Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia
COPPE UFRJ

SINTONIA DE CONTROLADORES BASEADO NA INCERTEZA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Mário Neves Neto

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Química.

Orientador: Argimiro R. Secchi

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2019

SINTONIA DE CONTROLADORES BASEADO NA INCERTEZA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Mário Neves Neto

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA QUÍMICA.

Examinada por:

Prof. Argimiro R. Secchi, D.Sc.

Prof. Maurício Bezerra de Souza Jr., D.Sc.

Prof. André Luís Alberton, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2019

Neves Neto, Mário

Sintonia de Controladores Baseado na Incerteza de Identificação de Sistemas/Mário Neves Neto. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XI, 74 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Argimiro R. Secchi

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Química, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 54 – 56.

1. Identificação de Sistemas Dinâmicos. 2. Estimação de Parâmetros. 3. Propagação Analítica de Erros. 4. Controle Robusto. I. R. Secchi, Argimiro. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Química. III. Título.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, autor do meu destino, meu guia, socorro presente na hora da angústia, ao meu pai João Maria, minha mãe Benedita e aos meus irmãos. aos amigos e colegas da Petrobras e Focolare, pelo incentivo e pelo apoio constantes. Agradeço também a todos os professores que me acompanharam durante o mestrado, em especial ao Prof. Argimiro Secchi, responsável pela realização deste trabalho.

Agradecimentos

Aos meus pais, por me terem dado educação, valores e pelo amor incondicional. A vocês que, muitas vezes, renunciaram aos seus sonhos para que eu pudesse realizar o meu, partilho a alegria deste momento. A todos os meus familiares, irmãos, primos, tios. Não citarei nomes, para não me esquecer de ninguém. Mas há aquelas pessoas especiais que diretamente me incentivaram. Aos modelos em que procuro me espelhar sempre: aos meus avós maternos e paternos, amor incondicional eterno, e por me terem ensinado a ser nobre, na essência da palavra. Vó Finha (in memoriam) pela garra, perseverança e otimismo. Aos irmãos que Deus colocou em minha vida e escolhi para conviver: Chiara Laíssy, Maria Clara, Graziella e Giordanni. A distância não nos separa. Seus corações estão comigo e o meu com vocês.

Ao Prof.º Argimiro Resende Secchi (PEQ/COPPE), meu orientador e exemplo profissional, por não ter permitido que eu interrompesse o processo e pela confiança. Aos professores, funcionários e colegas do Programa de Engenharia Química (PEQ) do Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE), da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). A Felipe, André e Cleber pelo companheiros em momentos difíceis e vitórias. Aos professores Banca 1, Banca 2 e Banca 3, que aceitaram compor minha banca de defesa, pelas sugestões e análises significativas às quais tentarei atender na versão definitiva do texto.

Com vocês divido a alegria desta experiência.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

SINTONIA DE CONTROLADORES BASEADO NA INCERTEZA DE IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

Mário Neves Neto

Fevereiro/2019

Orientador: Argimiro R. Secchi

Programa: Engenharia Química

A identificação de sistemas dinâmicos pode fornecer além dos parâmetros do modelo – seja ele contínuo, discreto, linear ou não linear – uma medida da incerteza desses parâmetros, codificada na matriz de covariância. Assim, ao projetar um controlador para um modelo identificado, podemos estimar intervalos de confiança para as respostas ao degrau e ao impulso, diagramas de Bode e de Nyquist, através de um processo de propagação de incerteza. Dessa forma, o desempenho do controlador em malha fechada pode ser visto como uma variável aleatória - com valor esperado, variância e intervalos de confiança. Considerando a incerteza de identificação, são propostas diferentes formulações para a sintonia ótima de controladores, em especial a minimização da esperança da integral do quadrado do erro (EISE), para a qual alguns resultados analíticos são demonstrados.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CONTROLER DESING BASED ON IDENTIFICATION UNCERTAINTY

Mário Neves Neto

February/2019

Advisor: Argimiro R. Secchi

Department: Chemical Engineering

System identification can provide beyond the model parameters - be it continuous, discrete, linear or nonlinear - a measure of the parameters uncertainty, encoded in the covariance matrix. Thus, when designing a controller for an identified model, we can estimate confidence intervals for step and impulse responses, Bode and Nyquist diagrams, through an uncertainty propagation process. Thus, the performance of the closed-loop controller can be seen as a random variable - with expected value, variance, and confidence intervals. Considering model identification uncertainty, different formulations of controller optimum tuning are proposed, especially the minimization of the ISE's expectation, for which some analytical results are demonstrated.

Sumário

Lista de Figuras **x**

Lista de Tabelas **xi**

1 Introdução **1**

2 Revisão Bibliográfica **4**

2.1 Sintonia de controladores 4

2.2 Propagação de incerteza 8

2.3 Identificação de sistemas 10

3 Método Proposto **12**

3.1 Métricas de desempenho 12

3.2 ISE analítica 13

3.2.1 Fechamento da malha 13

3.2.2 Transformação do sistema 15

3.2.3 Norma dois de um sistema 17

3.3 A sintonia min-max 17

3.3.1 Distância de Mahalanobis 18

3.3.2 Definição min-max 18

3.3.3 Condições de KKT 19

3.4 Minimização restrita da ISE nominal 20

3.4.1 Nota de robustez de um controlador 20

3.5 Formulação do problema 23

3.6 Minimização da esperança da ISE (EISE) 24

3.6.1 Sistema de sensibilidade 25

3.6.2 Caso multivariável da ISE 25

3.6.3 Reparametrização ortonormal 26

3.6.4 O cálculo da EISE analítica 27

4 Resultados e Discussões **29**

4.1 Ambiente computacional 29

4.2 Sintonia PID para planta SISO linear 30
4.2.1 Apresentação da planta, modelo e controlador 30
4.2.2 Comparação de sintonias e tempo computacional 31
4.2.3 Desempenho controlando modelo nominal 32
4.2.4 Desempenho controlando modelo incerto 33
4.2.5 Resposta ao pior caso 35
4.2.6 Nota de robustez dos controladores 37
4.3 Sintonia PID para planta MIMO linear 38
4.3.1 Apresentação do modelo e controlador 38
4.3.2 Comparação de sintonias e tempo computacional 39
4.3.3 Desempenho dos controladores para o modelo nominal 40
4.3.4 Desempenho dos controladores para o modelo incerto 42
4.3.5 Resposta ao pior caso 42
4.3.6 Nota de robustez dos controladores 44
4.4 Sintonia PID para planta SISO não linear 46
4.4.1 Apresentação do modelo e controlador 46
4.4.2 Comparação de sintonias e tempo computacional 47
4.4.3 Desempenho controlando modelo nominal 48

5 Conclusões **50**
5.1 Trabalhos Futuros 52

Referências Bibliográficas **54**

A Revisão de identificação de sistemas **57**
A.1 Modelos 57
A.1.1 Função de Transferência 58
A.1.2 Espaço de estados 59
A.1.3 O modelo do erro 59
A.1.4 Princípios estatísticos 60
A.1.5 Incerteza da identificação 61
A.1.6 Algoritmos de identificação 61
A.1.7 Modelos não lineares 61
A.2 Propagação de incerteza 63
A.2.1 Tipos de propagação de incerteza 63

Lista de Figuras

4.1 Desempenho dos controladores frente ao modelo nominal 33
4.2 Desempenho dos controladores considerando incerteza do modelo . . 34
4.3 (a) Resposta ao degrau em malha aberta para a planta de pior desempenho de cada sintonia. (b) Resposta ao degrau em malha fechada para a planta de pior desempenho de cada sintonia. 36
4.4 (a) Resposta ao degrau em malha aberta da planta que instabiliza em cada sintonia. (b) Resposta marginalmente instável de cada controlador. 38
4.5 Desempenho dos controladores frente ao modelo nominal 41
4.6 Pior planta dentro da região de confiança para cada sintonia 43
4.7 Pior desempenho dentro intervalo de confiança para cada sintonia . . 44
4.8 Planta mais próxima ao modelo que instabiliza cada sintonia 45
4.9 Desempenho de cada sintonia frente a sua planta instabilizadora . . . 46
4.10 Desempenho dos controladores frente ao modelo nominal 49

A.1 Monte Carlo aplicado à resposta ao degrau 65
A.2 Média e desvio-padrão por Monte Carlo 66
A.3 Direções principais: Intevalo de confiança 1σ 67
A.4 Média e desvio-padrão por sigma-pontos 68
A.5 Propagação de matriz de correlação MA para MF 70

Lista de Tabelas

4.1 Tempo computacional de cada sintonia 31
4.2 Parâmetros de cada sintonia 32
4.3 valor da ISE para cada sintonia 33
4.4 valor da EISE para cada sintonia 34
4.5 Parâmetros da planta do pior caso para cada sintonia 35
4.6 ISE pior caso para cada sintonia 36
4.7 Planta mais próxima ao modelo que instabiliza cada sintonia 37
4.8 Nota de robustez para cada sintonia 37
4.9 Tempo computacional de cada sintonia 39
4.10 Parâmetros de cada sintonia 40
4.11 Valor da ISE para cada sintonia 41
4.12 valor da EISE para cada sintonia 42
4.13 ISE pior caso para cada sintonia 44
4.14 Planta mais próxima ao modelo que instabiliza cada sintonia 45
4.15 Nota de robustez para cada sintonia 46
4.16 Tempo computacional de cada sintonia 47
4.17 Parâmetros de cada sintonia 48
4.18 Métricas para cada sintonia 48

Capítulo 1

Introdução

O mundo em que vivemos está em constante mudança nos mais diversos âmbitos da sociedade. Alguns aspectos em especial marcam os últimos séculos: as 4 revoluções industriais - mecanização, eletricidade, automação, conectividade -; o surgimento dos direitos trabalhistas, que traduzem a preocupações com a qualidade de vida do trabalhador em aspectos como saúde, segurança e dignidade nas suas atividades laborais; e a diminuição da miséria e pobreza em âmbitos nacional e mundial. Cada um desses aspectos está associado de maneira intrínseca ao processo de automação de processos que ocorreram nesse período: desde o controlador centrífugo para regular a velocidade de máquina a vapor de J. Watt no século XVII, passando pelo uso nas mais diversas industrias — da metalúrgica à biotecnologia —, chegando até às tecnologias que estão nos fazendo ampliar a nossa visão do mundo — seja nos aceleradores de partículas ou nos robôs que estão nos ajudando a desbravar novos planetas.

Dentro da disciplina de controle e automação, o processo de identificação de sistemas tem bastante relevância, uma vez que tem como produto um modelo matemático da planta, o qual permite prever o comportamento da planta em diversos cenários — o fechamento de malha com um controlador que se esteja projetando, por exemplo. Ainda mais nobre é o papel do modelo quando se projeta controladores preditivos baseados em modelo, onde o modelo identificado não apenas é utilizado no processo de sintonia dos parâmetros do controlador como pode ser considerado como parte integrante do algoritmo de controle. Existe uma ampla literatura nesse âmbito e na última década tem se visto técnicas ainda mais inovadoras para o processo de obtenção de modelos para os processo, como aprendizagem de máquina.

Os modelos matemáticos usados para descrever as plantas industriais se dividem em classes, por exemplo temos os modelos dados por funções de transferência, espaço de estados, equações diferenciais ordinárias ou equações algébrico-diferenciais. Cada modelo possui parâmetros que devem ser estimados num processo de estimação de parâmetros, ou, como é mais comumente referenciado no contexto de modelos de

processo, identificação do sistema. Os parâmetros assim estimados compõem o que chamamos modelo identificado, o qual pode ser bastante útil para simulações e sintonia de controladores, problema que este trabalho analisa.

Acontece que, de maneira geral, o processo de estimação de parâmetros do modelo fornece como resultado não apenas parâmetros como também uma medida da sua incerteza. Mais especificamente, ao final do processo de identificação é comum que o algoritmo utilizado forneça, além do vetor de parâmetros, a matriz de covariância dos parâmetros, que é uma medida da incerteza, da qual pode-se extrair os desvio padrão de cada parâmetro e a correlação de cada par de parâmetros. Assim podemos entender o resultado do processo de identificação não apenas como um único modelo nominal e determinístico, mas como uma variável aleatória no espaço n-dimensional do vetor de parâmetros, onde o vetor de parâmetros nominal e a matriz de covariância são respectivamente a média e a covariância de uma distribuição normal multivariada nesse espaço.

Alguns softwares comerciais com funcionalidade de identificação de sistemas, como o MATLAB por exemplo, os algoritmos disponíveis em geral já disponibilizam a matriz de covariância dos parâmetros identificados, que pode ser usada, por exemplo, para traçar a região de incerteza da respostas ao degrau e impulso, diagramas de Bode e de Nyquist. No entanto, realizar operações com os modelos identificados, como fechar uma malha de controle ou colocar sistemas em série ou paralelo, acarreta em descartar a informação da incerteza, que não é propagada para o sistema resultante. Em geral a informação de incerteza do modelo identificado é negligenciada nos processos de projeto e análise de controladores para a planta, o que pode acabar acarretando em um projeto de controlador que tem um ótimo desempenho para o modelo nominal, mas apresenta um desempenho insatisfatório ao ser implementado na planta, chegando mesmo a ultrapassar o limiar de estabilidade.

O propósito desse trabalho é fazer uso mais nobre dessa informação de incerteza dos parâmetros do modelo identificado, interpretando-a como a variância de uma distribuição normal multivariada, cujo valor esperado é o vetor de parâmetros estimado. É aplicada a teoria de propagação das incertezas para se obter a incerteza do resultado da planta em malha fechada. Depois, levando em consideração incerteza no comportamento em malha fechada, são propostas três funções objetivo a serem otimizadas para projetar controladores robustos à incerteza de identificação.

O trabalho está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 2 é feita uma breve revisão bibliográfica das três disciplinas que dão base ao trabalho: identificação de sistemas, sintonia de controladores e propagação de incerteza. No âmbito da sintonia de controladores é dado ênfase às técnicas de sintonia robusta, e são feitas comparações com os métodos propostos neste trabalho.

O Capítulo 3 apresenta a metodologia proposta. São propostas três formulações

para o problema de otimização de sintonia de controladores para modelos incertos. A primeira formulação é minimização do pior caso de desempenho, dentro de uma região de confiança do modelo identificado; a segunda é a otimização do desempenho para o modelo nominal, com uma restrição de não violação de estabilidade dentro de um intervalo de confiança do modelo identificado; e a terceira é a minimização da esperança do desempenho. Antes de tudo é apresentada a métrica ISE, métrica clássica de desempenho de controladores, com extensão para o caso multivariável e desenvolvimento do seu cálculo de maneira analítica.

O capítulo 4 apresenta alguns resultados e discussão. As sintonias testadas em três modelos: um sistema SISO linear, um MIMO linear e um SISO não linear. São feitas comparações dos métodos entre si e com um método clássico de sintonia.

O Capítulo 5 apresenta algumas conclusões, limitações do métodos, problemas enfrentados e propostas de trabalhos futuros.

O Apêndice A traz uma revisão de identificação de sistemas dinâmicos: os modelos utilizados, os princípios estatísticos inerentes, e é apresentado o conceito de incerteza de identificação. São apresentados alguns tipos de propagação de incerteza, os prós e contras de cada uma, e a aplicação delas no contexto de sistemas dinâmicos. Por fim são mostrados como as incertezas de identificação se propagam em diagramas clássicos do controle como: Respostas ao degrau e impulso, diagrama de polos e zeros, diagramas de Bode e Nyquist.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

2.1 Sintonia de controladores

Segundo SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2007) os passo para se implantar um sistema de controle são:

1. Estudar o sistema (planta) a ser controlado e obter informações iniciais sobre os objetivos de controle.
2. Modelar o sistema e simplificar o modelo, se necessário.
3. Escalonar as variáveis e analisar o modelo resultante; determinar suas propriedades.
4. Decidir quais variáveis devem ser controladas (saídas controladas).
5. Decidir as medições e variáveis manipuladas: quais sensores e atuadores serão utilizados e onde serão colocados?
6. Selecionar a configuração de controle.
7. Decidir o tipo de controlador a ser usado.
8. Decidir as especificações de desempenho, com base nos objetivos gerais de controle.
9. Projetar um controlador.
10. Analisar o sistema controlado resultante para ver se as especificações estão satisfeitas; e se elas não estiverem satisfeitas, modificar as especificações ou o tipo de controlador.
11. Simular o sistema controlado resultante, em um computador ou em uma planta piloto.

12. Repetir a partir do passo 2, se necessário.

13. Escolher o hardware e software e implementar o controlador.

14. Testar e validar o sistema de controle e sintonize o controlador online, se necessário.

Os passos 8, 9 e 10 são os mais importantes para este trabalho, enquanto os demais serão abstraídos. De fato, as etapas do desenvolvimento deste trabalho são especificamente: definição de métricas para controladores robustos à incerteza de identificação (passo 8), resolução dos problema de otimização de sintonia resultantes (passo 9), e análise dos sistemas em malha fechada resultantes por meios quantitativos e qualitativos (passo 10).

Em relação ao passo 8, ainda segundo SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2007), existem 3 abordagens para o problema de projeto de controladores:

1. Modelagem das funções de transferência. Nesta abordagem, o usuário especifica a magnitude de algumas funções de transferência em função da frequência, e o um controlador que fornece a(s) forma(s) desejada(s) é decorrente disso.

   (a) Modelagem de funções de transferência em malha aberta. Esta é a abordagem clássica em que a magnitude da função de transferência de malha aberta é moldada para obter largura de banda e inclinação desejada. Geralmente nenhuma otimização é envolvida.

   (b) Modelagem de funções de transferência em malha fechada, como a função de sensibilidade. A otimização é geralmente usada, resultando em vários problemas de controle ótimo.

2. Projeto baseado em sinal. Isso envolve formulações de problemas no domínio do tempo, resultando na minimização de uma norma da função de transferência. Aqui se considera uma perturbação particular ou mudança de referência e, em seguida, se tenta otimizar a resposta em malha fechada. Os métodos "modernos" do espaço de estado dos anos 60, tais como o Controle Linear Quadrático (LQG), são baseados nesta abordagem orientada a sinal. No LQG, os sinais de entrada são considerados estocásticos (ou alternativamente impulsos em um cenário determinístico) e o valor esperado da variância da saída (ou a norma-2) é minimizada. No domínio da frequência, essa abordagem pode ser combinada com representações da incerteza do modelo, para produzir problemas de desempenho robusto que levam ao procedimento da μ-síntese, um tópico importante do controle robusto de processos.

3. Otimização numérica. Geralmente envolve otimização multiobjetivo. Tenta-se otimizar diretamente os verdadeiros objetivos, como tempos de subida, margem de estabilidade, etc. Computacionalmente, tais problemas de otimização podem ser difíceis de resolver, especialmente se não for um problema de otimização convexo. A abordagem de otimização numérica também pode ser realizada online, o que pode ser útil ao lidar com casos com restrições nas entradas e saídas. Abordagens de otimização online, como o controle preditivo baseado em modelo (MPC), vem se tornando mais usadas, com computadores mais rápidos e eficientes e conforme algoritmos computacionais confiáveis são desenvolvidos.

Nesse contexto, as propostas de sintonia deste trabalho podem ser classificadas na segunda categoria, projeto baseado em sinal. As formulações são feitas no domínio do tempo, resultando em um problema de minimização da norma-2 de uma função de transferência. A perturbação considerada é um degrau na referência de cada uma das variáveis controladas, para a qual se tenta otimizar a resposta em malha fechada. O que diferencia os métodos aqui apresentados é a visão do modelo identificado como uma variável aleatória, com matriz de covariância e região de confiança, em contraposição a visões multi-modelo, incerteza paramétrica ou não paramétrica.

Segundo O'DWYER (2009), apesar de ter sido o coração da engenharia de controle por décadas, há fortes evidências de que os controladores PI e PID permanecem pouco compreendidos e, em particular, mal ajustados em muitas aplicações. Isso é devido em parte ao fato de regras de sintonia de controladores propostas na literatura não têm impacto na prática industrial, por não serem acessíveis, espalhadas pela literatura e com notação não unificada. As regras de sintonia podem ser subdivididas da seguinte forma:

- Regras de sintonia com base na medição da resposta ao degrau;
- Regras de sintonia baseadas na minimização de um critério de desempenho;
- Regras de sintonia que fornecem uma resposta em malha fechada especificada;
- Regras de sintonia que permitem a obtenção de margens de ganho e fase especificados;
- Regras de sintonia robustas, com estabilidade e desempenho robusta incorporados no projeto;
- Regras de sintonia baseadas em parâmetros do ciclo final, como período de oscilação e ganho;
- Outras.

