



ESTUDO TRIDIMENSIONAL DA VIBRAÇÃO INDUZIDA POR VÓRTICES  
SOBRE UM CILINDRO RÍGIDO ELASTICAMENTE APOIADO ATRAVÉS DA  
SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Thiago Santos Freitas Castro Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Juan Bautista Villa Wanderley

Rio de Janeiro

Março de 2019

ESTUDO TRIDIMENSIONAL DA VIBRAÇÃO INDUZIDA POR VÓRTICES  
SOBRE UM CILINDRO RÍGIDO ELASTICAMENTE APOIADO ATRAVÉS DA  
SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Thiago Santos Freitas Castro Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO  
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA OCEÂNICA.

Examinada por:

---

Prof. Juan Bautista Villa Wanderley, Ph.D.

---

Prof. Antonio Carlos Fernandes, Ph.D.

---

Prof. Gilberto Bruno Ellwanger, D.Sc.

---

Prof. Paulo Couto, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 2019

Silva, Thiago Santos Freitas Castro

Estudo Tridimensional da Vibração Induzida por Vórtices sobre um Cilindro Rígido Elasticamente Apoiado Através da Solução Numérica das Equações de Navier-Stokes / Thiago Santos Freitas Castro Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XI, 103 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Juan Bautista Villa Wanderley

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Oceânica, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 93-95.

1. Vibração Induzida por Vórtices. 2. escoamento ao redor de cilindro. 3. Mecânica dos Fluidos Computacional. 4. Simulação direta das grandes escalas da turbulência. I. Wanderley, Juan Bautista Villa. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Oceânica. III. Título.

# Agradecimentos

Agradeço à minha esposa, Livia, e meu filho, Thomas, pelo apoio e paciência durante esta jornada, além de todo carinho e amor doados a mim, sem os quais sei que esta realização não seria possível.

Agradeço também aos meus pais, Lúcia e Silvio, e minha irmã Tatiana pelo apoio e incentivo em conquistar este novo capítulo da minha vida profissional.

Agradeço aos amigos Áureo Wanderley e Markus Rupp pelas lições aprendidas através de suas companhias e de diversas horas de estudo, culminando na sobreposição dos desafios apresentados por essa jornada.

Agradeço ao meu orientador Juan Bautista Wanderley pela paciência, conhecimento e incentivo no desenvolvimento deste trabalho, e aos companheiros de laboratório Leonardo de Almeida e Vinicius Brito, sempre dispostos a discutir, comparar e partilhar conceitos utilizados no presente trabalho.

Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro nesta pesquisa.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ESTUDO TRIDIMENSIONAL DA VIBRAÇÃO INDUZIDA POR VÓRTICES  
SOBRE UM CILINDRO RÍGIDO ELASTICAMENTE APOIADO ATRAVÉS DA  
SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

Thiago Santos Freitas Castro Silva

Março/2019

Orientador: Juan Bautista Villa Wanderley

Programa: Engenharia Oceânica

Os efeitos da Vibração Induzida por Vórtices (VIV) tem grande importância em diversas áreas da Engenharia. Na exploração de petróleo, por exemplo, os *risers* são estruturas comumente sujeitas a este tipo de fenômeno e podem sofrer danos devido às oscilações causadas por ele. A Vibração Induzida por Vórtices em um cilindro circular rígido elasticamente montado com um grau de liberdade foi estudada e os coeficientes de arrasto e sustentação, além das respostas em frequência, amplitude e ângulo de fase, foram obtidas para uma faixa de velocidade reduzida de 2 a 12. A solução numérica para as equações de Navier-Stokes levemente compressíveis em três dimensões foi obtida através do Método dos Volumes Finitos e da Simulação das Grandes Escalas da Turbulência (*Large Eddy Simulation*) e o método de Runge-Kutta de 3ª Ordem foi utilizado para realizar a marcha no tempo. Uma malha curvilínea, *body fitted* com 8 milhões de nós foi utilizada nas simulações. Apesar da amplitude máxima de resposta obtida ter sido menor do que a esperada, o presente trabalho conseguiu capturar com sucesso a frequência de *lock-in*, a mudança do ângulo de fase com o aumento da velocidade reduzida e os modos de liberação de vórtices, 2S e 2P, além de possibilitar a visualização da esteira turbilhonar tridimensional e suas propriedades através das simulações.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

A THREE-DIMENSIONAL STUDY OF VORTEX-INDUCED VIBRATION ON AN  
ELASTICALLY MOUNTED RIGID CYLINDER THROUGH THE NUMERICAL  
SOLUTION OF NAVIER-STOKES EQUATIONS

Thiago Santos Freitas Castro Silva

March/2019

Advisor: Juan Bautista Villa Wanderley

Department: Ocean Engineering

The effects of Vortex Induced Vibration (VIV) have great importance in several areas of Engineering. In oil exploration, for example, risers are structures commonly subject to this type of phenomenon and can suffer damage due to the oscillations caused by it. Vortex Induced Vibration of a rigid circular cylinder elastically mounted with one degree of freedom was studied and the drag and lift coefficients, frequency, amplitude and phase angle responses, were obtained for a reduced velocity range of 2 to 12. The numerical solution for the three-dimensional, slightly compressible Navier-Stokes equations was obtained using the Finite Volume Method and Large Eddy Simulation. The 3rd order Runge-Kutta method was used to perform the march in time. A curvilinear mesh, body fitted with 8 million knots was used in the simulations. Although the maximum response amplitude obtained was lower than expected, the present work was able to successfully capture the *lock-in* frequency, the phase angle change with the increase in reduced velocity and the 2S and 2P vortex shedding modes, besides allowing the visualization of the three-dimensional swirling wake and its properties.

# Índice

<b>1. Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 O Fenômeno da Vibração Induzida por Vórtices	1
1.2 Metodologia Utilizada	3
1.3 Revisão da Literatura	4
1.4 Estrutura da dissertação	8
<b>2. Formulação Matemática</b>	<b>10</b>
2.1 Sistema de Coordenadas	10
2.2 Cilindro Elasticamente Montado	11
2.2.1 Equações Governantes	11
2.2.2 Formulação da Equação do Movimento	15
2.2.3 Simulação das Grandes Escalas da Turbulência	20
2.2.4 Critério Q (Q-Criterion)	25
<b>3. Formulação Numérica</b>	<b>28</b>
3.1 Esquema Numérico	28
3.1.1 Equações Governantes	28
3.1.2 Integração no tempo	34
3.1.3 Equação do Movimento	35
3.1.4 Simulação das Grandes Escalas da Turbulência	36
3.2 Malha Computacional	38
3.3 Condições iniciais e de contorno	41
3.4 Estudo de Convergência da Malha	44
<b>4. Resultados do Cilindro Fixo</b>	<b>49</b>
4.1 Número de Reynolds = 40	49
4.1.1 Coeficiente de Pressão	50
4.2 Número de Reynolds = 100	54
4.2.1 Coeficiente de Pressão	54
4.2.2 Vorticidade	56
4.2.3 Critério-Q ( <i>Q-Criterion</i> )	57
4.3 Número de Reynolds = 200	57
4.3.1 Coeficiente de Pressão	58
4.3.2 Vorticidade	59
4.3.3 Critério-Q ( <i>Q-Criterion</i> )	61
4.4 Número de Reynolds = 500	61

4.4.1 Critério-Q ( <i>Q-Criterion</i> )	62
4.5 Número de Reynolds = 1000	64
4.5.1 Critério-Q ( <i>Q-Criterion</i> )	65
4.6 Comparação com Resultados anteriores	66
<b>5. Resultados do Cilindro Elasticamente Montado</b>	<b>68</b>
5.1 Amplitude de Resposta	68
5.2 Comportamento da Vibração	69
5.2.1 Velocidade Reduzida 2.0	69
5.2.2 Velocidade Reduzida 3.5	71
5.2.3 Velocidade Reduzida 4.5	74
5.2.4 Velocidade Reduzida 5.5	76
5.2.5 Velocidade Reduzida 6.5	79
5.2.6 Velocidade Reduzida 7.0	81
5.2.7 Velocidade Reduzida 9.0	83
5.3 Frequência de Vibração	86
5.4 Ângulo de Fase	90
<b>6. Conclusões e Objetivos Futuros</b>	<b>91</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>93</b>
<b>APÊNDICE I</b>	<b>96</b>

# Lista de Símbolos

$a_{\infty}$	Velocidade do som
$A/D$	Razão de amplitude
$C_a$	Coefficiente de massa adicional do cilindro
$C_L$	Coefficiente de sustentação do cilindro
$C_d$	Coefficiente de arrasto do cilindro
$C_p$	Coefficiente de pressão do cilindro
$C_S$	Constante de Smagorinsk
$CFL$	Número de Courant–Friedrichs–Lewy
$D$	Diâmetro do cilindro
$E_e$	Vetor de fluxo inviscido na direção x
$E_v$	Vetor de fluxo viscoso na direção x
$F_e$	Vetor de fluxo inviscido na direção y
$F_v$	Vetor de fluxo viscoso na direção y
$F_z$	Força na direção z
$f_{na}$	Frequência natural no ar
$f_{nw}$	Frequência natural na água
$G_e$	Vetor de fluxo inviscido na direção z
$G_v$	Vetor de fluxo viscoso na direção z
$m$	Massa do cilindro
$m^*$	Razão de massa
$M_{\infty}$	Número de Mach
$p$	Pressão dinâmica do fluido
$p_{\infty}$	Pressão do escoamento livre

$P$	Vetor definido pelos vetores de fluxo
$Q$	Vetor de variáveis conservadas
$Re_L$	Número de Reynolds
$S$	Superfície do elemento da malha
$St$	Número de Strouhal
$S_{ij}$	Tensor taxa de deformação
$u$	Velocidade do escoamento na direção x
$u_\infty$	Velocidade de referência
$U_R$	Velocidade reduzida
$v$	Velocidade do escoamento na direção y
$V$	Volume do elemento da malha computacional
$w$	Velocidade do escoamento na direção z
$\vec{w}$	Velocidade local da superfície do volume de controle
$x$	Coordenada na direção do escoamento
$y$	Coordenada na direção do eixo do cilindro
$z$	Coordenada na direção transversal ao escoamento
$\dot{z}$	Velocidade na direção transversal ao escoamento
$\ddot{z}$	Aceleração na direção transversal ao escoamento
$\Delta$	Largura do filtro da Simulação das Grandes Escalas da Turbulência
$\nabla$	Operador divergente
$\rho$	Massa específica
$\zeta$	Razão de amortecimento
$\tau$	Compressibilidade isotérmica
$\tau_{ij}$	Tensor de Tensões

$v_T$	Viscosidade turbulenta
$\omega_{na}$	Frequência natural angular
$\omega_n$	Compressibilidade isotérmica

# 1. Introdução

A vibração induzida por vórtices (VIV) já foi tema de muitos estudos acadêmicos durante as últimas décadas e ainda assim continua sendo um assunto onde é necessário compreender o fenômeno físico e todas as suas implicações mais detalhadamente. Diversos tipos de estruturas de engenharia comumente encontradas nas nossas cidades, fábricas e nos campos *offshore* estão sujeitas a este fenômeno, tais como, pilares de pontes sobre rios, chaminés de fábricas, linhas de produção, *risers* de exploração ou produção de petróleo, *flare booms*, condutos tubulares como gasodutos ou oleodutos, etc.

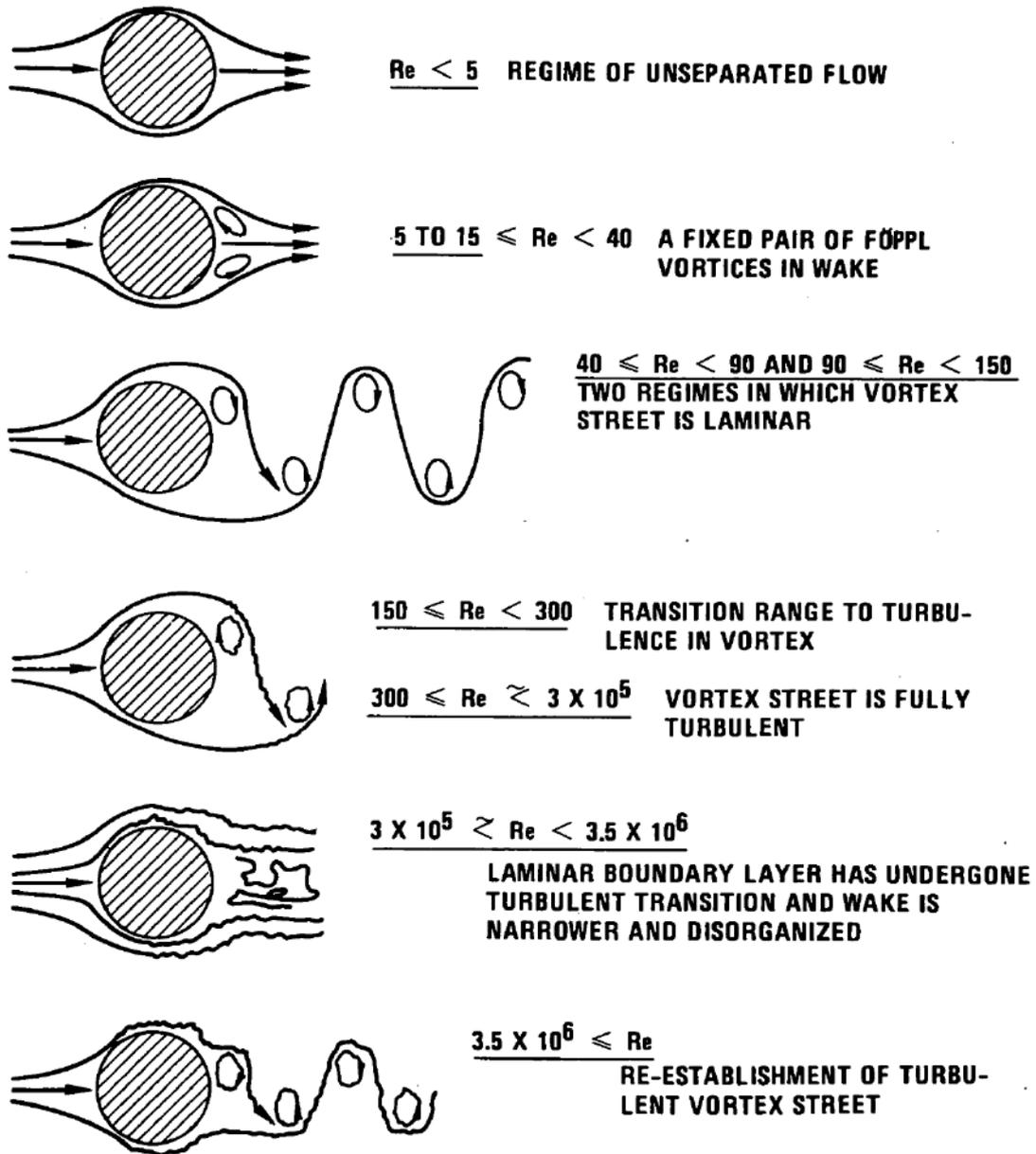
## 1.1 O Fenômeno da Vibração Induzida por Vórtices

A vibração induzida por vórtices se dá quando corpos rombudos estão sujeitos a escoamentos com velocidade capaz de gerar um gradiente de pressão adverso à jusante do corpo provocando o descolamento da camada limite, e dependendo da velocidade do escoamento, das características físicas do corpo e do fluido, ou seja, dependendo do número de Reynolds do escoamento, vórtices começam a se desprender na esteira do escoamento, gerando forças transversais e longitudinais que atuam sobre o corpo e conseqüentemente fazendo este vibrar. Estas forças transversais e longitudinais são denominadas “forças induzidas por vórtices” e as respostas resultantes da atuação destas forças de “vibrações induzidas por vórtices” ou “vibrações induzidas pelo escoamento”.

Este fenômeno vem sendo amplamente estudado e podemos caracterizar os tipos de desprendimento de vórtices de acordo com as faixas de número de Reynolds do escoamento, como pode ser visto na Figura 1 extraída de BLEVINS (1990). A melhor compreensão deste fenômeno é de grande interesse acadêmico e econômico, pois estruturas submetidas à vibração podem sofrer danos devido à fadiga e eventualmente entrar em colapso.

Uma característica interessante da vibração induzida por vórtices em cilindros circulares elasticamente montados é o fenômeno chamado de *lock-in*. Ele ocorre quando um escoamento incidindo sobre um cilindro elasticamente montado tem sua velocidade reduzida compreendida em um intervalo que faz com que a frequência de desprendimento de vórtices seja capturada pela frequência natural do cilindro, ocasionando uma

amplificação do movimento do cilindro, como foi mostrado experimentalmente por FENG (1968), ou seja, dentro deste intervalo de velocidade reduzida, mesmo aumentando-se a velocidade do escoamento a frequência de desprendimento de vórtices não aumenta, ficando em sintonia com a frequência da estrutura. Esse fenômeno não ocorre em estruturas fixas, onde com o aumento da velocidade reduzida a frequência de desprendimento de vórtices também aumenta.



*Figura 1: Regimes de escoamento incidindo sobre um cilindro circular para diferentes faixas de número de Reynolds, extraída de BLEVINS (1990).*

O estudo numérico da vibração induzida por vórtices é uma maneira economicamente viável, rápida e consideravelmente confiável de se estudar o fenômeno além de ser bastante versátil quando comparada à experimentos em laboratórios, sendo possível gerar resultados capazes de sugerir melhorias e, através de futuros estudos, possivelmente gerar uma mitigação da VIV.

## 1.2 Metodologia Utilizada

No presente trabalho, foi desenvolvido um código em FORTRAN a fim de simular o escoamento ao redor de um cilindro circular rígido elasticamente montado. Os resultados obtidos são comparados com resultados experimentais e numéricos amplamente divulgados e aceitos pela comunidade acadêmica. Como objeto de pesquisa da dissertação de mestrado, o código computacional deverá ser capaz de simular um cilindro circular livre para vibrar em uma direção, ou seja, com um grau de liberdade, tentando reproduzir os resultados obtidos por KHALAK e WILLIAMSON (1996) dentro de limites de tolerância razoáveis.

Foram realizadas simulações de um escoamento incidindo sobre um cilindro rígido elasticamente apoiado com um grau de liberdade para uma faixa de velocidade reduzida ( $U_r$ ) variando de 2 até 12, com incrementos de 0,5 e, conseqüentemente, números de Reynolds variando de 2000 até 12000, novamente com incrementos de 500 a cada simulação.

Com o intuito de validar a metodologia proposta, foram realizadas simulações para o caso do escoamento incidindo sobre um cilindro fixo, para números de Reynolds 40, 100, 200, 500 e 1000. Para os dois últimos, foi utilizada a simulação das grandes escalas da turbulência, capaz de capturar corretamente a esteira turbulenta gerada à jusante do cilindro nestes. Vale ressaltar que apenas no caso de Reynolds 40 os vórtices gerados não se desprendem. Já para todos os outros casos simulados, para números de Reynolds maiores que 100, há o desprendimento de vórtices e a formação da esteira de von Kármán.

Além disso, foram realizados dois estudos de convergência de malha simulando o caso do cilindro fixo com escoamento com número de Reynolds igual a 1000. Inicialmente, três malhas com quantidades de pontos diferentes foram geradas e seus resultados analisados e comparados. Após esta análise, decidiu-se aumentar o tamanho do domínio,

efetivamente dobrando o mesmo, e mudar os parâmetros de geração da malha para que mais pontos desta estivessem concentrados na região à jusante do corpo, onde estará presente a esteira turbulenta. Novamente, os resultados foram analisados e comparados com os anteriores e escolheu-se uma malha para ser utilizada nas simulações para o cilindro rígido elasticamente montado, onde esperamos ter um bom equilíbrio entre custo computacional e precisão dos resultados obtidos.

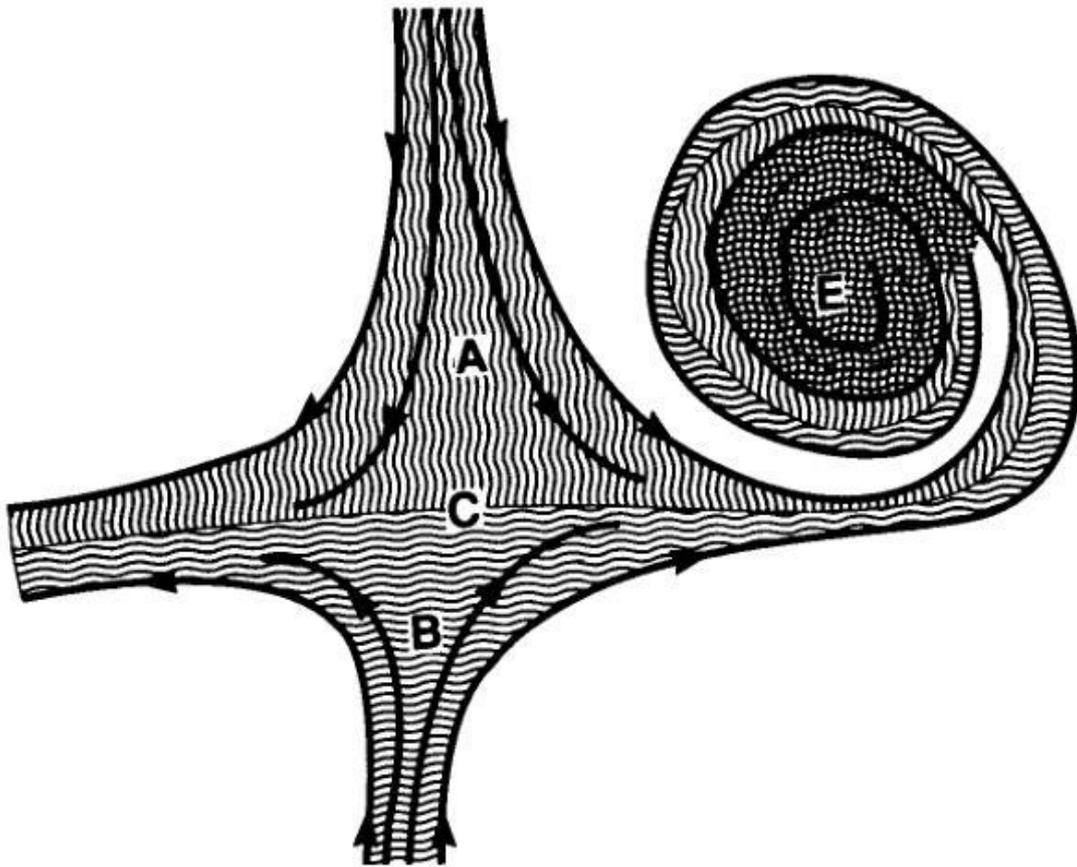
### **1.3 Revisão da Literatura**

A seguir, serão apresentados pequenos resumos dos principais artigos científicos e dissertações que foram utilizados como referências para elaboração do presente trabalho, além de terem sido essenciais para um melhor entendimento do que já foi pesquisado e de que resultados já foram obtidos nas diversas áreas de pesquisa envolvendo a vibração induzida por vórtices, tanto através de análises experimentais quanto numéricas.

FENG (1968) investigou a frequência de liberação de vórtices, a amplitude de oscilação e o ângulo de fase em escoamento incidindo em cilindros com seção circular e seção em forma de D livres para vibrar na direção transversal ao escoamento através de experimentos realizados em um túnel de vento. O fenômeno foi investigado para diferentes valores de amortecimento, que foram alterados através da utilização de amortecedores magnéticos, e coeficientes de sustentação foram obtidos para diferentes velocidades do escoamento, tanto para o caso do cilindro fixo quanto vibrando. Dos resultados obtidos por FENG (1968), destacam-se a maior amplitude de oscilação no cilindro de seção em forma de D quando comparado ao cilindro de seção circular; para os dois tipos de cilindro a variação do ângulo de fase é praticamente a mesma para qualquer grau de amortecimento imposto ao sistema; a distância entre os cilindros e o topo ou fundo do túnel de vento possuem influência considerável nas linhas de vórtices obtidas nos experimentos; de maneira geral, tanto para o caso do cilindro estacionário quanto para o caso do cilindro livre para vibrar na direção transversal, a esteira observada é altamente tridimensional.

HUNT, WRAY E MOIN (1988) apresentaram o conceito de Q-criterion, o Critério-Q, aqui utilizado como uma ferramenta matemática de identificação de vórtices em um escoamento. HUNT, WRAY E MOIN (1988) caracterizaram as regiões espaciais em um

escoamento como mostra a Figura 2, retirada de seu trabalho, em zonas de vórtices (zonas E), zonas de convergência (zonas C) e zonas de transmissão, representadas na Figura 2 pelas letras A e B. A formulação matemática utilizada para definição das regiões será discutida mais adiante.



*Figura 2: Zonas de vórtices, convergência e transmissão*

KHALAK E WILLIAMSON (1996) realizaram estudos experimentais onde foram medidas as forças e a resposta associadas à vibração induzida por vórtices de um cilindro rígido com massa e amortecimento muito baixos. Foram investigados dois tipos de desprendimento de vórtices, paralelo e oblíquo, afim de se avaliar qual deles possui maior influência quantitativa na sustentação e no arrasto medidos. Com seu experimento, KHALAK E WILLIAMSON (1996) conseguiram detectar os dois patamares de ressonância da resposta do cilindro, denominados *upper branch* e *lower branch*, o que, quando comparado a estudos anteriores, sugere que outros pesquisadores conseguiram detectar em seus experimentos apenas o patamar mais baixo, *lower branch*. Os autores também identificaram em seu trabalho a dependência que a amplitude máxima do

movimento e as regiões de transição entre os *branches* de resposta possuem com parâmetro de massa adimensional,  $m^*$ .

Em KHALAK E WILLIAMSON (1997a) são apresentados novos resultados para o estudo de um cilindro circular rígido elasticamente montado e livre para oscilar na direção transversal ao escoamento, considerando novamente tanto o amortecimento quanto a massa bem pequena. Neste estudo, os autores conseguem distinguir quatro regiões na curva de resposta do cilindro, caracterizando assim mais duas regiões além das já identificadas em KHALAK E WILLIAMSON (1996). As quatro regiões distintas da resposta são então denominadas região de excitação inicial, o *upper branch* (ou ramificação superior numa tradução livre), onde a amplitude de resposta é a maior, o *lower branch*, onde a amplitude de resposta é moderada e a região de *desynchronization*, ou de desacoplamento. Os autores notaram também um comportamento de histerese quando do aumento da velocidade reduzida na transição para o *upper branch* enquanto que na transição para o *lower branch* há um comportamento intermitente na amplitude de movimento do cilindro. Além disso, os autores detectaram comportamentos diferentes na amplitude de resposta do movimento do cilindro dependendo se o experimento era realizado aumentando-se a velocidade reduzida ou a diminuindo.

Mais uma vez em KHALAK E WILLIAMSON (1997b), os autores estudaram o movimento de um cilindro circular rígido elasticamente montado livre para oscilar em uma direção, com pequenos valores para massa e amortecimento no sistema, entretanto, neste estudo foram investigados os efeitos da massa e do amortecimento de maneira independentes. Isso foi realizado variando-se sistematicamente as razões de massa e amortecimento dentro de uma faixa de variação de 0,006 até 0,030 do coeficiente de massa-amortecimento,  $m^*\zeta$ . Foi identificado que o intervalo de excitação do sistema bem como a forma que a curva de resposta apresenta é bem caracterizada apenas pela razão de massa  $m^*$  enquanto que o patamar de excitação máxima no *upper branch* é bem caracterizado pelo coeficiente de massa-amortecimento,  $m^*\zeta$ .

MENEGHINI, SALTARA e BEARMAN (1997) investigaram numericamente a interação entre o movimento de oscilação e a liberação de vórtices de um cilindro circular livre para vibrar na direção transversal ao escoamento para uma faixa de velocidade reduzida variando entre 2 e 14. As equações de Navier-Stokes foram resolvidas utilizando um operador de separação para que convecção e difusão pudessem ser tratadas

independentemente. Os autores não utilizaram um modelo de turbulência em suas simulações, visto que simularam o caso de Reynolds igual a 200 onde a esteira ainda é considerada laminar e realizaram a variação da velocidade reduzida alterando o período de oscilação na simulação. A maior amplitude de oscilação obtida (para velocidade reduzida igual a 5) foi compatível com a amplitude obtida por KHALAK e WILLIAMSON (1996) para o *lower branch* e, para todas as velocidades reduzidas simuladas, o comportamento de liberação de vórtices foi característico do modo 2S.

Em NORBERG (2003) o autor faz uma revisão de investigações anteriores sobre a oscilação da força de sustentação atuante em um cilindro circular fixo submetido a um escoamento perpendicular. Além disso, o autor apresenta novos dados experimentais, especialmente sobre os efeitos do número de Reynolds nos casos de um cilindro infinitamente longo e de um cilindro não confinado em um escoamento incidente suave. A faixa de número de Reynolds na qual os experimentos foram realizados varia do início do fenômeno de liberação de vórtices até o regime subcrítico, ou seja, a variação ocorreu entre número de Reynolds igual a 47 e  $2 \times 10^5$ . Os coeficientes de sustentação foram calculados através da integração do R.M.S da pressão sobre a circunferência do cilindro e observou-se um aumento de 10 vezes destes entre os números de Reynolds  $1,6 \times 10^3$  e  $20 \times 10^3$ . Dois modos de liberação de vórtices turbulentos foram identificados por NORBERG (2003), são eles o modo de alta qualidade e modo de baixa qualidade. A transição identificada pelo autor do modo de alta qualidade para o modo de baixa qualidade se deu na faixa de Reynolds igual a  $5 \times 10^3$  e  $8 \times 10^3$ .

WANDERLEY *et. al* (2008) também estudaram a vibração induzida por vórtices em um cilindro circular elasticamente montado através de uma simulação numérica bidimensional, utilizando um esquema Roe-Sweby para resolver as equações URANS (Unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes) levemente compressíveis escritas em coordenadas curvilíneas além de utilizar o modelo de turbulência  $k-\varepsilon$  para simular o escoamento turbulento à jusante do cilindro. Os resultados obtidos tiveram grande concordância com resultados experimentais, como por exemplo, para a simulação com número de Reynolds igual a 1000, os resultados obtidos para  $C_d$ ,  $C_l$  e  $St$  foram iguais a 0,96, 0,22 e 0,193, respectivamente.

A vibração induzida por vórtices em um cilindro circular com baixo parâmetro de massa-amortecimento e baixo número de Reynolds foi investigada por WANDERLEY E

SOARES (2015) através de estudos numéricos. Os pesquisadores utilizaram um esquema upwind TVD (diminuição da variação total) e o modelo de turbulência  $k-\varepsilon$  afim de se obter uma solução para as equações URANS (Unsteady Reynolds-Averaged Navier-Stokes), e simularam ainda casos para velocidade reduzida variando de 2 a 12 e para seis casos com número de Reynolds fixo e três com Reynolds variando. Os resultados indicaram que a amplitude da resposta, a frequência da resposta e o coeficiente de sustentação possuem grande dependência ao número de Reynolds para um baixo parâmetro de massa-amortecimento.

CARUSO NETO (2012) realizou simulações numéricas em sua dissertação de mestrado sobre o escoamento ao redor de um cilindro circular próximo a uma placa plana. A simulação se deu considerando um esquema de diferenças finitas conservativo e a diminuição da variação total (TVD) utilizando o método Quimera de divisão do domínio a fim de se resolver as equações URANS (Unsteady Reynolds-averaged Navier-Stokes), além de utilizar o modelo de turbulência  $k-\varepsilon$  para simular o escoamento turbulento na esteira gerada pelo cilindro. O trabalho contemplou diversos números de Reynolds e várias razões de afastamento ( $G/D$ ) entre o cilindro e a placa plana, obtendo resultados para os coeficientes de força de sustentação e arrasto além de identificar que a razão crítica de afastamento é função do número de Reynolds.

## **1.4 Estrutura da dissertação**

A seguir, fazemos uma breve descrição de como delineamos a pesquisa realizada no presente texto deste estudo.

No capítulo 2, iremos desenvolver a formulação matemática usada no estudo, utilizando como foco o caso do cilindro rígido livre para vibrar com um grau de liberdade, neste caso na direção transversal à direção do escoamento, e falando das equações governantes do fenômeno, do movimento do cilindro e da Simulação das Grandes Escalas da Turbulência.

Já no capítulo 3, mostraremos a formulação numérica utilizada para o caso do cilindro circular rígido elasticamente montado com um grau de liberdade, além de apresentarmos a malha computacional usada, seus parâmetros, as condições de contorno utilizadas nos dois casos e um estudo de convergência de malha, onde um total de 6 malha distintas

foram utilizadas em uma simulação para o cilindro fixo e número de Reynolds igual a 1000 e onde a que apresentou o melhor custo benefício entre custo computacional e precisão nos resultados foi a escolhida.

No capítulo 4, apresentaremos os resultados das simulações para o cilindro fixo que tem como intuito validar a metodologia utilizada na dissertação para realização das simulações e seus resultados apresentados no capítulo anterior.

No capítulo 5, apresentaremos os resultados obtidos nas simulações do cilindro elasticamente montado comparando as respostas em amplitude, frequência e fase em função da velocidade reduzida com outros resultados experimentais e numéricos já consagrados.

No capítulo 6, as conclusões e propostas de trabalhos futuros são apresentadas.

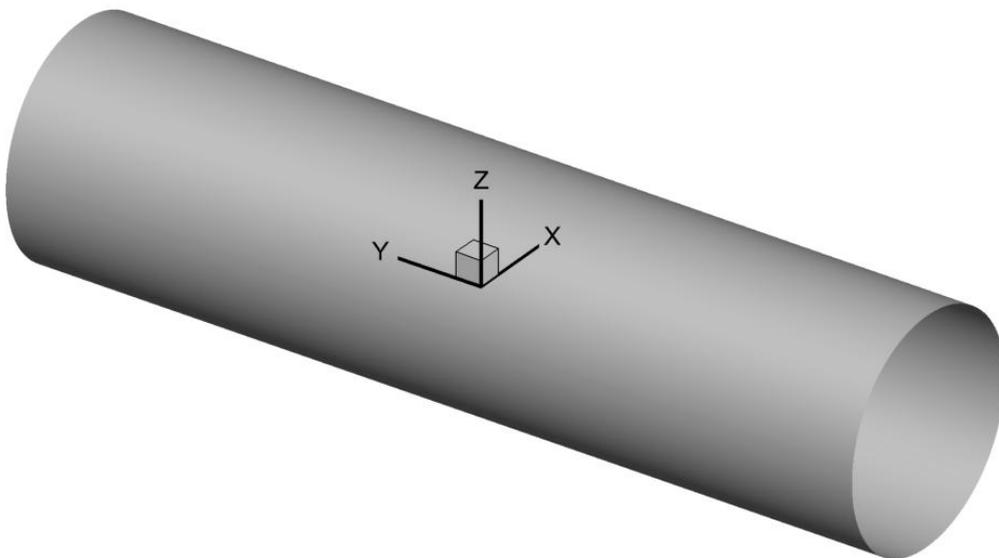
## 2. Formulação Matemática

Esta seção será dividida em duas partes, a primeira apresentando o sistema de coordenadas tridimensional utilizado e sua origem e a segunda apresentando a formulação matemática para o caso do cilindro elasticamente montado, as equações governantes neste e a formulação da equação de movimento para um cilindro rígido elasticamente montado com um grau de liberdade.

### 2.1 Sistema de Coordenadas

No presente estudo, será usado um sistema de coordenadas tridimensional  $(x,y,z)$  que tem sua origem no centro do cilindro com a coordenada  $x$  crescendo na direção do escoamento a jusante do cilindro, a coordenada  $y$  crescendo ao longo do eixo do cilindro e a coordenada  $z$  crescendo na direção normal ao escoamento para cima.

Sistema de Coordenadas



**Figura 3:** Sistema de coordenadas  $(x,y,z)$  utilizado no estudo.

## 2.2 Cilindro Elasticamente Montado

### 2.2.1 Equações Governantes

O movimento de fluidos Newtonianos em meios contínuos pode ser modelado através das equações de Navier-Stokes. Para um escoamento incompressível, estas são formadas pela equação da conservação de massa, também chamada de equação da continuidade, e por três equações de quantidade de movimento, mostradas em suas formas cartesianas e não conservativas a seguir

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \quad (2.2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \quad (2.4)$$

onde as componentes do tensor de tensões viscosas são iguais a

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_{xy} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & \tau_{yz} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \tau_{zx} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), & \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Estas equações foram desenvolvidas no início do século XIX, de forma independente, por G. G. Stokes, na Inglaterra e M. Navier, na França. As equações são consideradas uma extensão das equações de Euler com a adição dos termos viscosos do escoamento, que antes estavam ausentes na formulação de Euler. Estas equações descrevem como se relacionam a pressão  $p$  e as componentes da velocidade do escoamento, sendo estas:  $u$  na direção  $x$ ,  $v$  na direção  $y$  e  $w$  na direção  $z$ . Ao considerar a equação da conservação de massa neste sistema acoplado de equações diferenciais parciais, podemos obter uma

solução, mesmo que numérica, para o problema, já que agora possuímos quatro incógnitas,  $p$ ,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , e quatro equações.

Uma das formas mais convenientes de se reescrever estas equações, considerando que será utilizado um esquema numérico para se obter uma solução para o sistema de equações, é na forma conservativa. Substituindo os tensores de tensões viscosas nas equações de quantidade de movimento, chegamos nas equações a seguir

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (2.8)$$

Reescrevendo na forma conservativa, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 + \frac{p}{\rho} - \nu u_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uv - \nu u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (uw - \nu u_z) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uv - \nu v_x) + \frac{\partial}{\partial y} \left( v^2 + \frac{p}{\rho} - \nu v_y \right) + \frac{\partial}{\partial z} (vw - \nu v_z) = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (uw - \nu w_x) + \frac{\partial}{\partial y} (vw - \nu w_y) + \frac{\partial}{\partial z} \left( w^2 + \frac{p}{\rho} - \nu w_z \right) = 0 \quad (2.11)$$

A equação da continuidade na forma conservativa é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2.12)$$

onde  $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$  e o operador diferencial é dado por  $\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$ .

Para um escoamento dito incompressível, onde as variações da massa específica são desprezíveis, ou seja,  $\partial \rho / \partial t \approx 0$  independente do escoamento ser permanente ou não, a massa específica pode ser excluída da operação do divergente, resultando em

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.13)$$

E, conseqüentemente, na forma cartesiana, em

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.14)$$

No presente estudo, iremos utilizar as equações de Navier-Stokes para um escoamento levemente compressível. A modificação feita na equação de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis mostrada anteriormente é a utilização de uma equação para o campo de pressão adequada a um escoamento com baixa compressibilidade, ou seja, que leva em consideração a compressibilidade do fluido mesmo que esta seja bem pequena, no lugar da equação da continuidade.

