessoas que fizeram parte desta etapa. Agradeço aos meus amigos e familiares pela compreensão com minha falta de atenção durante este período, principalmente a minha esposa Jacieli e meus filhos Carolina e Lucas. Aos membros da banca examinadora pelas importantes contribuições. Agradeço aos alunos, funcionários e professores da Coppe, especialmente às professoras Márcia Cerioli e Celina Miraglia. Ao professor Dieter Rautenbach por sua contribuição em várias etapas da minha pesquisa. É importante também agradecer ao professor Robson Mariano e a professora Simone Martins, meus orientadores de graduação e mestrado, respectivamente. Apesar de já estarem incluídos nos agradecimentos anteriores, gostaria de registrar um agradecimento especial aos meus orientadores Jayme Szwarcfiter e Claudson Bornstein que além de me orientarem durante o período do doutoramento, também contribuíram significativamente para minha formação profissional e pessoal.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

GRAFOS ORTH[H, S, T]

José Wilson Coura Pinto

Setembro/2018

Orientador: Jayme Luiz Szwarcfiter

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Grafos de interseção é um assunto que desperta grande interesse de pesquisadores da área de teoria dos grafos desde a década de 60. Nesta tese estudamos os grafos de interseção de subárvores de uma árvore.

Mais precisamente vamos apresentar resultados sobre a classe de grafos ORTH[h, s, t]. Os grafos que pertencem a esta classe são aqueles que admitem uma representação por interseção de subárvores de uma árvore hospedeira, na qual o grau máximo da árvore hospedeira é h , o grau máximo de qualquer subárvore é s , todas as folhas das subárvores também são folhas da árvore hospedeira e dois vértices são adjacentes no grafo se e somente se suas subárvores correspondentes possuem no mínimo t nós em comum e ao menos um destes nós é uma folha.

Resultados de representabilidade, não-representabilidade e complexidade para classes ORTH[h, s, t] com a variação do valores dos parâmetros h , s ou t estão presentes neste trabalho.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ORTH[H, S, T] GRAPHS

José Wilson Coura Pinto

September/2018

Advisor: Jayme Luiz Szwarcfiter

Department: Systems Engineering and Computer Science

Intersection graphs are a topic that has attracted great interest from researchers in the area of graph theory since the 1960s. In this thesis we study the intersection graphs of subtrees of a tree.

More precisely we will present results on the class of graphs $\text{ORTH}[h, s, t]$. The graphs that belong to this class are those that admit a representation by intersection of subtrees of a host tree, in which the maximum degree of the host tree is h , the maximum degree of any subtree is s , all leaves of the subtree are also leaves of the host tree and two vertices are adjacent in the graph if and only if their corresponding subtrees have at least t nodes in common and at least one of these nodes is a leaf.

Results of representability, non-representability and complexity for classes $\text{ORTH}[h, s, t]$ with the different values of the parameters h , s or t are present in this work.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
2 Conceitos Preliminares e Revisão Bibliográfica	5
2.1 (h,s,t)-representação	7
3 Grafos ORTH[h,2,t]	13
3.1 Propriedades Gerais	14
3.1.1 Grafos Linha	17
3.1.2 ORTH[h,2,t] e grafos linha	20
3.1.3 Árvore Layout	23
3.2 $ORTH[h, 2, t] \neq ORTH[3, 2, t]$	25
3.3 Reconhecendo Subclasses de ORTH[h,2,t]	29
3.4 Largura em Árvore de um grafo ORTH[h,2,t]	33
3.5 ORTH[3,2,2]	34
3.6 ORTH[3,2,3]	35
4 Grafos ORTH[3,3,3]	43
4.1 Preliminares	43
4.2 Grafos ORTH[3,3,3] com clique separadora	45
4.3 Decomposição por cliques minimais separadoras	49
4.3.1 Decomposição de $G \in ORTH[3, 3, 3]$ por clique minimal separadora	49
4.3.2 Como decompor $G \in ORTH[3, 3, 3]$	50
4.3.3 Como recompor $G \in ORTH[3, 3, 3]$	55
5 Grafos Bipartidos Completos em ORTH[3,3,t]	57
5.1 Preliminares	58
5.2 $K_{n,n} \notin ORTH[3, 3, n]$	60

5.3	$K_{3,n} \in \text{ORTH}[3, 3, t]$	65
5.4	$K_{n,n} \in \text{ORTH}[3, 3, t]$	67
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	74
	Referências Bibliográficas	77

Lista de Figuras

2.1	(a) $(\infty, \infty, 2)$ -representação do grafo G (Bull); (b) $(\infty, \infty, 3)$ -representação do grafo G (Bull).	10
3.1	Classe $\text{ORTH}[2, 2, 1]$. Em (a) temos a árvore hospedeira T formada por apenas um nó x , dessa forma G é um grafo completo. Em (b) temos T formado por um caminho entre os nós y e z , dessa forma o conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em três cliques A , B e C , tal que $E(G)$ contém todas as arestas entre A e B , todas as arestas entre B e C	14
3.2	Classe $\text{ORTH}[2, 2, t]$ com $t \geq 2$. Em (a) temos a árvore hospedeira T formada por apenas um nó x , dessa forma G é um grafo trivial. Em (b) temos T formado por um caminho entre os nós y e z , e o conjunto \mathcal{S} pode ser formado por diversas cópias de T , formando uma clique. Em (c) temos T formado por um caminho entre os nós y e z , entretanto as subárvores que pertencem a \mathcal{S} são formadas apenas por um nó cada, y ou z	15
3.3	Relação dos nove subgrafos induzidos proibidos para grafos linha. . .	18
3.4	Os sete subgrafos induzidos proibidos para grafos linha de multigrafos	19
3.5	Árvore com número máximo de folhas em função do grau máximo h e distância máxima entre duas folhas d : (a) com d ímpar; (b) com d par.	26
3.6	Em uma $\mathcal{T}(h, t)$ dois caminhos que não compartilham folha devem possuir no máximo $t - 1$ nós em comum.	28
3.7	(a) Exemplo de uma separação de um grafo G . Não existem vértices de A/B adjacentes a vértices de B/A	29

3.8	(a) Os conjuntos A e B são partes da partição do grafo H , O vértice a pertence ao conjunto A e o vértice b pertence ao conjunto B , tal que cada aresta de $E(H)$ entre A e B incide em a , e b é vizinho de a . (b) Subgrafos $H_A = H[A \cup \{b\}]$ e $H_B = H[B \cup \{a\}]$. (c) As árvores T_A e T_B são (h, t) -árvores layout de H_A e H_B , respectivamente. Fazendo T a união disjunta de T_A e T_B , adiciona-se uma aresta entre a' e b' , com isso se obtém T que é (h, t) -árvore layout de H	32
3.9	(a) As três componentes S, S' e S'' de $\mathcal{T}_{(3,3)} - x$. (b) As três componentes S, S' e S'' de $\mathcal{T}_{(3,3)} - x$ e os caminhos p_1, p_2, p'_2 e p_3	36
3.10	(a) Caso 1: as folhas $u_1, u_2 \in S$. (b) Caso 2: as folhas $u_1, u'_1 \in S, u_2, u'_2 \in S'$ e $u_3, u'_3 \in S''$. (c) Caso 3: as folhas $u_1, u'_1 \in S$ e $u_2, u'_2, u_3, u'_3 \in S'$. (d) Caso 4: as folhas $u_1, u'_1 \in S, u_2, u_3, u'_3 \in S'$ e $u'_2 \in S''$	39
3.11	(a) Grafo planar H . (b) Grafo G , que é grafo linha de H	40
3.12	(a) Caminho $P_{(ab)}$ em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ e uma subárvore T_i ; (b) Caminho $P_{(ab)}$ em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ com as subárvores $T_p, T_{p'}$ e $T_{p''}$ que possuem respectivamente as folhas a_1, a_2 e a_3	41
4.1	As subárvores $\{S_a, S_b, S_c, S_d\} \in \mathcal{S}_i$ e a subárvore $S_e \in \mathcal{S}_j$. A interseção entre δ_i e δ_j é o caminho que vai de x^- a y^-	46
4.2	Aresta $uv \in E(T)$ que separa \mathcal{S}^{+u} e \mathcal{S}^{+v}	48
4.3	Caminho P_j entre o nó $p \in S_C$ e uma subárvore componente δ_j	48
4.4	(a) Interseção de $p \in S_C$ com duas subárvores componente δ_i e δ_j . (b) Interseção de $p \in S_C$ com três subárvores componente δ_i, δ_j e δ_l	49
4.5	(a)O Grafo original G . (b)Decomposto por $C = \{c, d\}$. (c)Decomposto por $C = \{c, f\}$. (d)Decomposto por $C = \{c, f, g\}$	50
4.6	Árvore de decomposição do grafo G	51
4.7	O nó $p \in \delta_i \cap S_C$, logo todas as subárvores $S \in \mathcal{S}_C$ compartilham p . Além disso, temos P_3^i que é formado por $\{p, u, v\}$	52
4.8	Temos o subcaso (b.1) com quatro subárvores componete e $S_C \subset \delta_1$. Os nós pretos representam a subárvore clique S_C	53
4.9	Exemplo do subcaso (b.2) com duas subárvores componentes e $S_C \subset P_{12}$. Os nós pretos representam a subárvore clique S_C	55
4.10	(a) As representações (T_i^*, \mathcal{S}_i^*) e (T_j^*, \mathcal{S}_j^*) antes da fusão, em destaque $P_3^i = \{p_i, u_i, v_i\}$ e $P_3^j = \{p_j, u_j, v_j\}$. (b) A representação (T, \mathcal{S}) após a fusão.	56

5.1	(a) Existem as folhas f_{a1} compartilhada por $S_a S_1$ em T_x e f_{a2} compartilhada por $S_a S_2$ em T_y . (b) O nó v é compartilhado pelas subárvores $S_a S_1$. Em T_x existe uma folha f_{a1} compartilhada por $S_a S_1$. Existem também uma subárvore S_i contida em T_y e uma subárvore S_j contida em T_z	61
5.2	Esboço da tentativa de construção de uma árvore base T de $K_{4,4}$. A maior distância entre duas subárvores quaisquer de T é $ P_{xy} $. As indicações L_1 , L_2 e L_3 determinam os tipos dos nós internos em T . . .	61
5.3	Esboço da tentativa de construção de uma árvore base T de $K_{4,4}$. Todas as subárvores compartilham o nó x . As indicações L_1 , L_2 e L_3 determinam os tipos dos nós internos em T	62
5.4	Esboço da tentativa de construção de uma árvore base T de $K_{5,5}$. A maior distância entre duas subárvores quaisquer de T é $ P_{xy} $. As indicações L_1 , L_2 , L_3 e L_4 determinam os tipos dos nós internos em T	63
5.5	Esboço da tentativa de construção de uma árvore base T de $K_{5,5}$. Todas as subárvores compartilham o nó x . As indicações L_1 , L_2 , L_3 e L_4 determinam os tipos dos nós internos em T	65
5.6	Exemplo de uma representação ORTH[3, 3, 2[log ₂ n] + 3] de um $K_{3,8}$	66
5.7	(a) Representação de um $K_{2,2}$ cujas partes são $\mathcal{L} = \{a, b\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. (b) Representação de um $K_{4,4}$ a partir de 4 representação do $K_{2,2}$	68
5.8	(a) Representação de um $K_{n/2, n/2}$ onde a parte \mathcal{L}' está particionada em dois conjuntos \mathcal{L}'_1 e \mathcal{L}'_2 de cardinalidade $ \mathcal{L}' /2$. Assim como, a parte \mathcal{N}' está particionada em dois conjuntos \mathcal{N}'_1 e \mathcal{N}'_2 de cardinalidade $ \mathcal{N}' /2$. (b) Representação de um $K_{n, n}$ onde a parte \mathcal{L} está particionada em dois conjuntos \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 de cardinalidade $ \mathcal{L} /2$. Assim como, a parte \mathcal{N} está particionada em dois conjuntos \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 de cardinalidade $ \mathcal{N} /2$	69
5.9	(a) Representação de um $K_{3,3}$ cujas partes são $\mathcal{L} = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. (b) Representação de um $K_{9,9}$ a partir da representação do $K_{3,3}$. Cada folha corresponde a uma representação de um $K_{3,3}$ cujas suas partes são definidas pelos conjuntos de vértices descritos nos rótulos. A folha de rótulo "abc 123" detalha a representação.	70

5.10 (a) Representação de um $K_{n/3, n/3}$ onde a parte \mathcal{L}' está particionada em três conjuntos \mathcal{L}'_1 , \mathcal{L}'_2 e \mathcal{L}'_3 de cardinalidade $|\mathcal{L}'|/3$. Assim como, a parte \mathcal{N}' está particionada em três conjuntos \mathcal{N}'_1 , \mathcal{N}'_2 e \mathcal{N}'_3 de cardinalidade $|\mathcal{N}'|/3$. (b) Representação de um $K_{n, n}$ onde a parte \mathcal{L} está particionada em três conjuntos \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 de cardinalidade $|\mathcal{L}|/3$. Assim como, a parte \mathcal{N} está particionada em três conjuntos \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 e \mathcal{N}_3 de cardinalidade $|\mathcal{N}|/3$ 72

Lista de Tabelas

2.1	Classes $[h, s, t]$ já definidas	11
3.1	Maior valor de n tal que $L(K_n) \in \text{ORTH}[h, 2, t]$ em função de h e t	29

Capítulo 1

Introdução

Em teoria dos grafos, **Grafos de Interseção** é um assunto de grande importância que desperta interesse de pesquisadores desta área desde a década de 60. O conceito de Grafos de Interseção consiste em dado um conjunto \mathcal{S} e uma coleção de subconjuntos $S_v \subseteq \mathcal{S}$, associar a cada subconjunto S_v um vértice $v \in V(G)$ de forma que uma aresta $uv \in E(G)$ existe, se e somente se $S_u \cap S_v \neq \emptyset$, para $u \neq v$.

Este trabalho é integralmente dedicado a grafos de interseção. Scheinerman, em [40] fornece condições necessárias e suficientes sobre uma dada classe \mathcal{C} , que garanta a existência de uma família \mathcal{S} , tal que \mathcal{S} é uma representação de G , para todo grafo G de \mathcal{C} .

O problema de caracterizar os grafos de interseção de famílias de subconjuntos de um conjunto, no qual o conjunto possui alguma topologia específica é interessante do ponto de vista teórico e prático.

O interesse por estudar grafos deste tipo deu origem a diversas outras variantes, como por exemplo Grafos de Intervalo. O grafo G é um **Grafo de Intervalo** se intervalos fechados $I_v \subset \mathbb{R}$ são associados a cada vértice $v \in V(G)$ e uma aresta $uv \in E(G)$ se, e somente se $I_u \cap I_v \neq \emptyset$, para $u \neq v$. Lekkerkerker e Boland[37] caracterizaram grafos de intervalos por subgrafos induzidos proibidos.

Um **Grafo Cordal** é aquele que não possui ciclos induzidos com mais de três vértices sem corda. Em 1974, Gavril [21] mostrou que um grafo G é um **Grafo de Interseção de uma Família de Subárvores de uma Árvore** se e somente se G é um grafo cordal. Um grafo G é considerado grafo de interseção de uma família de subárvores de uma árvore hospedeira T se existe uma família \mathcal{S} de subárvores de T , onde cada subárvore $S_v \in \mathcal{S}$ está associada a um vértice $v \in V(G)$, e $uv \in E(G)$ se e somente se $S_u \cap S_v \neq \emptyset$. **Grafo de Tolerância** introduzidos por Golumbic and Monma[25] é uma generalização de grafos de intervalo, na qual cada vértice $v \in V(G)$ está associado a um par (I_v, t_v) , onde $I_v \subset \mathbb{R}$ e $t_v \in \mathbb{Z}^+$, satisfazendo $uv \in E(G)$ se, e somente se $|I_u \cap I_v| \geq \min\{t_u, t_v\}$.

Utilizando a ideia de tolerância nos grafos de interseção, estabeleceu-se que

o grafo G possui uma ***p-representação*** (*p-intersection representation*) quando os vértices $v \in V(G)$ são associados aos subconjuntos $S_v \subseteq S$ de tal forma que as arestas $uv \in E(G)$ existem, se e somente se $|S_u \cap S_v| \geq p$, para $u \neq v$. O ***número de p-interseção*** (*p-intersection number*) de um grafo G , denotado por $\theta_p(G)$, representa o valor mínimo da cardinalidade de S para que G admita uma p -representação. Erdos et al. [20] provaram que em todo grafo G com n vértices, o número de interseção $\theta_1(G)$ é no máximo $n^2/4$. Estudos sobre o número de p -interseção $\theta_p(G)$ com $p > 1$ são apresentados em [13, 18].

Recentemente, estudamos a caracterização por subgrafos induzidos proibidos das famílias de grafos cujas representações admitem um determinado *número de p-interseção*. Em outras palavras, caracterizamos algumas famílias de grafos que podem ser representadas com $\theta_p(G) = d$. Os estudos sobre este assunto resultaram no artigo *Forbidden Induced Subgraphs for Bounded p-Intersection Number* publicado em 2016 [11].

É simples mostrar que qualquer grafo G é um grafo de interseção. Sua representação pode ser obtida associando cada elemento do conjunto $\mathcal{S} = \{a, b, c, \dots\}$ a uma aresta $uv \in E(G)$. Cada vértice $v \in V(G)$ será associado a um subconjunto $S_v \subseteq \mathcal{S}$, tal que $S_v = \{f(uv)/uv \in E(G)\}$. Nesta 1-representação de G a cardinalidade $|\mathcal{S}|$ é igual ao número de arestas de G . Grafos de interseção de arestas de subárvores de uma árvore também podem representar qualquer grafo G .

Este trabalho trata de grafos que possuem uma ***(h,s,t)-representação***, introduzido por Jamison e Mulder [31, 32]. Um grafo G admite uma (h, s, t) -representação se dados três inteiros positivos h, s , e t , com $h \geq s$, existe uma árvore hospedeira T com $\Delta(T) \leq h$ e uma família de subárvores $\mathcal{S} = \{S_u \subseteq T / u \in V(G)\}$ com $\Delta(S_u) \leq s$, de forma que a aresta $uv \in E(G)$ se e somente se $|S_u \cap S_v| \geq t$. Uma (h, s, t) -representação de um grafo G é denotada por (T, \mathcal{S}) , onde T é a árvore hospedeira e \mathcal{S} é a família de subárvores de T . A classe dos grafos que possuem um (h, s, t) -representação é denotada por $[h, s, t]$. Algumas destas classes já são bem conhecidas como por exemplo a classe $[2, 2, 1]$. Esta classe consiste de grafos de interseção de subcaminhos de um caminho, e corresponde exatamente a família de grafos de intervalo. Em [33] Jamison e Mulder afirmam que, em consequência dos resultados dos grafos de tolerância estudados por Golubic e Monma em [27], se $G \in [2, 2, t]$ então $G \in [2, 2, t + 1]$. Outro caso interessante são os grafos que pertencem a classe $[\infty, \infty, 1]$, estes são conhecidos como grafos de interseção de subárvores. Em 1974 Gavril [21] mostrou que esta classe corresponde a família dos grafos cordais. Entretanto, diferentemente da classe $[2, 2, 1]$, se na classe $[\infty, \infty, 1]$ o parâmetro t for alterado para qualquer valor maior que 1 todo grafo G poderá ser representado por esta classe. A simples alteração para $[\infty, \infty, 2]$ permite que qualquer grafo seja representado utilizando um grafo de interseção de subestrelas de

uma estrela com tolerância 2, onde uma aresta $uv \in V(G)$ existe se e somente se as subestrelas correspondentes aos vértices u e v possuem pelo menos 2 vértices em comum [30, Teorema 2.1].

Grafos **ORTH** $[h,s,t]$ são aqueles que admitem uma **representação (h,s,t) -ortodoxa**. Os grafos que pertencem a esta classe são aqueles que admitem uma representação por interseção de subárvores de uma árvore hospedeira, na qual o grau máximo da árvore hospedeira é h , o grau máximo de qualquer subárvore é s , todas as folhas das subárvores também são folhas da árvore hospedeira e dois vértices são adjacentes no grafo se e somente se suas subárvores correspondentes possuem no mínimo t nós em comum e ao menos um destes nós é uma folha.

Os grafos $[h, s, t]$ e $\text{ORTH}[h, s, t]$ são estudados desde a década de 70 e ainda hoje são temas de inúmeros trabalhos desenvolvidos por importantes pesquisadores de teoria dos grafos. Um exemplo disso são os recentes trabalhos publicados no ano de 2017 por Goumbic et.al. [14] e por Álcon, Gutierrez e Mazzoleni [2]. Em 2018, além do mais recente trabalho de Jamison e Mulder [34] publicado em julho deste ano, também tivemos aceito para publicação no periódico *Discrete Applied Mathematics* o trabalho *Constant Threshold Intersection Graphs of Orthodox Paths in Trees* [8].

A classe $\text{ORTH}[h, s, t]$ despertou nosso interesse e constitui o principal tema explorado neste trabalho. Mais especificamente, nossos resultados estão concentrados nas classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$ e $\text{ORTH}[h, 3, t]$.

O texto desta tese está distribuído pelos capítulos da seguinte forma.

No Capítulo 2 estão as definições e conceitos necessários para o pleno entendimento deste trabalho.

No Capítulo 3 encontram-se nossos resultados sobre a classe $\text{ORTH}[h, 2, t]$. Inicialmente, mostramos o conjunto de grafos que podem ser representados quando $h \leq 2$. Em seguida, mostramos que a classe $\text{ORTH}[h, 2, t]$ está propriamente contida na classe dos grafos linha de multigrafos. Este resultado foi apresentado no *VII Latin American Workshop on Cliques in Graphs* realizado em La Plata-Argentina, em 2016 [7]. Também apresentamos um resultado que consideramos muito relevante neste trabalho, conseguimos responder a uma questão deixada em aberto por Golumbic, Lipshteyn e Stern em 2008 [26]. Um algoritmo de reconhecimento em tempo polinomial é apresentado para as classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$ com $h \leq 3$ e $t \leq 2$. Conseguimos mostrar que a largura em árvore (treewidth) de H é limitada em função de h e t para um grafo conexo H raiz de G , tal que $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$, com $h \geq 3$ e $t \geq 1$. Além disso, apresentamos uma caracterização completa para os grafos $\text{ORTH}[3, 2, 2]$. Ainda neste capítulo provamos que a classe dos grafos $\text{ORTH}[3, 2, 3]$ está propriamente contida na classe dos grafos linha de grafos planares. A maior parte dos resultados deste capítulo foi apresentada em 2017 no

IX Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium, realizado em Marselle-França em 2017 [12]. Assim como, o trabalho completo foi aceito para publicação no periódico *Discrete Applied Mathematics* [8].

No Capítulo 4 estudamos os grafos que pertencem a classe $\text{ORTH}[3, 3, 3]$. Nosso principal resultado é um método capaz de verificar se uma classe de grafos está contida em $\text{ORTH}[3, 3, 3]$. Desenvolvemos um método que dado um grafo G , este grafo é decomposto por cliques minimais separadoras até que todos os subgrafos induzidos restantes, chamados átomos, não possam mais ser decompostos. Se cada átomo da decomposição de G admitir uma representação $(3, 3, 3)$ -ortodoxa, este método consegue construir uma representação de G a partir da representação dos seus átomos. Assim, se conseguirmos estabelecer todos os possíveis átomos de uma classe C e obtermos uma representação $(3, 3, 3)$ -ortodoxa para cada um deles, provamos que a classe C está contida em $\text{ORTH}[3, 3, 3]$.

No Capítulo 5 estudamos a classe de grafos bipartidos completos e sua representação $\text{ORTH}[3, 3, t]$. A classe dos grafos bipartidos completos tem como peculiaridade a grande quantidade de cliques necessárias para se obter uma cobertura de suas arestas, uma vez que o K_2 é a maior clique encontrada em um $K_{m,n}$. Um $K_{n/2, n/2}$ é o grafo com n vértices que necessita do maior número de cliques distintas para cobrir todas as suas arestas. Neste caso, n^2 cliques serão necessárias. Jamison e Mulder, em 2005 [33] enunciaram uma conjectura que diz que para $n \geq 3$, o grafo bipartido completo $K_{n,n}$ não tem uma representação $(3, 3, n)$ -ortodoxa. Apresentamos a prova desta conjectura para $n = 4$ e $n = 5$. Ainda no trabalho de Jamison e Mulder [33] eles mostraram que se $t = \lceil \log_2 n \rceil + 2$, então $K_{2,n}$ possui uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa. Nós estendemos esta prova para $K_{3,n}$. Estes resultados foram apresentados no *VIII Latin American Workshop on Cliques in Graphs* que ocorreu no Rio de Janeiro - Brasil, em 2018 [10]. Finalmente, apresentamos um algoritmo que obtém uma representação $(3, 3, 2n - 3)$ -ortodoxa para $K_{n,n}$ com $n \geq 4$ e n potência de 2, e um algoritmo que obtém uma representação $(3, 3, 2n + n/3 - 3)$ -ortodoxa para $K_{n,n}$ com $n \geq 3$ e n potência de 3. Estes resultados foram apresentados no *III Encontro de Teoria da Computação* realizado em Natal-Brasil, em 2018 [9].

Capítulo 2

Conceitos Preliminares e Revisão Bibliográfica

No contexto deste trabalho consideramos que $G = (V, E)$ é um grafo simples, conexo, finito, sem laços, com um conjunto de vértices $V(G)$ e um conjunto de arestas $E(G)$. A ordem do grafo G é a quantidade de vértices de G , ou seja, $|V(G)|$. Um **grafo trivial** é o grafo formado por apenas um vértice. Um **multigrafo** $H = (V, E)$ é um grafo que admite arestas paralelas e laços. **Arestas Paralelas** são arestas distintas que incidem no mesmo par de vértices e um **laço** é uma aresta que liga um vértice a ele mesmo.

Dados dois grafos G_1 e G_2 , a interseção $G = G_1 \cap G_2$ é dada por $V(G) = V(G_1) \cap V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cap E(G_2)$. Assim como, a união $G = G_1 \cup G_2$ é dada por $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$. A **vizinhança aberta** de um vértice $v \in G$ é denotada por $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. Já a **vizinhança fechada**, denotada por $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Sejam u e v vértices de G , se $N_G(u) = N_G(v)$, u e v são considerados **gêmeos falsos**. No caso em que $N_G[u] = N_G[v]$, u e v são ditos **gêmeos verdadeiros**.

O grau de um vértice v , denotado por $d(v)$, é o número de vértices adjacentes a v , ou seja, a cardinalidade de $|N_G(v)|$. O **grau máximo** de um grafo G , denotado por $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$, assim como o **grau mínimo** de um grafo G é denotado por $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$. Neste texto, um **caminho** em um grafo é uma sequência finita ou infinita de vértices conectados por uma sequência de arestas todos diferentes uns dos outros. A **distância** entre dois vértices u e v é quantidade de arestas do caminho mais curto entre eles. O **diâmetro de um grafo** é a maior distância entre qualquer par de vértices. Se duas arestas não possuem vértices em comum, então são ditas **arestas independentes**.

O grafo no qual todos os seus vértices possuem o mesmo grau é dito **grafo regular**. Um **grafo cordal** é aquele que não possui ciclos induzidos com mais de três vértices sem corda. Um grafo é **fracamente cordal** quando não possuem

ciclos induzidos nem complementos de ciclos induzidos com mais de quatro vértices.

Um **conjunto independente** de um grafo G é um subconjunto de vértices no qual não existam dois vértices adjacentes. O **número de independência** de um grafo G , denotado por $\alpha(G)$ é a cardinalidade do conjunto independente máximo de G . O **número de independência local** de um grafo G é o menor número de independência $\alpha(G')$, onde G' é o subgrafo induzido por $N_G(u)$, para cada $u \in V(G)$.

Um vértice $v \in V(G)$ é dito **simplicial** se sua vizinhança pode ser coberta por um subgrafo completo de G . Um vértice $v \in V(G)$ é dito **k -simplicial** se $N_G(v)$ pode ser coberta utilizando no máximo k subgrafos completos de G . Note que, um vértice k -simplicial é também um n -simplicial, para $n \geq k$. Um grafo G admite um **esquema de eliminação perfeita** se existe uma ordenação do seu conjunto de vértices $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ tal que todo vértice v_i é simplicial no subgrafo de G induzido por $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Da mesma forma, um grafo G admite um **esquema de eliminação k -simplicial** se seus vértices podem ser ordenados de modo que todo v_i é k -simplicial no subgrafo induzido pelos vértices $\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}$.

Um grafo G é um **grafo de interseção** de uma família de subconjuntos de um conjunto \mathcal{S} , quando for possível associar cada vértice $v \in V(G)$ a um subconjunto $S_v \subseteq \mathcal{S}$, tal que $S_u \cap S_v \neq \emptyset$ se e somente se $uv \in E(G)$. O conceito de **tolerância**, introduzido por Golumbic and Monma [25] em 1984, determina qual o tamanho mínimo da interseção para que seja criada adjacência em G . Um grafo G possui uma **p -representação** quando cada vértice $v \in V(G)$ está associado a um subconjunto $S_v \subseteq \mathcal{S}$ e $|S_u \cap S_v| \geq p$, se e somente se a aresta $uv \in E(G)$. Neste caso, o grafo G é dito **p -representável**. Seja G um grafo p -representável e $d = |\mathcal{S}|$, com $\mathcal{S} = \bigcup_{u \in V(G)} S_u$. O menor valor de d para o qual G é p -representável é chamado de **número de p -interseção** e denotado por $\theta_p(G)$.

Uma **árvore** é um grafo simples, acíclico e conexo. Uma grafo G é uma **árvore binária** se é uma árvore com grau máximo $\Delta(G) = 3$. Os nós com grau 1 são ditos **nós folhas** e os nós com grau maior que 1 são ditos **nós internos** da árvore. Uma árvore T é denominada **árvore enraizada** quando existe um nó especial r , chamado raiz de T . Seja u um nó de T , um **ancestral** de u é qualquer nó v que se encontre no caminho entre ele e a raiz r . Neste caso o nó u é dito **descendente** de v . A raiz r é ancestral de todo outro nó $u \in T$, assim como todo nó $u \in T$ é descendente de r . Se u é ancestral de v e $uv \in E(G)$ então u é dito **pai** de v , analogamente v é dito **filho** de u . Os nós folha não possuem filhos e a raiz da árvore T é o único nó que não possui pai. Em uma árvore, denota-se por $u - v$ um caminho com extremidades u e v . Qualquer árvore pode ser enraizada, bastando apenas escolher um nó para ser sua raiz. Uma **árvore binária cheia** é uma árvore enraizada na qual a raiz r tem grau 2, todos os demais nós internos tem

grau 3 e todas as folhas possuem a mesma distância da raiz r . Toda árvore binária é uma subárvore de uma árvore binária cheia. A **altura de um nó** u é o número de vértices contidos no maior caminho entre u e um de seus descendentes. A altura de uma folha é 1. A **altura de uma árvore** enraizada é dada pela altura de sua raiz r . O **conjunto de folhas de uma árvore** T é denotado por $\mathcal{L}(T)$.

Uma **garra** é um grafo bipartido completo $K_{1,3}$. Um grafo G é dito **livre de H** (**H -free**) se G não possui H como subgrafo induzido. Sendo assim, um grafo **livre de garra** é um grafo que não admite uma garra como subgrafo induzido.

Um C_k é um **ciclo** com k vértices e k arestas. Um $C_k(p_1, p_2, \dots, p_m)$ é um grafo obtido pelo acréscimo de arestas entre todos os vértices de um C_k que encontram-se a distância (p_1 ou p_2 ou \dots ou p_m) no ciclo.

Seja G um grafo simples. O **grafo reduzido** de G é o subgrafo induzido maximal de G que não contém gêmeos.

2.1 (h,s,t)-representação

Em 1991 Jacobson et. al. [30] escreveram um trabalho sobre grafos de interseção com tolerância que continha diversos resultados sobre grafos de interseção, no qual o tamanho mínimo da interseção necessária para gerar adjacências no grafo a ser representado é definido pela tolerância. Apesar de o conceito de tolerância ter sido apresentado anteriormente por Golubic e Monma [27] para grafos de intervalo, foi no trabalho de Jacobson [30] que o conceito de **tolerância constante** passou a ser utilizado para definir o tamanho mínimo da interseção entre conjuntos de qualquer natureza. A ideia de tolerância contida no trabalho de Golubic e Monma [27] é que se um grafo G é um **grafo de tolerância**, então G possui uma representação onde \mathcal{S} é uma família de subconjuntos não vazios $S_v \subseteq \mathcal{S}$ e μ é uma medida associada a cada subconjunto S_v , de modo que $\mu(S_v)$ é um número real positivo. Cada subconjunto $S_v \in \mathcal{S}$ está associado a um vértice $v \in V(G)$ e $t : S_v \rightarrow R^+$ uma função que mapeia o subconjunto S_v a uma tolerância t_v . Além disso, existe ainda uma função $\phi : R^+ \times R^+ \rightarrow R^+$ tal que o grafo G possui uma representação (\mathcal{S}, μ) e (t, ϕ) , onde:

$$uv \in E(G), \text{ se e somente se } \mu(S_u \cap S_v) \geq \phi(t_u, t_v).$$

Observa-se que na descrição da representação acima temos uma tolerância t associada a cada subconjunto s , implicando que as tolerâncias podem ser distintas para cada subconjunto s . Além disso, a função ϕ pode determinar valores diferentes de tolerância para cada par de subconjuntos (S_v, S_u) . A utilização do conceito de

tolerância constante, onde a tolerância é associada a representação e não a cada subconjunto, foi proposta em [30]. Em seguida, o Teorema 2 em conjunto com o Lema 1 utilizam o conceito de representação com tolerância constante.