As regras de sintonia propostas neste trabalho se baseiam na minimização de um critério ou índice de desempenho. Na teoria do sistema de controle, um índice de desempenho é uma medida do desempenho de um sistema e é escolhido de modo a capturar parâmetros importantes do sistema. Em KEALY e O'DWYER (2003), são apresentados dois métodos para determinar analiticamente a métrica ISE (integral do erro ao quadrado) para um modelo de processo de primeira ordem com tempo morto sob controle PI. Usando o valor analítico do ISE, é analisado o desempenho de dez regras de sintonia usadas para sintonizar o controlador PID frente seis processos escolhidos.

Contudo, o projeto de controlador é um problema complexo que requer a consideração de várias questões, como rejeição de perturbação, mudança de referência, robustez em relação a variações de processo e incerteza de modelo e efeitos de ruído de medição. Dessa forma uma métrica tão simples quanto ISE não consegue capturar todos esses aspectos. GARPINGER *et al.* (2014) fornece intuições sobre o compromisso entre desempenho e robustez por meio de diagramas para sintonia de controladores PID. Também são comparados métodos comuns de sintonia e apresentada uma parametrização de controladores ótimos. Também HO *et al.* (1998) fornece fórmulas de sintonia simples para o projeto de controladores PID satisfazendo os requisitos de robustez e desempenho, com a intenção de que possam ser facilmente adotadas pela indústria.

JAULIN e WALTER (1996) aborda o problema de projeto de controladores frente a incertezas de maneira geral, onde se deseja sintonizar um vetor de parâmetros de modo a garantir que especificações sejam atendidas para todos os valores possíveis de algum vetor de perturbação desconhecido. O algoritmo apresentado é aplicado a três problemas: o projeto de um controlador PID robusto à incerteza estruturada, o controle de um modelo não linear de tempo discreto com parâmetros e estado inicial incertos e um problema de planejamento de movimento com obstáculos.

GE *et al.* (2002) apresenta um método que permite a incorporação explícita da descrição das incertezas do sistema na formulação do problema para projetar um controlador PID robusto, usando o paradigma de múltiplo modelo. A sintonia do controlador é reduzida a um problema de otimização convexa formulado por meio de desigualdades matriciais lineares (LMIs), que podem ser resolvidas de maneira razoavelmente eficiente com métodos desenvolvidos nas últimas décadas (SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2007)). A extensão ao sistema com atrasos de tempo também é discutida. O método proposto é aplicado a dois exemplos e comparado com os métodos de sintonia PID existentes.

Em ZHANG *et al.* (2012) é estudado o problema de projeto de controladores PID para sistemas de controle em rede com incertezas poliédricas. Perturbações e o ruído de medição são levados em consideração na modelagem para melhor refletir o

cenário prático. O problema de controle PID robusto é expresso como um problema de otimização matemática, H_∞, de modo que as perturbações de carga e referência possam ser atenuadas com um nível prescrito. Na teoria de controle os métodos H_∞ são usados para obter controladores estáveis com garantia de desempenho. A solução do problema de otimização matemática é a sintonia ótima em relação à função de objetivo, definida usando a norma H_∞ — maior valor singular do sistema no domínio da frequência. Têm como vantagem ser aplicável diretamente a sistemas multivariados com acoplamento entre as variáveis e como desvantagem não tratar bem restrições não lineares.

O controladores preditivo multivariável são conhecidos pela sua habilidade de lidar com restrições nas variáveis manipuladas, controladas e internas do modelo, mesmo em regime transiente. DI CAIRANO e BEMPORAD (2010) considera o problema de sintonizar um controlador preditivo multivariável para que se comporte como um controlador linear dado, quando as restrições não estão ativas. GARRIGA e SOROUSH (2010) fornece uma revisão das diretrizes de sintonia disponíveis para o controle preditivo multivariável. Abrange as formulações DMC, GPC, representação por espaço de estados, max-plus-linear entre outros. Também no contexto de controladores preditivos multivariáveis são apresentados resultados referentes à estimativa de estado e filtro de Kalman.

2.2 Propagação de incerteza

Em estatística, a propagação de incerteza (ou propagação de erro) é estudo da incerteza da variável aleatória resultante de uma função aplicada a uma ou mais variáveis aleatórias. Em dados medidos do processo a incerteza das variáveis é oriunda de erros de medição, perturbações não medidas, modelos variantes no tempo e não linearidades. Essa incerteza nos dados usados usados para a identificação do sistema implicam numa incerteza nos parâmetros do modelo identificado, que, por sua vez, influencia o processo de sintonia de controladores para o modelo. HELTON e DAVIS (2003) São apresentadas as seguintes técnicas de análise de incerteza e sensibilidade:

1. Análise de Monte Carlo
2. Análise diferencial
3. Metodologia de superfície de resposta
4. Teste de sensibilidade de amplitude de Fourier
5. Decomposição de variância de Sobol

6. Integração de probabilidade rápida.

HELTON e DAVIS (2003) dá ênfase ao método do hipercubo latino, que é uma maneira particular de se fazer a amostragem no método de Monte Carlo. São apresentadas também ferramentas de análise de incerteza: funções de distribuição cumulativa, funções de distribuição e diagrama de extremos e quartis.

SCHWAAB (2007) abordada as questões relacionadas ao desenvolvimento dos aspectos teóricos e numéricos da estimação de parâmetros. Sob a forte base da estatística são formulados procedimentos de estimação de parâmetros e análise dos resultados obtidos. A tese do livro é de que "A técnica de estimação de parâmetros só atinge a plenitude do rigor-científico quando pode ser suportada por argumentos estatísticos sólidos". São apresentadas as limitações inerentes ao método de mínimos quadrados, em parte por admitir implicitamente que todas as variáveis analisadas são medidas de uma única variável aleatória, o que em particular implica na independência estatística. É apresentado o método da máxima verossimilhança, o qual é amplamente difundido no âmbito da estimação de parâmetros e, em alguns casos, acaba se simplificando num problema de mínimos quadrados. Segundo o livro, três pressupostos são assumidos para que a técnica possa ser aplicada:

- Pressuposto 1 - Admite-se que as distribuições dos erros experimentais na região de experimentação são conhecidas.
- Pressuposto 2 - Admite-se como válida a hipótese do modelo perfeito
- Pressuposto 3 - Admite-se como válida a hipótese do experimento bem feito

A aplicação do método da máxima verossimilhança na identificação de modelos lineares nos parâmetros recai no problema de mínimos quadrados, que possui solução analítica. Os parâmetros estimados são resultado de um processo de otimização da função de verossimilhança, e de posse do valor ótimo dessa função objetivo é possível fazer inferência consistente da variância experimental e, a partir daí, por uma propagação de erros exata chegar a variância do parâmetros estimados. Por fim, se os parâmetros estimados são usados para fazer previsões, é possível se conhecer também a covariância das previsões realizadas, que é uma medida de incerteza.

No livro o método de máxima verossimilhança é aplicado ainda à estimação de modelos não lineares nos parâmetros, com todo o desenvolvimento da propagação de incertezas do erro experimental para os parâmetros identificados e posteriormente para a previsões realizadas com esses parâmetros. Aqui algumas diferenças são importantes de se pontuar entre o problema de estimação linear e o não linear. O primeiro deles é que, mesmo supondo um erro experimental dado por uma distribuição normal multivariada, no caso não linear não é esperado que se tenha uma

distribuição normal multivariada para o vetor de parâmetros estimado e, consequentemente, as superfícies de nível da função densidade de probabilidade do vetor de parâmetros não são mais obrigatoriamente elipsoides, podendo ser até mesmo, em casos extremos, desconexas. Tanto menos se espera da distribuição de probabilidades de previsões realizadas com base nesses parâmetros estimados. Contudo com processos de linearização sempre é possível fazer uma propagação analítica dos erros para se obter aproximações das covariâncias, tanto dos parâmetros estimados quanto das aproximações por eles realizadas. Se os erros experimentais são considerados pequenos pode-se ainda aproximar as distribuições aleatórias dos parâmetros e previsões por distribuições normais multivariadas.

Todas essas discussão de estimação do erro experimental, propagação desse resultado para a matriz de covariância dos parâmetros estimados e a posterior propagação dessa matriz de covariância para a incerteza das previsões realizadas com o vetor de parâmetros é o cerne deste trabalho, onde todo esse procedimento será aplicado na identificação dos parâmetros dos modelos dinâmicos contínuos.

2.3 Identificação de sistemas

LJUNG (1987) define a identificação de sistemas como a ciência de construir modelos matemáticos de sistemas dinâmicos - onde variáveis de diferentes tipos interagem produzindo sinais observáveis - baseado em dados observados dos sistemas. Nesse contexto 3 entidades básicas são definidas:

- Os dados - Os dados de entrada e saída são gravados algumas vezes durante um experimento de identificação especificamente projetado, onde o usuário pode determinar quais sinais medir e quando medi-los e pode também escolher os sinais de entrada. O projeto de experimentos é o responsável por fazer essas escolhas de tal forma que os dados se tornem o mais informativos possível, sujeito a restrições que podem estar disponíveis. Em outros casos o usuário pode não ter a possibilidade de afetar o experimento, mas deve usar dados da operação normal do sistema.

- O conjunto de modelos - Um conjunto de modelos candidatos é obtido ao se especificar dentro de que coleção de modelos nós iremos procurar por um modelo adequado. Não há dúvidas que essa é a escolha mais importante e ao mesmo tempo mais difícil do procedimento de identificação de sistemas. É aqui que o conhecimento prévio e a intuição de engenharia têm que ser combinados com as propriedades formais dos modelos. Algumas vezes o conjunto de modelos é obtido depois de uma modelagem cuidadosa. Em outros casos modelos lineares padrões podem ser aplicados, sem referência ao contexto físico. Tal

conjunto de modelos, cujos parâmetros são basicamente vistos como veículos para ajustar o modelo aos dados e não refletem considerações físicas, é chamado de caixa preta. Conjuntos de modelos com parâmetros ajustáveis com interpretação física podem adequadamente ser chamados de caixa cinza.

- Uma medida pela qual os modelos candidatos podem ser avaliados usando os dados - determinando o melhor modelo no conjunto, guiado pelos dados. Este é o método de identificação. A avaliação da qualidade do modelo é tipicamente baseado no desempenho do modelo quando tentamos reproduzir os dados medidos.

Uma vez que sejam definidas essas três entidades chegamos, ao menos implicitamente, num modelo resultante.

GARNIER (2015) discute a importância e a relevância da identificação direta do sistema em tempo contínuo. São apresentadas as abordagens para identificar diretamente modelos de tempo contínuo a partir de dados de entrada e saída amostrados. São apresentadas soluções para situações de ruído de medição colorido, identificação de sistema com atraso de tempo, identificação no domínio de frequência, dados não uniformemente amostrados, identificação de modelo de malha fechada e não linear.

Capítulo 3

Método Proposto

O presente capítulo faz uso dos conceitos de identificação de sistemas e de propagação analítica de incertezas para apresentar os desenvolvimentos deste trabalho na linha de sintonia de controladores para modelos baseada em incerteza de identificação. São apresentadas três maneiras de formular um problema de otimização para a sintonia de controladores. A primeira formulação é o problema min-max dentro de um intervalo de confiança. A segunda é a otimização de desempenho tradicional com uma restrição de não violação de estabilidade dentro de um intervalo de confiança. E a ultima é a minimização da esperança do desempenho. Na primeira seção são apresentadas algumas métricas de desempenho clássicas usadas na sintonia de controladores e nas seções subsequentes são apresentadas cada uma das três formulações do problema de sintonia, acompanhadas dos conceitos que se fizerem necessários para a sua formulação como a distância de Mahalanobis, a nota de robustez de um controlador e as condições de otimalidade de KKT.

3.1 Métricas de desempenho

Na avaliação de controladores, as métricas são normalmente utilizadas para medir seu desempenho num cenário de mudança de referência ou rejeição de perturbação. Algumas dessas métricas são:

1. ISE - Integral do quadrado do erro - $\int_0^T e(t)^2 dt$
2. IAE - Integral do valor absoluto do erro - $\int_0^T |e(t)| dt$
3. ITSE - ISE ponderado pelo tempo - $\int_0^T te(t) dt$
4. ITAE - IAE ponderado pelo tempo - $\int_0^T t|e(t)| dt$

Dentre essas métricas, a ISE foi adotada neste trabalho, pois apresenta uma série de propriedades que são interessantes. Uma delas é que a ISE com horizonte T infinito

pode ser calculado de maneira analítica para sistemas lineares, conforme mostrado na subseção a seguir.

3.2 ISE analítica

O cálculo da métrica ISE de um sistema linear dado por uma função de tranferência sem atrasos ou em espaço de estados é sempre possível de maneira analítica. Ou seja, não é necessário realizar a simulação de um degrau na referência até um determinado instante de tempo e assim calcular a integral do erro ao quadrado, o que daria um valor aproximado para a ISE, quando temos disponível um cálculo que nos dá esse valor de maneira exata.

Existem trabalhos que procuram calcular o valor da ISE de maneira analítica em contextos mais amplos, como KEALY e O'DWYER (2003) — onde é analisado o cálculo da ISE de sistemas de primeira ordem com atraso controlados por um PID. Aqui neste trabalho vamos nos deter aos sistemas sem atraso de tempo.

Para uma abordagem mais uniforme dos casos SISO e MIMO, os sistemas lineares em função de transferência serão convertidos para um sistema em espaço de estados, também chamado de realização do sistema. O cálculo da ISE poderia ser feito diretamente sobre o sistema em função de transferência, mas como a transformação de função de transferência para espaço de estados é mais direta que no sentido inverso, a representação em espaço de estado foi escolhida. Por simplicidade o desenvolvimentos também vai se ater apenas aos sistemas em espaço de estado em tempo contínuo, mas um desenvolvimento muito semelhante poderia ser desenvolvido em tempo discreto, permitindo o cálculo analítico da ISE também para esses sistemas.

3.2.1 Fechamento da malha

O primeiro passo no cálculo da ISE da malha fechada da planta com o controlador é calcular o sistema em malha fechada em função das representações da planta e do controlador na representação de espaço de estados. Suponhamos que a planta e o controlador podem ser dados da seguinte maneira. Planta:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.1}$$

$$y = Cx + Du \tag{3.2}$$

Controlador:

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}e \tag{3.3}$$
$$u = \tilde{C}z + \tilde{D}e \tag{3.4}$$

Realimentação:

$$e = r - y \tag{3.5}$$

Substituindo (3.2) em (3.5):

$$e = r - Cx - Du \tag{3.6}$$

Substituindo (3.6) em (3.4) e isolando u:

$$u = \tilde{C}z + \tilde{D}r - \tilde{D}Cx - \tilde{D}Du \Rightarrow (I + D\tilde{D})u = \tilde{C}z + \tilde{D}r - \tilde{D}Cx \tag{3.7}$$

Fazendo $(I + D\tilde{D})^{-1} = F$, (3.7) se torna:

$$u = F\tilde{C}z + F\tilde{D}r - F\tilde{D}Cx \tag{3.8}$$

Substituindo (3.6) e (3.8) subsequentemente em (3.3):

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \tilde{A}z + \tilde{B}e \\
&= \tilde{A}z + \tilde{B}r - \tilde{B}Cx - \tilde{B}Du \\
&= \tilde{A}z + \tilde{B}r - \tilde{B}Cx - \tilde{B}DF\tilde{C}z - \tilde{B}DF\tilde{D}r + \tilde{B}DF\tilde{D}Cx \\
&= (-\tilde{B}C + \tilde{B}DF\tilde{D}C)x + (\tilde{A} - \tilde{B}DF\tilde{C})z + (\tilde{B} - \tilde{B}DF\tilde{D})r
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Substituindo (3.8) em (3.1):

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu = \\
&= Ax + BF\tilde{C}z + BF\tilde{D}r - BF\tilde{D}Cx = \\
&= (A - BF\tilde{D}C)x + BF\tilde{C}z + BF\tilde{D}r
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Substituindo (3.8) em (3.6):

$$\begin{aligned}
e &= r - Cx - Du = \\
&= r - Cx - DF\tilde{C}z - DF\tilde{D}r + DF\tilde{D}Cx = \\
&= (-C + DF\tilde{D}C)x - DF\tilde{C}z + (I - DF\tilde{D})r
\end{aligned} \tag{3.11}$$

De (3.9), (3.10) e (3.11) temos por fim o sistema em espaço de estados resultante:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A - BF\tilde{D}C & BF\tilde{C}\\ -\tilde{B}C + \tilde{B}DF\tilde{D}C & \tilde{A} - \tilde{B}DF\tilde{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}BF\tilde{D}\\ \tilde{B} - \tilde{B}DF\tilde{D}\end{bmatrix} r\\ e &= \begin{bmatrix}-C + DF\tilde{D}C & -DF\tilde{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}I - DF\tilde{D}\end{bmatrix} r\end{aligned} \tag{3.12}$$

Logicamente, o sistema (3.12) se simplifica bastante quando assumimos que a planta é estritamente causal, ou seja, que $D = 0$. Assim teremos $F = (I + D\tilde{D})^{-1} = I$ e vários termos desaparecendo:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A - B\tilde{D}C & B\tilde{C}\\ -\tilde{B}C & \tilde{A}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\tilde{D}\\ \tilde{B}\end{bmatrix} r\\ e &= \begin{bmatrix}-C & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} + r\end{aligned} \tag{3.13}$$

A Equação 3.13 nos dá as matrizes do sistema em malha-fechada em função dos parâmetros do modelo em malha aberta e do controlador, respectivamente (A, B, C, D) e $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$. Podemos ver que o parâmetros da malha fechada dependem dos parâmetros da malha aberta de maneira linear, com exceção do termo $B\tilde{D}C$. É interessante perceber que se B ou C são constantes, ou seja, não foram identificados e sim fixados, a dependência dos parâmetros da malha fechada dependem dos parâmetros da malha aberta de maneira linear, assim a propagação da incerteza é exata, sem aproximações. Caso contrário, ou seja, em que B e C sejam ambas identificadas, a propagação analítica de incerteza fornece apenas uma aproximação da covariância dos parâmetros da malha-fechada, os quais não seguem mais uma distribuição normal multivariada.

O Sistema 3.13 ainda não está no formato apropriado para o cálculo da ISE analítica. A transformação necessária é desenvolvida a seguir.

3.2.2 Transformação do sistema

Nosso objetivo neste ponto é transformar um sistema em malha-fechada cujas entrada e saída são respectivamente o sinal de referência e o valor das variáveis controladas em um sistema cujas entrada e saída são respectivamente a derivada do sinal referência e o erro de seguimento. O valor analítico da métrica ISE é justamente a norma dois do sistema resultante.

Seja o sistema estável em malha fechada cujo vetor de entrada r é o sinal de

referência e o vetor de saída y é o valor das variáveis controladas:

$$\begin{aligned} \dot{x} = &\quad Ax + Br \\ y = &\quad Cx + Dr \end{aligned} \tag{3.14}$$

Nesta seção, o sistema (A, B, C, D) se refere ao modelo em malha fechada, diferentemente da Seção 3.2.1, onde se refere ao modelo em malha aberta. Seja $\bar{x}$ o estado estacionário quando o vetor de referência r é igual a $\bar{r}$. Pela condição de estabilidade em malha fechada temos:

$$\begin{aligned} 0 = &\quad A\bar{x} + B\bar{r} \\ \bar{r} = &\quad C\bar{x} + D\bar{r} \end{aligned} \tag{3.15}$$

Como o sistema é estável, A é inversível e podemos escrever:

$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{r} \tag{3.16}$$

Substituindo esse resultado na segunda equação de (3.15) temos:

$$\bar{r} = -CA^{-1}B\bar{r} + D\bar{r} \Rightarrow I = -CA^{-1}B + D \Rightarrow -CA^{-1}B = I - D \tag{3.17}$$

A Equação 3.17 vale para todos os sistemas como (3.14) que representam uma malha fechada estável. Derivando dos dois lados a equação (3.14) temos:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = &\quad A\dot{x} + B\dot{r} \\ \dot{y} = &\quad C\dot{x} + D\dot{r} \end{aligned} \tag{3.18}$$

Multiplicando os dois lados da segunda equação de (3.18) temos:

$$-CA^{-1}x = -Cx - CA^{-1}Br = -Cx - CA^{-1}Br = -Cx + (I - D)r = r - y = e \tag{3.19}$$

Substituindo (3.19) em (3.18) temos o seguinte sistema em espaço de estados que tem como entrada a derivada da referência e como saída o erro de seguimento:

$$\begin{aligned} \ddot{x} = &\quad A\dot{x} + B\dot{r} \\ e = &\quad -CA^{-1}x \end{aligned} \tag{3.20}$$

Por definição, a norma dois desse sistema é a ISE desejado, pois a norma dois de um sistema é o somatório da integral do quadrado de suas saídas quando a entrada é um impulso em cada uma das entradas. No sistema (3.20) um impulso na entrada $\dot{r}_i$ equivale a um degrau na referência r_i, enquanto a integral da saída e_i é justamente a ISE desejada. A seguir a norma dois e seu cálculo serão explicados em maiores

detalhes.