Para obtermos a equação do campo de pressão é preciso combinar a equação da continuidade compressível e a definição da compressibilidade isotérmica, dadas respectivamente por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (2.15)$$

$$\tau = \left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_T \quad (2.16)$$

onde

$$\tau = \begin{cases} 10^{-5} \text{ m}^2/\text{N}, \text{ no ar } (p = 1 \text{ atm}) \\ 5 \times 10^{-10} \text{ m}^2/\text{N}, \text{ na água } (p = 1 \text{ atm}) \end{cases}$$

A equação da compressibilidade isotérmica pode ser reescrita em

$$\tau = \left. \frac{\partial}{\partial p} [\ln(\rho)] \right)_T \quad (2.17)$$

Ao considerarmos escoamentos isotérmicos, onde a densidade é uma função apenas da pressão, onde apenas ocorram pequenas variações da pressão no escoamento, ou seja, considerar que o coeficiente de compressibilidade isotérmica é constante, a integração da equação acima resulta em

$$\rho = \rho_\infty e^{\tau(p-p_\infty)} \quad (2.18)$$

Através de uma expansão em série de Taylor da equação acima obtemos

$$\rho = \rho_\infty \left[ 1 + \tau(p - p_\infty) + \frac{1}{2} \tau^2 (p - p_\infty)^2 + \dots \right] \quad (2.19)$$

Ao considerarmos apenas os termos de primeira ordem da expansão em série de Taylor e substituírmos na equação da continuidade compressível obtemos

$$\frac{\partial \tau p}{\partial t} + \frac{\partial \tau p u}{\partial x} + \frac{\partial \tau p v}{\partial y} + \frac{\partial \tau p w}{\partial z} = -(1 - \tau p_{\infty}) \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.20)$$

Através das relações adimensionais a seguir, podemos adimensionalizar a Equação 2.20 acima

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{a_{\infty}}, & v^* &= \frac{v}{a_{\infty}}, & w^* &= \frac{w}{a_{\infty}} \\ x^* &= \frac{x}{L}, & y^* &= \frac{y}{L}, & z^* &= \frac{z}{L} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$p^* = \tau p = \frac{p}{\rho_{\infty} a_{\infty}^2}, \quad t^* = \frac{t}{L/a_{\infty}}, \quad a_{\infty} = \sqrt{\frac{1}{\rho_{\infty} \tau}}$$

Resultando na seguinte equação

$$\frac{\partial p^*}{\partial t^*} + \frac{\partial p^* u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial p^* v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial p^* w^*}{\partial z^*} = -(1 - p_{\infty}^*) \nabla \cdot \vec{v}^* \quad (2.22)$$

A fim de deixar a notação mais simples, vamos suprimir o uso do símbolo asterisco na representação das variáveis adimensionais obtendo

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial p w}{\partial z} = -(1 - p_{\infty}) \nabla \cdot \vec{v} \quad (2.23)$$

Como uma simplificação adicional da equação acima iremos considerar a pressão do escoamento livre (*free stream*) sendo igual a unidade, ou seja,  $p_{\infty} = 1$ . Assim, a equação a que chegamos é dada pela Equação 2.24.

Ao acoplarmos a Equação 2.24 com as três equações da quantidade de movimento incompressíveis a seguir obtemos as equações de Navier-Stokes para escoamentos levemente compressíveis que serão usadas no presente estudo

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} + \frac{\partial p w}{\partial z} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 + \frac{p}{\rho} - \nu u_x \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uv - \nu u_y) + \frac{\partial}{\partial z} (uw - \nu u_z) = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uv - vv_x) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^2 + \frac{p}{\rho} - vv_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}(vw - vv_z) = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uw - vw_x) + \frac{\partial}{\partial y}(vw - vw_y) + \frac{\partial}{\partial z}\left(w^2 + \frac{p}{\rho} - vw_z\right) = 0 \quad (2.11)$$

Este sistema de equações diferenciais parciais pode ser reescrito por uma equação na forma conservativa e vetorial, o que é muito conveniente para a solução de problemas numéricos. Tal equação é formada por um vetor de variáveis conservadas,  $Q$ , e por vetores de fluxos viscosos, com subscrito  $v$ , e vetores de fluxo não-viscosos, com subscrito  $e$ , e dada por

$$Q_t + (E_e - E_v)_x + (F_e - F_v)_y + (G_e - G_v)_z = 0 \quad (2.25)$$

onde

$$Q = \begin{Bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

$$E_e = \begin{Bmatrix} pu \\ u^2 + p \\ uv \\ uw \end{Bmatrix} \quad E_v = \frac{M_\infty}{Re_L} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_x \\ v_x \\ w_x \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

$$F_e = \begin{Bmatrix} pv \\ vu \\ v^2 + p \\ vw \end{Bmatrix} \quad F_v = \frac{M_\infty}{Re_L} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_y \\ v_y \\ w_y \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

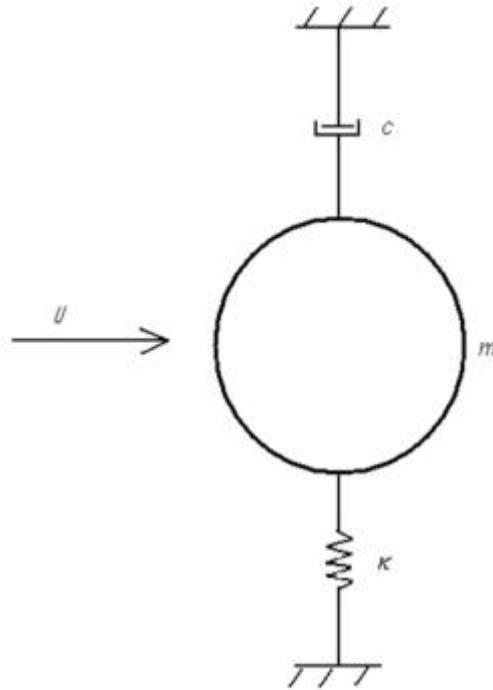
$$G_e = \begin{Bmatrix} pw \\ wu \\ wv \\ w^2 + p \end{Bmatrix} \quad G_v = \frac{M_\infty}{Re_L} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_z \\ v_z \\ w_z \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

$$M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty} = 0,2 \quad Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu_\infty} = n^\circ \text{ de Reynolds} \quad (2.30)$$

### 2.2.2 Formulação da Equação do Movimento

Para estudarmos o caso do cilindro elasticamente montado com um grau de liberdade faremos uso da teoria da vibração, que trata dos movimentos oscilatórios e das eventuais forças a eles associadas.

Inicialmente, iremos considerar o cilindro livre para vibrar em apenas uma direção, neste caso, a direção ortogonal à direção de propagação do escoamento incidindo sobre o cilindro. Iremos tratar este arranjo de forma equivalente a um sistema massa/mola/amortecedor com um grau de liberdade como mostra a Figura 4.



**Figura 4:** Vista lateral de um esquemático de um cilindro circular elasticamente montado com um grau de liberdade

O sistema acima é definido como um sistema com um grau de liberdade, pois apenas através da coordenada  $z_b$ , que descreve a posição do centro do cilindro, inicialmente igual a zero e posicionada em  $(0,0,0)$ , é possível determinarmos todas as posições do sistema em qualquer instante de tempo.

Dois parâmetros importantes que caracterizam a resposta do sistema no caso em que estamos estudando são a razão de massa do sistema, razão entre a massa do sistema e a massa de fluido deslocado pelo corpo, e a razão de amortecimento, que é a razão entre o amortecimento do sistema e seu amortecimento crítico). Como caracterizado no Capítulo 1, a razão de massa será identificada por  $m^*$  e a razão de amortecimento identificada por  $\zeta$ .

O fator combinado de massa e amortecimento,  $m^*\zeta$ , possui forte impacto na obtenção da resposta de amplitude e frequências do movimento do cilindro. KHALAK e WILLIAMSON (1999) mostram que para um fator de massa-amortecimento  $m^*\zeta$  muito pequeno, três modos de resposta são identificados na resposta de amplitude x velocidade reduzida, a ramificação inicial, a superior e a inferior (*initial, upper and lower branches*). Já para valores do fator de massa-amortecimento  $m^*\zeta$  muito altos, são identificadas apenas duas ramificações de resposta, a inicial e a inferior. Além disso, o valor máximo da amplitude de resposta nestes sistemas depende principalmente do fator de massa-amortecimento  $m^*\zeta$ , enquanto que no regime de *lock-in*, ou sincronização, a dependência é caracterizada principalmente pela razão de massa  $m^*$ .

KHALAK e WILLIAMSON (1996) mostram em sua investigação que os fatores de razão de massa e razão de amortecimento também influenciam a resposta do sistema de forma independente, dando ênfase à dependência da amplitude de resposta da ramificação inferior à razão de massa  $m^*$ , além de mostrar que esta mesma razão de massa tem um papel importante nas transições de ramificação na curva de resposta. Estes resultados foram obtidos mantendo-se constante o fator de massa-amortecimento  $m^*\zeta$  e variando os valores de  $m^*$  e  $\zeta$ , ou seja, utilizando um valor baixo de  $m^*$  com um valor alto de  $\zeta$  e vice-versa, a fim de se obter o mesmo valor de  $m^*\zeta$ .

No presente estudo, utilizou-se o fator de massa-amortecimento  $m^*\zeta$  considerado pequeno e igual a 0,013 com o intuito de reproduzir os resultados obtidos anteriormente por KHALAK e WILLIAMSON (1996) e comparar com outros estudos numéricos que utilizaram este mesmo valor, como por exemplo o realizado por WANDERLEY *et. al* (2008).

Para calcularmos a posição do corpo em qualquer instante do tempo, neste caso a cada iteração da simulação, é preciso considerar as forças atuantes no sistema com um grau de liberdade submetido à vibração com amortecimento.

Considerando a força de amortecimento  $F$ , proporcional à velocidade  $\dot{z}$  ou  $w$ , temos

$$F = -c\dot{z} \quad (2.31)$$

onde  $c$  é a constante de amortecimento ou coeficiente de amortecimento.

Considerando  $z$  a medida em relação à posição de equilíbrio do cilindro, quando aplicamos a segunda lei de Newton obtemos a equação do movimento

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = 0 \quad (2.32)$$

onde  $m$  é a massa do cilindro,  $\ddot{z}$  é a aceleração do cilindro,  $k$  é a rigidez do sistema e  $z$  o deslocamento do cilindro.

No presente estudo, ainda é necessário considerar a força de sustentação gerada pela liberação de vórtices atuando no sistema, o que modifica o lado direito da equação do movimento nos dando

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = F_z \quad (2.33)$$

A seguir, a adimensionalização da equação acima será realizada para que a mesma possa ser compatível com as equações governantes normalizadas mostradas no item 3.2 anterior.

Inicialmente, iremos dividir todos os termos da equação do movimento pela massa  $m$

$$\ddot{z} + \frac{c}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_z}{m} \quad (2.34)$$

O próximo passo é utilizar a definição de amortecimento adimensional

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (2.35)$$

juntamente com a definição do coeficiente de sustentação

$$C_L = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL} \quad (2.36)$$

e substituir na Equação 2.36, obtendo

$$\ddot{z} + \frac{2\zeta\sqrt{km}}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{C_L\rho U^2 DL}{2m} \quad (2.37)$$

Ao utilizarmos o conceito da frequência natural angular dada por

$$\omega_{na} = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.38)$$

a Eq. (2.37) passa a ser escrita por

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_{na}\dot{z} + \omega_{na}^2 z = \frac{C_L\rho U^2 DL}{2m} \quad (2.39)$$

Com a razão entre a massa do cilindro e a massa de fluido deslocado é dada por

$$m^* = \frac{m}{m_d} = \frac{4m}{\pi D^2 L \rho} \quad (2.40)$$

é possível simplificar a equação anterior e obter

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n\dot{z} + \omega_n^2 z = \frac{2C_L U^2}{\pi D m^*} \quad (2.41)$$

Para adimensionalizar a aceleração, velocidade e deslocamento foram utilizadas as seguintes transformações adimensionais

$$\ddot{z} = \frac{U^2}{D} \ddot{Z} \quad \dot{z} = U \dot{Z} \quad z = DZ \quad (2.42)$$

Assim, ao substituírmos na equação diferencial, obtemos

$$\frac{U^2}{D} \ddot{Z} + 2\zeta\omega_n U \dot{Z} + \omega_n^2 DZ = \frac{2C_L U^2}{\pi D m^*} \quad (2.43)$$

Com o intuito de simplificar a notação, voltaremos a utilizar algarismos minúsculos para denotar a aceleração, a velocidade e o deslocamento na equação diferencial. Além disso, será realizada uma simples manipulação algébrica na equação, onde todos os termos serão divididos pelo coeficiente que está multiplicando a aceleração, e assim obtemos

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n \frac{D}{U^2} U \dot{z} + \omega_n^2 \frac{D}{U^2} Dz = \frac{D}{U^2} \frac{2C_L U^2}{\pi D m^*} \quad (2.44)$$

Após a simplificação da equação anterior, temos

$$\ddot{z} + 2\zeta\omega_n \frac{D}{U} \dot{z} + \omega_n^2 \frac{D^2}{U^2} z = \frac{2C_L}{\pi m^*} \quad (2.45)$$

Ao utilizarmos a expressão da velocidade reduzida adimensional,  $U_R = \frac{U}{f_n D}$ , para substituírmos os termos  $U$  na equação, obtemos

$$\ddot{z} + \frac{2\zeta\omega_n D}{U_r f_n D} \dot{z} + \frac{\omega_n^2 D^2}{(U_r f_n D)^2} z = \frac{2C_L}{\pi m^*} \quad (2.46)$$

Novamente, após a simplificação dos termos da equação, temos

$$\ddot{z} + \frac{2\zeta\omega_n}{U_r f_n} \dot{z} + \frac{\omega_n^2}{(U_r f_n)^2} z = \frac{2C_L}{\pi m^*} \quad (2.47)$$

Ao utilizarmos o conceito da frequência natural do sistema onde  $\omega_n = 2\pi f_n$ , a equação acima passa a ser escrita por

$$\ddot{z} + \frac{2\zeta 2\pi f_n}{U_r f_n} \dot{z} + \frac{(2\pi f_n)^2}{(U_r f_n)^2} z = \frac{2C_L}{\pi m^*} \quad (2.48)$$

Mais uma vez, após as devidas simplificações, obtemos

$$\ddot{z} + \frac{4\pi\zeta}{U_r} \dot{z} + \frac{4\pi^2}{U_r^2} z = \frac{2C_L}{\pi m^*} \quad (2.49)$$

E assim, chegamos à equação do movimento para um cilindro elasticamente montado com um grau de liberdade na sua forma mais compacta e adimensional, como pode ser visto na Eq. (2.50), onde ressaltamos que a massa adicional está incluída no coeficiente de sustentação.

$$\ddot{z} + C_\zeta \dot{z} + C_k z = \frac{C_L}{2C_\mu} \quad (2.50)$$

onde

$$C_\zeta = \frac{4\pi\zeta}{U_r} \quad C_k = \frac{4\pi^2}{U_r^2} \quad C_\mu = \frac{m}{\rho D^2 L} \quad C_L = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho U^2 D L} \quad (2.51)$$

### 2.2.3 Simulação das Grandes Escalas da Turbulência

Para modelar o escoamento turbulento na esteira do corpo foi utilizada a simulação das grandes escalas da turbulência, também chamada em inglês de *Large Eddy Simulation* (LES). Como o próprio nome sugere, a LES representa as grandes escalas da turbulência,

que são não permanentes e tridimensionais, diretamente, enquanto os efeitos dissipativos das pequenas escalas são modelados. No presente estudo, foi utilizado para representar os efeitos dissipativos das pequenas escalas o modelo algébrico de SMAGORINSK (1963).

Quando comparamos o custo computacional, a Simulação das Grandes Escalas da Turbulência encontra-se entre os modelos de tensões de Reynolds (*Reynolds-stress models*), que requerem menos esforço computacional, e a Simulação Numérica Direta (*Direct Numerical Simulation* ou DNS), que requer mais esforço computacional. Por exemplo, é esperado que a Simulação das Grandes Escalas da Turbulência seja mais precisa e confiável do que os modelos de tensões de Reynolds em casos que simulam escoamentos ao redor de corpos rombudos, que envolvem separação instável e liberação de vórtices, pois as grandes escalas de turbulência, que são muito significantes nestes tipos de escoamentos, estarem sendo diretamente representadas.

Adicionalmente, o custo computacional que a Simulação Numérica Direta impõe ainda é muito grande, visto que o custo computacional da DNS aumenta com o cubo do número de Reynolds, tornando inviável o estudo dos escoamentos com grandes números de Reynolds citados. Além disso, o grande esforço computacional utilizado para representar as pequenas escalas na Simulação Numérica Direta é inexpressivo na Simulação das Grandes Escalas da Turbulência por esta fazer uso de modelos algébricos simples para representar os efeitos dissipativos das pequenas escalas de turbulência, o que no presente estudo foi feito através do modelo algébrico de SMAGORINSK (1963).

O conceito mais relevante da Simulação das Grande Escalas da Turbulência é a operação de filtragem das propriedades do escoamento. Tomando como exemplo um escoamento unidimensional  $U(x, t)$ , uma operação de filtragem ocorre a fim de se decompor o campo de velocidade original no somatório de dois componentes, um campo filtrado, dado por  $\bar{U}(x, t)$  e um resíduo, dado por  $u'(x, t)$ . Assim, a representação das grandes escalas se dá através do campo de velocidades filtrado  $\bar{U}(x, t)$ .

De maneira geral, a operação de filtragem é definida, de acordo com LEONARD (1974), por

$$\bar{U}(x, t) = \int G(r, x)U(x - r, t)dr \quad (2.52)$$

onde a integração ocorre em todo o domínio da simulação e a função de filtragem  $G$  precisa satisfazer a condição de normalização dada por

$$\int G(r, x) dr = 1 \quad (2.53)$$

Considerando o caso mais simples, onde a função de filtragem  $G$  é independente de  $x$ , ou seja, é homogênea, o campo do resíduo é definido por

$$u'(x, t) \equiv U(x, t) - \bar{U}(x, t) \quad (2.54)$$

E então o campo de velocidades pode ser decomposto em

$$U(x, t) = \bar{U}(x, t) + u'(x, t) \quad (2.55)$$

Apesar desta decomposição ser semelhante a decomposição de Reynolds é preciso frisar que o campo de velocidades filtrado  $\bar{U}(x, t)$  é um campo aleatório e que normalmente o resíduo do filtro é diferente de zero, ou seja,

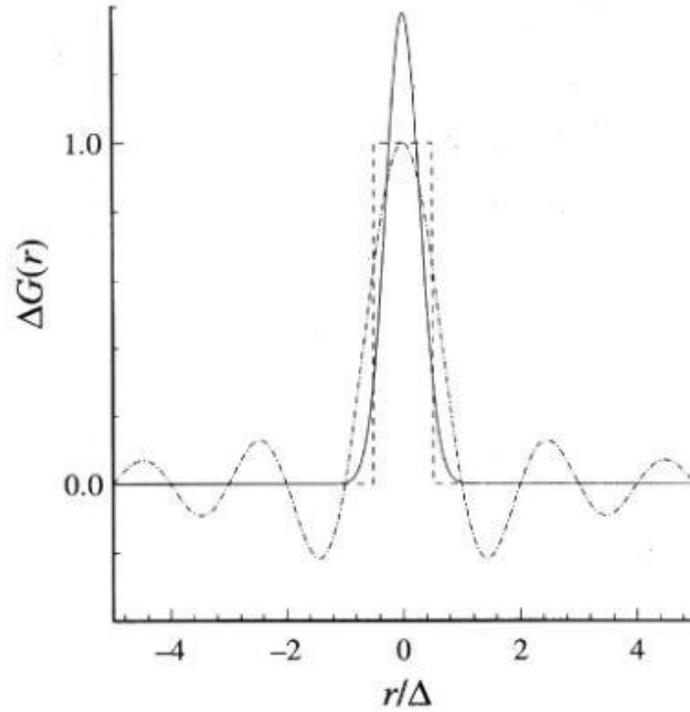
$$\bar{u}'(x, t) \neq 0 \quad (2.56)$$

Diversos filtros podem ser matematicamente modelados, assim como suas funções de transferência equivalentes e alguns destes, como os filtros do tipo Caixa, Gaussiano e Espectro Agudo, são mostradas na Figura 5, retirada de POPE (2000).

Todos os filtros em uma dimensão podem ser extrapolados e usados em três dimensões, como é o caso do filtro Caixa, por exemplo, que se torna uma média do volume da esfera de raio  $\frac{1}{2}\Delta$ , onde  $\Delta$  é a largura característica do filtro, que no presente estudo é proporcional aos espaçamentos  $\Delta_i$ ,  $\Delta_j$  e  $\Delta_k$  da malha, nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

Assim, o filtro utilizado no presente estudo é dado por

$$\Delta = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\Delta_i \Delta_j \Delta_k} \quad (2.57)$$



*Figura 5 – Filtros  $G(r)$ : filtro caixa, linha tracejada; filtro Gaussiano, linha contínua; filtro Espectro Agudo, linha pontilhada e tracejada.*

Com a premissa das pequenas escalas da turbulência serem mais isotrópicas que as grandes escalas, é possível parametrizá-las utilizando um modelo algébrico simples, como é o caso do modelo algébrico de Smagorinsk. Assim, a maioria dos modelos para pequenas escalas é baseada na viscosidade turbulenta e suas propriedades, sendo o modelo algébrico de Smagorinsk um dos mais comuns. Neste modelo, assumimos que as pequenas escalas estão em equilíbrio, ou seja, assumimos que a geração de energia e a dissipação de energia são igualmente balanceadas, o que nos dá a seguinte expressão para descrever a viscosidade turbulenta

$$v_T = C_s^2 \Delta^2 |\bar{S}| \quad (2.58)$$

onde  $\Delta$  é o filtro definido anteriormente,  $C_s$  é a constante de Smagorinsk e  $|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}}$  é a magnitude do tensor taxa de deformação para as grandes escalas, sendo

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.59)$$

onde  $\bar{u}_i$  é a componente na direção  $i$  do campo de velocidade  $U(x, y, z, t)$ .

Como sugerido por Germano (1991) o valor utilizado para a constante de Smagorinsk foi de  $C_s = 0,1$ . O cálculo detalhado da viscosidade turbulenta é descrito mais à frente no Capítulo 4.

Assim, as equações governantes são obtidas através da filtragem das equações de Navier-Stokes através de uma operação de média de volume. BUI (2000) mostra que as equações da continuidade e de momento filtradas são dadas por

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}^2 + \bar{p})}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w}}{\partial z} - \left[ \frac{\partial \tilde{\tau}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial z} \right] + \left[ \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.61)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v}}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}^2 + \bar{p})}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w}}{\partial z} - \left[ \frac{\partial \tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial z} \right] + \left[ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}\tilde{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w}}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{w}^2 + \bar{p})}{\partial z} - \left[ \frac{\partial \tilde{\tau}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{zz}}{\partial z} \right] + \left[ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right] = 0 \quad (2.63)$$

onde o tensor de tensões viscosas é dado por

$$\tilde{\tau}_{ij} = \mu \left[ \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right] \quad (2.64)$$

A barra nas variáveis das equações da Simulação das Grandes Escalas da Turbulência, Eqs. (2.60) até (2.64), denotam as quantidades filtradas ou quantidades das grandes escalas do escoamento, definidas por

$$\bar{f} = \int_{Dm} G(\vec{x} - \vec{x}') f(\vec{x}') d\vec{x}' \quad (2.65)$$

onde a integral é avaliada sobre todo o domínio,  $Dm$ , e  $G$  é o filtro espacial utilizado. Além disso, o til sobre as variáveis das Eqs (2.60) até (2.64) representa variáveis ponderadas pela densidade, definidas por

$$\tilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} \quad (2.66)$$

As equações da Simulação das Grandes Escalas da Turbulência são, na verdade, a equação da continuidade e de momento filtradas escritas em função das variáveis filtradas

e adicionadas, no caso das equações do momento, dos termos de pequena escala. Tais termos são definidos por

$$\sigma_{kl} = \bar{\rho}(\overline{u_k u_l} - \tilde{u}_k \tilde{u}_l) \quad (2.67)$$

Através do uso da função de transferência definida por PAO (1965), estes termos são aproximados, para o caso de pequenos números de Mach, de acordo com BUI (2000) por

$$\sigma_{kl} = -\bar{\rho} C_s^2 \Delta^2 |\tilde{S}| \left( 2\tilde{S}_{kl} - \frac{2}{3} \tilde{S}_{jj} \delta_{kl} \right) \quad (2.68)$$

onde  $C_s$  é a constante de Smagorinsk.

O tensor gradiente da velocidade filtrada é dado por

$$\tilde{S}_{kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_l} + \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_k} \right) \quad (2.69)$$

e

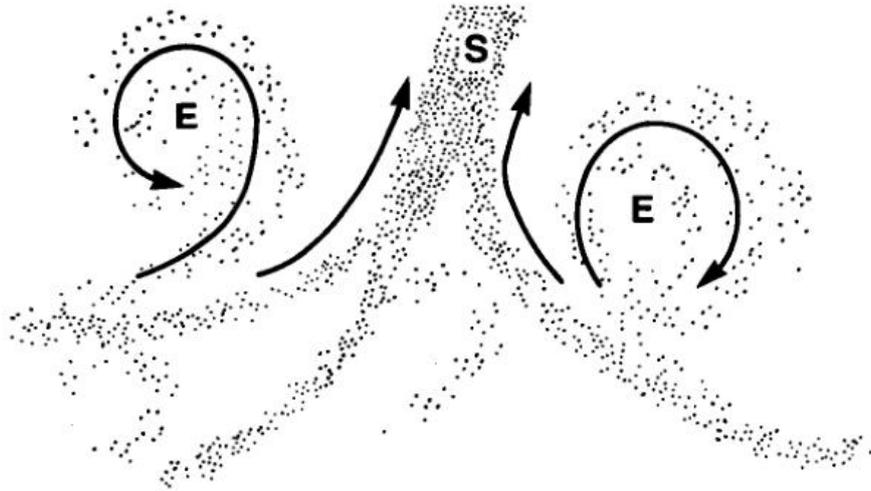
$$|\tilde{S}| = \left( 2\tilde{S}_{kl} \tilde{S}_{kl} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.70)$$

#### 2.2.4 Critério Q (Q-Criterion)

O critério Q teve sua formulação e apresentação em HUNT, WRAY E MOIN (1988) que definiram as diversas regiões espaciais de um escoamento em zonas de vórtices (zonas E), zonas de convergência (zonas C) e zonas de transmissão (zonas S).

Como mostra a Figura 6 a seguir, retirada de seu trabalho, a zona E é caracterizada por vórtices, ou seja, zonas de baixa velocidade onde partículas leves costumam se concentrar. Já as zonas S, que costumam concentrar partículas mais densas no escoamento, possuem velocidade mais alta e formam as estruturas chamadas de gavinhas.

A identificação destas regiões significativas em um escoamento também pode ser considerada como um importante método para análise da dinâmica de um escoamento.



**Figura 6:** Concentração de partículas nas zonas E e S.

Grandes estruturas coerentes (vórtices ou redemoinhos) existem em um escoamento tridimensional, porém por causa da difusão da vorticidade nestas regiões ou pela diminuição da vorticidade quando vórtices interagem, é preciso que haja uma vorticidade em escalas muito menores entre os grandes vórtices. Em regiões de convergência fora dos vórtices, estas escalas menores são amplificadas, o que pode alongar ou achatam as estruturas, e a dissipação aumenta. Logo, é preciso definir as zonas de convergência e quantificar a magnitude da deformação. Isto é possível através da definição do tensor taxa de deformação, dado por:  $E_{ij}E_{ji}$ , onde  $E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  e assim temos:  $III = E_{ij}E_{jk}E_{ki}$  onde para  $III > 0$  temos o alongamento da estrutura e para  $III < 0$  temos o achatamento.

Dois critérios foram usados para a definição das zonas E, zonas de vórtices, dispostos a seguir:

- i. A deformação irrotacional é pequena quando comparada com a vorticidade, por exemplo, o segundo invariante do tensor taxa de deformação deve ser menor que um limite negativo  $-II_E$ , ou seja,  $-II < II_E$

onde  $II = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = E_{ij}^2 - \frac{1}{2} \omega_i^2$ , e  $E_{ij}$  é o tensor taxa de deformação simétrico e

$\omega_i$  é a vorticidade  $\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$ .

- ii. Se a pressão tende a um mínimo em alguma região da zona, existe um gradiente de pressão que cruza a zona definido por  $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \approx \frac{+u_s^2}{R}$ , onde R é o raio de curvatura. Esse critério pode ser aproximado por  $p_{int} < -p_{edge}$ , onde  $p_{int}$  é a pressão no interior da zona E e  $p_{edge}$  é a pressão na fronteira.

Assim, a formulação matemática do critério  $Q$  é:

$$Q = \frac{1}{2} [|\Omega|^2 - |S|^2] > 0 \quad (2.71)$$

onde, em três dimensões:

$$\Omega = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{vmatrix} \quad (2.72)$$

e

$$S = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \quad (2.73)$$

## 3. Formulação Numérica

### 3.1 Esquema Numérico

Para obtermos a solução do problema numericamente, foi criado um código computacional em FORTRAN capaz de reproduzir as características físicas do problema, ou seja, o caso de um escoamento incidindo sobre um cilindro circular rígido elasticamente montado com um grau de liberdade. O código computacional foi desenvolvido para processamento em paralelo através da implementação de MPI (*Message Passing Interface*) no código e processado em 40 núcleos de 2 processadores Intel® Xeon E5-2620@2.00Ghz.

#### 3.1.1 Equações Governantes

Para se obter a solução das equações de Navier-Stokes levemente compressíveis em três dimensões, mostradas na seção anterior, será utilizado o método de volumes finitos, com a abordagem de *Cell Vertex*. A vantagem deste método é que para uma malha computacional, ou seja, para um espaço tridimensional discretizado por poliedros, as propriedades do escoamento são definidas nos vértices dos volumes de discretização, como mostra um exemplo em três dimensões na Figura 7 a seguir:

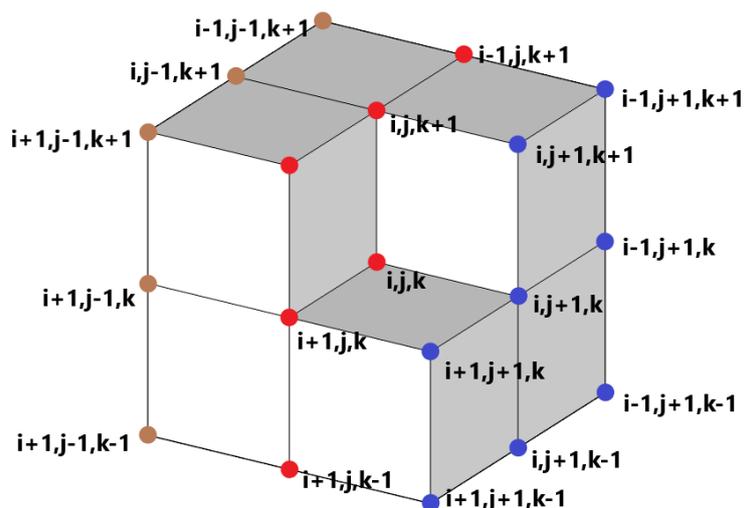


Figura 7: Volume de integração numa malha tridimensional

Como pode ser visto na Figura 7 acima, o volume de integração é composto pelos seis volumes que circundam o vértice  $(i,j,k)$ , assim, as propriedades do escoamento são conhecidas nos centroides das faces do volume de integração, sem a necessidade de algum tipo de interpolação para se obter tais propriedades nestas mesmas faces, como no caso do método de volumes finitos *Cell Centre*.

Dados os pontos da malha mostrados na Figura 7, podemos obter os vetores área S através do produto vetorial dos dois triângulos que compõem cada face. A seguir, podemos ver o resultado para a face ‘i-1’ do volume de integração

$$\begin{aligned}
\vec{S}_{i-1,j,k} = & +[(y_{i-1,j-1,k+1} - y_{i-1,j-1,k-1})(z_{i-1,j+1,k+1} - z_{i-1,j-1,k-1}) \\
& - (y_{i-1,j+1,k+1} - y_{i-1,j-1,k-1})(z_{i-1,j-1,k+1} - z_{i-1,j-1,k-1}) \\
& + (y_{i-1,j+1,k+1} - y_{i-1,j-1,k-1})(z_{i-1,j+1,k-1} - z_{i-1,j-1,k-1}) \\
& - (y_{i-1,j+1,k-1} - y_{i-1,j-1,k-1})(z_{i-1,j+1,k+1} - z_{i-1,j-1,k-1})] \hat{i} \\
& - [(x_{i-1,j-1,k+1} - x_{i-1,j-1,k-1})(z_{i-1,j+1,k+1} - z_{i-1,j-1,k-1}) \\
& - (x_{i-1,j+1,k+1} - x_{i-1,j-1,k-1})(z_{i-1,j-1,k+1} - z_{i-1,j-1,k-1}) \\
& + (x_{i-1,j+1,k+1} - x_{i-1,j-1,k-1})(z_{i-1,j+1,k-1} - z_{i-1,j-1,k-1}) \\
& - (x_{i-1,j+1,k-1} - x_{i-1,j-1,k-1})(z_{i-1,j+1,k+1} - z_{i-1,j-1,k-1})] \hat{j} \\
& + [(x_{i-1,j-1,k+1} - x_{i-1,j-1,k-1})(y_{i-1,j+1,k+1} - y_{i-1,j-1,k-1}) \\
& - (x_{i-1,j+1,k+1} - x_{i-1,j-1,k-1})(y_{i-1,j-1,k+1} - y_{i-1,j-1,k-1}) \\
& + (x_{i-1,j+1,k+1} - x_{i-1,j-1,k-1})(y_{i-1,j+1,k-1} - y_{i-1,j-1,k-1}) \\
& - (x_{i-1,j+1,k-1} - x_{i-1,j-1,k-1})(y_{i-1,j+1,k+1} - y_{i-1,j-1,k-1})] \hat{k} \quad (3.1)
\end{aligned}$$

Analogamente, conseguimos obter os vetores para as 5 outras faces do volume de integração.

O volume de cada elemento de integração da malha é dado por

$$\begin{aligned}
V_{i,j,k} = & \frac{1}{3} \{ \vec{S}_{i-1,j,k} |(x_{i,j,k} - x_{i-1,j-1,k-1})\hat{i} + (y_{i,j,k} - y_{i-1,j-1,k-1})\hat{j} + (z_{i,j,k} - \\
& z_{i-1,j-1,k-1})\hat{k}| + \vec{S}_{i+1,j,k} |(x_{i,j,k} - x_{i+1,j+1,k+1})\hat{i} + (y_{i,j,k} - y_{i+1,j+1,k+1})\hat{j} + (z_{i,j,k} - \\
& z_{i+1,j+1,k+1})\hat{k}| + \vec{S}_{i,j-1,k} |(x_{i,j,k} - x_{i-1,j-1,k-1})\hat{i} + (y_{i,j,k} - y_{i-1,j-1,k-1})\hat{j} + (z_{i,j,k} - \\
& z_{i-1,j-1,k-1})\hat{k}| + \vec{S}_{i,j+1,k} |(x_{i,j,k} - x_{i+1,j+1,k+1})\hat{i} + (y_{i,j,k} - y_{i+1,j+1,k+1})\hat{j} + (z_{i,j,k} - \\
& z_{i+1,j+1,k+1})\hat{k}| + \vec{S}_{i,j,k-1} |(x_{i,j,k} - x_{i-1,j-1,k-1})\hat{i} + (y_{i,j,k} - y_{i-1,j-1,k-1})\hat{j} + (z_{i,j,k} -
\end{aligned}$$

$$z_{i-1,j-1,k-1})\hat{k}| + \vec{S}_{i,j,k+1} |(x_{i,j,k} - x_{i+1,j+1,k+1})\hat{i} + (y_{i,j,k} - y_{i+1,j+1,k+1})\hat{j} + (z_{i,j,k} - z_{i+1,j+1,k+1})\hat{k}| \} \quad (3.2)$$

Para solucionarmos o problema do cilindro elasticamente montado com um grau de liberdade, é preciso resolver as equações de Navier-Stokes levemente compressíveis em três dimensões. Para isso, utilizaremos o método dos volumes finitos formulado de tal maneira que se considere as deformações na malha causadas pelo movimento do cilindro.

As equações de Navier-Stokes escritas na forma conservativa são, novamente, dadas por

$$Q_t + (E_e - E_v)_x + (F_e - F_v)_y + (G_e - G_v)_z = 0 \quad (3.3)$$

onde

$$Q = \begin{Bmatrix} p \\ u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

$$E_e = \begin{Bmatrix} pu \\ u^2 + p \\ uv \\ uw \end{Bmatrix} \quad E_v = \frac{M_\infty}{Re_L} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_x \\ v_x \\ w_x \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$F_e = \begin{Bmatrix} pv \\ vu \\ v^2 + p \\ vw \end{Bmatrix} \quad F_v = \frac{M_\infty}{Re_L} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_y \\ v_y \\ w_y \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

$$G_e = \begin{Bmatrix} pw \\ wu \\ wv \\ w^2 + p \end{Bmatrix} \quad G_v = \frac{M_\infty}{Re_L} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_z \\ v_z \\ w_z \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

$$M_\infty = \frac{u_\infty}{a_\infty} = 0,2 \quad Re_L = \frac{u_\infty L}{\nu_\infty} = n^\circ \text{ de Reynolds} \quad (3.8)$$

Para passarmos a Eq. (3.3) para a forma integral faremos uso do vetor  $\mathbf{P}$ , definido por

$$\vec{P} = (E_e - E_v)\hat{i} + (F_e - F_v)\hat{j} + (G_e - G_v)\hat{k} \quad (3.9)$$

Assim, a Eq. (3.3) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (3.10)$$

Ao integrarmos a Eq. (3.10) num volume de controle  $V$ , obtemos

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial t} dv = - \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dv \quad (3.11)$$

Para transformar o lado direito da Eq. (3.11) em uma integral de superfície faremos uso do teorema de Gauss, que quando aplicado à integral citada nos dá

$$\int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{P}) dv = \int_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) ds \quad (3.12)$$

Substituindo a Eq. (3.12) na Eq. (3.10), obtemos a forma integral da equação de Navier-Stokes, dada por

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial t} dv = - \int_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) ds \quad (3.13)$$

Através do uso do teorema de Leibniz, conseguimos alterar a equação anterior de modo a torná-la mais amigável para a integração numérica, conseguindo eventualmente retirar o símbolo da derivada temporal de dentro da integral do lado esquerdo da equação. O teorema de Leibniz aplicado ao vetor de variáveis conservadas é mostrado a seguir

$$\frac{d}{dt} \int_V Q dv = \int_V \frac{\partial Q}{\partial t} dv - \int_S Q \vec{w} \cdot d\vec{s} \quad (3.14)$$

Ao substituirmos a equação (3.10) na equação acima obtemos uma equação mais propícia a ser utilizada em uma simulação numérica de volumes finitos deformáveis, pois eliminamos da integral do lado direito o símbolo da derivada temporal como pode ser visto na equação a seguir

$$\frac{d}{dt} \int_V Q dv = - \int_S (\vec{P} \cdot \vec{n}) ds + \int_S Q (\vec{w} \cdot \vec{n}) ds \quad (3.15)$$

Podemos reescrever a Equação 3.15 da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \int_V Q dv = - \int_S (\vec{P} - Q \vec{w}) \vec{n} ds \quad (3.16)$$

onde a velocidade local da superfície do volume de controle é dada pelo vetor  $\mathbf{w}$ .