Lema 1 (Jacobson [30]) *Seja $G = (V, E)$ um grafo. Então G é um grafo de interseção de arestas de subestrelas de uma estrela.*

Prova: Seja $m = |E(G)|$ e cada folha de uma estrela $k_{1,m}$ rotulada com uma aresta de $uv \in E(G)$. Seja c o centro da estrela $k_{1,m}$. Para cada vértice $v \in V(G)$ seja S_v uma subestrela de $k_{1,m}$. A subestrela S_v é induzida pelos vértices c e as folhas rotuladas como arestas incidentes em v . Então uv é uma aresta em G se e somente se S_u e S_v possuem uma aresta em comum. Desta forma, a aresta entre c e a folha uv sempre será compartilhada apenas por S_u e S_v . \square

O Lema 1 apresenta um **grafo de interseção de arestas** (*edge-intersection graph*), que é um grafo de interseção de subárvores de uma árvore, onde duas subárvores geram adjacência em G , se e somente se sua interseção possui pelo menos uma aresta. Este tipo de representação pode ser considerado um **grafo de interseção de subárvores com tolerância**, basta que os elementos considerados na interseção das subárvores sejam os nós e não as arestas. Desta forma, esta representação seria um grafo de interseção de subárvores com tolerância 2, onde a interseção entre duas subárvores representa uma adjacência no grafo, se e somente se a quantidade de nós pertencentes a esta interseção for maior ou igual a 2. Este outro ponto de vista é exatamente o que os autores apresentam no Teorema 2.

Teorema 2 (Jacobson [30]) *Todo grafo G é um grafo de interseção de subestrelas de uma estrela com tolerância para alguma tolerância constante.*

Prova: Considerando o Lema 1 para um grafo de interseção de subestrelas de uma estrela com tolerância 2, está provado \square .

Baseado nestes resultados, Jamison e Mulder apresentaram em 2000 um trabalho [31] onde um grafo G pode ser representado por uma árvore hospedeira T , uma família \mathcal{S} de subárvores $S_v \subseteq T$ e tolerância constante t . Nesta representação cada subárvore $S_v \in \mathcal{S}$ é associada a um vértice $v \in V(G)$ e

$$uv \in E(G), \text{ se e somente se } |S_u \cap S_v| \geq t,$$

onde a cardinalidade $|S_v|$ se dá pela quantidade de nós da subárvore S_v . Caso nenhuma condição extra seja imposta para a árvore hospedeira T , para as

subárvores s ou para a tolerância t , qualquer grafo G poderá ser representado, como mostram Jamison e Mulder [31]. Assim, foi definido que um grafo G possui uma **(h, s, t) -representação** se dados três inteiros positivos h , s e t , com $h \geq s$, existe uma árvore hospedeira T com $\Delta(T) \leq h$, uma família de subárvores $\mathcal{S} = \{S_u \subseteq T \mid u \in V(G)\}$ com $\Delta(S_u) \leq s$, e uma aresta $uv \in E(G)$ se e somente se $|S_u \cap S_v| \geq t$. Uma (h, s, t) -representação de um grafo G é denotada por (T, \mathcal{S}) de G , onde T é a árvore hospedeira e \mathcal{S} é a família de subárvores de T . A classe dos grafos que possuem uma (h, s, t) -representação é denotada por $[h, s, t]$. Uma árvore hospedeira T é dita **árvore hospedeira minimal**, se todo nó de T pertence a pelo menos uma subárvore $S_u \in \mathcal{S}$. Neste trabalho, para grafos (h, s, t) -representáveis consideramos que a árvore hospedeira T é minimal.

Proposição 3 (Jamison [33]) *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo. Então G está em $[\infty, \infty, t]$, para qualquer $t \geq 2$.*

A afirmativa de Jamison na Proposição 3 pode ser facilmente comprovada, pois como não existem restrições para o grau da subárvore hospedeira T , nem para o grau das subárvores s , pelo Teorema 2 qualquer grafo G com tolerância $t \geq 2$ é representável. Também é possível mostrar que se $G \in [\infty, \infty, t]$, então $G \in [\infty, \infty, t+1]$, para qualquer $t \geq 2$. A Figura 2.1(a) mostra uma representação onde $G \in [\infty, \infty, 2]$. Para que $G \in [\infty, \infty, t+1]$ basta que para cada folha $f \in T$ seja inserida uma nova folha f' , e cada subárvore S_v que possua f passe a possuir também f' . Assim, aumenta-se em uma unidade o tamanho da interseção entre cada par de subárvores S_u e S_v , fazendo com que um grafo $G \in [\infty, \infty, t]$ também pertença a $[\infty, \infty, t+1]$. A Figura 2.1(b) mostra como representar o mesmo grafo com tolerância maior em relação a representação da Figura 2.1(a) através da subdivisão das arestas.

Denota-se por (T, \mathcal{S}) uma (h, s, t) -representação de G , onde T é a árvore hospedeira e $\mathcal{S} = \{S_v \subseteq T \mid v \in V(G)\}$. Para facilitar a distinção entre elementos de G e de sua representação (T, \mathcal{S}) chamaremos de *vértices* os elementos $v \in V(G)$ e *nós* os elementos $u \in V(T)$. Pode-se observar também que:

$$[h, s, t] \subseteq [h^*, s, t], \quad \forall h^* \geq h;$$

$$[h, s, t] \subseteq [h, s^*, t], \quad \forall s^* \text{ com } s \leq s^* \leq h.$$

Além das restrições impostas ao grau máximo da árvore hospedeira T , ao grau máximo das subárvores $S_v \in \mathcal{S}$ e ao valor da tolerância t outras condições podem ser impostas a uma (h, s, t) -representação. Se todas as subárvores $S_v \in \mathcal{S}$ forem distintas temos uma **representação estrita**. Uma **representação**

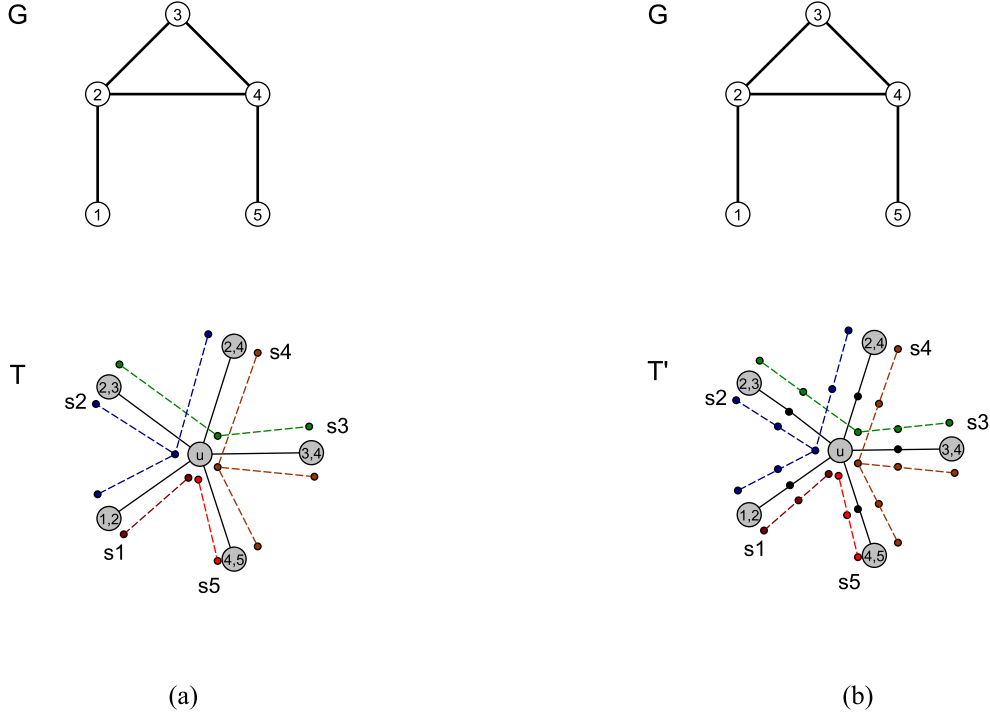


Figura 2.1: (a) $(\infty, \infty, 2)$ -representação do grafo G (Bull); (b) $(\infty, \infty, 3)$ -representação do grafo G (Bull).

própria é uma representação na qual uma subárvore $S_v \in \mathcal{S}$ não é subárvore de nenhuma outra subárvore.

Quanto à topologia das subárvores e outras condições adicionais no modelo de interseção entre elas, ainda podemos destacar outras definições.

Uma subárvore S_u de T é chamada **gerada por folha** (*leaf-generated*) se todas as folhas de S_u também são folhas de T . Um grafo G tem uma **representação (h,s,t) -gerada por folha** quando todas as subárvores $S_u \in \mathcal{S}$ são geradas por folha. A classe de grafos que admitem este tipo de representação é denotada por $\mathbf{LG}[h,s,t]$.

Uma (h,s,t) -representação é considerada **fiel** (*faithful*), quando quaisquer duas subárvores S_u e S_v que compartilham uma mesma folha com a subárvore T , geram uma aresta $uv \in E(G)$. Os grafos que admitem uma **representação (h,s,t) -fiel** constituem a classe $\mathbf{FAITH}[h,s,t]$.

Seja uma (h,s,t) -gerada por folha na qual duas subárvores S_u e S_v compartilham uma folha com a hospedeira T se e somente se $uv \in E(G)$, esta representação é dita **ortodoxa**. A classe $\mathbf{ORTH}[h,s,t]$ é constituída por todos os grafos que admitem uma **representação (h,s,t) -ortodoxa**.

As classes $[h,s,t]$, $\mathbf{LG}[h,s,t]$, $\mathbf{FAITH}[h,s,t]$ e $\mathbf{ORTH}[h,s,t]$ são **hereditárias**, isso quer dizer que se o grafo G pertence a qualquer uma destas classes qualquer subgrafo induzido de G também pertence.

Alguns resultados encontrados na literatura mostram que algumas classes de grafos $[h, s, t]$ já foram caracterizadas. Em 1974, Gavril [21] mostrou que um grafo G é um *grafo de interseção de uma família de subárvores de uma árvore* se e somente se G é um grafo cordal, ou seja, $[\infty, \infty, 1] = \mathbf{classe\ dos\ cordais}$. A classe dos grafos de intervalo é equivalente a classe $[2, 2, 1]$. A classe $[2, 2, 1]$ é uma subfamília da classe dos cordais. Golubic em [27] mostrou que $[2, 2, 1] = [2, 2, t]$ para qualquer $t \geq 1$. As classes $[\infty, 2, 1]$ e $[\infty, 2, 2]$ são respectivamente as classes dos *grafos de interseção de vértices de caminhos em árvores* (vertex path in a tree - VPT) e *grafos de interseção de arestas de caminhos em árvores* (edge path in a tree - EPT). Estas classes foram estudadas por Golubic e Jamison [23, 24]. A classe $[h, 2, 1]$ foi caracterizada através de subgrafos induzidos proibidos por Gutierrez [3].

$[h, s, t]$	CLASSE	
$[\infty, \infty, 1]$	Cordal	
$[\infty, \infty, 2]$	Qualquer Grafo	com $t > 2$
$[\infty, \infty, t]$	Qualquer Grafo	
$[\infty, 2, 1]$	VPT	
$[\infty, 2, 2]$	EPT	
$[2, 2, t]$	Grafo de intervalo	com $t \geq 1$
$[3, 3, 1]$	Cordal	
$[3, 3, 2]$	Cordal	

Tabela 2.1: Classes $[h, s, t]$ já definidas

Jamison e Mulder [33] apresentaram correlações entre algumas classes. Eles mostraram que um grafo G é cordal se e somente se possui uma representação $(3, 3, 1)$ -ortodoxa, como apresentado no Teorema 6. Para provar o teorema, os autores utilizam o fato de que a classe $[\infty, \infty, 1]$ é *cordal* e mostram que é possível transformar qualquer $(\infty, \infty, 1)$ -representação em uma $(3, 3, 1)$ -representação ortodoxa de qualquer grafo G . Em seguida, no Teorema 4, eles mostraram que em um grafo $(h, s, 2)$ -representável com $h \geq 3$ o maior ciclo induzido que pode ser encontrado possui tamanho h .

Teorema 4 (Jamison e Mulder [33]) *Seja $G = (V, E)$ um $(h, s, 2)$ -grafo, com $h \geq 3$. Então, qualquer ciclo induzido em G tem tamanho máximo h .*

Corolário 5 (Jamison e Mulder [33]) *Um $(3, 3, 2)$ -grafo é cordal.*

A principal consequência deste teorema é o Corolário 5 que diz que todo grafo G que admite uma $(3, 3, 2)$ -representação é cordal. Este corolário é demasiadamente importante para a prova do Teorema 7.

Teorema 6 (Jamison e Mulder [33]) *Um grafo $G = (V, E)$ é cordal se e somente se tem uma $(3, 3, 1)$ -representação ortodoxa.*

A sequência utilizada na prova deste teorema é exatamente a seguinte: por definição tem-se $ORTH[3, 3, 1] \subseteq [3, 3, 1] \subseteq [\infty, \infty, 1]$, pelo Teorema 6 a igualdade $ORTH[3, 3, 1] = [3, 3, 1] = [\infty, \infty, 1]$ é provada.

Teorema 7 (Jamison e Mulder [33]) $[\infty, \infty, 1] = [3, 3, 1] = ORTH[3, 3, 1] = [3, 3, 2] = ORTH[3, 3, 2]$.

Inicialmente, mostra-se que uma $(3, 3, 1)$ -representação ortodoxa de um grafo G pode ser facilmente transformada em uma $(3, 3, 2)$ -representação ortodoxa de G , inserindo nós pendentes y_x a cada uma das folhas x da T e fazendo com que as subárvores $s \in \mathcal{S}$ que possuem x passem a possuir y_x também. Desta forma, temos $[\infty, \infty, 1] \subseteq ORTH[3, 3, 2]$. Pelo Corolário 5 temos $[3, 3, 2] \subseteq [\infty, \infty, 1]$. Como $ORTH[3, 3, 2] \subseteq [3, 3, 2] \subseteq [\infty, \infty, 1]$, logo a igualdade $[\infty, \infty, 1] = ORTH[3, 3, 2]$ se verifica.

No decorrer deste trabalho consideremos que qualquer grafo G que admite uma representação (T, \mathcal{S}) não possui gêmeos verdadeiros, uma vez que para inserir em G um vértice v gêmeo de um vértice u , basta inserir a subárvore $S_u = S_v$ em \mathcal{S} .

Capítulo 3

Grafos $\text{ORTH}[h, 2, t]$

Neste capítulo apresentamos uma representação simplificada dos grafos $\text{ORTH}[h, 2, t]$ que se baseia justamente no fato de as subárvores envolvidas na representação serem caminhos, e na correspondência destes caminhos às arestas de um grafo cujo grafo linha é o grafo a ser representado. Uma descrição detalhada dessa representação simplificada é apresentada na Seção 3.1.

Em [26], Golubic, Lipshteyn e Stern estudaram as classes $[h, 2, t]$ e $\text{ORTH}[h, 2, t]$ em detalhe. Em particular, eles mostraram que

$$\text{ORTH}[\infty, 2, 1] = \text{ORTH}[3, 2, 1] = \text{ORTH}[3, 2, 2],$$

e que $\text{ORTH}[\infty, 2, 1]$ é uma subclasse própria de $\text{ORTH}[\infty, 2, 2]$. Além disso, os autores deixam em aberto a seguinte questão: "As Classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$ e $\text{ORTH}[3, 2, t]$ são equivalentes ou existe algum grafo que as diferencie?" Propomos uma solução para esta questão que se encontra na Seção 3.2.

Algoritmos de reconhecimento para algumas classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$ definidas pela variação de h e t encontram-se na Seção 3.3.

Na Seção 3.4 é apresentado um limite superior para a largura de árvore de um grafo $\text{ORTH}[h, 2, t]$ em função dos valores de h e t .

Na Seção 3.5, apresentamos uma caracterização estrutural completa para a classe $\text{ORTH}[3, 2, 2]$.

Na última seção deste capítulo provamos que se um grafo G está em $\text{ORTH}[3, 2, 3]$, então G é grafo linha de um grafo planar. Além disso, também mostramos que a classe $\text{ORTH}[3, 2, 3]$ está propriamente contida na classe dos grafos linha de grafos planares.

3.1 Propriedades Gerais

Nesta seção, são apresentadas propriedades gerais das classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$ e importantes consequências estruturais.

Inicialmente, vale a pena mostrar que para $h \leq 2$ essas classes são demasiadamente simples. Para a classe $\text{ORTH}[2, 2, 1]$, como o grau máximo da árvore hospedeira T é 2, então a árvore consiste de um caminho. Sendo assim, como ilustrado na Figura 3.1:

- se $|T| = 1$, então toda subárvore S_i de \mathcal{S} é igual a T . Portanto, G é um grafo completo. (Figura 3.1(a)).
- se $|T| > 1$, então cada subárvore S_i de \mathcal{S} ou é uma das duas folhas de T ou é igual ao caminho T . Lembre-se que as folhas de S_i também são folhas de T , pois a representação é ortodoxa. Dessa forma, temos no máximo três tipos de vértices em $V(G)$. Aqueles correspondentes a uma das folhas de T que geram a clique A , aqueles correspondentes a outra folha de T que geram a clique C , e os demais, que são correspondentes a um caminho cujas extremidades são as folhas de T , e que geram a clique B cujos vértices são adjacentes a todos os vértices de $V(G)$. (Figura 3.1(b)).

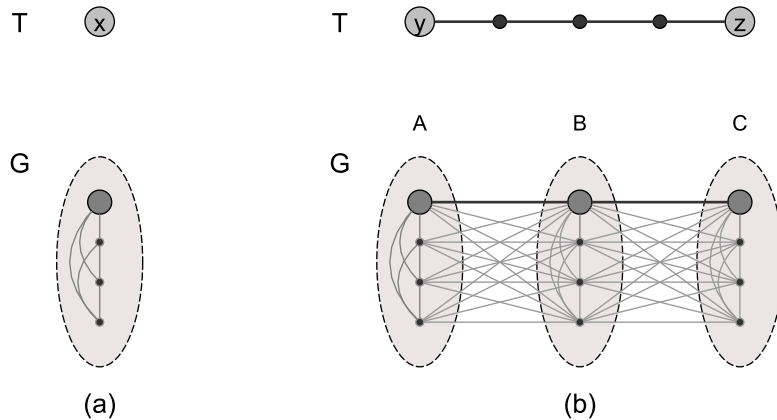


Figura 3.1: Classe $\text{ORTH}[2, 2, 1]$. Em (a) temos a árvore hospedeira T formada por apenas um nó x , dessa forma G é um grafo completo. Em (b) temos T formado por um caminho entre os nós y e z , dessa forma o conjunto de vértices $V(G)$ pode ser particionado em três cliques A , B e C , tal que $E(G)$ contém todas as arestas entre A e B , todas as arestas entre B e C .

No caso em que G pertence à classe $\text{ORTH}[2, 2, t]$ com $t \geq 2$, G é um grafo completo ou um conjunto independente de tamanho máximo 2. Para verificarmos tal afirmação, temos que:

- se $|T| = 1$, então em \mathcal{S} existe apenas uma subárvore S_i , que é igual a T . Se existisse outra subárvore $S_j \in \mathcal{S}$ seria igual a S_i , o que não é permitido, pois S_i e S_j compartilhariam uma folha mas não teriam interseção de tamanho t . Portanto, neste caso, G é um grafo trivial, como ilustrado na Figura 3.2(a).
- se $|T| > 1$, então toda subárvore S_i de \mathcal{S} ou é uma das duas folhas de T ou é igual a T . Lembre-se que as folhas de S_i também são folhas de T , pois a representação é ortodoxa. Considere y e z as extremidades de T . Como a representação é ortodoxa, então existem no máximo três tipos de subárvores em \mathcal{S} . As subárvores S_i iguais a T , e as subárvores S_y e S_z constituídas por apenas um nó cada, y e z , respectivamente. Observe que se $S_y \in \mathcal{S}$ então nenhuma outra subárvore de \mathcal{S} poderá possuir a folha y , caso contrário, existiriam duas subárvores que compartilhariam uma folha em T , mas não possuiriam interseção mínima de tamanho t . O mesmo vale para a subárvore S_z . Desta forma, ocorre uma das seguintes situações:
 - se todas as subárvores S_i de \mathcal{S} são caminhos iguais a T , então G é uma clique. (Figura 3.2(b))
 - se o conjunto \mathcal{S} é formado por S_y e S_z , então G é um conjunto independente de tamanho 2.(Figura 3.2(c))
 - se o conjunto \mathcal{S} é formado por apenas uma subárvore, S_y ou S_z , então G é o grafo trivial.

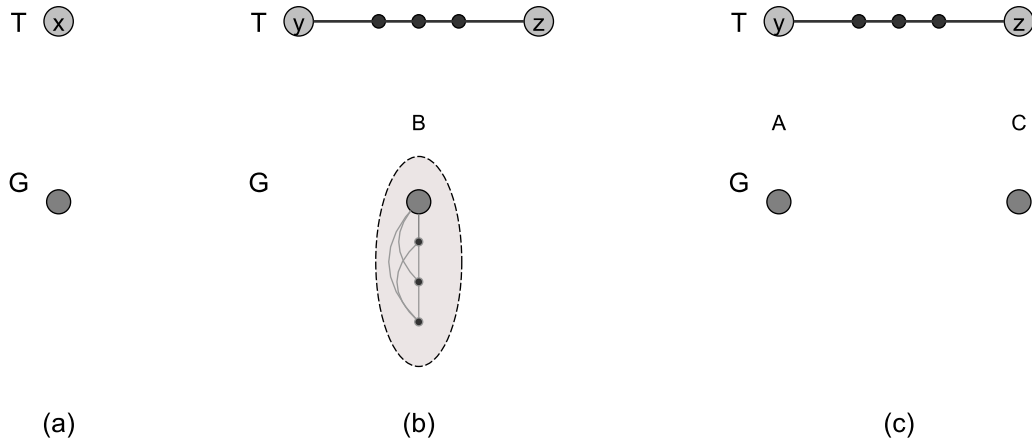


Figura 3.2: Classe $\text{ORTH}[2, 2, t]$ com $t \geq 2$. Em (a) temos a árvore hospedeira T formada por apenas um nó x , dessa forma G é um grafo trivial. Em (b) temos T formado por um caminho entre os nós y e z , e o conjunto \mathcal{S} pode ser formado por diversas cópias de T , formando uma clique. Em (c) temos T formado por um caminho entre os nós y e z , entretanto as subárvores que pertencem a \mathcal{S} são formadas apenas por um nó cada, y ou z .

Sendo assim, concentramos os estudos deste capítulo nas classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$ com $h \geq 3$.

O Lema 8 nos permite considerar que os grafos estudados são conexos, pois se um grafo é representável, todas as suas componentes são individualmente representáveis. Além disso, é simples construir uma representação para o grafo a partir da representação de cada uma de suas componentes.

Lema 8 *Um grafo G é (h, s, t) -ortodoxo se e somente se suas componentes também são.*

Prova: Sejam G_1, G_2, \dots, G_k componentes de G , então podemos afirmar que:

- (i) G_1, G_2, \dots, G_k possuem representação $(T_1, \mathcal{S}_1), (T_2, \mathcal{S}_2), \dots, (T_k, \mathcal{S}_k)$ respectivamente;
- (ii) uma representação (T, \mathcal{S}) de G pode ser obtida a partir das representações das componentes $(T_1, \mathcal{S}_1), (T_2, \mathcal{S}_2), \dots, (T_k, \mathcal{S}_k)$.

Se G possui uma representação (T, \mathcal{S}) , então suas componentes G_1, G_2, \dots, G_k também possuem. Assim provamos (i).

Agora para provar (ii), considere duas componentes G' e G'' quaisquer e suas respectivas representações (T', \mathcal{S}') e (T'', \mathcal{S}'') . Sejam x uma folha de T' e y uma folha de T'' . Seja $T^* = T' \cup T'' \cup \{x', y'\} \cup \{xy\}$, onde x' é uma nova folha de T' vizinha de x e y' é uma nova folha de T'' vizinha de y . Agora, prolongue todas as subárvores de \mathcal{S}' que compartilham x até x' e todas as subárvores de \mathcal{S}'' que compartilham y até y' . Faça $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}' \cup \mathcal{S}''$. Assim, repetindo este procedimento para todas as componentes G_1, G_2, \dots, G_k , podemos determinar (T, \mathcal{S}) a partir de $(T_1, \mathcal{S}_1), (T_2, \mathcal{S}_2), \dots, (T_k, \mathcal{S}_k)$. \square

Por definição, se dois vértices u e v são gêmeos verdadeiros então $N[v] = N[u]$. O Lema 9 nos ajuda a mostrar que construir uma representação (T, \mathcal{S}) para um grafo G que possui dois vértices u e v gêmeos verdadeiros é equivalente a construir uma representação (T', \mathcal{S}') para o grafo $G' = G - \{v\}$ e em seguida adicionar a subárvore $S_v = S_u$ em \mathcal{S}' . Portanto, tal fato nos permite considerar neste trabalho que os grafos representáveis estudados não possuem gêmeos verdadeiros.

Lema 9 *Sejam G e $G' = G - \{v\}$ grafos (h, s, t) -ortodoxos. Sejam (T, \mathcal{S}) e (T', \mathcal{S}') as representações de G e G' , respectivamente. Se o vértice $v \in V(G')$ é gêmeo verdadeiro de um vértice $u \in V(G)$, então existe uma representação (T', \mathcal{S}') de G' tal que $T' = T$ e $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{S_v\}$, onde $S_v = S_u$.*

Prova: Se $G' = G \cup \{v\}$ então os vértices u e v pertencem a G' . Se u e v são gêmeos verdadeiros em G' , então $N_{G'}[v] = N_{G'}[u]$. Se $N_{G'}[v] = N_{G'}[u]$, então S_v e S_u podem ser iguais, pois possuem as mesmas interseções em T' gerando as mesmas adjacências e não-adjacências em G' . Sendo assim, é fácil verificar que se adicionarmos à \mathcal{S} uma subárvore S_v igual a S_u , obtemos a representação $(T, \mathcal{S} \cup \{S_v\})$ para o grafo G' . Logo, se S_v igual a S_u , então $T' = T$ e $\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cup \{S_v\}$. \square

Sendo assim, no decorrer deste capítulo vamos considerar que o grafo G a ser representado:

- é conexo;
- é livre de gêmeos verdadeiros;
- e possui ordem mínima 4, pois os únicos grafos conexos, livres de gêmeos com menos de 4 nós são o P_1 e o P_3 , os quais sabemos representar.

Nosso primeiro resultado relaciona estreitamente a classe $\text{ORTH}[h, 2, t]$ com a classe dos grafos linha. Portanto, vamos rever alguns resultados importantes para grafos linha a seguir.

3.1.1 Grafos Linha

O conceito de *Grafo Linha* é estudado desde a década de 30. Inicialmente, diferentes pesquisadores de forma independente conduziram suas pesquisas, resultando no surgimento de vários nomes para a nova classe, tais como *interchange graph*, *covering graph*, *derived graph*, *adjoint* e *edge-to-vertex dual* [28]. Os primeiros a utilizarem o termo *Grafo Linha* foram Harary e Norman [29] em 1960. Entretanto a origem da pesquisa foi um trabalho de Whitney [41] apresentado em 1932.

Seja H um grafo simples, $V(H)$ é o conjunto de vértices de H e $E(H)$ o conjunto das arestas de H . O grafo linha G de H , denotado por $G = L(H)$, é o grafo onde cada vértice $u \in V(G)$ corresponde a uma aresta $pq \in E(H)$ e dois vértice $\{u, v\} \in V(G)$ são adjacentes se e somente se as arestas correspondentes em $E(H)$ compartilham uma de suas extremidades. Portanto os grafos linha também podem ser definidos como grafos de intersecção das arestas de um grafo. O grafo H é dito grafo raiz de G se $G = L(H)$.

A primeira caracterização dos grafos linha foi dada por Krausz [35]. Ele mostra que se H é um grafo linha, então o conjunto de arestas $E(H)$ pode ser particionado em subgrafos completos, tais que nenhum vértice pertence a mais de 2 destes subgrafos completos. Em 1965, Rooij e Wilf [39] descreveram a seguinte caracterização: Se H é um grafo linha, então: H não admite um $K_{1,3}$ como um

subgrafo induzido; e se dois triângulos ímpares possuem uma aresta em comum, então o grafo induzido pelos seus vértices é um K_4 . Finalmente, Beineke [4] em 1970 apresentou uma caracterização de grafos linha através de subgrafos induzidos proibidos. A relação dos subgrafos induzidos proibidos para grafos linha pode ser observada na Figura 3.3. No mesmo trabalho Beineke apresenta o teorema a seguir:

Teorema 10 (Beineke [4]) *Para o grafo H as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) H é um grafo linha de algum grafo simples.
- (ii) As arestas de $E(H)$ podem ser particionadas em subgrafos completos, tal que nenhum vértice pertença a mais de dois destes subgrafos.
- (iii) $K_{1,3}$ não é um subgrafo induzido de H .
- (iv) Nenhum dos nove grafos da Figura 3.3 é subgrafo induzido de H .

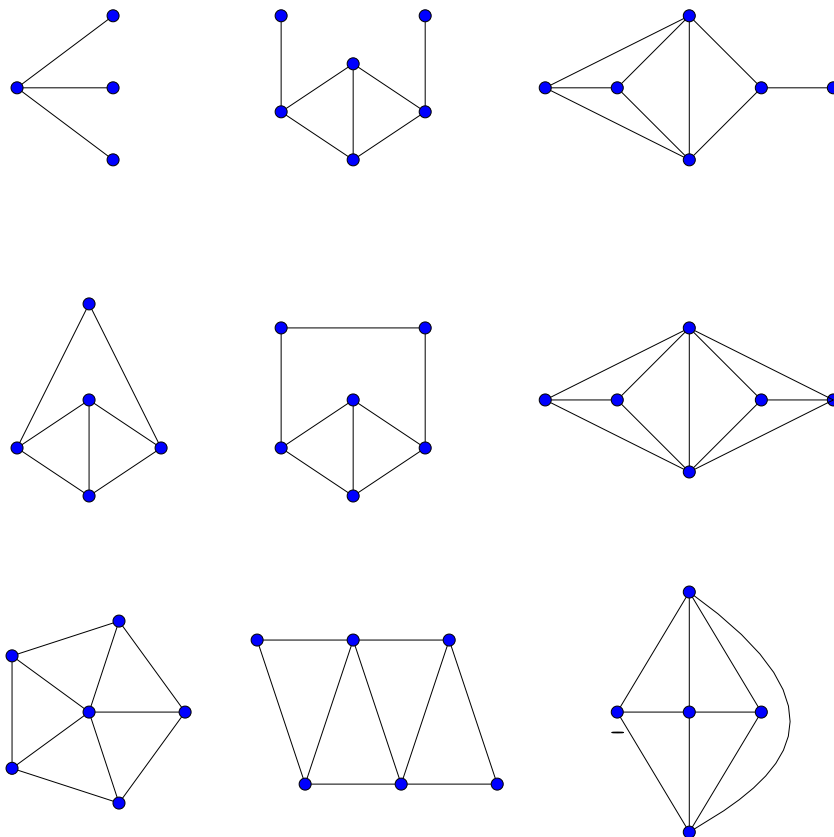


Figura 3.3: Relação dos nove subgrafos induzidos proibidos para grafos linha.

Temos interesse especial pela classe dos *Grafos Linha de Multigrafos*, esta classe foi caracterizada em 1973 por Bermond e Meyer em [5]. Em seguida apresentamos o teorema que apresenta tal caracterização.

Teorema 11 (Bermond e Meyer [5]) *O grafo H é um grafo linha de um multigrafo G sem laços, se e somente se existe uma família de subgrafos completos $(c_i \in C)$ que:*

- (i) *Toda aresta $uv \in E(H)$ pertence a pelo menos um subgrafo completo c_i .*
- (ii) *Todo vértice $v \in V(H)$ pertence a exatamente dois subgrafos completos c_i .*

No mesmo trabalho o autor apresenta o teorema que mostra a caracterização para grafos linha de multigrafos utilizando subgrafos induzidos proibidos. Este teorema é enunciado a seguir.