3.2.3 Norma dois de um sistema

Seja um sistema G com n entradas e m saídas em espaço de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{3.21}$$

Seja h_{ij} a j-ésima saída do sistema para um impulso na i-ésima variável de entrada. Podemos definir a norma dois do sistema G como:

$$\|G\|_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^\infty h_{ij}(t)^2 dt \tag{3.22}$$

Esse resultado pode ser obtido de maneira analítica com auxílio da equação de Lyapunov:

$$AQ + QA^\top + BB^\top = 0 \tag{3.23}$$

$$P = CQC^\top + DD^\top \tag{3.24}$$

$$\|G\|_2 = tr(P) \tag{3.25}$$

A equação (3.23) é linear e tem a seguinte solução:

$$(I_n \otimes A + A^\top \otimes I - n)vec(X) = -vec(BB^\top) \tag{3.26}$$

Em que I_n é a matriz identidade de ordem n, $\otimes$ é o produto de Kronecker e vec denota a operação de concatenação de colunas.

O que conclui a apresentação do procedimento de cálculo da ISE de maneira analítica. Não é difícil obter por meio de uma ferramenta de diferenciação automática as derivadas da ISE em relação aos parâmetros de sintonia, o que é útil para uma otimização da sintonia do controlador para o modelo nominal. As derivadas da ISE em relação aos parâmetros do modelo também pode ser calculadas e são usadas a seguir para obtenção das condições de KKT na sintonia minmax e iseres.

3.3 A sintonia min-max

Os problemas min-max são problemas típicos na disciplina de otimização e ocorrem naturalmente quando se deseja uma abordagem conservadora para atacar o problema, ou seja, deseja-se minimizar o pior desempenho esperado. No nosso caso o vetor aleatório dos parâmetros p pode assumir qualquer valor no espaço de parâmetros.

Dessa forma resolver o problema min-max é impossível pois não importa qual sintonia escolhêssemos para o controlador haverá plantas com desempenho infinitamente ruins. É preciso limitar uma região no entorno da planta nominal para a qual queremos resolver o problema min-max. Para fazer isso de maneira mais formal vamos utilizar a definição de distância de Mahalanobis.

3.3.1 Distância de Mahalanobis

A distância de Mahalanobis é uma medida usada no contexto da distribuição normal multivariada para saber o quanto um determinado vetor está distante da média da distribuição. Ela se diferencia da distância euclidiana pois leva em consideração a matriz de covariância, ponderando as direções de maneira inversamente proporcional à incerteza naquela direção. Formalmente, dado um vetor aleatório $p = \mathcal{N}(\bar{p}, \sigma_p^2)$, a distância de Mahalanobis $D_M(q)$ de um vetor q a p é definida como:

$$D_M(q) = \|q - \bar{p}\|_{(\sigma_p^2)^{-1}} = \sqrt{(q-\bar{p})^\top (\sigma_p^2)^{-1}(q-\bar{p})} \tag{3.27}$$

O operador $\| \bullet \|_{(\sigma_p^2)^{-1}}$ representa a norma euclidiana ponderada pela matriz $(\sigma_p^2)^{-1}$, ou seja, pelo inverso da matriz de covariância. Essa definição foi feita de tal forma que desvios de q em relação a $\bar{p}$ são mais penalizados em direções de baixa incerteza e menos penalizados em direções de alta incerteza. As superfícies definidas por uma distância de Mahalanobis constante são superfícies de nível da função densidade de probabilidade de p, elipsóides para uma distribuição normal multivariada. As regiões definidas por uma distância de Mahalanobis menor que uma constante, são regiões de confiança do modelo com parâmetro p. Regiões de confiação de 1,2 ou 3 desvios padrão são correspondentes à distância de mahalanobis 1, 2 e 3, respectivamente.

3.3.2 Definição min-max

Uma vez definido o conceito de distância de Mahalanobis, podemos chegar a uma definição do problema de otimização de sintonia min-max para o modelo identificado com incertezas. Seja G o modelo identificado, D_M a distância de Mahalanobis associada a seu vetor de parâmetros e n_σ o número de desvios padrão da região de confiança que desejamos trabalhar. O problema min-max de sintonia é formulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\min_C \max_G ISE(C, G) \\ &\text{suj. } D_M(G) \leq n_\sigma \end{aligned} \tag{3.28}$$

Seja (C^*, G^*) a solução desse problema de otimização. O controlador C^* é o controlador ótimo para a região de confiança definida por n_σ desvios padrão e a planta G^*

é a planta para a qual ele apresenta o pior desempenho dentro dessa mesma região de confiança. Isso significa que para qualquer outro controlador C existe uma planta G dentro da região de confiança tal que o desempenho de C na planta G é igual ou pior que o desempenho de C^* controlando G^* .

Do ponto de vista algorítmico, esse problema parece difícil de ser resolvido, uma vez que se trata de dois problemas de otimização aninhados: a função objetivo do problema de otimização é em si um outro problema de otimização. Existem algumas maneiras de se contornar esse problema computacional e a abordagem por condições de KKT foi escolhida. Primeiro observamos que o problema pode ser reformulado da seguinte forma:

$$\min_{C} \text{pior}(C) \tag{3.29}$$

Onde pior(C) está denotando a função que dá a ISE de pior caso dentro da região de confiança definida por n_σ desvios padrão, e sua formulação como problema de otimização é dada pela Equação 3.30.

$$\begin{aligned} \text{pior}(C) = \max_{G} & \, ISE(C, G) \\ \text{suj. } & D_M(G) \leq n_\sigma \end{aligned} \tag{3.30}$$

Vamos converter a função pior(C) de um problema de otimização em um sistema de equações algébricas usando as condições de KKT

3.3.3 Condições de KKT

Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ e o seguinte problema de otimização com restrições:

$$\begin{aligned} & \min_{x} f(x) \\ \text{suj. } & g(x) \leq 0, \; h(x) = 0 \end{aligned} \tag{3.31}$$

A condições de KKT para esse problema são:

$$\nabla f(x) + \nabla g(x)\mu + \nabla h(x)\lambda = 0 \tag{3.32}$$

$$\mu_i g_i(x) = 0, \forall i \in \{1, ..., m\} \tag{3.33}$$

$$g_i(x) \leq 0, \forall i \in \{1, ..., m\} \tag{3.34}$$

$$h_j(x) = 0, \forall j \in \{1, ..., l\} \tag{3.35}$$

$$\mu_i \geq 0, \forall i \in \{1, ..., m\} \tag{3.36}$$

Vamos aplicar as condições de KKT à Equação 3.30. Por simplicidade supomos que na solução a restrição de desigualdade estará ativa, de forma a podermos susbstuí-la por uma restrição de igualdade. Isso equivale à suposição de que a planta

de pior desempenho estará na fronteira da região de confiança. Sem o termo referente à restrição de desigualdade, as condições de KKT para a Equação 3.30, se resumem à aplicação das Equações 3.32 e 3.35, resultando respectivamente nas Equações 3.37 e 3.38.

$$\frac{\partial ISE}{\partial G} + \lambda \frac{\partial D_M}{\partial G} = 0 \tag{3.37}$$

$$D_M - n_\sigma = 0 \tag{3.38}$$

Substituindo as condições dadas palas Equações 3.37 e 3.38 na Equação 3.29 obtemos o problema de otimização dado pela 3.39, o qual pode ser resolvido usando algum algoritmo de otimização e uma rotina de diferenciação automática para as derivadas.

$$\begin{aligned} &\min_{C,G,\lambda} ISE(C,G) \\ &\text{suj.} \frac{\partial ISE}{\partial G} + \lambda \frac{\partial D_M}{\partial G} = 0 \\ &D_M - n_\sigma = 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

3.4 Minimização restrita da ISE nominal

Uma outra maneira de formular o problema de sintonia ótima é tomando como função objetivo a ISE do modelo nominal identificado, acrescentando uma restrição garantia de estabilidade numa região de confiança, para levar em consideração a incerteza de identificação. Antes de formular formalmente o problema de otimização precisamos fazer a definição de nota de robustez de um controlador para formalizar o conceito de garantia de estabilidade numa região de confiança.

3.4.1 Nota de robustez de um controlador

A nota de robustez de um controlador frente a um modelo identificado com incertezas é um conceito importante desenvolvido neste trabalho. A nota de robustez de um controlador C nada mais é que a menor distância (no sentido de Mahalanobis) do modelo identificado G a um modelo G^* que instabiliza a malha fechada, ou seja, que o par (G^*, C) é instável. De maneira formal:

$$\begin{aligned} nota(C) = &\min_{G} D_M(G) \\ &\text{suj. } (G,C) \text{ instável} \end{aligned} \tag{3.40}$$

O controlador ter nota de robustez n_σ significa que ele é estável em todo região de confiança definido por n_σ desvios padrão.

Supõe-se que a condição do par planta-controlador (G, C) ser instável pode ser convertida numa condição de estabilidade marginal, ou seja, que a restrição estará ativa no ótimo. O teorema de estabilidade de Nyquist generalizado para sistemas MIMO, segundo SKOGESTAD e POSTLETHWAITE (2007) é dado da seguinte forma:

Seja P_{ol} o número de pólos instáveis em malha aberta de $L(s) = G(s)C(s)$. O sistema em malha fechada de $L(s)$ com um realimentação negativo é estável se e somente se o diagrama de Nyquist de $det(I + L(s))$

1. Circula a origem P_{ol} vezes no sentido anti-horário

2. Não passa pela origem

Dado o teorema de estabilidade de Nyquist, por continuidade vemos que a condição (G, C) ser marginalmente estável implica que o diagrama de Nyquist de $det(I + G(s)C(s))$ passe pela origem em algum $s = j\omega$. Essa condição será considerada como restrição no problema de otimização.

Os próximos passos para implementar essa restrição é calcular o sistema em espaço de estados resultante dos sistemas controlador e planta colocados em série. De fato temos, Planta:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.41}$$
$$y = Cx + Du \tag{3.42}$$

Controlador:

$$\dot{z} = \tilde{A}z + \tilde{B}e \tag{3.43}$$
$$u = \tilde{C}z + \tilde{D}e \tag{3.44}$$

Substituindo 3.44 em 3.41 e em 3.42 :

$$\begin{aligned} \dot{x} = Ax + Bu = Ax + B\tilde{C}z + B\tilde{D}e \\ y = Cx + D\tilde{C}z + D\tilde{D}e \end{aligned} \tag{3.45}$$

O que resulta no seguinte sistema em espaço de estados resultante para o sistema

em série:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}A & B\tilde{C}\\ \tilde{A} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}B\tilde{D}\\ \tilde{B}\end{bmatrix} e\\ y &= \begin{bmatrix}C & D\tilde{C}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} + D\tilde{D}e\end{aligned} \tag{3.46}$$

Ainda precisamos fazer a conversão de um sistema em espaço de estados (A, B, C, D) para um sistema em matriz de função de tranferência $L(s)$. Isso pode ser feito tomando a transformada de Laplace no sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.47}$$

$$y = Cx + Du \tag{3.48}$$

O que nos dá:

$$sX = AX + BU \tag{3.49}$$

$$Y = CX + DU \tag{3.50}$$

Da qual:

$$X = (sI - A)^{-1}BU \Rightarrow Y = C(sI - A)^{-1}BU + DU = (C(sI - A)^{-1}B + D)U \tag{3.51}$$

E daí vemos que $L(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$. Quando fizermos $s = j\omega$ teremos o problema de inverter uma matriz complexa. Para obter a parte real e imaginária de $L(j\omega)$ sem essa inversão matricial complexa, fazemos as seguintes manipulações:

$$\begin{aligned}L(j\omega) &= C(j\omega I - A)^{-1}B + D =\\ &= C(j\omega I - A)^{-1}(-j\omega I - A)^{-1}(-j\omega I - A)B + D =\\ &= C(j\omega^2 I + A^2)^{-1}(-j\omega I - A)B + D =\\ &= -C(j\omega^2 I + A^2)^{-1}AB + D - j\omega C(j\omega^2 I + A^2)^{-1}B =\\ &= L^0 + jL^1\end{aligned} \tag{3.52}$$

Explicitando assim as partes reais e imaginárias de $L(j\omega)$, respectivamente $L^0 = -C(j\omega^2 I + A^2)^{-1}AB + D$ e $L^1 = -\omega C(j\omega^2 I + A^2)^{-1}B$.

Agora precisamos de uma metodologia de cálculo para o determinante de um matriz complexa. Esse cálculo poderia se dar de maneira imediata de maneira análoga à matrizes reais, mas como estamos lidando com rotinas de diferenciação automática, normalmente os cálculos estão implementados apenas para o caso real, então precisamos reduzir o caso complexo ao caso real. Para formular o teorema que nos permitirá fazer esse cálculo vamos primeiro introduzir alguma notação.

Seja L uma matriz complexa com partes reais e complexas das respectivamente pelas matrizes L^0 e L^1. Seja L_i, L_i^1 e L_i^0 cada uma das n colunas de L, L^0 e L^1, respectivamente. De tal sorte que:

$$\begin{aligned} L &= L^0 + jL^1 \\ L &= \begin{bmatrix} L_1 & L_2 & \cdots & L_n \end{bmatrix} \\ L^0 &= \begin{bmatrix} L_1^0 & L_2^0 & \cdots & L_n^0 \end{bmatrix} \\ L^1 &= \begin{bmatrix} L_1^1 & L_2^1 & \cdots & L_n^1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.53}$$

Temos então o seguinte resultado:

$$det(L) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} det(\begin{bmatrix} L_1^{x_1} & L_2^{x_2} & \cdots & L_n^{x_n} \end{bmatrix}) \tag{3.54}$$

Ou seja, o determinante da matriz complexa L pode ser decomposto em 2^n determinantes de matrizes reais, onde n é número de linhas da matriz L.

3.5 Formulação do problema

Seja $\bar{G}$ o modelo nominal identificado. Dado um intervalo de confiança n_σ definimos o problema de sintonia por minimização restrita da ISE nominal da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\min_C ISE(\bar{G}, C) \\ &\text{suj. nota}(C) \leq n_\sigma \end{aligned} \tag{3.55}$$

Como no caso da sintonia minmax, surgem alguns problemas de ordem prática para serem resolvidos, pois o cálculo da nota de robustez de um controlador é em si um problema de otimização, portanto, temos mais uma vez um caso de problemas de otimização aninhados. Dessa vez o problema de otimização mais interno está na restrição de desigualdade e não na função objetivo, como no caso da sintonia minmax. Para contornar essa questão mais uma vez vamos aplicar as condições de KKT para transformar o segundo problema de otimização num conjunto de equações algébricas.

Voltando à Equação 3.40 onde é definido a nota de robustez de um controlador, precisamos aplicar às condições de KKT à esse problema de otimização. Como vimos na Seção 3.4.1, pelo o teorema de estabilidade de Nyquist, a condição (G, C) ser marginalmente estável é equivalente que a $det(I + G(j\omega)C(j\omega)) = 0$ para algum ω. Definindo:

$$N(\omega) = \begin{bmatrix} Re(det(I + G(j\omega)C(j\omega))) \\ Im(det(I + G(j\omega)C(j\omega))) \end{bmatrix} \tag{3.56}$$

Podemos reescrever a definição de nota de robustez (Equação 3.40) de maneira formal da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} nota(C) = \min_{G} \; & D_M(G) \\ \text{suj. } & N(\omega) = 0 \end{aligned} \tag{3.57}$$

As condições de KKT para a Equação 3.57, se resumem à aplicação das Equações 3.32 e 3.35, resultando respectivamente nas Equações 3.58 e 3.59.

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_M}{\partial G} + \lambda^\top \frac{\partial N}{\partial G} &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial \omega} &= 0 \end{aligned} \tag{3.58}$$

$$N(\omega) = 0 \tag{3.59}$$

Substituindo as condições dadas palas Equações 3.58 e 3.59 na Equação 3.55 obtemos o problema de otimização dado pela 3.60, o qual pode ser resolvido usando algum algoritmo de otimização e uma rotina de diferenciação automática para as derivadas.

$$\begin{aligned} \min_{C,G,\omega,\lambda} \; & ISE(C, \bar{G}) \\ \text{suj.} \; & D_M(G) = n_\sigma \\ & \frac{\partial D_M}{\partial G} + \lambda^\top \frac{\partial N}{\partial G} = 0 \\ & \frac{\partial N}{\partial \omega} = 0 \\ & N(\omega) = 0 \end{aligned} \tag{3.60}$$

3.6 Minimização da esperança da ISE (EISE)

A minização da ISE pode se mostrar uma abordagem para a sintonia muito otimista, pois a incerteza da planta é ignorada em todo o processo. Dessa forma não há qualquer compromisso com o desempenho do controlador em malha fechada no caso em que a planta difira do modelo identificado, ou seja, falta robustez à sintonia do controlador. Uma maneira de contornar isso é propor que não a ISE mas sim o seu valor esperado seja minimizado. Essa esperaça será tomada sobre o espaço n-dimensional dos parâmetros do modelo, ou seja, sobre o $\mathbb{R}^n$. Dessa forma se cria um compromisso entre o desempenho do controlador frente ao modelo e frente a

toda possível planta, ponderada pela sua probabilidade. Esse proposta parece um tanto intratável, mas veremos como ela pode ser abordada, permitindo inclusive o seu cálculo de maneira analítica. para tanto o primeiro passo é a definição da análise de sensibilidade de um sistema G dado em espaço de estados pela matrizes A,B,C e D e um parâmetro p do qual cada uma das matrizes do sistema pode ser função.

3.6.1 Sistema de sensibilidade

Dado um parâmetro $p \in \mathbb{R}$, fixo no tempo, e um sistema G dado pelo espaço de estados (A, B, C, D) onde cada uma das matrizes A,B,C e D é função de p, ou seja, $A = A(p)$,$B = B(p)$,$C = C(p)$ e $D = D(p)$. Podemos derivar implicitamente o sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.61}$$
$$y = Cx + Du \tag{3.62}$$

O que nos dá:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial p} = \frac{\partial A}{\partial p}x + A\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial B}{\partial d}u \tag{3.63}$$
$$\frac{\partial y}{\partial p} = \frac{\partial C}{\partial p}x + C\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial D}{\partial p}u \tag{3.64}$$
$$\tag{3.65}$$

Colocando em notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial p} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \frac{\partial x}{\partial d} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ \frac{\partial B}{\partial p} \end{bmatrix} u \tag{3.66}$$
$$\frac{\partial y}{\partial p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial C}{\partial p} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial d} \\ x \end{bmatrix} + \frac{\partial D}{\partial p}u \tag{3.67}$$

Esse sistema resultante é o sistema de análise de sensibilidade em relação ao parâmetro p, que iremos denotar por $\partial G/\partial p$.