Como de praxe na formulação e no uso do método dos volumes finitos utilizaremos o valor médio do vetor de variáveis conservadas atribuídos ao centroide do volume de

controle, mais especificamente no ponto  $(i,j,k)$  do volume de controle mostrado na Figura 7. Assim, a definição do vetor médio das variáveis conservadas é dada por

$$\bar{Q} = \frac{1}{V} \int_V Q dv \quad (3.17)$$

Para obtermos a formulação integral em termos do vetor médio de variáveis conservadas mostrado na Eq. (3.17) é preciso substituir sua definição na Equação (3.16) e enfim obter

$$\frac{d\tilde{Q}}{dt} = - \int_S (\vec{P} - Q\vec{w}) \vec{n} ds \quad (3.18)$$

onde

$$\tilde{Q} = V\bar{Q} \quad (3.19)$$

As expressões para as derivadas de  $u$ ,  $v$  e  $w$  em  $x$ ,  $y$  e  $z$  podem ser obtidas através da aplicação do teorema de Gauss para transformar a integral de volume em integral de superfície. Assim, temos:

$$\frac{1}{V} \int_V \frac{\partial u}{\partial x} dV = \frac{1}{V} \int_S (u \cdot n_x) dS \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{V} \int_S (u \cdot n_x) dS \quad (3.21)$$

onde

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{V} \int \frac{\partial u}{\partial x} dv \quad (3.22)$$

Assim,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \sum u S_x \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \left\{ (u_{i+1,j,k} S_{i+1,j,k}) + (u_{i-1,j,k} S_{i-1,j,k}) + (u_{i,j+1,k} S_{i,j+1,k}) + \right. \\ \left. (u_{i,j-1,k} S_{i,j-1,k}) + (u_{i,j,k+1} S_{i,j,k+1}) + (u_{i,j,k-1} S_{i,j,k-1}) \right\} \quad (3.24)$$

Analogamente, temos:

$$\frac{\overline{\partial u}}{\partial y} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \left\{ (u_{i+1,j,k} S y_{i+1,j,k}) + (u_{i-1,j,k} S y_{i-1,j,k}) + (u_{i,j+1,k} S y_{i,j+1,k}) \right. \\ \left. + (u_{i,j-1,k} S y_{i,j-1,k}) + (u_{i,j,k+1} S y_{i,j,k+1}) + (u_{i,j,k-1} S y_{i,j,k-1}) \right\}$$

$$\frac{\overline{\partial u}}{\partial z} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \left\{ (u_{i+1,j,k} S z_{i+1,j,k}) + (u_{i-1,j,k} S z_{i-1,j,k}) + (u_{i,j+1,k} S z_{i,j+1,k}) \right. \\ \left. + (u_{i,j-1,k} S z_{i,j-1,k}) + (u_{i,j,k+1} S z_{i,j,k+1}) + (u_{i,j,k-1} S z_{i,j,k-1}) \right\}$$

$$\frac{\overline{\partial v}}{\partial x} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \left\{ (v_{i+1,j,k} S x_{i+1,j,k}) + (v_{i-1,j,k} S x_{i-1,j,k}) + (v_{i,j+1,k} S x_{i,j+1,k}) \right. \\ \left. + (v_{i,j-1,k} S x_{i,j-1,k}) + (v_{i,j,k+1} S x_{i,j,k+1}) + (v_{i,j,k-1} S x_{i,j,k-1}) \right\}$$

$$\frac{\overline{\partial v}}{\partial y} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \left\{ (v_{i+1,j,k} S y_{i+1,j,k}) + (v_{i-1,j,k} S y_{i-1,j,k}) + (v_{i,j+1,k} S y_{i,j+1,k}) \right. \\ \left. + (v_{i,j-1,k} S y_{i,j-1,k}) + (v_{i,j,k+1} S y_{i,j,k+1}) + (v_{i,j,k-1} S y_{i,j,k-1}) \right\}$$

$$\frac{\overline{\partial v}}{\partial z} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \left\{ (v_{i+1,j,k} S z_{i+1,j,k}) + (v_{i-1,j,k} S z_{i-1,j,k}) + (v_{i,j+1,k} S z_{i,j+1,k}) \right. \\ \left. + (v_{i,j-1,k} S z_{i,j-1,k}) + (v_{i,j,k+1} S z_{i,j,k+1}) + (v_{i,j,k-1} S z_{i,j,k-1}) \right\}$$

$$\frac{\overline{\partial w}}{\partial x} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \left\{ (w_{i+1,j,k} S x_{i+1,j,k}) + (w_{i-1,j,k} S x_{i-1,j,k}) + (w_{i,j+1,k} S x_{i,j+1,k}) \right. \\ \left. + (w_{i,j-1,k} S x_{i,j-1,k}) + (w_{i,j,k+1} S x_{i,j,k+1}) + (w_{i,j,k-1} S x_{i,j,k-1}) \right\}$$

$$\frac{\overline{\partial w}}{\partial y} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \left\{ (w_{i+1,j,k} S y_{i+1,j,k}) + (w_{i-1,j,k} S y_{i-1,j,k}) + (w_{i,j+1,k} S y_{i,j+1,k}) \right. \\ \left. + (w_{i,j-1,k} S y_{i,j-1,k}) + (w_{i,j,k+1} S y_{i,j,k+1}) + (w_{i,j,k-1} S y_{i,j,k-1}) \right\}$$

$$\frac{\overline{\partial w}}{\partial z} = \frac{1}{V_{i,j,k}} \left\{ (w_{i+1,j,k} S z_{i+1,j,k}) + (w_{i-1,j,k} S z_{i-1,j,k}) + (w_{i,j+1,k} S z_{i,j+1,k}) \right. \\ \left. + (w_{i,j-1,k} S z_{i,j-1,k}) + (w_{i,j,k+1} S z_{i,j,k+1}) + (w_{i,j,k-1} S z_{i,j,k-1}) \right\}$$

Assumindo que as propriedades do escoamento são constantes ao longo de cada face do volume finito de integração mostrado na Figura 7 e aproximando espacialmente a integral em (3.13), temos a equação (3.25) a seguir:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t}\right)_{i,j,k} &= -\frac{1}{V_{i,j,k}} \left\{ [(\vec{P} - \bar{Q}\vec{w}) \cdot \vec{S}]_{i+1,j,k} + [(\vec{P} - \bar{Q}\vec{w}) \cdot \vec{S}]_{i-1,j,k} \right. \\
&\quad + [(\vec{P} - \bar{Q}\vec{w}) \cdot \vec{S}]_{i,j+1,k} + [(\vec{P} - \bar{Q}\vec{w}) \cdot \vec{S}]_{i,j-1,k} + [(\vec{P} - \bar{Q}\vec{w}) \cdot \vec{S}]_{i,j,k+1} \\
&\quad \left. + [(\vec{P} - \bar{Q}\vec{w}) \cdot \vec{S}]_{i,j,k-1} \right\} \\
&\quad - \varepsilon \left[ (\nabla_{\xi} \Delta_{\xi})^2 + (\nabla_{\eta} \Delta_{\eta})^2 + (\nabla_{\zeta} \Delta_{\zeta})^2 \right] \bar{Q}_{i,j,k}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

onde

$$(\nabla_{\xi} \Delta_{\xi})^2 \bar{Q}_{i,j,k} = \bar{Q}_{i+2,j,k} - 4\bar{Q}_{i+1,j,k} + 6\bar{Q}_{i,j,k} - 4\bar{Q}_{i-1,j,k} + \bar{Q}_{i-2,j,k} \tag{3.26}$$

$$(\nabla_{\eta} \Delta_{\eta})^2 \bar{Q}_{i,j,k} = \bar{Q}_{i,j+2,k} - 4\bar{Q}_{i,j+1,k} + 6\bar{Q}_{i,j,k} - 4\bar{Q}_{i,j-1,k} + \bar{Q}_{i,j-2,k} \tag{3.27}$$

$$(\nabla_{\zeta} \Delta_{\zeta})^2 \bar{Q}_{i,j,k} = \bar{Q}_{i,j,k+2} - 4\bar{Q}_{i,j,k+1} + 6\bar{Q}_{i,j,k} - 4\bar{Q}_{i,j,k-1} + \bar{Q}_{i,j,k-2} \tag{3.28}$$

Os termos de dissipação numérica artificial usados aqui,  $(\nabla_{\xi} \Delta_{\xi})^2$ ,  $(\nabla_{\eta} \Delta_{\eta})^2$  e  $(\nabla_{\zeta} \Delta_{\zeta})^2$ , estão presentes, pois ao utilizarmos um esquema numérico centrado, que não possui um termo de dissipação artificial implícito como em esquemas *upwind* por exemplo, é preciso adicionar explicitamente estes termos de dissipação, que se comportam de forma a estabilizar o esquema, ou seja, eliminam as instabilidades inerentes ao esquema centrado.

Nos esquemas de volumes finitos, os termos de dissipação artificial atuam diminuindo a tendência de possíveis desacoplamento de pontos pares e ímpares e prevenindo o surgimento de oscilações numéricas em regiões onde grandes gradientes de pressão possam surgir, como em regiões próximas a pontos de estagnação por exemplo.

### 3.1.2 Integração no tempo

Os métodos de Runge-Kutta são métodos de integração explícitos. Por ser bastante estável quando se trata de fenômenos de convecção e difusão, possuir grande capacidade de precisão, foi escolhido o método de Runge-Kutta de terceira para a integração no tempo da equação de Navier-Stokes levemente compressível em três dimensões.

O método de marcha no tempo do referido método é mostrado a seguir:

$$\tilde{Q}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} = \bar{Q}_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{3} \left( \frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} \right)_{i,j,k}^n \quad (3.29)$$

$$\hat{Q}_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \bar{Q}_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} \right)_{i,j,k}^{n+\frac{1}{3}} \quad (3.30)$$

$$\bar{Q}_{i,j,k}^{n+1} = \bar{Q}_{i,j,k}^n + \Delta t \left( \frac{\partial \hat{Q}}{\partial t} \right)_{i,j,k}^{n+\frac{1}{2}} \quad (3.31)$$

### 3.1.3 Equação do Movimento

Para avaliar o movimento do cilindro, foram utilizados dois métodos numéricos distintos: um para avaliar a posição do cilindro e um para avaliar a velocidade do movimento do cilindro. O método de Lax-Wendroff de segunda ordem foi utilizado para calcular a posição do cilindro a cada iteração  $n$  da simulação através da expressão

$$z^{n+1} = z^n + \dot{z}^n \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{z}^n \Delta t^2 \quad (3.32)$$

A velocidade do movimento do cilindro foi calculada através do método de Euler explícito, novamente a cada iteração da simulação através da expressão

$$\dot{z}^{n+1} = \dot{z}^n + \ddot{z}^n \Delta t \quad (3.33)$$

Nos dois casos, temos que a aceleração  $\ddot{z}$  é dada por

$$\ddot{z}^n = \frac{C_L}{2C_\mu} - C_\zeta \dot{z}^n - C_k z^n \quad (3.34)$$

onde

$$C_\zeta = \frac{4\pi\zeta}{U_r} \quad C_k = \frac{4\pi^2}{U_r^2} \quad C_\mu = \frac{m}{\rho D^2 L} \quad C_L = \frac{F_z}{\frac{1}{2}\rho U^2 DL} \quad (3.35)$$

O coeficiente de sustentação é obtido através da integração dos coeficientes friccionais e de pressão na superfície do cilindro na iteração anterior da simulação. Vale ressaltar que após o cálculo da nova posição do corpo, a malha é gerada novamente considerando o

movimento do cilindro e passamos à próxima iteração, onde todo o cálculo numérico descrito neste capítulo se repete.

### 3.1.4 Simulação das Grandes Escalas da Turbulência

Para realizarmos o cálculo da viscosidade turbulenta, é preciso a cada iteração, visto que a malha é recriada para se adequar à nova posição do cilindro, calcularmos a largura do filtro ( $\Delta$ ) utilizado na Simulação das Grandes Escalas da Turbulência.

É possível calcular o valor de  $\Delta$  para cada ponto da malha através da equação a seguir

$$\Delta = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\Delta_i \Delta_j \Delta_k} \quad (3.36)$$

onde

$$\Delta_i = \sqrt{(x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k})^2} \quad (3.37)$$

$$\Delta_j = \sqrt{(x_{i,j+1,k} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j+1,k} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j+1,k} - z_{i,j,k})^2} \quad (3.38)$$

$$\Delta_k = \sqrt{(x_{i,j,k+1} - x_{i,j,k})^2 + (y_{i,j,k+1} - y_{i,j,k})^2 + (z_{i,j,k+1} - z_{i,j,k})^2} \quad (3.39)$$

A magnitude do tensor taxa de deformação é dada pela expressão a seguir e também precisa ser calculada para todos os pontos da malha a cada iteração da simulação

$$|\bar{S}| = \sqrt[2]{2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij}} \quad (3.40)$$

Considerando um campo de velocidade  $U(x, y, z, t)$  com componente de velocidade  $u$  na direção  $i$ ,  $v$  na direção  $j$  e  $w$  na direção  $k$  a equação anterior se transforma em

$$|\bar{S}| = \sqrt[2]{2 \left[ \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right)^2 \right]} \quad (3.41)$$

Como dito anteriormente no item 2.2.3 do Capítulo 2, consideramos a constante de Smagorinsk igual a 0,1 e assim torna-se possível obtermos um valor de viscosidade turbulenta para cada ponto da malha em cada iteração da simulação através da equação

$$v_T = C_s^2 \Delta^2 |\bar{S}| \quad (3.42)$$

Vale ressaltar que para a faixa de números de Reynolds simulada, a camada limite que se desenvolve na parede do corpo do cilindro ainda é laminar. Por este motivo, definiu-se no código que a viscosidade turbulenta só será calculada a partir de uma distância igual a 0,6 diâmetros do cilindro à jusante deste, ou seja, 0,1 afastado do corpo.

## 3.2 Malha Computacional

Foi gerada uma malha tridimensional representando o domínio e o cilindro circular com características dimensionais semelhantes à malha testada e utilizada por WANDERLEY *et. al* (2008) com sucesso, entretanto com o valor do raio menor do que o que foi usado no referido trabalho.

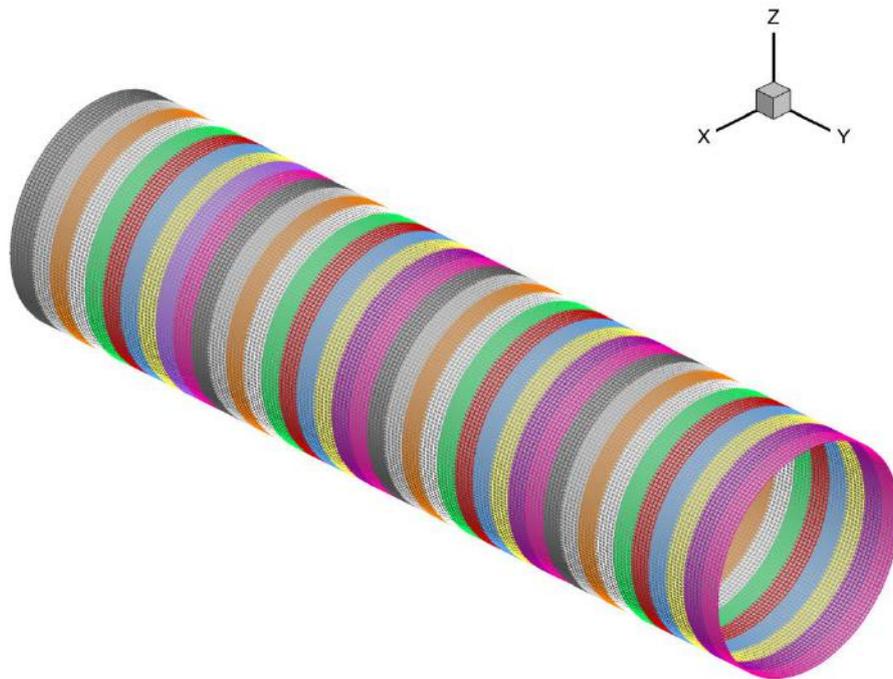
O gerador de malha implementado no próprio código fonte do programa gera, a cada iteração da simulação, uma nova malha após considerar o movimento ortogonal, na direção  $z$ , do cilindro. Mais especificamente, na primeira iteração toda a malha, que é composta por fronteira externa, fronteira interna (corpo do cilindro) e pontos interiores da malha é gerada, enquanto que nas próximas iterações, onde é considerado o movimento do cilindro, o gerador de malha recebe como dado de entrada a nova posição do corpo do cilindro, através das coordenadas do centro do cilindro  $x_b$  e  $z_b$ , e os novos pontos interiores da malha são gerados considerando esta translação do corpo.

A malha computacional utilizada para representar um domínio em forma de tubo ao redor do cilindro possui 199 pontos na direção circunferencial, 200 pontos ao longo do cilindro e 201 pontos na direção radial, totalizando aproximadamente 8 milhões de pontos na malha.

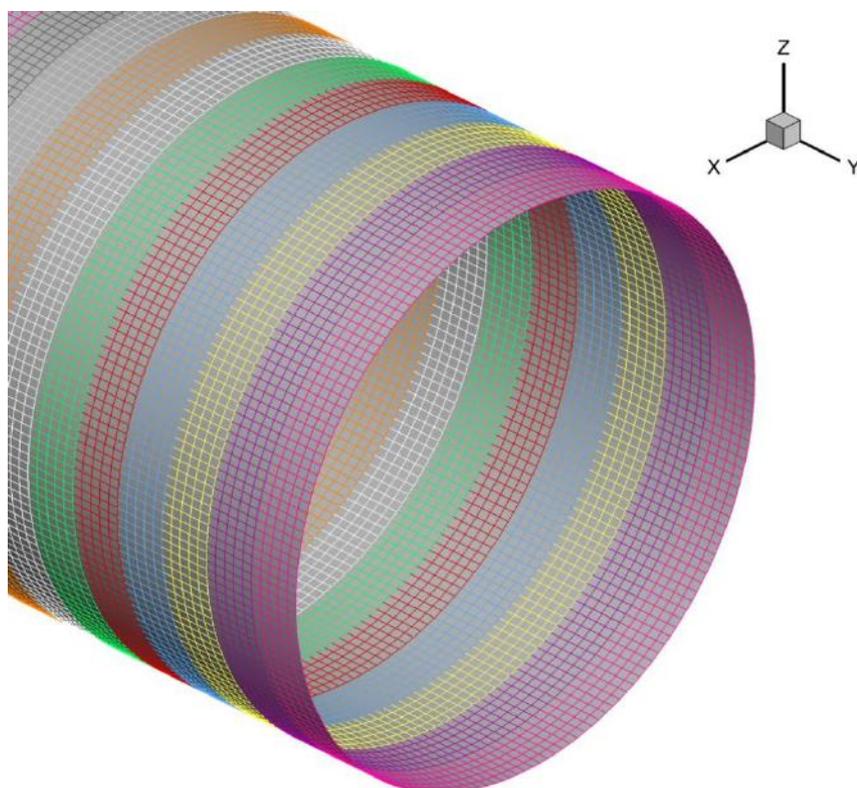
Foi criada propositalmente uma sobreposição entre os três primeiros e os três últimos planos na direção circunferencial. A sobreposição se faz necessária já que através da sua implementação podemos impor a condição de contorno na fronteira da esteira.

Como o programa será executado em paralelo em quarenta nós de processamento se torna necessária a divisão, em 40 fatias iguais, da malha ao longo do eixo do cilindro. Esta divisão faz com que cada fatia da malha possua 9 planos, onde apenas os 5 planos interiores são resolvidos pelo solver do programa, sendo os 2 planos iniciais da fatia e os 2 planos finais utilizados para que possa haver a sobreposição destes com as fatias adjacentes.

A seguir, nas Figuras 8 e 9, podemos ver a malha total com as 40 fatias além da sobreposição das fatias em detalhe.



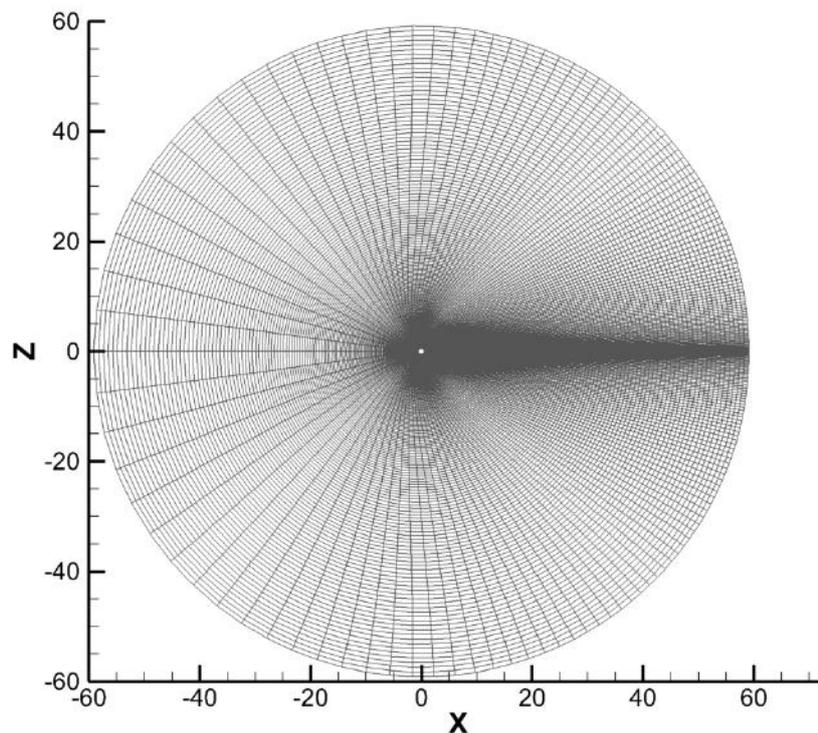
**Figura 8:** Todas as 40 fatias da malha formando o plano “i,j,1”



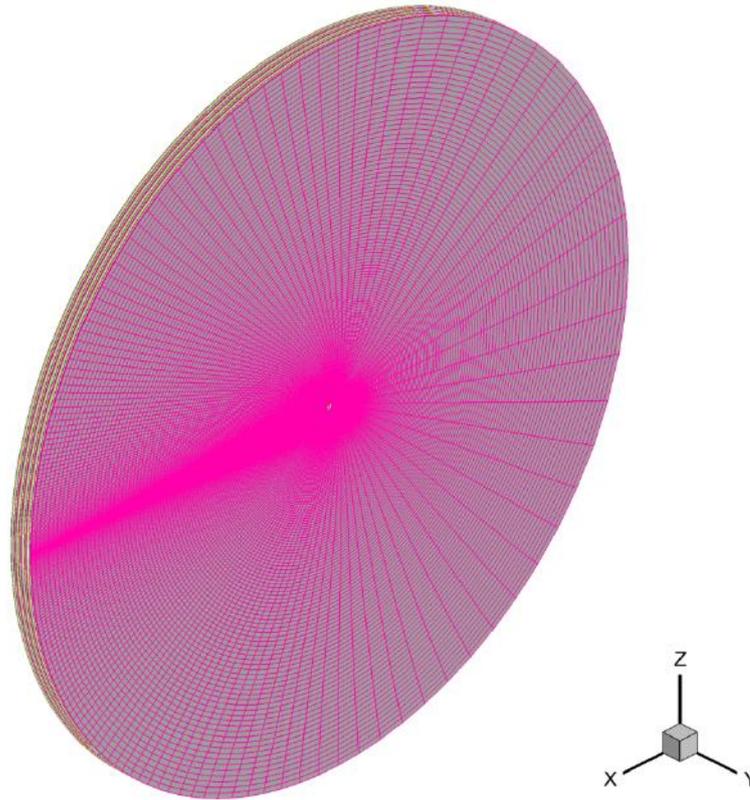
**Figura 9:** Detalhe da sobreposição de fatias da malha (5 pontos interiores)

O gerador de malha utilizado cria primeiro um plano  $xz$  da malha total, gerando uma malha do tipo *O-grid*, para depois replicar este plano ao longo do eixo do cilindro, ou seja, de acordo com os parâmetros estabelecidos para este trabalho, 200 vezes em intervalos iguais por todo o comprimento do cilindro. O diâmetro do cilindro circular utilizado é igual a  $D$  e seu comprimento aproximadamente igual a  $4D$ .

Foi utilizado *stretching* nos pontos da malha, tanto na direção circunferencial quanto na radial para concentrar um maior número de pontos à jusante do corpo, ou seja, para deixar a região da malha na qual é esperado que a esteira de von Kármán se desenvolva mais refinada, tornando possível e mais preciso o cálculo numérico do problema. Os valores dos parâmetros de *stretching* utilizados foram iguais a  $q_{\zeta} = 1,042$ , para o *stretching* circunferencial no infinito,  $q_{\zeta_c} = 1,003$  para o *stretching* circunferencial sobre o corpo e  $q_{\eta} = 1,011$ , para o *stretching* radial, sendo a distância do cilindro circular à fronteira externa do domínio igual a 60 diâmetros. O plano  $xz$  da malha pode ser visto na Figura 10 a seguir, e a malha completa representando todo o domínio na Figura 11.



**Figura 10:** Plano  $xz$  da malha utilizada



*Figura 11: Malha completa, representando todo o domínio simulado dividido em 40 fatias*

### 3.3 Condições iniciais e de contorno

Foi utilizada a condição de não-escorregamento no corpo como condição de contorno do cilindro circular e visto que a malha é adequada ao corpo (*body-fitted*) estas condições podem ser facilmente implementadas já que o cilindro está sendo representado na malha pelo plano  $k=1$ . Assim, considerando o movimento do cilindro a cada iteração, foi preciso utilizar como condição de contorno no corpo as seguintes expressões para todos os pontos em  $i$  e  $j$  sobre  $k=1$ .

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (3.43)$$

Já que o movimento do cilindro ocorre apenas na direção  $z$  do domínio, a condição de não-escorregamento para a velocidade  $w$  sobre o corpo torna-se igual a velocidade média entre a distância em  $z$  percorrida em uma iteração ( $\Delta z$ ) e a variação de tempo em uma iteração ( $\Delta t$ ).

Estas relações foram garantidas em  $k=1$  através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
u(i, j, 0) &= -u(i, j, 2) \\
v(i, j, 0) &= -v(i, j, 2) \\
w(i, j, 0) &= -w(i, j, 2) + 2 \frac{\Delta z}{\Delta t} \\
p(i, j, 0) &= p(i, j, 2)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Foram usadas como condições iniciais e de contorno para a fronteira externa em todo o domínio as seguintes expressões:

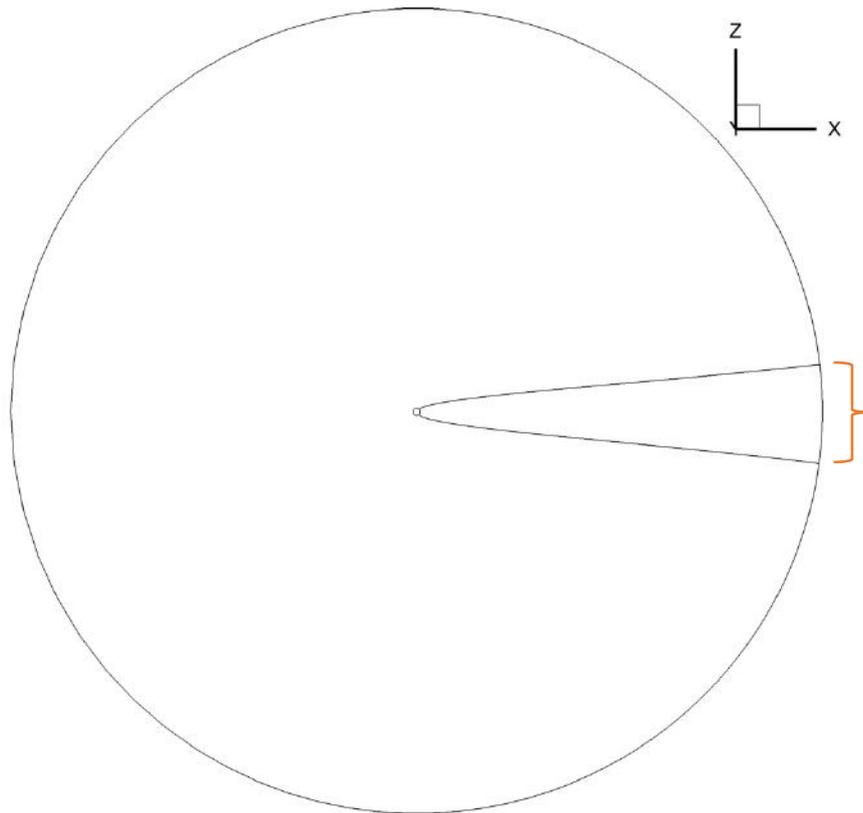
$$\begin{aligned}
u &= M_\infty & v &= 0 & w &= 0 & p &= 1 & (3.45) \\
u_{i,j,kmax} &= M_\infty & v_{i,j,kmax} &= 0 & w_{i,j,kmax} &= 0 & p_{i,j,kmax} &= 1
\end{aligned}$$

Para a fronteira externa à jusante do corpo, numa faixa de  $i=0$  até  $i=30$  e  $i=170$  até  $i=199$ , as seguintes relações para os planos  $kmax$  e  $kmax+1$  foram utilizadas:

$$\begin{aligned}
u(i, j, kmax + 1) &= u(i, j, kmax - 1) \\
v(i, j, kmax + 1) &= v(i, j, kmax - 1) \\
w(i, j, kmax + 1) &= w(i, j, kmax - 1) \\
p(i, j, kmax + 1) &= 1
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
u(i, j, kmax) &= u(i, j, kmax - 1) \\
v(i, j, kmax) &= v(i, j, kmax - 1) \\
w(i, j, kmax) &= w(i, j, kmax - 1) \\
p(i, j, kmax) &= 1
\end{aligned} \tag{3.47}$$

A faixa de planos  $i$  é mostrada na Figura 12 a seguir em um plano  $xz$  para exemplificar a extensão da condição de contorno na fronteira externa do domínio ( $kmax$  e  $kmax+1$ ).



**Figura 12:** Extensão da condição de contorno na fronteira externa em  $k_{max}$  e  $k_{max}+1$ , variando de  $i=0$  até 30 e  $i=170$  até 199.

### 3.4 Estudo de Convergência da Malha

Nesta seção, iremos apresentar os dois estudos de convergência de malha realizados, um para o caso do cilindro fixo e um para o caso do cilindro elasticamente montado. Os estudos de convergência de malha foram realizados para que pudéssemos determinar qual malha possui o melhor custo benefício entre esforço computacional, e conseqüentemente, o tempo de simulação, e a precisão dos resultados obtidos em cada caso.

Inicialmente, foi realizado um estudo de convergência de malha para o caso do cilindro fixo com número de Reynolds igual a 1000. Este caso foi escolhido partindo-se da premissa de que se os resultados obtidos com esta malha fossem razoáveis, já que neste caso a esteira é totalmente turbulenta e uma malha com grande definição parece intuitivamente ser mais adequada, ela também apresentaria resultados razoáveis para os casos mais simples, onde há liberação de vórtices entretanto a esteira se mantém no regime laminar.

Assim, três malhas foram geradas com diâmetro igual a  $60D$ , onde  $D$  é o diâmetro do cilindro. A primeira, denominada **Malha 1a**, com 6 milhões de nós ( $200i \times 200j \times 150k$ ), a segunda, **Malha 1b**, com 8 milhões ( $200i \times 200j \times 200k$ ) e a terceira, **Malha 1c**, com 10 milhões ( $200i \times 200j \times 250k$ ). Além da variação do número de pontos na direção radial em cada caso, realizou-se a alteração do valor do *stretching* radial na malha, com o intuito de se manter o menor espaçamento da malha,  $\Delta s$ , igual nos três casos e assim conseguir rodar todas as simulações com um mesmo valor de  $\Delta t$  em cada iteração, visto que

$$CFL = a \cdot \Delta t / \Delta s \quad (3.48)$$

ou

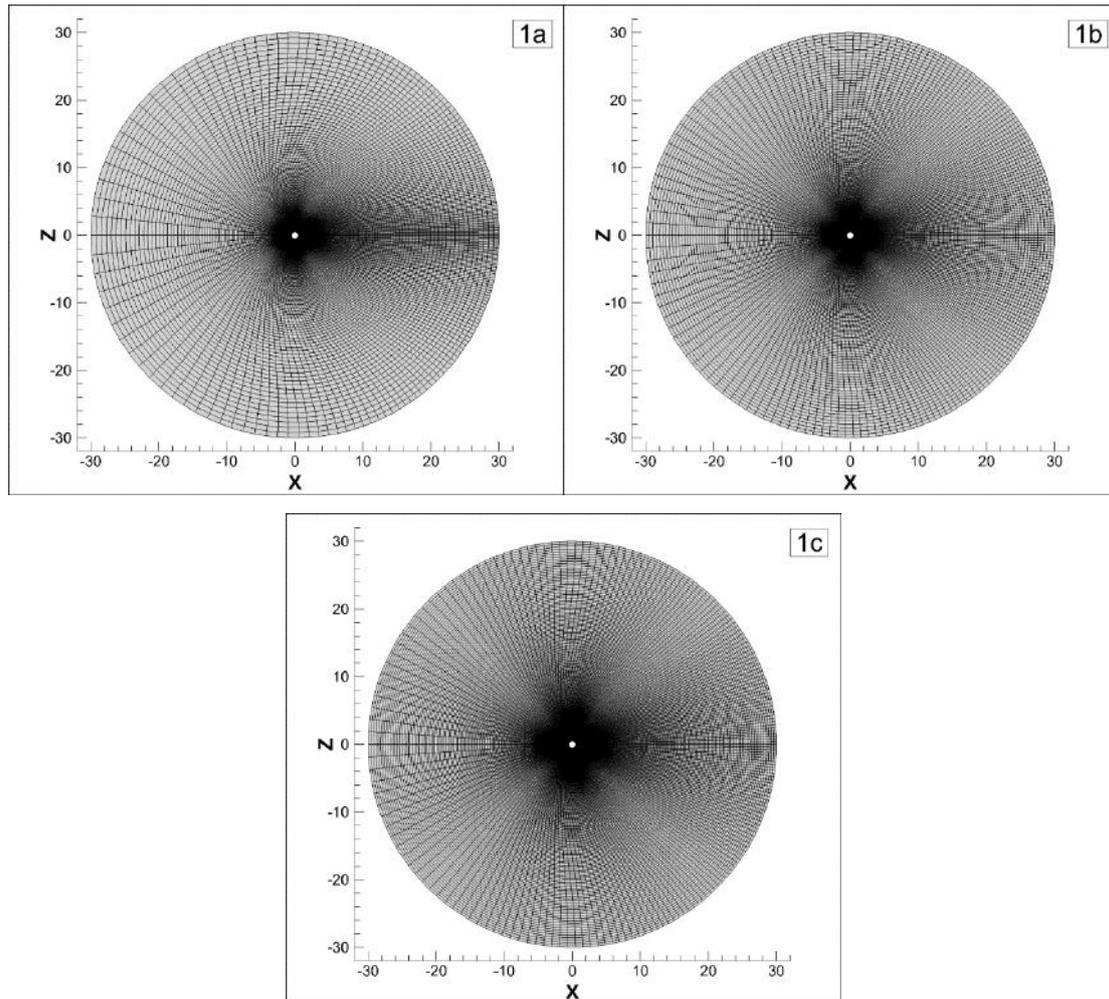
$$\Delta t = CFL \cdot \Delta s / a \quad (3.49)$$

onde  $a$  é constante e  $CFL$  é um dado de entrada no código computacional, além de garantir a estabilidade do método de solução para as três malhas.

Os resultados obtidos para o arrasto médio, o valor quadrático médio do coeficiente de sustentação (RMS) e o número de Strouhal podem ser vistos na Tabela 2. As malhas podem ser vistas na Figura 13.

**Tabela 2:** Comparação entre as malhas (cilindro fixo)

	<b>Malha 1a</b> 200i x 200j x 150k	<b>Malha 1b</b> 200i x 200j x 200k	<b>Malha 1c</b> 200i x 200j x 250k
Arrasto Médio	1,38	1,34	1,35
RMS Sustentação	0,28	0,34	0,29
N° de Strouhal	0,192	0,208	0,200



**Figura 13** – Refinamento da malha. Malha com 6 mi de nós (1a), malha com 8 mi de nós (1b) e malha com 10 mi de nós (1c).

Das malhas utilizadas neste estudo, a **Malha 1b**, com 8 milhões de nós, foi a que apresentou o coeficiente de arrasto médio mais próximo do valor medido experimentalmente para o caso de Reynolds igual 1000, ou seja,  $C_d$  igual a 1, porém o coeficiente de sustentação  $C_L$  teve seu maior valor. Inicialmente, o uso desta malha se justificou pelo fato de que o aumento de nós e, conseqüentemente, o aumento no custo

computacional e no tempo de simulação da **Malha 1c** não trouxe resultados consideravelmente diferentes do que os já obtidos com a **Malha 1b**.

Após a análise dos resultados obtidos no estudo de convergência e o término das simulações de Reynolds 40, 100, 200, 500 e 1000 para o caso do cilindro fixo decidiu-se reconsiderar a malha e, conseqüentemente, o estudo de convergência, para uso no caso do cilindro elasticamente montado.