Teorema 12 (Bermond e Meyer [5]) *Seja H um grafo simples, as condições abaixo são equivalentes:*

- (i) *H é um grafo linha de um multigrafo.*
- (ii) *Nenhum dos sete grafos da Figura 3.4 é subgrafo induzido de H .*
- (iii) *O grafo H' reduzido de H é um grafo linha de um grafo simples.*

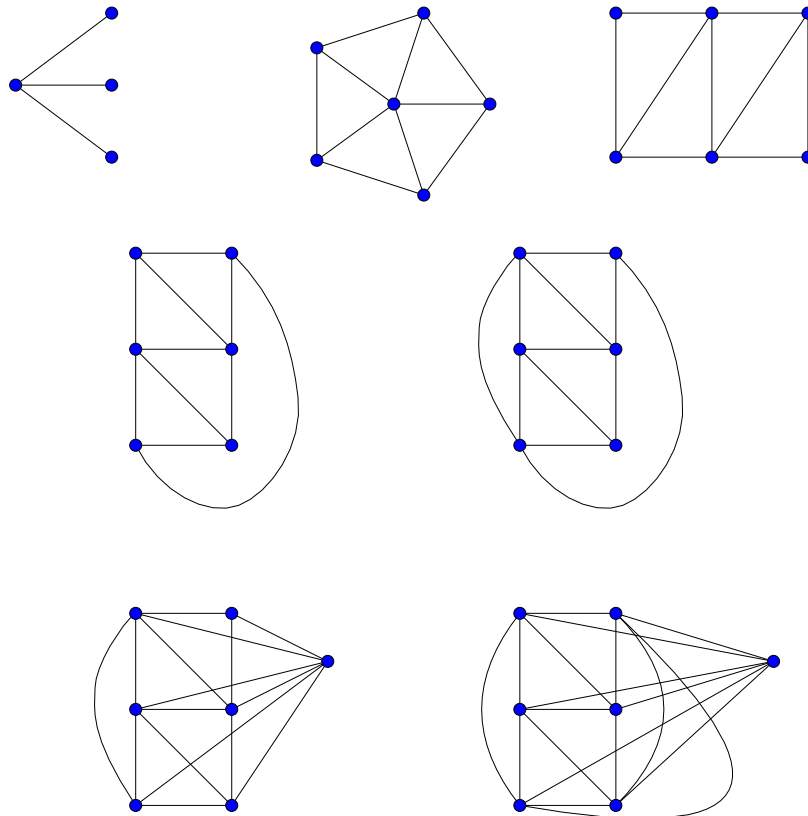


Figura 3.4: Os sete subgrafos induzidos proibidos para grafos linha de multigrafos

Em seguida, apresentamos um teorema que prova a relação biunívoca entre um grafo e seu grafo linha correspondente.

Teorema 13 (Harary [28]) *Sejam G e G' grafos conexos e seus grafos linha isomorfos. Então G e G' são isomorfos exceto se um for K_3 e o outro for $K_{1,3}$.*

3.1.2 ORTH[$h,2,t$] e grafos linha

Nesta seção vamos mostrar a relação entre grafos ORTH[$h, 2, t$] com grafos linha.

Inicialmente, vamos apresentar resultados que determinam algumas propriedades dos grafos ORTH[$h, 2, t$]. Em uma representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa de G , toda subárvore que representa um vértice é obrigatoriamente um caminho entre duas folhas da árvore hospedeira T .

O Lema 14, é importante para algumas provas, pois evita que exista alguma subárvore $S_u \in \mathcal{S}$ constituída apenas por um nó.

Lema 14 *Se $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$ com $h \geq 3$, então existe uma representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa (T, \mathcal{S}) de G , na qual todas as subárvores $S \in \mathcal{S}$ são caminhos de comprimento maior ou igual a 1.*

Prova: Por definição, para todo vértice u de G , sua subárvore correspondente $S_u \in \mathcal{S}$ possui grau máximo 2, portanto é um caminho. Suponha que, para algum vértice u de G , o caminho S_u consiste somente de uma folha x em T , ou seja, S_u possui comprimento menor que um. Seja y o vizinho de x em T . Seja T' construída a partir de T pela adição de dois novos vértices x' e x'' assim como duas novas arestas xx' e xx'' . Em seguida,

- substitui-se S_u pelo caminho $x' - x''$, e
- estende-se S_v pela aresta xx' para todo vértice v de G para o qual S_v contém a aresta xy de T .

Assim, chegamos a uma outra representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa para G , utilizando T' como árvore hospedeira. Aplicando esta transformação várias vezes podemos assumir que todo caminho em \mathcal{S} possui tamanho maior ou igual a 1. \square

Como já visto anteriormente, um vértice $v \in V(G)$ é dito **simplicial** se toda a sua vizinhança $N_G[v]$ pode ser coberta por um subgrafo completo de G . Seguindo a mesma ideia, um vértice $v \in V_G(G)$ é dito **k -simplicial** se toda a sua vizinhança $N_G[v]$ pode ser coberta por no máximo k subgrafos completos de G . O próximo lema prova que se G está em ORTH[$h, 2, t$], então todo vértice de G é 2-simplicial.

Lema 15 *Se $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$, então todo $v \in V(G)$ é 2-simplicial.*

Prova: Seja (T, \mathcal{S}) uma representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa de G , no qual cada subárvore $S_i \in \mathcal{S}$ é associada a um vértice $v_i \in V(G)$. Como toda $S_i \in \mathcal{S}$ possui grau máximo 2, então cada S_i possui no máximo duas folhas em comum com T . Sendo assim, um vértice $v_i \in V(G)$ pertence a no máximo dois subgrafos completos de G , pois em uma representação ortodoxa, uma aresta $v_1v_2 \in E(G)$ se e somente se S_1 e S_2 compartilham uma folha de T . Dessa forma, a vizinhança $N[v_i]$ pode ser coberta por dois subgrafos completos. Logo, todo vértice $v \in V(G)$ é 2-simplicial. \square

O corolário a seguir mostra que os grafos de $\text{ORTH}[h, 2, t]$ são livres de garras. Isto é verificado facilmente, pois na garra a vizinhança do vértice universal não pode ser coberta por apenas dois subgrafos completos.

Corolário 16 *Seja $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$, então G é livre de garra.*

Prova: Se $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$, então pelo Lema 15, todo vértice $v \in V(G)$ é 2-simplicial. Suponha G' uma garra, onde o vértice u é adjacente aos três outros vértices u_1, u_2 e u_3 não adjacentes entre si. Como $N_{G'}[u]$ não pode ser coberta por duas cliques, o vértice $u \in G'$ não é 2-simplicial. Logo, G não admite G' como subgrafo induzido. \square

Seja G um grafo conexo e C um conjunto de subgrafos completos de G , tal que toda aresta de $E(G)$ pertence a pelo menos um dos subgrafos completos de C . Dizemos que C é uma cobertura de arestas de G por subgrafos completos. O Teorema 17 mostra que se $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$, então existe uma cobertura de arestas C na qual cada vértice de $V(G)$ encontra-se em exatamente dois subgrafos completos. Esta propriedade é utilizada no Teorema 17 para provar que, se $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$ então G é grafo linha de um multigrafo.

Teorema 17 *Se G é conexo e está em $\text{ORTH}[h, 2, t]$, então G admite uma cobertura por subgrafos completos onde cada vértice $v \in V(G)$ está contido em exatamente dois subgrafos completos.*

Prova: Seja $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$ e (T, \mathcal{S}) sua representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa. Como a representação é ortodoxa, uma aresta $uv \in E(G)$ se e somente se as subárvores S_u e S_v compartilham uma folha $f \in V(T)$. Assim, cada folha f_i de T corresponde a um subgrafo completo c_i de G , pois todas as subárvores S_u que compartilham f_i têm seus vértices correspondentes adjacentes em G . Como cada aresta $uv \in E(G)$ é gerada pela interseção de S_u e S_v em uma folha de T , podemos verificar que o conjunto $C = \{c_1 \cup c_2 \cup \dots \cup c_k\}$ é uma cobertura por subgrafos completos de G . Pelo Lema 14, cada subárvore $S_u \in \mathcal{S}$ possui duas folhas, então cada vértice

$u \in V(G)$ vai pertencer a exatamente dois subgrafos completos c_i da cobertura C . \square

Teorema 18 *Se $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$ então G é grafo linha de um multigrafo.*

Prova: Seja $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$, então pelo Teorema 17, o conjunto de arestas $E(G)$ pode ser coberto por um conjunto de subgrafos completos C , no qual cada vértice $v \in V(G)$ pertence a exatamente dois subgrafos completos $c_i \in C$. Assim, pelo Teorema 12, G é um grafo linha de um multigrafo. \square

Baseando-se nos resultados demonstrados nos teoremas anteriores, enunciamos o Teorema 19 com importantes propriedades sobre os grafos que pertencem à Classe $\text{ORTH}[h, 2, t]$.

Com o próximo teorema mostramos que se G é conexo, livre de gêmeos, de ordem mínima 4 e $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$, existe um grafo H , raiz de G , que é único. Além disso, o teorema mostra que existe uma bijeção entre os vértices de H e as folhas $\mathcal{L}(T)$, onde T é a árvore hospedeira de uma representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa de G . Ainda sobre esta relação, provamos outra importante propriedade: dois vértices distintos x e y de $V(H)$ são adjacentes se e somente se existe um caminho em T , entre as folhas correspondentes aos vértices x e y .

Estas propriedades nos permitem concluir que se G é $\text{ORTH}[h, 2, t]$, podemos determinar seu grafo raiz H . Em seguida, construímos uma árvore T' com grau máximo h , tal que cada folha de $\mathcal{L}(T)$ corresponde a um vértice de $V(H)$. Teremos construído uma árvore candidata a árvore hospedeira para uma representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa de G . Utilizando estas ideias a próxima seção apresentará um representação simplificada para grafos da Classe $\text{ORTH}[h, 2, t]$.

Teorema 19 *Seja (T, \mathcal{S}) uma representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa de um grafo G com $h \geq 3$ e $t \geq 1$ tal que, toda folha de T pertence a um caminho que representa algum vértice de $V(G)$.*

Então, o grafo G é o grafo linha de um multigrafo H sem laços, e, se G é livre de gêmeos, então H é um grafo. Além disso, se G é um grafo conexo, livre de gêmeos de ordem no mínimo 4, e H não possui vértices isolados, então

- H é único a menos de isomorfismo,
- existe uma bijeção $\phi : V(H) \rightarrow \mathcal{L}(T)$, e
- dois vértices distintos x e y de H são adjacentes em H se e somente se \mathcal{S} contém um caminho em T entre $\phi(x)$ e $\phi(y)$.

Prova: Seja $\mathcal{S} = (S_u)_{u \in V(G)}$. Pelo Lema 14 podemos assumir que todo caminho em \mathcal{S} possui tamanho maior ou igual a um.

Como a representação é ortodoxa, para toda folha x de T , o conjunto $C_x = \{u \in V(G) : x \in V(S_u)\}$ é uma clique em G . Isto é, C_x é uma clique em G formada pelos vértices u cujas subárvores correspondentes S_u , compartilham a folha x em T .

Assim, para todo vértice u de G , a subárvore S_u é um caminho entre duas folhas distintas de T e todo vértice de G pertence a exatamente duas das cliques $(C_x)_{x \in \mathcal{L}(T)}$. Além disso, para toda aresta uv de G , as duas subárvores S_u e S_v compartilham uma folha x , de T , o que implica que u e v pertencem a clique C_x .

Assim, pelo Teorema 11, o grafo G é grafo linha de um multigrafo H sem laços. Como arestas paralelas em H correspondem a gêmeos verdadeiros em G , se G for livre de gêmeos, então pelo teorema 12 H é um grafo.

Considere G livre de gêmeos, conexo e de ordem no mínimo 4. Pelos Teorema 13, se G é o grafo linha de H então o grafo H é único. Seja H' o grafo com $V(H') = \mathcal{L}(T)$ no qual dois vértices distintos x e y são adjacentes se e somente se \mathcal{S} contém um caminho em T entre x e y . Como toda folha de T é também uma folha de algum S_u , o grafo H' não possui vértices isolados. O grafo G é isomorfo a $L(H')$, e, pelo Teorema 13, os grafos H' e H são isomorfos. \square

3.1.3 Árvore Layout

Nesta seção, apresentamos um novo modelo de representação para os grafos que pertencem a classe $\text{ORTH}[h, 2, t]$. Esta representação simplificada, chamada de *(h,t)-árvore layout*, denotada por $\mathcal{T}_{(h,t)}$, possui a seguinte definição:

Definição 20 *Seja G um grafo linha conexo, livre de gêmeos de ordem no mínimo 4, e $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$. Se H é um grafo conexo raiz de G e T é uma árvore, tal que:*

- *o grau máximo de T é no máximo h ,*
- *$V(H) = \mathcal{L}(T)$,*
- *para qualquer par de arestas independentes xy e $x'y'$ de H , os dois caminhos em T entre x e y e entre x' e y' compartilham no máximo $t - 1$ vértices.*

Então, T é uma (h, t) -árvore layout de H .

O Teorema a seguir nos mostra que, $G = L(H)$ é um grafo conexo, livre de gêmeos de ordem no mínimo 4 e está em $\text{ORTH}[h, 2, t]$ se e somente se existe uma $\mathcal{T}_{(h,t)}$ de H . Vejamos:

Teorema 21 *Seja G um grafo linha conexo, livre de gêmeos de ordem no mínimo 4, e seja H um grafo conexo com $L(H) = G$.*

O grafo $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$ para $h \geq 3$ e $t \geq 1$ se e somente se existe uma árvore T cujos nós internos têm grau no máximo h tal que $V(H) = \mathcal{L}(T)$, e para quaisquer duas arestas independentes xy e $x'y'$ de H , os dois caminhos em T entre x e y e entre x' e y' compartilhem no máximo $t - 1$ nós.

Prova: Seja $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$. Como mostrado na prova do Teorema 19, existe uma representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa (T, \mathcal{S}) de G tal que todo caminho em $\mathcal{S} = (S_u)_{u \in V(G)}$ tem comprimento maior que zero. Todos os nós internos de T têm grau no máximo h . Pelo Teorema 19, podemos assumir que $V(H) = \mathcal{L}(T)$, e que dois vértices distintos x e y de H são adjacentes em H se e somente se \mathcal{S} contém um caminho em T entre as folhas correspondentes a x e y . Se xy e $x'y'$ são duas arestas independentes de H , então há dois vértices u e v em G tais que S_u é o caminho em T entre as folhas correspondentes a x e y , e S_v é o caminho em T entre as folhas correspondentes a x' e y' . Como S_u e S_v não compartilham nenhuma folha, os dois vértices u e v não são adjacentes em G , o que implica que S_u e S_v compartilham em T no máximo $t - 1$ nós.

Seja T' construída de T pela subdivisão de cada aresta incidente a uma folha de T exatamente $t - 2$ vezes. Note que T' ainda tem grau máximo menor ou igual a h , e que para cada duas arestas independentes xy e $x'y'$ de H , os dois caminhos em T' entre x e y e entre x' e y' compartilham no máximo $t - 1$ vértices. Seja $\mathcal{S} = (S_{xy})_{xy \in E(H)}$, onde S_{xy} é o caminho em T' entre as folhas x e y de T' . Sejam u e v dois vértices distintos de G correspondentes as arestas xy e $x'y'$ de H , respectivamente. Sendo assim, u e v são adjacentes em G

- se e somente se as arestas xy e $x'y'$ não forem independentes
- se e somente se S_{xy} e $S_{x'y'}$ compartilham uma folha de T'
- se e somente se S_{xy} e $S_{x'y'}$ tiverem pelo menos t vértices em comum.

Isto implica que (T', \mathcal{S}) é uma representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa de G . \square

O Teorema 21 mostra que é possível transformar uma (h, t) -árvore layout de H em uma representação (h, s, t) -ortodoxa (T, \mathcal{S}) de G . É relativamente fácil verificar que como cada vértice $u \in V(G)$ corresponde a uma aresta $xy \in E(H)$ e cada aresta $xy \in E(H)$ corresponde a um caminho em $\mathcal{T}_{(h,t)}$ entre as folhas correspondentes a x e y , cada caminho $x - y$ em $\mathcal{T}_{(h,t)}$ pode ser transformado na subárvore $S_u \in \mathcal{S}$. Sendo assim, como qualquer par de arestas independentes xy e $x'y'$ de H que correspondem a caminhos em $\mathcal{T}_{(h,t)}$ entre as folhas x e y e entre as

folhas x' e y' compartilham no máximo $t - 1$ vértices, todas as não adjacências são preservadas. Já em relação as adjacências, como cada par de subárvores $S_u \in \mathcal{S}$ que geram adjacências em G já compartilham uma folha x em $\mathcal{T}_{(h,t)}$, basta subdividir a aresta que incide na folha x quantas vezes forem necessárias para garantir o tamanho mínimo t da interseção em (T, \mathcal{S}) .

O corolário a seguir serve para mostrarmos que se $G = L(H) \in \text{ORTH}[3, 2, t]$, então existe uma $\mathcal{T}_{(3,t)}$ de G tal que todos os seus nós internos possuem grau 3.

Corolário 22 *Seja G um grafo linha conexo, livre de gêmeos, de ordem no mínimo 4, e seja H um grafo conexo com $L(H) = G$. O grafo G está em $\text{ORTH}[3, 2, t]$ para algum $t \geq 1$ se e somente se existe uma $\mathcal{T}_{(3,t)}$ tal que todos os seus vértices internos têm grau 3.*

Prova: Para provar este corolário basta utilizar o Teorema 21 e mostrar que existe uma árvore hospedeira T tal que todos os seus nós internos possuem grau 3. Seja T' uma (h, t) -árvore layout de H . Se algum nó interno b de T' possuir exatamente dois vizinhos a e c dentro de T' , então é fácil ver que $T = T' - \{b\} + ac$ também é (h, t) -árvore layout de H , pois nenhuma interseção aumentará de tamanho. Executando essa transformação para todos os nós de grau 2, é possível eliminar todos os nós internos de T' que são de grau 2. Isso nos garante a existência da árvore hospedeira T com todos os nós internos de grau 3. \square

De acordo com o Corolário 22 se $G \in \text{ORTH}[3, 2, t]$ e $G = L(H)$, então G possui uma representação $(3, 2, t)$ -ortodoxa (T, \mathcal{S}) onde a árvore hospedeira T possui ordem no mínimo mínima $2|H| - 2$. Isto ocorre porque existe uma $\mathcal{T}_{(3,t)}$ de H que tem exatamente n folhas, e com vértices internos de grau 3. Então sua ordem é exatamente $2n - 2$. Entretanto, segundo o Teorema 21, pode ser necessário subdividir cada aresta que incide em uma folha de T , no máximo $t - 2$ vezes para obtermos uma representação. Portanto, poderíamos chegar a ordem

$$2|H| - 2 + (t - 2)|H| = t|H| - 2$$

Assim, pelo Corolário 22, a ordem mínima da árvore hospedeira em uma representação $(3, 2, t)$ -ortodoxa de G situa-se entre $2|H| - 2$ e $t|H| - 2$.

3.2 $\text{ORTH}[h, 2, t] \neq \text{ORTH}[3, 2, t]$

Em [26], Golubic, Lipshteyn e Stern investigaram a Classe $[h, 2, t]$ e algumas variantes definidas pela variação de três parâmetros principais: h , t e

a exigência da ortodoxia na representação. Dentre elas estão as Classes $[h, 2, 1]$, também conhecida como Classe de Grafos de Interseção de Caminhos em Árvores ou Grafos VPT (*Vertice Path Graphs*) [22], e $[h, 2, 2]$ também conhecida como EPT (*Edge Path Graphs*) [23, 24]. Além disso, os autores também apresentaram uma hierarquia do relacionamento entre as classes de Grafos Fracamente Cordais, Cordais, $[h, 2, t]$ e $\text{ORTH}[h, 2, t]$ para valores de h e t . Entretanto, algumas questões ficaram em aberto. Uma destas questões consiste em encontrar a relação entre $\text{ORTH}[3, 2, t]$ e outras famílias de gráficos na hierarquia. Especificamente, saber se as classes $\text{ORTH}[3, 2, t]$ e $\text{ORTH}[h, 2, t]$ são equivalentes ou existe um exemplo de separação entre elas.

Nesta seção, respondemos esta questão apresentando uma família de grafos que diferenciam as classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$.

Inicialmente, enunciemos um lema que especifica o número máximo de folhas de uma árvore T em função do seu grau máximo h e o diâmetro da árvore d .

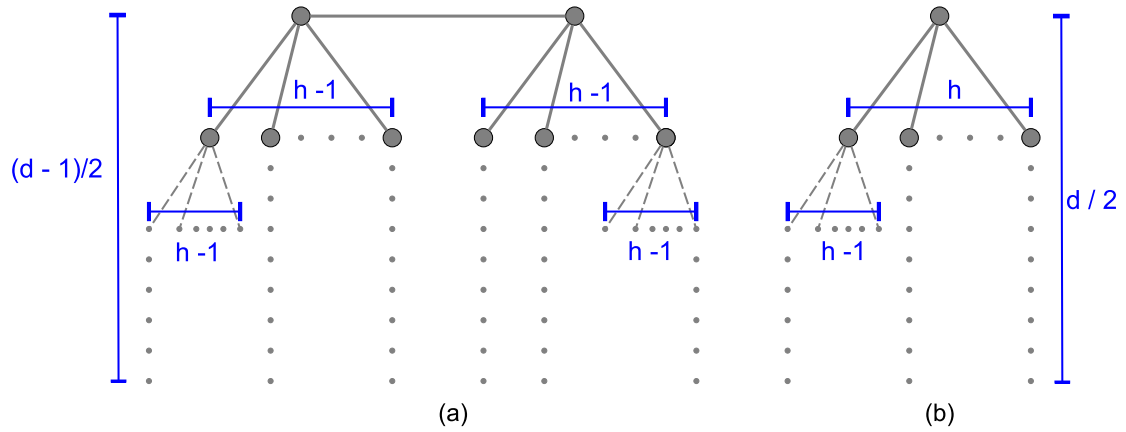


Figura 3.5: Árvore com número máximo de folhas em função do grau máximo h e distância máxima entre duas folhas d : (a) com d ímpar; (b) com d par.

Lema 23 *Sejam h e d inteiros maiores ou iguais a 3. Se T é uma árvore de grau máximo h tal que quaisquer duas folhas de T possui distância no máximo d , então*

$$|\mathcal{L}(T)| \leq \begin{cases} 2(h-1)^{\binom{d-1}{2}} & , \text{ se } d \text{ for ímpar, e} \\ h(h-1)^{\binom{d}{2}-1} & , \text{ se } d \text{ for par.} \end{cases}$$

Além disso, esses limites são justos.

Prova: Para alcançarmos os limites desejados, podemos assumir que T tem duas folhas com distância d entre elas. Seja $x(0), x(1), \dots, x(d)$ um caminho entre duas dessas folhas.

Primeiramente, considerando d ímpar, temos $x\left(\frac{d-1}{2}\right)x\left(\frac{d-1}{2}+1\right)$ como a aresta central do caminho $x(0), x(1), \dots, x(d)$. Enraizando as duas componentes de $T - \{x\left(\frac{d-1}{2}\right)x\left(\frac{d-1}{2}+1\right)\}$ pelos dois nós $x\left(\frac{d-1}{2}\right)$ e $x\left(\frac{d-1}{2}+1\right)$ obtemos duas árvores $(h-1)$ -árias T_1 and T_2 de altura $\frac{d-1}{2}$, como é ilustrado na Figura 3.5(a). Sendo assim,

$$|\mathcal{L}(T)| = |\mathcal{L}(T_1)| + |\mathcal{L}(T_2)| \leq (h-1)^{\binom{d-1}{2}} + (h-1)^{\binom{d-1}{2}},$$

onde a igualdade se verifica se e somente se T_1 e T_2 são árvores $(h-1)$ -árias cheias de altura $\frac{d-1}{2}$.

Agora, considerando d par, temos o nó $x\left(\frac{d}{2}\right)$ como centro do caminho $x(0), x(1), \dots, x(d)$. Enraizando T pelo nó $x\left(\frac{d}{2}\right)$ obtemos h subárvores $(h-1)$ -árias, cada uma com altura $\frac{d}{2}-1$, como podemos observar na Figura 3.5(b). Sendo assim,

$$|\mathcal{L}(T)| \leq h(h-1)^{\binom{d}{2}-1},$$

onde a igualdade se verifica se e somente se todas as h subárvores são árvores $(h-1)$ -árias cheias de altura $\frac{d}{2}-1$. \square

Utilizando o Lema 23, obtemos o Teorema 24 que determina o maior valor de n tal que $L(K_n) \in \text{ORTH}[h, 2, t]$ em função de h e t . Alguns destes valores, para $h \leq 10$ e $t \leq 10$, estão na tabela 3.1. Observando a tabela, temos que o grafo linha de K_5 pertence a $\text{ORTH}[4, 2, 3]$ mas não pertence a $\text{ORTH}[3, 2, 3]$, pois para $t = 3$ e $h = 3$ o maior valor permitido para n é 4, e para $t = 3$ e $h = 4$ o valor máximo para n é 6.

Em outras palavras, o Teorema mostra que existe um conjunto de grafos linha de grafos completos $L(K_n)$, com $n \in [n_0, n_1]$, que pertencem a Classe $\text{ORTH}[h+1, 2, t]$ e não pertencem a Classe $\text{ORTH}[h, 2, t]$. Respondendo assim a pergunta feita por Golubic, Lipshteyn e Stern em [26] mostrando que grafos linhas de grafos completos de ordens adequadas distinguem as classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$ para diferentes valores de h e t .

Teorema 24 *Sejam $h \geq 3$ e $t \geq 3$ dois inteiros.*

Se t é ímpar, então

$$\left\{n \in \mathbb{N} : L(K_n) \in \text{ORTH}[h+1, 2, t] \setminus \text{ORTH}[h, 2, t]\right\} = \left[2(h-1)^{\binom{t-1}{2}} + 1, 2h^{\binom{t-1}{2}}\right],$$

e, se t é par, então

$$\left\{n \in \mathbb{N} : L(K_n) \in \text{ORTH}[h+1, 2, t] \setminus \text{ORTH}[h, 2, t]\right\} = \left[h(h-1)^{\binom{t}{2}-1} + 1, (h+1)h^{\binom{t}{2}-1}\right].$$

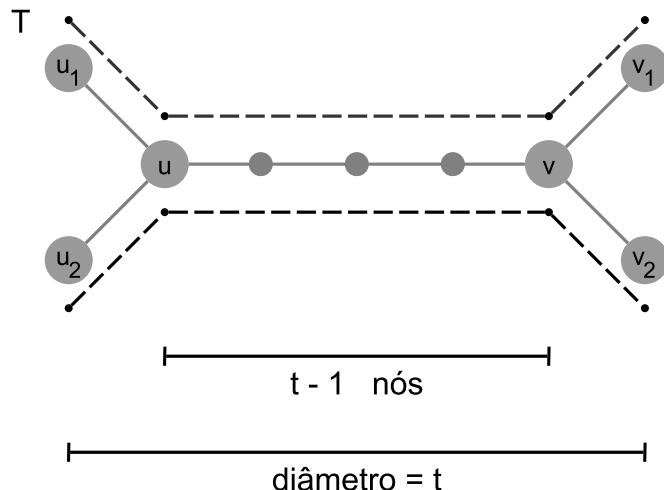


Figura 3.6: Em uma $\mathcal{T}(h, t)$ dois caminhos que não compartilham folha devem possuir no máximo $t - 1$ nós em comum.

Prova: Vamos mostrar apenas para t ímpar, pois a prova para t par é análoga. Como as classes consideradas são hereditárias, basta mostrar que

(i) $L\left(K_{2h}^{\binom{t-1}{2}}\right) \in \text{ORTH}[h + 1, 2, t]$, e

(ii) $L\left(K_{2(h-1)\binom{t-1}{2}+1}\right) \notin \text{ORTH}[h, 2, t]$.

Pelo Lema 23, existe uma árvore de grau máximo, menor ou igual a $h + 1$ com $2h\binom{t-1}{2}$ folhas tais que cada duas folhas tenham uma distância máxima t . Pelo Teorema 21, isso implica (i).

Agora, suponha que (ii) não se verifique. Novamente pelo Teorema 21, existe uma árvore T de grau no máximo h com $2h\binom{t-1}{2}$ folhas tais que, para quaisquer quatro folhas distintas u_1, v_1, u_2 e v_2 , os dois caminhos em T entre u_1 e v_1 e entre u_2 e v_2 compartilham no máximo $t - 1$ nós, como ilustrado na Figura 3.6. Sejam u_1 e v_1 duas folhas de T com distância máxima ℓ . Assumimos que T é escolhida de tal forma que ℓ seja o menor possível. Sejam u e v os dois vizinhos de u_1 e v_1 , respectivamente. Claramente, os nós u e v são distintos. Pela escolha de T , o nó u é adjacente a uma folha u_2 distinta de u_1 , e o nó v é adjacente a uma folha v_2 distinta de v_1 . Considerando as duas arestas independentes u_1v_1 e u_2v_2 implica que $\ell \leq t$. Pelo Lema 23, isso implica uma contradição que T tem no máximo $2(h - 1)\binom{t-1}{2}$ folhas. \square

n		t							
		3	4	5	6	7	8	9	10
h	3	4	6	8	12	16	24	32	48
	4	6	12	18	36	54	108	162	324
	5	8	20	32	80	128	320	512	1.280
	6	10	30	50	150	250	750	1.250	3.750
	7	12	42	72	252	432	1.512	2.592	9.072
	8	14	56	98	392	686	2.744	4.802	19.208
	9	16	72	128	576	1.024	4.608	8.192	36.864
	10	18	90	162	810	1.458	7.290	13.122	65.610

Tabela 3.1: Maior valor de n tal que $L(K_n) \in \text{ORTH}[h, 2, t]$ em função de h e t .

3.3 Reconhecendo Subclasses de $\text{ORTH}[h, 2, t]$

Nesta seção, apresentamos importantes propriedades estruturais que nos levam a algoritmos de reconhecimento eficientes para grafos $\text{ORTH}[h, 2, t]$ com $h \leq 3$ e $t \in \{1, 2\}$.

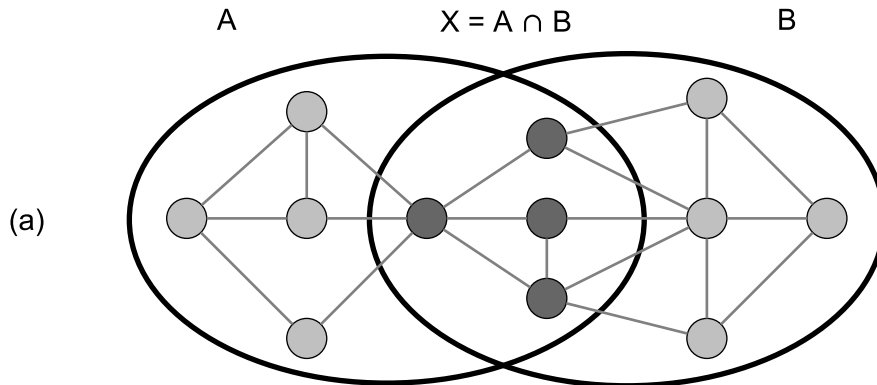


Figura 3.7: (a) Exemplo de uma separação de um grafo G . Não existem vértices de A/B adjacentes a vértices de B/A .

Uma **separação** de um grafo G , é um par (A, B) de subconjuntos de $V(G)$, tal que $A \cup B = V(G)$ e nenhuma aresta em $E(G)$ tem uma extremidade em A/B e outra extremidade em B/A , como ilustra a Figura 3.7. Um **separador** X de um grafo conexo G é um subconjunto de $V(G)$ que quando removido torna G desconexo. A **ordem da separação** (A, B) é $|X|$, com $X = A \cap B$. A separação (A, B) de um grafo G com n vértices é **balanceada** se $|A/B| \leq 2n/3$ e $|B/A| \leq 2n/3$ [17].

O **número de separação** $ns(G)$ de um grafo G é o menor número s tal que todo subgrafo de G possui uma separação balanceada de ordem no máximo s .

O Teorema 25 mostra que todo subgrafo H' de um grafo H com $L(H) \in \text{ORTH}[h, 2, t]$ possui separação balanceada em função de h . Além disso, a ordem da separação é definida em função de h e t . Como exemplo desta relação

temos que se o grafo $G \in \text{ORTH}[3, 2, t]$ e $L(H) = G$, então $ns(H) \leq 2^{(t-2)}$.

Teorema 25 *Seja G um grafo linha conexo, livre de gêmeos de ordem no mínimo 4, e seja H um grafo conexo com $L(H) = G$. Seja $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$ para algum $h \geq 3$ e $t \geq 1$. Se H' é um subgrafo de H de ordem pelo menos 2, então existe um conjunto X de vértices de H' , e uma partição de $V(H')$ em dois conjuntos A e B de tal modo que*

$$(i) \quad \frac{1}{h}n(H') \leq |A|, |B| \leq \frac{h-1}{h}n(H'),$$

$$(ii) \quad |X| \leq \max \{1, (h-1)^{(t-2)}\}, \text{ e}$$

(iii) H' não contém arestas entre $A \setminus X$ e $B \setminus X$.

Além disso, dado H' , os conjuntos X , A e B podem ser encontrados em tempo polinomial.

Prova: Seja T como no Teorema 21, isto é, a árvore T é uma (h, t) -árvore layout de H . Claramente, removendo iterativamente folhas de T que não são vértices de H' construímos uma (h, t) -árvore layout T' de H' .

Se $t = 1$, então u é algum nó de T' , Y é o conjunto de folhas de algum componente de $T' - u$, e Z é o conjunto de folhas dos demais componentes de $T' - u$, então as propriedades de uma $(h, 1)$ -árvore layout implica a existência de um vértice x em $Y \cup Z$ tal que todas as arestas de H' entre Y e Z são incidentes em x , caso contrário H' contém duas arestas independentes entre Y e Z tal que os caminhos correspondentes em T' compartilham u .