3.6.2 Caso multivariável da ISE

Primeiro vamos formalizar o que é a ISE para um sistema multivariável. Seja e_{ij} o erro de seguimento da variável j quando damos um degrau unitário na referência

da variável i, mantendo todas as outras referências nulos. Temos a seguinte generalização da ISE para sistemas multivariáveis:

$$ISE = \sum_i \sum_j \int_0^\infty e_{ij}^2(t)dt \tag{3.68}$$

Essa generalização é interessante na medida de que:

- Para o caso SISO coincide com a definição original
- Leva em consideração não só o seguimento da variável em que se deu o degrau, mas também a perturbação causada nas outras
- Também pode ser calculada de maneira analítica para sistemas dados em espaço de estado (A, B, C, D)

Voltemos agora à definição de EISE:

$$EISE = E\left(ISE\right) = E\left(\sum_i \sum_j \int_0^\infty e_{ij}^2(t)dt\right) \tag{3.69}$$

Como o operador de esperança é linear temos:

$$EISE = \sum_i \sum_j \int_0^\infty E(e_{ij}^2(t))dt \tag{3.70}$$

Mas sabemos da estatística que, para qualquer variável aleatória X, $VAR(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Donde $E(X^2) = E(X)^2 + VAR(X)$. Donde:

$$\begin{aligned} EISE &= \sum_i \sum_j \int_0^\infty E(e_{ij}(t))^2 + VAR(e_{ij}(t))dt = \\ &= \sum_i \sum_j \int_0^\infty E(e_{ij}(t))^2 dt + \sum_i \sum_j \int_0^\infty VAR(e_{ij}(t))dt = \\ &= ISE + IVE \end{aligned} \tag{3.71}$$

Onde estamos definido a IVE como sendo a integral da variância do erros, somado na matriz de respostas de cada saída a um degrau unitário na referência cada entrada

3.6.3 Reparametrização ortonormal

Definiremos aqui uma parametrização ortonormal como sendo aquela em que a matriz de covariância é igual à matriz identidade. Dado um vetor de parâmetros p com matriz de covariância inversível σ_p^2 sempre é possível encontrar um outro vetor $q = Ap$ tal que a matriz de covariância de q, ou seja $\sigma_q^2 = A\sigma_p^2 A^\top$, é igual a matriz

identidade. Com efeito, uma matriz de covariância inversível é positiva definida e, sendo assim, possui uma fatoração de Cholesky $\sigma_p^2 = LL^\top$, com L inversível. Tomando $A = L^{-1}$ temos:

$$\sigma_q^2 = A\sigma_p^2 A^\top = L^{-1}(LL^\top)L^{-\top} = (L^{-1}L)(L^\top L^{-\top}) = II = I \tag{3.72}$$

Uma outra maneira de se obter o mesmo resultado é relembrar que toda matriz positiva definida pode ser diagonalizada por uma matriz ortonormal U, de tal forma que $\sigma_q^2 = UDU^\top$, com D diagonal. Fazendo $D^{-1/2}$ denotar o inverso da raiz quadrada tomado elemento a elemento da matriz D e $A = D^{-1/2}U^\top$ temos:

$$\sigma_q^2 = A\sigma_p^2 A^\top = (D^{-1/2}U^\top)(UDU^\top)(UD^{-1/2}) = D^{-1/2}(U^\top U)D(U^\top U)D^{-1/2} = I \tag{3.73}$$

3.6.4 O cálculo da EISE analítica

Pelo resultado apresentado na Equação 3.71 vimos que o cálculo do EISE pode ser decomposta no cálculo da ISE e da IVE, uma vez que $EISE = ISE + IVE$. Na Subsecção 3.2 já foi apresentado como pode ser feito o cálculo analítico da ISE. Essa subeseção se concetra então no cálculo analíco da IVE. Como foi definido na Equação 3.71:

$$IVE = \sum_i \sum_j \int_0^\infty VAR(e_{ij}(t))dt \tag{3.74}$$

Com i e j percorrendo a matriz de respostas de cada saída a um degrau unitário na referência cada entrada. Vamos desenvolver o termo $VAR(e_{ij}(t))$. Aplicando a propagação analítica de incerteza do vetor de parâmetros p para o erro e_{ij} temos:

$$VAR(e_{ij}(t)) = \frac{\partial e_{ij}}{\partial p}\sigma_p^2 \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial p}\right)^\top \tag{3.75}$$

Supondo que a parametrização p seja ortonormal, ou seja, que a matriz σ_p^2 é igual a identidade, temos:

$$VAR(e_{ij}(t)) = \frac{\partial e_{ij}}{\partial p}\frac{\partial e_{ij}}{\partial p}^\top = \sum_k \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial p_k}\right)^2 \tag{3.76}$$

Substituindo esse resultado na equação 3.74 temos:

$$
\begin{aligned}
IVE = & \sum_i \sum_j \int_0^\infty \sum_k \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial p_k} \right)^\top dt = \sum_i \sum_j \sum_k \int_0^\infty \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial p_k} \right)^\top dt = \\
= & \sum_k \left(\sum_i \sum_j \int_0^\infty \left(\frac{\partial e_{ij}}{\partial p_k} \right)^\top dt \right) = \sum_k \left\| \frac{\partial G}{\partial p_k} \right\|_2
\end{aligned}
\tag{3.77}
$$

Aqui $\partial G / \partial p_k$ denota o sistema de sensibilidade do sistema G em relação ao parâmetro p_k, conforme definido na Seção 3.6.1, e o operador $\| \bullet \|_2$ denota a norma dois do sistema, cujo cálculo já foi detalhado na Seção 3.2.

Capítulo 4

Resultados e Discussões

4.1 Ambiente computacional

Todas as sintonias apresentadas nesta seção de resultados foram implementadas e calculadas em ambiente Python ultilizando a biblioteca CasADi (ANDERSSON *et al.* (2012)). O CasADi é uma ferramenta de código aberto para otimização não linear e diferenciação automática. Foi idealizado para a implementação rápida, mas eficiente, de diferentes métodos para otimização dinâmica, tanto em um contexto *offline* como para controle preditivo não linear (NMPC). A espinha dorsal do CasADi é uma estrutura simbólica que implementa diferenciação automática em grafos de expressões para construir gradientes, jacobianas e hessianas, densas ou esparsas. Uma característica muito importante e que foi usada neste trabalho é que sistemas algébrico diferenciais podem ser calculados usando interfaces para solvers externos, tais como IDA (HINDMARSH (2000)) / CVODES (SERBAN e HINDMARSH (2005)) da SUNDIALS (HINDMARSH *et al.* (2005)), com derivadas de ordem arbitrária calculadas automaticamente usando equações de sensibilidade. Outra característica do CasADi extensamente utilizada foi a otimização não linear (NLP), que também possuem interfaces, para solvers, tais como IPOPT (BIEGLER e ZAVALA (2009)), BONMIN (BONAMI e LEE (2007)), BlockSQP (JANKA (2015)), WORHP (BÜSKENS e WASSEL (2012)), KNITRO (WALTZ e NOCEDAL (2003)) e SNOPT (GILL *et al.* (2005))).

A máquina ultilizada apresentava as seguintes configurações: - Processador Intel Core i7 - Memória 8 GB - Sistema Operacional Windows 10 64 bits

4.2 Sintonia PID para planta SISO linear

4.2.1 Apresentação da planta, modelo e controlador

Para testar as técnicas de sintonia propostas no trabalho foram escolhidas algumas plantas com características apropriadas para essa avaliação. Para o caso SISO linear a planta escolhida foi uma planta de segunda ordem com resposta inversa e sobre-sinal, que é considerado um problema relativamente difícil, não sendo inversível, por exemplo. A planta escolhida foi então:

$$G(s) = \frac{-s+1}{s^2+s+1} \tag{4.1}$$

O modelo escolhido para ser identificado foi um modelo de mesma estrutura que a planta:

$$G(s) = \frac{-b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \tag{4.2}$$

De tal forma que o vetor de parâmetros a serem identificados é dado por:

$$p = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_0 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

O propósito do trabalho não é o processo de identificação em si mas como usar o seu produto, ou seja, parâmetros e incerteza de parâmetros, no processo de sintonia de controladores. Podemos supor por exemplo que foi utilizado uma identificação por mínimos quadrados - que, sobre certas hipóteses, produz estimativas não enviezadas para os parâmetros - e tenham sido obtidos os seguintes resultados para o vetor de parâmetro e matriz de covariância dos parâmetros:

$$p = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma_p^2 = 0,16 \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Dessa forma estamos supondo que a identificação nos deu parâmetros com desvio padrão de $0,4$ e correlacionados entre si.

O controlador a ser utilizado para controlar essa planta é o seguinte controlador PID em feedback.

$$C(s) = Kp + Ki\frac{1}{s} + Kd\frac{s}{\alpha s + 1} \tag{4.5}$$

em que Kp é o ganho proporcional, Ki o ganho integral, Kd o ganho derivativo e α o fator do filtro derivativo, que não será sintonizado mas fixado no valor $0,1$.

4.2.2 Comparação de sintonias e tempo computacional

Após selecionado o modelo identificado com seu correspondente vetor de parâmetro e matriz de covariância esses dados foram utilizados para sintonizar os ganhos proporcional, integral e derivativo de um controlador PID em feedback. A partir daqui usaremos a seguinte nomenclatura para referenciar cada sintonia:

1. sintonia ise - parâmetros do controlador sintonizados para minimizar a ISE
2. sintonia eise - parâmetros do controlador sintonizados para minimizar a EISE, ou seja, o valor esperado da ISE.
3. sintonia minmax - parâmetros do controlador sintonizados para minimizar o pior caso da ISE dentre todas as plantas dentro de um determinado intervalo de confiança do modelo.
4. sintonia iseres - parâmetros do controlador sintonizados para minimizar a ISE do modelo nominal mas garantindo uma nota de robustez mínima para controlador, ou seja, garantindo que para qualquer planta dentro de um determinado intervalo de confiança o controlador ainda é estável.

Os métodos de sintonia ise e eise não precisam de parâmetros. O método minmax precisa que estipulemos a região de confiança que vai se considerar o pior caso e o método iseres precisa que estipulemos a nota de robustez desejada para o controlador. Nesse exemplo SISO linear foi escolhido uma região de confiança de $1,0$ desvio padrão para o método minmax e uma nota de robustez de $1,5$ para o método iseres.

O tempo computacional necessário para cada sintonia estão listados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Tempo computacional de cada sintonia

sintonia	tempo
ise	0.11s
eise	21.11s
minmax	0.61s
iseres	0.17s

Percebemos todas sintonias exceto a eise tiveram um cálculo praticamente instantâneto. A sintonia eise nesse caso é a mais demorada entre outras coisas porque além do modelo nominal são criado um modelo de sensibilidade para cada parâmetro

(conforme Equações 3.66 e (3.67) na página 25), que são incorporados à função objetivo de forma a se poder calcular a EISE de maneira analítica. Das sintonias restantes a ise é a mais rápida pois ela é a única irrestrita. As demais, ou seja, a minmax e iseres, tem restrições que são em si mesmas outros problemas de otimização: o cáluculo do pior caso, para o minmax; e o cálculo da nota de robustez do controlador, para o iseres. Podemos ver que a tradução dessas restrições via condições de KKT foram eficientes de forma a não prejudicar muito o tempo computacional.

Os valores para os ganho proporcional, integral e derivativo para cada sintonia são apresentados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2: Parâmetros de cada sintonia

sintonia	parâmetros		
	Kp	Ki	Kd
ise	0.457	0.488	0.479
eise	0.401	0.419	0.443
minmax	0.307	0.382	0.376
iseres	0.399	0.435	0.540

Vemos que os maiores ganho proporcional e integral foram dados ambos pela sintonia ise. Isso era previsível pois essa sintonia não tem nenhum compromisso com a robustez do controlador à incerteza do modelo, apenas com o desempenho para o modelo nominal. As demais sintonias apresentaram ganhos proporcionais mais baixos em torno de 0.4 com ganhos integrais e derivativos variados.

4.2.3 Desempenho controlando modelo nominal

Aplicando cada um dos controladores sintonizados ao modelo nominal, a resposta a um degrau unitário na referência pode ser visto na Figura 4.1.

Como esperado a sintonia ise apresentou a resposta mais rápida seguida pela sintonia iseres (que também tem como função objetivo o desempenho nominal), pela sintonia eise e, por fim, pela sintonai minmax. Para fazer essa comparação desempenho de maneira analítica, segue na Tabela 4.3 o valor da métrica ISE cálculado de maneira analítica e com horizonte infinito para cada sintonia.

Como não podia deixar de ser diferentes a sintonia ise apresentou o melhor ISE. De fato, a sintonia ise apresenta métrica ISE melhor que qualquer outro controlador PID.

É interessante perceber que, no caso da sintonia minmax e iseres, poderíamos fazer os seus resultados convergirem para o resultado da sintonia ise apenas diminuindo gradualmente o valor do intervalo de confiança. Com um intervalo de confiança igual

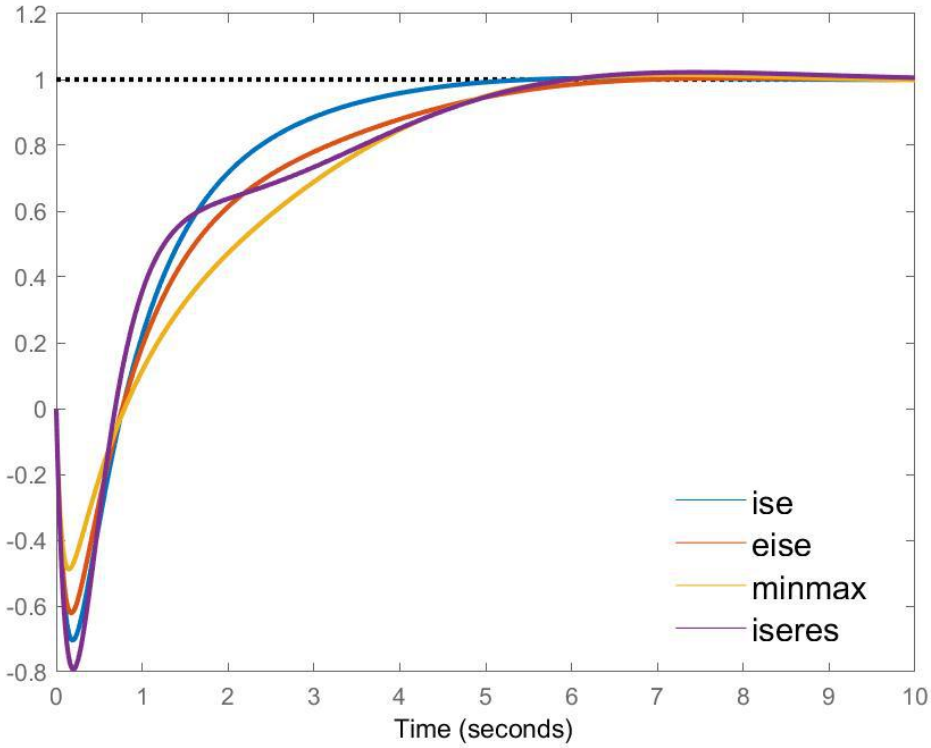


Figura 4.1: Desempenho dos controladores frente ao modelo nominal

Tabela 4.3: valor da ISE para cada sintonia

sintonia	ISE
ise	2.046
eise	2.081
minmax	2.195
iseres	2.101

a zero teríamos um resultado igual. Também a sintonia eise pode apresentar um comportamento semelhante caso se diminua gradualmente a matriz de covariância dos parâmetros, com um fator multiplicativo por exemplo. Para uma matriz de covariância nula, ou seja certeza absoluta do valor dos parâmetros identificados, a sintonia eise também acaba coincidindo com a sintonia ise.

4.2.4 Desempenho controlando modelo incerto

Passamos agora à primeira métrica proposta pelo trabalho para analisar a robustez de um controlador e assim realizar a sua sintonia: a EISE, esperança da integral do quadrado do erro. Esse método de sintonia não possui parâmetros próprios de ajuste, como o intervalo de confiança no caso das sintonias minmax e iseres, embora

um fator multiplicativo possa ser aplicado à matriz de covariância dos parâmetros identificados para aumentar ou diminuir a incerteza do modelo identificado.

O resultados observados estão apresnetados na Figura 4.2.

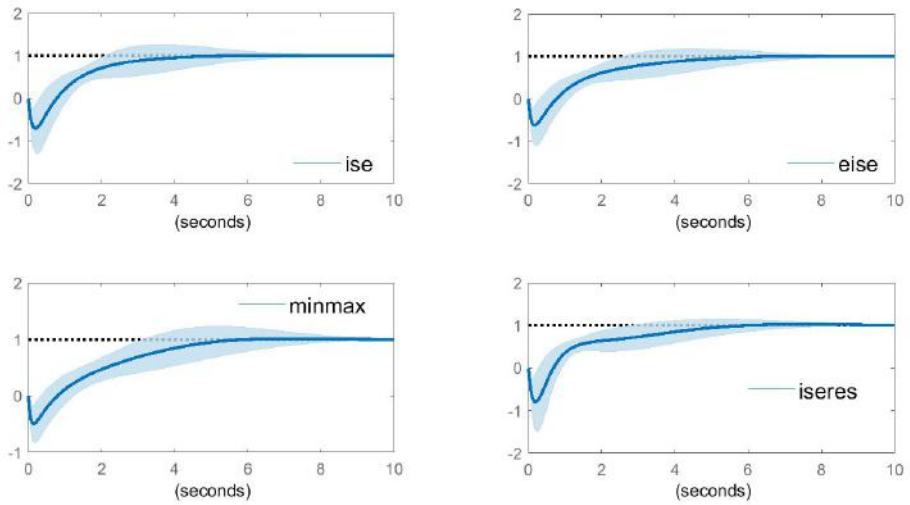


Figura 4.2: Desempenho dos controladores considerando incerteza do modelo

Cada um dos dos gráficos mostra o desempenho do controlador frente ao modelo nominal e uma região de incerteza correspondendo a um intervalo de confiança de 1 desvio padrão. Conforme apresentado no desenvolvimento 3.71 na página 26, temos que $EISE = ISE + IVE$, dessa forma a EISE pode ser interpretada no gráfico como a integral do erro ao quadrado mais a integral do desvio padrão do erro ao quadrado. O valor da ISE e IVE não têm relação direta, sendo assim um menor valor de ISE não implica em um baixo valor de IVE. De fato em muitos cenários podemos esperar o oposto: um controlador agressivo, com baixa ISE nominal, apresenta alta incerteza e IVE; um controlador suave, com alta ISE nominal, apresenta baixa incerteza e IVE. Como vemos o processo de sintonia pode ser visto como a obtenção de um compromisso entre ISE, desempenho nominal, e IVE, incerteza no desempenho. o $EISE = ISE + IVE$ é uma possível solução de compromisso entre essas duas métricas. Na Tabela 4.4 é apresentada a métrica EISE para cada sintonia.

Tabela 4.4: valor da EISE para cada sintonia

sintonia	EISE
ise	2,655
eise	2,589
minmax	2,678
iseres	2,672

Vemos que, em se tratando da métrica EISE, a sintonia eise, que busca minimiza-

la, apresenta o melhor resultado. Vemos que ter a melhor ISE no caso nominal não foi suficiente para apresentar o melhor valor esperado da ISE, isso porque quando falamos em desempenho esperado levando em consideração as incertezas de identificação a questão de robustez se torna importante. Pode se perceber que a sintonia ise teve melhor valor da métrica EISE que as sintonias minmax e iseres, as quais, apesar de em suas formulações levarem em conta a robustez do controlador, estão otimizando o desempenho levando em consideração casos extremos: o pior caso, para a sintonia minmax, e o caso instabilizador, para a sintonia iseres. Os fato da sintonia ise otimizar o desempenho do controlador para o modelo nominal e o o modelo nominal ser o de maior verossimilhança acarretam que um bom desempenho para o modelo nominal pode induzir a um bom esperança de desempenho. De fato, o resultado $EISE = ISE + IVE$ colabora com essa interpretação. Contudo nem sempre a sintonia ise apresenta EISE melhor que as sintonias minmax e iseres, pois a IVE pode fazer a difereça, como no caso MIMO, analisado na Seção 4.3.