Neste caso, como as simulações ocorrem com diversas velocidades reduzidas o escoamento terá números de Reynolds bem maiores que os simulados com a **Malha 1b** e a malha se deformará a cada iteração de acordo com o movimento transversal (na direção  $z$ ) do cilindro, fazendo com que um valor positivo na translação comprima os elementos da malha acima do cilindro e alongue os elementos abaixo deste. Por este motivo, escolheu-se dobrar o tamanho do domínio, sendo agora igual a  $120D$ , onde  $D$  é o diâmetro do cilindro.

Além disso, o estudo de convergência da Malha 1 nos mostra que com uma malha mais refinada conseguimos obter melhores resultados para o valor RMS do coeficiente de sustentação e para o número de Strouhal. Uma análise mais atenta nos indica que provavelmente isso ocorreu pelo aumento de pontos à jusante do cilindro, ou seja, nos pontos da malha onde está localizada a esteira turbulenta, e com esta consideração decidiu-se concentrar mais pontos nesta área alterando os parâmetros de geração das malhas, porém sem alterar o número total de pontos no domínio.

De maneira similar ao estudo de convergência para o caso do cilindro fixo, três malhas foram geradas para o caso do cilindro elasticamente montado. A primeira, denominada **Malha 2a**, com 6 milhões de nós ( $200i \times 200j \times 150k$ ), a segunda, **Malha 2b**, com 8 milhões ( $200i \times 200j \times 200k$ ) e a terceira, **Malha 2c**, com 10 milhões ( $200i \times 200j \times 250k$ ). Novamente, além da variação do número de pontos na direção radial em cada caso, realizou-se a alteração do valor do *stretching* radial na malha, com o intuito de se manter o menor espaçamento da malha,  $\Delta s$ , igual nos três casos e assim conseguir rodar todas as simulações com um mesmo valor de  $\Delta t$  em cada iteração, visto que

$$CFL = a \cdot \Delta t / \Delta s \quad (3.48)$$

ou

$$\Delta t = CFL \cdot \Delta s / a \quad (3.49)$$

onde  $a$  é constante e CFL é um dado de entrada no código computacional, além de garantir a estabilidade do método de solução para as três malhas.

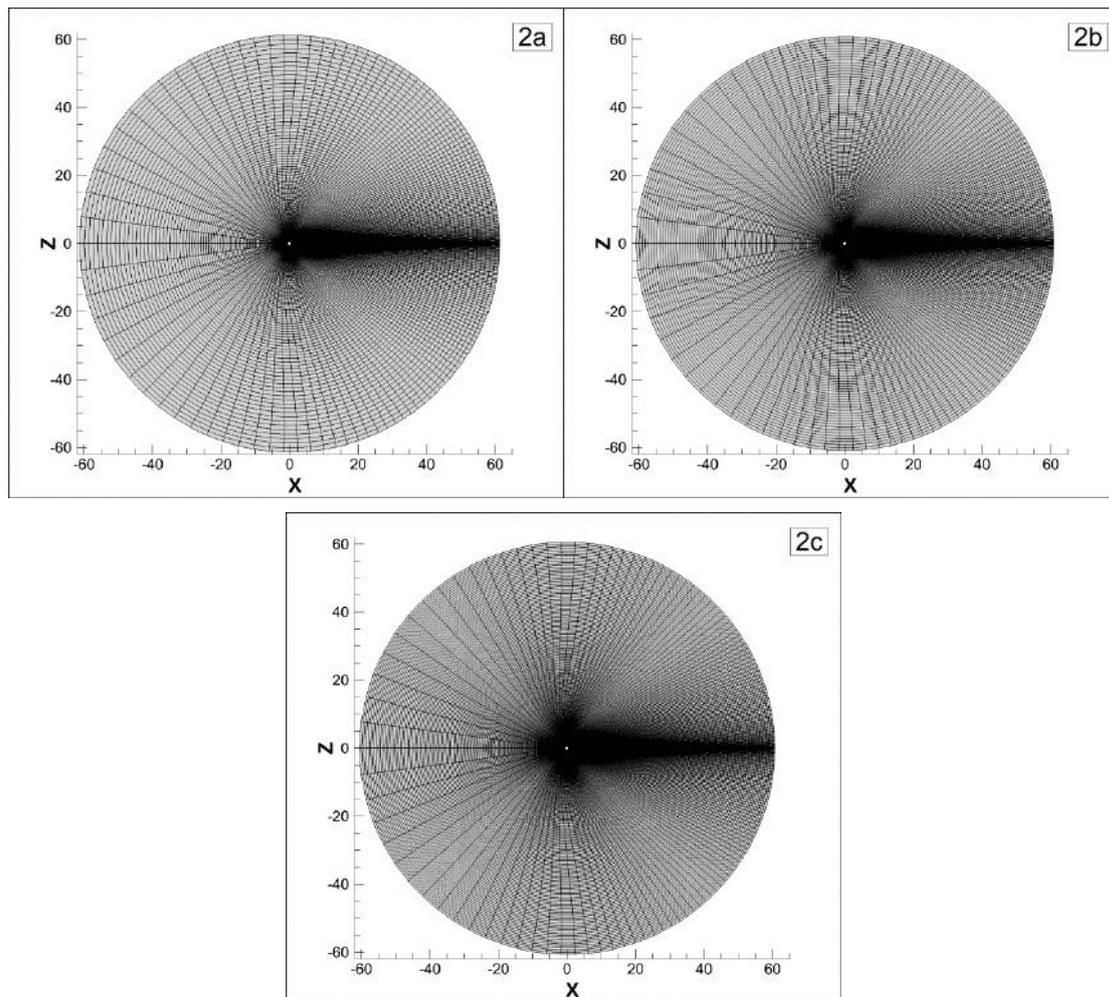
Para que pudéssemos usar o estudo anterior como base de comparação, o caso simulado foi o mesmo, ou seja, o cilindro fixo submetido a um escoamento com número de Reynolds igual a 1000.

Os resultados obtidos para o arrasto médio, o valor quadrático médio do coeficiente de sustentação (RMS) e o número de Strouhal podem ser vistos na Tabela 3. As malhas podem ser vistas na Figura 14.

**Tabela 3:** Comparação entre as malhas (cilindro elasticamente montado)

	<b>Malha 2a</b> 200i x 200j x 150k	<b>Malha 2b</b> 200i x 200j x 200k	<b>Malha 2c</b> 200i x 200j x 250k
Arrasto Médio	1,41	1,33	1,35
RMS Sustentação	0,27	0,14	0,16
N° de Strouhal	0,200	0,200	0,200

Como esperado, após a concentração de pontos à jusante do cilindro, os resultados para o valor do RMS do coeficiente de sustentação e o valor do número de Strouhal ficaram muito mais coerentes e próximos dos valores encontrados experimentalmente por NORBERG (2003) e numericamente por WANDERLEY (2008), por exemplo.



*Figura 14 – Refinamento da malha. Malha com 6 mi de nós (2a), malha com 8 mi de nós (2b) e malha com 10 mi de nós (2c).*

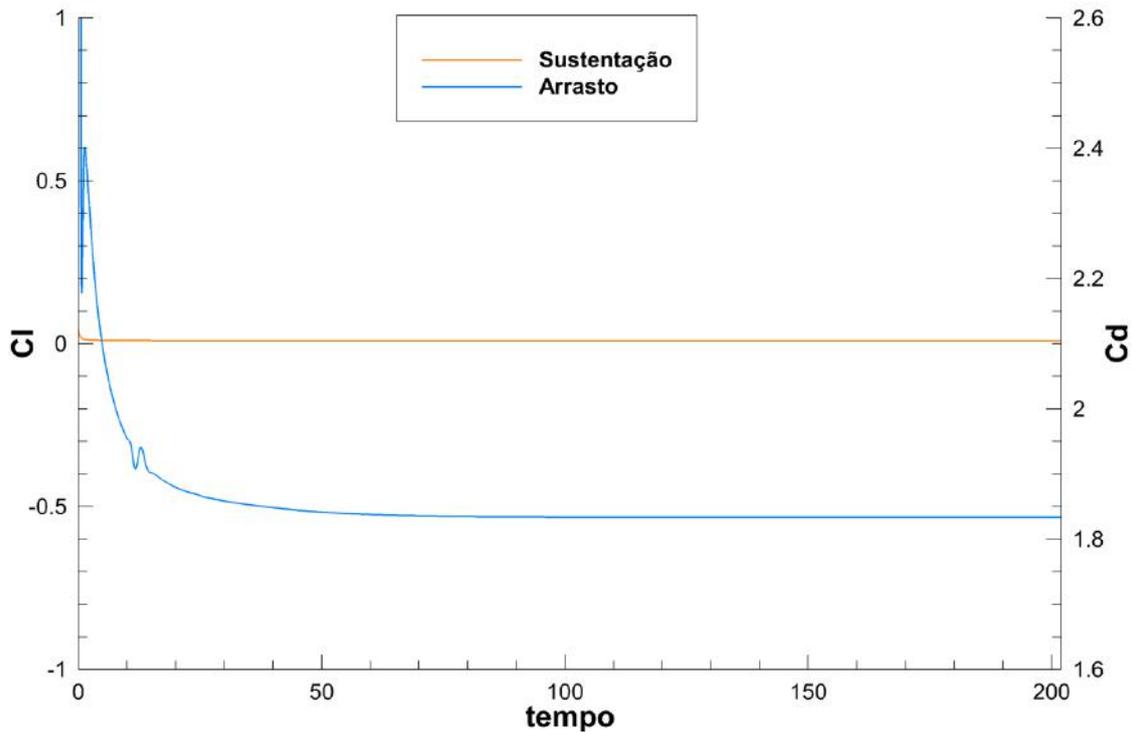
Novamente, a consideração usada para o estudo anterior aqui também é válida. A **Malha 2b**, com 8 milhões de nós, foi a escolhida pois apresentou o coeficiente de arrasto médio mais próximo do valor medido experimentalmente para o caso de Reynolds igual 1000, ou seja,  $C_d$  igual a 1 e, com a concentração de pontos na esteira do cilindro, teve o valor do RMS do coeficiente de sustentação  $C_L$  diminuído como esperado. Além da melhora nos valores descrita anteriormente, o uso desta malha se justificou pelo fato de que o aumento de nós, e conseqüentemente o aumento no custo computacional e no tempo de simulação da **Malha 2c** não trouxe resultados consideravelmente diferentes do que os já obtidos com a **Malha 2b**.

## 4. Resultados do Cilindro Fixo

Com o intuito de validar a metodologia utilizada na dissertação para realização das simulações de um escoamento incidindo sobre um cilindro circular rígido elasticamente montado com um grau de liberdade foram realizadas simulações para o caso de um escoamento incidindo sobre um cilindro circular fixo para os números de Reynolds 40, 100, 200, 500 e 1000. Os resultados obtidos são apresentados a seguir e comparados com dados experimentais e numéricos de estudos anteriores. Inicialmente foi utilizada a **Malha 1b**, apresentada na seção 3.4 para simular todos os cinco números de Reynolds, porém, após o segundo estudo de convergência de malha, escolheu-se realizar novamente as simulações para o cilindro circular fixo utilizando a **Malha 2b**, para que também pudéssemos comparar os resultados obtidos para os diversos números de Reynolds e os dois tipos de malha.

### 4.1 Número de Reynolds = 40

Como era esperado para a simulação realizada com número de Reynolds 40 não há desprendimento de vórtices após o total desenvolvimento do escoamento e consequentemente também não há geração de forças transversais atuando no cilindro (sustentação igual a zero). Este comportamento pode ser visto no gráfico da Figura 15 a seguir.



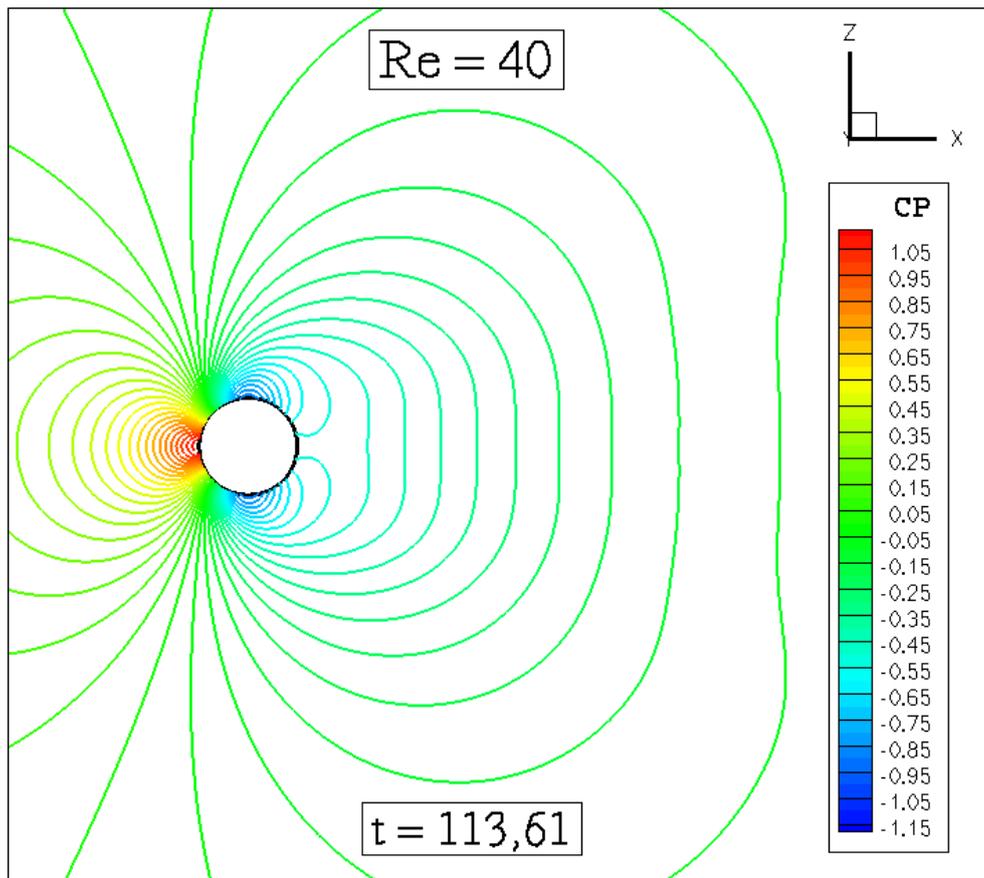
**Figura 15:** Coeficientes das forças de arrasto e sustentação ( $Re=40$ )

Podemos notar que após o desenvolvimento do escoamento ao redor do cilindro, por volta do tempo igual a 70, o coeficiente de arrasto se mantém constante e o escoamento deixa de variar, fazendo com que todos os resultados até o final da simulação sejam iguais. O coeficiente de arrasto encontrado foi igual a 1,83 e o valor do coeficiente de sustentação igual a zero.

#### 4.1.1 Coeficiente de Pressão

Apesar do problema ser tridimensional, os resultados a seguir serão mostrados no plano  $xz$  na metade do comprimento do cilindro, já que, para este número de Reynolds, a esteira não é turbulenta fazendo com que todas as 40 fatias da malha possuam os mesmos resultados.

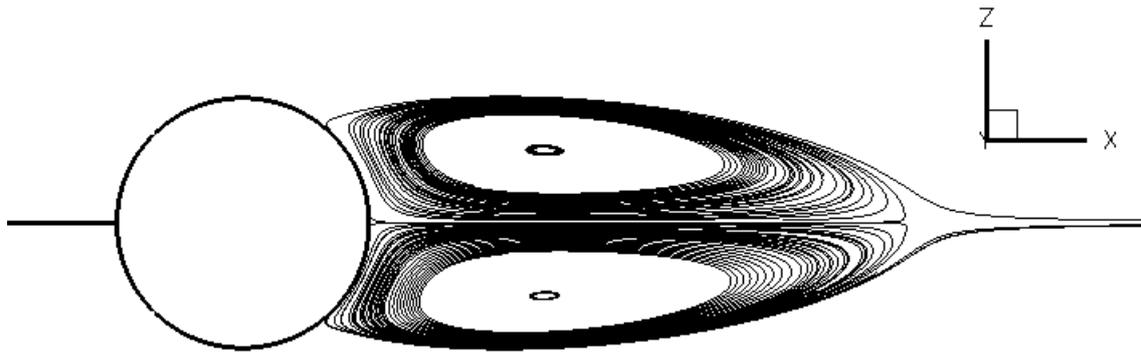
Na Figura 16, podemos ver o comportamento do coeficiente de pressão  $C_P$  após o desenvolvimento do escoamento.



*Figura 16: Coeficiente de pressão variando com o tempo (Re=40)*

A Figura 17 nos mostra em detalhe os dois vórtices gerados e acoplados ao bordo de fuga do cilindro para o escoamento com número de Reynolds igual a 40.

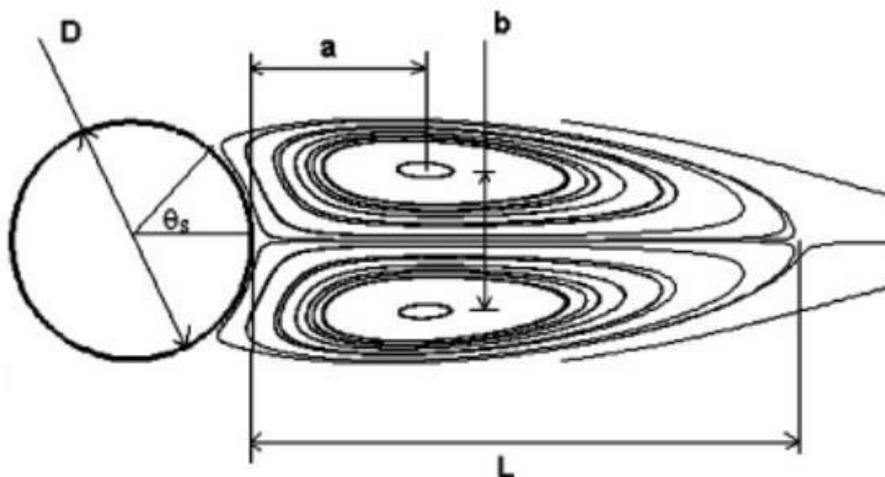
Na Tabela 3, podemos notar a grande concordância entre as dimensões características dos vórtices obtidos na simulação para Reynolds 40 e os outros resultados na literatura, com exceção do coeficiente de arrasto. É possível que esta diferença nos resultados ocorra devido à dissipação numérica utilizada na simulação. A Figura 18 apresenta as definições das dimensões características apresentadas na Tabela 3.



**Figura 17:** Vórtices acoplados ao bordo de fuga do cilindro circular ( $Re=40$ )

**Tabela 4:** Comparação entre as dimensões características dos vórtices

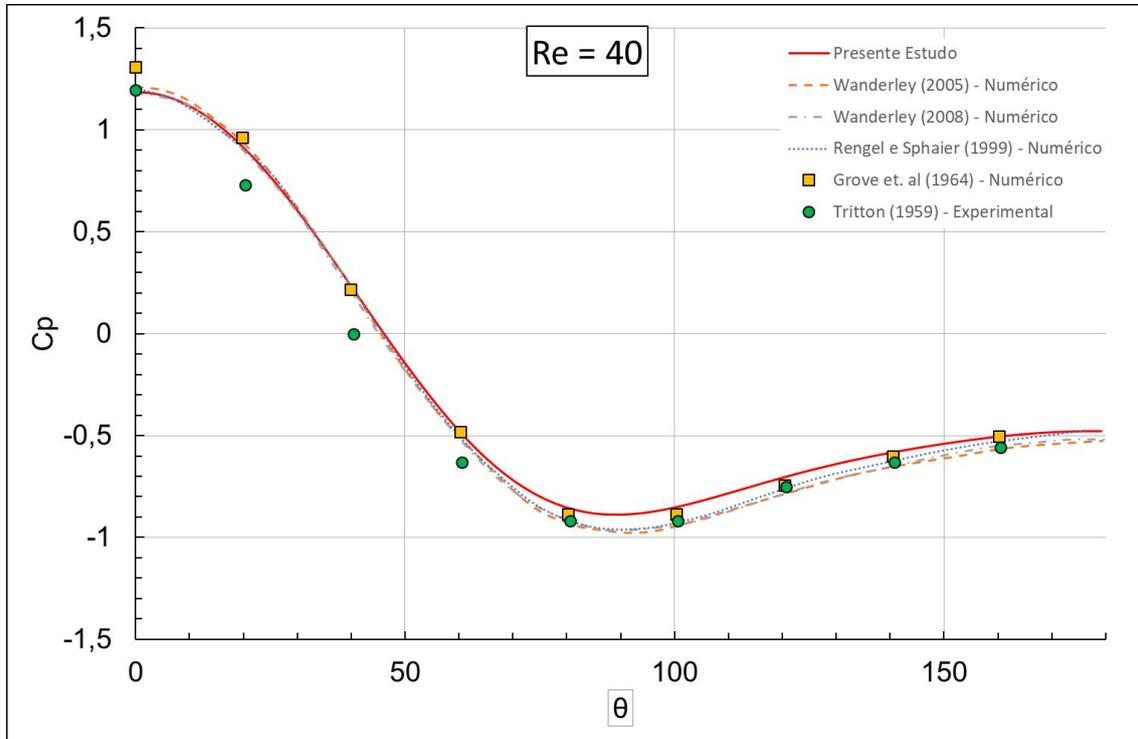
Referência	$Cd$	$L/D$	$a/D$	$b/D$	$\theta_s$	Comment
Tritton (1959)	1,57	-	-	-	-	Experimental
Constanceau e Bouard (1977)	-	2,13	0,76	0,59	53,50	Experimental
Rengel e Sphaier (1999)	1,61	2,23	0,72	0,58	54,06	FVM
Wanderley (2008)	1,56	2,29	0,73	0,60	53,80	FDM
Estudo atual	1,83	2,20	0,72	0,60	53,60	FVM



**Figura 18:** Definições das dimensões características dos vórtices ( $Re=40$ )

Na Figura 19 a seguir, está plotada a distribuição do coeficiente de pressão ( $C_p$ ) sobre o corpo, ou seja, o gráfico a seguir representa a distribuição do coeficiente de pressão ao longo do corpo do cilindro. O comportamento da curva do coeficiente de pressão está de

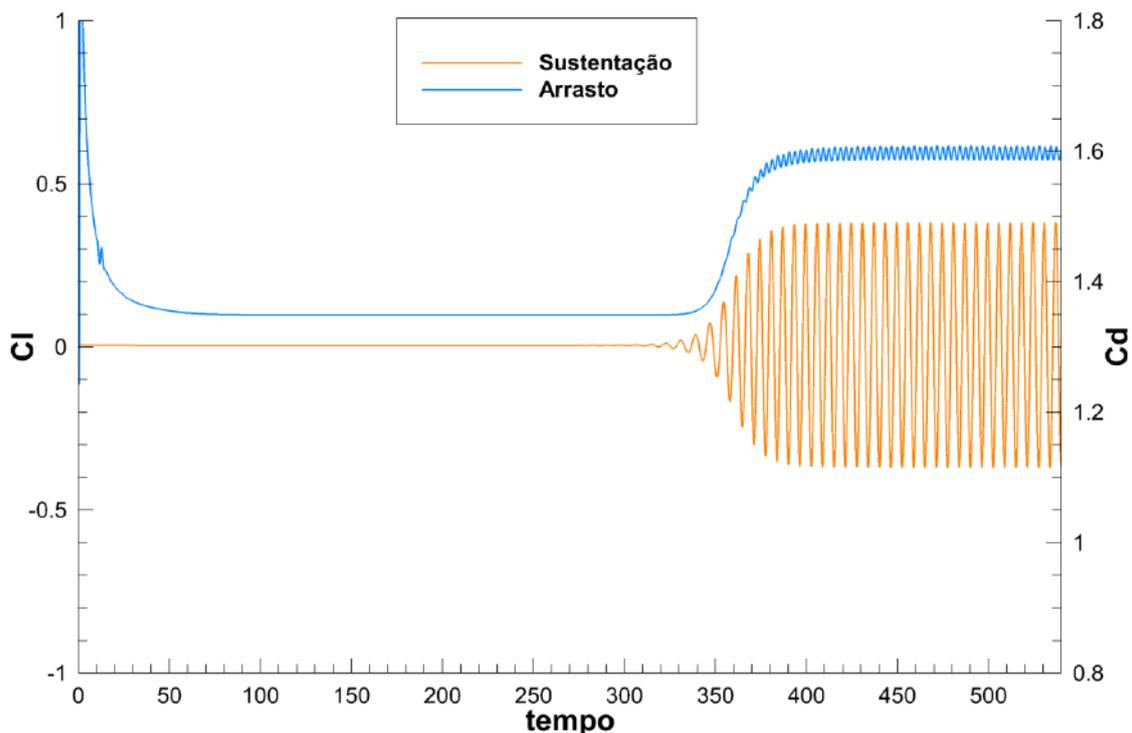
acordo com os resultados anteriormente encontrados na literatura, onde seu valor mais baixo ocorre entre  $80^\circ$  e  $90^\circ$ .



**Figura 19:** Coeficiente de pressão sobre a superfície do cilindro circular ( $Re=40$ )

## 4.2 Número de Reynolds = 100

Como era esperado para a simulação realizada com número de Reynolds 100, há despreendimento de vórtices após o total desenvolvimento do escoamento. Conseqüentemente, também há geração de forças transversais atuando no cilindro, o que pode ser observado através da variação no coeficiente de sustentação, além do aumento da força de arrasto para esta nova situação. Este comportamento pode ser visto no gráfico da Figura 20 a seguir.



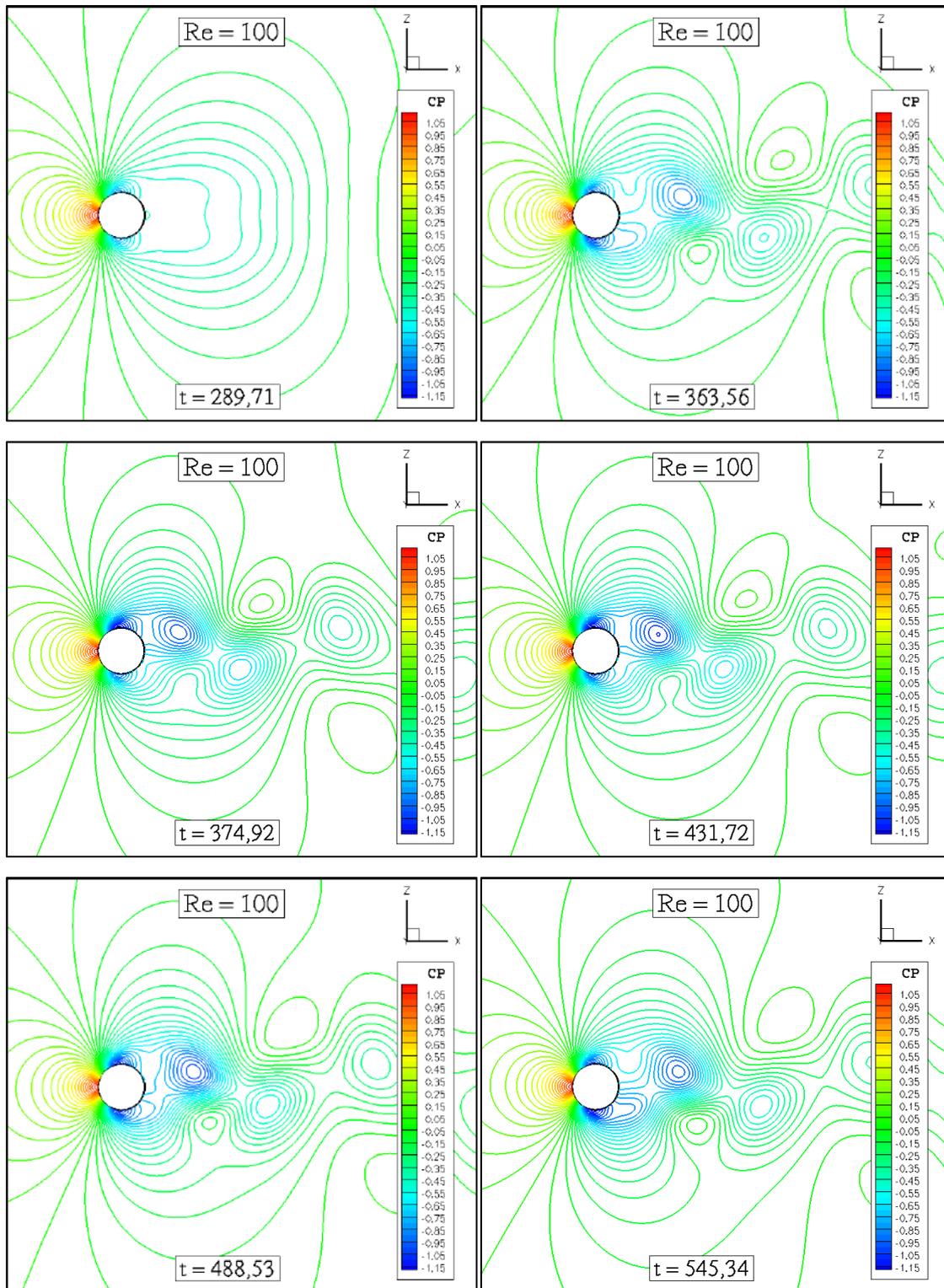
*Figura 20: Coeficientes das forças de arrasto e sustentação ( $Re=100$ )*

Podemos notar que após o desenvolvimento do escoamento ao redor do cilindro, por volta do tempo igual a 400, os coeficientes passam a ter um comportamento cíclico e esperado para este tipo de escoamento. O coeficiente de arrasto médio encontrado foi igual a 1,59 e o valor médio do coeficiente de sustentação igual 0,26.

### 4.2.1 Coeficiente de Pressão

Os resultados a seguir serão mostrados no plano  $xz$  na metade do comprimento do cilindro, já que para este número de Reynolds a esteira não é turbulenta fazendo com que

todas as 40 fatias da malha possuem os mesmos resultados, apesar do problema ser tridimensional. Na Figura 21, podemos ver o comportamento do coeficiente de pressão  $C_p$  durante a simulação.



**Figura 21:** Coeficiente de pressão variando com o tempo ( $Re=100$ )

## 4.2.2 Vorticidade

A distribuição da vorticidade da esteira de vórtices de von Kármán à jusante do cilindro circular pode ser vista na Figura 22 a seguir. No regime de escoamento simulado para número de Reynolds 100, dois vórtices são liberados alternadamente em cada ciclo.

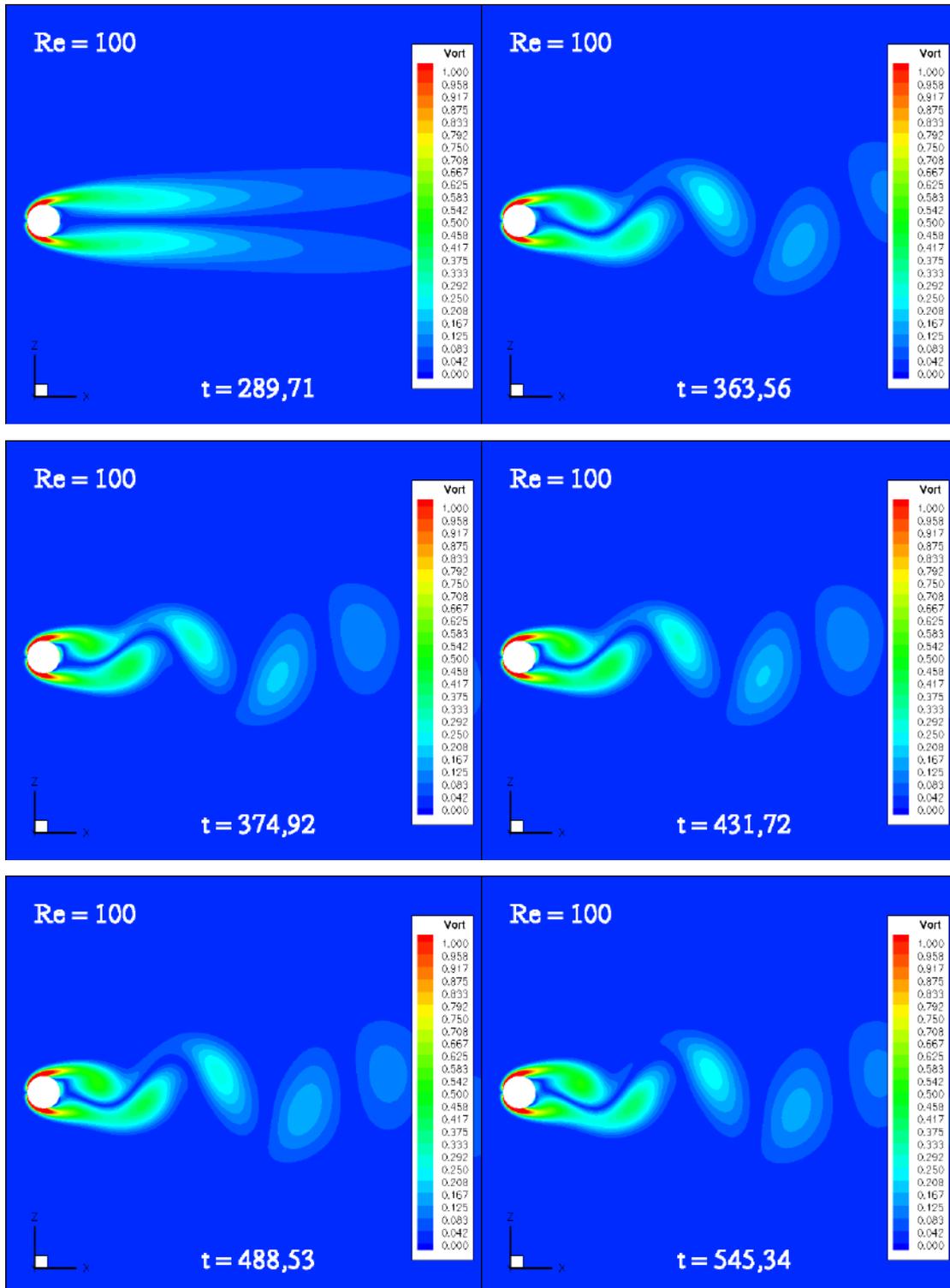
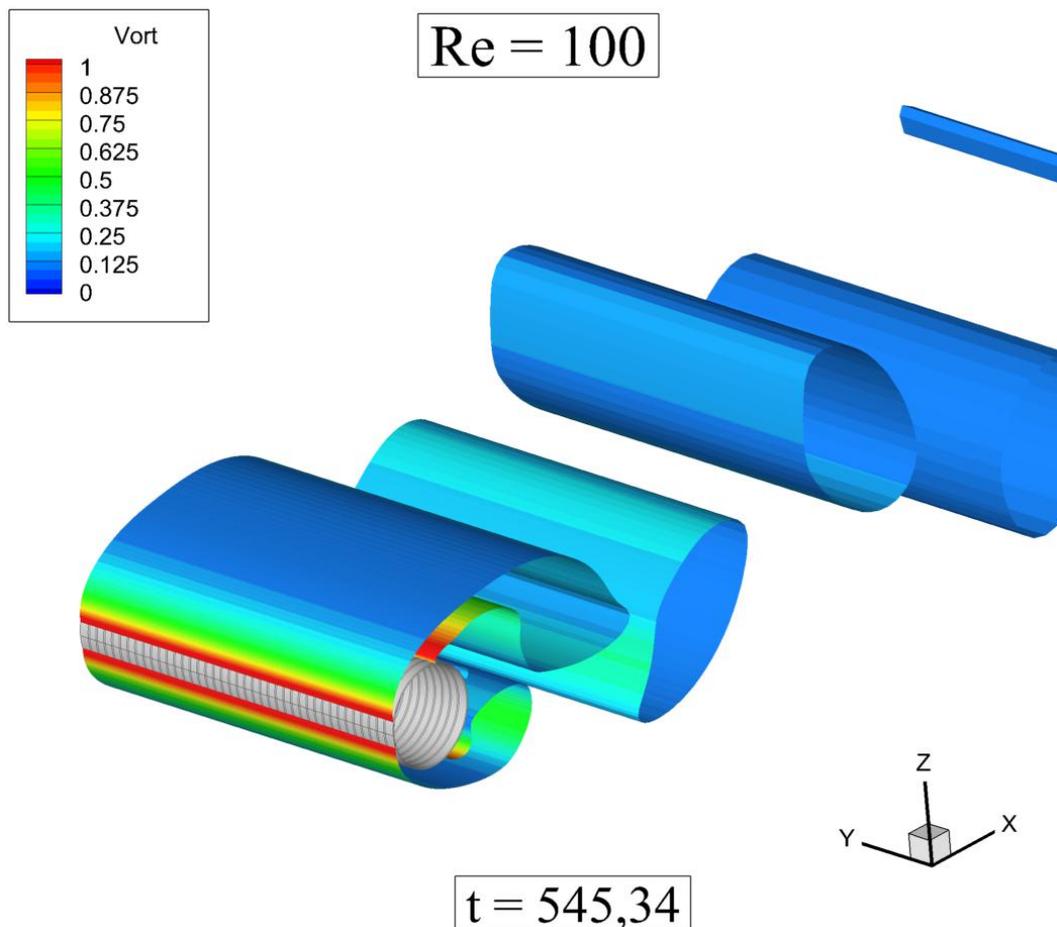


Figura 22: Distribuição da vorticidade variando com o tempo ( $Re=100$ )

### 4.2.3 Critério-Q (*Q-Criterion*)

A fim de avaliar em mais detalhe a esteira de vórtices de von Kármán, a isossuperfície de Critério-Q é plotada na Figura 23 com contorno de vorticidade colorindo a isossuperfície. Podemos observar como este método é capaz de identificar melhor os vórtices gerados a cada ciclo.

Na Figura 23, podemos notar que, como a esteira não é turbulenta, não há variação dos valores plotados na direção do eixo *y*, ou seja, ao longo do corpo do cilindro.