Da mesma forma, se $t \geq 2$, existe um caminho $P : u_1 \dots u_t$ de ordem t em T' , Y é o conjunto de folhas de T' que estão na mesma componente de $T' - E(P)$ que u_1 , e Z é o conjunto de folhas de T' que estão na mesma componente de $T' - E(P)$ que u_t , então existe um vértice x em $Y \cup Z$ tal que todas as arestas de H' entre Y e Z são incidentes com x .

Seja r qualquer nó interno de T' e T' enraizada em r . Seja a um nó de T' de distância máxima para r tal que pelo menos $\frac{1}{h}n(H')$ descendentes de a são folhas. Como T' tem $n(H')$ folhas e r tem grau no máximo h , o vértice a não é r . Como a tem no máximo $h-1$ filhos, no máximo $\frac{h-1}{h}n(H')$ descendentes de a são folhas. Seja b o pai de a . Seja A o conjunto de folhas de T' que estão na mesma componente de $T' - ab$ que a , e seja B o conjunto de folhas de T' que se encontram na mesma componente de $T' - ab$ que b . Claramente, (i) provado.

Se $t = 1$, então a observação acima implica a existência de um único vértice x tal que todas as arestas de H' entre A e B são incidentes em x . Sendo assim, (ii) e (iii) são verdadeiras. Agora, seja $t \geq 2$. Enraizando pelo nó b a componente T'_b de $T' - ab$ que contém b , e considerando todas as folhas de T'_b com profundidade no

máximo $t-2$, assim como todos os nós não-folha de T'_b com profundidade exatamente $t-2$, segue-se que B pode ser particionado em $k \leq (h-1)^{t-2}$ conjuntos B_1, \dots, B_k tal que, para cada $i \in [k]$, se B_i tiver mais de um vértice, então existe um caminho P_i de ordem t tal que todo caminho em T' entre uma folha de A e uma folha de B_i tem P_i como sub-caminho. Se B_i contém apenas um vértice, então trivialmente todas as arestas de H' entre A e B_i são incidentes a apenas um vértice em $A \cup B_i$. Se B_i contém mais de um vértice, então a observação acima também implica que todas as arestas de H' entre A e B_i são incidentes com apenas um vértice em $A \cup B_i$. Assim, conclui-se que há um conjunto X de no máximo k vértices de H' tal que todas as arestas entre A e $B = B_1 \cup \dots \cup B_k$ são incidentes com um vértice de X . Logo, (ii) e (iii) se verificam.

Resta explicar, como determinar adequadamente os conjuntos X , A e B de forma eficiente, dado H' . Seja $p = \max\{1, (h-1)^{(t-2)}\}$. Se $p \geq \frac{h-1}{h}n(H')$, então escolhendo A como um conjunto qualquer com $\lceil \frac{1}{h}n(H') \rceil$ vértices de H' , e $B = X$ como $V(H') \setminus A$ satisfaz (i), (ii) e (iii). Agora, seja $p < \frac{h-1}{h}n(H')$. Para algum conjunto específico X com p vértices de H' , explicamos como decidir se os conjuntos A e B com (i), (ii) e (iii) existem. Portanto, seja X tal conjunto. Seja K_1, \dots, K_ℓ as componentes de $H' - X$. Se algum componente K_i com $i \in [\ell]$ tiver ordem acima de $\frac{h-1}{h}n(H')$, então os conjuntos desejados A e B não existem. Se algum componente K_i com $i \in [\ell]$ tiver ordem entre $\frac{1}{h}n(H')$ e $\frac{h-1}{h}n(H')$, então escolhe-se $A = V(K_i)$ e $B = V(H') \setminus A$ que eles terão as propriedades desejadas.

Finalmente, se todos os componentes K_i com $i \in [\ell]$ tiverem ordem menor que $\frac{1}{h}n(H')$, então formando uma união adequada desses conjuntos de vértices constrói-se A de ordem entre $\frac{1}{h}n(H')$ e $\frac{h-1}{h}n(H')$, e definindo B como acima, obtém-se conjuntos com as propriedades desejadas. Logo, considerando as $O(n(H')^p)$ opções para determinar X , os conjuntos adequados podem ser determinados em tempo polinomial, o que completa nossa prova. \square

No Teorema 25 o conjunto X é um corte em um subgrafo H' de H . Neste mesmo teorema também são definidos a ordem máxima deste corte em função de h e t , além da prova que dado H' é possível determinar em tempo polinomial o corte X que resulte em uma separação balanceada em função de h .

Agora, considere que o corte tenha tamanho 1, ou seja, uma articulação. O Teorema 26, em outras palavras mostra que dado um grafo H que possui uma articulação a , se H possui $\mathcal{T}(h, t)$, então cada uma das componentes de $H - \{a\}$ também possui uma $\mathcal{T}(h, t)$. Além disso, se são conhecidas as $\mathcal{T}(h, t)$ das componentes sabemos como construir uma $\mathcal{T}(h, t)$ para H . A importância deste resultado se verifica principalmente no Corolário 27, no qual é apresentado um algoritmo de reconhecimento para grafos das classes $\text{ORTH}[h, 2, 1]$ e $\text{ORTH}[h, 2, 2]$.

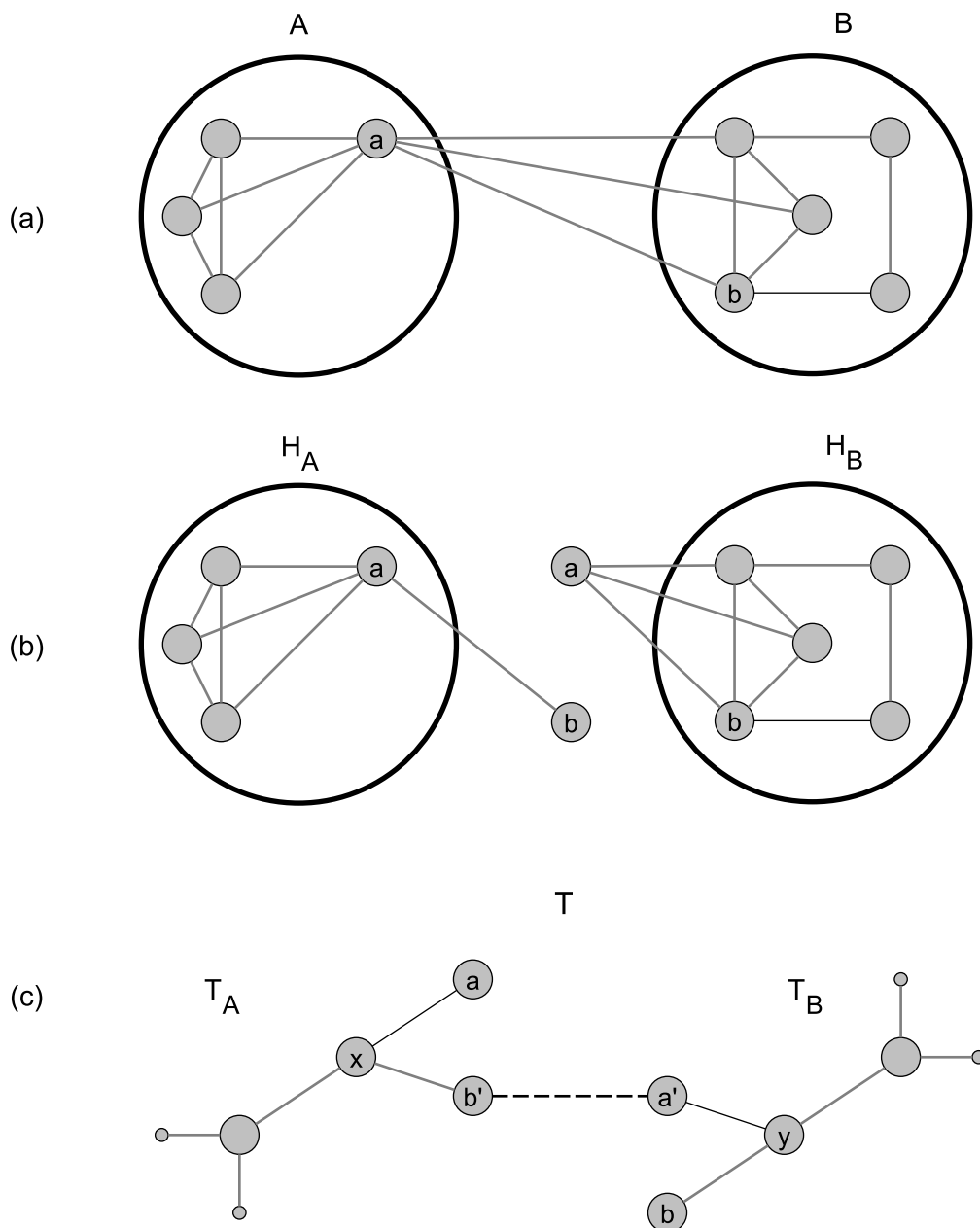


Figura 3.8: (a) Os conjuntos A e B são partes da partição do grafo H , O vértice a pertence ao conjunto A e o vértice b pertence ao conjunto B , tal que cada aresta de $E(H)$ entre A e B incide em a , e b é vizinho de a . (b) Subgrafos $H_A = H[A \cup \{b\}]$ e $H_B = H[B \cup \{a\}]$. (c) As árvores T_A e T_B são (h, t) -árvores layout de H_A e H_B , respectivamente. Fazendo T a união disjunta de T_A e T_B , adiciona-se uma aresta entre a' e b' , com isso se obtém T que é (h, t) -árvore layout de H .

Teorema 26 *Seja H um grafo. Sejam os conjuntos A e B partes de uma partição de $V(H)$. Sejam a um vértice de A e b um vértice de B , tal que cada aresta de H entre A e B incide em a , e b é vizinho de a .*

O grafo H tem uma (h, t) -árvore layout para algum $h \geq 3$ e $t \geq 1$ se e somente se os dois grafos $H_A = H[A \cup \{b\}]$ e $H_B = H[B \cup \{a\}]$ possuem (h, t) -árvore

layout.

Prova: Como a classe possui a propriedade hereditária, se H tem uma (h, t) -árvore layout, então o mesmo acontece com todo subgrafo induzido, o que prova a necessidade. Para a suficiência, assumamos que T_A e T_B são (h, t) -árvores layout de H_A e H_B , respectivamente. Note que, tanto T_A quanto T_B possuem folhas correspondentes aos vértices a e b . Considere b' a folha correspondente ao vértice b em T_A , e a' a folha correspondente ao vértice a em T_B . Se a árvore T resulta da união disjunta de T_A e T_B , onde distinguimos as duas cópias de a e b dentro de T_A e T_B , adicionando-se uma aresta entre a' e b' , como na Figura 3.8(c), obtém-se T que é (h, t) -árvore layout de H , o que completa a prova. \square

Corolário 27 *Os grafos que pertencem às classes $\text{ORTH}[h, 2, 1]$ e $\text{ORTH}[h, 2, 2]$, para $h \geq 3$, podem ser reconhecidos em tempo polinomial.*

Prova: Seja G um determinado grafo para o qual desejamos decidir se pertence ou não a $\text{ORTH}[h, 2, t]$. Conforme observado no Teorema 21, podemos considerar que G é um grafo linha, livre de gêmeos, conexo de ordem de pelo menos 4. Usando G como instância para o algoritmo em [15], podemos determinar com eficiência o único grafo conexo H com $L(H) = G$. Claramente, $|V(H)| \leq |E(H)| + 1 = |V(G)| + 1$. Segundo o Teorema 21, precisamos verificar se H tem uma (h, t) -árvore layout.

Note que, para $t \in \{1, 2\}$, o conjunto X no Teorema 25 contém no máximo um vértice. Além disso, os conjuntos X , A e B com (i), (ii) e (iii) podem ser encontrados eficientemente para qualquer subgrafo H' de H de ordem de pelo menos 2. Note que, os grafos H_A e H_B considerados no Lema 26 têm ordens $|A| + 1$ e $|B| + 1$, respectivamente. Seja n_0 tal que $\frac{h-1}{h}(n+1) \leq \frac{h}{h+1}n$ para $n \geq n_0$. Note que, se H tiver ordem pelo menos n_0 , então H_A e H_B ambos têm ordem no máximo $\frac{h}{h+1}n(H)$. Assim sendo, aplicando iterativamente o Teorema 25 constrói-se $k \leq 2^{\lceil \log_{(h+1)/h}(n/n_0) \rceil}$ grafos H_1, \dots, H_k , cada um de ordem no máximo n_0 , de tal modo que H tem uma (h, t) -árvore layout se e somente se cada H_i possui uma (h, t) -árvore layout para cada $i \in [k]$. Claramente, testar essa propriedade para grafos de ordem limitada pode ser feito em tempo polinomial. \square

3.4 Largura em Árvore de um grafo $\text{ORTH}[h, 2, t]$

Ainda aproveitando os resultados do Teorema 25 chegamos a mais um resultado estrutural para grafos $\text{ORTH}[h, 2, t]$.

Em [38] Robertson e Seymour definem que uma **decomposição em árvore** (ou tree-decomposition) (T, χ) de um grafo G é uma árvore T e uma família $\chi = (X_t : t \in V(T))$ de subconjuntos de $V(G)$, tal que

- (i) $\bigcup (X_t : t \in V(T)) = V(G)$;
- (ii) para cada aresta $xy \in E(G)$ existe $t \in V(T)$ tal que xy tem suas extremidades em X_t ;
- (iii) para t, t' e $t'' \in V(T)$, se t' está no caminho em T entre t e t'' , então $X_t \cap X_{t''} \subseteq X_{t'}$.

O tamanho de uma decomposição em árvore de G é $\max(|X_t| - 1 : t \in V(T))$ e a **largura de árvore** (ou treewidth) de G , denotada por $tw(G)$, é o menor $w \geq 0$, tal que G possui uma decomposição em árvore de tamanho $\leq w$.

A largura em árvore $tw(G)$ de um grafo G procura estabelecer uma medida de similaridade entre o grafo G e uma árvore. Quanto menor a largura em árvore de um grafo, mais semelhante o grafo é de uma árvore.

Vale ressaltar que a decomposição em árvore de um grafo G não é única. Por exemplo, todo grafo G possui uma decomposição em árvore trivial, na qual a árvore possui um único nó i , e que X_i contém todos os vértices do grafo G . Entretanto, nosso interesse é encontrar uma decomposição em árvore do grafo G , tal que sua largura seja a menor possível. Esta medida $tw(G)$ é largura em árvore de G .

O Corolário 28 utiliza a relação entre o número de separação $ns(G)$ e a largura de árvore $tw(G)$ apresentada por Dvořák e Norin em [17] para mostrar que $tw(G)$ é limitada em função de h e t .

Corolário 28 *Seja G um grafo linha conexo, livre de gêmeos de ordem no mínimo 4, que pertence a $ORTH[h, 2, t]$, para algum $h \geq 3$ e $t \geq 1$, e H um grafo conexo com $L(H) = G$. Então a largura em árvore (ou treewidth) de H é limitada em função de h e t .*

Prova: Como $G \in ORTH[h, 2, t]$ e $L(H) = G$ então, pelo Teorema 21, H possui uma $\mathcal{T}(h, t)$. Pelo Teorema 25, temos que H possui um separador X tal que $|X| \leq \max\{1, (h-1)^{(t-2)}\}$. Assim, segundo os resultados de Dvořák e Norin [17], $tw(H) \leq c \cdot (h-1)^{(t-2)}$ para uma constante c . \square

3.5 ORTH[3,2,2]

Um **bloco** de um grafo G é um subgrafo maximal conexo sem articulações [6]. O teorema a seguir apresenta uma caracterização completa para os grafos $ORTH[3, 2, 2]$.

Teorema 29 *Seja G um grafo linha conexo, livre de gêmeos de ordem no mínimo 4, e seja H um grafo conexo com $L(H) = G$.*

O grafo G está em $\text{ORTH}[3, 2, 2]$ se e somente se todos os blocos de H são de ordem no máximo 3.

Prova: Para mostrar a necessidade, supomos que G pertença a $\text{ORTH}[3, 2, 1] = \text{ORTH}[3, 2, 2]$, mas que algum bloco de H tenha ordem pelo menos 4. Isto implica que H possua algum ciclo C de comprimento ℓ pelo menos 4 como subgrafo. Portanto, G contém o ciclo induzido $L(C)$ de comprimento ℓ . No entanto, pelo resultado de Gavril [21], os grafos em $\text{ORTH}[3, 2, 1]$ são cordais, o que é uma contradição.

Para mostrar a suficiência, Assumimos que todos os blocos de H sejam de ordem no máximo 3. Como K_3 tem $(3, 1)$ -árvore layout, segue-se facilmente por um argumento indutivo semelhante à prova do Lemma 26 que H tem uma $(3, 1)$ -árvore layout. Suponha, por exemplo, que H resulte de um grafo menor H' contendo um vértice u pela adição de dois vértices v e w , e três novas arestas uv , uw e vw , isto é, H é obtido de H' anexando um novo bloco K_3 .

Se T' é uma $(3, 1)$ -árvore layout de H' , então subdividindo a aresta de T' incidente a u por um novo vértice x , adicionando três novos vértices y , v e w , e adicionando três novas arestas xy , vy e wy construímos uma $(3, 1)$ -árvore layout de H . Pelo Teorema 21, isso significa que G está em $\text{ORTH}[3, 2, 1] = \text{ORTH}[3, 2, 2]$. \square

3.6 $\text{ORTH}[3, 2, 3]$

Outro resultado de destaque deste trabalho é apresentado nesta seção. O Lema 30 prova que se H é uma subdivisão de K_5 e G é o grafo linha de H então $G \notin \text{ORTH}[3, 2, 3]$. O Lema 31 prova que se H é uma subdivisão de $K_{3,3}$ e G é o grafo linha de H então $G \notin \text{ORTH}[3, 2, 3]$. Pelo resultado de Kuratowski [36], um grafo é planar se, e somente se, ele não contém um subgrafo que seja uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$. Sendo assim, se um grafo H não for planar então ele contém como subgrafo uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$. Pelos Lemas 30 e 31 se H contém uma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$ seu grafo linha G não está em $\text{ORTH}[3, 2, 3]$. Logo, utilizando o Teorema 19 podemos concluir que se $G \in \text{ORTH}[3, 2, 3]$ então G é grafo linha de um grafo planar.

Lema 30 *Seja H uma subdivisão de $K_5 - \{e, f\}$, com e e f duas arestas independentes de K_5 . Se $G = L(H)$, então G não está em $\text{ORTH}[3, 2, 3]$.*

Prova: Seja $H_0 = K_5 - \{e, f\}$. Denotamos os cinco vértices de H_0 por u_1, \dots, u_5 sem especificar quais duas arestas estão faltando. Por contradição, suponha que G esteja em $\text{ORTH}[3, 2, 3]$. Sendo assim, G é um grafo linha conexo, livre de gêmeos de ordem de pelo menos 4. Seja $\mathcal{T}_{(3,t)}$ uma $(3, t)$ -árvore layout de H_0 como no Corolário 22 para $t = 3$. Seja r qualquer nó interno de $\mathcal{T}_{(3,3)}$, e $\mathcal{T}_{(3,3)}$ enraizada em r . Seja s um nó de $\mathcal{T}_{(3,3)}$ de distância máxima de r , tal que pelo menos dois descendentes, digamos u_1 e u_2 , de s em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ correspondem a vértices de H_0 . Como todo nó interno de $\mathcal{T}_{(3,3)}$ tem grau 3, exatamente dois descendentes de s correspondem a vértices de H_0 , o que implica que s não é r . Seja x o pai de s . Seja s' e s'' os dois vizinhos de x distintos de s . Seja S, S' e S'' os conjuntos de nós dos três componentes de $\mathcal{T}_{(3,3)} - x$ que contêm s, s' e s'' , respectivamente.

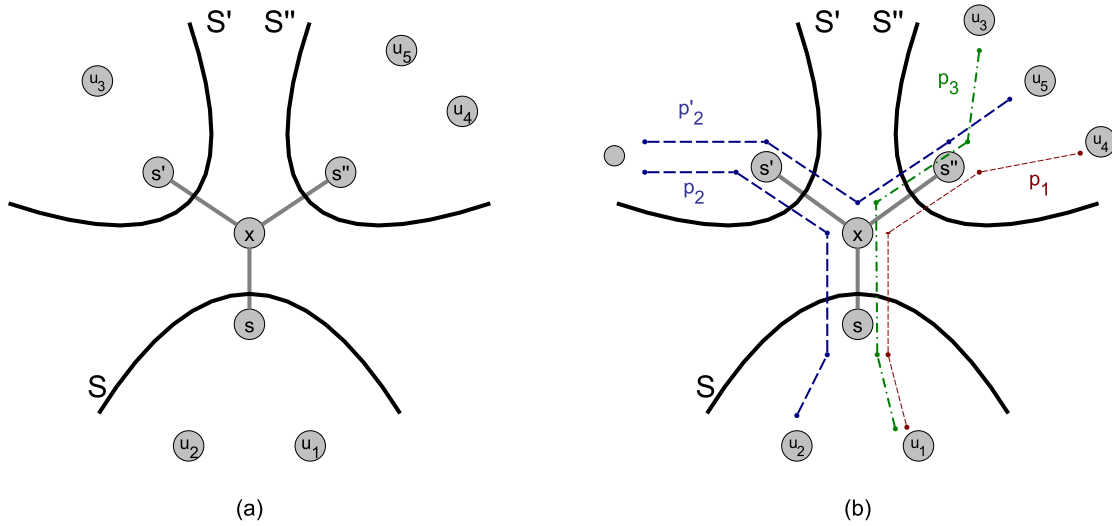


Figura 3.9: (a) As três componentes S, S' e S'' de $\mathcal{T}_{(3,3)} - x$. (b) As três componentes S, S' e S'' de $\mathcal{T}_{(3,3)} - x$ e os caminhos p_1, p_2, p'_2 e p_3 .

Pelo princípio da casa de pombo e por simetria, podemos supor que u_4 e u_5 estão em S' , e que u_1u_4 e u_2u_5 são arestas de H_0 . Como pode ser observado na Figura 3.9(a). Note que cada aresta uv de H_0 corresponde a um caminho $P(uv)$ em H entre u e v cujos vértices internos são todos de grau 2, e que as arestas desse caminho correspondem a caminhos folha a folha em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ tal que, para arestas independentes, os caminhos correspondentes compartilham no máximo 2 vértices.

Como cada um dos caminhos $P(u_1u_4)$ e $P(u_2u_5)$ exige um caminho entre uma folha de S e uma folha de S' , em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ cada um corresponde a

- um caminho entre uma folha de S e uma folha de S' , ou
- um caminho entre uma folha de S e uma folha de S'' , bem como um caminho entre uma folha de S' e uma folha de S'' .

Como qualquer aresta de $P(u_1u_4)$ é disjunta de qualquer aresta de $P(u_2u_5)$ em H , em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ podemos assumir que $P(u_1u_4)$ corresponde a um caminho p_1 entre S e S' , e que $P(u_2u_5)$ corresponde a um caminho p_2 entre S e S'' assim como um caminho p'_2 entre S' e S'' . Se u_1 é adjacente a u_5 em H_0 , então considerando a existência de p_2 , o caminho $P(u_1u_5)$ corresponde a um caminho entre S e S' , e, se u_2 é adjacente a u_4 em H_0 , então considerando a existência de p'_2 , o caminho $P(u_2u_4)$ corresponde a um caminho entre S e S' . Como todas as arestas de $P(u_1u_5)$ são disjuntas das arestas de $P(u_2u_4)$, isso implica que u_1u_5 ou u_2u_4 não são arestas de H_0 .

Se a folha correspondente a u_3 estiver em S'' , então tendo em vista p_2 e p'_2 , o vértice u_3 não pode ser adjacente a u_1 ou u_4 em H_0 , o que é uma contradição. Portanto, a folha correspondente a u_3 está em S' . Tendo em vista p_1 e p'_2 , o vértice u_3 não é adjacente a u_2 em H_0 . Juntamente com a nossa observação anterior, isso implica que as duas arestas ausentes de H_0 são exatamente u_1u_5 e u_2u_3 . Tendo em vista p_2 , o caminho $P(u_1u_3)$ corresponde ao caminho p_3 entre S e S' . Tendo em vista p'_2 , o caminho $P(u_2u_4)$ corresponde ao caminho p_4 entre S e S' . Sendo assim, os dois caminhos p_3 e p_4 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ compartilham os três vértices s , x e s' , o que é uma contradição. \square

Lema 31 *Se H for uma subdivisão de $K_{3,3}$ e $G = L(H)$, então G não está em $\text{ORTH}[3, 2, 3]$.*

Prova: Sejam $\{u_1, u_2, u_3\}$ e $\{u'_1, u'_2, u'_3\}$ os dois conjuntos de vértices das partições de $K_{3,3}$. Note que G é um grafo linha conexo, livre de gêmeos de ordem de pelo menos 4. Por contradição, suponha que G pertença a $\text{ORTH}[3, 2, 3]$. Seja $\mathcal{T}_{(3,t)}$ uma $(3, t)$ -árvore layout como no Corolário 22 para $t = 3$. Seja r qualquer nó interno de $\mathcal{T}_{(3,3)}$, e $\mathcal{T}_{(3,3)}$ enraizada em r . Seja s um nó de $\mathcal{T}_{(3,3)}$ de distância máxima de r , tal que pelo menos dois descendentes de s em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ são folhas correspondentes a vértices de $K_{3,3}$. Assim, exatamente dois descendentes de s correspondem a vértices de $K_{3,3}$. Seja x o pai de s . Sejam s' e s'' os dois vizinhos de x distintos de s . Sejam S , S' e S'' os conjuntos de nós dos três componentes de $\mathcal{T}_{(3,3)} - x$ que contêm s , s' e s'' , respectivamente.

Considerando os casos onde duas folhas correspondentes a vértices de $K_{3,3}$ estão em S assim como a distribuição das outras quatro folhas estão em S' ou S'' , temos:

Caso 1: $u_1, u_2 \in S$. Figura 3.10(a).

Pelo princípio da casa de pombo e por simetria, podemos supor que u'_1 e $u'_2 \in S'$, e que $u_1u'_1$ e $u_2u'_2$ são arestas de $K_{3,3}$. Note que cada aresta uv de $K_{3,3}$ corresponde

a um caminho $P(uv)$ em uma subdivisão de $K_{3,3}$ entre u e v cujos vértices internos são todos de grau 2, e que as arestas desse caminho correspondem a caminhos folha a folha em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ tal que, para arestas independentes, os caminhos correspondentes compartilham no máximo 2 vértices.

Temos então que $P(u_1u'_1)$ corresponde em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ ao caminho p_1 entre uma folha de S e uma folha de S'' , e um caminho p'_1 entre uma folha de S' e uma folha de S'' . Além disso, $P(u_2u'_2)$ corresponde em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ ao caminho p_2 entre uma folha de S e uma folha de S' . Tendo em vista o caminho p_1 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, o caminho $P(u_2u'_3)$ não corresponde a um caminho entre S e S'' . Tendo em vista o caminho p'_1 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, o caminho $P(u_2u'_3)$ não corresponde a um caminho entre S' e S'' . Isso implica que $u'_3 \in S'$. Tendo em vista o caminho p_2 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, o caminho $P(u_1u'_3)$ não corresponde a um caminho entre S e S' . Tendo em vista o caminho p'_1 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, o caminho $P(u_1u'_3)$ não corresponde a um caminho entre S' e S'' . Isso implica uma contradição.

Considerando o Caso 1, podemos supor que os dois vértices de $K_{3,3}$ em S pertencem a diferentes partições, ou seja, por simetria, $u_1, u'_1 \in S$.

Caso 2: $u_1, u'_1 \in S$, $u_2, u'_2 \in S'$ e $u_3, u'_3 \in S''$. Figura 3.10(b).

Por simetria, podemos supor que $P(u_1u'_2)$ corresponde ao caminho p_1 entre uma folha de S e uma folha de S'' , e um caminho p'_1 entre uma folha de S' e uma folha de S'' . Além disso, $P(u'_1u_2)$ corresponde a um caminho p_2 entre uma folha de S e uma folha de S' . Tendo em vista o caminho p_1 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, o caminho $P(u_2u'_3)$ não corresponde a um caminho entre S e S'' . Tendo em vista o caminho p'_1 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, o caminho $P(u_2u'_3)$ não corresponde a um caminho entre S' e S'' . Isso implica uma contradição.

Caso 3: $u_1, u'_1 \in S$ e $u_2, u'_2, u_3, u'_3 \in S'$. Figura 3.10(c).

Por simetria, podemos supor que $P(u_1u'_2)$ corresponde ao caminho p_1 entre uma folha de S e uma folha de S'' , e um caminho p'_1 entre uma folha de S' e uma folha de S'' . Além disso, $P(u'_1u_2)$ corresponde a um caminho p_2 entre uma folha de S e uma folha de S' . Tendo em vista o caminho p_2 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, o caminho $P(u_1u'_3)$ não corresponde a um caminho entre S e S' . Tendo em vista o caminho p'_1 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, o caminho $P(u_1u'_3)$ não corresponde a um caminho entre S' e S'' . Isso implica uma contradição.

Levando em consideração os casos 2 e 3, podemos supor, por simetria, que $u_2 \in S'$ e $u'_2 \in S''$. Se $u_3 \in S'$ e $u'_3 \in S''$, então podemos argumentar como no Caso 1. Se $u'_3 \in S'$ e $u_3 \in S''$, então podemos argumentar como no Caso 2. Assim, por simetria, basta considerar o seguinte caso final.

Caso 4: $u_1, u'_1 \in S$, $u_2, u_3, u'_3 \in S'$ e $u'_2 \in S''$. Figura 3.10(d).

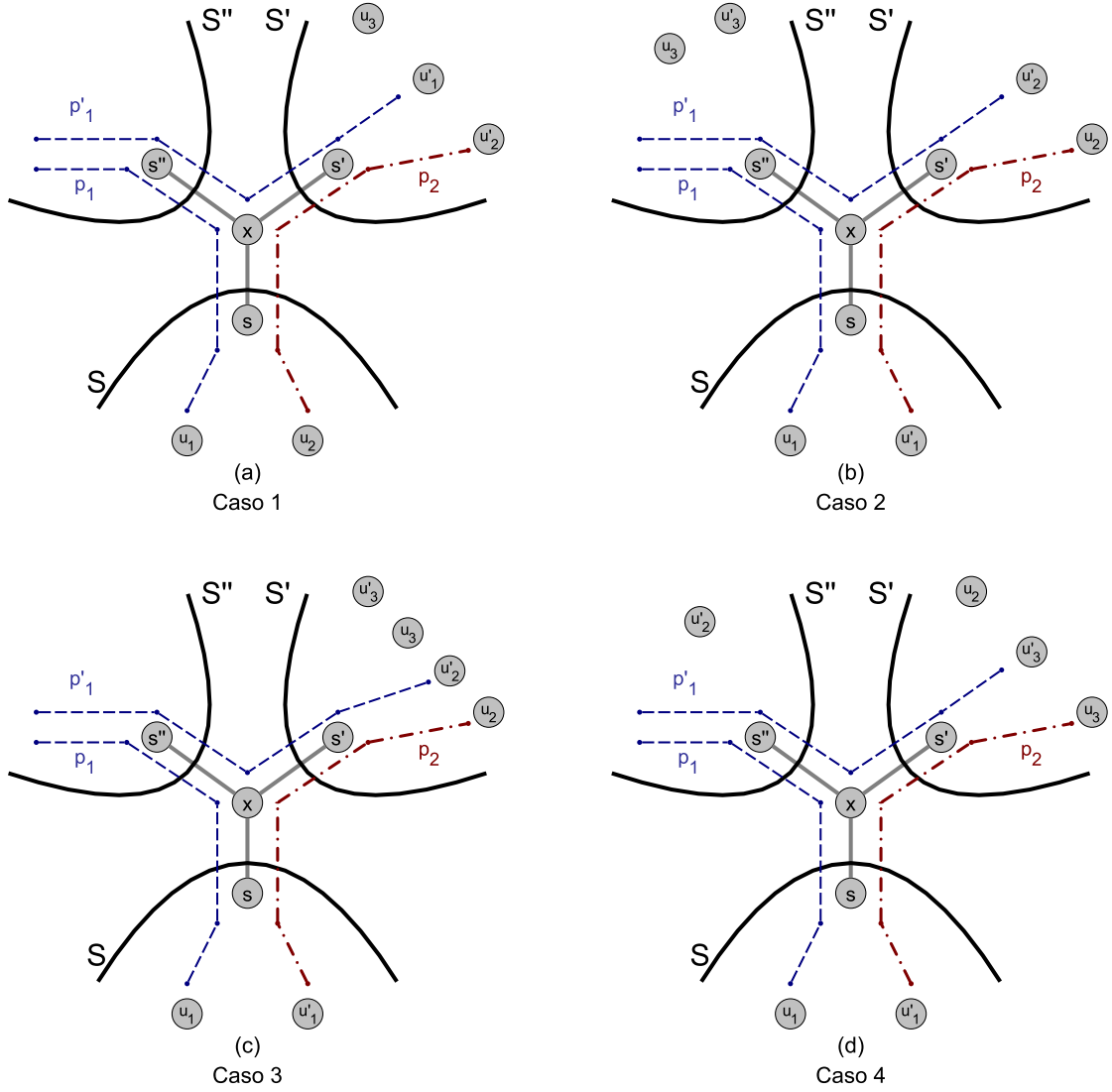


Figura 3.10: (a) Caso 1: as folhas $u_1, u_2 \in S$. (b) Caso 2: as folhas $u_1, u'_1 \in S$, $u_2, u'_2 \in S'$ e $u_3, u'_3 \in S''$. (c) Caso 3: as folhas $u_1, u'_1 \in S$ e $u_2, u'_2, u_3, u'_3 \in S'$. (d) Caso 4: as folhas $u_1, u'_1 \in S$, $u_2, u_3, u'_3 \in S'$ e $u'_2 \in S''$.