4.2.5 Resposta ao pior caso

Cada um dos quatro controladores sintonizados apresenta, dentro de um intervalo de confiança do modelo identificado, um calcanhar de Aquiles, aquela planta para a qual ele apresentaria o pior desempenho, aqui medido pela ISE. Os parâmetros b_1, b_0, a_1, a_0 da pior planta dentro de um intervalo de confiança para a qual cada sintonia apresenta o pior desempenho são apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5: Parâmetros da planta do pior caso para cada sintonia

sintonia	parâmetros			
	b_1	b_0	a_1	a_0
ise	-1.229	-0.716	-0.697	-0.760
eise	-1.307	-0.642	-0.789	-0.916
minmax	-1.299	-0.620	-0.846	-1.000
iseres	-1.338	-0.655	-0.826	-0.959

A resposta ao degrau em malha aberta de cada uma dessas plantas de pior caso e a respectiva resposta a um degrau na referência em malha fechada com cada controlador é apresentado na Figura 4.3.

A primeira característica que observamos na Figura 4.3 (a) é que para todos os controladores a planta de pior caso tem uma resposta inversa mais pronunciada que o modelo nominal, o que é consoante com o fato bem conhecido de que plantas com resposta inversa são de difícil controle. No caso da sintonia ise, a planta de pior caso tem ganho próximo ao ganho do modelo nominal, já para as sintonias eise, minmax e iseres o pior caso apresentava um ganho cerca de 30% menor que o ganho

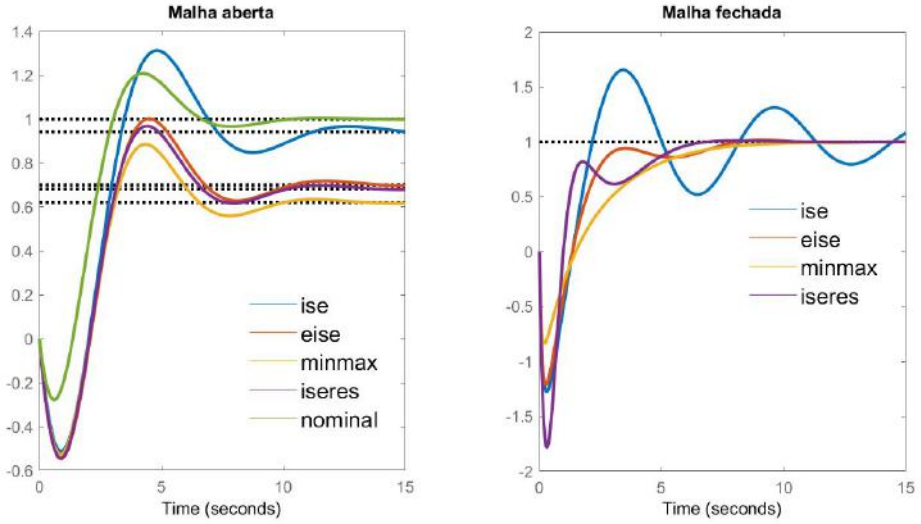


Figura 4.3: (a) Resposta ao degrau em malha aberta para a planta de pior desempenho de cada sintonia. (b) Resposta ao degrau em malha fechada para a planta de pior desempenho de cada sintonia.

do modelo nominal. É importante relembrar que, apesar de cada uma das plantas de pior caso possuir características diferentes entre si, cada uma delas está na fronteira da mesma região de confiança do modelo identificado, de forma que podemos dizer que, no sentido da distância de Mahalanobis, elas estão equidistantes do modelo nominal.

Olhando agora a Figura 4.3 (b), a primeira coisa que merece comentário é o baixo desempenho da sintonia ise para o seu pior caso. De fato ela foi calculada sem nenhum compromisso com robustez. Vemos que o grande mérito da sintonia minmax foi não ter permitido que a resposta inversa em malha fechada fosse muito pronunciada, o que lhe garantiu o melhor ISE no pior caso, Tabela 4.6 . Mesmo assim para a sintonia minmax a resposta inversa que não passava de 0,5 no caso nominal se aproximou de 0,8. Falando agora das sintonias eise e iseres, elas tiveram ainda o mérito de um estabilização relativamente rápida no seu pior caso, embora a resposta inversa pronunciada tenha prejudicado seu desempenho no pior caso. A métrica de desempenho para o pior caso de cada sintonia dentro de uma região de confiança de um desvio padrão do modelo identificado é mostrada na Tabela 4.6

Tabela 4.6: ISE pior caso para cada sintonia

sintonia	ISE pior caso
ise	5.904
eise	4.492
minmax	4.224
iseres	5.054

4.2.6 Nota de robustez dos controladores

A última métrica a ser utilizada para medir o desempenho robusto de cada um dos controladores é a nota de robustez do controlador conforme foi definida na Seção 3.4. A nota de robustez do controlador nada mais é que o número de desvios padrão do intervalo de confiança do modelo identificado para o qual é garantida estabilidade pelo controlador. Para cada sintonia existe uma planta mais próxima do modelo identificado, no sentido da distância de Mahalanobis, para o qual esse controlador irá ser instável. A Tabela 4.7 mostra os parâmetros dessas plantas para cada uma das sintonias.

Tabela 4.7: Planta mais próxima ao modelo que instabiliza cada sintonia

sintonia	parâmetros			
	b_1	b_0	a_1	a_0
ise	-1,178	0,709	0,585	0,657
eise	-1,180	0,698	0,535	0,599
minmax	-1,153	0,770	0,566	0,535
iseres	-1,186	0,655	0,483	0,548

Vemos que as plantas que instabilizam cada controlador são diferentes entre si. Cada uma tem uma distância ao modelo nominal, pois para alguns controladores é preciso que a planta se afaste mais do modelo nominal para se obter a instabilidade. A Figura 4.4 mostra a resposta ao degrau em malha aberta de cada uma das plantas instabilizadoras para cada um dos controladores e resultado de uma mudança de referência em malha fechada, o que acarreta em uma resposta marginalmente instável.

Na Figura 4.4 (a) observamos uma característica comum a todas as plantas instabilizadoras quando comparadas ao modelo: uma resposta inversa mais pronunciada, maior ganho e sobre-sinal. Na Figura 4.4 (b) observamos que cada controlador instabilizou com uma senoide de diferente frequência e amplitude.

A medida analítica do quanto é preciso que a planta se afaste do modelo nominal para que o controlador instabilize foi definida como sendo a nota de robustez. Essa métrica é apresentada na Tabela 4.8.

Tabela 4.8: Nota de robustez para cada sintonia

Sintonia	Nota de robustez
ise	1,205
eise	1,344
minmax	1,356
iseres	1,500

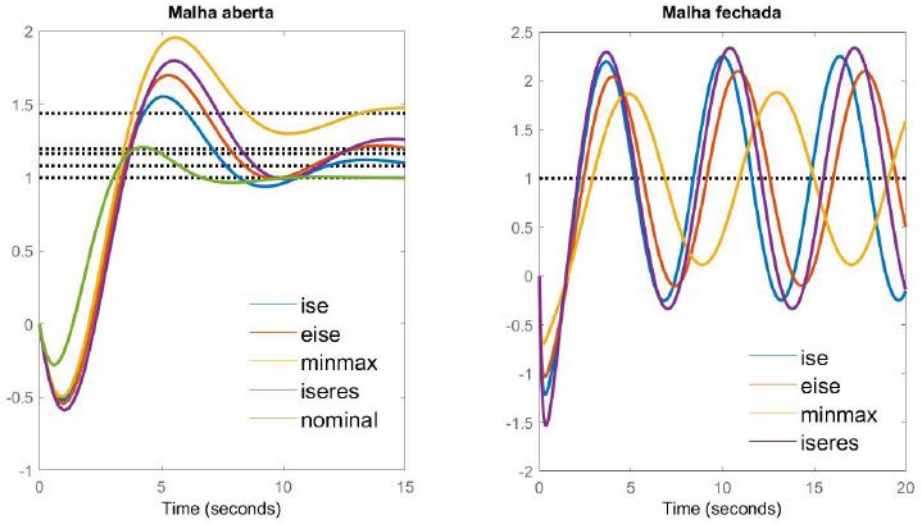


Figura 4.4: (a) Resposta ao degrau em malha aberta da planta que instabiliza em cada sintonia. (b) Resposta marginalmente instável de cada controlador.

Vemos que a sintonia iseres apresentou a maior Nota de robustez, no valor exato de 1,5. De fato, esse controlador minimiza o desempenho nominal com a restrição de que ele possua pelo menos essa nota de robustez. Os demais controladores possuem notas de robustez menores. O fato da sintonia iseres possuir maior nota de robustez é devida unicamente ao fato de termos escolhido um intervalo de confiança de 1,5 desvios padrão no processo de sintonia. Se tivéssemos escolhido um intervalo de confiança de 1,3, a nota de robustez da sintonia iseres seria pior que as das sintonia minmax e eise. Vale observar que não faz muito sentido escolher um intervalo de confiança menor que a nota de robustez da sintonia ise, uma vez que, comparando com a sintonia ise, obteríamos um controlador com desempenho nominal e notas de robustez piores.

4.3 Sintonia PID para planta MIMO linear

4.3.1 Apresentação do modelo e controlador

O modelo escolhido para aplicação das técnicas numa planta MIMO é um espaço de estados dado pela Equação 4.6 para o modelo nominal.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \tag{4.6}$$

E pela Equação 4.7 para o modelo com os parâmetros p estimados na identificação

do sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} p_3 & p_4 \\ p_5 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \tag{4.7}$$

Onde o vetor de parâmetros p, o vetor de parâmetros nominal $\bar{p}$ e a matriz de covariância dos parâmetros σ_p^2 são dados por:

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}, \quad \bar{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$\sigma_p^2 = 0,16 \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 1 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Já para o controlador foi escolhido um par de controladores PID SISO onde o primeiro controla a primeira controlada manipulando a primeira manipulada e o segundo controla a segunda controlada manipulando a segunda manipulada. O ganho derivativo foi fixado em zero, de forma que foram sintonizados apenas 4 parâmetros, dois por PID, os ganhos proporcional e integral.

4.3.2 Comparação de sintonias e tempo computacional

O tempo computacional necessário para cada sintonia estão listados na Tabela 4.9.

Tabela 4.9: Tempo computacional de cada sintonia

sintonia	tempo
ise	0,108
eise	36,908
minmax	0,796
iseres	0,199

A sintonia do controlador MIMO não implicou num aumento significativo do tempo de computação necessário para cada sintonia, no caso do ise, por exemplo tendo ficado praticamente o mesmo que no caso SISO. Isso pode ser uma indicação

de que o tempo computacional não seja um empecilho ao se tentar escalonar essas sintonias para modelos com ainda mais entradas e saídas e controladores com mais parâmetros. Os cálculos continuaram praticamente instantâneos, exceto para a sintonia eise, por causa dos modelos de sensibilidade que precisam ser construídos para cálculo analítico da EISE (conforme Equações 3.66 e 3.67 na página 25). Mais uma vez, vemos que a incorporação por meio das condições de KKT das restrições (envolvendo problemas de otimização) da sintonia minmax e iseres se mostraram eficientes, uma vez que ainda assim houve uma rápida resolução do problema de sintonia, em menos de 1s.

Os parâmetros ótimos dos controladores encontrados pelas sintonias analisadas são mostrados na Tabela 4.10.

Tabela 4.10: Parâmetros de cada sintonia

sintonia	PID_1		PID_2	
	Kp	Ki	Kp	Ki
ise	0,266	0,492	0,312	0,153
eise	0,200	0,361	0,257	0,118
minmax	0,184	0,287	0,274	0,134
iseres	0,390	0,291	0,233	0,096

A sintonia ise apresenta os maiores ganhos proporcional e integral para os dois PIDs, perdendo apenas para o ganho proporcional do PID_1 do iseres. Mas de maneira geral podemos dizer que as sintonias, cada uma otimizando um critério diferente, foram bem diversas. Na próxima seção é analisada o desempenho de cada uma delas frente ao modelo nominal.

4.3.3 Desempenho dos controladores para o modelo nominal

Aplicando cada um dos controladores sintonizados ao modelo nominal obtivemos as respostas a degraus unitários em cada referência apresentadas na Figura 4.5.

Na primeira coluna da Figura 4.5 temos a resposta a um degrau na referência da primeira variável controlada enquanto deixamos a referência da segunda variável controlada constante. Na primeira linha a resposta da primeira variável controlada e na segunda linha a resposta da segunda variável controlada. Vemos que para todas as sintonias a variável controlada 1 se aproxima da nova referência com oscilações amortecidas, e a variável controlada 2 oscila um pouco em torno da sua referência, pois a planta apresenta acoplamento.

Reciprocamente, na segunda coluna da Figura 4.5 temos a resposta a um degrau na referência da segunda variável controlada enquanto deixamos a referência da primeira variável controlada constante. Na primeira linha a resposta da primeira

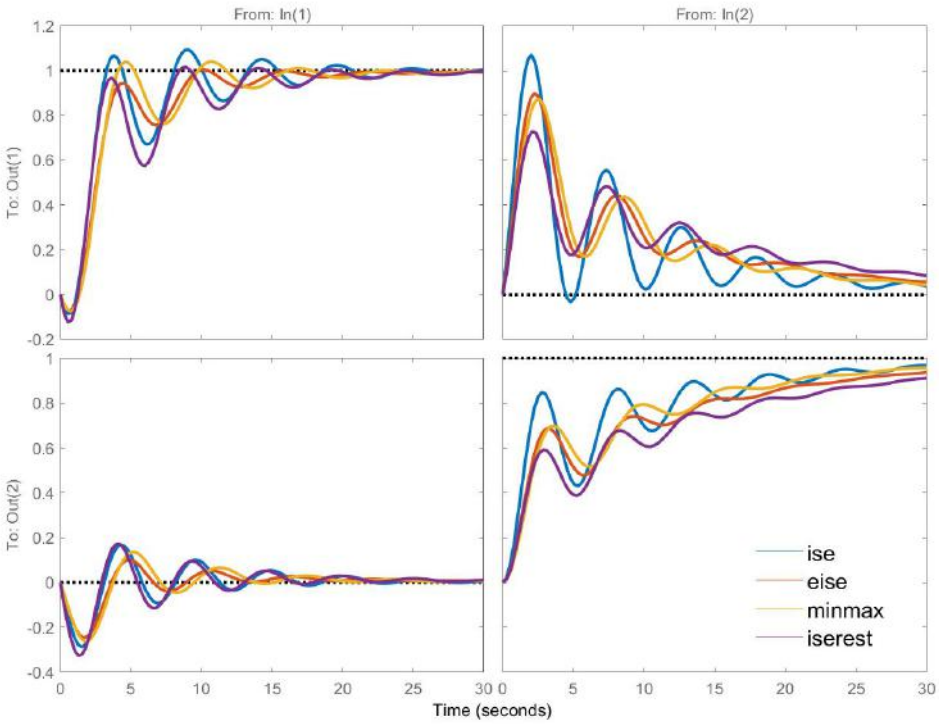


Figura 4.5: Desempenho dos controladores frente ao modelo nominal

variável controlada e na segunda linha a resposta da segunda variável controlada. Aqui também vemos que para todas as sintonias a primeira variável controlada se aproxima da nova referência com oscilações amortecidas e a segunda variável controlada oscila bastante para chegar na sua referência, mostrando que a segunda variável é mais difícil de controlar.

Apenas visualmente não é possível comparar objetivamente os desempenhos das sintonias, embora observamos que a sintonia ise apresenta o menor tempo de subida. A Tabela 4.11 apresenta a métrica ISE para cada sintonia.

Tabela 4.11: Valor da ISE para cada sintonia

sintonia	ISE
ise	7,900
eise	8,594
minmax	8,389
iseres	9,267

A sintonia ise, como já era esperado, apresentou o melhor valor da ISE. Porém, o que surpreende é que a iseres tenha resultado no maior valor, já que ela, como a sintonia ise, também tem a ISE do modelo nominal como função objetivo, adicionando uma restrição de robustez. Isso pode indicar que nesse caso talvez a sintonia ise não

seja muito robusta, pois precisou se degradar bastante o desempenho do controlador frente ao modelo nominal de forma a alcançar o critério de robustez estipulado. A análise da nota de robustez de cada sintonia é feita na Seção 4.3.6

4.3.4 Desempenho dos controladores para o modelo incerto

Na Tabela 4.12 é apresentada a métrica EISE para cada sintonia. Lembrando que a EISE além de poder ser visto como a esperança matemática da ISE, com a incerteza oriunda do processo de identificação do sistema, pode também ser visto como o somatório da ISE e da IVE. Mesmo no caso multivariável esse valor pôde ser calculado analiticamente, conforme a Seção 3.6.4. Contudo, observamos no caso multivariável a EISE, assim como a ISE, é calculada para toda a matriz de repostas ao degrau, de forma que é levado em consideração não apenas o desempenho da variável em que se dá o degrau na referência, mas também o efeito que esse degrau tem nas outras variáveis controladas.

Tabela 4.12: valor da EISE para cada sintonia

sintonia	eise
ise	14,095
eise	11,199
minmax	11,500
iseres	12,662

A sintonia ise foi a que apresentou o maior valor da EISE, apesar da ISE ser uma das parcelas que compõem a EISE. Como esperado a sintonia eise apresentou o melhor desempenho.

4.3.5 Resposta ao pior caso

Da mesma forma que foi feito para o caso SISO, para cada uma das quatro sintonias, foi determinada a planta que apresenta o pior caso da respectiva sintonia. Exectuando-se a sintonia ise, para a qual não houve convergência do cálculo da planta de pior caso, os parâmetros p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 da pior planta dentro de uma região de confiança de um desvio padrão, para a qual cada sintonia apresenta o pior desempenho são apresentadas na Tabela 4.5.

sintonia	parâmetros				
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
eise	-1,111	-1,170	-1,220	1,003	-0,693
minmax	-1,112	-1,171	-1,231	0,987	-0,702
iseres	-1,079	-1,159	-1,223	1,007	-0,686

Diferente do caso SISO, a pior planta para cada sintonia do caso MIMO ficou muito próxima uma das outras. Esse comportamento pode ser observado na resposta ao degrau em malha aberta de cada uma dessas plantas de pior caso, apresentado na Figura 4.6.

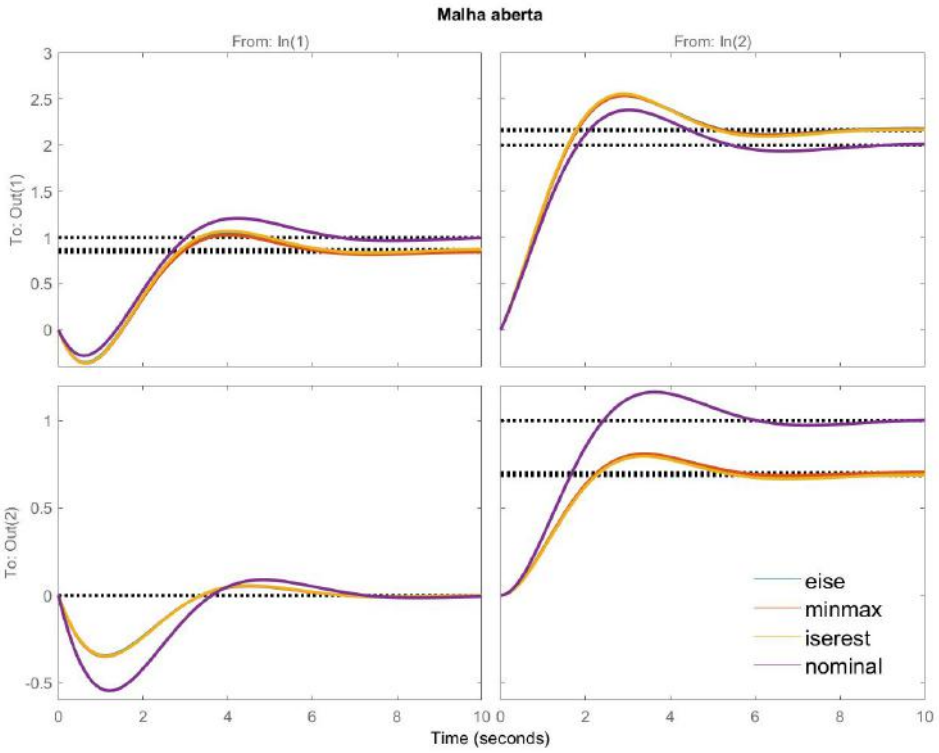


Figura 4.6: Pior planta dentro da região de confiança para cada sintonia

Observamos que o ganho de todos os modelos ficou maior com exceção da relação entre a primeira manipulada com a segunda controlada, que possuia ganho zero e no pior caso fica mais oscilatória, ainda com ganho zero. A resposta de cada controlador a um degrau na referência em malha fechada com a planta de pior caso é apresentada na Figura 4.7.