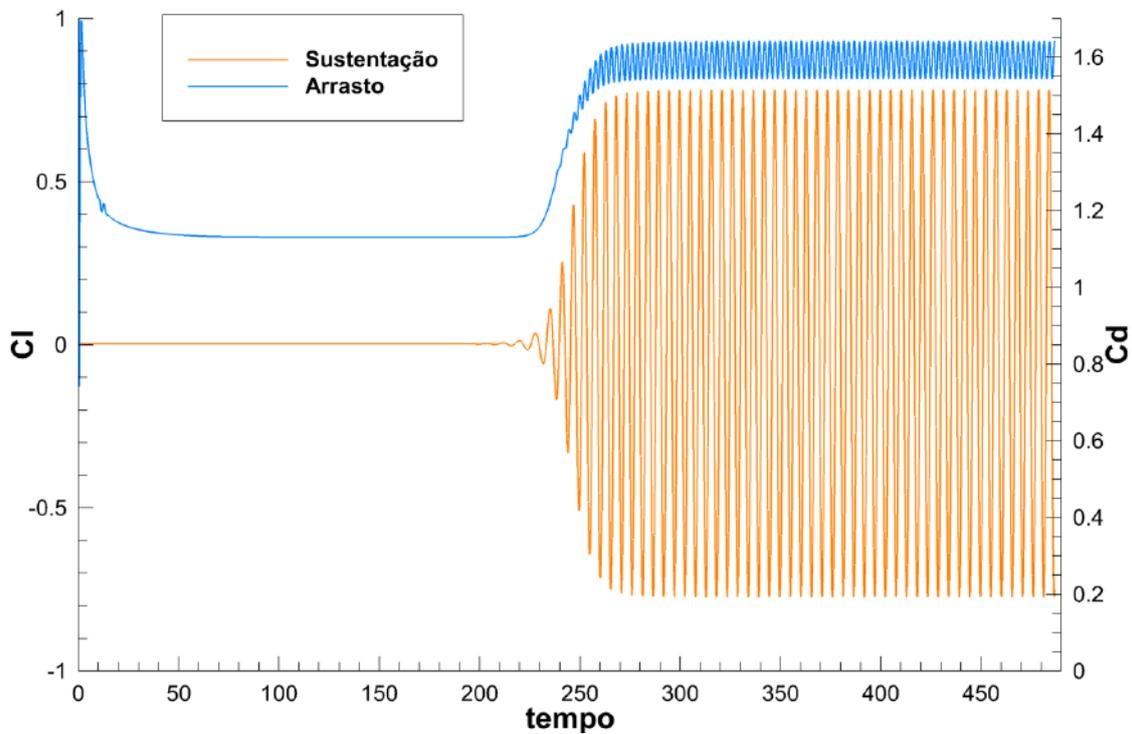


*Figura 23: Distribuição de Critério-Q ao longo de todo o cilindro ( $Re=100$ )*

### 4.3 Número de Reynolds = 200

De maneira análoga à simulação para Reynolds 100, neste caso, também há despreendimento de vórtices após o total desenvolvimento do escoamento e, conseqüentemente, há geração de forças transversais atuando no cilindro, o que pode ser observado através da variação no coeficiente de sustentação além do aumento da força de

arrasto para esta nova situação. Este comportamento pode ser visto no gráfico da Figura 24 a seguir.



*Figura 24: Coeficientes das forças de arrasto e sustentação ( $Re=200$ )*

Podemos notar que após o desenvolvimento do escoamento ao redor do cilindro, por volta do tempo igual a 280, os coeficientes passam a ter um comportamento cíclico e esperado para este tipo de escoamento. O coeficiente de arrasto médio encontrado foi igual a 1,59 e o valor médio do coeficiente de sustentação igual a 0,54.

### 4.3.1 Coeficiente de Pressão

Novamente, os resultados a seguir serão mostrados no plano  $xz$  na metade do comprimento do cilindro, já que para este número de Reynolds a esteira não é turbulenta fazendo com que todas as 40 fatias da malha possuam os mesmos resultados, apesar do problema ser tridimensional. Na Figura 25, podemos ver o comportamento do coeficiente de pressão  $C_p$  durante a simulação.

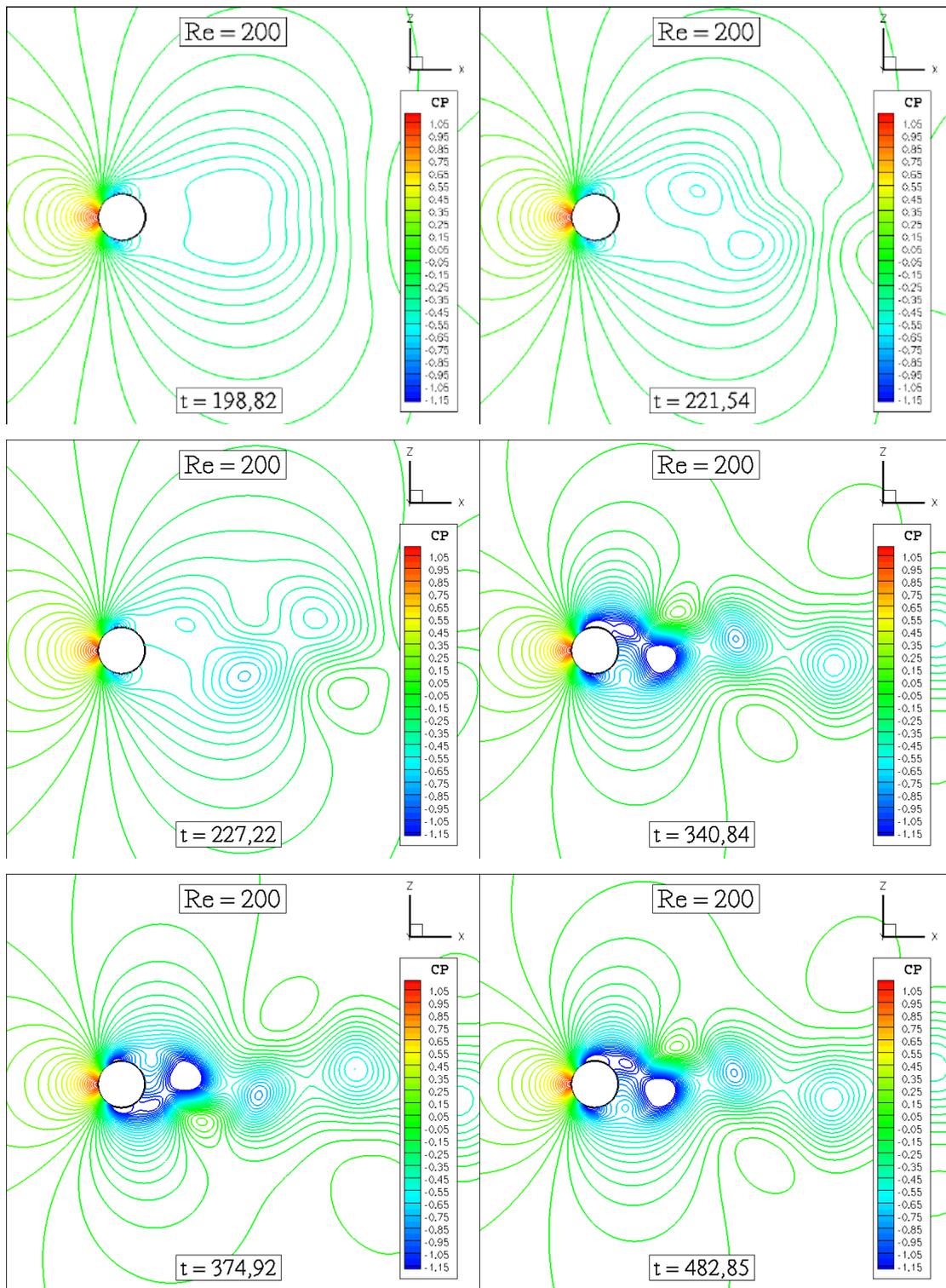


Figura 25: Coeficiente de pressão variando com o tempo ( $Re=200$ )

### 4.3.2 Vorticidade

A distribuição da vorticidade da esteira de vórtices de von Kármán à jusante do cilindro circular pode ser vista na Figura 26 a seguir. Como no caso anterior, no regime de

escoamento simulado para número de Reynolds 200, dois vórtices são liberados alternadamente em cada ciclo.

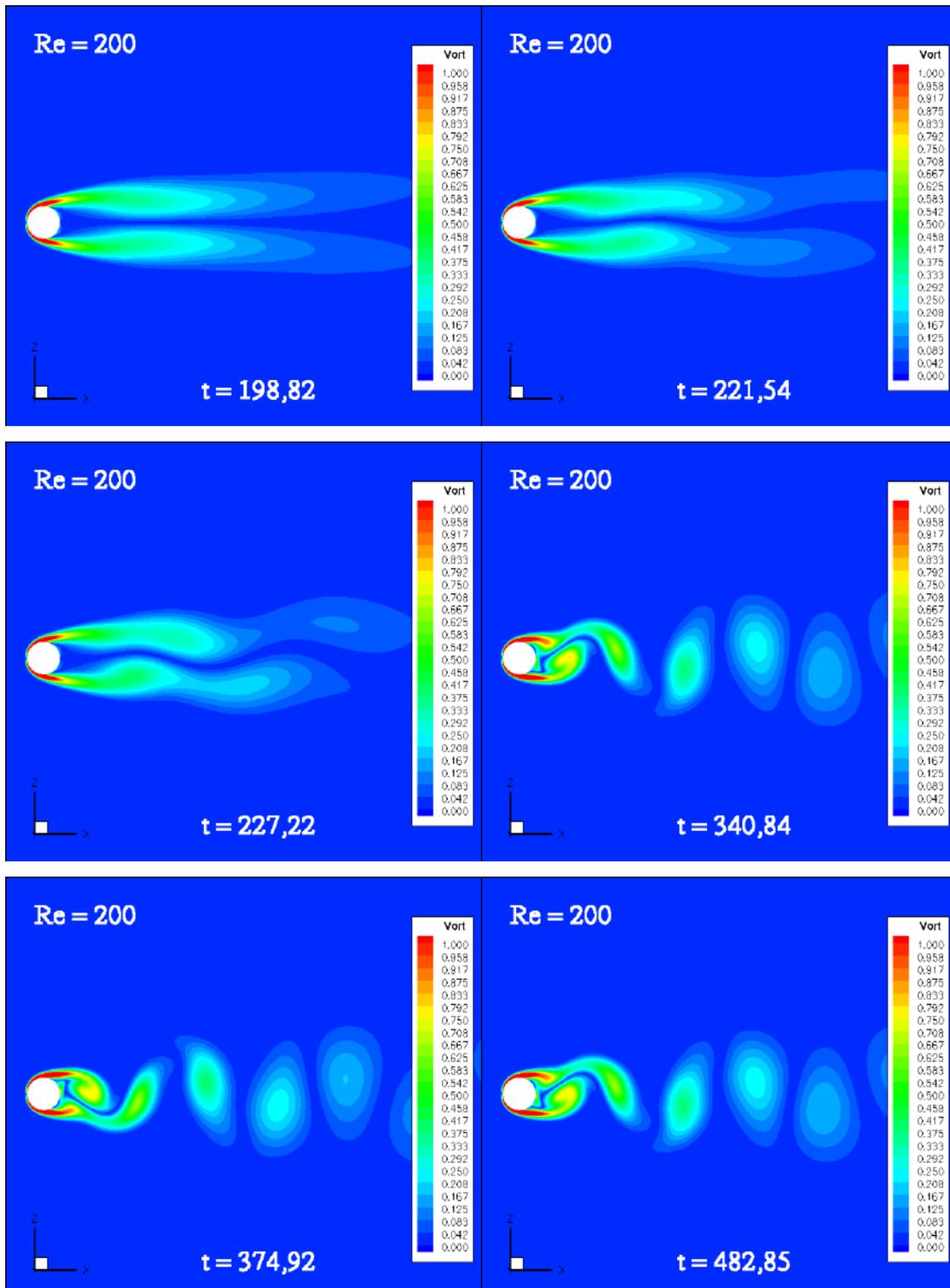
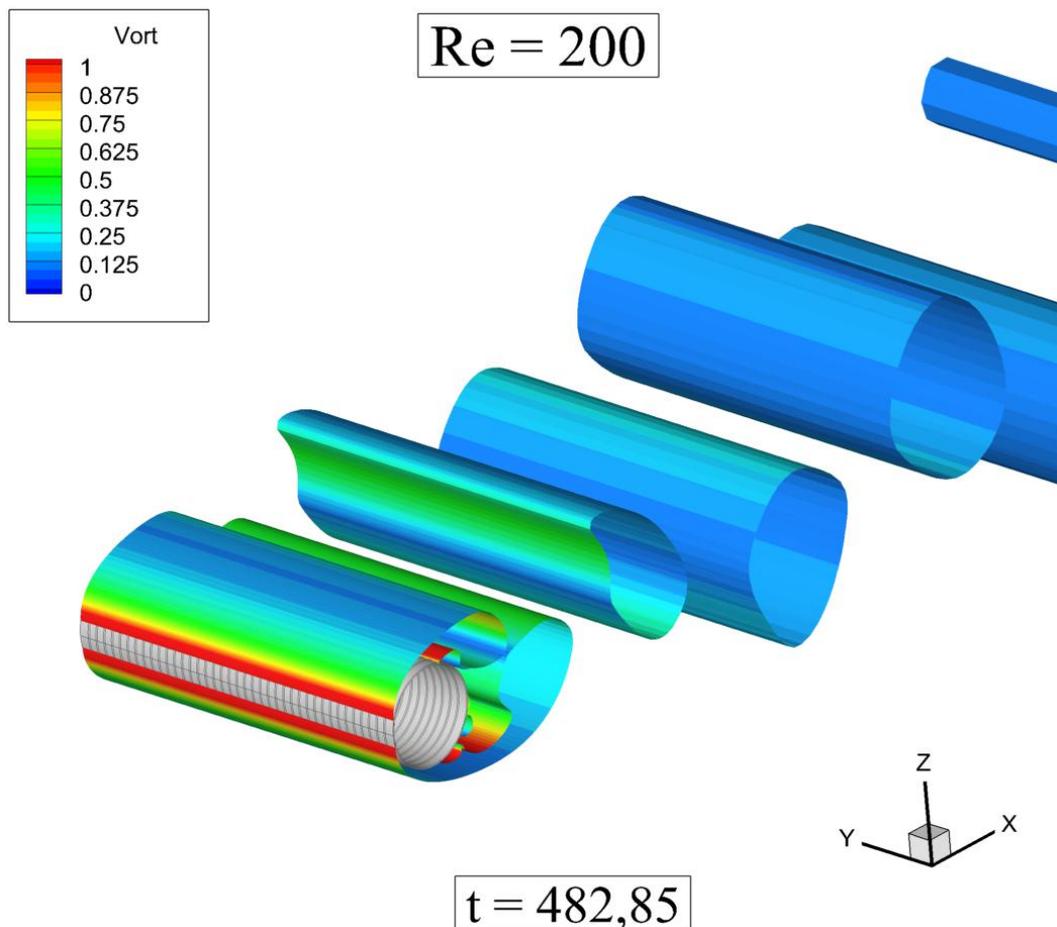


Figura 26: Distribuição da vorticidade variando com o tempo ( $Re=200$ )

### 4.3.3 Critério-Q (*Q-Criterion*)

A fim de avaliar em mais detalhe a esteira de vórtices de von Kármán, a isossuperfície de Critério-Q é plotada na Figura 27 com contorno de vorticidade colorindo a isossuperfície. Mais uma vez, podemos observar como este método é capaz de identificar melhor os vórtices gerados a cada ciclo.

Na Figura 27, podemos notar que, como a esteira não é turbulenta, não há variação dos valores plotados na direção do eixo y, ou seja, ao longo do corpo do cilindro.

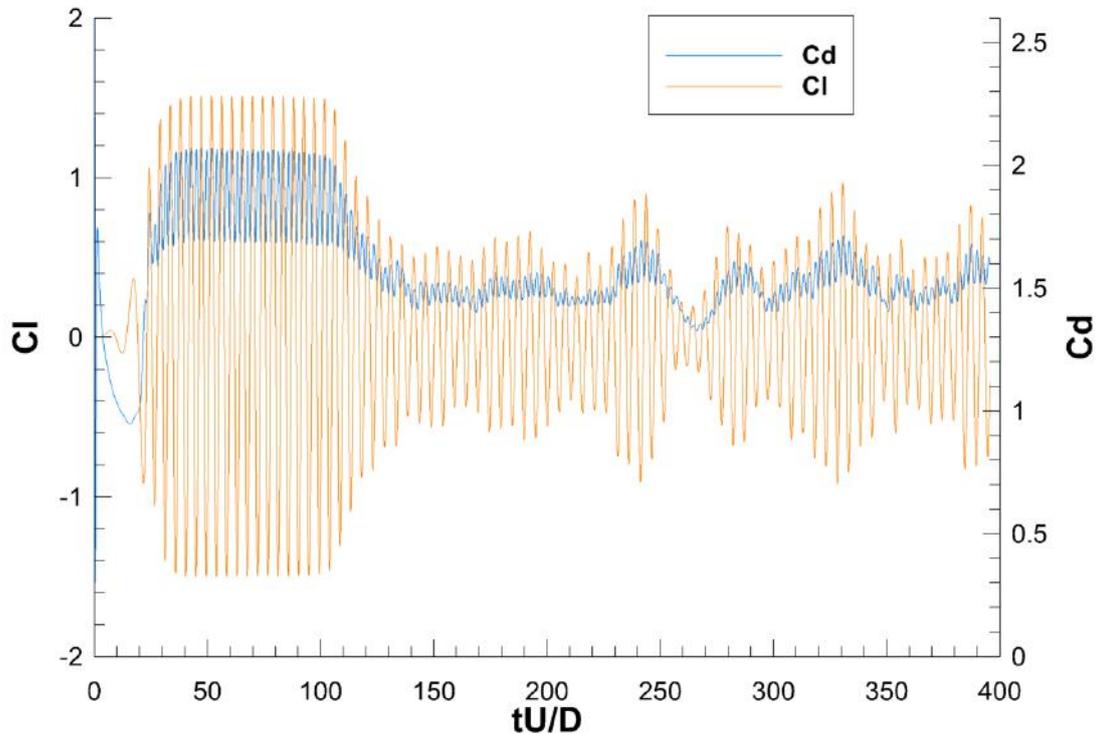


*Figura 27: Distribuição de Critério-Q ao longo de todo o cilindro ( $Re=200$ )*

### 4.4 Número de Reynolds = 500

O gráfico da Figura 28 mostra os coeficientes de arrasto e sustentação para a simulação com número de Reynolds igual a 500. Pode-se notar que o escoamento só fica totalmente desenvolvido e turbulento a partir do tempo igual a 240, sendo o comportamento dos

coeficientes até este ponto muito semelhante às simulações para Reynolds 100 e 200, onde a esteira ainda não é turbulenta, mas já há desprendimento de vórtices.



*Figura 28: Coeficientes das forças de arrasto e sustentação ( $Re=500$ )*

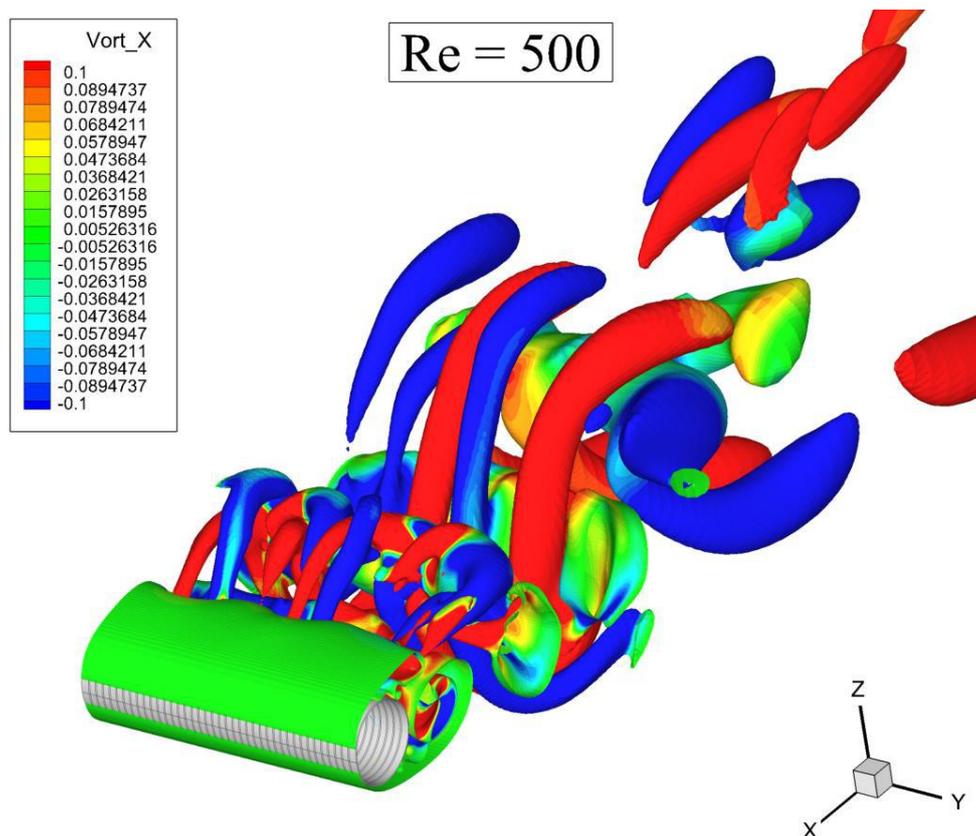
Podemos notar que, após o desenvolvimento do escoamento ao redor do cilindro, os coeficientes não possuem um comportamento periódico, ao contrário do que ocorreu com as simulações para Reynolds 100 e 200, caracterizando a natureza turbulenta da esteira para este tipo de escoamento. O coeficiente de arrasto médio encontrado foi igual a 1,46 e o valor médio do coeficiente de sustentação igual a 0,48.

#### **4.4.1 Critério-Q (*Q-Criterion*)**

Com a finalidade de se avaliar em mais detalhe os vórtices formados, fazemos uso da formulação do Critério-Q onde, na Figura 29, está plotada a isossuperfície de Critério-Q igual a 0,003 com contornos de cores representando a vorticidade na direção  $x$  do domínio. Pode-se notar os tubos longitudinais de vórtices formados na esteira do escoamento e esperados para este caso com número de Reynolds igual a 500.

Através do cascadeamento de frequência que ocorre no escoamento turbulento, energia é transferida das grandes escalas para as pequenas escalas da turbulência. Na Figura 29, as estruturas longitudinais pintadas em vermelho possuem vorticidade na direção  $x$  positiva, enquanto que as estruturas longitudinais pintadas de azul possuem vorticidade negativa. Esta configuração evidencia a ocorrência de *vortex turning* e *vortex stretching*, que são uma característica dos escoamentos turbulentos e uma possível explicação para o cascadeamento de frequência.

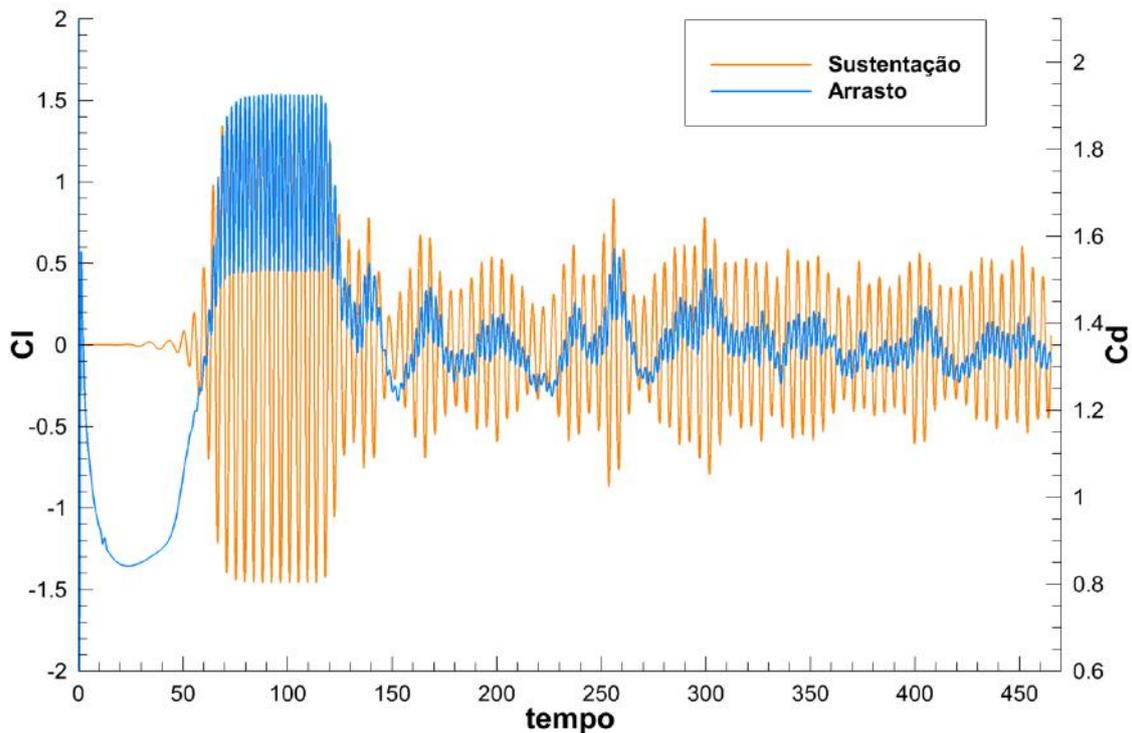
Este critério de definição de vórtices é capaz de identificar melhor os vórtices gerados a cada ciclo, e nos permite visualizar a esteira turbilhonar tridimensional característica em escoamentos turbulentos, evidenciada através da variação da formação de vórtices na direção  $y$  do domínio.



**Figura 29:** Distribuição de Critério- $Q$  ao longo de todo o cilindro ( $Re=500$ )

## 4.5 Número de Reynolds = 1000

O gráfico da Figura 30 mostra a série temporal dos coeficientes de arrasto e sustentação para a simulação com número de Reynolds igual a 1000. Pode-se notar que o escoamento só fica totalmente desenvolvido e turbulento a partir do tempo igual a 140, sendo o comportamento dos coeficientes até este ponto muito semelhante às simulações para Reynolds 100 e 200, onde a esteira não é turbulenta, mas já há desprendimento de vórtices.



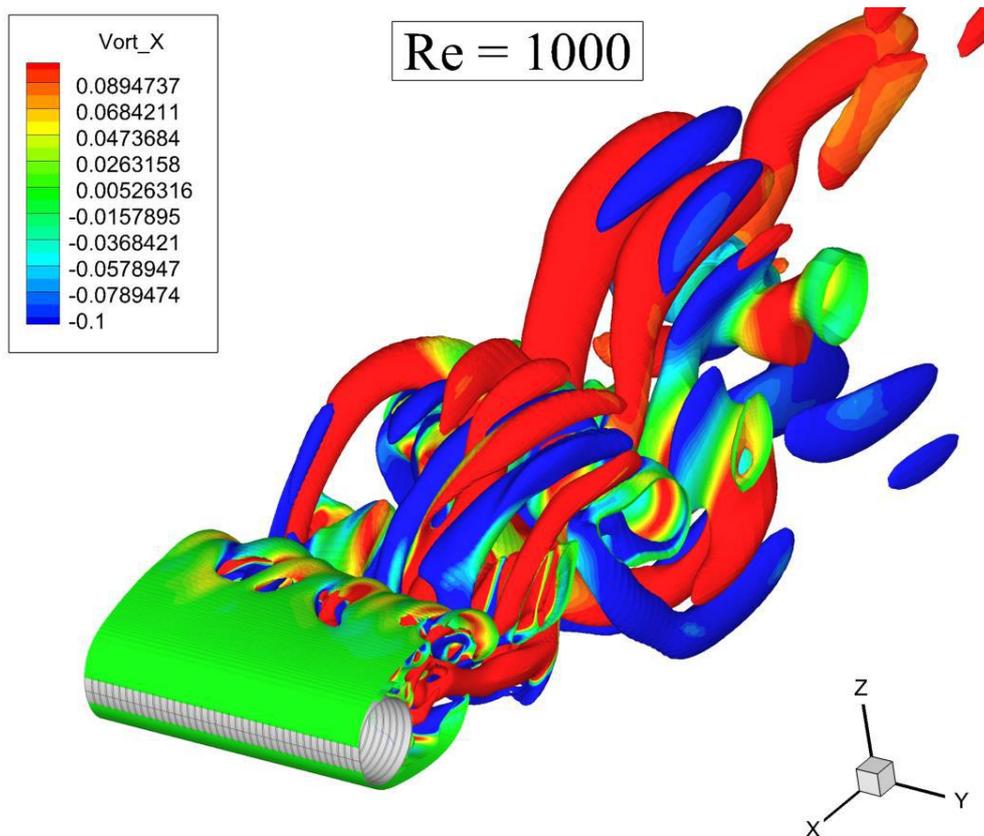
**Figura 30:** Coeficientes das forças de arrasto e sustentação ( $Re=1000$ )

É perceptível que, após o desenvolvimento do escoamento ao redor do cilindro, os coeficientes não possuem um comportamento periódico, ao contrário do que ocorreu com as simulações para Reynolds 100 e 200, caracterizando a natureza turbulenta da esteira para este tipo de escoamento. O coeficiente de arrasto médio encontrado foi igual a 1,34 e o valor médio do coeficiente de sustentação igual a 0,32.

### 4.5.1 Critério-Q (*Q-Criterion*)

Como no caso anterior, para se avaliar em mais detalhe os vórtices formados fazemos uso da formulação do Critério-Q, onde, na Figura 31, está plotada a isossuperfície de Critério-Q igual a 0,003 com contornos de cores representando a vorticidade na direção  $x$  do domínio. Pode-se notar os tubos longitudinais de vórtices formados na esteira do escoamento e esperados para este caso com número de Reynolds igual a 1000.

Através do cascadeamento de frequência que ocorre no escoamento turbulento, energia é transferida das grandes escalas para as pequenas escalas da turbulência. Novamente, na Figura 31, as estruturas longitudinais pintadas em vermelho possuem vorticidade na direção  $x$  positiva, enquanto que as estruturas longitudinais pintadas de azul possuem vorticidade negativa. Esta configuração evidencia a ocorrência de *vortex turning* e *vortex stretching*, que são uma característica dos escoamentos turbulentos e uma possível explicação para o cascadeamento de frequência.



**Figura 31:** Distribuição de Critério-Q ao longo de todo o cilindro ( $Re=1000$ )

Este critério de definição de vórtices é capaz de identificar melhor os vórtices gerados a cada ciclo, e nos permite visualizar a esteira turbilhonar tridimensional característica em escoamentos turbulentos, evidenciada através da variação da formação de vórtices na direção  $y$  do domínio.

## 4.6 Comparação com Resultados anteriores

A Tabela 5 a seguir mostra a comparação dos resultados obtidos no presente estudo numérico com outros dados bem aceitos da literatura, tanto numéricos quanto experimentais.

**Tabela 5:** Comparação com resultados anteriores

Referência	$Re$	$C_d$	$C_L$	$St$	Comment
Herfjorf (1995)	100	1,36	0,34	0,168	FEM
	200	1,35	0,70	0,196	nodes, $dt$
	1000	1,47	1,45	0,234	10080, 0,002
Rengel e Sphaier (1999)	100	1,36	0,32	0,173	FVM
	200	1,35	0,67	0,203	(180 x 160)
	1000	1,60	1,70	0,225	
Norberg (2003)	100	-	0,32	0,164	
	200	-	0,53	0,182	Experimental
	1000	-	0,08	0,210	
Wieselsberger (1921)	100	1,41	-	-	
	200	1,29	-	-	Experimental
	1000	0,99	-	-	
Wanderley (2008)	100	1,30	0,25	0,158	FDM
	200	1,27	0,51	0,187	(200 x 100)
	1000	0,96	0,22	0,193	
Estudo atual (Malha 1b)	100	1,59	0,27	0,163	FVM
	200	1,59	0,55	0,187	(200 x 200 x 200)
	500	1,46	0,49	0,197	
	1000	1,34	0,33	0,206	
Estudo atual (Malha 2b)	500	1,48	0,39	0,200	FVM
	1000	1,33	0,14	0,200	(200 x 200 x 200)

Nota-se que os resultados obtidos para os valores de  $C_d$ ,  $C_L$  e número de Strouhal possuem o mesmo comportamento com o aumento do número de Reynolds dos resultados obtidos por WANDERLEY *et. al* (2008), além de concordarem, em parte, com os resultados experimentais de NORBERG (2003) E WIESELSBERGER (1921). Já em comparação

com os resultados numéricos obtidos por HERFJORF (1995) e RENGEL e SPHAIER (1999) nota-se que os resultados do presente estudo foram qualitativamente superiores a estes, principalmente para o caso de Reynolds igual a 1000.

Com base nos resultados obtidos e mostrados no presente capítulo, o código computacional, a malha utilizada e os métodos de solução numéricos escolhidos para a solução do problema de um escoamento incidindo sobre um cilindro circular fixo mostram estar validada a metodologia e abordagem aqui utilizadas para estudar o problema do escoamento incidindo sobre um cilindro circular rígido elasticamente montado com um grau de liberdade.

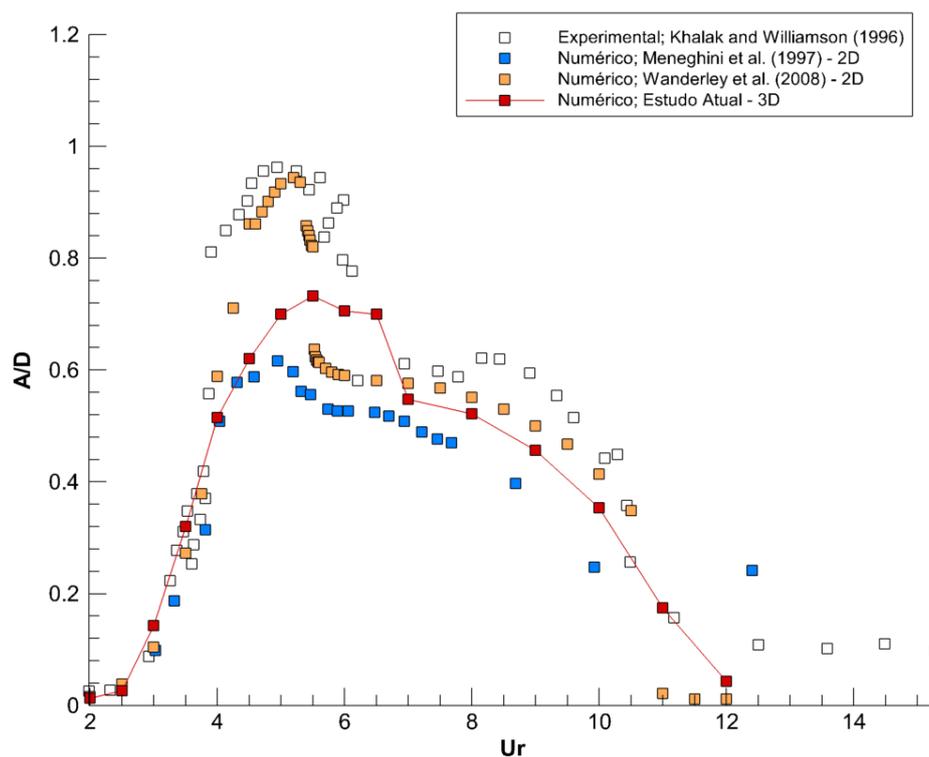
## 5. Resultados do Cilindro Elasticamente Montado

Os resultados obtidos para as simulações do cilindro circular rígido elasticamente montado são mostrados a seguir em três seções, a primeira destacando a curva de amplitudes de resposta do cilindro, a segunda a curva de frequências e a terceira a curva avaliando o ângulo de fase entre a resposta do cilindro e o coeficiente de sustentação do mesmo. Todas as curvas foram obtidas através das simulações de cada velocidade reduzida, variando numa faixa entre 2 e 12, com incremento de 0,5 a cada nova simulação.

### 5.1 Amplitude de Resposta

A curva de amplitudes de resposta obtida para as simulações do cilindro circular rígido elasticamente montado é mostrado na Figura 32. É possível notar que o código computacional gerado não foi capaz de reproduzir a amplitude máxima obtida experimentalmente por KHALAK E WILLIAMSON (1996) e numericamente por WANDERLEY *et. al* (2008). Os resultados obtidos pelo estudo atual apresentam o mesmo comportamento de MENEGHINI (1997), porém com amplitude máxima maior, ou seja, com a metodologia adotada não foi possível capturar as características da transição do *inicial branch* para o *upper branch*, devidamente capturada por WANDERLEY *et. al* (2008) e identificada por KHALAK E WILLIAMSON (1996).

Possivelmente, a amplitude máxima de resposta observada por KHALAK e WILLIAMSON (1996) e reproduzida por WANDERLEY (2008) em seu estudo numérico não foi obtida no presente estudo pelo uso de dissipação numérica.



**Figura 32** – Curva de amplitude de resposta do cilindro ( $A/D$ ) contra velocidade reduzida ( $U_r$ ), comparando os resultados obtidos no presente estudo com os de WANDERLEY (2008), MENEGHINI (1997) e KHALAK e WILLIAMSOM (1996).

## 5.2 Comportamento da Vibração

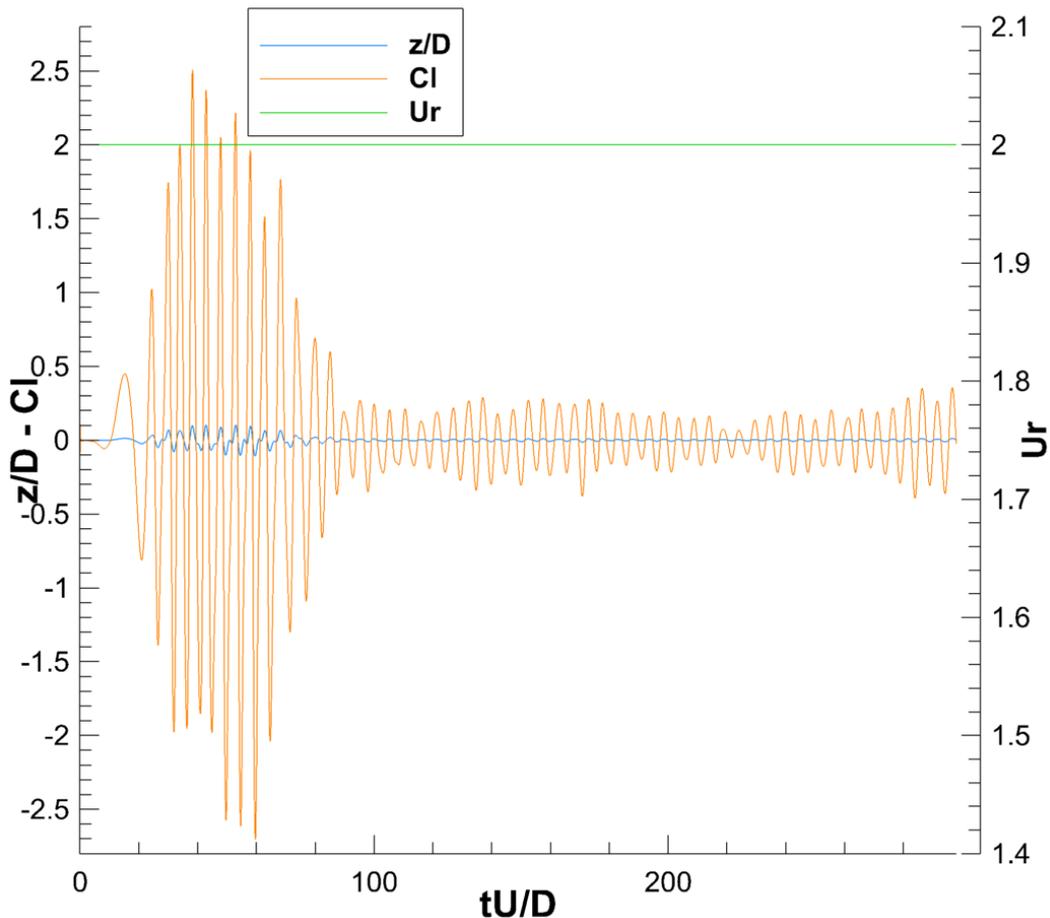
A seguir, faremos uma análise do comportamento de resposta do cilindro circular para as diferentes faixas de velocidade reduzida simuladas.