Por simetria, podemos supor que $P(u_1u'_3)$ corresponde ao caminho p_1 entre uma folha de S e uma folha de S'' , e um caminho p'_1 entre uma folha de S' e uma folha de S'' . Além disso, $P(u'_1u_3)$ corresponde a um caminho p_2 entre uma folha de S e uma folha de S' . Tendo em vista o caminho p_2 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, o caminho $P(u_2u'_2)$ não corresponde a um caminho entre S e S' . Tendo em vista o caminho p'_1 em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, o caminho $P(u_2u'_2)$ não corresponde a um caminho entre S' e S'' . Isso implica uma contradição e completa a prova. \square

Teorema 32 *Se um grafo conexo G livre de gêmeos de ordem pelo menos 4 está em $\text{ORTH}[3, 2, 3]$, então G é grafo linha de um grafo planar.*

Prova: Pelo teorema 19, existe um grafo conexo único H' com $G = L(H')$. Por uma contradição, suponha que H' não seja planar. Pelo resultado de Kuratowski [36], o grafo H' tem um subgrafo H que é uma subdivisão de um grafo H_0 tal que H_0 é K_5 ou $K_{3,3}$. Como $L(H)$ é um subgrafo induzido de $L(H')$, o grafo $L(H)$ está em $\text{ORTH}[3, 2, 3]$. Agora, se H_0 for K_5 ou $K_{3,3}$, então o Lema 30 ou o Lema 31 implica uma contradição, de que $L(H)$ não está em $\text{ORTH}[3, 2, 3]$, respectivamente. \square

O Teorema 33 mostra que a Classe dos grafos $\text{ORTH}[3, 2, 3]$ está propriamente contida na Classe dos grafos linha de grafos planares, pois o grafo G da Figura 3.11(b) que é grafo linha do grafo H da Figura 3.11(a), é grafo linha de um grafo planar, mas não está em $\text{ORTH}[3, 2, 3]$.

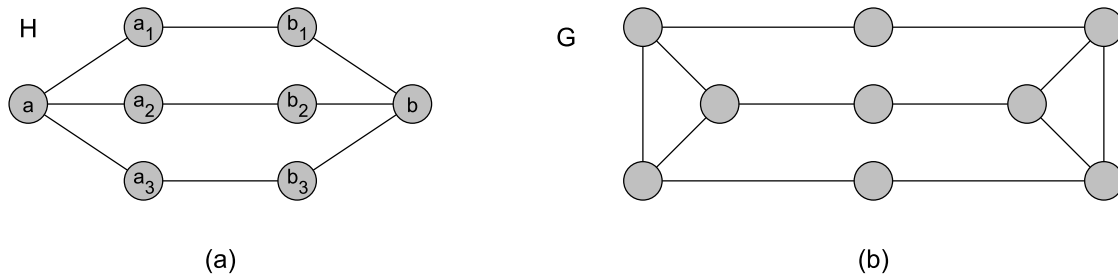


Figura 3.11: (a) Grafo planar H . (b) Grafo G , que é grafo linha de H .

Teorema 33 *Seja H o grafo da Figura 3.11(a) e $G = L(H)$, então $G \notin \text{ORTH}[3, 2, 3]$.*

Prova: Suponha que $\mathcal{T}_{(3,3)}$ seja a $(3, 3)$ -árvore layout de H . Em $\mathcal{T}_{(3,3)}$, considere $P_{(ab)}$ o caminho entre as folhas a e b . Considere também $e_i = x_i y_i$ uma aresta de $\mathcal{T}_{(3,3)}$ tal que $x_i \in P_{(ab)}$ e $y_i \notin P_{(ab)}$. Seja e_1, e_2, \dots, e_k o conjunto de arestas incidentes em $P_{(ab)}$, onde x_1 é o nó mais próximo da folha a e x_k o nó mais próximo da folha b . Seja T_i uma subárvore de $\mathcal{T}_{(3,3)}$ enraizada em y_i que não contém x_i , onde y'_i e y''_i são filhos de y_i , como ilustrado na Figura 3.12(a).

Suponha que $a_1, a_2 \in T_i$. Isso implica que dois caminhos c' e c'' que não compartilham a mesma folha em T_i , compartilham a aresta e_i . Então, temos os seguintes casos:

- (i) Um caminho c' ou c'' compartilha os vértices x_{i-1}, x_i e y_i com os caminhos $a - a_1$ e $a - a_2$. Contradição.

(ii) Os caminhos c' e c'' compartilham o nó x_{i+1} . Como c' e c'' não compartilham folha em T_i , então c' e c'' compartilham a folha b . Sendo assim, temos a_1 , a_2 , b_1 e b_2 em T_i . Então, dois casos podem ocorrer:

- Se os caminhos $a - a_1$ e $a - a_2$ contêm y'_i (ou y''_i), então os caminhos c' e c'' compartilham com $a - a_1$ e $a - a_2$ os nós y'_i , y_i e x_i . O que não é permitido, pois dois caminhos que não compartilham folha teriam interseção de tamanho 3. Contradição;
- Sem perda de generalidade, se o caminho $a - a_1$ contêm y'_i e o caminho $a - a_2$ contém y''_i , então os caminhos independentes $a_1 - b_1$ e $a_2 - b_2$ compartilharão os nós y'_i , y_i e y''_i . Contradição.

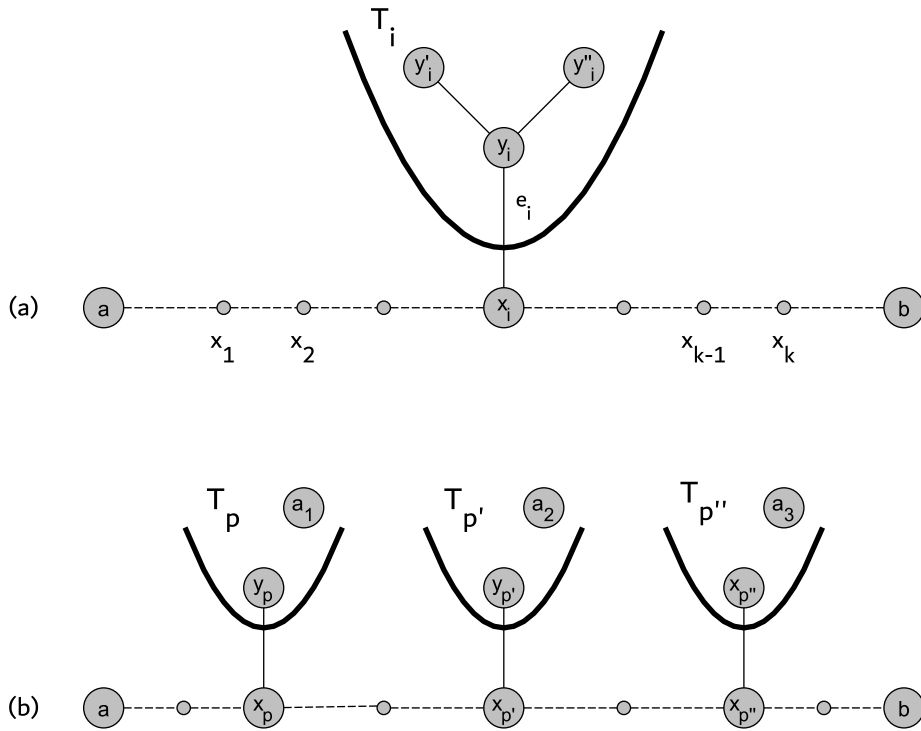


Figura 3.12: (a) Caminho $P_{(ab)}$ em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ e uma subárvore T_i ; (b) Caminho $P_{(ab)}$ em $\mathcal{T}_{(3,3)}$ com as subárvores T_p , $T_{p'}$ e $T_{p''}$ que possuem respectivamente as folhas a_1 , a_2 e a_3 .

Sendo assim, duas folhas a_l (ou b_l) com $l = \{1, 2, 3\}$ não podem estar na mesma subárvore T_i . Sem perda de generalidade, considere que os caminhos $a - a_1$, $a - a_2$ e $a - a_3$ contém as arestas e_p , $e_{p'}$ e $e_{p''}$, respectivamente. Vale ressaltar que os nós x_p , $x_{p'}$ e $x_{p''}$ não são necessariamente vizinhos em $P_{(ab)}$, que x_p é o nó mais próximo da folha a e o nó $x_{p''}$ é o nó mais distante da folha a , como ilustrado na Figura 3.12(b).

Como existem dois caminhos $a_1 - b_1$ e $b_1 - b$, é fácil verificar que um deles compartilhará pelo menos o nó $x_{p'}$ e seus dois vizinhos em $P_{(ab)}$ com o caminho $a - a_3$. Como tanto o caminho $a_1 - b_1$ quanto o caminho $b_1 - b$ não compartilham folha com $a - a_3$, então H não possui uma $(3, 3)$ -árvore layout. Consequentemente $G \notin \text{ORTH}[3, 2, 3]$. \square

Capítulo 4

Grafos $\text{ORTH}[3,3,3]$

Neste capítulo estudamos os grafos que pertencem a classe $\text{ORTH}[3,3,3]$. Nosso principal objetivo é um dispositivo capaz de verificar se uma determinada classe de grafos está contida em $\text{ORTH}[3,3,3]$. Desenvolvemos um método que dado um grafo G , este grafo é decomposto por cliques minimais separadoras até que todos os subgrafos induzidos restantes, chamados átomos, não possam mais ser decompostos. Se cada átomo da decomposição de G admitir uma representação $(3,3,3)$ -ortodoxa, este método obtém uma representação de G a partir da representação dos seus átomos. Assim, se conseguirmos estabelecer todos os possíveis átomos de uma determinada classe C e obtermos uma representação $(3,3,3)$ -ortodoxa para cada um deles, provamos que a classe C está contida em $\text{ORTH}[3,3,3]$.

Este capítulo segue dividido da seguinte maneira: Na Seção 4.1 apresentamos os conceitos que oferecem subsídios aos temas abordados na seção. Em seguida, detalhamos algumas propriedades apresentadas por grafos de interseção. Na Seção 4.2 são apresentados alguns lemas e teoremas sobre grafos $\text{ORTH}[3,3,3]$ que possuem cliques minimais separadoras. Finalmente na Seção 4.3 detalhamos o processo de decomposição de grafos que admitem uma representação $(3,3,3)$ -ortodoxa.

4.1 Preliminares

Um *separador* é um conjunto de vértices que ao ser removido aumenta a quantidade de componentes do grafo. Em um grafo conexo G , C é uma *clique separadora* de G se ao ser removida desconecta o grafo, ou seja, o grafo G' induzido pelos vértices $V(G - C)$ é desconexo. Uma clique separadora é *minimal* se não existe um subconjunto próprio dos seus vértices que induzam uma clique separadora.

Dado um grafo G , uma *clique separadora minimal* $C_k = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ em G é uma clique que ao ser removida separa o conjunto de

vértices $V(G)$ em m componentes conexas G_1, G_2, \dots, G_m induzidas pelos vértices $V(G_1), V(G_2), \dots, V(G_m)$, respectivamente. Denotamos por G_i^* o subgrafo induzido de G pelos vértices de $G_i \cup C$. O conjunto de todas as subárvores $\{S_u \in \mathcal{S} / u \in G_i\}$ é chamada de **família de subárvores** e denotada por \mathcal{S}_i . Uma definição importante é a **subárvore componente**, denota por δ_i . A subárvore componente deve ser considerada uma única subárvore representando a união de todas as subárvores que pertencem a \mathcal{S}_i , ou seja, δ_i é uma subárvore induzida de T pelos nós que pertencem a $\bigcup_{v \in G_i} S_v$. Denotamos por \mathcal{S}_i^* a família de subárvores correspondentes aos vértices de G_i^* . Assim como, denotamos a subárvore que representa a união de todas as subárvores que pertencem a \mathcal{S}_i^* por δ_i^* . Denotamos por \mathcal{S}^{uv} a família de subárvores de T que compartilham a aresta $uv \in E(T)$.

A **decomposição por clique minimal separadora** pode ser descrita como o processo onde dado um grafo G , com uma clique minimal separadora C , as componentes conexas G_1, G_2, \dots, G_m induzidas por $V(G - C)$ dão origem aos subgrafos $G_i^* = G_i \cup C$. Aplicando repetidamente o processo nos subgrafos $G_1^*, G_2^*, \dots, G_m^*$ até que nenhum subgrafo contenha alguma clique separadora, o procedimento chega ao seu final e os subgrafos restantes são chamados de *Átomos*.

Seja $G \in \text{ORTH}[3, 3, 3]$, e (T, \mathcal{S}) sua representação. Considere que o grafo G possui uma clique separadora $C = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$, chamamos de **subárvore clique** $S_C = \{S_{u_1} \cap S_{u_2} \cap \dots \cap S_{u_k}\}$. Assim como, denotamos por $\mathcal{S}_C = \{S_{u_1}, S_{u_2}, \dots, S_{u_k}\}$. Notem que existe diferença entre S_C e \mathcal{S}_C , a primeira consiste em uma única subárvore, cujos seus vértices e arestas são compartilhados simultaneamente por todas as subárvores $\{S_u / u \in C\}$, já \mathcal{S}_C representa o conjunto de subárvores, tal que $\{S_u / u \in C\}$.

Dado um conjunto de subárvores de uma árvore, se qualquer duas subárvores deste conjunto tem interseção não vazia entre si, então a interseção entre todas as subárvores é não vazia, ou seja, existe ao menos um nó comum entre todas elas. Uma família de subárvores que possui esta propriedade satisfaz a *propriedade Helly*. [16]

Uma clique C na qual todas as subárvores $\{S_u \in \mathcal{S} / u \in C\}$ compartilham uma mesma folha $f \in T$ é dita **Clique Ortodoxa**. Este conceito é muito importante, pois se for possível construir uma representação onde todas as cliques sejam ortodoxas o processo de fusão de dois subgrafos representáveis seria demasiadamente facilitado.

4.2 Grafos $ORTH[3,3,3]$ com clique separadora

Nesta seção serão apresentados alguns lemas e teoremas que definem propriedades de grafos que pertencem a classe $ORTH[3,3,3]$ e possuem uma clique separadora C . Inicialmente, devemos lembrar que em qualquer grafo $G \in ORTH[3,3,3]$ uma clique separadora C_k com $k \leq 2$ é uma *clique ortodoxa*, pois as subárvores que representam seus vértices sempre compartilharão uma mesma folha com a árvore T .

Lema 34 *Seja o grafo $G \in ORTH[3,3,3]$. Se G_1, G_2, \dots, G_h são as componentes conexas geradas pela remoção de uma clique separadora C , então em qualquer representação (T, \mathcal{S}) toda δ_i possui, no mínimo, um nó de grau 2.*

Prova: Se G admite uma clique separadora C , então existem ao menos duas componentes conexas G_i e G_j . Suponha, por absurdo, que δ_i não possua nenhum nó com grau 2, então a árvore hospedeira T possui apenas nós com grau 1 ou 3, isso implica que δ_i compartilha todos os nós de T , incluindo todas as suas folhas, caso contrário, haverá um nó em δ_i com grau 2. Entretanto, se isso ocorrer δ_i e δ_j vão compartilhar alguma folha, e como a representação é ortodoxa o compartilhamento de folhas gera adjacências em G . O que é uma contradição, pois δ_i e δ_j representam as componentes G_i e G_j que não são adjacentes. Logo, δ_i possui ao menos um nó de grau 2. \square

Lema 35 *Um grafo $G \in ORTH[3,3,3]$ que admite uma clique separadora C , possui uma subárvore clique S_C não vazia.*

Prova: A existência de S_C é facilmente comprovada, pois $C = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ com $S_{u_i} \cap S_{u_j} \neq \emptyset$, para qualquer $\{u_i \text{ e } u_j \in C / i \neq j, 1 \leq i \leq k \text{ e } 1 \leq j \leq k\}$. Como as subárvores $S_{u_1}, S_{u_2}, \dots, S_{u_k}$ satisfazem a propriedade Helly, ou seja, $\{S_{u_1} \cap S_{u_2} \cap \dots \cap S_{u_k}\} \neq \emptyset$, então a *subárvore clique* S_C possui ao menos um nó p . Caso esta interseção possua outros nós além de p , todos estes nós devem ser conectados por uma subárvore, pois na árvore hospedeira T existe um único caminho entre qualquer par de nós, formando assim a *subárvore clique* S_C . \square

Teorema 36 *Dado o grafo $G \in ORTH[3,3,3]$ com uma clique separadora minimal C , a subárvore clique S_C possui interseção não vazia com todas as subárvores componente δ_i .*

Prova: Pelo Lema 35, a subárvore clique S_C possui ao menos um nó p . Então, escolhido um nó p , para qualquer subárvore δ_i temos duas possibilidades:

- i. p já tem interseção com δ_i , neste caso a interseção é não vazia; ou
- ii. existe um caminho P_i em T , iniciando em p até o primeiro nó encontrado de δ_i , caso contrário não existiria interseção entre a clique C e a componente G_i , e como a componente G_i não pode ter adjacência com outra componente, o grafo G seria desconexo. Além disso, todas subárvores que pertencem a \mathcal{S}_C devem compartilhar o caminho P_i , caso contrário, C não seria minimal, ou seja, não seria necessário desconectar todos os vértices de C para desconectar a componente G_i .

Sendo assim, S_C será a união de todos os caminhos P_i . Logo, S_C possui interseção não vazia com todas as δ_i . \square

Lema 37 *Seja o grafo $G \in ORTH[3,3,3]$. Se G admite uma clique separadora C , então:*

- i. a interseção entre mais de três subárvores componentes é sempre vazia.
- ii. a interseção entre três subárvores componentes δ_i, δ_j e δ_l é vazia ou é um único nó interno de T .
- iii. a interseção entre duas subárvores componentes δ_i e δ_j é vazia ou é um caminho que não compartilha folha com a árvore hospedeira T .

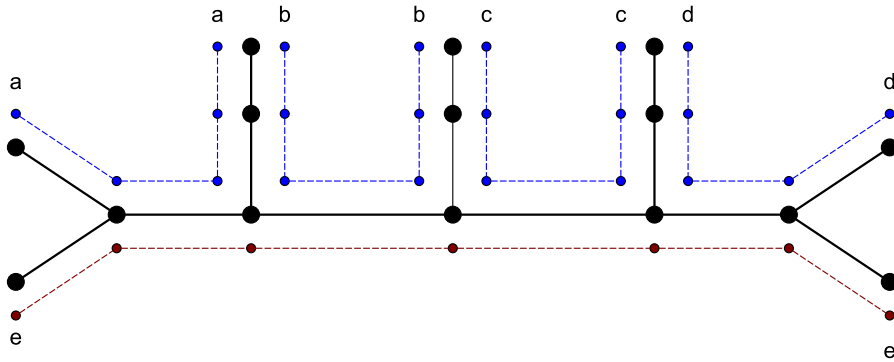


Figura 4.1: As subárvores $\{S_a, S_b, S_c, S_d\} \in \mathcal{S}_i$ e a subárvore $S_e \in \mathcal{S}_j$. A interseção entre δ_i e δ_j é o caminho que vai de x^- a y^- .

Prova: Inicialmente vamos provar que a interseção entre três subárvores componentes se existir, é um único nó interno de T , em seguida provaremos que não é possível inserir mais nenhuma subárvore componente nesta interseção, assim provaremos os itens (i) e (ii). Como a interseção entre subárvores satisfaz a *propriedade helly*, então existe um nó p na interseção das três subárvores

componentes δ_i, δ_j e δ_l . Vamos considerar que os vizinhos de p em T são x, y e z . Neste caso, como podemos observar na Figura 4.4(b) a subárvore componente δ_i além de p também contém x e y , mas não contém z , caso contrário existiria interseção da componente G_i com G_j e G_l . Da mesma forma, δ_j contém y e z , mas não contém x e δ_l contém x e z , mas não contém y . Dessa forma, provamos que p é o único nó que pertence simultaneamente as três subárvores componentes δ_i, δ_j e δ_l . Se tentarmos inserir uma nova componente δ_q na interseção, o nó p deverá pertencer a δ_q , além disso dois vizinhos de p também precisam pertencer a nova componente. Sendo assim, é fácil verificar que qualquer combinação de dois vizinhos de p para pertencer a δ_q resultará em adjacência entre δ_q e alguma outra componente. Logo a interseção entre mais de três subárvores componentes é vazia.

Agora vamos provar o item (iii). Duas subárvores $S_i \in \mathcal{S}_i$ e $S_j \in \mathcal{S}_j$ possuem interseção vazia ou $|S_i \cap S_j| = 2$. Entretanto, a interseção entre duas subárvores componentes δ_i e δ_j pode ter cardinalidade maior que dois. Considere em T o nó p e seus vizinhos x, y e z , onde $\{x, p, y, z\} \in \delta_i$ e $\{x, p, y\} \in \delta_j$, isso só é possível se os nós x e y não forem compartilhados pela mesma subárvore $S_i \in \mathcal{S}_i$. Este cenário, que é ilustrado na Figura 4.1, mostra $|\delta_i \cap \delta_j| > 2$ e pode ser estendido para as direções de x e y , aumentando $|\delta_i \cap \delta_j|$. Repare que a interseção entre qualquer $S_i \in \mathcal{S}_i$ com $S_j \in \mathcal{S}_j$ é igual a 2, ou seja, a inclusão de qualquer nó na interseção de δ_i e δ_j resultará em uma adjacência proibida. Sendo assim, nenhum nó u que pertença ao caminho $\delta_i \cap \delta_j$ possuirá grau maior que 2. Como a interseção das subárvores componentes δ_i e δ_j não pode compartilhar uma folha em T , caso contrário existiria adjacência entre G_i e G_j em G , o lema está provado. \square

Teorema 38 *Dado um grafo $G \in [3, 3, 3]$ com uma representação (T, \mathcal{S}) . Considere uma aresta $uv \in E(T)$, na qual quaisquer duas subárvores S_x e $S_y \in \mathcal{S}^{uv}$, possuem interseção maior ou igual a 3. Se existem duas subárvores componente δ_i e δ_j , cujo caminho que as separa contém uv , então \mathcal{S}^{uv} representa o conjunto de vértices de uma clique separadora em G .*

Prova: Como todas as subárvores que compartilham a aresta $uv \in E(T)$ tem interseção maior ou igual a 3, isso implica que os vértices em G , representados por estas subárvores formam uma clique C . Vamos chamar de \mathcal{S}^{+u} a família das subárvores que não contém uv e que possuem distância até u menor que sua distância até v . Assim como, \mathcal{S}^{+v} as subárvores mais próximas de v do que de u . Este esquema pode ser observado na Figura 4.2. Como as subárvores S_x e S_y são separadas em T por um caminho que contém uv , isso implica que existe ao menos uma subárvore em cada uma das famílias \mathcal{S}^{+u} e \mathcal{S}^{+v} . Sendo assim, apenas as subárvores de \mathcal{S}^{uv} podem fazer interseção simultaneamente com subárvores $S \in \mathcal{S}^{+u}$ e subárvores $S \in \mathcal{S}^{+v}$. Assim, ao remover a família de subárvores \mathcal{S}^{uv} , não existirá nenhuma interseção

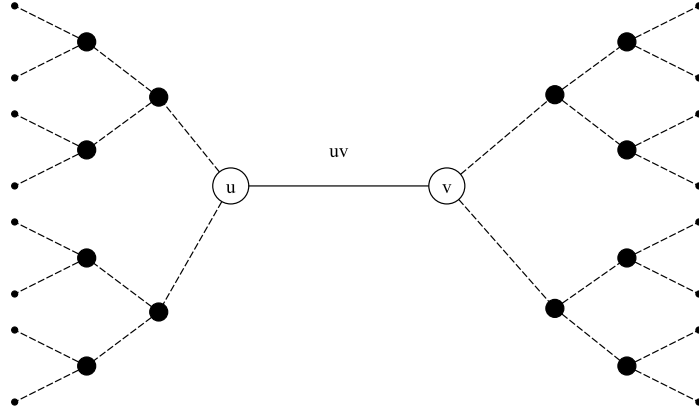


Figura 4.2: Aresta $uv \in E(T)$ que separa \mathcal{S}^{+u} e \mathcal{S}^{+v} .

entre subárvores $S \in \mathcal{S}^{+u}$ e subárvores $S \in \mathcal{S}^{+v}$. Logo, os vértices representados pela família de subárvores \mathcal{S}^{uv} formam uma clique separadora. \square

Teorema 39 *Dado um grafo $G \in ORTH[3, 3, 3]$ que admite uma clique separadora minimal C . Se existe uma representação (T, \mathcal{S}) , onde ao menos um nó $p \in S_C$ possui interseção com qualquer δ_i com grau menor que 3, então a interseção de S_C com qualquer δ_i possui ao menos um nó de grau 2.*

Prova: Pelo Lema 36, a subárvore clique S_C possui interseção com todas as subárvores componentes δ_i . Por hipótese, existe um nó $p_i \in S_C \cap \delta_i$ com grau 2, que não tem interseção grau 3 com qualquer outra subárvore componente. Tomando o nó p_i , temos para cada subárvore componente δ_j , com $j \neq i$, um caminho $P_j \in S_C$ entre p_i e δ_j . Como podemos observar na Figura 4.3, temos que o caminho P_j possui uma aresta $uv \in T$, na qual $u \in \delta_j$ e $v \notin \delta_j$. Como se trata de uma representação ortodoxa os outros vizinhos de u são x e $y \in \delta_j$, logo $S_C \cap \delta_j$ possui grau 2 em relação a subárvore componente δ_j . \square

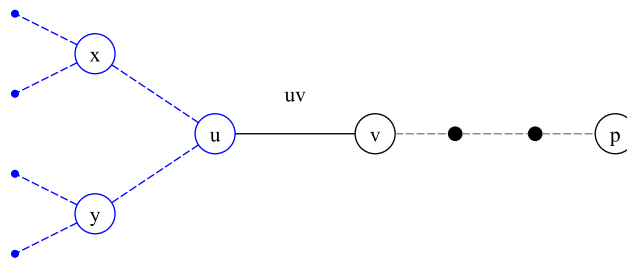


Figura 4.3: Caminho P_j entre o nó $p \in S_C$ e uma subárvore componente δ_j

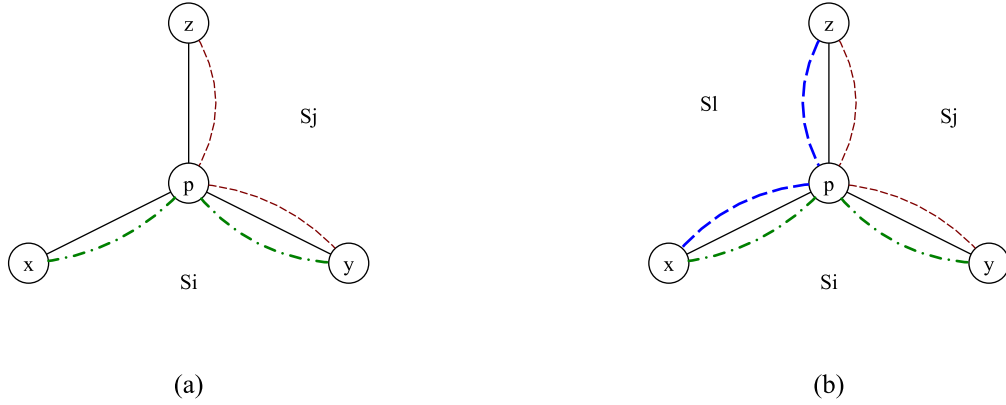


Figura 4.4: (a) Interseção de $p \in S_C$ com duas subárvores componente δ_i e δ_j . (b) Interseção de $p \in S_C$ com três subárvores componente δ_i , δ_j e δ_l

4.3 Decomposição por cliques minimais separadoras

Nesta seção será apresentado um procedimento que constrói uma árvore de decomposição por cliques separadoras minimais de um dado grafo $G \in \text{ORTH}[3, 3, 3]$, assim como os passos para reconstruir o grafo a partir de seus átomos. A cada etapa da decomposição ou da reconstrução do grafo G , serão detalhadas as operações realizadas na representação (T, \mathcal{S}) do grafo G e de seus subgrafos. Esta seção está dividida da seguinte maneira: Na subseção 4.3.1 será apresentado o processo de decomposição por cliques minimais separadoras de um dado grafo G . Na subseção 4.3.2 serão detalhadas as operações realizadas na representação $(3, 3, 3)$ -ortodoxa ao decompor um grafo G , assim como os procedimentos necessários no processo de reconstrução do grafo serão apresentados na seção 4.3.3.

4.3.1 Decomposição de $G \in \text{ORTH}[3, 3, 3]$ por clique minimal separadora

A *decomposição por clique minimal separadora* pode ser descrita como o processo onde dado um grafo G , com uma clique minimal separadora C , as componentes conexas G_1, G_2, \dots, G_m induzidas por $V(G - C)$ dão origem aos subgrafos $G_i^* = G_i \cup C$. Aplicando repetidamente o processo nos subgrafos $G_1^*, G_2^*, \dots, G_m^*$ até que nenhum subgrafo contenha alguma clique minimal separadora, o procedimento chega ao seu final e os subgrafos restantes são chamados de *Átomos*.

A Figura 4.5 ilustra um exemplo de decomposição onde em (a) temos o grafo G , em (b) temos o grafo G decomposto pela clique $C = \{c, d\}$ formando

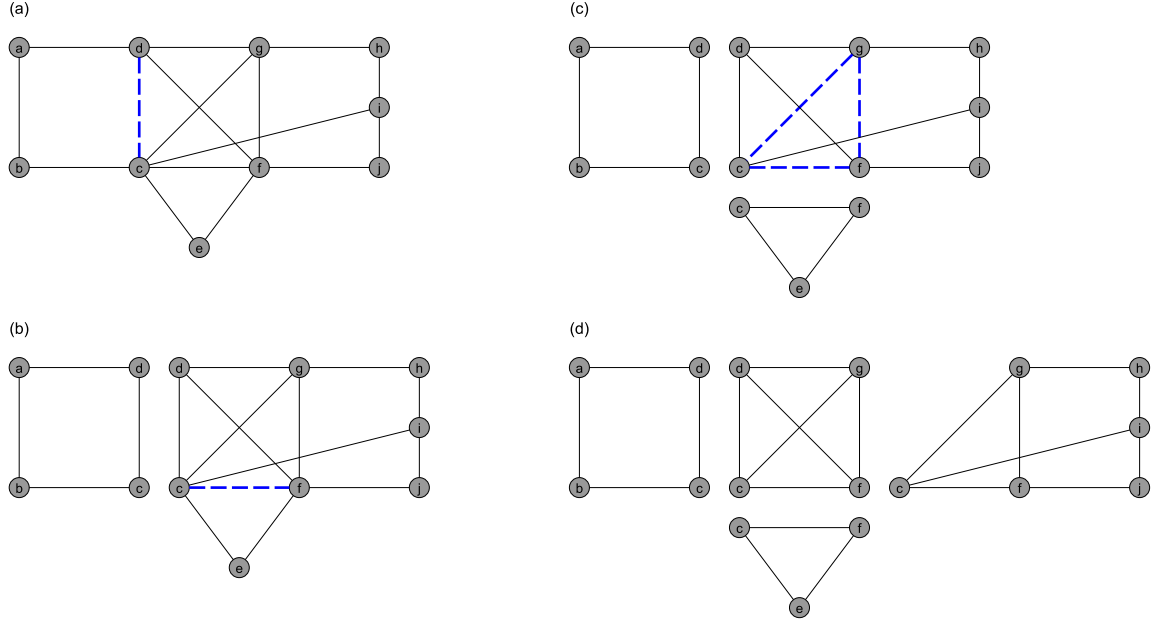


Figura 4.5: (a)O Grafo original G . (b)Decomposto por $C = \{c, d\}$. (c)Decomposto por $C = \{c, f\}$. (d)Decomposto por $C = \{c, f, g\}$

os subgrafos $G_1^* = \{a, b, c, d\}$ e $G_2^* = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$. Em (c) o subgrafo G_2^* é decomposto em $G_{2.1}^* = \{c, e, f\}$ e $G_{2.2}^* = \{c, d, e, f, g, h, i, j\}$ pela clique $C_2 = \{c, f\}$. Finalmente, o subgrafo $G_{2.2}^*$ é decomposto por $C_{2.2} = \{c, f, g\}$ em $G_{2.2.1}^* = \{c, d, f, g\}$ e $G_{2.2.2}^* = \{c, f, g, h, i, j\}$. Os subgrafos restantes não possuem cliques separadoras, assim chegamos ao fim da decomposição, resultando nos átomos G_1^* , $G_{2.1}^*$, $G_{2.2.1}^*$ e $G_{2.2.2}^*$. A árvore de decomposição do grafo G pode ser observada na Figura 4.6, os átomos são representados por subgrafos sem cliques separadoras. Na subseção 4.3.2 serão apresentados os procedimentos que devem ser realizados para a construção da representação $(3, 3, 3)$ -ortodoxa dos subgrafos formados em cada etapa da decomposição.