Vemos que no pior caso o desemmpenho mais degradado foi quando de uma mudança na referência da variável controlada 2, com um tempo de subida mais lento para a variável controlada 2 e uma perturbação mais duradoura na variável controlada 1. Visualmente vemos que a que menos sofre no pior caso é a sintonia minmax, que apresenta o seguimento de referência e rejeição de perturbação mais rápidos. De fato é isso que nos mostra a Tabela 4.13 com a ISE no pior caso de cada uma das sintonias.

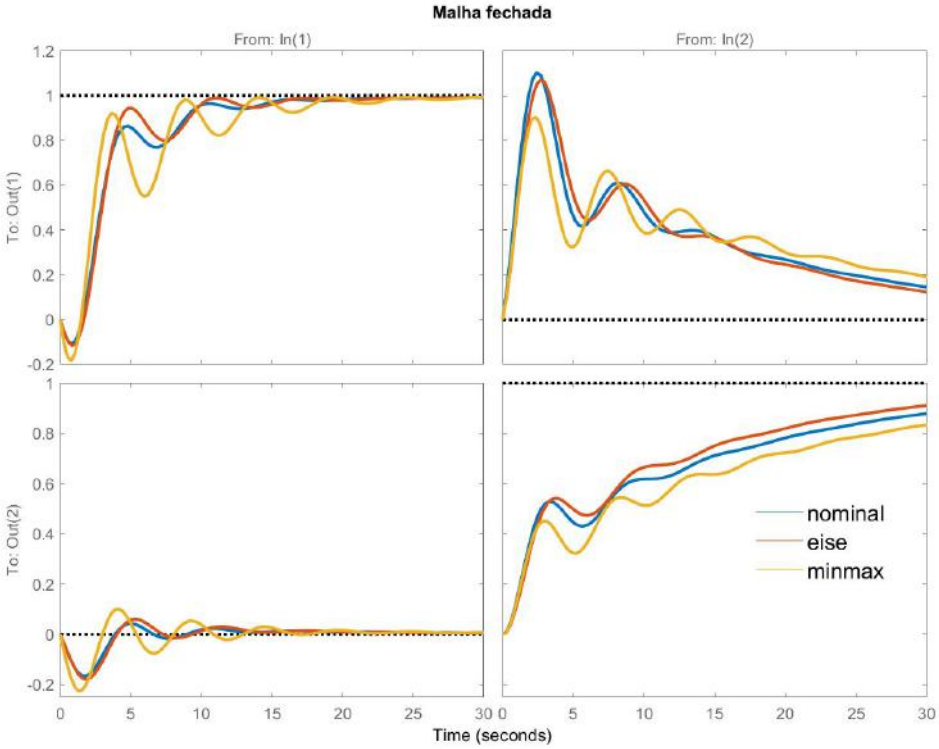


Figura 4.7: Pior desempenho dentro intervalo de confiança para cada sintonia

Tabela 4.13: ISE pior caso para cada sintonia

sintonia	ise pior caso
eise	14,047
minmax	13,485
iseres	15,012

4.3.6 Nota de robustez dos controladores

Por fim, para a análise da nota de robustez dos controladores sintonizados para o caso MIMO, a Tabela 4.14 mostra os parâmetros das plantas que instabilizam cada um dos controladores.

Vemos que as plantas que instabilizam cada sintonia são bem diferentes entre si, o que é curioso uma vez que as plantas de pior caso para todos controladores foram semelhantes. A resposta em malha aberta de cada uma das plantas instabilizadoras junto com o modelo nominal estão na Figura 4.8.

Para demonstrar que essas plantas de fato instabilizam cada um dos controladores, segue a Figura 4.9 com os resultados em malha fechada.

A nota de robustez de cada sintonia nos dá o intervalo de confiança para o qual há garantia que o modelo permanece estável. Esses valores estão disponíveis na Tabela 4.15.

Tabela 4.14: Planta mais próxima ao modelo que instabiliza cada sintonia

sintonia	parâmetros				
	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
ise	-0,783	-1,010	-1,259	1,033	-0,870
eise	-1,111	-1,170	-1,220	1,003	-0,693
minmax	-1,112	-1,171	-1,231	0,987	-0,702
iseres	-1,079	-1,159	-1,223	1,007	-0,686

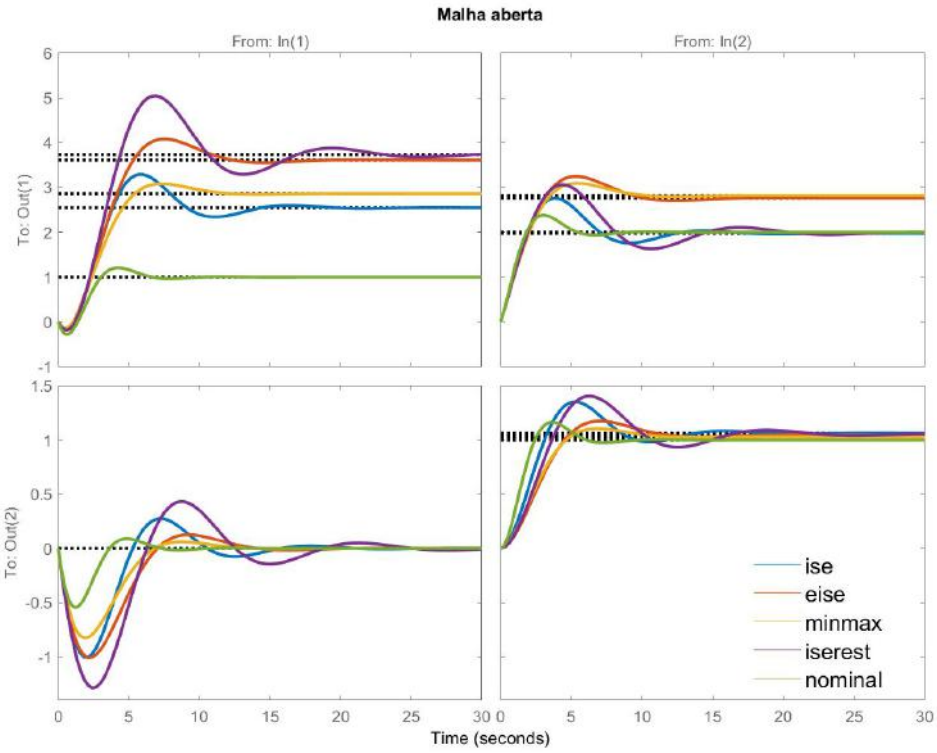


Figura 4.8: Planta mais próxima ao modelo que instabiliza cada sintonia

Observamos que o iseres apresenta uma nota de robustez de 2. Isso é devido a esse ter sido o número de desvios padrão da região de confiança estipulado para a restrição da sintonia iseres. As demais sintonias apresentam nota de robustez menor, indicando que existem plantas mais próximas ao modelo nominal para que resultam em malha fechada é instável. A sintonia ise apresentou o pior desempenho para essa métrica, por não ter nenhum compromisso com a robustez, seguida pela sintonia minmax. A sintonia eise pode ter se dado melhor que elas por levar em consideração todos as plantas possíveis na ponderação do valor esperado da ISE, de forma que uma planta instabilizadora próxima ao modelo nominal teria um peso muito negativo na função objetivo da sintonia eise, sendo assim evitada.

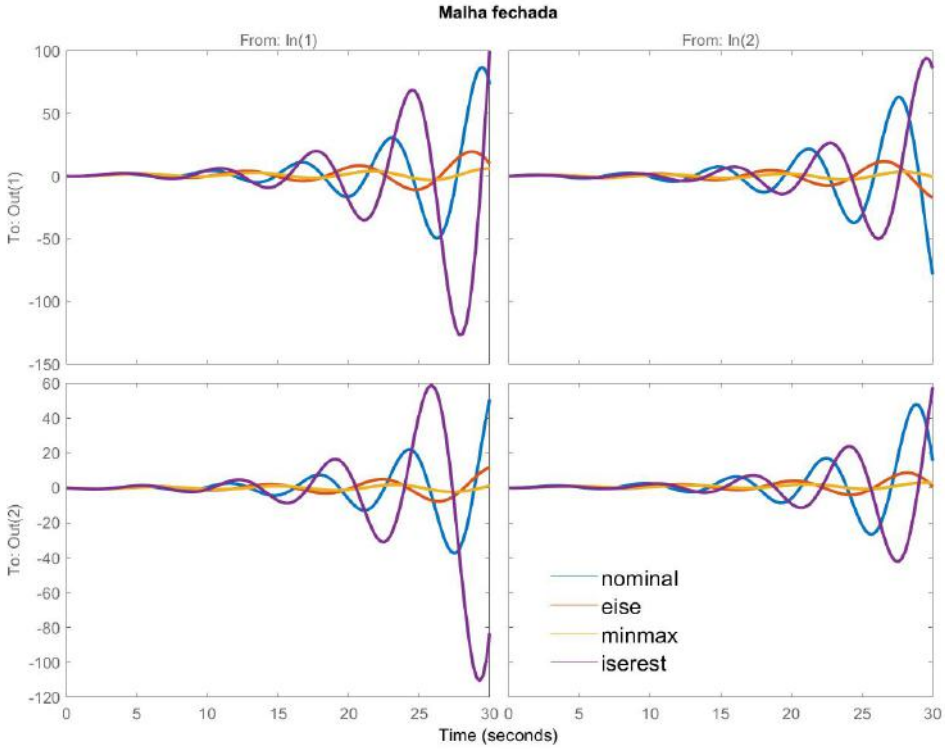


Figura 4.9: Desempenho de cada sintonia frente a sua planta instabilizadora

Tabela 4.15: Nota de robustez para cada sintonia

sintonia	nota de robustez
ise	1,614
eise	1,797
minmax	1,628
iseres	2,000

4.4 Sintonia PID para planta SISO não linear

4.4.1 Apresentação do modelo e controlador

No caso não linear foi escolhido o controle de nível de um tanque com escoamento gravitacional. Mais especificamente:

$$y = au - b\sqrt{y} \tag{4.10}$$

y	nível - variável controlada
u	vazão da bomba - variável manipulada
a	parâmetro 1
b	parâmetro 2

Para tornar o problema um pouco mais difícil foi incluído um atraso de tempo entre o cálculo da ação de controle e a vazão da bomba, por meio de uma aproximação de Padé com dois polos e um zero. Sendo assim o modelo final consiste de um atraso em série com o modelo descrito na Equação 4.10.

O controlador escolhido nesse caso é um controlador PID com o ganho derivativo fixado em zero, de forma que o processo de sintonia irá otimizar apenas dois parâmetros: o ganho proporcional e o ganho integral.

4.4.2 Comparação de sintonias e tempo computacional

Um critério tão simples e analítico como o de Nyquist, que permite avaliar a estabilidade de sistemas lineares, não existe para sistemas não lineares. Como a restrição do problema de otimização da sintonia iseres passa pelo cálculo da nota de robustez, e essa passa pela definição analítica de instabilidade, a sintonia iseres não será considerada no caso não linear.

Outra consideração a ser feita no caso não linear, é o fato de não haver uma forma analítica geral para a ISE com horizonte infinito. Assim, foi estipulado um horizonte de tempo, respeitando o tempo de estado estacionário da planta, sobre o qual a ISE é calculada por meio de integração numérica. Por sua vez, as derivadas da ISE em relação aos parâmetros do controlador e da planta são calculados por meio da integração das equações de sensibilidade, e não mais por diferenciação automática, como no caso Linear.

A parte esse por menores, o processo de sintonia se dá da mesma forma. Os tempos computacionais necessários para cada sintonia são apresentados na Tabela 4.16.

Tabela 4.16: Tempo computacional de cada sintonia

sintonia	tempo
ise	0,320s
eise	0,695s
minmax	3,295s

Diferentemente do caso linear, aqui o tempo computacional para a sintonia eise foi baixo, executando em menos de um segundo e sendo mais rápida até que a sintonia minmax. Isso é devido ao fato de no caso linear, por haver uma solução analítica e com horizonte infinito para o cálculo da ISE, o grafo da diferenciação automática crescer bastante exigindo bastante processamento e memória do computador. No caso não linear o cálculo da EISE é feito por integração numérica de um sistema de sensibilidade num horizonte finito, o que torna o cálculo, embora ainda acurado, bem mais rápido.

Os parâmetros encontrados por casa sintonia são apresentados na Tabela 4.17.

Tabela 4.17: Parâmetros de cada sintonia

sintonia	parâmetros	
	Kp	Ki
ise	0,561	0,117
eise	0,556	0,110
minmax	0,583	0,125

Observamos na Tabela 4.17 que as sintonias encontradas são bastante semelhantes entre si. Isso ocorreu em parte pois no caso não linear foi estipulada um matriz de covariância dos parâmetros do modelo menor, pois foi observado que isso aumentava a robustez dos algoritmos computacionais. Como é de se esperar, quando se diminui a incerteza do modelo, os métodos que levam em consideração essa incerteza para conferir robustez ao controlador acabam convergindo para o resultado da sintonia ise, a qual não leva em consideração essa incerteza de identificação.

4.4.3 Desempenho controlando modelo nominal

Como os parâmetros ótimos do controlador encontrados por cada sintonia são semelhantes, também é semelhante o desempenho do modelo em malha fechada com cada um dos controladores. A evolução do erro de seguimento de cada sintonia para um cenário de mudança de 1 para 2 na referência é mostrado na Figura 4.10.

As métricas de desempenho de cada sintonia estão condensadas na tabela

Tabela 4.18: Métricas para cada sintonia

sintonia	ISE	EISE	pior caso
ise	2,744	3,285	2,919
eise	2,751	3,278	2,940
minmax	2,754	3,312	2,909

Como esperado cada sintonia se mostrou melhor na métrica em que ela se propunha a otimizar: a sintonia ise teve o melhor ISE, a sintonia eise teve o melhor EISE e a sintonia minmax teve o melhor pior caso.

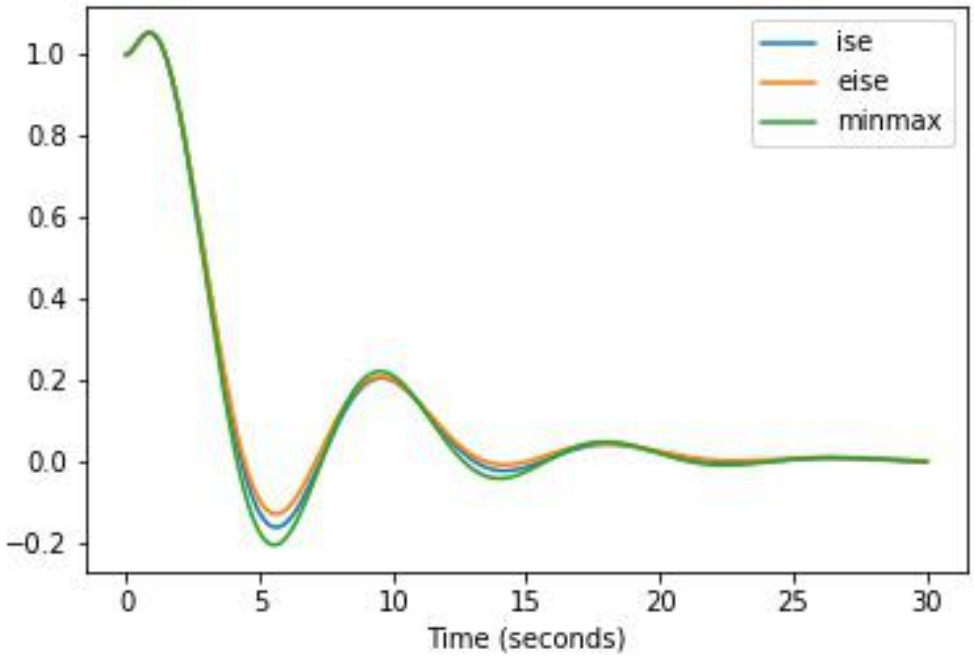


Figura 4.10: Desempenho dos controladores frente ao modelo nominal

Capítulo 5

Conclusões

A metodologias propostas se mostraram promissoras para a sintonia de controladores mono ou multivariável robustos à incerteza de identificação, codificada na matriz de covariância dos parâmetros. Cada sintonia envolve a resolução numérica de um problema de otimização, cuja solução foi encontrada, quando muito, em alguns segundos, o que dá indícios de que o problema pode ser escalonado para problemas maiores tanto em número de variáveis controladas e manipuladas, quanto em número de parâmetros tanto da planta quanto do controlador. Cada método apresenta suas vantagens e desvantagens, otimizando um aspecto do controle do modelo incerto

A sintonia eise possui uma grande elegância matemática, pois no caso linear sua função objetivo pode ser formulada de maneira analítica, o que acarreta também em derivadas analíticas. Contudo, esse cálculo analítico é intenso computacionalmente por ser representado por um complexo grafo computacional, o que acarreta no maior custo computacional entre os métodos aqui propostos. Um dos resultados mais importantes do trabalho foi mostrar que a EISE (Esperaça da ISE), cujo cálculo a princípio precisaria da integração num espaço probabilístico n-dimensional, pode ser decomposto em duas parcelas - ISE (integral do erro ao quadrado) e IVE (integral da variância do erro) - a qual permite a conversão dessa integral múltipla em integrais simples no tempo. Assim olhando um simples gráfico da resposta do sistema planta-controlador a uma mudança na referência é possível ter uma estimativa da EISE, observando a região entre a referência e a sáida da planta, e a banda de desvio padrão em torno da resposta. Um característica interessante também da sintonia eise é o fato dela se traduzir num problema de otimização irrestrita, que exige menos preocupações com a convergência e estabilidade do solver. Foi comentado que a sintonia eise, assim como a ise, não tem parâmetros próprios, ou seja não é necessário arbitrar nenhum parâmetro para essa sintonia, embora possa-se emular um parâmetro aplicando um fator multiplicativo na matriz de covariância dos parâmetros do modelo identificado, alterando assim artificialmente a incerteza do modelo para o qual se deseja projetar o controlado robusto à incerteza.

A sintonia minmax também apresenta uma elegância matemática marcada pela simplicidade de sua formulação, que necessita apenas de um parâmetro: o intervalo de confiança dos parâmetros do modelo estimado que irá se considerar. Nesse intervalo de confiança se busca o pior caso de cada controlador e se busca o controlador que apresenta o "melhor pior caso". O fato do intervalo de confiança poder ser dado em forma percentual ajuda na escolha desse parãmetro, normalmente entre 67% e 97%. A otimização minmax é normalmente considerada difícil computacionalmente pois envolve um problema de otimização dentro de outro. Para tornar esse problema mais tratável foram usadas as condições de KKT que converteram o problema de otimização mais interno em restrições algébricas, mantendo ainda um tempo de solução aceitável, ficando abaixo de 1 segundo no caso SISO e MIMO lineares. Como em todas as sintonias nesse trabalho discutidas, o problema de otimização da sintonia min-max assim como foi formulada provavelmente apresenta mínimos locais, mas com testes exaustivos que foram realizados reinicializando o problema de otimização em vários pontos distintos não foram encontradas evidências de mínimos locais pois sempre que o solver de otimização atingia as condições de parada havia chegado aproximadamente no mesmo ponto, o que seria mais uma virtude desse método.

Por fim a sintonia iseres tem também as suas características únicas. Ela garante que ao se estipular um intervalo de confiança para o modelo, possa se garantir a estabilidade do controlador frente a qualquer planta dentro desse intervalo ao mesmo tempo que se garante o melhor desempenho com o modelo nominal entre todos os controladores com essa mesma garantia de robustez. Podemos, por exemplo, antes de aplicar o controlador na planta real, ter garantias de 68%,95% ou 99%, dependendo da região de confiança escolhida, de que o controlador não instabilizará a malha fechada, o que é uma métrica bem palpável de robustez. A sintonia iseres também sofre da mesma complexidade da sintonia minmax: a existência de um problema de otimização dentro do outro. No caso da sintonia iseres o problema de otimização mais interno se encontra na restrição de que o controlador projetado deve ter uma determinada Nota de Robustez, quando a Nota de Robustez em si só pode ser calculada através de um processo de otimização. Mais uma vez foram usadas as condições de KKT para tornar esse problema de otimização em restrições algébricas, o que permitiu uma rápida resolução da sintonia. Essa sintonia foi a única que sofreu de maneira evidente com a existência de mínimos locais. De fato o subproblema de encontrar a nota de um controlador já sofre com a existência de mínimos locais. Talvez apenas uma mudança na formulação do problema de otimização seja suficiente para evitar a existência dos mínimos locais.