### 5.2.1 Velocidade Reduzida 2.0

Podemos ver na Figura 33, o gráfico de resposta para a velocidade reduzida  $U_r = 2.0$ , onde são plotados o coeficiente de sustentação  $C_L$ , em laranja, o deslocamento do centro do cilindro  $z/D$ , em azul e a variação da velocidade reduzida  $U_r$ , em verde.

Pode-se notar uma grande perturbação no início das curvas de resposta, atribuída à inicialização e adequação do método numérico à simulação. Tal perturbação não foi encontrada em nenhuma das outras 15 simulações realizadas. Nota-se também que após

a perturbação e consequente estabilização, a resposta se torna quase periódica, como esperado e identificado por KHALAK E WILLIAMSOM (1999) para velocidades reduzidas que englobam o *initial branch*. Além disso, outra característica identificada por KHALAK E WILLIAMSOM (1999) que a simulação desenvolvida conseguiu reproduzir é o ângulo de fase próximo a zero entre as curvas de deslocamento do cilindro e coeficiente de sustentação.



**Figura 33** – Gráfico da resposta de vibração do cilindro para  $Ur=2,0$ . Em laranja, é plotado o coeficiente de sustentação  $C_L$ , em azul a curva representando o deslocamento do cilindro e em verde e a variação da velocidade reduzida, que neste caso se manteve constante.

### 5.2.1.1 Vorticidade

A distribuição da vorticidade para a simulação com velocidade reduzida igual a 2 pode ser vista no plano  $xz$  mostrado na Figura 34 a seguir. Podemos notar que para esta velocidade reduzida, o modo de liberação de vórtices identificado foi o modo 2S, onde a cada ciclo, 2 vórtices são liberados. Este resultado está de acordo com o comportamento

esperado para esta velocidade reduzida e é compatível com os resultados obtidos por KHALAK E WILLIAMSON (1999).

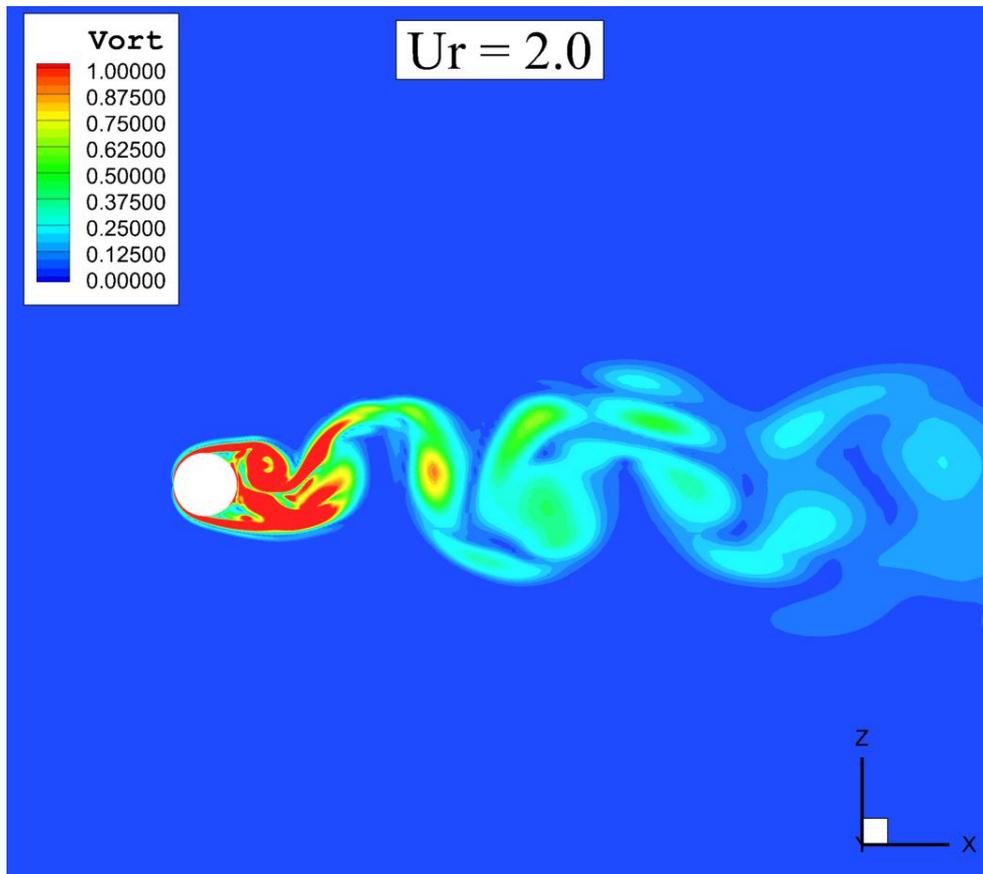
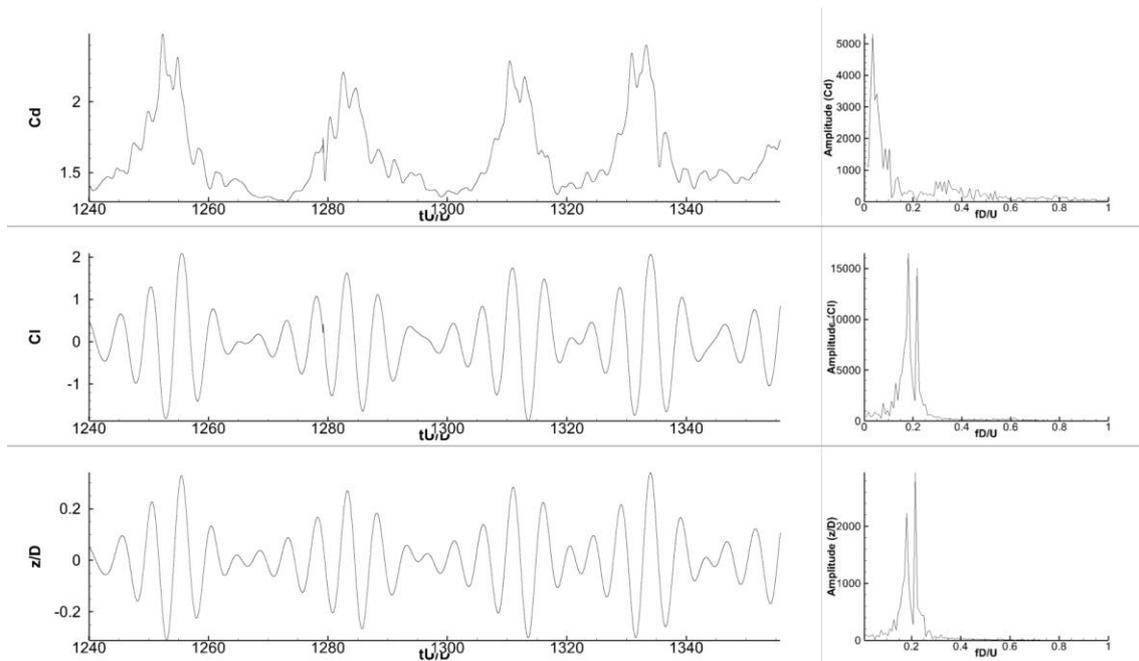


Figura 34 – Distribuição da vorticidade para  $U_r=2.0$

### 5.2.2 Velocidade Reduzida 3.5

A Figura 35 mostra as séries temporais do coeficiente de sustentação, do coeficiente de arrasto e do deslocamento do cilindro, bem como suas respectivas transformadas rápidas de Fourier.

Mais uma vez, nota-se que após a transição da velocidade reduzida de 3,0 para 3,5, a resposta do cilindro passa a possuir uma característica quase periódica, novamente como esperado para esta simulação e identificado por KHALAK e WILLIAMSON (1999). Novamente, também é possível identificar na Figura 35 que o ângulo de fase entre as curvas do coeficiente de sustentação e deslocamento do cilindro ainda permanece próximo a zero. Além disso, duas frequências podem ser identificadas no gráfico de transformadas rápidas de Fourier da série temporal do deslocamento, sendo este resultado muito semelhante aos obtidos por KHALAK e WILLIAMSON (1999) o que ocorreu também para todas as velocidades reduzidas simuladas e compreendidas entre 2,0 e 4,0.



**Figura 35** – Gráfico da resposta de vibração do cilindro para  $Ur=3,5$  com as séries temporais do arrasto, sustentação e deslocamento e suas respectivas transformadas rápidas de Fourier.

No Apêndice I, todos os gráficos de deslocamento do cilindro, coeficiente de sustentação, coeficiente de arrasto e suas respectivas transformadas rápidas de Fourier são apresentados para todas as velocidades reduzidas simuladas.

### 5.2.2.1 Vorticidade

A distribuição da vorticidade para a simulação com velocidade reduzida igual a 3,5 pode ser vista no plano  $xz$  mostrado na Figura 36 a seguir. Podemos notar que para esta velocidade reduzida, novamente, o modo de liberação de vórtices identificado foi o modo 2S, onde a cada ciclo 2 vórtices são liberados. Este resultado também está de acordo com o comportamento esperado para esta velocidade reduzida e é compatível com os resultados obtidos por KHALAK E WILLIAMSON (1999).

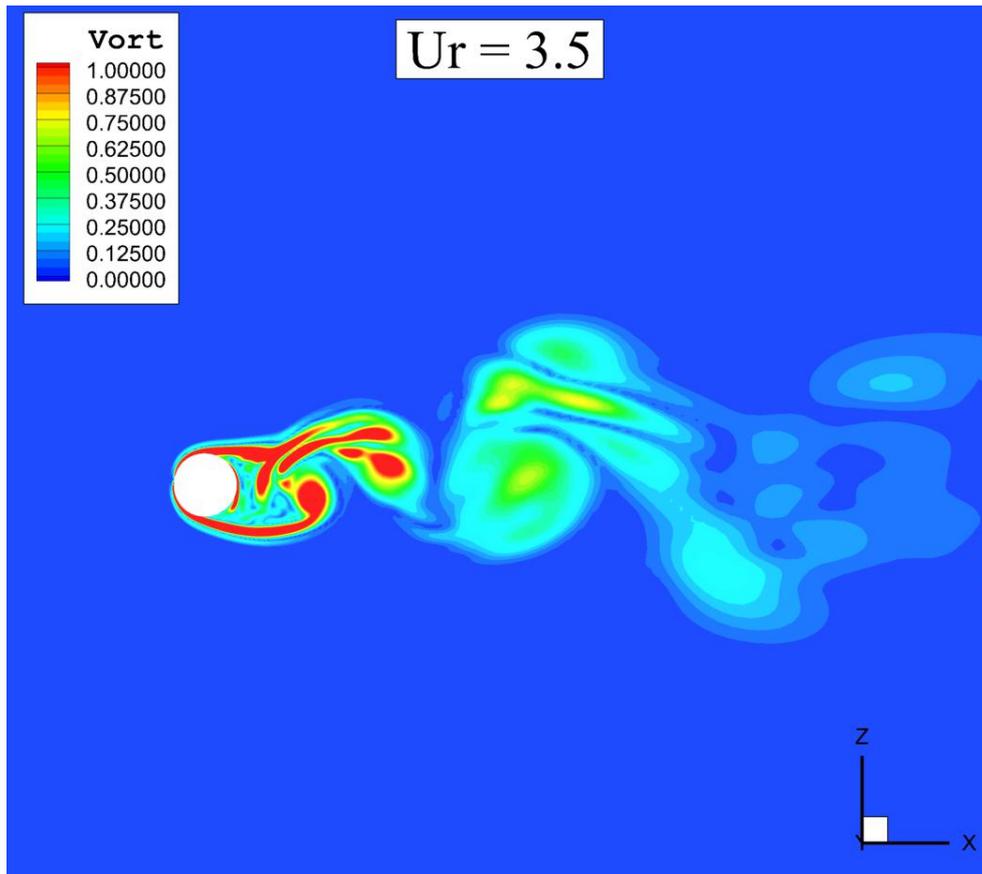


Figura 36 – Distribuição da vorticidade para  $Ur=3.5$

### 5.2.2.2 Critério-Q (*Q-Criterion*)

Na Figura 37, podemos avaliar em mais detalhe os vórtices formados, através do uso do Critério-Q. Nesta figura, está plotada a isossuperfície de Critério-Q igual a 0,003 com contornos de cores representando a vorticidade na direção  $x$  do domínio. Como nos casos de Reynolds 500 e 1000 nas simulações para o cilindro fixo, pode-se notar os tubos longitudinais de vórtices formados na esteira do escoamento.

Através do cascadeamento de frequência que ocorre no escoamento turbulento, energia é transferida das grandes escalas para as pequenas escalas da turbulência. Podemos ver na Figura 37 que as estruturas longitudinais pintadas de vermelho possuem vorticidade na direção  $x$  positiva, enquanto que as estruturas longitudinais pintadas de azul possuem vorticidade negativa. Esta configuração evidencia a ocorrência de *vortex turning* e *vortex stretching*, que são características dos escoamentos turbulentos e uma possível explicação para o cascadeamento de frequência. Estes fenômenos causam o surgimento da componente da vorticidade na direção  $x$ , que anteriormente não existia, como pode ser visto na região pintada de verde próxima ao cilindro, com valor próximo de zero.

O Critério-Q de identificação de vórtices é capaz de identificar melhor os vórtices gerados a cada ciclo, e nos permite visualizar a esteira turbilhonar tridimensional, característica em escoamentos turbulentos, evidenciada através da variação da formação de vórtices na direção y do domínio.

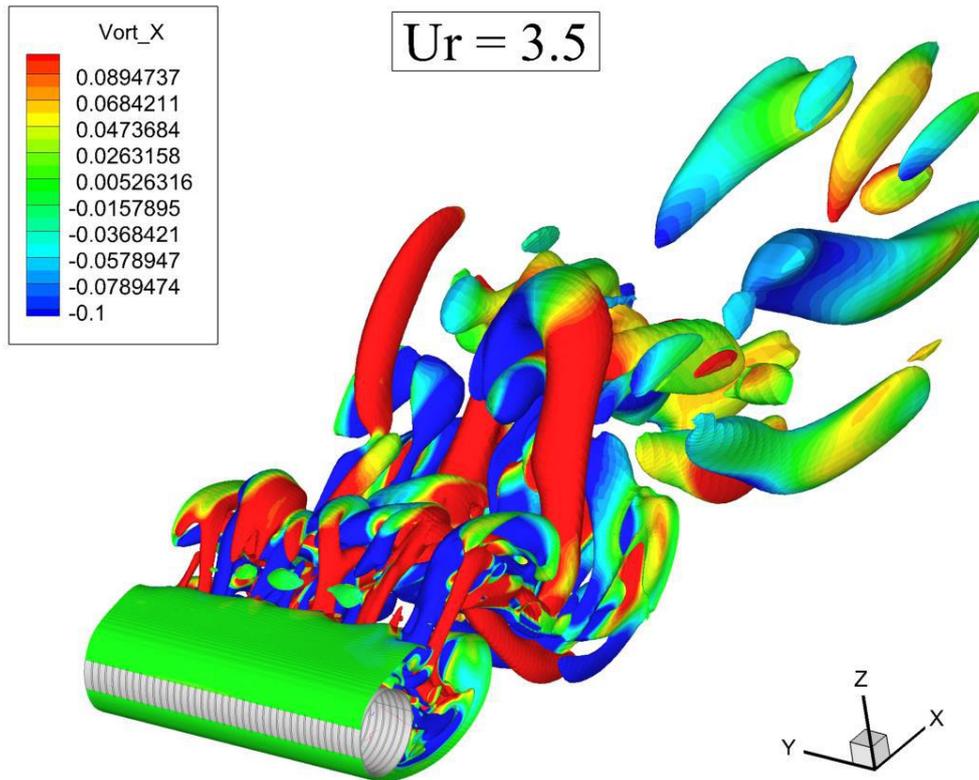


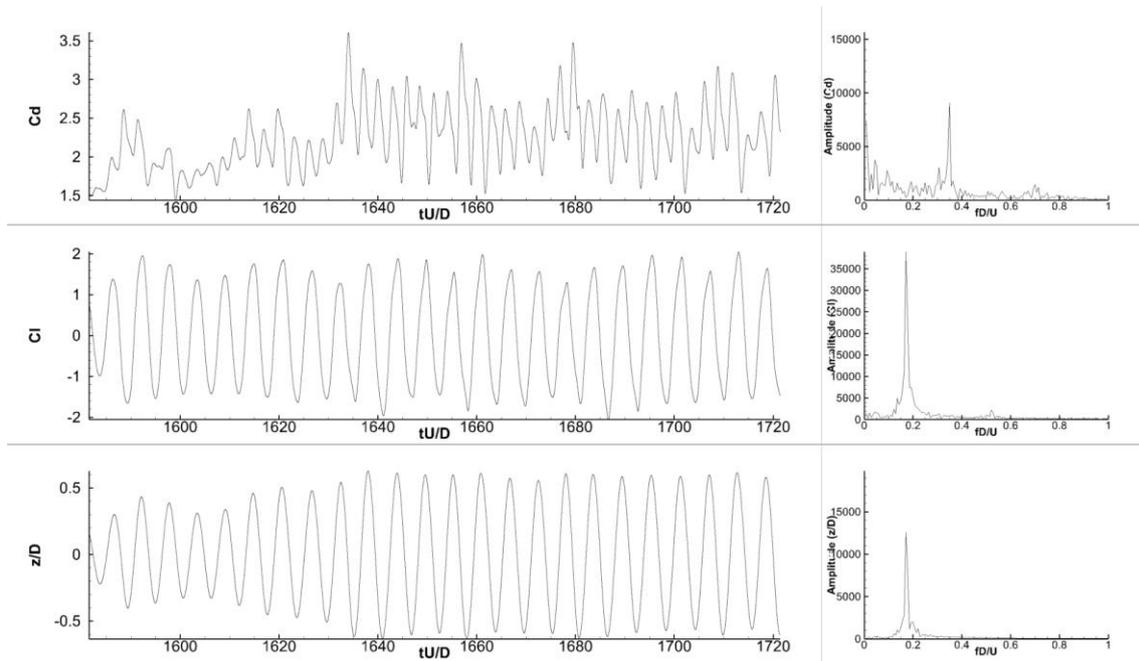
Figura 37 – Isossuperfície de Critério-Q com contornos de vorticidade na direção x para  $Ur=3,5$

### 5.2.3 Velocidade Reduzida 4.5

A Figura 38 mostra as séries temporais do coeficiente de sustentação, do coeficiente de arrasto e do deslocamento do cilindro, bem como suas respectivas transformadas de Fourier.

Neste caso, a velocidade reduzida 4,5 ainda é considerada por KHALAK E WILLIAMSON (1999) constituindo o *initial branch*, entretanto está muito próxima da transição para o *upper branch* e novamente, como identificado pelos autores supracitados, a resposta passa a ter um caráter periódico, como pode ser visto na Figura 38. Além disso, como nos itens anteriores, a curva de deslocamento e a curva do coeficiente de

sustentação encontram-se com ângulo de fase próximo a zero. E ao contrário das simulações anteriores, esta é a primeira que possui apenas uma frequência no gráfico de transformada rápida de Fourier da série temporal do deslocamento do cilindro.



**Figura 38** – Gráfico da resposta de vibração do cilindro para  $Ur=4,5$  com as séries temporais do arrasto, sustentação e deslocamento e suas respectivas transformadas rápidas de Fourier.

### 5.2.3.1 Vorticidade

A distribuição da vorticidade para a simulação com velocidade reduzida igual a 4,5 pode ser vista no plano  $xz$  mostrado na Figura 39. Podemos notar que para esta velocidade reduzida o modo de liberação de vórtices parece estar transitando de 2S para 2P, onde nota-se o início da formação de um segundo vórtice. Este resultado indica a transição entre o *initial branch* e o *upper branch*.

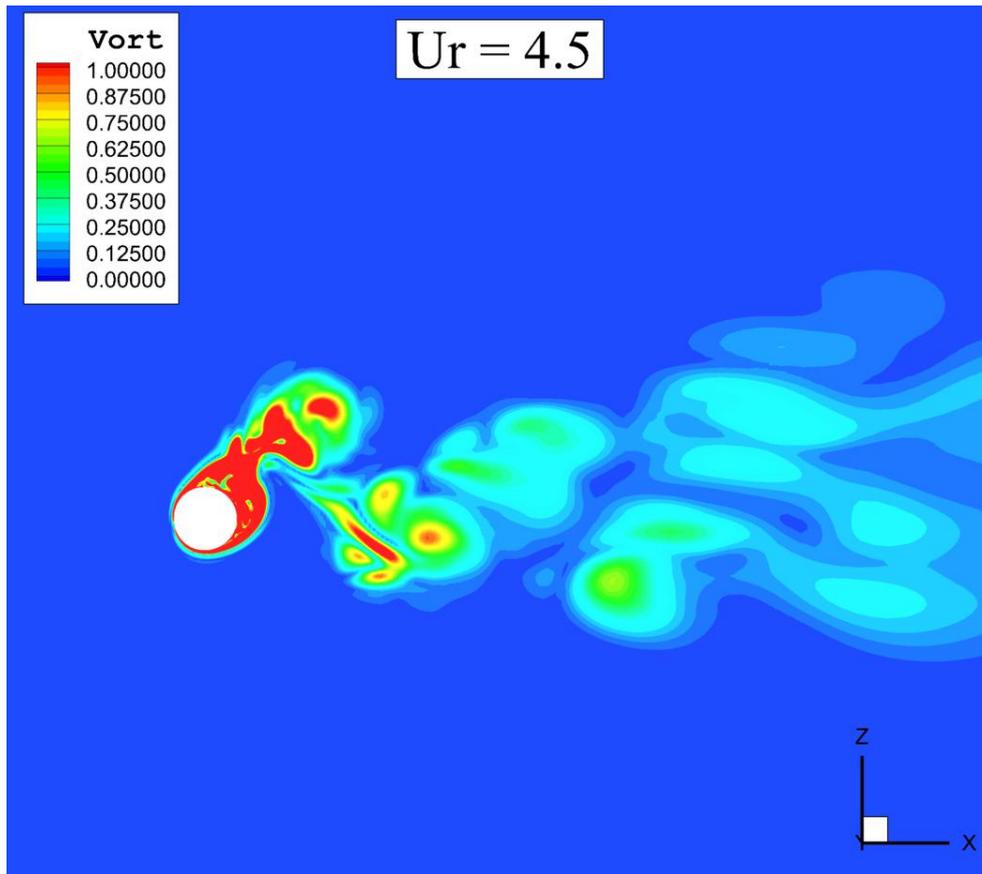
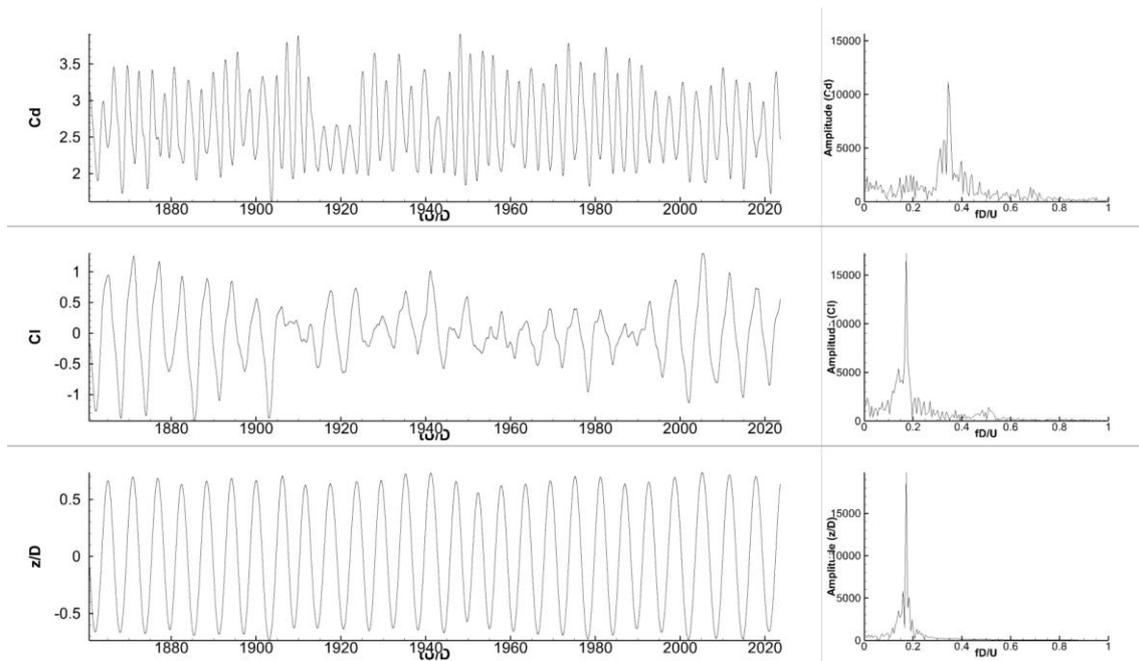


Figura 39 – Distribuição da vorticidade para  $U_r=4.5$

### 5.2.4 Velocidade Reduzida 5.5

Como dito anteriormente na Seção 5.1, as simulações realizadas neste estudo não foram capazes de reproduzir a variação na amplitude de deslocamento característica da transição entre o *initial branch* e o *upper branch*, entretanto, a curva de amplitudes x velocidade reduzida obtida nas simulações apresentou o mesmo comportamento de outros estudos. A seguir, na Figura 40, é mostrado o gráfico da mesma maneira que nos itens anteriores, onde podemos identificar na série temporal do deslocamento a maior variação na amplitude do movimento do cilindro obtida neste estudo. Neste caso, a resposta ainda é considerada periódica, porém podemos começar a notar uma tendência à mudança do ângulo de fase entre as séries temporais do coeficiente de sustentação e deslocamento do cilindro. Novamente, apenas uma frequência foi identificada através da transformada rápida de Fourier da série temporal do deslocamento.



**Figura 40** – Gráfico da resposta de vibração do cilindro para  $Ur=5,5$  com as séries temporais do arrasto, sustentação e deslocamento e suas respectivas transformadas rápidas de Fourier.

#### 5.2.4.1 Vorticidade

A distribuição da vorticidade para a simulação com velocidade reduzida igual a 5,5 pode ser vista no plano  $xz$  mostrado na Figura 41. Podemos notar que para esta velocidade reduzida o modo de liberação de vórtices mudou, tendo o mesmo comportamento que o modo 2P, onde a cada ciclo 2 pares de vórtices são liberados. Este resultado também está de acordo com o comportamento esperado para esta velocidade reduzida e é compatível com os resultados obtidos por KHALAK E WILLIAMSON (1999) para o *upper branch*.

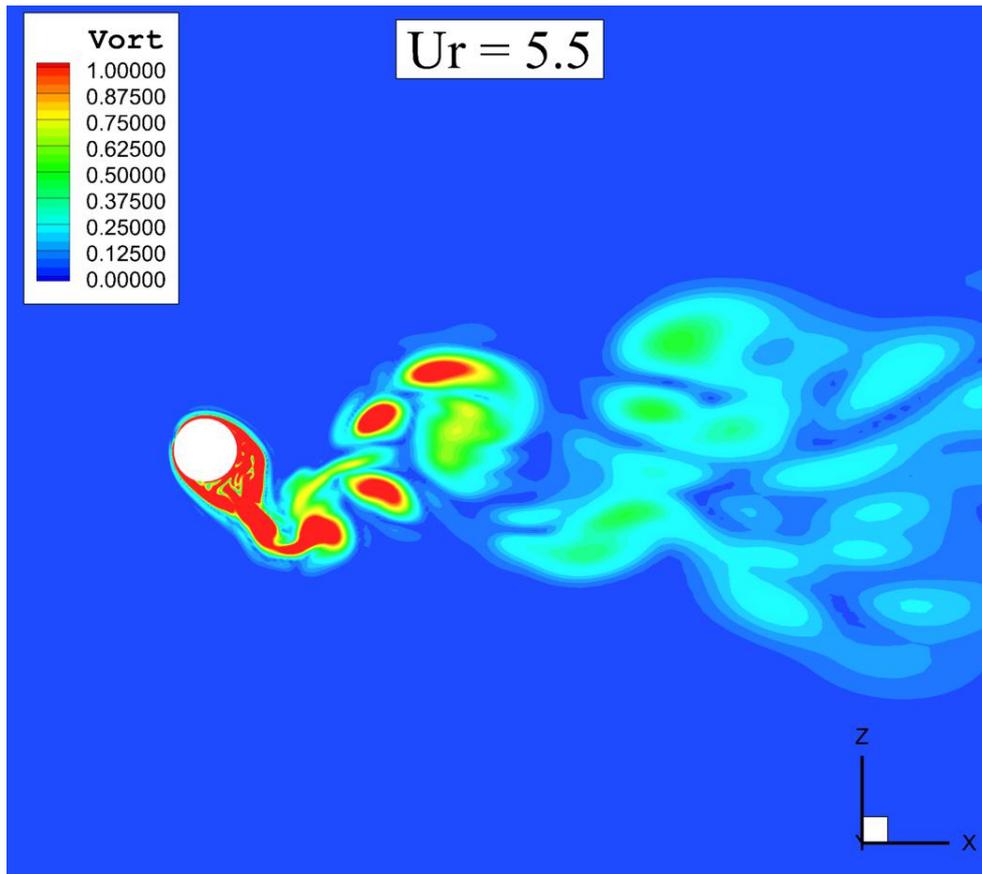


Figura 41 – Distribuição da vorticidade para  $Ur=5.5$

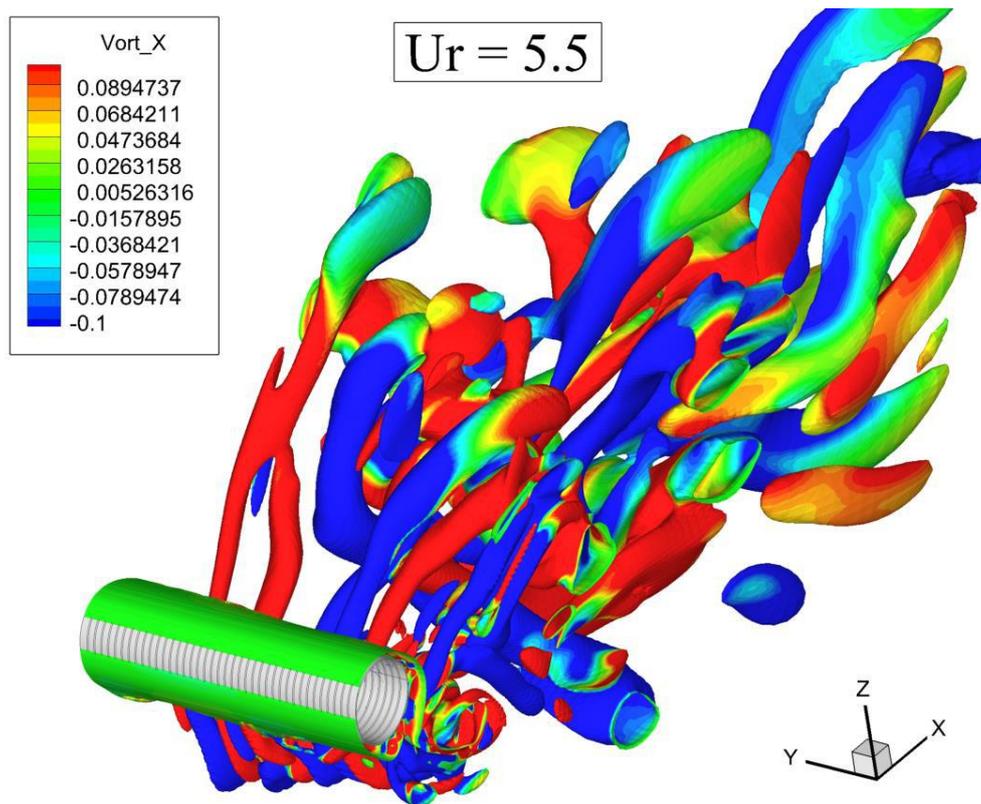
#### 5.2.4.2 Critério-Q (*Q-Criterion*)

Para esta velocidade reduzida a maior amplitude de oscilação foi obtida e na Figura 42 podemos avaliar em mais detalhe os vórtices formados, fazendo uso da formulação do Critério-Q. Na Figura 42, está plotada a isossuperfície de Critério-Q igual a 0,003 com contornos de cores representando a vorticidade na direção  $x$  do domínio. Como nos casos de Reynolds 500 e 1000 nas simulações para o cilindro fixo, pode-se notar os tubos longitudinais de vórtices formados na esteira do escoamento.

Através do cascadeamento de frequência que ocorre no escoamento turbulento, energia é transferida das grandes escalas para as pequenas escalas da turbulência e novamente podemos ver, na Figura 42, que as estruturas longitudinais pintadas em vermelho possuem vorticidade na direção  $x$  positiva, enquanto que as estruturas longitudinais pintadas de azul possuem vorticidade negativa. Esta configuração evidencia a ocorrência de *vortex turning e vortex stretching*, que são uma característica dos escoamentos turbulentos e uma possível explicação para o cascadeamento de frequência. Estes fenômenos causam o surgimento da componente da vorticidade na direção  $x$ , que anteriormente não existia,

como pode ser visto na região pintada de verde próxima ao cilindro, com valor próximo de zero.

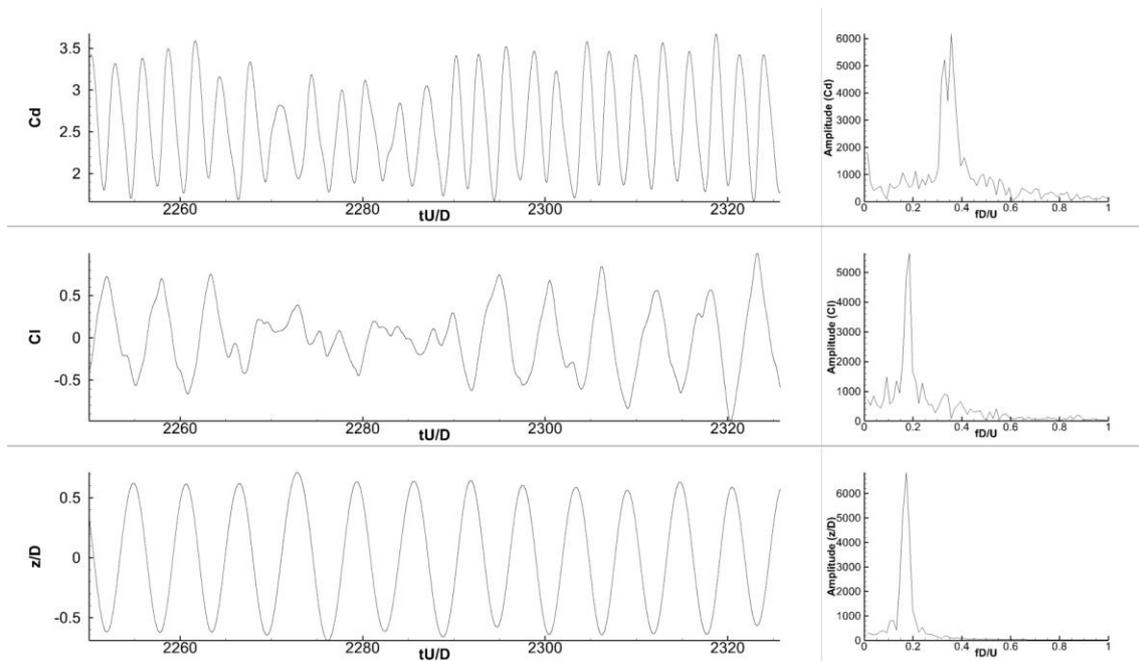
Este critério de definição de vórtices é capaz de identificar melhor os vórtices gerados a cada ciclo, e nos permite visualizar a esteira turbilhonar tridimensional característica em escoamentos turbulentos, evidenciada através da variação da formação de vórtices na direção  $y$  do domínio.



*Figura 42 – Isossuperfície de Critério-Q com contornos de vorticidade na direção  $x$  para  $Ur=5,5$*

### 5.2.5 Velocidade Reduzida 6.5

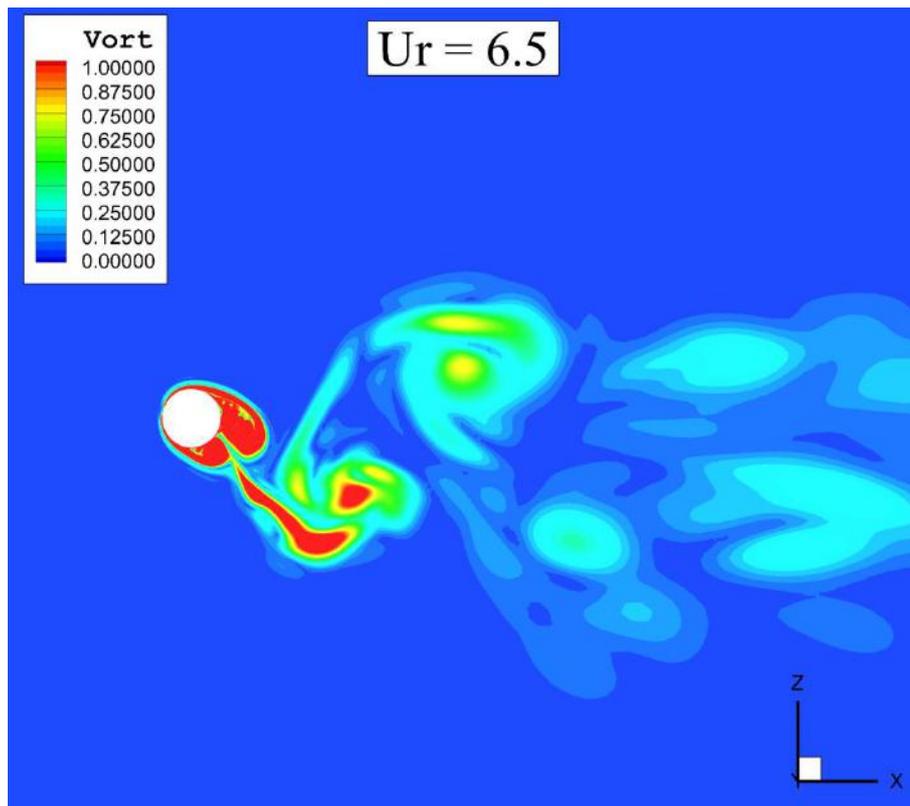
A Figura 43 mostra o gráfico da resposta do cilindro da mesma maneira que nos itens anteriores e podemos notar que como esperado, a resposta do cilindro continua periódica, porém o ângulo de fase entre as séries temporais do deslocamento do cilindro e do coeficiente de sustentação estão cada vez mais fora de fase, com o ângulo de fase tendendo a 180 graus. Mais uma vez foi identificada apenas uma frequência de vibração para esta velocidade reduzida.