O caminho inverso se dá pela reconstrução do grafo G a partir de seus átomos. No exemplo ilustrado pela árvore de decomposição da Figura 4.6, o primeiro passo seria unir os subgrafos $G_{2.2.1}^* = \{c, d, f, g\}$ e $G_{2.2.2}^* = \{c, f, g, h, i, j\}$ pela clique $C_{2.2} = \{c, f, g\}$ e assim sucessivamente, até que o grafo original G seja novamente reconstruído. As ações que devem ser realizadas nas $(3, 3, 3)$ -representações dos subgrafos afim de representar novamente o grafo G , mantendo sua ortodoxia, são detalhadas na subseção 4.3.3.

4.3.2 Como decompor $G \in \text{ORTH}[3, 3, 3]$

Dado $G \in \text{ORTH}[3, 3, 3]$ e definida sua clique separadora $C = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$. A decomposição consiste em remover a clique C do grafo G .

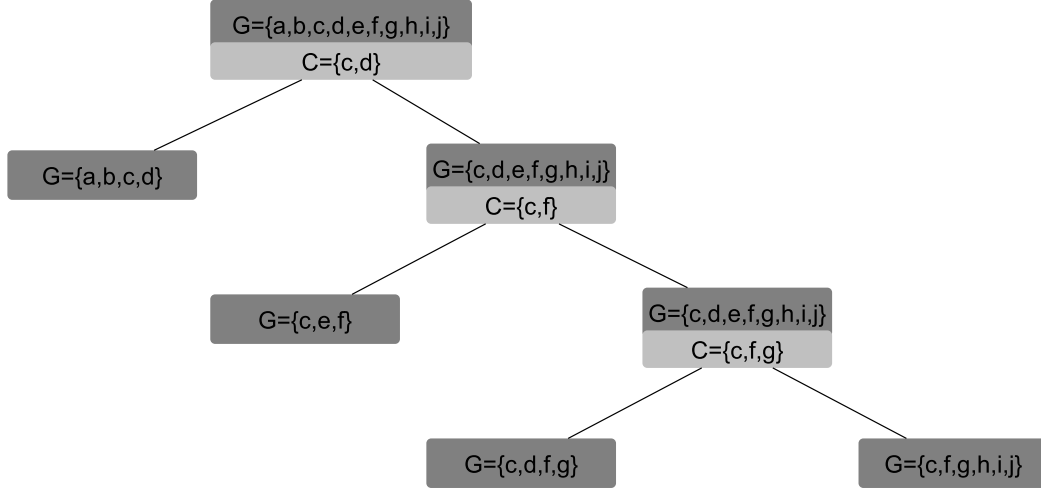


Figura 4.6: Árvore de decomposição do grafo G

Assim o grafo resultante será desconexo e suas componentes serão G_1, G_2, \dots, G_m . Entretanto, para o processo de construção da árvore de decomposição, cada nova componente $G_1^*, G_2^*, \dots, G_m^*$, será definida por $G_i^* = G_i \cup C$. Desta forma, apresentamos o procedimento de construção da representação (T_i^*, \mathcal{S}_i^*) para cada novo grafo G_i^* de maneira a deixá-la convenientemente formatada para a futura recomposição do grafo G original. Sabemos pelo Lema 36, que a subárvore clique S_C possui interseção não vazia com todas as componentes δ_i . Sendo assim, de acordo com as características do grafo G utilizaremos duas estratégias distintas para decompô-lo. Quando existir uma representação (T, \mathcal{S}) para G , na qual a subárvore clique S_C possua interseção com cada uma das subárvores componentes δ_i em um nó de grau 2, utilizamos o caso (a). Caso contrário, ou seja, quando na interseção de S_C e qualquer das componentes δ_i não existir um nó de grau menor que três, utilizaremos a estratégia (b).

(a) Quando a interseção entre S_C e qualquer δ_i possuir um nó p com grau 2 podemos seguir os seguintes passos para determinar a representação (T_i^*, \mathcal{S}_i^*) de cada uma de suas componentes.

1. $T_i^* = \delta_i \cup P_3^i$, no qual P_3^i é um subgrafo caminho com três nós $\{p, u, v\}$ e é determinado da seguinte forma: existe um nó $p \in \delta_i \cap S_C$, o qual apenas dois de seus vizinhos pertencem a δ_i . Considerando estes vizinhos como x e y , inserimos um terceiro vizinho u de p , que não pertence a δ_i , em seguida adicionamos um nó v como vizinho de u para construirmos a árvore T_i^* , que pode ser observada na Figura 4.7. O subgrafo P_3^i será formado pelos nós $\{p, u, v\}$, com $N(p) = \{u, x, y\}$, $N(u) = \{p, v\}$ e $N(v) = \{u\}$.
2. $\mathcal{S}_i^* = \mathcal{S}_i \cup \{S \cap \delta_i, \forall S \in \mathcal{S}_i\}$, ou seja, todas as subárvores $S \in \mathcal{S}_i$, além de

uma subárvore, de cada subárvore $S \in \mathcal{S}_C$, induzida pelos nós que pertencem a $V(S) \cap V(\delta_i)$.

3. Como as subárvores $S \in \mathcal{S}_C$ foram podadas, pode ser que a interseção entre elas tenha sido desfeita, ou que as folhas compartilhadas tenham deixado de existir. Para resolver estes possíveis problemas utilizamos o caminho P_3^i inserido em T_i^* da seguinte maneira. A partir do nó p estendemos todas as subárvores $S \in \mathcal{S}_C$ até o nó v . Desta forma, são geradas três interseções entre cada par de subárvores e uma folha é compartilhada por todas as subárvores $S \in \mathcal{S}_C$ fazendo com que a clique C seja considerada uma *clique ortodoxa*. Outro motivo não menos importante para o uso deste procedimento é que o fato de todas as subárvores $S \in \mathcal{S}_C$ da clique C compartilharem uma mesma folha, permite que o procedimento de fusão entre duas ou mais componentes seja facilitado.

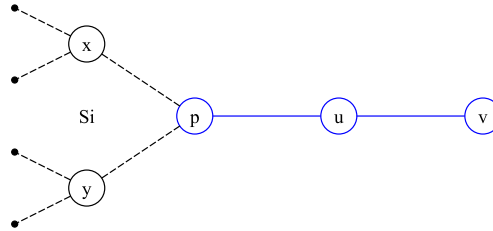


Figura 4.7: O nó $p \in \delta_i \cap S_C$, logo todas as subárvores $S \in \mathcal{S}_C$ compartilham p . Além disso, temos P_3^i que é formado por $\{p, u, v\}$

- (b) O segundo caso ocorre quando $S_C \subset \delta_i$ e a interseção de qualquer nó $p \in S_C$ com a componente δ_i possui grau 3. Inicialmente, devemos considerar que todas as possíveis decomposições realizáveis pelo caso (a) já foram feitas. Em seguida, vamos verificar em quais situações o caso (b) é necessário. Considere todas as subárvores componentes δ_i com $(1 \geq i \geq m)$ e o grafo H formado pela $\bigcup_{i=1}^m \delta_i$, caso a subárvore clique S_C não esteja contida em H existirá um nó $p \in S_C$ no qual a sua interseção com qualquer δ_i terá grau máximo 2, portanto não se enquadra no caso (b). Segundo o Teorema 37, se existir interseção simultânea entre três subárvores componente, a interseção entre as três se dá em um nó p que também é compartilhado pela subárvore S_C , esta situação também não se aplica em (b). A situação para a ocorrência do caso (b) se apresenta quando $S_C \subset \delta_1$ e todas as demais δ_i com $(2 \geq i \geq m)$ são disjuntas e possuem adjacência com δ_1 . Vamos separar o caso (b) em dois itens, o primeiro (b.1) quando $m > 2$, e o segundo (b.2) quando $m = 2$.

1. A Figura 4.8 ilustra uma situação para o subcaso (b.1), onde existem quatro componentes $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ e δ_4 . Qualquer nó $p \in S_C$ possui grau 3 na sua

interseção com δ_1 . Repare que a interseção entre quaisquer duas subárvores componentes é um caminho que não compartilha folhas com T , Teorema 37. Vamos utilizar a relação entre δ_1 e δ_2 apresentada na Figura 4.8 com o objetivo de mostrar que este cenário é único e que a decomposição pode ser realizada de forma sistemática.

Considere o caminho $P_{12} = \delta_1 \cap \delta_2$. Dessa forma, $S_C \cap P_{12} = \emptyset$, entretanto S_C não pode compartilhar as folhas de P_{12} , caso contrário compartilhará um nó de grau 2 em δ_1 . Seja o nó $p \in S_C \cap P_{12}$ e sua vizinhança $N(p) = \{q, u, v\}$, o nó $q \in \delta_1$ e $q \notin \delta_2$, $N(u) = \{p, u_1, u_2\}$, $N(v) = \{p, v_1, v_2\}$, $\{u, v\} \in P_{12}$ e $\{u, v\} \notin S_C$. A subárvore $S_{2_i} \in \mathcal{S}_2$ contém os nós $\{p, u, v, u_2, v_2\}$, assim como $S_{1_i} \in \mathcal{S}_1$ contém os nós $\{q, p, u, u_1\}$ além de r ou s e seus descendentes até alguma folha, analogamente $S_{1_j} \in \mathcal{S}_1$ contém os nós $\{q, p, v, v_1\}$ além de r ou s e seus descendentes até alguma folha.

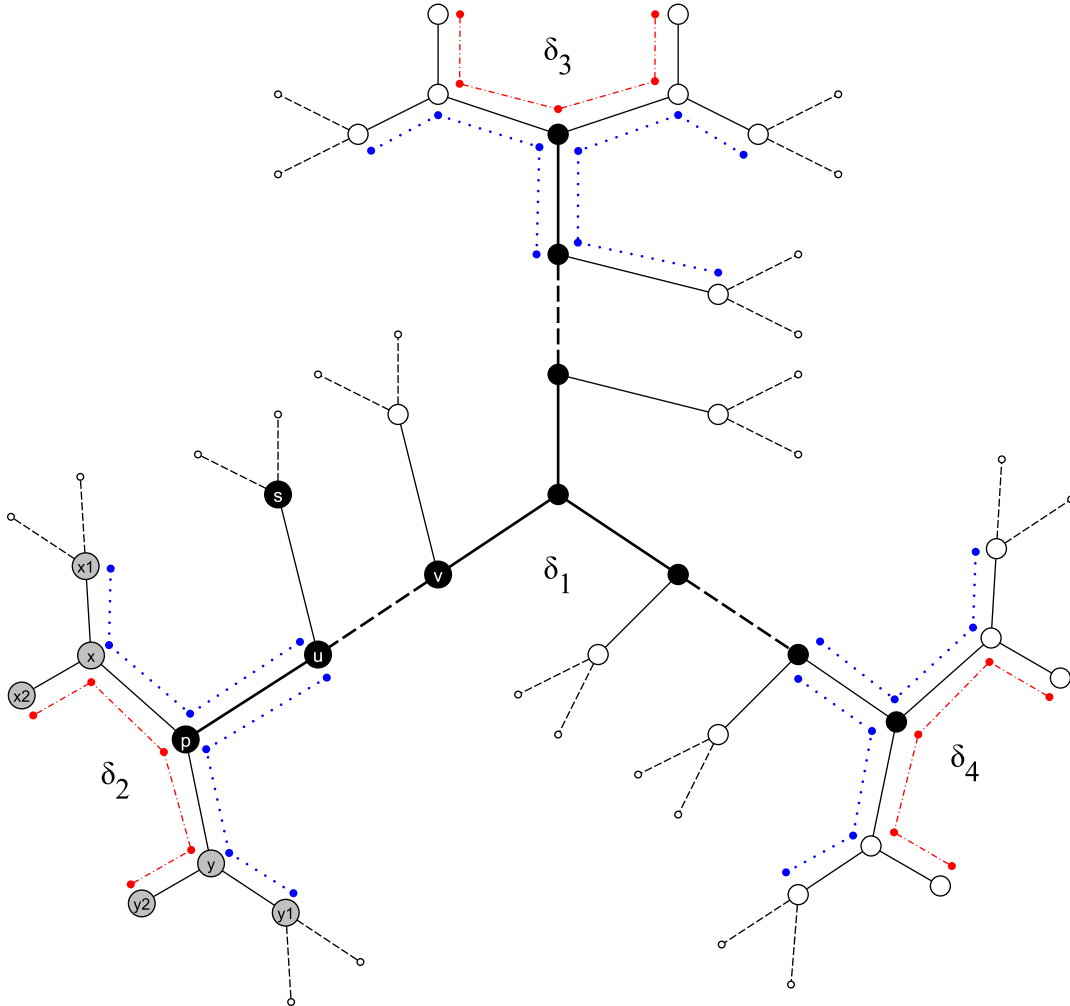


Figura 4.8: Temos o subcaso (b.1) com quatro subárvores componente e $S_C \subset \delta_1$. Os nós pretos representam a subárvore clique S_C .

Se $r \in S_{1_i}$, então $r \notin S_{1_j}$, o mesmo deve ser observado com relação ao nó s , caso contrário haverá adjacência entre S_{1_i} e S_{1_j} o que não é permitido, pois se não existirem duas subárvores S_{1_i} e S_{1_j} não adjacentes, todas as subárvores que compartilham a aresta $pq \in E(T)$ serão adjacentes entre si, o que possibilitará a inserção de um nó p' entre q e p . Sendo assim, o nó p' pertencerá a S_C e terá grau 2 com δ_1 . Os nós $\{u, v\} \notin S_C$, entretanto cada um deles possui pelo menos uma subárvore $S \in \mathcal{S}_C$, caso contrário, o nó u ou v pertencerá a S_C . Todas as subárvores $S \in \mathcal{S}_1$ que compartilham os nós p e u também compartilham q e u_1 , isso significa que estas subárvores juntamente com as subárvores $S \in \mathcal{S}_C$ que também compartilham p e u são todas adjacentes, fazendo com que estas subárvores constituam uma possível clique separadora C' e o nó u , que teria grau 2, pertenceria a $S_{C'}$, possibilitando que C' seja uma clique separadora ortodoxa. Analogamente, as mesmas características são observadas nas subárvores $S \in \mathcal{S}_1$ que compartilham os nós p e v . Por outro lado, as subárvores $S \in \mathcal{S}_C$ que compartilham p e u e a subárvore $S_{2_i} \in \mathcal{S}_2$ que compartilham p e u também formam uma clique C'' . Então, se existir uma subárvore $S_{2_j} \in \mathcal{S}_2$ ele deverá conter $\{u, p, v\}$, caso contrário, S_{2_j} pertenceria a uma componente conexa gerada pela remoção da clique separadora C'' . De forma análoga, o mesmo acontece com as subárvores que compartilham p e v .

Na sequência vamos mostrar como realizar a decomposição de forma que a recomposição possa ser feita de maneira sistemática. A construção da representação (T_2^*, \mathcal{S}_2^*) da componente G_2^* deve ser realizada como o caso (a), pois possui o nó p de grau 2. A representação (T_1^*, \mathcal{S}_1^*) da componente G_1^* é facilmente construída, basta fazer $T_1^* = \delta_1 \cup \{u_2, v_2\}$ e $\mathcal{S}_1^* = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_C$.

2. Neste subcaso temos apenas duas subárvores componente δ_1 e δ_2 . Seja $P_{12} = \delta_1 \cap \delta_2$ esta situação ocorre quando $S_C \subset P_{12}$, observando que S_C não pode compartilhar as folhas de P_{12} , caso contrário compartilharia um nó de grau 2 com ambas as subárvores componente. Observando o exemplo da Figura 4.9 temos um caminho P_{12} se estendendo do nó u ao nó v , algumas subárvores $S \in \mathcal{S}_C$ possuem u mas não possuem v , já outras possuem v e não possuem u , isso faz com que a subárvore clique S_C não consiga alcançar nós que possuem grau 2 com δ_1 .

Neste caso a decomposição se dará da seguinte forma, para construir a representação (T_2^*, \mathcal{S}_2^*) da componente G_2^* a decomposição se dará conforme o caso (a). Para o componente G_1^* temos $T_1^* = \delta_1 \cup \{u_2, v_2\}$ e $\mathcal{S}_1^* = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_C$.

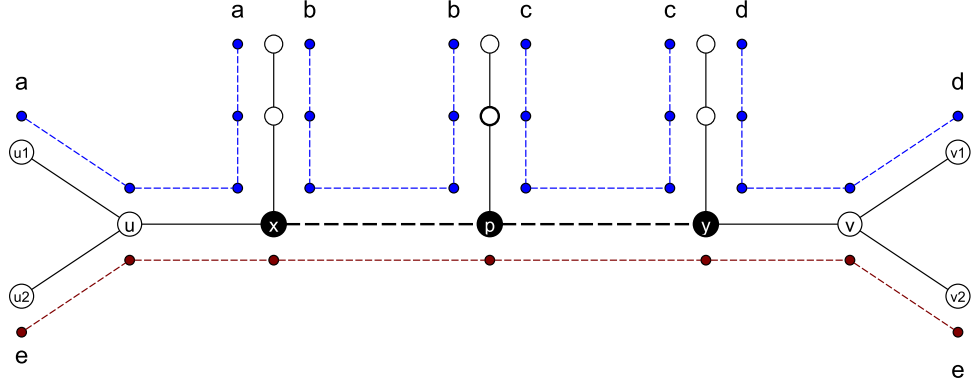


Figura 4.9: Exemplo do subcaso (b.2) com duas subárvores componentes e $S_C \subset P_{12}$. Os nós pretos representam a subárvore clique S_C .

4.3.3 Como recompor $G \in \text{ORTH}[3, 3, 3]$

Na seção anterior foi apresentado um procedimento para decompor, através de clique minimal separadora, um grafo G nas componentes $G_1^*, G_2^*, \dots, G_m^*$. Agora apresentaremos o procedimento inverso, ou seja, dadas as componentes deve-se reconstruir o grafo $G = G_1^* \cup G_2^* \cup \dots \cup G_m^*$. Para realizar tal procedimento vamos apresentar a união de duas componentes G_i^* e G_j^* e em seguida mostraremos que basta repetir o procedimento até que todas as m componentes tenham sido unidas e o grafo G estará reconstruído. Assim como na hora de decompor, o momento de recompor o grafo também será dividido em duas situações. Quando todas as m componentes possuem uma clique ortodoxa utilizaremos o caso (a). Quando o processo de decomposição utilizar o caso (b), as componentes não possuirão cliques ortodoxas, assim o processo de recomposição também será diferente, neste caso utilizaremos o caso (b).

- (a) O procedimento que será detalhado consiste em reconstruir um grafo G a partir de duas componentes G_i^* e G_j^* , assim como reconstruir sua representação (T, \mathcal{S}) a partir das representações de suas componentes (T_i^*, \mathcal{S}_i^*) e (T_j^*, \mathcal{S}_j^*) , como ilustrado na Figura 4.10. Para tal procedimento vamos chamar de C_i a clique $C \subset G_i^*$ utilizada na decomposição, que é representada pela família de subárvores $\mathcal{S}_{C_i} = \{S_{x_i} \in \mathcal{S}_i^* / x_i \in C_i\}$ e $P_3^i = \{p_i, u_i, v_i\}$, com p_i, u_i e v_i compartilhados apenas pelas subárvores $S_{x_i} \in \mathcal{S}_{C_i}$. Analogamente a componente G_j^* também possui estes mesmos elementos.

Para reconstruir sua representação (T, \mathcal{S}) , primeiramente vamos reconstruir a árvore hospedeira T a partir das árvores T_i e T_j . Descartamos os nós v_i, u_i, v_j e u_j . Em seguida, criamos dois novos nós adjacentes u e v , onde $N(u) = \{p_i, p_j, v\}$ e $N(v) = \{u\}$. Agora, o conjunto de subárvores \mathcal{S} será formado pela união

$\mathcal{S}_i^* \cup \mathcal{S}_j^*$, com um pequeno ajuste nas subárvores $S_{x_i} \in \mathcal{S}_{C_i}$ e $S_{x_j} \in \mathcal{S}_{C_j}$. Como os vértices $\{x \in G / x \in C\}$ possuem adjacência em G_i^* e G_j^* usamos uma função $\phi : \{(x_i, x_j) / x_i \in C_i \text{ e } y_j \in C_j\} \rightarrow \{x \in C\}$, para que $N(x)$ em G seja igual a união da $N(x_i)$ em G_i^* com $N(x_j)$ em G_j^* . A partir daí, cada subárvore $S_x \in \mathcal{S}_C$ será um subgrafo de T induzido pelos vértices $V(S_{x_i}) \cup V(S_{x_j}) \cup \{u, v\}$. Este procedimento mantém as interseções e garante a ortodoxia da representação.

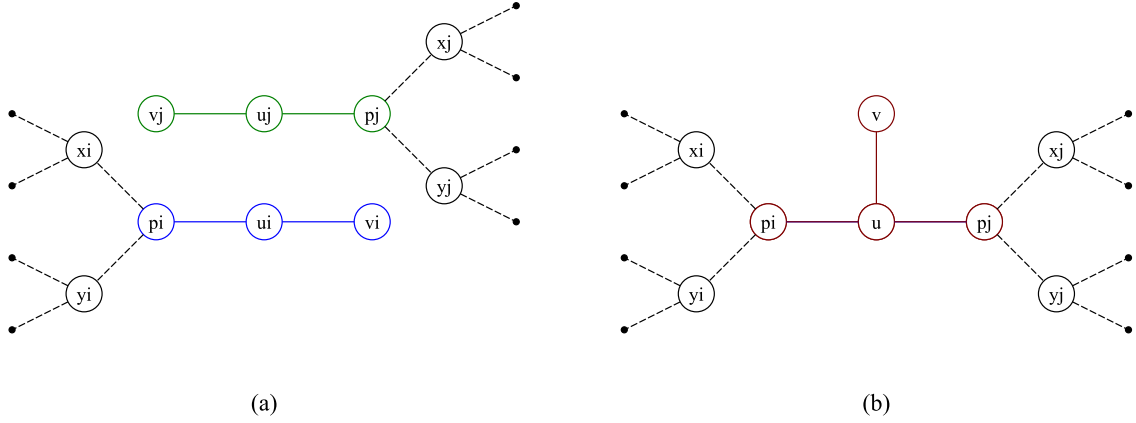


Figura 4.10: (a) As representações (T_i^*, \mathcal{S}_i^*) e (T_j^*, \mathcal{S}_j^*) antes da fusão, em destaque $P_3^i = \{p_i, u_i, v_i\}$ e $P_3^j = \{p_j, u_j, v_j\}$. (b) A representação (T, \mathcal{S}) após a fusão.

(b) Em ambos os subcasos (b.1) e (b.2) da decomposição, a subárvore T_1^* possui todos os nós necessários para recomposição de G . Para inserir as subárvores devemos inserir as subárvores $S \in \mathcal{S}_1^*$ e as subárvores $S \in \mathcal{S}_2^* / \{u_2, v_2\} \in S$ e $\{q, r\} \notin S$.

Capítulo 5

Grafos Bipartidos Completos em $\text{ORTH}[3,3,t]$

Os grafos bipartidos completos $K_{m,n}$ são grafos sem ciclos ímpares, cujo conjunto de vértices pode ser particionados em dois conjuntos disjuntos U e V tais que todos os m vértices de U são adjacentes a todos os n vértices de V .

Uma das propriedades dos bipartidos completos é que por não possuírem triângulos sua clique máxima é uma aresta, o que faz com que existam $n \times m$ cliques em um $K_{m,n}$. Por consequência, o $K_{n,n}$ é o grafo que apresenta um grande número de cliques disjuntas em arestas, o que eleva a dificuldade para se construir uma representação $(3,3,t)$ -ortodoxa. Como já vimos antes, em uma representação ortodoxa de um grafo G a árvore hospedeira deve possuir uma folha para cada clique de uma cobertura por cliques de G . Dessa forma, a árvore hospedeira necessária para representação ortodoxa de um $K_{n,n}$ deve possuir n^2 folhas. Esta característica faz com que a classe dos bipartidos completos sejam de especial importância para nosso estudo.

Em [31], Jamison e Mulder estudaram os grafos bipartidos completos. Os autores exibiram uma representação $(3,3,3)$ de um $K_{3,3}$ e provaram que o $K_{3,3} \notin \text{ORTH}[3,3,3]$. Eles também concluíram que o $K_{3,3}$ é um grafo *não ortodoxo crítico*, pois tanto o $K_{3,3}$ *mais uma aresta*, quanto o $K_{3,3}$ *menos uma aresta* possuem representação $(3,3,3)$ -ortodoxa. No mesmo estudo ainda são apresentados como resultados que $K_{2,4} \in \text{ORTH}[3,3,3]$ e que $K_{2,n} \notin [3,3,3]$, para $n \geq 5$.

Em um trabalho posterior [33], Jamison e Mulder aprofundaram sua pesquisa sobre representabilidade dos grafos bipartidos completos. Nele, eles provaram que um $K_{2,n} \in \text{ORTH}[3,3, \lceil \log_2 n \rceil + 2]$. Além disso, baseados nos estudos de não representabilidade enunciaram a seguinte conjectura:

Conjectura 40 (Jamison e Mulder [33]) *Para $n \geq 3$, o grafo bipartido completo $K_{n,n}$ tem uma representação $(3,3,n)$ -fiel, mas não tem uma representação*

$(3, 3, n)$ -ortodoxa ou uma representação $(3, 3, t)$, com $t < n$.

Em 2007 [19], Eaton et al. também investigaram os grafos bipartidos completos representáveis. Em especial o parâmetro

$$t_{bip}(n) = \min\{t : G \in [3, 3, t] \text{ para todo } G \subseteq K_{n,n}\}.$$

Os resultados encontrados implicam que $\log n < t_{bip}(n) \leq 5n^{1/3} \log_2 n$.

Neste capítulo são apresentados alguns resultados sobre a representação ortodoxa de grafos bipartidos completos. Iniciamos com resultados preliminares que servem para nos auxiliar nas provas apresentadas no capítulo, seguidos de alguns resultados de não representabilidade de grafos $K_{n,n}$ na Seção 5.2. Em seguida, na Seção 5.3, apresenta-se um limite superior para o valor de t tal que um $K_{3,n} \in \text{ORTH}[3, 3, t]$. Finalmente, na Seção 5.4, apresentamos um algoritmo que constrói uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa de um grafo $G \subseteq K_{n,n}$ sendo $n \geq 4$ e uma potência de 2 e um algoritmo que constrói uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa de um grafo $G \subseteq K_{n,n}$ sendo $n \geq 3$ e uma potência de 3.

5.1 Preliminares

Nesta seção são apresentados alguns resultados que nos auxiliam nas provas contidas neste capítulo. Iniciamos com a definição de **árvore base**, que é uma representação simplificada, para grafos que possuem representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa. Em seguida, provamos que $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$ se e somente se G possui uma árvore base T . No Corolário 43 mostramos que $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$ se e somente se existe uma árvore base T tal que todo nó interno de T possui grau 3. O último resultado da seção mostra que em uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa do $K_{n,n}$, todo nó interno de T deve ser compartilhado pelo menos por duas subárvores correspondentes a vértices da mesma parte do $K_{n,n}$.

Definição 41 *Seja G um grafo conexo, livre de gêmeos de ordem no mínimo 4, e $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$.*

Se T é uma árvore, tal que:

- *o grau máximo de T é 3,*
- *existe um conjunto C de cliques de G tal que cada aresta de $E(G)$ pertence a pelo menos uma clique de C e cada folha de T corresponde a uma clique de C ,*
- *cada vértice v de $V(G)$ pertence a pelo menos duas cliques de C ,*

- uma subárvore S_v de T é gerada pelas folhas de T que correspondem as cliques que possuem o vértice v ,
- uma aresta $uv \notin E(G)$ se e somente se as subárvores S_u e S_v não compartilham folha em T ,
- e duas subárvores S_u e S_v que não compartilham uma folha, compartilham no máximo $t - 1$ nós em T .

Então, T é uma **árvore base** de G .

Teorema 42 $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$ se e somente se G possui uma árvore base.

Prova: Se $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$ então existe uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa de G . Seja (T, \mathcal{S}) uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa de G . A árvore hospedeira T é uma árvore base de G .

Para provar a volta, vamos construir uma representação (T, \mathcal{S}) de G a partir da árvore base T' de G . As subárvores $S_i \in \mathcal{S}$ são geradas pelas folhas de T . Para construir a árvore hospedeira T , basta subdividir t vezes todas as arestas que incidem nas folhas de T' . Dessa forma, todas as subárvores que compartilham uma folha em T' continuam a compartilhar uma folha em T e possuem pelo menos t nós em comum. Como as subárvores que não geram adjacências não compartilham folha em T' , as mesmas não tiveram arestas subdivididas, portanto possuem no máximo $t - 1$ nós em comum. Como cada aresta $uv \in E(G)$ corresponde a um par de subárvores $S_u S_v$ que compartilha uma folha em T' , todas as adjacências e não adjacências de G estão representadas. Logo, se G possui uma árvore base então $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$. \square

Corolário 43 $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$ se e somente se existe uma árvore base T tal que todo nó interno de T possui grau 3.

Prova: Pelo Teorema 42, se $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$ então existe uma árvore base T' de G . Seja $v \in T'$ um nó interno de grau 2 e os nós x e y seus vizinhos. Seja S_u a subárvore correspondente ao vértice $u \in V(G)$ gerada pelas folhas de T' . Em T' , remove-se o nó v e insere-se uma nova aresta xy . Cada par de subárvores $S_i S_j$ que compartilha v e corresponde a aresta $ij \in E(G)$ compartilha uma folha f em T' e continuará compartilhando uma folha f após a remoção de v . Cada par de subárvores $S_i S_j$ que compartilha v e corresponde a aresta $ij \notin E(G)$ não terá sua interseção aumentada, portanto nenhuma nova adjacência em G será gerada. Assim,

repetindo o processo para cada nó v de grau 2 em T' , constrói-se uma árvore base T onde todos os nós internos possuem grau 3. Logo, se $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$, então existe uma árvore base T de G . Se existe uma árvore base T de G , então existe uma árvore base T de G onde todos os nós internos de T possuem grau 3. E se G possui uma árvore base T onde todos os nós internos de T possuem grau 3, então $G \in \text{ORTH}[3, 3, t]$. \square

Lema 44 *Se $K_{n,n} \in \text{ORTH}[3, 3, t]$ e T é sua árvore base. Então, todo nó interno de T é compartilhado ao menos por duas subárvores correspondentes a vértices da mesma parte.*

Prova: Sejam $\mathcal{L} = \{a, b, c, \dots\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ as partes de $K_{n,n}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_{\mathcal{N}} \subset \mathcal{S}$, respectivamente o conjunto de suas subárvores. Sejam T a árvore base de G e S_u a subárvore correspondente ao vértice $u \in V(G)$ gerada pelas folhas de T . Seja v um nó interno de T e x, y e z os vizinhos de v em T . Sejam T_x, T_y e T_z as árvores obtidas a partir de $T - \{x\}$ com raízes x, y e z , respectivamente.

Por contradição, vamos considerar que um nó interno v de T não é compartilhado por duas subárvores da mesma parte. Sem perda de generalidade, suponha que a subárvore S_a contenha os nós v, x e y . Assim, como ilustrado na Figura 5.1(a), em T_x existe uma folha compartilhada por $S_a S_1$ e em T_y existe uma folha compartilhada por $S_a S_2$. Como a subárvore S_b também compartilha uma folha com S_1 , uma folha S_2 e não possui o nó v , ao menos uma das subárvores S_1 ou S_2 compartilha o nó v com S_a .