Algumas ferramentas desenvolvidas para a sintonia de controladores robustos à incerteza de identificação acabaram por se mostrar interessantes não apenas para sintonia de controladores mas também para análise. Por exemplo, pode ser útil

calcular a Nota de Robustez de um controlador, não importando como ele foi sintonizado, antes de fechar a malha para se ter ideia de qual é a probabilidade de que ao fechar a malha com o controlador projetado se chegue a um comportamento instável. O cálculo da Nota de Robustez como subproduto nos dá a planta mais próxima do modelo identificado para o qual o controlador é instável. Um outro exemplo de como as ferramentas desenvolvidas nesse trabalho podem ser úteis é no cálculo do pior caso para um determinado controlador, que supomos possa ter sido sintonizado de qualquer maneira. Temos assim ideia de qual é a direção em que o modelo muda que afeta mais o desempenho do controlador em malha fechada, e podemos ter ideia do quanto a degradação do desempenho causada pela incerteza é crítica para o par modelo identificado - controlador em questão. Construir os gráficos de resposta a um degrau na referência em malha fechada junto com o intervalo de confiança em torno nos permite avaliar como a incerteza no comportamento se compara com o erro de seguimento.

5.1 Trabalhos Futuros

- Estudar linguagens de mais alto nível para descrição das plantas e controladores, como o Modelica, por exemplo.
- Aplicar a sistemas não lineares multivariáveis como o 4 tanques ou o reator de Van de Vusse, com restrições nas variáveis manipuladas, controladas e estados.
- Aplicar técnicas de otimização global tanto para o problema de otimização dos parâmetros de sintonia, quanto para os subproblema de cálculo da nota de robustez do controlador e cálculo do pior caso.
- Comparar com técnicas de sintonia da disciplina de controle robusto.
- Substituir o solver linear do Ipopt por uma versão mais otimizada, como sugerido pelos desenvolvedores.
- Substituir o Ipopt por outros solvers não lineares.
- Melhorar complexidade e robustez do problema de otimização.
- No cálculo da ISE para sistema não linear substituir a integração por passo simples por passo múltiplo ou mesmo utilizar métodos de colocação.
- Aplicar em sintonia de controladores com outras estruturas como LQR, LQI, DMC, ou mesmo controlador preditivo não linear.

- Utilizar outras maneiras de fazer a propagação de incerteza da identificação, como Monte Carlo, o que pode diminuir a complexidade do problema de otimização e o tempo computacional.

- Toda a discussão que foi feita aqui para modelos contínuos no tempo poderia ter sido desenvolvida de maneira idêntica para modelos discretos no tempo, com o benefício do atraso no tempo ser incorporado no modelo de maneira simples.

- O desenvolvimento aqui realizado poderia ser expandido para funções de transferência sem a necessidade de converte-las para espaço de estados. A maior dificuldade é um tratamento orgânico dos casos multivariáveis.

- Melhorar o tempo computacional do cálculo analítico da EISE e da sua derivada em relação aos parâmetros.

- Projetar os testes de identificação de forma a ter a melhor métrica de desempenho do controlador. Se não se pode realizar testes na planta, selecionar períodos de tempo que forneçam os controladores ótimos.

- Os dados da planta a serem usados Pode ser interessante selecionar trechos Seleção automática de datasets para fechar o LOOP.

- Por vezes o processo de minimização da ISE conduzia a controladores infinitamente agressivos, enquanto a minimização da EISE conduzia a um controlador com ganhos finitos. Entender que modelos e estrutura de incerteza causam esse comportamento.

- Sintonizar o controlador para cenários de rejeição de perturbação. Nesse contexto, é interessante estimar também o modelo estatístico da perturbação no processo de identificação do sistema.

- No contexto de minimização da métrica EISE, investigar a existência de uma estrutura de controlador ótima, que teria a menor a métrica EISE entre quaisquer outras estruturas de controle.

Referências Bibliográficas

SKOGESTAD, S., POSTLETHWAITE, I. *Multivariable feedback control: analysis and design*, v. 2. New York, Wiley New York, 2007.

O'DWYER, A. *Handbook of PI and PID controller tuning rules*. Imperial College Press, 2009.

KEALY, T., O'DWYER, A. "Analytical ISE calculation and optimum control system design", *Signals and Systems Conference Papers*, 2003.

GARPINGER, O., HÄGGLUND, T., ÅSTRÖM, K. J. "Performance and robustness trade-offs in PID control", *Journal of Process Control*, v. 24, n. 5, pp. 568–577, 2014.

HO, W. K., LIM, K. W., XU, W. "Optimal gain and phase margin tuning for PID controllers", *Automatica*, v. 34, n. 8, pp. 1009–1014, 1998.

JAULIN, L., WALTER, É. "Guaranteed tuning, with application to robust control and motion planning", *Automatica*, v. 32, n. 8, pp. 1217–1221, 1996.

GE, M., CHIU, M.-S., WANG, Q.-G. "Robust PID controller design via LMI approach", *Journal of process control*, v. 12, n. 1, pp. 3–13, 2002.

ZHANG, H., SHI, Y., MEHR, A. S. "Robust H-infinity PID control for multivariable networked control systems with disturbance/noise attenuation", *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 22, n. 2, pp. 183–204, 2012.

DI CAIRANO, S., BEMPORAD, A. "Model predictive control tuning by controller matching", *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 55, n. 1, pp. 185–190, 2010.

GARRIGA, J. L., SOROUSH, M. "Model predictive control tuning methods: A review", *Industrial & Engineering Chemistry Research*, v. 49, n. 8, pp. 3505–3515, 2010.

HELTON, J. C., DAVIS, F. J. "Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems", *Reliability Engineering & System Safety*, v. 81, n. 1, pp. 23–69, 2003.

SCHWAAB, M. *Análise de Dados Experimentais: I. Fundamentos de Estatística e Estimação de Parâmetros*. Rio de Janeiro, Editora E-papers, 2007.

LJUNG, L. *System identification: theory for the user*. New Jersey, Prentice-hall, 1987.

GARNIER, H. "Direct continuous-time approaches to system identification. Overview and benefits for practical applications", *European Journal of control*, v. 24, pp. 50–62, 2015.

ANDERSSON, J., ÅKESSON, J., DIEHL, M. "CasADi: A symbolic package for automatic differentiation and optimal control". In: *Recent advances in algorithmic differentiation*, Springer, pp. 297–307, Berlin, 2012.

HINDMARSH, A. *The PVODE and IDA algorithms*. Relatório técnico, Technical Report UCRL-ID-141558, LLNL, 2000.

SERBAN, R., HINDMARSH, A. C. "CVODES: the sensitivity-enabled ODE solver in SUNDIALS". In: *ASME 2005 international design engineering technical conferences and computers and information in engineering conference*, pp. 257–269. American Society of Mechanical Engineers, 2005.

HINDMARSH, A. C., BROWN, P. N., GRANT, K. E., et al. "SUNDIALS: Suite of nonlinear and differential/algebraic equation solvers", *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, v. 31, n. 3, pp. 363–396, 2005.

BIEGLER, L. T., ZAVALA, V. M. "Large-scale nonlinear programming using IPOPT: An integrating framework for enterprise-wide dynamic optimization", *Computers & Chemical Engineering*, v. 33, n. 3, pp. 575–582, 2009.

BONAMI, P., LEE, J. "BONMIN user's manual", *Numer Math*, v. 4, pp. 1–32, 2007.

JANKA, D. *Sequential quadratic programming with indefinite Hessian approximations for nonlinear optimum experimental design for parameter estimation in differential–algebraic equations*. Tese de Doutorado, Department of Applied Mathematics, 2015.

BÜSKENS, C., WASSEL, D. "The esa nlp solver worhp". In: *Modeling and optimization in space engineering*, Springer, pp. 85–110, New York, 2012.

WALTZ, R. A., NOCEDAL, J. "KNITRO user's manual", *Northwestern University, Evanston, Illinois, Technical Report OTC-2003/5*, 2003.

GILL, P. E., MURRAY, W., SAUNDERS, M. A. "SNOPT: An SQP algorithm for large-scale constrained optimization", *SIAM review*, v. 47, n. 1, pp. 99–131, 2005.

Apêndice A

Revisão de identificação de sistemas

Esse apendice trata da identificação de sistemas dinâmicos. Que aqui será tratado simplesmente como um procedimento de estimação de parâmetros para certa classe de modelos paramétricos lineares invariantes no tempo, a saber, modelos polinomiais e modelos em espaço estados, sejam eles em modelos em tempo contínuo ou discreto. O procedimento de identificação é apresentado em datalhes pois é de grande interesse um subproduto desse processo que é a matriz de covariância dos parâmetros, a qual, vamos ver, pode ajudar a responder perguntas importantes:

- os dados amostrais foram suficientes para uma identificação efetiva dos parâmetros do modelo?
- qual o intervalo de confiança para a resposta do modelo em malha a aberta?
- qual o intervalo de confiança para a resposta do modelo em malha a fechada?
- qual a probabilidade de um dado controlador instabilizar quando em malha fechada na planta identificada?

Os princípios estatísticos inerentes ao processo de identificação serão abordados de forma a manter uma base sólida ao que se apresentou. Por fim alguns métodos de cálculo serão apresentados para o domínio discreto, contínuo para modelos em função de tranferencia e em espaços de estados. No final do capítulo a identificação de sistemas não lineares será apresentada brevemente. Até lá a classe de modelos considerada será aquela dos modelos lineares invariantes no tempo.

A.1 Modelos

Na disciplina de identificação de sistemas uma das primeiras decisões a serem tomadas é o tipo de modelo que irá se trabalhar podendo ele ser:

- Paramétrico
- Não paramétrico

Os modelos não paramétricos são modelos que não podem ser descritos com um número finito de parâmetros como por exemplo os modelos de resposta ao degrau, resposta ao impulso e função de tranferência. Já os modelos paramétricos mais consagrados são os modelos de função de transferência e o modelo de espaço de estados.

A.1.1 Função de Transferência

Os modelos de função de tranferência surgem naturalmente de uma equação diferencial ordinária linear com variáveis independentes ao se aplicar a tranformada de Laplace. Seja por exemplo o sistema massamola amortecido

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = u \tag{A.1}$$

y	deslocamento da massa
u	aceleração aplicada no sistema
c	coeficiente de atrito viscoso
k	constante da mola
$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	frequência angular não amortecida de oscilação
$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}$	taxa de amortecimento

Tomando a tranformada de Laplace na equação diferencial (eqmassamola) temos:

$$\begin{gathered} s^2Y + 2\zeta\omega_0 sY + \omega_0^2 Y = U \Rightarrow \\ G = \frac{Y}{U} = \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \end{gathered} \tag{A.2}$$

Sendo assim a equação (eq:massamola-laplace) nos dá a função de tranferência que representa o sistema massa mola em questão. Oberve que ela se encaixa num formato mais geral de funções de tranferência da seguinte forma:

$$G = Y/U = \frac{\sum_{i=0}^{n_b-1} b_i s^i}{1 + \sum_{i=1}^{n_a} a_i s^i} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \cdots + b_{n_b-1} s^{n_b-1}}{1 + a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n_a} s^{n_a}} \tag{A.3}$$

Se temos várias variáveis independentes $u_1, ..., u_n$ afetando a variável dependente y podemos escrever:

$$Y = G_1 U_1 + \cdots + G_n U_n \tag{A.4}$$

Onde:

$$G_j = \frac{\sum_{i=0}^{n_{bj}-1} b_{ji} s^i}{1 + \sum_{i=1}^{n_{fj}}} \tag{A.5}$$

A.1.2 Espaço de estados

Para se chegar num modelo em espaço de estados a partir de uma equação diferencial ordinária ou ainda um sistema de equações diferenciais ordinárias podemos primeiro selecionar um vetor de variáveis, que será o nosso vetor de estados. No caso da equação do sistema massa mola (eq:massamola) podemos tomar:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \tag{A.6}$$

Onde usamos o ponto para indicar derivada temporal. Assim a equação (eq:massamola) pode ser reescrita no seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= x_2 \\ \dot{x_2} &= u - 2\zeta\omega_0 x_2 - \omega_0^2 x_1 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2\zeta\omega_0 & \omega_0^2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{aligned} \tag{A.8}$$

De maneira geral um sistema em espaço de estados é dados por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \tag{A.9}$$

n	número de entradas do sistema
m	número de saídas do sistema
p	número de estados do sistema
$x = x_{px1}$	vetor de estaodos do sistema
$u = u_{nx1}$	vetor de entradas do sistema
$y = y_{m_1}$	vetor de saídas do sistema

A.1.3 O modelo do erro

Para que o processo de identificação possa ser executado não basta apenas o modelo que relaciona as variáveis independentes com as variáveis independentes. É

necessário que o modelo inclua a relação entre o ruído e as saídas. Estatisticamente é mais fácil de se considerar que o ruído que afeta o processo é um ruído branco gaussiano com média 0 e variância constante. Que apresenta as seguintes propriedades:

1. A cada instante o valor do ruído é dado por uma variável aleatória de distribuição normal com média 0 e variância constante.

2. O ruído em um instante é independente e, portanto, descorrelacionado do ruído em um instante diferente.

3. A potência espectral é a mesma em todas as frequências.

Incorporando o ruído branco no modelo em função de tranferência da equação (A.4) obtemos:

$$Y = G_1U_1 + \cdots + G_nU_n + HE \tag{A.10}$$

Onde:

$$H = \frac{1 + \sum_{i=0}^{n_c} c_i s^i}{1 + \sum_{i=1}^{n_d} d_i s^i} \tag{A.11}$$

A incorporação do ruído na formulação do modelo em função de tranferência pode se dar da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} = &\quad Ax + Bu + Ke \\ y = &\quad Cx + Du + e \end{aligned} \tag{A.12}$$

A.1.4 Princípios estatísticos

O princípio estatístico por trás da identificação de parâmetros de um modelo é o princípio da máxima verossimilhança. A verossimilhança é proporcional a probabilidade condicional dos parâmetros serem aqueles dado os dados observados. No nosso caso a função de verossimilhança que se deseja minimizar é a norma dois do erro de predição de um passo.

$$J(\theta) = \sum_{i=0}^{N-1} (\hat{y}[i|i-1] - y[i])^2 \tag{A.13}$$

O processo de maximizar a verossimilhança por vezes pode ser efetuado por meio

N	número de amostras
$\hat{y}[i\|i-1]$	valor de $y[i]$ estimado pelo modelo no instante $i-1$

de um simples mínimos quadrados, mas para modelos mais sofisticados é necessário um procedimento iterativo de otmiazação.

A.1.5 Incerteza da identificação

Supondo que a variância do ruído que está afetando o processo é igual a variância do erro de predição de um passo somos capazes de fazer afirmações a cerca da distribuição estatística dos erros. De maneira geral podemos afirmar que:

$$cov(\theta) = \nabla_\theta^2 J \tag{A.14}$$

A.1.6 Algoritmos de identificação

Poderia falar do ARX, ARMAX, BJ... mas acho que foge do foco da dissertação.

A.1.7 Modelos não lineares

Todo o arcabouço apresentado nas equações (A.13) e (A.14) se estende para a estimação de parâmetros em modelos não lineares. Abaixo segue a descrição de modelo dinâmico não linear variante no tempo representado por um sistema de equações algébrico-diferenciáveis:

$$f(x, \dot{x}, y, p, t) = 0 \tag{A.15}$$

x	vetor de estados
y	vetor de saídas
p	vetor de zeros
t	tempo

$$y[k] = a_1 y[k-1] + \ldots + a_{n_a} y[k-n_a] + b_0 u[k] + \ldots + b_{n_b} y[k-n_b] + e[k]$$

Ou seja:

$$y[k] = \Phi_k^T \theta + e[k]$$

Onde:

$$\theta = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_{n_a} & b_0 & \ldots & b_{n_b} \end{pmatrix}^T$$

$$\Phi_k = \begin{pmatrix} y[k-1] & \ldots & y[k-n_a] & u[k] & \ldots & y[k-n_b] \end{pmatrix}^T$$

Juntando tudo:

$$\begin{pmatrix} y[0] \\ \vdots \\ y[n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} \theta + \begin{pmatrix} e[0] \\ \vdots \\ e[n] \end{pmatrix} \implies y = \Phi\theta + e$$

Podemos aplicar mínimos quadrados e calcular:

$$\theta = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi y - (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi e = \hat{(}\theta) - \Delta\theta$$

A primeira parcela é conhecida e a segunda é o erro de estimação do parâmetro θ. Supondo que e tem matriz de covariância igual a $\sigma_e^2 I$ a matriz de covariância de $\Delta\theta$ e, consequentemente, de θ será:

$$\sigma_\theta^2 = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi\sigma_e^2 I((\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi)^T = \sigma_e^2(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi\Phi^T(\Phi^T\Phi)^{-1} = \sigma_e^2(\Phi^T\Phi)^{-1}$$

σ_e^2 pode ser estimado a partir dos dados como sendo a variância amostral do resíduo $y - \Phi\theta$.

A.2 Propagação de incerteza

No capítulo 2 foram apresentadas as bases do processo de identificação de parâmetros de modelos lineares paramétricos com ênfase em especial para um subproduto desse processo que é a matriz de covariância dos parâmetros que traduz a incerteza de identificação. No presente capítulo iremos mostrar como usar essa informação na análise e projeto de controladores para esses sistemas identificados. Para tanto primeiro são apresentados os tipos de propagação de incerteza que podem ser utilizados para a partir da incerteza de identificação se chegar à incerteza de malha fechada. Os prós e contras de cada tipo são explorados e a propagação analítica de erros é colocada em relevo por ser importante para a formulação de alguns resultados analíticos que seguirão no capítulos subsequentes. A propagação de erros é aplicada ao cálculo da malha-fechada, ou seja, quando se aplica um controlador em um modelo incerto. Por fim são mostrados como as incertezas de modelagem se propagam em diagramas clássicos do controle como: resposta ao degrau, diagrama de polos e zeros, diagrama de Bode e diagrama de Nyquist.

A.2.1 Tipos de propagação de incerteza

Aqui a propagação de incertezas está sendo considerada no seguinte contexto. Suponha que você tenha um vetor de variáveis aleatórias $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ queremos saber qual é a distribuição aleatória da variável aleatória $Y = f(X)$.

Propagação exata

A primeira maneira de se chegar ao resultado da propagação é de maneira determinística e exata usando as ferramentas da estatística. sabemos por exemplo que se X tem distribuição normal multivariada com média μ e matriz de covariância σ^2 temos que a variável aleatória obtida pelo somatório de das variáveis aleatórias X_i ainda é normal e tem a seguinte parâmetros:

$$\sum_{i=1}^{n} X = \mathcal{N}(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sum_{i,j=n}^{n} \sigma_{ij}) \tag{A.16}$$

Outro resultado bem conhecido da estatística é que se X é um vetor de variáveis normais padronizadas (ou seja, média 0 e desvio padrão 1) independentes o somatório de X_i tem distribuição qui-quadrado. Mais especificamente

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \chi_n^2 \tag{A.17}$$

De maneira geral o procedimento de propagação exata equivale a uma mudança de variáveis de uma integral multipla e posterior solução dessa integral o que, exceto em casos particulares como os mostrados acima, se mostra uma tarefa muito difícel ou, muitas vezes, impossível analiticamente. Mesmo se o vetor de variáveis aleatorias X é normal multivariado, quando nos deparamos com uma função f um pouco mais complicada é imperativo procurarmos outra abordagem para a solução do problema de propagação de erros ainda que de maneira não exata ou não determinística.

Propagação por Monte Carlo

A propagação de incertezas por monte-carlo é extremamente poderosa, fornecendo um resultado para a distribuição da variável aleatória $Y = f(X)$ de maneira aproximada que se aproxima assintoticamente da distrição real a medida que se aumentam o número de realizações. O processo consiste em se tomar N amostras do vetor de variáveis aleatórias X obtendo as amostras $x_i, i = 1, ..., n$. Então aplica-se a função f sobre cada uma das amostras obtendo se $y_i = f(x_i), i = 1, ..., n$. Assim com os n resultados pode-se desenhar um histograma dos y_i como uma aproximação da função densidade de probabilidade de Y ou ainda calcular a média e variância dos resultados y_i como uma aproximação da média e variância da variável aleatória Y. Vale lembrar que quanto maior o valor de N mais pode se confiar nas aproximações obtidas.