**Figura 43** – Gráfico da resposta de vibração do cilindro para  $Ur=6,5$  com as séries temporais do arrasto, sustentação e deslocamento e suas respectivas transformadas rápidas de Fourier.

### 5.2.5.1 Vorticidade

A distribuição da vorticidade para a simulação com velocidade reduzida igual a 6,5 pode ser vista no plano  $xz$  mostrado na Figura 44. Podemos notar que para esta velocidade reduzida o modo de liberação de vórtices ainda apresenta comportamento característico do modo 2P, onde a cada ciclo 2 pares de vórtices são liberados. Este comportamento também é compatível com os resultados obtidos por KHALAK E WILLIAMSON (1999).



*Figura 44 – Distribuição da vorticidade para  $Ur=6.5$*

### 5.2.6 Velocidade Reduzida 7.0

A Figura 45 mostra o gráfico da resposta do cilindro da mesma maneira que nos itens anteriores e podemos notar que, como esperado, a resposta do cilindro continua periódica. Para esta velocidade reduzida podemos notar que o ângulo de fase está bem próximo de 180 graus, o que era esperado para esta velocidade reduzida característica do *lower branch*, e está compatível com os resultados numéricos obtidos por WANDERLEY *et. al* (2008). Novamente, também é possível identificar apenas uma frequência no gráfico da transformada rápida de Fourier da série temporal do deslocamento.

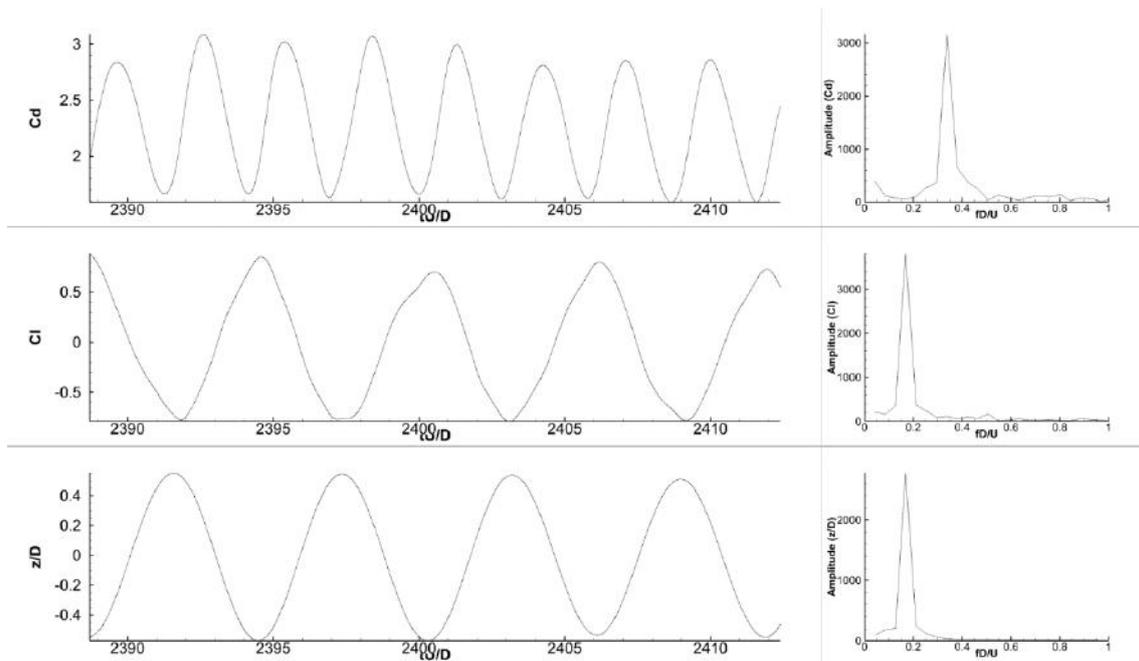


Figura 45 – Distribuição da vorticidade para  $Ur=7.0$

### 5.2.6.1 Vorticidade

A distribuição da vorticidade para a simulação com velocidade reduzida igual a 7,0 pode ser vista no plano  $xz$  mostrado na Figura 46. Podemos notar que para esta velocidade reduzida o modo de liberação de vórtices possui características do modo 2P, onde a cada ciclo 2 pares de vórtices são liberados. Este comportamento é característico do início do *lower branch* e também é compatível com os resultados obtidos por KHALAK E WILLIAMSON (1999).

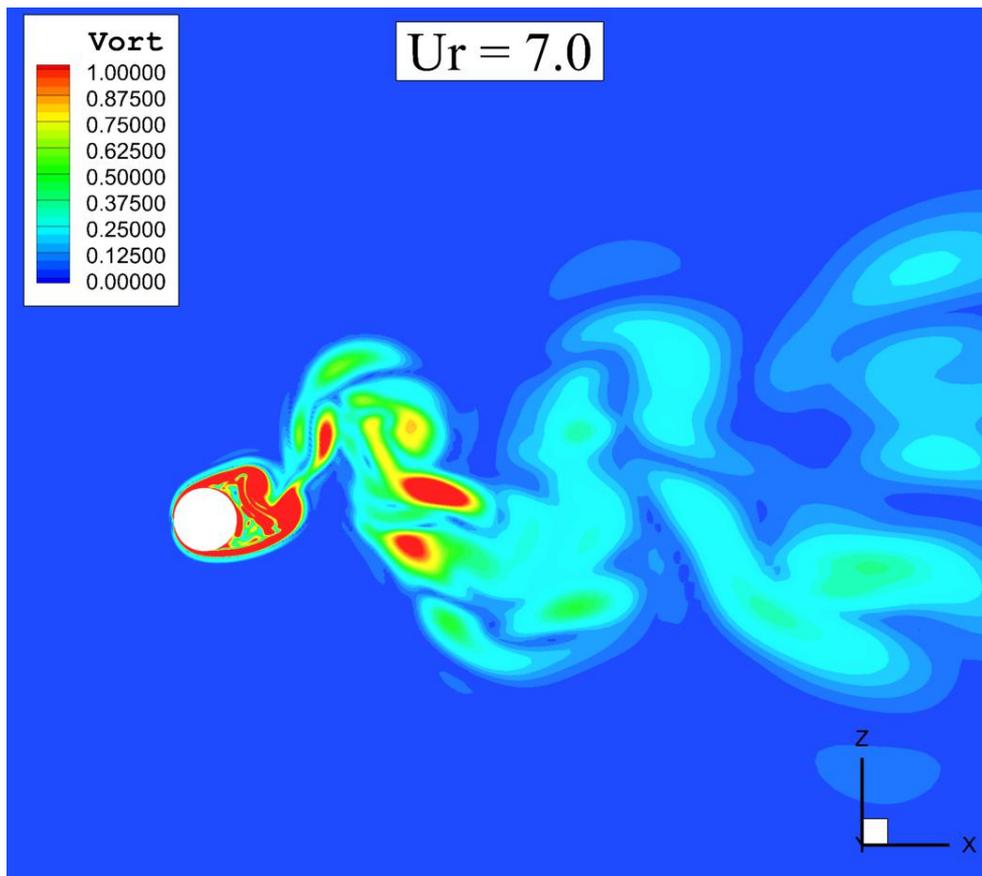
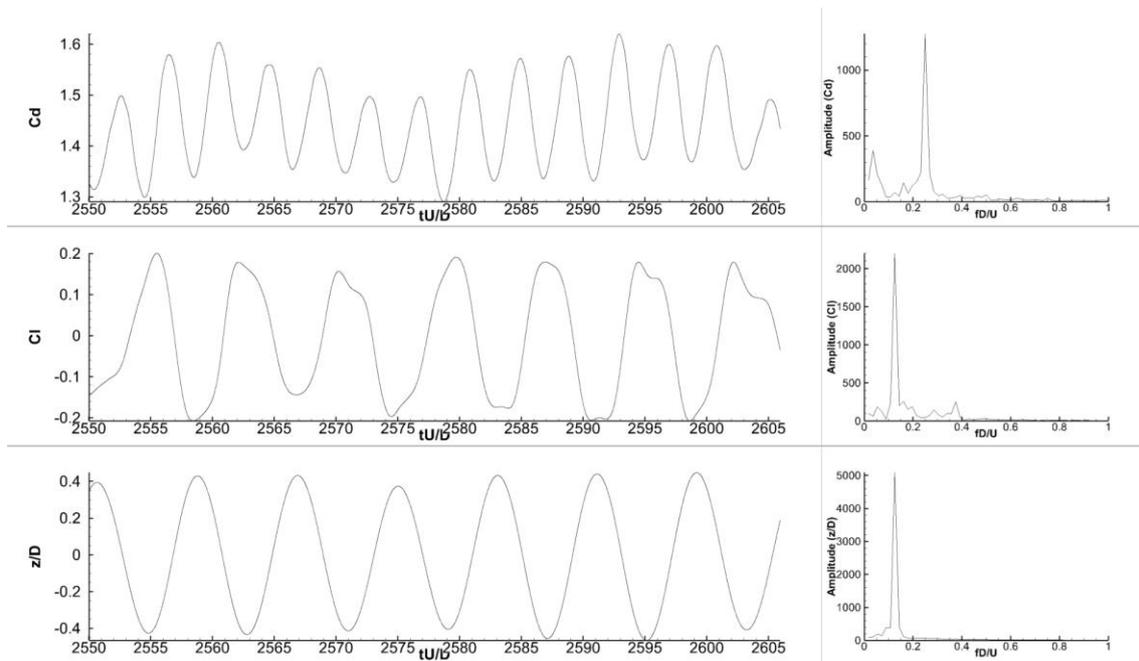


Figura 46 – Distribuição da vorticidade para  $U_r=7.0$

### 5.2.7 Velocidade Reduzida 9.0

A Figura 47 mostra o gráfico da resposta do cilindro da mesma maneira que nos itens anteriores e podemos notar que, como esperado, a resposta do cilindro continua periódica. Para esta velocidade reduzida podemos notar que o ângulo de fase está bem próximo de 180 graus, o que era esperado para esta velocidade reduzida característica do *lower branch*, e está compatível com os resultados numéricos obtidos por WANDERLEY *et. al* (2008). Novamente, também é possível identificar apenas uma frequência no gráfico da transformada rápida de Fourier da série temporal do deslocamento.



**Figura 47** – Gráfico da resposta de vibração do cilindro para  $Ur=9,0$  com as séries temporais do arrasto, sustentação e deslocamento e suas respectivas transformadas rápidas de Fourier.

### 5.2.7.1 Vorticidade

A distribuição da vorticidade para a simulação com velocidade reduzida igual a 9,0 pode ser vista no plano  $xz$  mostrado na Figura 48. Podemos notar que para esta velocidade reduzida não é possível identificar um modo de liberação de vórtices 2P, o que é o esperado para velocidades reduzidas compreendidas no final do *lower branch* e na região de *lock-in*. Este resultado está de acordo com o comportamento esperado para esta velocidade reduzida e é compatível com os resultados obtidos por KHALAK E WILLIAMSON (1999). Mais uma vez podemos notar que o ângulo de fase entre a série temporal do coeficiente de sustentação e do deslocamento do cilindro está bem próximo de 180 graus, além de, novamente, termos detectado apenas uma frequência de vibração no gráfico de transformada rápida de Fourier.

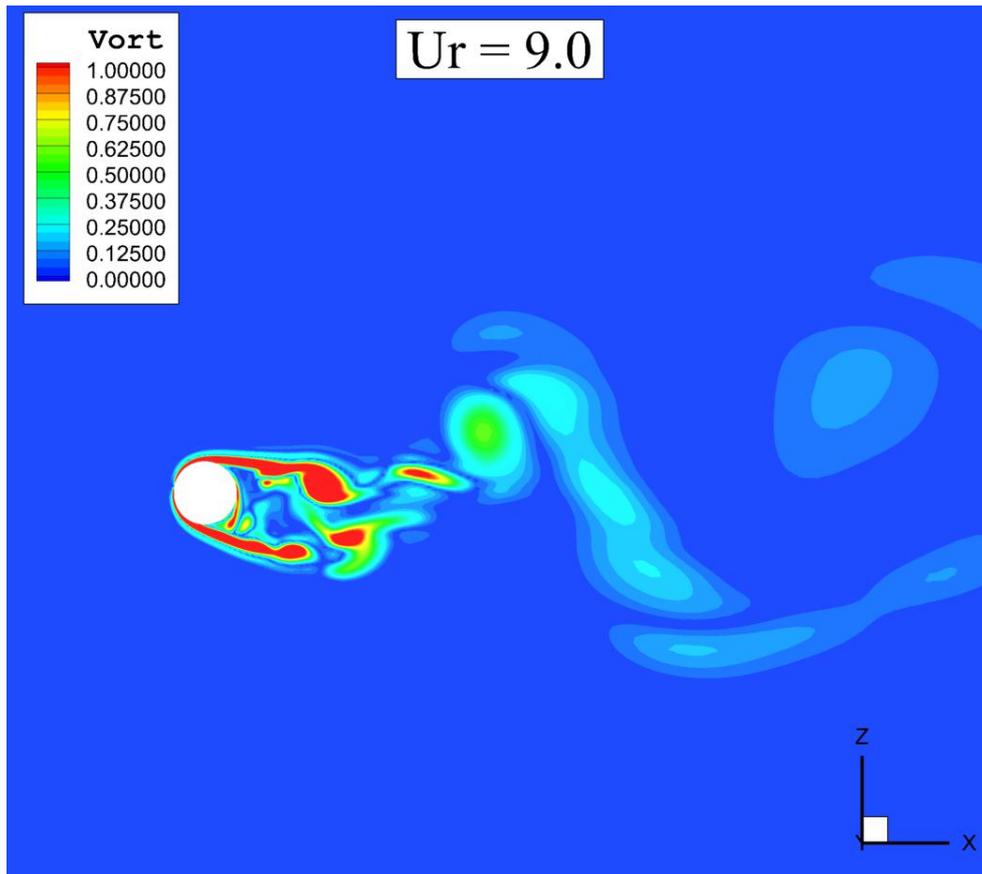


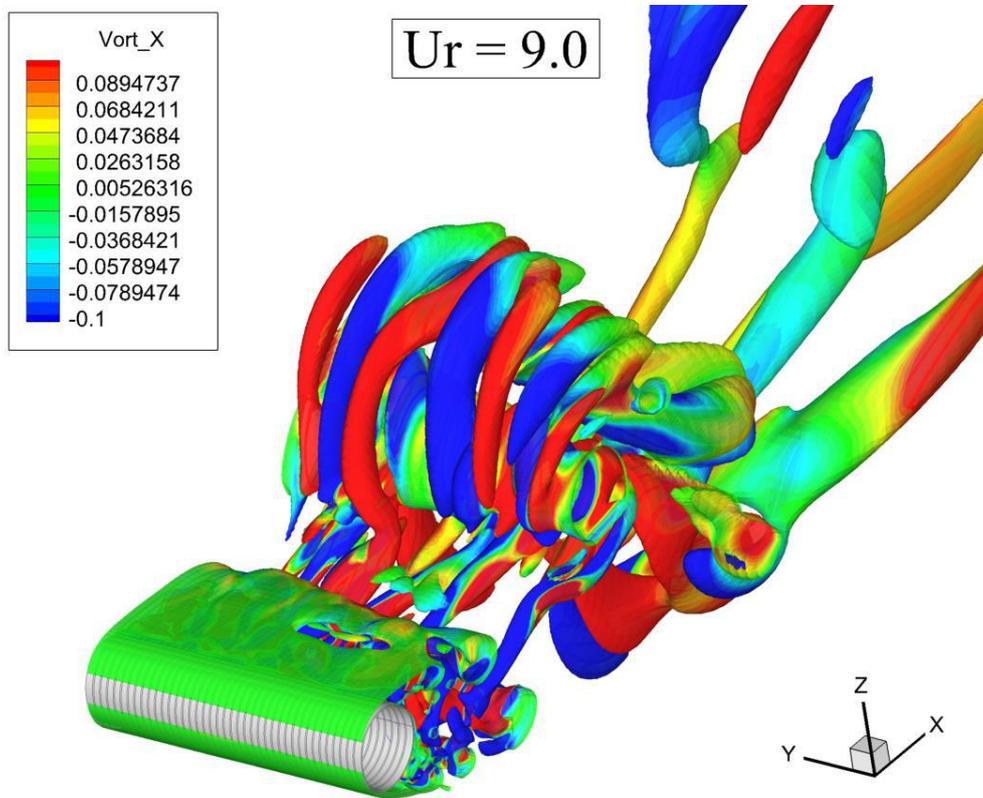
Figura 48 – Distribuição da vorticidade para  $Ur=9.0$

### 5.2.7.2 Critério-Q (*Q-Criterion*)

Com a finalidade de se avaliar em mais detalhe os vórtices formados, fazemos uso da formulação do Critério-Q onde, na Figura 49, está plotada a isossuperfície de Critério-Q igual a 0,003 com contornos de cores representando a vorticidade na direção  $x$  do domínio. Pode-se notar os tubos longitudinais de vórtices formados na esteira do escoamento e esperados para este caso.

Através do cascadeamento de frequência que ocorre no escoamento turbulento, energia é transferida das grandes escalas para as pequenas escalas da turbulência. Na Figura 49, as estruturas longitudinais pintadas em vermelho possuem vorticidade na direção  $x$  positiva, enquanto que as estruturas longitudinais pintadas de azul possuem vorticidade negativa. Esta configuração evidencia a ocorrência de *vortex turning* e *vortex stretching*, que são uma característica dos escoamentos turbulentos e uma possível explicação para o cascadeamento de frequência. Estes fenômenos causam o surgimento da componente da vorticidade na direção  $x$ , que anteriormente não existia, como pode ser visto na região pintada de verde próxima ao cilindro, com valor próximo de zero.

Este critério de definição de vórtices é capaz de identificar melhor os vórtices gerados a cada ciclo, e nos permite visualizar a esteira turbilhonar tridimensional característica em escoamentos turbulentos, evidenciada através da variação da formação de vórtices na direção y do domínio.



*Figura 49 – Isossuperfície de Critério-Q com contornos de vorticidade na direção x para  $U_r=9.0$*

### 5.3 Frequência de Vibração

A seguir, é plotado o gráfico da resposta em frequência normalizada contra a faixa de velocidade reduzida simulada.

O código computacional nos fornece a frequência na forma dada por

$$\bar{f} = \frac{fD}{U} \quad (5.1)$$

Para que possamos comparar a frequência obtida com código computacional com os outros trabalhos é preciso normalizá-la da mesma forma que os outros autores, através da

relação entre frequência natural no ar e frequência natural na água. A dedução a seguir foi utilizada para que, com os valores de frequência obtidos através das transformadas rápidas de Fourier da série temporal do deslocamento do corpo de cada velocidade reduzida, o gráfico da Figura 48 pudesse ser plotado.

Assim, através da substituição da expressão acima na fórmula da velocidade reduzida,

$$U_r = \frac{U}{f_{na}D} \quad (5.2)$$

temos

$$U_r \cdot \bar{f} = \frac{f}{f_{na}} \quad (5.3)$$

Multiplicando os dois lados da equação acima por  $\frac{f_{na}}{f_{nw}}$ , temos que

$$f^* = U_r \cdot \bar{f} \cdot \left(\frac{f_{na}}{f_{nw}}\right) \quad (5.4)$$

onde é preciso definir o valor da relação  $\frac{f_{na}}{f_{nw}}$ . Como

$$f_{na} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (5.5)$$

e

$$f_{nw} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m+a}} \quad (5.6)$$

temos

$$\frac{f_{na}}{f_{nw}} = \sqrt{\frac{m+a}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{m}{\rho\pi D^2 L/4} + \frac{a}{\rho\pi D^2 L/4}}{\frac{m}{\rho\pi D^2 L/4}}} \quad (5.7)$$

Através das relações da razão de massa

$$m^* = \frac{m}{\rho\pi D^2 L/4} \quad (5.8)$$

e do coeficiente de massa adicional para o cilindro

$$C_a = \frac{a}{\rho\pi D^2 L/4} \quad (5.9)$$

a Eq. (5.7) se torna

$$\frac{f_{na}}{f_{nw}} = \sqrt{\frac{m^* + C_a}{m^*}} \quad (5.10)$$

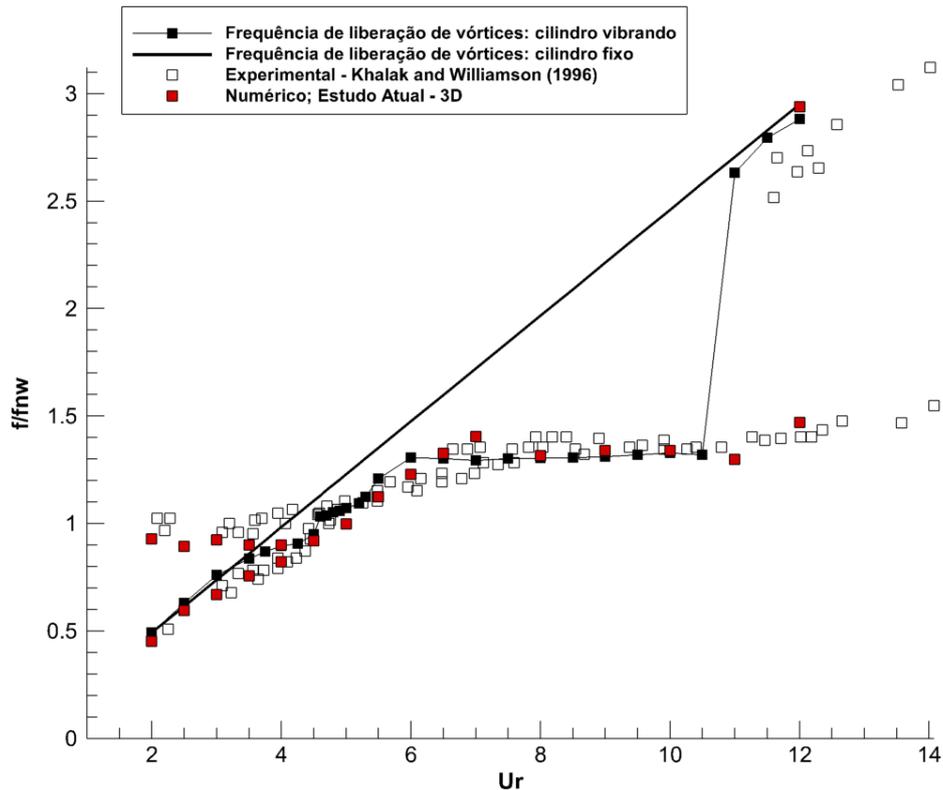
onde substituindo os valores de  $m^* = 2,4$  e  $C_a = 1$  na equação, temos

$$\frac{f_{na}}{f_{nw}} = \sqrt{\frac{2,4 + 1}{2,4}} = 1,19 \quad (5.11)$$

Assim, chegamos à equação utilizada para plotar os retângulos em vermelho na Figura 48

$$f^* = 1,19 \cdot U_r \cdot \bar{f} \quad (5.7)$$

onde  $\bar{f}$  é a frequência obtida através da transformada rápida de Fourier da série temporal do deslocamento e  $U_r$  é a velocidade reduzida correspondente.

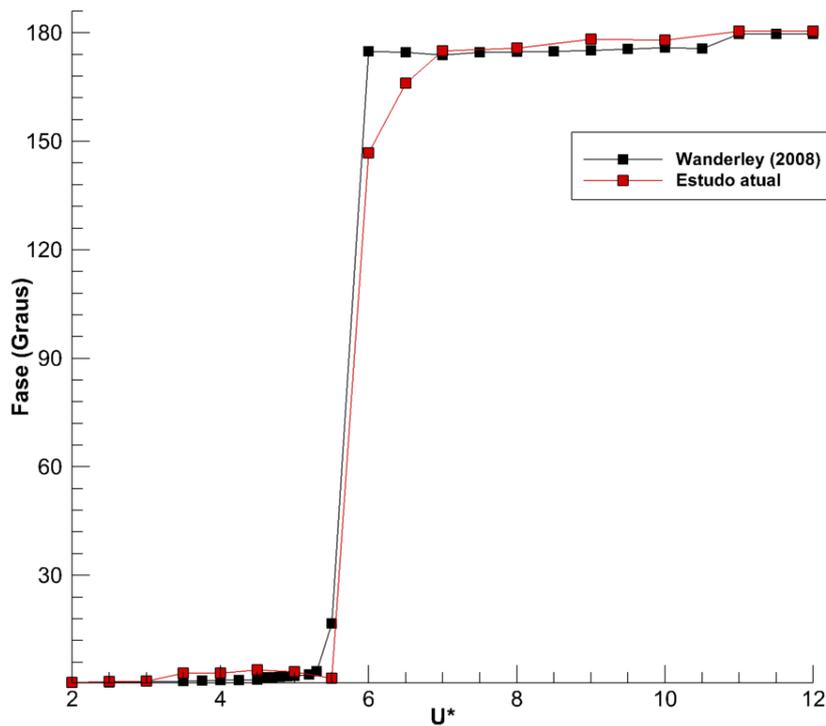


**Figura 50** – Curva de frequência de liberação de vórtices contra velocidade reduzida, comparando os resultados obtidos no presente estudo com os de WANDERLEY (2008), KHALAK e WILLIAMSOM (1996) e a curva de frequências de um cilindro fixo.

Como pode ser visto no gráfico acima, o presente estudo conseguiu capturar as duas frequências obtidas nos experimentos de KHALAK e WILLIAMSOM (1996) para cada uma das velocidades reduzidas de 2,0 a 4,0, além de ter capturado também a região de sincronização, ou *lock-in*, identificada a partir da velocidade reduzida 6,0. Os resultados também concordaram consideravelmente com o estudo numérico em duas dimensões realizado por WANDERLEY *et. al* (2008), mostrando que as simulações do presente estudo foram capazes de reproduzir, com um bom grau de fidelidade, as frequências de vibração de um cilindro circular rígido elasticamente montado, características do fenômeno da vibração induzida por vórtices.

## 5.4 Ângulo de Fase

A Figura 51 a seguir nos mostra a variação do ângulo de fase entre as séries temporais do deslocamento do cilindro e do coeficiente de sustentação.



*Figura 51 – Ângulo de fase x Velocidade Reduzida, comparação entre o estudo atual e WANDERLEY et. al (2008).*

As curvas apresentam comportamento semelhante, sendo que a curva em vermelho, correspondente ao estudo atual, faz a transição para a mudança de fase, ou seja, de próximo de zero para próximo de 180 graus, por volta da velocidade reduzida igual a 6,0, chegando próximo a 180 na velocidade reduzida igual a 7,0, enquanto que o estudo de WANDERLEY et. al (2008) começa esta transição já na velocidade reduzida 5,5 e se aproxima de 180 graus na velocidade reduzida 6,0.

## 6. Conclusões e Objetivos Futuros

O objetivo final deste estudo era reproduzir numericamente os resultados obtidos por KHALAK e WILLIAMSON (1996) para um cilindro circular rígido elasticamente montado com um grau de liberdade. Infelizmente, a metodologia adotada e os métodos numéricos empregados não foram capazes de reproduzir a característica deste fenômeno quando da transição do *initial branch* para o *upper branch* na resposta em amplitude de movimento do cilindro (A/D) contra velocidade reduzida. Entretanto, os resultados obtidos apresentaram o mesmo comportamento qualitativo na curva citada que os experimentos e estudos numéricos aos quais foram comparados, possuindo amplitude máxima maior que o estudo numérico em duas dimensões realizado por MENEGHINI (1997).

Apesar desta particularidade, o estudo aqui realizado conseguiu através de suas simulações numéricas reproduzir o comportamento na resposta em frequência do corpo observado por KHALAK e WILLIAMSON (1996) e reproduzido em suas simulações em duas dimensões por WANDERLEY *et. al* (2008), além de também ter sido representado corretamente no estudo a mudança do ângulo de fase entre as séries temporais do deslocamento do cilindro e o coeficiente de sustentação gerado para cada velocidade reduzida simulada, tendo a fase passado de próximo de 0 graus, no *initial branch*, para 180 graus no *lower branch*.

Os resultados da resposta em frequência mostram que o presente estudo foi capaz de capturar duas frequências distintas para as velocidades reduzidas compreendidas entre 2 e 4, resultado muito semelhante aos obtidos experimentalmente por KHALAK e WILLIAMSON (1996) e não reproduzidos numericamente por WANDERLEY *et. al* (2008), que só conseguiram capturar uma frequência para esta faixa de velocidades reduzidas. Além disso, a partir da velocidade reduzida 6,0, o presente estudo também foi capaz de capturar a região de *lock-in*, ou sincronização, das frequências de vibração, evidenciando corretamente o fenômeno da ressonância da vibração do cilindro.

O presente estudo também foi capaz de capturar corretamente o modo de liberação de vórtices 2S, onde dois vórtices são liberados a cada ciclo, no *initial branch*, e o modo de liberação de vórtices 2P, onde dois pares de vórtices são liberados a cada ciclo, no *upper branch* e no início do *lower branch*. A não identificação de modos de liberação de vórtices

na região final do *lower branch* após a velocidade reduzida igual a 9,0 era esperada e também está de acordo com os resultados experimentais e numéricos de estudos clássicos da Vibração Induzida por Vórtices.

Através do Critério-Q foi possível identificar nos escoamentos turbulentos a formação da esteira turbilhonar tridimensional, além ter sido possível visualizar o aparecimento da vorticidade na direção  $x$ , formando as estruturas longitudinais observadas nos gráficos de Critério-Q com vorticidades na direção  $x$  opostas. Este fato evidencia a ocorrência de *vortex turning* e *vortex stretching*, que são características dos escoamentos turbulentos e uma possível explicação para o cascadeamento de frequência, onde energia é transferida das grandes escalas para as pequenas escalas da turbulência.

A dissipação numérica foi considerada como principal causa para que o presente estudo não fosse capaz de capturar o *upper branch* e, conseqüentemente, não ter sido capaz de produzir um resultado com amplitude próxima de 1 na resposta em amplitude.

Como a metodologia proposta não se mostrou eficaz em reproduzir o problema estudado, é possível realizar investigações futuras, reavaliando os métodos numéricos e seus parâmetros para adequá-los melhor ao problema proposto. Algumas modificações que poderiam ser realizadas seriam a substituição do esquema numérico utilizado pelo esquema TVD (*Total Variation Diminishing*), um esquema numérico não linear onde a viscosidade numérica é utilizada apenas quando necessária, e o uso da Simulação das Grandes Escalas da Turbulência considerando-se o modelo de Smagorinsk dinâmico, apresentado por GERMANO (1991).

Idealmente, após a adequação da metodologia aqui proposta e a reprodução dos resultados experimentais de KHALAK e WILLIAMSON (1996) para um cilindro circular rígido com um grau de liberdade, a próxima etapa será realizar um estudo numérico para investigar a vibração induzida por vórtices em um escoamento incidindo sobre um cilindro circular rígido elasticamente montado com dois graus de liberdade e posteriormente estudar possibilidades de mitigação da vibração, em cilindros circulares rígidos ou flexíveis, livres para vibrar em duas direções.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## Referências Bibliográficas

BLEVINS, R., 1990, *Flow-induced vibration*, 2<sup>nd</sup> ed, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, Estados Unidos.

BUI, T.T., 2000, “A parallel Finite Volume Algorithm for Large Eddy Simulation of Turbulent Flows”, *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, v 29, pp. 877-915.

CARUSO NETO, M., 2012, Simulação numérica bidimensional do escoamento ao redor de um cilindro circular próximo a uma placa plana. Dissertação de M.Sc. do Programa de Engenharia Oceânica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

FENG, C. C., 1968, The Measurements of Vortex-Induced Effects in Flow Past a Stationary and Oscillating Circular and D-section Cylinders, Master’s thesis, University of British Columbia, Vancouver, Canada.

GERMANO, M., PIOMELLI, U., MOIN, P., CABOT, W.H., 1991, “A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model”, *Center for Turbulence Research*, Stanford, California.

HALLER, G., 2005, “An objective definition of a vortex”, *Journal of Fluid Mechanics*, v 525, pp. 1-26.

HALSE, K.H., 1997, On Vortex Shedding and Prediction of Vortex-Induced Vibrations of Circular Cylinders, Doctorate’s thesis, Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, Noruega.

HERFJORD, K., 1995, A study of two-dimensional separated flow by a combination of the finite element method and Navier-Stokes equations. Dr. Eng. Theses, The Norwegian Institute of Technology, Trondheim, Norway.

HUNT, J.C.R., WRAY, A.A., MOIN, P., 1988, “Eddies, Streams, and Convergence Zones in Turbulent Flows”, Proceedings of the Summer Program, Center for Turbulence Research, pp. 193-208.

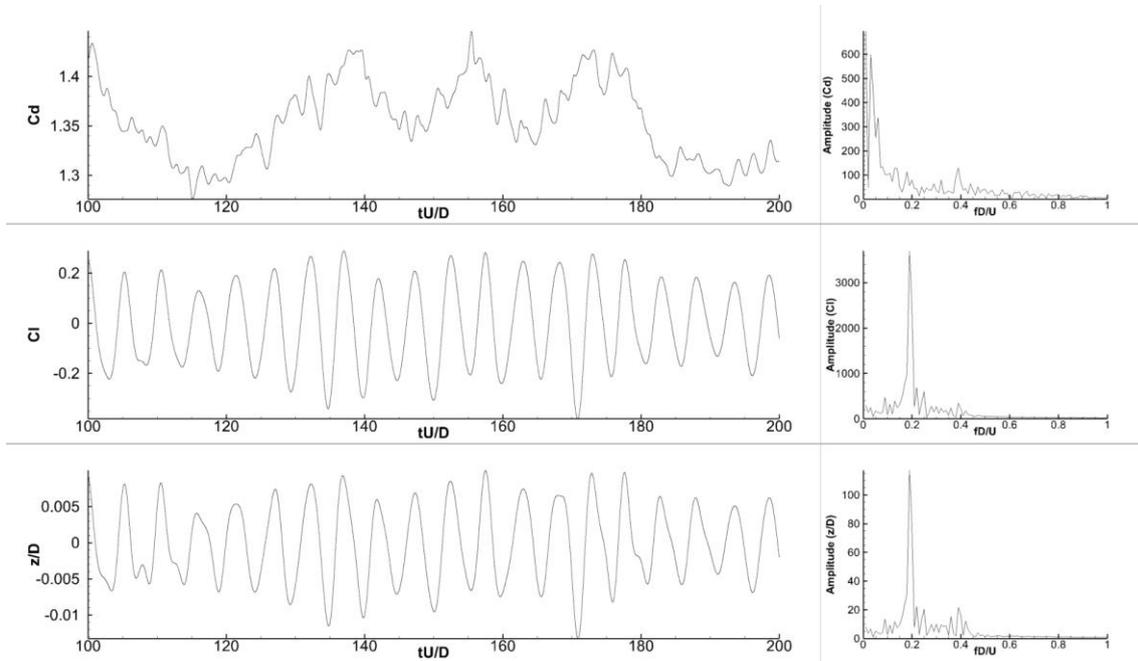
KHALAK, A., WILLIAMSON, C.H.K., 1996, “Dynamics of a hydroelastic cylinder with very low mass and damping”, *Journal of Fluids and Structures*, v 10, pp. 455-472.

- KHALAK, A., WILLIAMSON, C.H.K., 1997a, "Fluid Forces and Dynamics of a Hydroelastic Structure with Very Low Mass and Damping", *Journal of Fluids and Structures*, v 11, pp 973-982.
- KHALAK, A., WILLIAMSON, C.H.K., 1997b, "Investigation of relative effects of mass and damping in vortex-induced vibration of a circular cylinder", *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v 69-71, pp. 341-350.
- KHALAK, A., WILLIAMSON, C.H.K., 1999, "Motions, Forces and Mode Transitions in Vortex-Induced Vibrations at Low Mass-Damping", *Journal of Fluids and Structures*, v 13, pp. 813-851.
- KANG, Z., NI, W., SUN, LIPING., 2017, "A numerical investigation on capturing the maximum transverse amplitude in vortex induced vibration for low mass ratio", *Marine Structures*, v 54, pp 94-107.
- LOMAX, H., PULLIAM, T.H., ZINGG, D.W., 1999, *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*, 1 ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- LU, X., ZHANG, J., DALTON, C., 1997, "Application of Large Eddy Simulation to an oscillating flow past a circular cylinder", *Journal of Fluids Engineering*, v 119, pp. 519-525.
- MENEGHINI, J.R., 1993, *Numerical simulation of bluff flow control using a discrete vortex method*, Ph.D. Dissertation, University of London, London, England.
- MENEGHINI, J.R., SALTARA, F., BEARMAN, P.W., 1997, "Numerical Simulation of Vortex Shedding from an Oscillating Circular Cylinder", *Transactions on Modelling and Simulation*, v 16, pp. 409-418.
- NORBERG, C., 2003, "Fluctuating lift on a circular cylinder: review and new measurements", *Journal of Fluids and Structures*, v 17, pp. 57-96.
- PAO, Y.H., 1965, "Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers", *Physics Fluids*, v 8, pp. 1063-1075.
- POPE, S.B., 2000, *Turbulent Flows*, 1 ed. Cambridge University Press.
- RAO, S., 2009, *Vibrações Mecânicas*, 4ª ed. São Paulo, Pearson Prentice Hall.