Ainda sem perda de generalidade, consideramos que o nó v é compartilhado pelas subárvores S_a e S_1 , e em T_x existe uma folha f_{a1} compartilhada pelas subárvores S_a e S_1 . Existe uma subárvore S_i contida em T_y e uma subárvore S_j contida em T_z , como ilustrado na Figura 5.1(b), caso contrário o nó v teria grau 2. Se S_i e S_j são subárvores da mesma parte todas as subárvores da outra parte devem compartilhar v , o que é uma contradição. Se S_i e S_j são subárvores de partes distintas elas compartilham uma folha, então ao menos uma delas deve possuir v , o que é uma contradição. Logo, se v é um nó interno de T , v é compartilhado por ao menos duas subárvores da mesma parte. \square

5.2 $K_{n,n} \notin \text{ORTH}[3, 3, n]$

Em [33], Jamison e Mulder enunciaram a Conjectura 40. Em parte da conjectura os autores propõem que para $n \geq 3$, o grafo bipartido completo $K_{n,n}$ não tem uma representação $(3, 3, n)$ -ortodoxa, entretanto é apresentada apenas uma

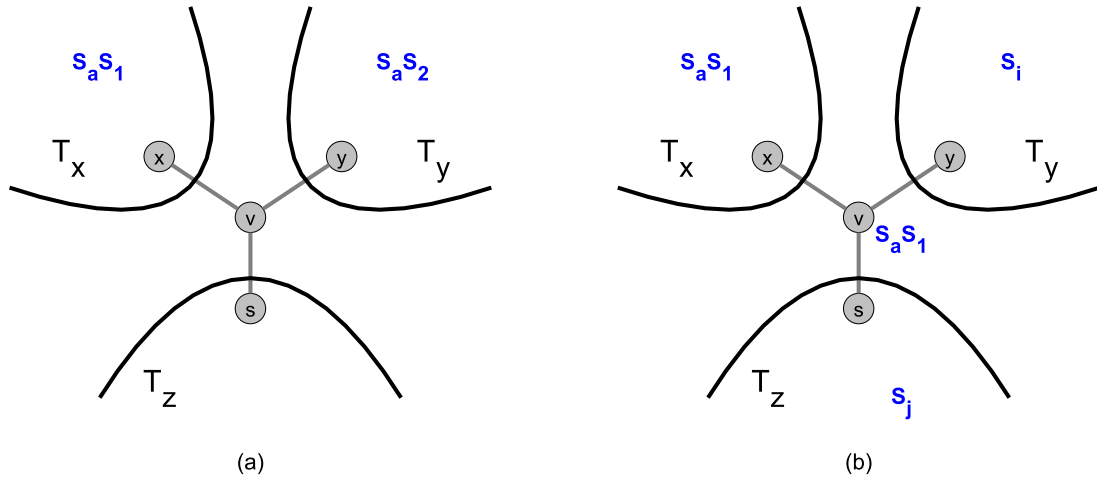


Figura 5.1: (a) Existem as folhas f_{a1} compartilhada por $S_a S_1$ em T_x e f_{a2} compartilhada por $S_a S_2$ em T_y . (b) O nó v é compartilhado pelas subárvores $S_a S_1$. Em T_x existe uma folha f_{a1} compartilhada por $S_a S_1$. Existem também uma subárvore S_i contida em T_y e uma subárvore S_j contida em T_z .

prova para $n = 3$. Nesta seção nós provamos a Conjectura 40 para $n = \{4, 5\}$.

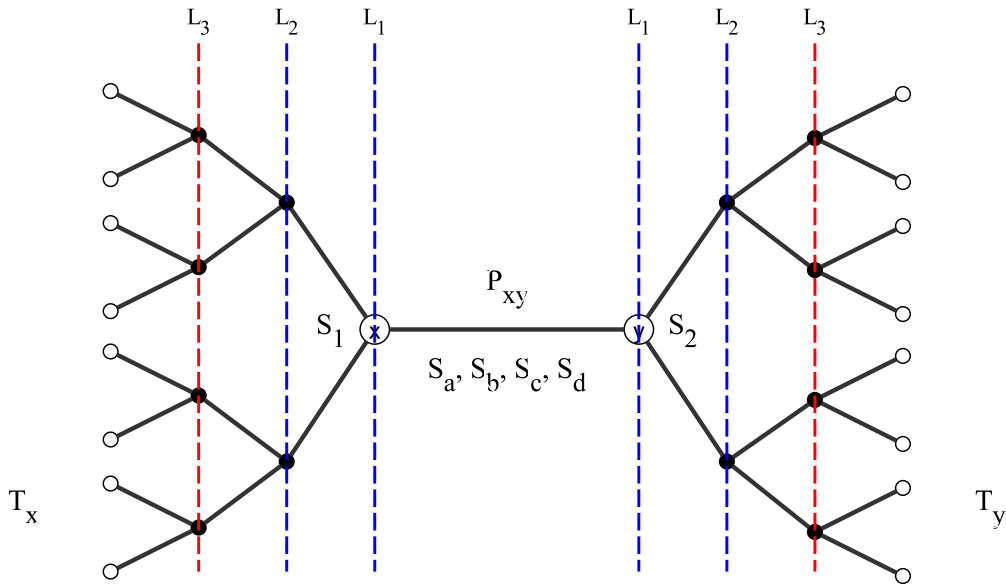


Figura 5.2: Esboço da tentativa de construção de uma árvore base T de $K_{4,4}$. A maior distância entre duas subárvores quaisquer de T é $|P_{xy}|$. As indicações L_1, L_2 e L_3 determinam os tipos dos nós internos em T .

Teorema 45 *O grafo $K_{4,4} \notin \text{ORTH}[3, 3, 4]$.*

Prova: Considere o $K_{4,4}$ com as partes $\mathcal{L} = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. Suponha que $K_{4,4} \in \text{ORTH}[3, 3, 4]$ e que T seja sua árvore base. Cada vértice $v \in V(K_{4,4})$ corresponde a uma subárvore S_v gerada por folhas de T . Considere $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ o conjunto das subárvores que correspondem a vértices de \mathcal{L} e $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ o conjunto das subárvores que correspondem a vértices de \mathcal{N} . Como o $K_{4,4}$ possui exatamente $|\mathcal{L} \times \mathcal{N}| = 16$ cliques disjuntas em arestas, a árvore base T possui exatamente 16 folhas.

Para facilitar vamos dividir nossa prova em dois casos.

Caso 1: Sem perda de generalidade, em T , sejam S_1 e S_2 duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ que possuem a maior distância entre elas. Considere P_{xy} o caminho entre as subárvores S_1 e S_2 , tal que $P_{xy} \cap S_1 = x$, $P_{xy} \cap S_2 = y$. Sejam, T_x e T_y as subárvores obtidas a partir de T pela remoção de P_{xy} exceto os nós x e y , com raízes x e y , respectivamente, como ilustrado na Figura 5.2. Um nó interno $v \in T_x$ é do tipo L_k se o caminho $x - v$ possui k nós. O mesmo ocorre em T_y . Como S_1 não tem interseção com T_y e S_2 não tem interseção com T_x as quatro subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ compartilham P_{xy} . Como toda folha de qualquer subárvore S_i é também folha de T , existe pelo menos um nó do tipo L_2 em T_x compartilhado por um par de subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$. Isto implica que P_{xy} possui no máximo 2 nós, caso contrário um par de subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ teria interseção de tamanho 4.

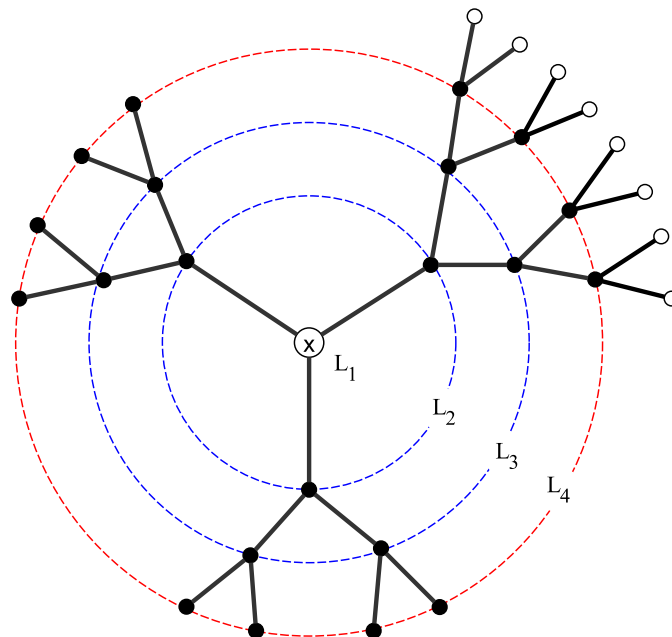


Figura 5.3: Esboço da tentativa de construção de uma árvore base T de $K_{4,4}$ Todas as subárvores compartilham o nó x . As indicações L_1 , L_2 e L_3 determinam os tipos dos nós internos em T .

Como a distância máxima entre duas subárvores em T é uma aresta, toda subárvore que faz interseção com T_x possui o nó x , assim como toda subárvore

que faz interseção com T_y possui o nó y . Pelo Lema 44, todo nó interno de T é compartilhado por duas subárvores correspondentes a vértices da mesma parte do $K_{4,4}$. Assim, em T_x ou T_y não existem nós internos do tipo L_4 , caso contrário uma adjacência proibida será gerada. Nenhum par de subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ pode conter um nó do tipo L_3 , caso contrário existirá interseção de tamanho 4. Como T possui 16 folhas, obrigatoriamente, T possui 8 nós internos do tipo L_3 . Sendo assim, T_x possui 4 nós L_3 . Como S_2 não possui nós em comum com T_x , existem no máximo três subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ em T_x . Isto implica que existem, no máximo, $C_{3,2} = 3$ pares distintos formados pelas subárvores S_1, S_3 e S_4 . O que não é suficiente para os quatro nós do tipo L_3 . Sendo assim, o caso 1 é uma contradição.

Caso 2: Em T , todas as subárvores possuem um nó x em comum. Um nó interno $v \in T$ é do tipo L_k se o caminho $x - v$ possui k nós. Nenhum nó interno $v \in T$ pode ser do tipo L_4 , caso contrário o par de subárvores da mesma parte que compartilhará o nó v irá gerar uma interseção proibida. Como T deve possuir 16 folhas, obrigatoriamente, devem existir quatro nós do tipo L_4 em T , como ilustrado na Figura 5.3. O que é uma contradição.

Logo, $K_{4,4} \notin \text{ORTH}[3, 3, 4]$. \square

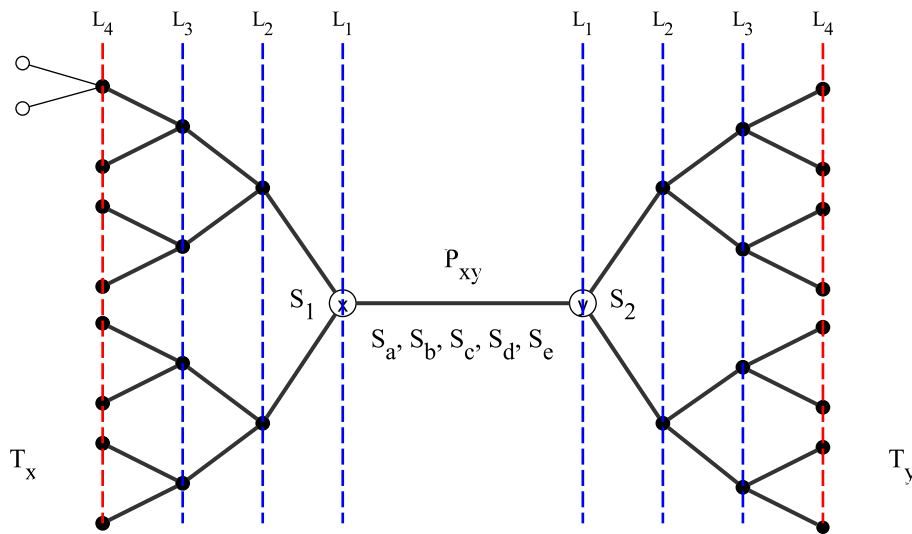


Figura 5.4: Esboço da tentativa de construção de uma árvore base T de $K_{5,5}$. A maior distância entre duas subárvores quaisquer de T é $|P_{xy}|$. As indicações L_1, L_2, L_3 e L_4 determinam os tipos dos nós internos em T .

Teorema 46 *O grafo $K_{5,5} \notin \text{ORTH}[3, 3, 5]$.*

Prova: Considere o $K_{5,5}$ com as partições $\mathcal{L} = \{a, b, c, d, e\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Suponha que $K_{5,5} \in \text{ORTH}[3, 3, 5]$ e que T seja sua árvore base. Cada vértice

$v \in V(K_{5,5})$ corresponde a uma subárvore S_v geradas por folhas de T . Considere $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ o conjunto das subárvores que correspondem a vértices de \mathcal{L} e $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ o conjunto das subárvores que correspondem a vértices de \mathcal{N} . Como o $K_{5,5}$ possui exatamente $|\mathcal{L} \times \mathcal{N}| = 25$ cliques disjuntas em arestas a árvore base T possui exatamente 25 folhas.

Para facilitar vamos dividir nossa prova em dois casos.

Caso 1: Sem perda de generalidade, em T , sejam S_1 e S_2 duas subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ que possuem a maior distância entre elas. Considere P_{xy} o caminho entre as subárvores S_1 e S_2 , tal que $P_{xy} \cap S_1 = x$, $P_{xy} \cap S_2 = y$. Sejam T_x e T_y as subárvores obtidas a partir de T pela remoção de P_{xy} exceto os nós x e y , com raízes x e y , respectivamente, como ilustrado na Figura 5.4. Um nó interno $v \in T_x$ é do tipo L_k se o caminho $x - v$ possui k nós. O mesmo ocorre em T_y . Como S_1 não tem interseção com T_y e S_2 não tem interseção com T_x as cinco subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ compartilham P_{xy} . Como toda folha de qualquer subárvore S_i é também folha de T , existe pelo menos um nó do tipo L_3 em T_x compartilhado por um par de subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$. Isto implica que P_{xy} possui no máximo 2 nós, caso contrário um par de subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ teria interseção de tamanho 5.

Como a distância máxima entre duas subárvores em T é uma aresta, toda subárvore que faz interseção com T_x possui o nó x , assim como toda subárvore que faz interseção com T_y possui o nó y . Pelo Lema 44, todo nó interno de T é compartilhado por duas subárvores correspondentes a vértices da mesma parte do $K_{5,5}$. Assim, em T_x ou T_y não existem nós internos do tipo L_5 , caso contrário uma adjacência proibida será gerada. Nenhum par de subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}$ pode conter um nó do tipo L_4 , caso contrário existirá interseção de tamanho 5. Como T possui 25 folhas, obrigatoriamente, T possui 9 nós internos do tipo L_4 . Como T possui 9 nós internos do tipo L_4 , pelo princípio da casa de pombos, supomos que T_x possui 5 nós L_4 . Como S_2 não possui nós em comum com T_x , existem no máximo quatro subárvores de $\mathcal{S}_{\mathcal{N}}$ em T_x . Isto implica que existem, no máximo, $C_{4,2} = 6$ pares distintos formados pelas subárvores S_1, S_3, S_4 e S_5 , tal que em T_x , cada nó do tipo L_4 deve ser compartilhado por um destes pares. Entretanto, cada um desses 5 pares que compartilha um nó do tipo L_4 em T_x não pode compartilhar o nó y . Sendo assim, o caso 1 é uma contradição.

Caso 2: Em T , todas as subárvores possuem um nó x em comum. Um nó interno $v \in T$ é do tipo L_k se o caminho $x - v$ possui k nós. Nenhum nó interno $v \in T$ pode ser do tipo L_5 , caso contrário o par de subárvores da mesma parte que compartilhará o nó v irá gerar uma interseção proibida. Como T deve possuir 25 folhas, obrigatoriamente, existe um nó do tipo L_5 em T , como ilustrado na Figura 5.5 O que é uma contradição.

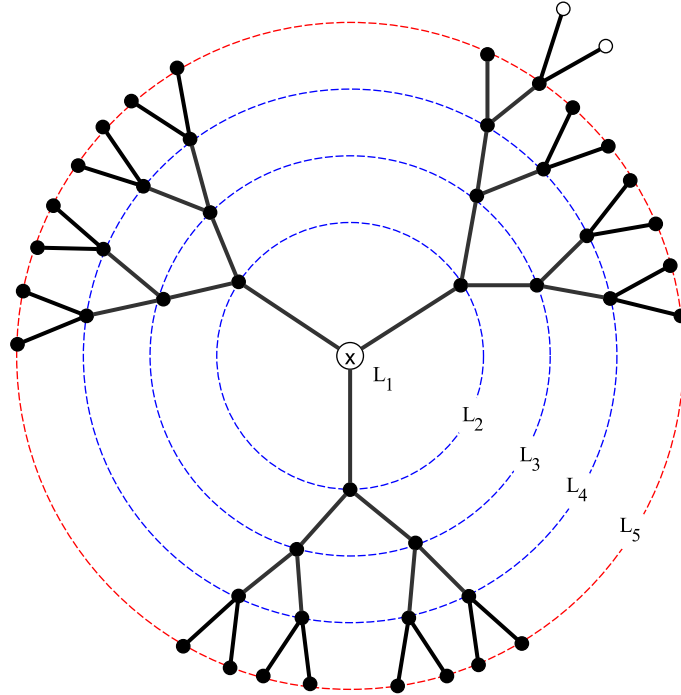


Figura 5.5: Esboço da tentativa de construção de uma árvore base T de $K_{5,5}$. Todas as subárvores compartilham o nó x . As indicações L_1 , L_2 , L_3 e L_4 determinam os tipos dos nós internos em T .

Logo, $K_{5,5} \notin \text{ORTH}[3, 3, 5]$. \square

5.3 $K_{3,n} \in \text{ORTH}[3, 3, t]$

Nesta seção apresentamos um valor de t , em função de n , para o qual é possível construir uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa para um $K_{3,n}$. O resultado do Teorema 47 é uma extensão do resultado de Jamilson e Mulder em [33]. Neste trabalho os autores provam que se $t = \lceil \log_2 n \rceil + 2$, então $K_{2,n}$ possui uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa.

Teorema 47 $K_{3,n} \in \text{ORTH}[3, 3, 2\lceil \log_2 n \rceil + 3]$.

Prova: Sejam a, b e c os três vértices da partição de tamanho 3 do $K_{3,n}$ e $1, 2, 3, \dots, n$ os n vértices da partição de tamanho n . Sejam A, B e C três árvores binárias cheias de altura $L = \lceil \log_2 n \rceil$, e r_a, r_b e r_c as raízes de A, B e C , respectivamente. Como $n \leq 2^L$, podemos associar cada vértice i da partição de tamanho n a uma distinta $(0, 1)$ -string ω_i de tamanho L . Utilizamos estas ω_i para construir caminhos em A, B e C , da seguinte forma: quando temos 0 escolhemos o filho da esquerda e quando temos 1 escolhemos o filho da direita. Para cada i , construímos um caminho P_i em A e um caminho Q_i em B . Em A iniciamos pela raiz r_a , e lendo ω_i da esquerda

para a direita vamos construindo o caminho P_i até encontrar uma folha no nível L . Em B iniciamos pela raiz r_b , e lendo ω_i da direita para a esquerda vamos construindo o caminho Q_i até encontrar uma folha no nível L . Em C construímos o caminho R_i da mesma forma que o caminho Q_i e construído em B . Em seguida, ligamos r_a , r_b e r_c com um novo nó x , assim obtemos uma árvore cúbica T , análoga a árvore hospedeira da representação ilustrada na Figura 5.6. O vértice a é representado pela subárvore A , o vértice b pela subárvore B , o vértice c pela subárvore C e cada vértice i pela subárvore W_i que consiste de $P_i \cup Q_i \cup R_i$ junto com as arestas r_ax , r_bx , r_cx e o nó x .

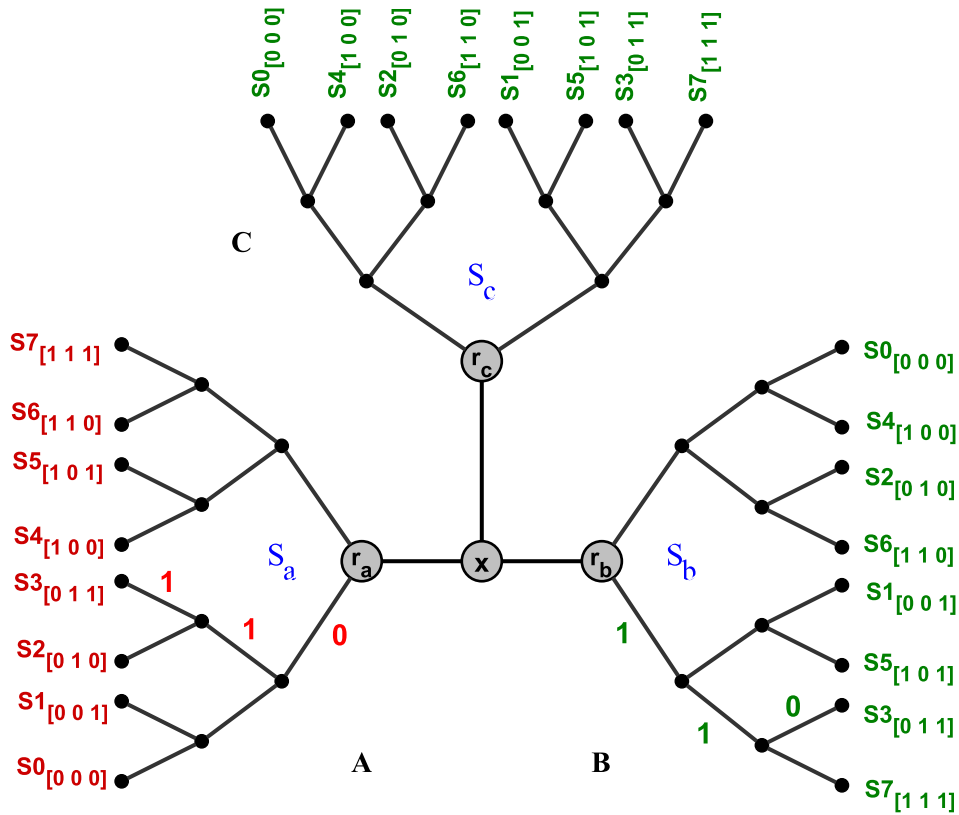


Figura 5.6: Exemplo de uma representação ORTH[3, 3, 2 $\lceil \log_2 n \rceil + 3$] de um $K_{3,8}$.

O caminho P_i compartilha t nós com A assim como com B e com C , para $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Então, estas adjacências são corretamente representadas. As subárvores A , B e C são disjuntas, pois os vértices a , b e c não são adjacentes em $K_{3,n}$. Tome qualquer par de subárvores distintas W_i e W_j . Suas $(0, 1)$ -strings ω_i e ω_j diferem em no mínimo um valor. Seja k o primeiro bit diferente da esquerda para a direita. Então, em A , os caminhos P_i e P_j diferem a partir do nível k . Assim, eles possuem no máximo k nós em comum, incluindo r_a . Em B , os caminhos Q_i e Q_j diferem a partir do nível $L - k + 1$. Assim, eles possuem no máximo $L - k + 1$ nós

em comum, incluindo r_b . Em C , os caminhos R_i e R_j compartilham no máximo L nós, incluindo r_c . Adicionando o nó x na interseção, as subárvores W_i e W_j possuem no máximo $k + L - k + 1 + L + 1 = 2L + 2$ nós em comum. Como $L = \lceil \log_2 n \rceil$, temos $2\lceil \log_2 n \rceil + 2 = t - 1$. Logo, $K_{3,n} \in \text{ORTH}[3, 3, 2\lceil \log_2 n \rceil + 3]$ \square

5.4 $K_{n,n} \in \text{ORTH}[3, 3, t]$

Nesta seção, apresentamos valores para t tal que um grafo $G \subseteq K_{n,n}$ pertence a classe $\text{ORTH}[3, 3, t]$.

Nos resultados obtidos temos valores de t em função de n para grafos $G \subseteq K_{n,n}$, onde:

- $t = 2n - 3$ para $n \geq 4$ potência de 2, e
- $t = 2n + n/3 - 3$ para $n \geq 3$ potência de 3.

Estes resultados foram estabelecidos através de algoritmos que constroem as representações $(3, 3, t)$ -ortodoxas para grafos $K_{n,n}$. Portanto, estes algoritmos além de estabelecerem o valor de t que garante que um grafo $K_{n,n} \in \text{ORTH}[3, 3, t]$ ainda são capazes de exibir a representação.

Para simplificar, consideramos que duas subárvores que compartilham uma mesma folha em T possuem entre si interseção mínima de tamanho t , pois se a interseção for menor que t , subdividi-se a aresta incidente na folha compartilhada quantas vezes forem necessárias. A Figura 5.7(a) é uma representação $(3, 3, 3)$ -ortodoxa do grafo $K_{2,2}$. Considere em $K_{2,2}$ duas partições $\mathcal{L} = \{a, b\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. Cada vértice $i \in V(K_{2,2})$ está associado a uma subárvore $S_i \in \mathcal{S}$. Cada subárvore S_i é gerada pelas folhas que possuem o rótulo i , ou seja, é formada pela união das folhas com rótulos i e os caminhos entre elas.

A Figura 5.7(b) é uma representação $(3, 3, 5)$ -ortodoxa do grafo $K_{4,4}$. Considere em $K_{4,4}$ duas partições $\mathcal{L} = \{a, b, c, d\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4\}$. Observe que a representação (T, \mathcal{S}) de $K_{4,4}$ é composta por uma aresta xy , que vamos chamar de *aresta central*, dois nós $\{x', x''\}$ adjacentes a x e dois nós $\{y', y''\}$ adjacentes a y . Cada um dos nós x', x'', y' e y'' é raiz de uma subárvore binária X', X'', Y' e Y'' , respectivamente. A subárvore X' e as subárvores de \mathcal{S} restritas a ela formam a representação do $K_{2,2}$ com sua aresta central subdividida pelo nó x' . As demais subárvores X'', Y' e Y'' são construídas de forma análoga. Seguindo este esquema, vamos construir uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa de um grafo $K_{n,n}$, baseado na representação de $K_{n/2, n/2}$.

Teorema 48 *Seja $n \geq 4$ uma potência de 2. Então $G \subseteq K_{n,n} \in \text{ORTH}[3, 3, 2n - 3]$.*

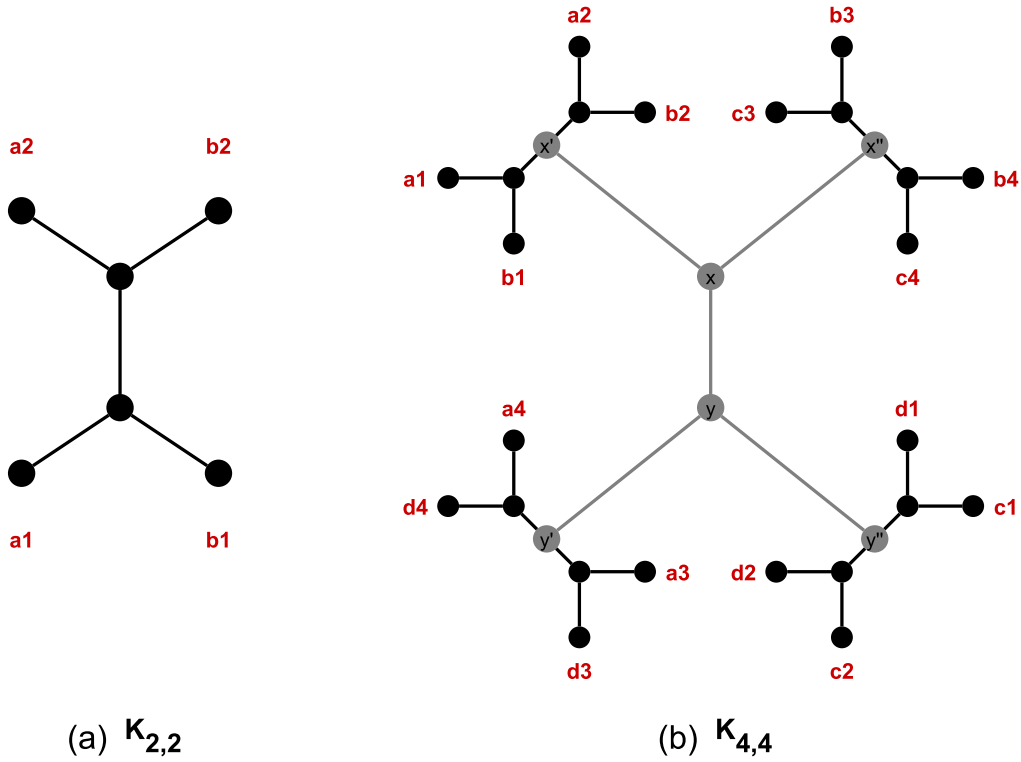


Figura 5.7: (a) Representação de um $K_{2,2}$ cujas partes são $\mathcal{L} = \{a, b\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2\}$. (b) Representação de um $K_{4,4}$ a partir de 4 representação do $K_{2,2}$.

Prova: Seja (T_4, \mathcal{S}_4) uma representação $(4, 4, 5)$ -ortodoxa de um $K_{4,4}$, como na Figura 5.7(b).

Seja $n \geq 4$ uma potência de 2. Suponha que (T', \mathcal{S}') é uma representação $(3, 3, t')$ -ortodoxa de um $K_{n/2, n/2}$, como na Figura 5.8(a).

Para construir (T, \mathcal{S}) , uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa de um $K_{n, n}$. Sejam \mathcal{L} e \mathcal{N} as partes do $K_{n, n}$. O conjunto \mathcal{L} está particionado em dois conjuntos \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 de cardinalidade $|\mathcal{L}|/2$ cada um. Da mesma forma, o conjunto \mathcal{N} está particionado em dois conjuntos \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 de cardinalidade $|\mathcal{N}|/2$ cada um.

Constrói-se uma árvore T^* com os nós x, y, x', x'', y' e y'' , e as arestas xy, xx', xx'', yy' e yy'' , onde para cada folha $f_{ij} \in T^*$ associamos o par de conjuntos $\mathcal{L}_i \mathcal{N}_j$, como na Figura 5.8(b).

Assim, podemos considerar $(T_{ij}, \mathcal{S}_{ij})$ uma representação $(3, 3, t')$ -ortodoxa de um $K_{n/2, n/2}$ o qual suas partes são $\mathcal{L}_i \mathcal{N}_j$ construída recursivamente.

Em T_{ij} , o nó z_{ij} é obtido através da subdivisão da aresta central $x_{ij}y_{ij}$. Fazendo $f_{ij} = z_{ij}$ para cada folha f_{ij} de T^* , construímos a árvore hospedeira T da representação do $K_{n, n}$. Cada subárvore S_v correspondente ao vértice $v \in V(K_{n, n})$ é gerada por suas folhas. Assim, construímos a representação (T, \mathcal{S}) do $K_{n, n}$ a partir da representação de 4 $K_{n/2, n/2}$.

Como todas as subárvores de \mathcal{S}_{ij} compartilham ao menos um nó x_{ij} ou

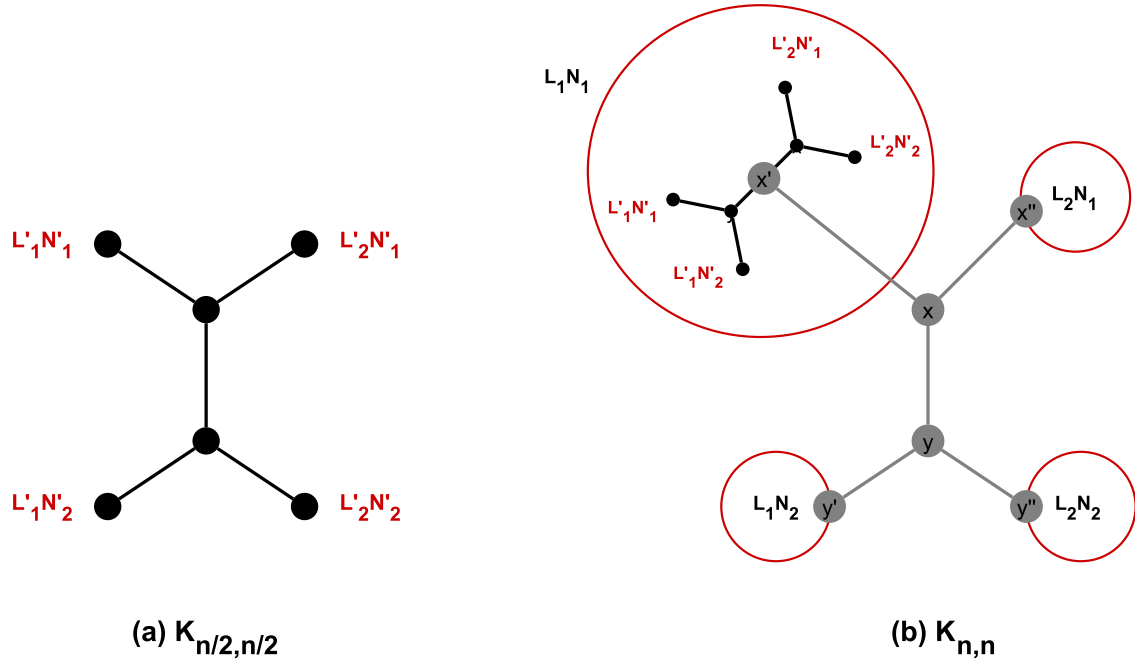


Figura 5.8: (a) Representação de um $K_{n/2, n/2}$ onde a parte \mathcal{L}' está particionada em dois conjuntos \mathcal{L}'_1 e \mathcal{L}'_2 de cardinalidade $|\mathcal{L}'|/2$. Assim como, a parte \mathcal{N}' está particionada em dois conjuntos \mathcal{N}'_1 e \mathcal{N}'_2 de cardinalidade $|\mathcal{N}'|/2$. (b) Representação de um $K_{n, n}$ onde a parte \mathcal{L} está particionada em dois conjuntos \mathcal{L}_1 e \mathcal{L}_2 de cardinalidade $|\mathcal{L}|/2$. Assim como, a parte \mathcal{N} está particionada em dois conjuntos \mathcal{N}_1 e \mathcal{N}_2 de cardinalidade $|\mathcal{N}|/2$.

y_{ij} , em cada representação $(T_{ij}, \mathcal{S}_{ij})$, ao construir a árvore hospedeira T pela identificação dos nós $f_{ij} = z_{ij}$, nenhum nó v que pertence a T_{ij} e não pertence a T^* será adicionado à interseção entre quaisquer par de subárvores. Sendo assim, em (T, \mathcal{S}) , o tamanho da maior interseção entre subárvores da mesma parte, denotado por $I(n)$, é duas vezes a maior interseção na representação do $K_{n/2, n/2}$, pois cada conjunto aparece em duas folhas, adicionado de quatro, que é a quantidade máxima de novas interseções geradas pelos nós de T^* . A função recursiva que expressa o tamanho da maior interseção entre subárvores da mesma parte é dada por $I(n) = 2.I(n/2) + 4$. Resolvendo a recursão temos que $I(n) = 2n - 4$. Sendo assim, $t - 1 \geq 2n - 4$. Logo, para $n \geq 4$ potência de 2, existe uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa para um grafo $G \subseteq K_{n, n}$ com $t \geq 2n - 3$. \square

Utilizando a mesma ideia de construção recursiva, também conseguimos chegar a um algoritmo que obtém uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa para $K_{n, n}$ com $n \geq 3$ potência de 3.