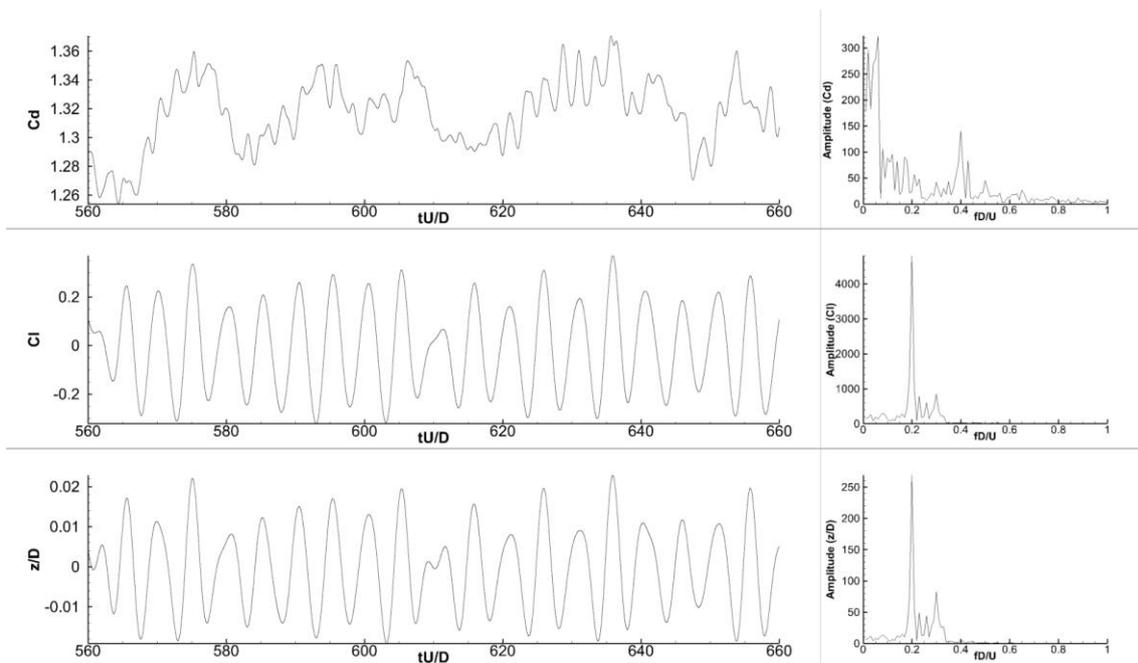
- RENGEL, J.E., SPHAIER, S.H., 1999, “A projection method for unsteady Navier-Stokes equation with finite volume method and collocated grid”, *Hybrid Methods in Heat and Mass Transfer*, v 1, pp. 4.
- SMAGORINSK, J., 1963, “General Circulation Experiments with the Primitive Equations”, *Monthly Weather Review*, v 91, pp 99-164.
- SPARLAT, P.R., 2000, “Strategies for turbulence modeling and simulation”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v 21, pp 252-263.
- WANDERLEY, J.B.V., LEVI, C.A., 2003, “Large Eddy Simulation applied on vortex induced vibration problems”, *17<sup>th</sup> International Congress of Mechanical Engineering*, pp. 406.
- WANDERLEY, J.B.V., LEVI, C.A., 2005, “Vortex induced loads on marine risers”, *Ocean Engineering*, v 32, pp. 1281-1295.
- WANDERLEY, J.B.V., SOUZA, G.H.N., SPHAIER, S.H., LEVI, C.A., 2008, “Vortex-induced vibration of an elastically mounted circular cylinder using an upwind TVD two-dimensional numerical scheme”, *Ocean Engineering*, v 35, pp. 1533-1544.
- WANDERLEY, J.B.V., SOARES, L.F.N., 2015, “Vortex-induced vibration on a two-dimensional circular cylinder with low Reynolds number and low mass-damping parameter”, *Ocean Engineering*, v 97, pp. 156-164.
- WHITE, F.M., 2002, *Mecânica dos Fluidos*, 4<sup>a</sup> ed. Rio de Janeiro, McGraw-Hill Interamericana do Brasil.
- WIESELSBERGER, C., 1921, “New data on the law of hydro and aerodynamic resistance”, *Physikalische Zeitschrift*, v 22, 321-382 (em Alemão).

# APÊNDICE I

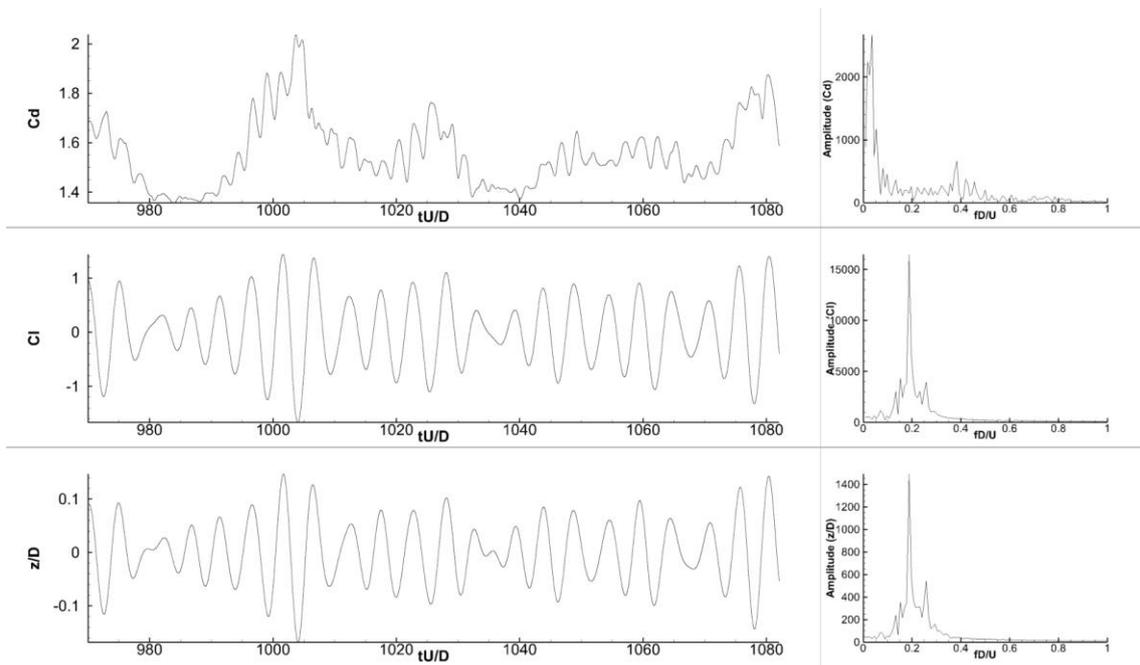
A seguir todos os gráficos de deslocamento do cilindro, coeficiente de sustentação, coeficiente de arrasto e suas respectivas transformadas de Fourier são apresentados para todas as velocidades reduzidas simuladas:



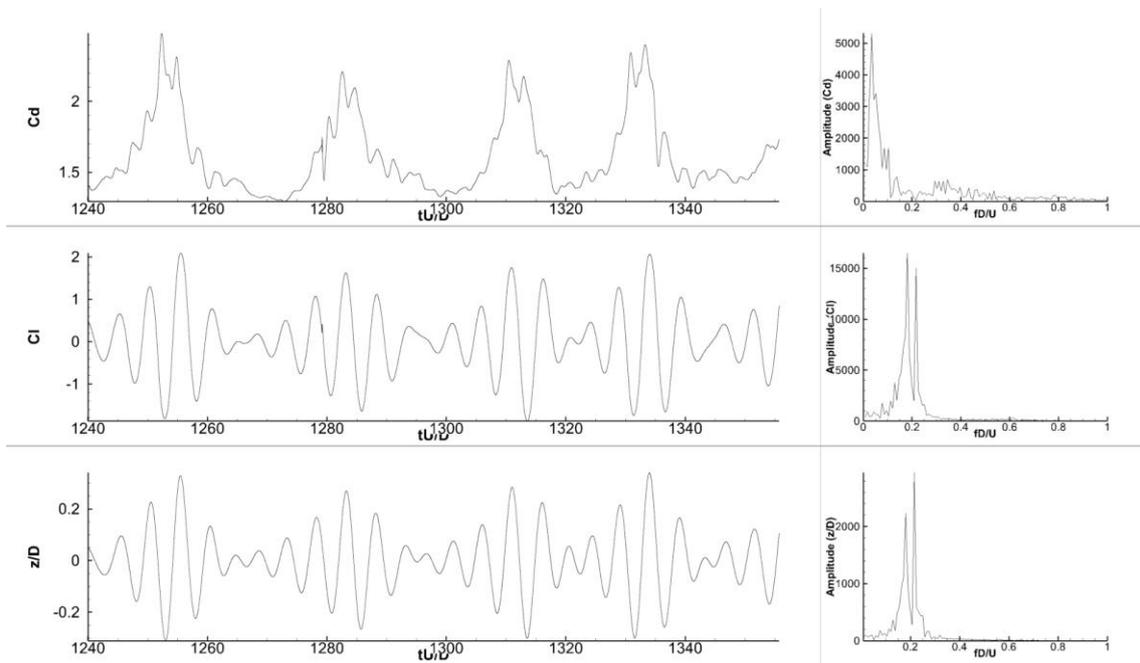
*Figura 52 – Velocidade reduzida 2,0*



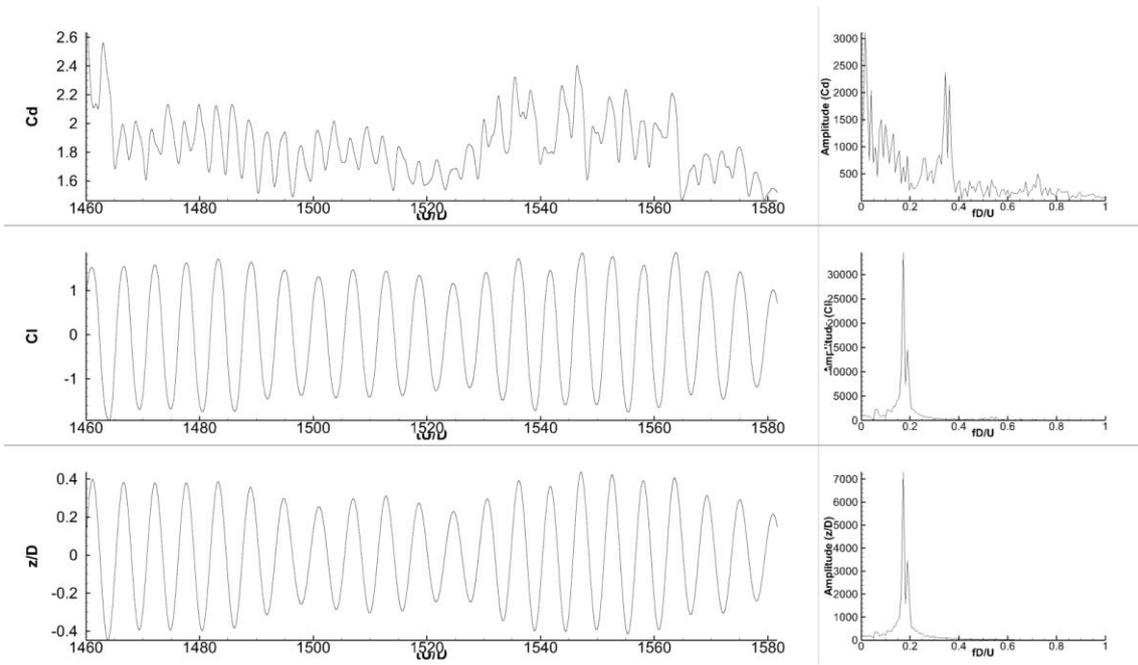
*Figura 53 – Velocidade reduzida 2,5*



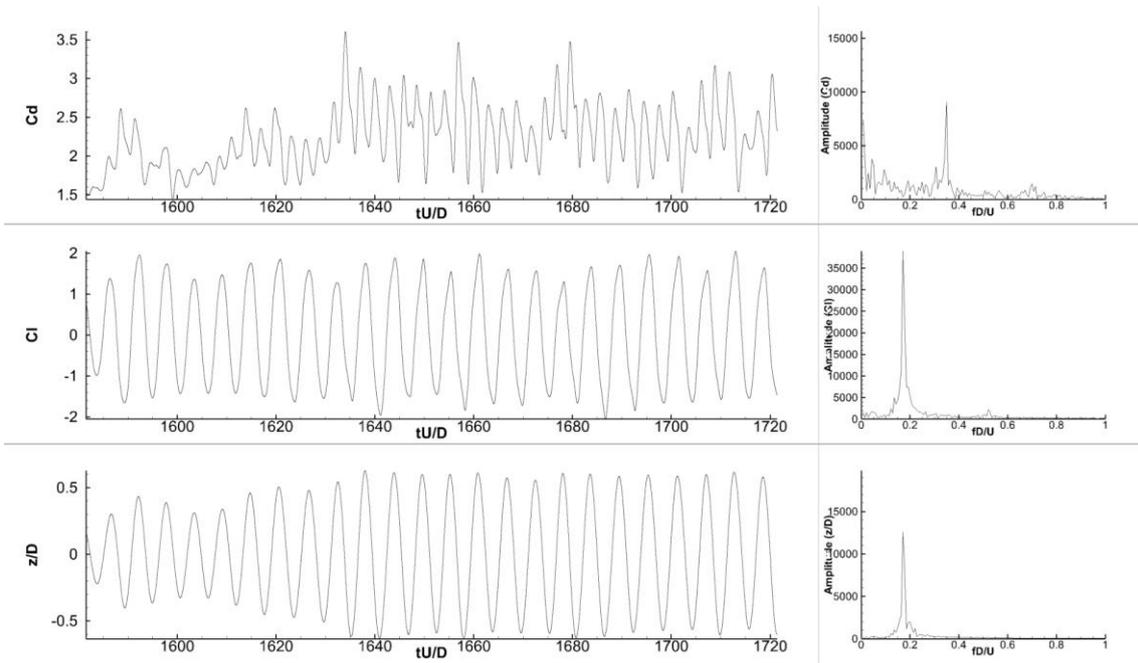
**Figura 54 – Velocidade reduzida 3,0**



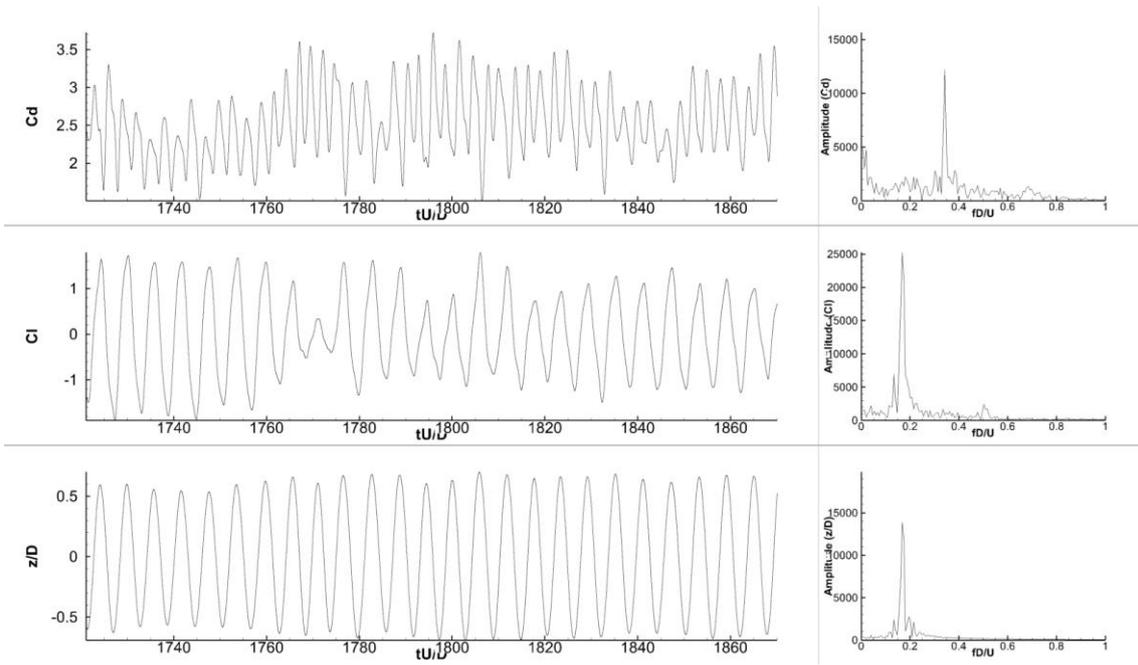
**Figura 55 – Velocidade reduzida 3**



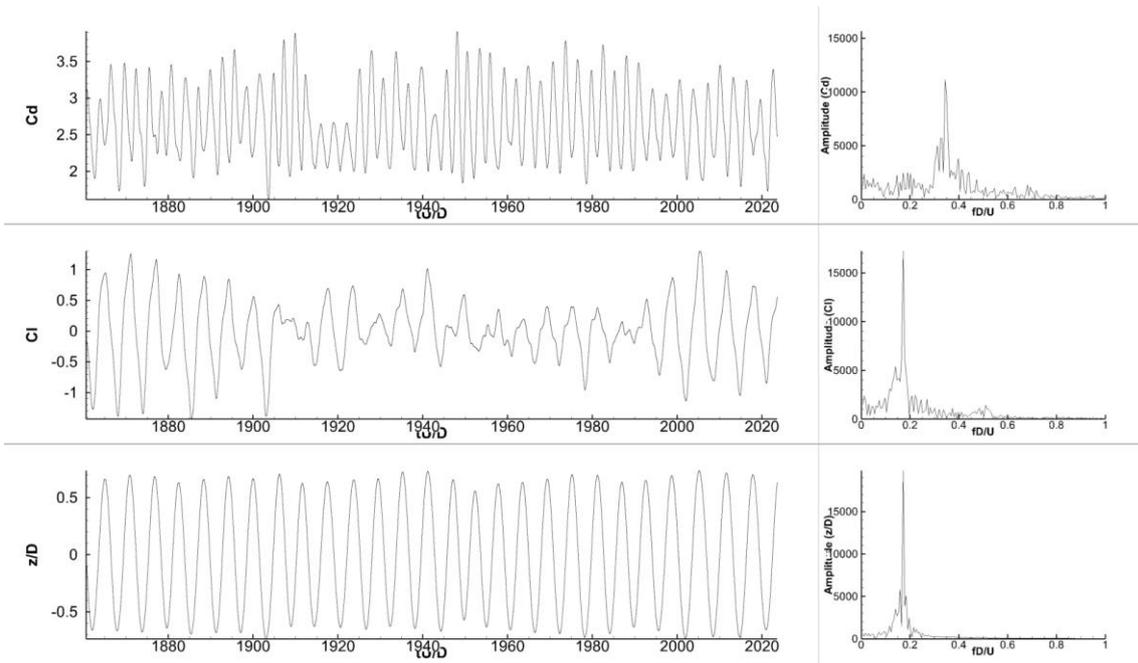
**Figura 56 – Velocidade reduzida 4,0**



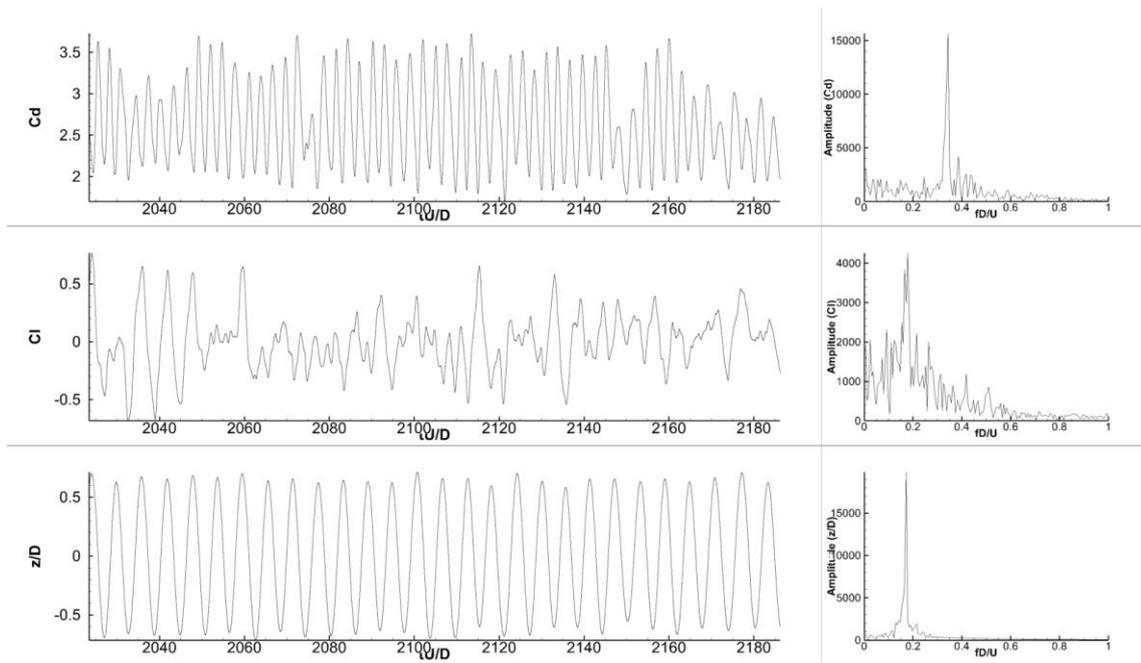
**Figura 57 – Velocidade reduzida 4,5**



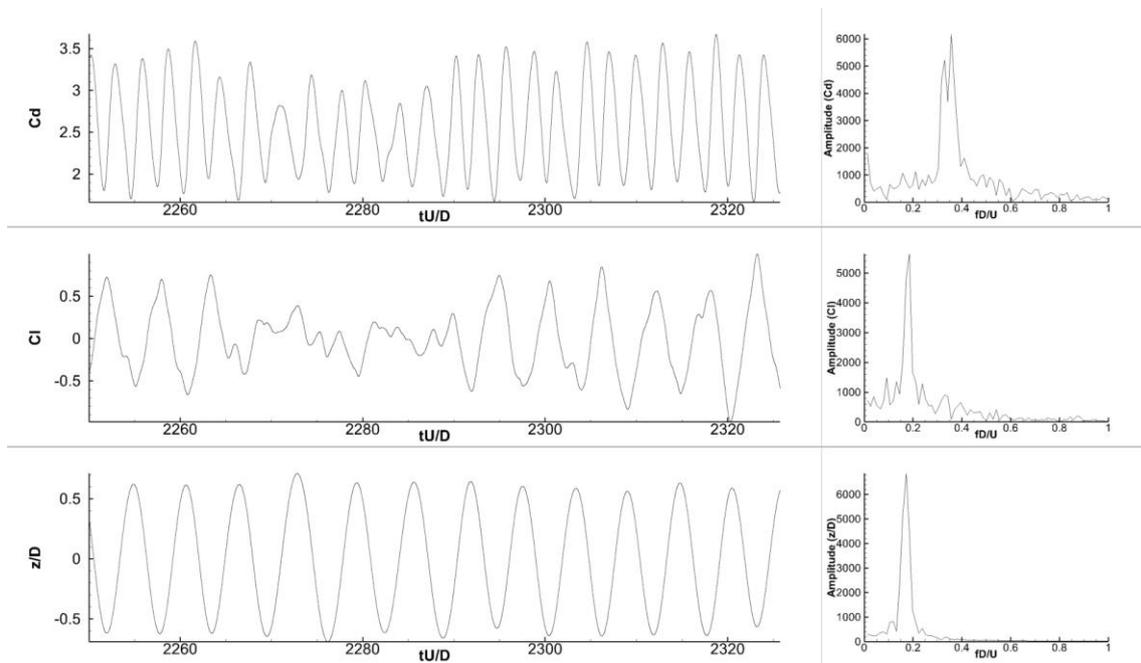
**Figura 58 – Velocidade reduzida 5,0**



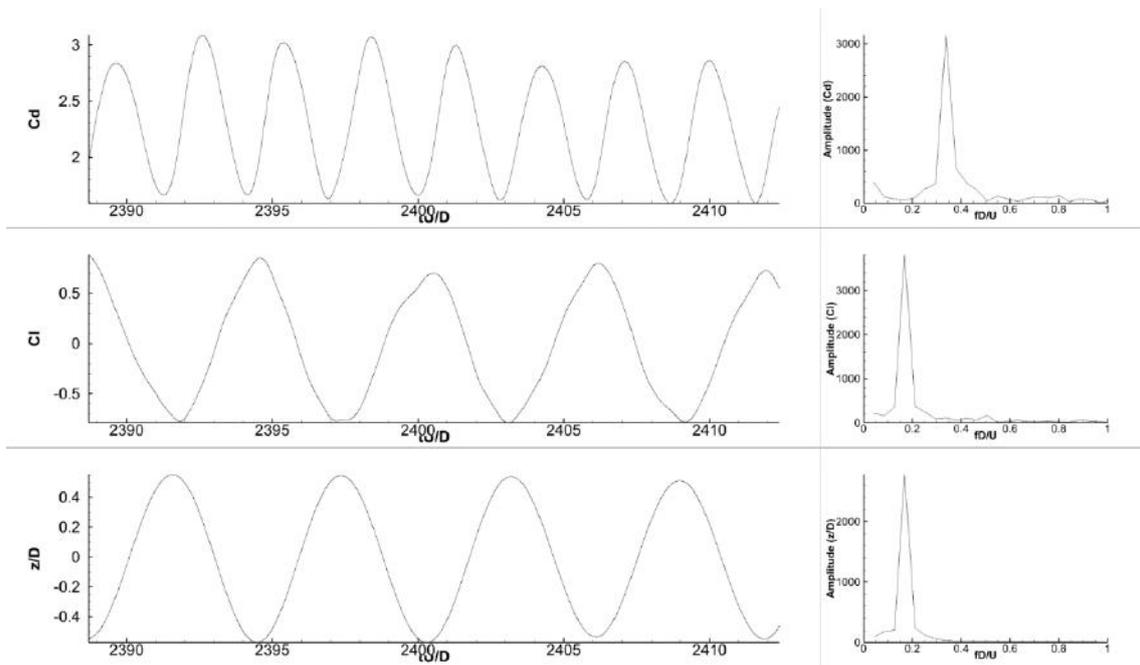
**Figura 59 – Velocidade reduzida 5,5**



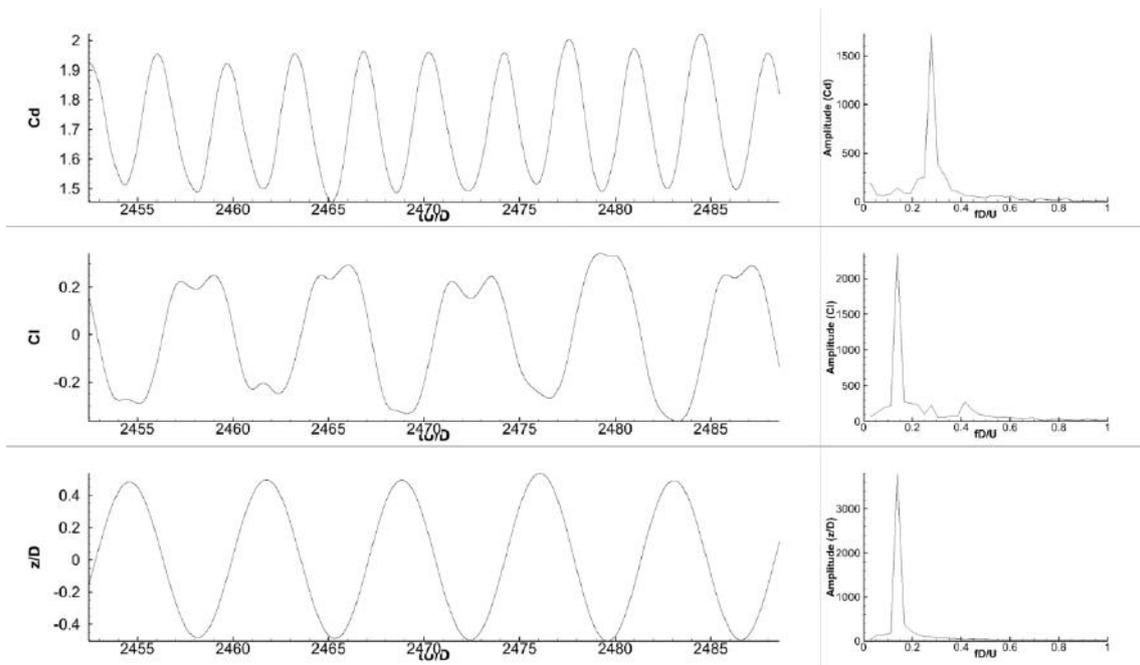
**Figura 60 – Velocidade reduzida 6,0**



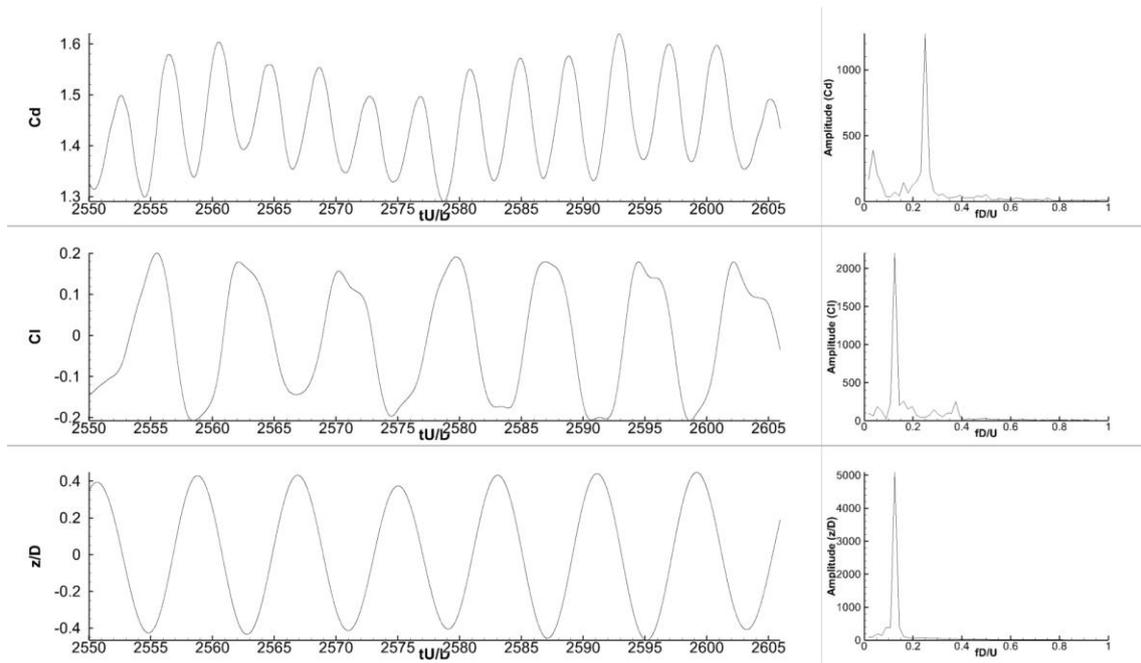
**Figura 61 – Velocidade reduzida 6,5**



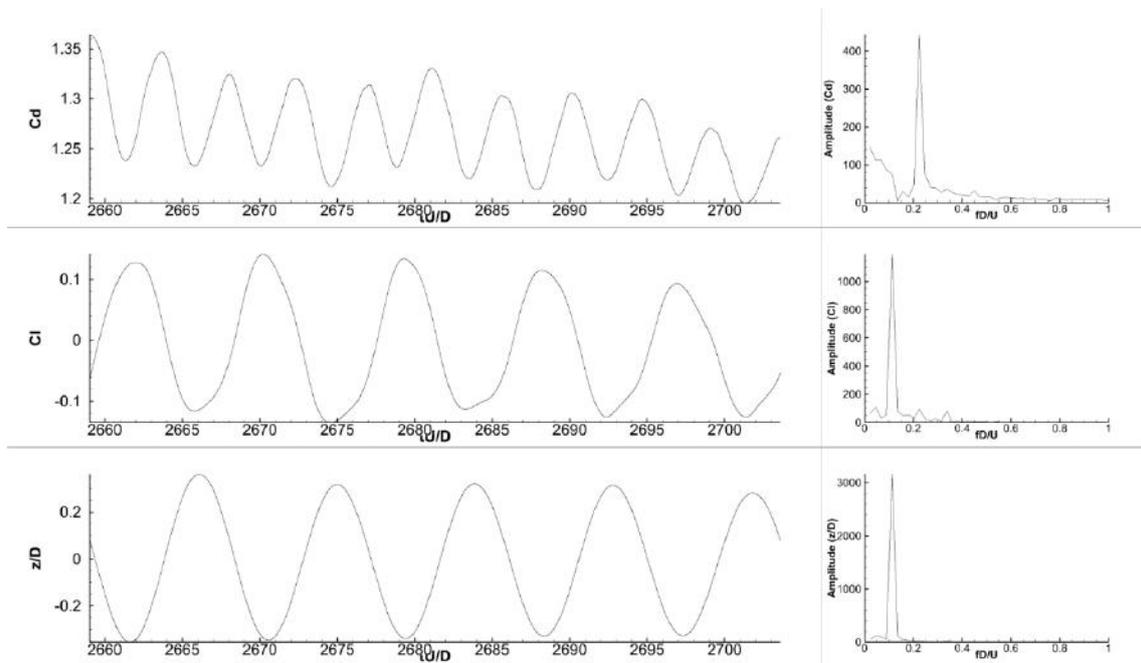
*Figura 62 – Velocidade reduzida 7,0*



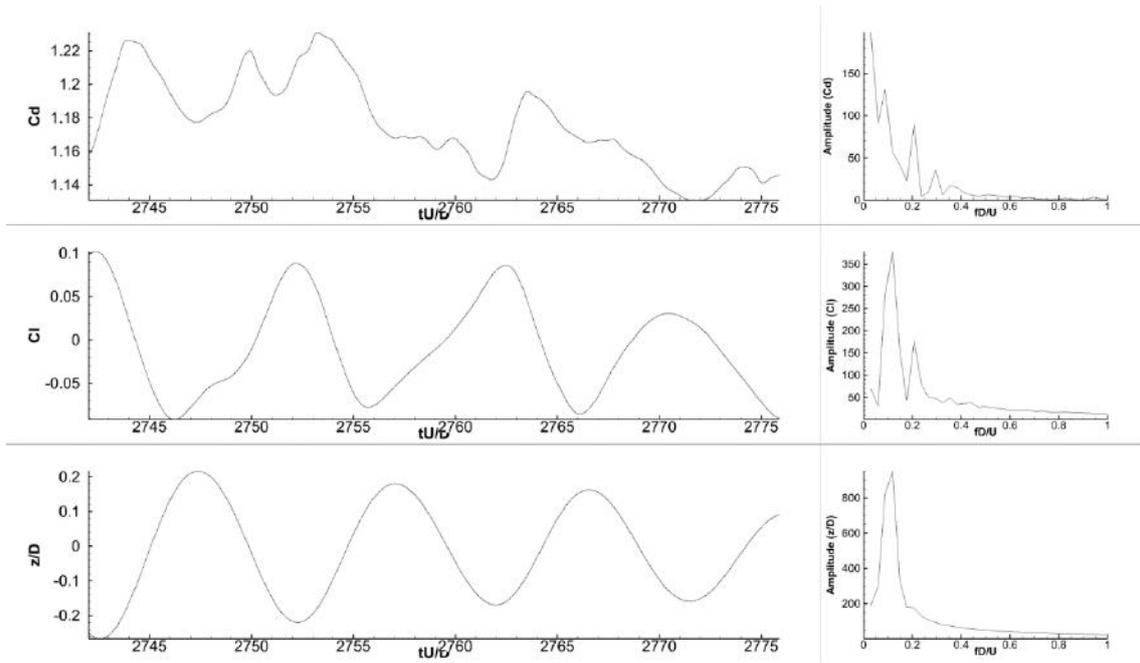
*Figura 63 – Velocidade reduzida 8,0*



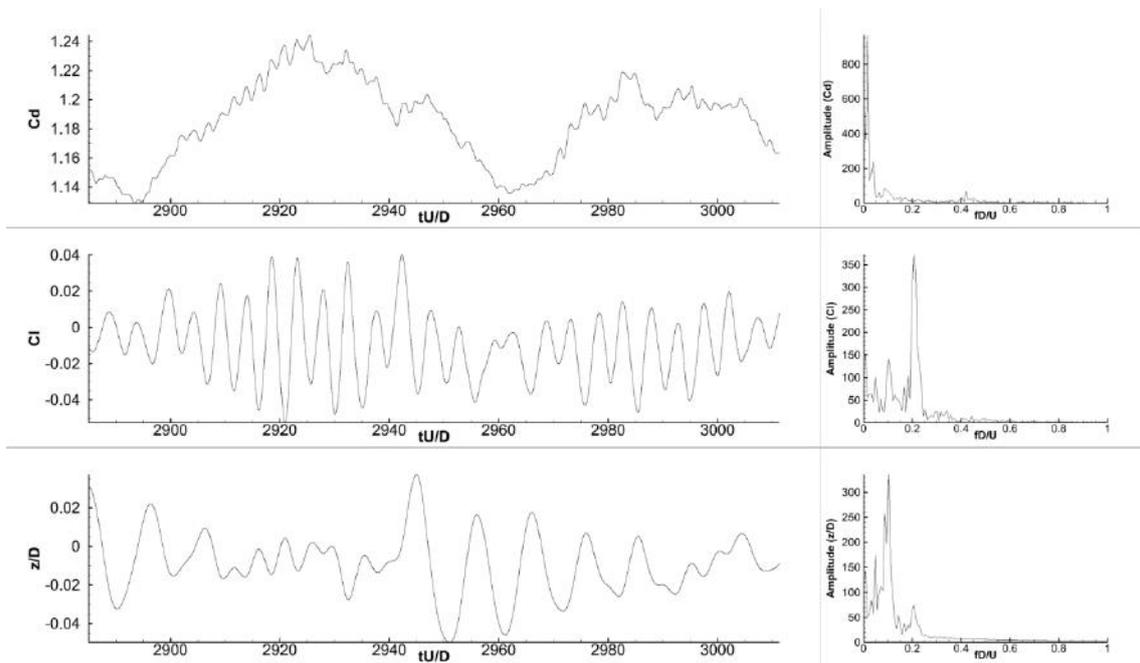
**Figura 64 – Velocidade reduzida 9,0**



**Figura 65 – Velocidade reduzida 10,0**



**Figura 66 – Velocidade reduzida 11,0**



**Figura 67 – Velocidade reduzida 12,0**