Uma representação $(3, 3, 4)$ -ortodoxa de um $K_{3, 3}$, onde suas partes são $\mathcal{L} =$

$\{a, b, c\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$, pode ser observado na Figura 5.9(a) Nesta ilustração cada subárvore S_i é gerada pelas folhas que possuem o rótulo i , ou seja, é formada pela união das folhas com rótulos i e os caminhos entre elas. Por exemplo, a subárvore correspondente ao vértice a é a subárvore gerada pelas folhas cujos rótulos possuem a letra a , assim como a subárvore correspondente ao vértice 1 é a subárvore gerada pelas folhas cujos rótulos possuem o algarismo 1.

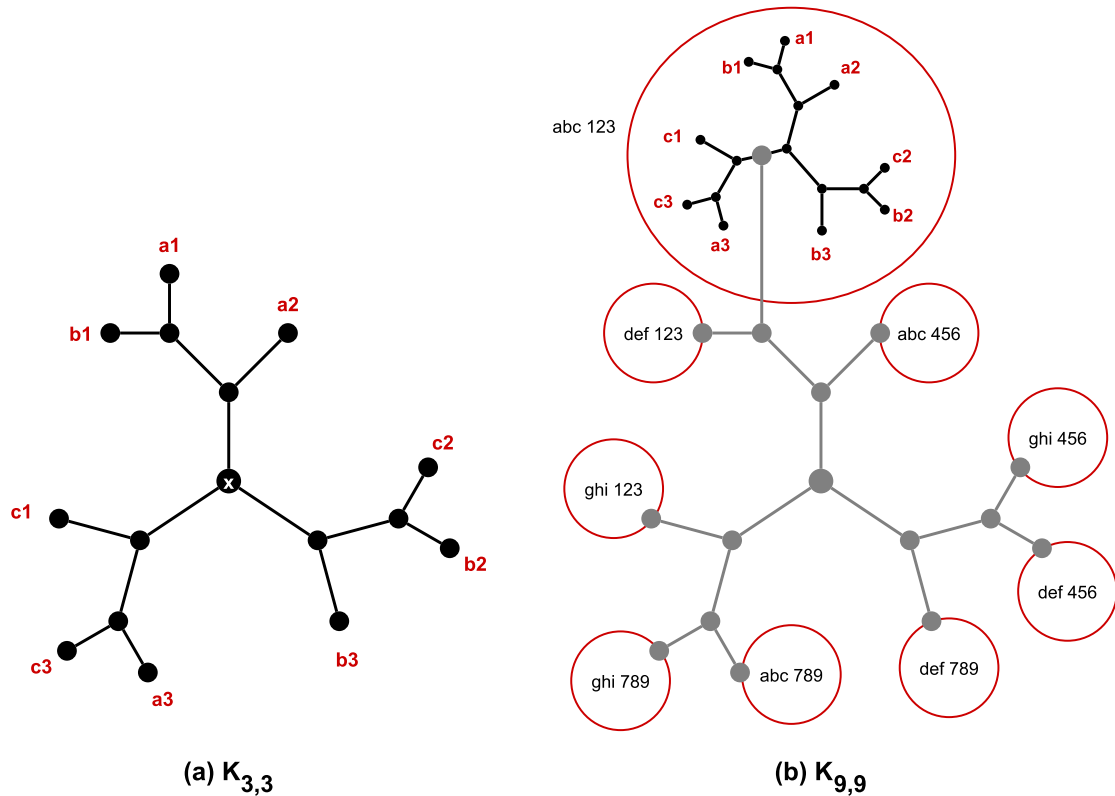


Figura 5.9: (a) Representação de um $K_{3,3}$ cujas partes são $\mathcal{L} = \{a, b, c\}$ e $\mathcal{N} = \{1, 2, 3\}$. (b) Representação de um $K_{9,9}$ a partir da representação do $K_{3,3}$. Cada folha corresponde a uma representação de um $K_{3,3}$ cujas suas partes são definidas pelos conjuntos de vértices descritos nos rótulos. A folha de rótulo "abc 123" detalha a representação.

Na Figura 5.9(b) apresentamos a construção de uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa de um $K_{9,9}$ a partir da representação de $K_{3,3}$. Nesta ilustração, a parte $\mathcal{L} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ está particionada em três conjuntos $\mathcal{L}_1 = \{a, b, c\}$, $\mathcal{L}_2 = \{d, e, f\}$ e $\mathcal{L}_3 = \{g, h, i\}$. Assim como, a parte $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ está particionada em três conjuntos $\mathcal{N}_1 = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{N}_2 = \{4, 5, 6\}$ e $\mathcal{N}_3 = \{7, 8, 9\}$.

Seja (T', \mathcal{S}') a representação do $K_{3,3}$ da Figura 5.9(a). Para construir a representação (T, \mathcal{S}) do $K_{9,9}$ executamos o seguinte algoritmo simplificado:

- (1) Fazamos $T^* = T'$.

(2) Associamos:

- o rótulo a em T^* ao conjunto \mathcal{L}_1
- o rótulo b em T^* ao conjunto \mathcal{L}_2
- o rótulo c em T^* ao conjunto \mathcal{L}_3
- o rótulo 1 em T^* ao conjunto \mathcal{N}_1
- o rótulo 2 em T^* ao conjunto \mathcal{N}_2
- o rótulo 3 em T^* ao conjunto \mathcal{N}_3

(3) Seja a folha f_{ij} de T^* aquela associada aos conjuntos $L_i N_j$.

(4) Seja $(T_{ij}, \mathcal{S}_{ij})$ a representação $(3, 3, 4)$ -ortodoxa de um $K_{3,3}$, cujas partes são \mathcal{L}_i e \mathcal{N}_j .

(5) Construimos T fazendo a identificação de cada folha f_{ij} de T^* com cada T_{ij} correspondente, através da subdivisão de uma aresta incidente ao nó $x \in T_{ij}$, como ilustrado na Figura 5.9(b).

(6) Cada subárvore $S_v \in \mathcal{S}$ correspondente ao vértice $v \in V(K_{9,9})$ é gerada pelas folhas de T que possuem o rótulo v .

Desta forma, (T, \mathcal{S}) é uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa de um $K_{9,9}$ construída a partir da representação de $K_{3,3}$.

Utilizando a estratégia do algoritmo anterior de forma recursiva, provamos no Teorema 49 que se $t \geq 2n + n/3 - 3$ é possível construir uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa para um grafo $G \subseteq K_{n,n}$ onde $n \geq 3$ e n é uma potência de 3.

A ideia da prova é indutiva. Como conhecemos a representação de um $K_{3,3}$ e sabemos construir uma representação de um $K_{n,n}$ a partir da representação de $K_{n/3, n/3}$, se n for uma potência de 3 maior ou igual a 3 então sabemos construir uma representação para $K_{n/3, n/3}$.

Teorema 49 *Seja $n \geq 3$ uma potência de 3, então $G \subseteq K_{n,n} \in \text{ORTH} [3, 3, 2n + n/3 - 3]$.*

Prova: Seja (T_3, \mathcal{S}_3) uma representação $(3, 3, 4)$ -ortodoxa de um $K_{3,3}$, como na Figura 5.9(a). Seja $n \geq 3$ uma potência de 3. Em um $K_{n/3, n/3}$ considere \mathcal{L}' e \mathcal{N}' suas partes. Considere o conjunto \mathcal{L}' particionado em três conjuntos $\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2$ e \mathcal{L}'_3 de cardinalidade $|\mathcal{L}'|/3$. e o conjunto \mathcal{N}' particionado em três conjuntos $\mathcal{N}'_1, \mathcal{N}'_2$ e \mathcal{N}'_3 de cardinalidade $|\mathcal{N}'|/3$.

Suponha que (T', \mathcal{S}') é uma representação $(3, 3, t')$ -ortodoxa de um $K_{n/3, n/3}$, como na Figura 5.10(a).

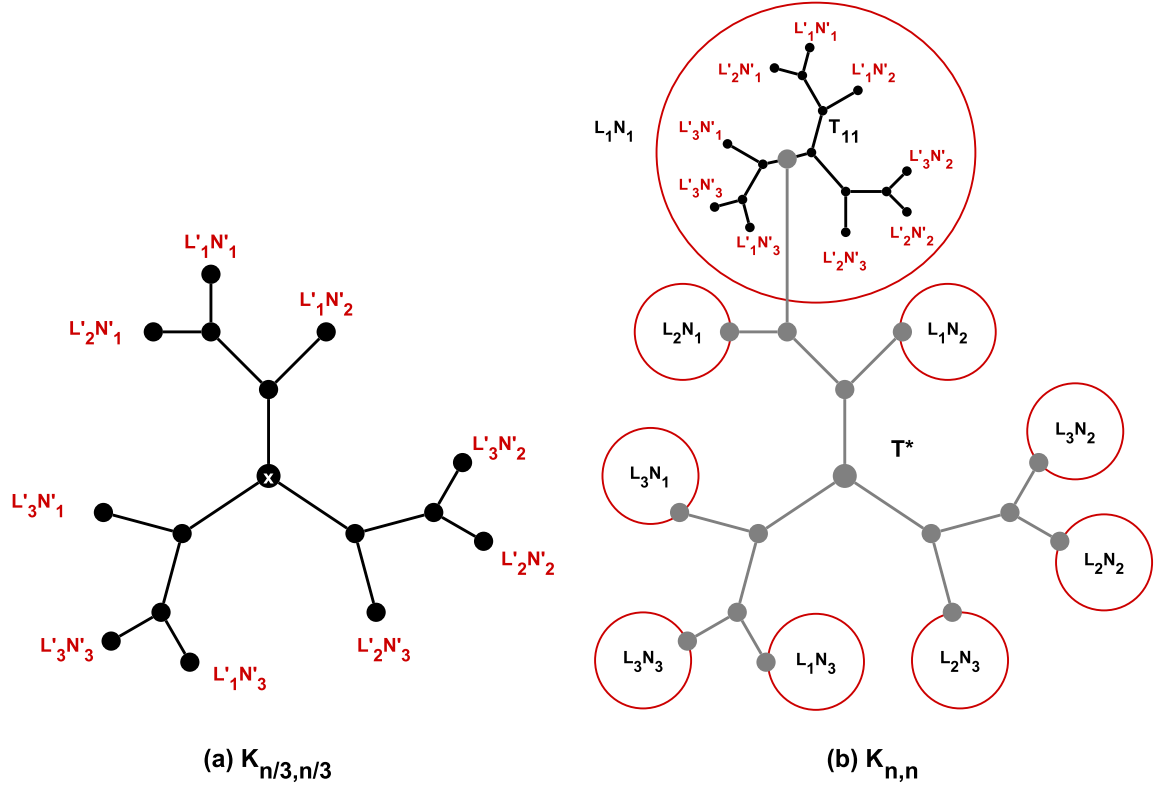


Figura 5.10: (a) Representação de um $K_{n/3, n/3}$ onde a parte \mathcal{L}' está particionada em três conjuntos \mathcal{L}'_1 , \mathcal{L}'_2 e \mathcal{L}'_3 de cardinalidade $|\mathcal{L}'|/3$. Assim como, a parte \mathcal{N}' está particionada em três conjuntos \mathcal{N}'_1 , \mathcal{N}'_2 e \mathcal{N}'_3 de cardinalidade $|\mathcal{N}'|/3$. (b) Representação de um $K_{n, n}$ onde a parte \mathcal{L} está particionada em três conjuntos \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 de cardinalidade $|\mathcal{L}|/3$. Assim como, a parte \mathcal{N} está particionada em três conjuntos \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 e \mathcal{N}_3 de cardinalidade $|\mathcal{N}|/3$.

Para construir (T, \mathcal{S}) , uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa de um $K_{n, n}$. Sejam \mathcal{L} e \mathcal{N} as partes do $K_{n, n}$. O conjunto \mathcal{L} está particionado em três conjuntos \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 e \mathcal{L}_3 de cardinalidade $|\mathcal{L}|/3$ cada um. Assim como, o conjunto \mathcal{N} está particionado em três conjuntos \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 e \mathcal{N}_3 de cardinalidade $|\mathcal{N}|/3$ cada um. Construa uma árvore T^* , onde para cada folha $f_{ij} \in T^*$ associamos o par de conjuntos $\mathcal{L}_i \mathcal{N}_j$, como na Figura 5.10(b). Por hipótese, sabemos construir uma representação $(3, 3, t')$ -ortodoxa de um $K_{n/3, n/3}$. Assim, podemos considerar $(T_{ij}, \mathcal{S}_{ij})$ uma representação $(3, 3, t')$ -ortodoxa de um $K_{n/3, n/3}$ o qual suas partes são $\mathcal{L}_i \mathcal{N}_j$. Em T_{ij} , o nó y_{ij} é obtido através da subdivisão de uma aresta incidente ao no central x_{ij} . Fazendo $f_{ij} = y_{ij}$ para cada folha f_{ij} de T^* , construímos a árvore hospedeira T da representação do $K_{n, n}$. Cada subárvore S_v correspondente a o vértice $v \in V(K_{n, n})$ é gerada por suas folhas. Assim, construímos a representação (T, \mathcal{S}) do $K_{n, n}$ a partir da representação do $K_{n/3, n/3}$.

Como todas as subárvores de \mathcal{S}_{ij} compartilham o nó x_{ij} em cada

representação $(T_{ij}, \mathcal{S}_{ij})$, ao construir a árvore hospedeira T pela identificação dos nós $f_{ij} = y_{ij}$, nenhum nó v que pertence a T_{ij} e não pertence a T^* será adicionado à interseção entre quaisquer par de subárvores. Sendo assim, em (T, \mathcal{S}) , o tamanho da maior interseção entre subárvores da mesma parte, denotado por $I(n)$, é três vezes a maior interseção na representação do $K_{n/3, n/3}$, pois cada conjunto aparece em três folhas, adicionado de oito, que é a quantidade máxima de novas interseções geradas pelos nós de T^* . A função recursiva que expressa o tamanho da maior interseção entre subárvores da mesma parte é dada por $I(n) = 3I(n/3) + 8$. Resolvendo a recursão temos que $I(n) = 2n + n/3 - 4$. Sendo assim, $t - 1 \geq 2n + n/3 - 4$. Logo, para $n \geq 3$ potência de 3, existe uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa para um grafo $G \subseteq K_{n, n}$ com $t \geq 2n + n/3 - 3$. \square

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

No decorrer deste trabalho estudamos grafos de interseção de subárvores de uma árvore hospedeira que possuem algumas propriedades adicionais, os grafos $\text{ORTH}[h, s, t]$. Especialmente, mas não exclusivamente, foram estudados os grafos que pertencem às classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$, $\text{ORTH}[3, 2, 3]$ e $\text{ORTH}[3, 3, 3]$.

Os grafos $[h, s, t]$ e $\text{ORTH}[h, s, t]$ são estudados desde a década de 70 e ainda hoje são temas de inúmeros trabalhos desenvolvidos por importantes pesquisadores da teoria dos grafos. Um exemplo disso são os recentes trabalhos publicados no ano de 2017 por Golubic et.al. [14] e por Álcon, Gutierrez e Mazzoleni [2]. Em 2018, além do mais recente trabalho de Jamison e Mulder [34] publicado em julho, também tivemos aceito para publicação no periódico *Discrete Applied Mathematics* o trabalho *Constant Threshold Intersection Graphs of Orthodox Paths in Trees* [8] e este trabalho contém os principais resultados do Capítulo 3 desta tese.

Sobre os grafos $\text{ORTH}[h, 2, t]$, inicialmente mostramos ser simples listar o conjunto de grafos que podem ser representados quando $h = \{1, 2\}$.

Em seguida, mostramos que a classe $\text{ORTH}[h, 2, t]$ está propriamente contida na classe dos grafos linha de multigrafos. Este resultado foi apresentado no *VII Latin American Workshop on Cliques in Graphs* em La Plata - Argentina, em 2016 [7].

Um importante resultado encontrado durante a confecção deste trabalho foi a determinação da (h, t) -árvore layout para grafos que admitem uma representação $(h, 2, t)$ -ortodoxa. Trata-se de uma representação simplificada para grafos que pertencem à classe $\text{ORTH}[h, 2, t]$, este tipo de representação simplificou consideravelmente a construção das provas de alguns de nossos resultados. Dentre estes resultados vale destacar o Teorema 24, pois através dele foi possível responder a questão deixada por Golubic, Lipshteyn e Stern em [26], mostrando que grafos linhas de grafos completos de ordens adequadas distinguem às classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$ para diferentes valores de h e t . Para grafos que pertencem às classes $\text{ORTH}[h, 2, t]$, com $h \leq 3$ e $t = \{1, 2\}$ apresentamos métodos de reconhecimento em tempo

polinomial baseados nos resultados dos Teoremas 25, 26. Ainda baseados nos resultados dos teoremas citados, conseguimos provar que se $G \in \text{ORTH}[h, 2, t]$, para algum $h \geq 3$ e $t \geq 1$, e H um grafo conexo com $L(H) = G$, então a largura em árvore (ou treewidth) de H é limitada em função de h e t . O Teorema 29 apresenta uma caracterização completa para os grafos $\text{ORTH}[3, 2, 2]$. Neste teorema, G é o grafo linha de H e $G \in \text{ORTH}[3, 2, 2]$ se e somente se todos os blocos de H são de ordem no máximo 3.

No *IX Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium* realizado em Marselle - França em 2017 [12], apresentamos o resultado do Teorema 32. Este teorema prova que, se um grafo conexo G , livre de gêmeos de ordem pelo menos 4, está em $\text{ORTH}[3, 2, 3]$, então G é grafo linha de um grafo planar. Em seguida, apresentamos um grafo G' que é grafo linha de um grafo planar, porém não admite uma representação $(3, 2, 3)$ -ortodoxa, concluindo assim que a classe dos grafos $\text{ORTH}[3, 2, 3]$ está propriamente contida na classe dos grafos linha de grafos planares.

Para os grafos que pertencem a classe $\text{ORTH}[3, 3, 3]$, desenvolvemos um método de decomposição por cliques minimais no qual, dado um grafo G , decompomos G por cliques minimais de forma que ao terminar a decomposição temos um conjunto de grafos induzidos de G , chamados de átomos. Além disso, apresentamos um procedimento capaz de reconstruir o grafo G a partir de seus átomos dado que cada um destes átomos admitem uma representação $(3, 3, 3)$ -ortodoxa. Em resumo, apresentamos um procedimento no qual é possível provar que uma classe C está contida em $\text{ORTH}[3, 3, 3]$, se a decomposição por cliques minimais de qualquer grafo G que pertence a classe C , sempre resulta em átomos que admitem uma representação $(3, 3, 3)$ -ortodoxa. Em seguida, apresentamos um conjunto de átomos para os quais conhecemos sua representação $(3, 3, 3)$ -ortodoxa.

A Classe de grafos bipartidos completos tiveram destaque neste trabalho, especialmente por conta da dificuldade em construir representações ortodoxas devido à grande quantidade de cliques necessárias para cobrir suas arestas. Um $K_{n/2, n/2}$, por exemplo, é o grafo com n vértices que necessita da maior quantidade de cliques distintas para cobrir todas as suas arestas. Neste caso, n^2 cliques serão necessárias.

Em 2005, Jamison e Mulder [33] estudaram os grafos bipartidos completos. Neste trabalho eles enunciaram uma conjectura que diz que para $n \geq 3$, o grafo bipartido completo $K_{n, n}$ não tem uma representação $(3, 3, n)$ -ortodoxa. Nós provamos esta conjectura para $n = 4$ e $n = 5$. Jamison e Mulder no mesmo trabalho já citado provaram que se $t = \lceil \log_2 n \rceil + 2$, então $K_{2, n}$ possui uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa. Nós estendemos esta prova para $K_{3, n}$. Estes resultados foram apresentados no *VIII Latin American Workshop on Cliques in*

Graphs em Rio de Janeiro - Brasil, em 2018 [10].

Além disso, construímos um algoritmo que obtém uma representação $(3, 3, 2n - 3)$ -ortodoxa para $K_{n,n}$ com $n \geq 4$ e n potência de 2 e um algoritmo que constrói uma representação $(3, 3, 2n + n/3 - 3)$ -ortodoxa para $K_{n,n}$ com $n \geq 3$ e n potência de 3. Estes resultados foram apresentados no *III Encontro de Teoria da Computação* em Natal- Brasil, em 2018 [9].

Quanto aos trabalhos futuros os que estão em pauta são:

- Encontrar um algoritmo eficiente de reconhecimento para os grafos da classe $\text{ORTH}[h, 2, t]$ para $h \geq 3$ e $t \geq 3$.
- Encontrar as famílias de átomos que admitam uma representação $(3, 3, 3)$ -ortodoxa.
- Provar para um n qualquer a conjectura “Para $n \geq 3$, o grafo bipartido completo $K_{n,n}$ não tem uma representação $(3, 3, n)$ -ortodoxa . . .” de Jamison e Mulder em [33].
- Encontrar um algoritmo eficiente para construir uma representação $(3, 3, t)$ -ortodoxa para grafos $K_{n,n}$ com n qualquer.

Referências Bibliográficas

- [1] ALCÓN, L., GUTIERREZ, M., MAZZOLENI, M., 2015, “Characterizing paths graphs on bounded degree trees by minimal forbidden induced subgraphs”, *Discrete Mathematics*, v. 338, n. 1, pp. 103 – 110. ISSN: 0012-365X. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2014.08.020>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X14003434>>.
- [2] ALCÓN, L., GUTIERREZ, M., MAZZOLENI, M., 2017, “Helly EPT graphs on bounded degree trees: Characterization and recognition”, *Discrete Mathematics*, v. 340, n. 12, pp. 2798 – 2806. ISSN: 0012-365X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2017.08.011>. Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X17302571>>.
- [3] ALCÓN, L., GUTIERREZ, M., PÍA MAZZOLENI, M., 2013, “Characterizing $[h,2,1]$ graphs by minimal forbidden induced subgraphs”, *ArXiv e-prints*, (jul.).
- [4] BEINEKE, L. W., 1970, “Characterizations of derived graphs”, *Journal of Combinatorial Theory*, v. 9, n. 2, pp. 129 – 135. ISSN: 0021-9800. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9800\(70\)80019-9](http://dx.doi.org/10.1016/S0021-9800(70)80019-9). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021980070800199>>.
- [5] BERMOND, J., MEYER, J., 1973, “Graphe représentatif des arêtes d’un multigraphe”, *J. Math. Pures Appl. (9)*, v. 52, pp. 299–308. ISSN: 0021-7824.
- [6] BONDY, A., MURTY, U., 2011, *Graph Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer London. ISBN: 9781846289699.
- [7] BORNSTEIN, C. F., PINTO, J. W. C., SZWARCFITER, J. L., 2016, “Sobre Grafos $ORTH[3,2,3]$ ”. In: *Proceedings of VII Latin American Workshop on Cliques in Graphs*, p. 45, La Plata, Argentina. Disponível em: http://www.mate.unlp.edu.ar/~liliana/lawclique_2016/prolist.pdf>.

- [8] BORNSTEIN, C. F., PINTO, J. W., RAUTENBACH, D., et al., 2018, “Constant Threshold Intersection Graphs of Orthodox Paths in Trees”, *Discrete Applied Mathematics (a ser publicado)*. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/2017arXiv170308465F>>.
- [9] BORNSTEIN, C. F., PINTO, J. W. C., SZWARCFITER, J. L., 2018, “Grafos Bipartidos Completos em $ORTH[3,3,t]$ ”. In: *Anais do III Encontro de Teoria da Computação*, p. 117, Natal, Brasil, . Disponível em: <<http://natal.uern.br/eventos/csbc2018/wp-content/uploads/2018/08/Anais-ETC-2018.pdf>>.
- [10] BORNSTEIN, C. F., PINTO, J. W. C., SZWARCFITER, J. L., 2018, “On Orthodox Tree Representations of $K_{n,m}$ ”. In: *Proceedings of VIII Latin American Workshop on Cliques in Graphs*, p. 67, Rio de Janeiro, Brasil, . Disponível em: <<http://lawcg2018.icomp.ufam.edu.br/images/LAWCG2018-annals2018.pdf>>.
- [11] BORNSTEIN, C. F., PINTO, J. W., RAUTENBACH, D., et al., 2016, “Forbidden induced subgraphs for bounded p -intersection number”, *Discrete Mathematics*, v. 339, n. 2, pp. 533–538.
- [12] BORNSTEIN, C. F., PINTO, J. W. C., RAUTENBACH, D., 2017, “Intersection Graphs of Orthodox Paths in Trees”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 62, pp. 99 – 104. ISSN: 1571-0653. doi: <https://doi.org/10.1016/j.endm.2017.10.018>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1571065317302561>>. LAGOS’17 – IX Latin and American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium.
- [13] CHUNG, M. S., WEST, D. B., 1994, “The p -intersection number of a complete bipartite graph and orthogonal double coverings of a clique”, *Combinatorica*, v. 14, n. 4, pp. 453–461. ISSN: 1439-6912. doi: 10.1007/BF01302966. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01302966>>.
- [14] COHEN, E., GOLUMBIC, M. C., LIPSHTEYN, M., et al., 2017, “Tolerance intersection graphs of degree bounded subtrees of a tree with constant tolerance 2”, *Discrete Mathematics*, v. 340, n. 2, pp. 209–222. doi: 10.1016/j.disc.2016.08.015.
- [15] DEGIORGI, D. G., SIMON, K., 1995, “A dynamic algorithm for line graph recognition”. In: Nagl, M. (Ed.), *Graph-Theoretic Concepts in Computer*

Science, pp. 37–48, Berlin, Heidelberg. Springer Berlin Heidelberg. ISBN: 978-3-540-48487-5.

- [16] DOURADO, M. C., PROTTI, F., SZWARCFITER, J. L., 2006, “Computational aspects of the Helly property: a survey”, *Journal of the Brazilian Computer Society*, v. 12, n. 1, pp. 7–33. ISSN: 0104-6500. doi: 10.1007/BF03192385. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF03192385>>.
- [17] DVORAK, Z., NORIN, S., 2014, “Treewidth of graphs with balanced separations”, *ArXiv e-prints*, (ago.).
- [18] EATON, N., GOULD, R. J., RÖDL, V., 1996, “On p -intersection representations”, *Journal of Graph Theory*, v. 21, n. 4, pp. 377–392. ISSN: 1097-0118. doi: 10.1002/(SICI)1097-0118(199604)21:4<377::AID-JGT3>3.0.CO;2-M. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0118\(199604\)21:4<377::AID-JGT3>3.0.CO;2-M](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1097-0118(199604)21:4<377::AID-JGT3>3.0.CO;2-M)>.
- [19] EATON, N., FUREDI, Z., KOSTOCHKA, A. V., et al., 2007, “Tree representations of graphs”, *European Journal of Combinatorics*, v. 28, n. 4, pp. 1087 – 1098. ISSN: 0195-6698. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejc.2006.04.002>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195669806000576>>.
- [20] ERDOS, P., GOODMAN, A., PÒSA, L., 1966, “The representation of a graph by set intersection”, *Can. J. Math.*, , n. 18, pp. 106 – 112.
- [21] GAVRIL, F., 1974, “The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 16, n. 1, pp. 47 – 56. ISSN: 0095-8956. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0095-8956\(74\)90094-X](http://dx.doi.org/10.1016/0095-8956(74)90094-X). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/009589567490094X>>.
- [22] GAVRIL, F., 1978, “A recognition algorithm for the intersection graphs of paths in trees”, *Discrete Mathematics*, v. 23, n. 3, pp. 211 – 227. ISSN: 0012-365X. doi: [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(78\)90003-1](https://doi.org/10.1016/0012-365X(78)90003-1). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X78900031>>.
- [23] GOLUMBIC, M. C., JAMISON, R. E., 1985, “Edge and vertex intersection of paths in a tree”, *Discrete Mathematics*, v. 55, n. 2, pp. 151 – 159. ISSN: 0012-365X. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X\(85\)90043-3](http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(85)90043-3).

Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X85900433>>.

- [24] GOLUMBIC, M. C., JAMISON, R. E., 1985, “The edge intersection graphs of paths in a tree”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 38, n. 1, pp. 8 – 22. ISSN: 0095-8956. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0095-8956\(85\)90088-7](http://dx.doi.org/10.1016/0095-8956(85)90088-7). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895685900887>>.
- [25] GOLUMBIC, M. C., MONMA, C. L., JR., W. T. T., 1984, “Tolerance graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 9, n. 2, pp. 157 – 170. ISSN: 0166-218X. doi: [http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X\(84\)90016-7](http://dx.doi.org/10.1016/0166-218X(84)90016-7). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0166218X84900167>>.
- [26] GOLUMBIC, M. C., LIPSHTEYN, M., STERN, M., 2008, “Equivalences and the complete hierarchy of intersection graphs of paths in a tree”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 156, n. 17, pp. 3203 – 3215. ISSN: 0166-218X. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.dam.2008.05.019>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0166218X08002229>>. Cologne/Twente Workshop on Graphs and Combinatorial OptimizationCTW 2005Cologne/Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization.
- [27] GOLUMBIC, M., MONMA, C., 1982, “A generalization of interval graphs with tolerances”, *13th Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing. Congr. Numer.*, , n. 35, pp. 321 – 331.
- [28] HARARY, F., 1969, *Graph Theory*. Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley Publishing Company. ISBN: 9780201410334.
- [29] HARARY, F., NORMAN, R. Z., 1960, “Some properties of line digraphs”, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, v. 9, n. 2, pp. 161–168. ISSN: 1973-4409. doi: 10.1007/BF02854581. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF02854581>>.
- [30] JACOBSON, M., MCMORRIS, F., MULDER, H., 1991, “An introduction to tolerance intersection graphs”, *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, v. 2, pp. 705–723.
- [31] JAMISON, R. E., MULDER, H. M., 2000, “Tolerance intersection graphs on binary trees with constant tolerance 3”, *Discrete Mathematics*, v. 215, n. 1 - 3, pp. 115 – 131. ISSN: 0012-365X. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/>

S0012-365X(99)00231-9. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X99002319>>.

- [32] JAMISON, R. E., MULDER, H. M., 2000, “Constant tolerance representations of graphs in trees”, *in: Proceedings of the Thirty-first Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Boca Raton, FL)*, v. 143, pp. 175–192.
- [33] JAMISON, R. E., MULDER, H. M., 2005, “Constant tolerance intersection graphs of subtrees of a tree”, *Discrete Mathematics*, v. 290, n. 1, pp. 27 – 46. ISSN: 0012-365X. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2004.04.017>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X04003784>>.
- [34] JAMISON, R. E., MULDER, H. M., 2018, “Dyadic representations of graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 341, n. 11, pp. 3021 – 3028. ISSN: 0012-365X. doi: <https://doi.org/10.1016/j.disc.2018.07.019>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X18302413>>.
- [35] KRAUSZ, J., 1943, “Démonstration nouvelle d’une théorème de Whitney sur les réseaux”, *Matematikai és Fizikai Lapok*, v. 50, pp. 75–85.
- [36] KURATOWSKI, C., 1930, “Sur le problème des courbes gauches en Topologie”, *Fundamenta Mathematicae*, v. 15, n. 1, pp. 271–283. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/212352>>.
- [37] LEKKERKERKER, C., BOLAND, J., 1962, “Representation of a finite graph by a set of intervals on the real line”, *Fundamenta Mathematicae*, v. 51, n. 1, pp. 45–64. Disponível em: <<http://eudml.org/doc/213681>>.
- [38] ROBERTSON, N., SEYMOUR, P., 1984, “Graph minors. III. Planar tree-width”, *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 36, n. 1, pp. 49 – 64. ISSN: 0095-8956. doi: [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(84\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0095-8956(84)90013-3). Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0095895684900133>>.
- [39] ROOIJ, A. C. M., WILF, H. S., 1965, “The interchange graph of a finite graph”, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, v. 16, n. 3, pp. 263–269. ISSN: 1588-2632. doi: [10.1007/BF01904834](https://doi.org/10.1007/BF01904834). Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01904834>>.

- [40] SCHEINERMAN, E. R., 1985, “Characterizing intersection classes of graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 55, n. 2, pp. 185 – 193. ISSN: 0012-365X. doi: [https://doi.org/10.1016/0012-365X\(85\)90047-0](https://doi.org/10.1016/0012-365X(85)90047-0). Disponível em: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0012365X85900470>.
- [41] WHITNEY, H., 1932, “Congruent Graphs and the Connectivity of Graphs”, *American Journal of Mathematics*, v. 54, n. 1, pp. 150–168. ISSN: 00029327, 10806377. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/2371086>.