Aplicando o conceito de propagação por Monte Carlo podemos por exemplo propagar a incerteza de identificação de uma modelo para vermos o que acontece com a resposta ao degrau. Suponha por exemplo que foi identificado o seguinte modelo em função de tranferência:

$$\frac{b_1 + b_0 s}{s^2 + a_1 s + a_0 s} \tag{A.18}$$

Obteve-se o vetor de parâmetros $p = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & a_0 & a_1 \end{bmatrix}^T$ com seguinte média (valor nominal do modelo) e matrix de covariância:

$$\bar{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \sigma_p^2 = \frac{1}{10^2} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

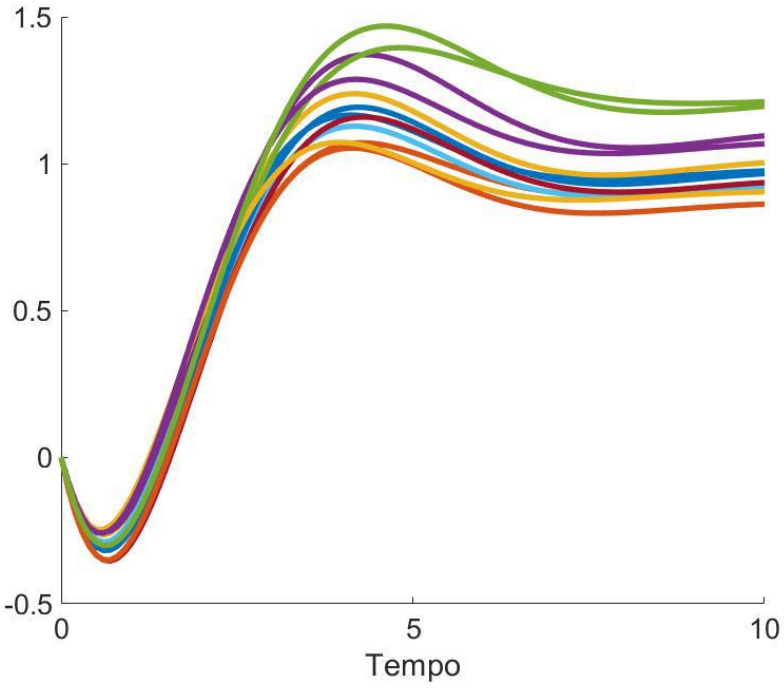
Colocando o resultado de 10 amostras desse variável aleatória nas colunas de uma

matrix obtemos:

$$\begin{bmatrix} -0.96 & -1.09 & -0.96 & -0.91 & -1.07 & -1.01 & -1.14 & -1.07 & -1.17 & -0.97 \\ 1.03 & 0.96 & 1.00 & 0.99 & 1.03 & 0.95 & 0.93 & 0.97 & 0.95 & 1.05 \\ 1.05 & 1.11 & 0.95 & 0.87 & 1.05 & 1.00 & 0.98 & 0.98 & 1.06 & 1.12 \\ 1.06 & 1.05 & 1.00 & 0.89 & 0.84 & 1.03 & 0.99 & 1.00 & 1.10 & 1.17 \end{bmatrix}$$

Cada uma dessas colunas está associada a um vetor de parâmetros que pode ser o vetor de parâmetros da nossa planta real. Calculando a resposta ao degrau de cada um desses sistemas e desenhando temos: O que ajuda a ter uma ideia da incerteza

Figura A.1: Monte Carlo aplicado à resposta ao degrau

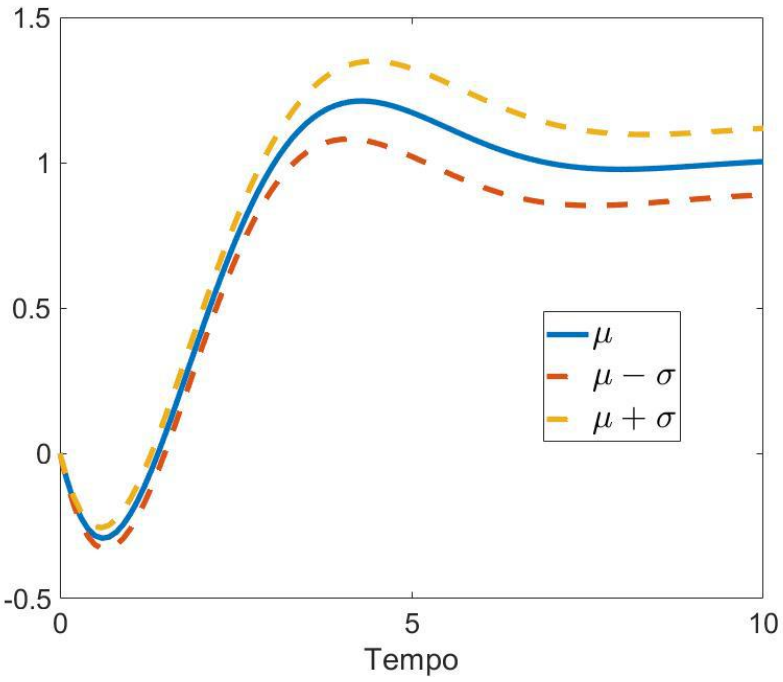


do modelo identificado. Podemos ainda ir além e calcular para cada instante de tempo a média e o desvio padrão das 10 amostras e assim obter um valor esperado e uma região de cofiança para cada instante de tempo como pode ser visto na figura a seguir: Seguindo esse mesmo princípio podemos gerar gráficos para a resposta ao impulso, fechamento de malha, diagrama de polos e zeros, diagrama de bode e diagrama de Nyquist, como segue abaixo. Só que não. Ainda.

Propagação por direções principais

A propagação de incerteza pelo método de Monte Carlo já nos permite visualizar bem como a incerteza de identificação se apresenta dos diversos diagramas de controle. Contudo ela apresenta algumas características que nos deixam ainda um pouco desconfortáveis:

Figura A.2: Média e desvio-padrão por Monte Carlo



- Possui um comportamento estocástico, de maneira que ao replicar a metodologia podemos chegar a resultados diferentes cada vez.
- Não temos muita certeza de como escolher o número de amostras que são necessárias para que se tenha uma boa aproximação da variável aleatória desejada.
- Por fim, ao tomar amostras pelo método de Monte Carlo podemos, mesmo que com probabilidade baixa, trabalhar com vetores de parâmetro muito pouco prováveis, o que pode acabar gerando conclusões erradas quando olhando todas as amostras num gráfico de resposta ao degrau por exemplo.

Para contornar essas questões podemos utilizar um outro método para propagação de incerteza, que aqui será chamado de Método das direções principais. Ele consiste no seguinte princípio. Como a matriz de covariância dos parâmetros σ_p^2 é simétrica, isso implica que ela pode ser decomposta da seguinte maneira:

$$\sigma_p^2 = UDU^T = \begin{bmatrix} U_1 & \cdots & U_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & D_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & \cdots & U_n \end{bmatrix}^T \tag{A.20}$$

Onde U é uma matrix ortogonal, e cada uma de suas colunas é uma direção principal de σ_p^2. As direções principais podem ser vistas comos os eixos dos elipsoides multidimensionais que definem as regiões de confiança do vetor aleatório de parâmetros p.Já

a matrix D é diagonal e em cada elemento contém a variância do vetor aleatório na respectiva direção principal. Dessa forma podemos obter os $2n$ vértices do elipsoide que definem uma região de confiança como sendo:

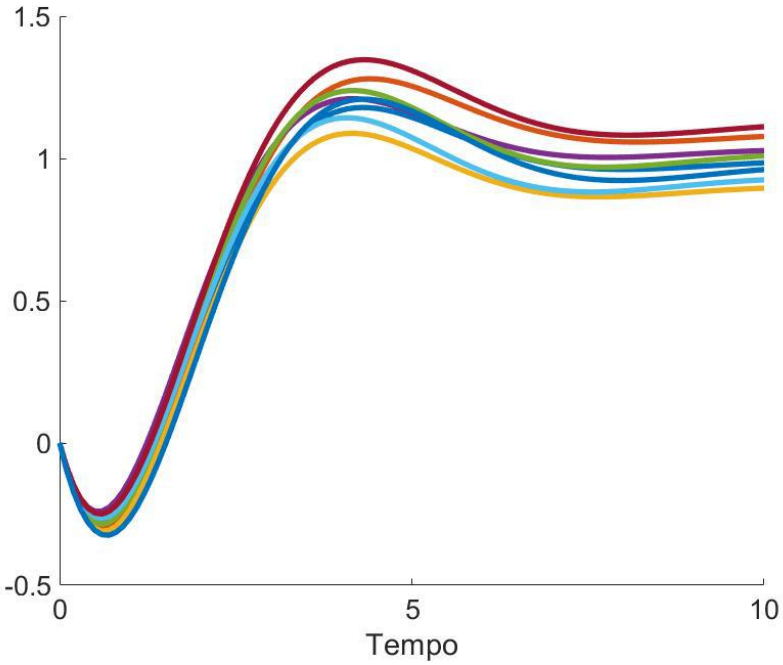
$$\bar{p} \pm \sqrt{D_{ii}} U_i, \text{ para } i = 1, \cdots, n \tag{A.21}$$

Por exemplo para o mesmo exemplo usado na subseção anterior (equação (A.18)) temos que os sigma pontos correspondentes são dados pelas colunas da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} -0.98 & -1.05 & -1.07 & -0.95 & -1.02 & -0.95 & -0.93 \\ 0.97 & 1.03 & 0.96 & 1.08 & 1.03 & 0.97 & 1.04 \\ 1.03 & 1.03 & 1.04 & 1.08 & 0.97 & 0.97 & 0.96 \\ 0.98 & 0.95 & 1.07 & 1.05 & 1.02 & 1.05 & 0.93 \end{bmatrix} \tag{A.22}$$

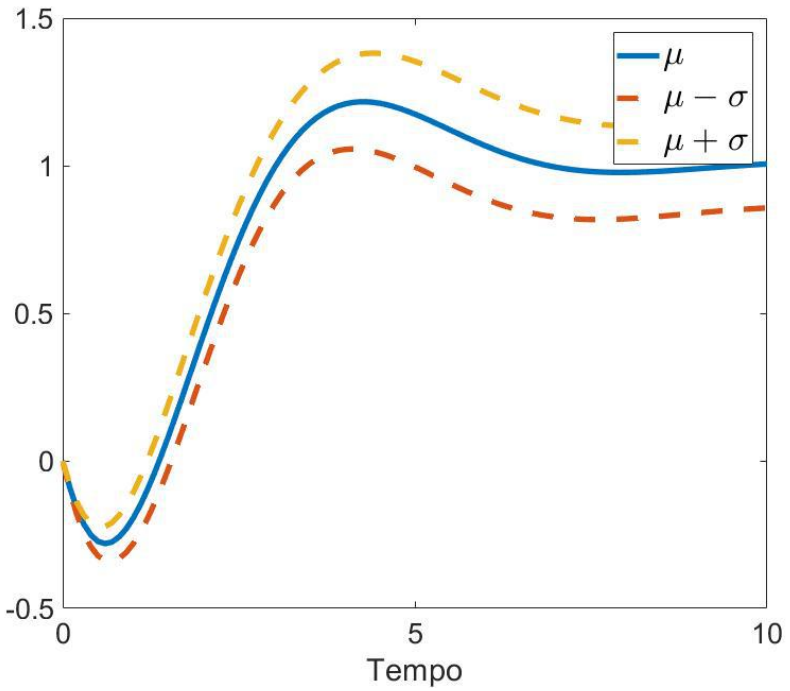
Calculando a resposta ao degrau de cada um desses sistemas e desenhando temos uma figura que funciona como uma aproximação da envoltória da região de um intervalo de confiança correspondente a um desvio padrão, ou seja, um intevalo de confiança de 63%: Existe um propriedade que se multiplicamos o deslocamento

Figura A.3: Direções principais: Intevalo de confiança 1σ



de cada direção principal por $\sqrt{n}$ obtemos um conjunto de pontos (sigma-pontos) que tem média e variância próximos à variável aleatória desejada. Calculando a média e o desvio padrão a cada instante de tempo da resposta ao degrau de cada sigma ponto, obtemos o valor esperado e uma região de cofiança para cada instante de tempo como pode ser visto na figura a seguir: Seguindo esse mesmo princípio

Figura A.4: Média e desvio-padrão por sigma-pontos



podemos gerar gráficos para a resposta ao impulso, fechamento de malha, diagrama de polos e zeros, diagrama de bode e diagrama de Nyquist, como segue abaixo. Só que não. Ainda.

Propagação analítica

O método das direções principais tem muitas propriedades interessantes mas ainda não será o nosso favorito para propagação de incertezas. Nessa subsesção será apresentado o método de propagação analítica de erros. A propagação analítica é utilizada para propagar incertezas definidas por distribuições normais multivariadas se utilizando de uma linearização local da função não linear $f : R^n \to R^m$. Ela se baseia na seguinte propriedade da distribuição normal. Se o vetor aleatório $X : \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $f : \mathbb{R}^n \to f : \mathbb{R}^m$ é uma função linear dada por $f(x) = Ax$. Então temos que:

$$Y = f(X) = \mathcal{N}(A\mu, A^T\sigma^2 A) \tag{A.23}$$

O que nos leva a propor a aproximação para o caso geral de f não linear:

$$Y = f(X) = \mathcal{N}(f(\mu), \nabla_x f^T \sigma^2 \nabla_x f) \tag{A.24}$$

Aplicação ao fechamento de malha

No caso do problema de fechamento de malha de um controlador com um modelo identificado com incertezas queremos saber qual a média e variância do vetor de parâmetros da malha fechada em função da média e variância dos parâmetros do modelo identificado e dos parâmetros do controlador dado.
Suponha que temos por exemplo a planta G com vetor de parâmtros p e controlador C parametrizados da seguinte forma:

$$G = \frac{b_1 s + b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \text{ e } C = k_p(1 + \frac{k_i}{s}) \tag{A.25}$$

Fechando a malha temos:

$$T = \frac{PC}{1 + PC} = \frac{k_p b_1 s^2 + (b_1 + k_p)s + k_i k_p b_0}{s^3 + (k_p b_1 + a_1)s^2 + (k_p k_i b_1 + k_p b_0 + a_0)s + k_p k_i b_0} \tag{A.26}$$

O vetor de parâmetros da malha fechada q pode ser escrito da seguinte forma:

$$q = \begin{bmatrix} k_p b_1 \\ b_1 + k_p \\ k_i k_p \\ k_p b_1 + a_1 \\ k_p k_i b_1 + k_p b_0 + a_0 \\ k_p k_i b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_p & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_p & 0 & 1 \\ k_p & k_p k_i & 1 & 0 \\ k_p k_i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_p \\ k_p k_i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = Ap + b \tag{A.27}$$

Como a função que relaciona p e q é afim, a propagação analítica de erros é também exata. Assim a matrix de covariância de q é dada de maneira exata por:

$$\sigma_q^2 = A^T \sigma_p^2 A \tag{A.28}$$

Para um exemplo numérico suponha que tenhamos a planta G identificada dada pelas equações (A.18) e (A.19) e o controlador C:

$$G = \frac{-s + 1}{s^2 + s + 1} \text{ e } C = \frac{1}{3}(1 + \frac{1}{s}) \tag{A.29}$$

fechando a malha obtemos a seguinte equação de tranferência:

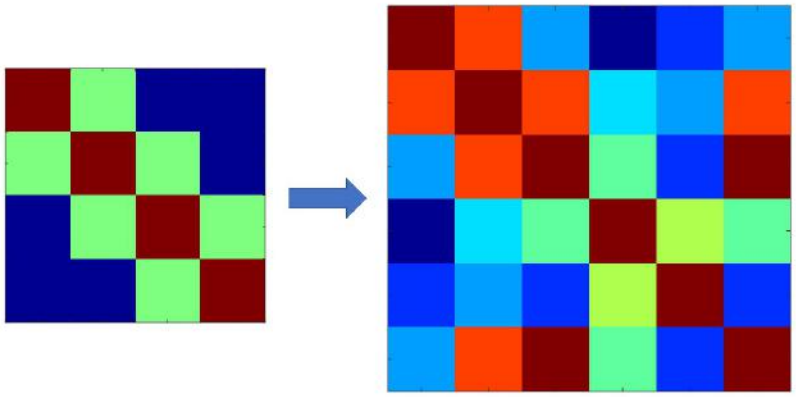
$$\frac{-\frac{1}{3}s^2 + \frac{1}{3}}{s^3 + \frac{2}{3}s^2 + s + \frac{1}{3}} \tag{A.30}$$

Como média e variância do vetor de parâmetros q igual a:

$$\bar{q} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \\ 1/3 \end{bmatrix} \qquad \sigma_q^2 = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/6 & 1/18 & 1/9 & 1/6 & 1/18 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \\ 1/18 & 1/6 & 1/9 & 2/9 & 1/6 & 1/9 \\ 1/9 & 1/3 & 2/9 & 10/9 & 5/6 & 2/9 \\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 5/6 & 4/3 & 1/6 \\ 1/18 & 1/6 & 1/9 & 2/9 & 1/6 & 1/9 \end{bmatrix} \tag{A.31}$$

De uma maneira mais visual podemos dizer que passamos de uma matriz de correlação de parâmetros em malha aberta para uma matriz de correlação da parâmetros de malha fechada da seguinte forma: O procedimento mostrado acima

Figura A.5: Propagação de matriz de correlação MA para MF



para propagação de incertezas da malha aberta para a malha fechada é geral. Sempre os parâmetros da planta em malha fechada são uma combinação linear dos parâmetros da planta em malha aberta e dessa forma a propagação analítica de erros dá um resultado exato.

Resposta ao impulso e ao degrau

Seja um modelo identificado G e p o seu vetor de parâmetros. Com:

$$G = \frac{B}{A} \qquad B = \sum_{i=0}^{n_b-1} b_i s^i \text{ e } A = s^{n_a} + \sum_{i=0}^{n_a-1} a_i s^i \qquad p = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_{n_b} \\ a_0 \\ \vdots \\ a_{n_a} \end{bmatrix} \tag{A.32}$$

Para simular a saída $y(t)$ da planta para uma entrada $u(t)$ podemos escrever:

$$y = Gu \Rightarrow y = \frac{B}{A}u \Rightarrow Ay = Bu \tag{A.33}$$

Derivando a ultima igualdade da equação (A.33 por b_j e a_j teremos:

$$A\frac{dy}{db_j} = s^j u \text{ e } s^j y + A\frac{dy}{da_j} = 0 \Rightarrow A\frac{dy}{da_j} = -s^j y \tag{A.34}$$

Assim a cada instante de tempo temos a jacobiana $\nabla_p^y(t)$:

$$\nabla_p y(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial b_0}(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial b_{n_b}}(t) \\ \frac{\partial y}{\partial a_0}(t) \\ \vdots \\ \frac{\partial y}{\partial a_{n_a}}(t) \end{bmatrix}^T \tag{A.35}$$

E, portanto, pela equação (A.24) temos a incerteza de y em função da incerteza de p a cada instante de tempo:

$$\sigma_y^2(t) = (\nabla_p y(t))^T \sigma_p^2 \nabla_p y(t) \tag{A.36}$$

O caso da incerteza à resposta ao impulso e ao degrau é um caso particular da equação (A.36) quando a entrada u do sistema é o impulso ou o degrau, respectivamente.
figura do impulso aqui
figura do degrau aqui

Diagrama de polos e zeros

Outro gráfico interessante onde podemos usar os princípios da propagação analítica de incerteza é no diagrama de polos e zeros. A propagação analítica nos permite traçar uma elipse correspondente aos intervalos de confiaça para a posição dos polos e zeros no plano complexo. Como os zeros são as raízes do polinômio numerador da função de tranferência e os polos são as raízes do polinômio denominador da função de transferência, chegamos ao seguinte subproblema comum de encontrar a matrix de covariância das raízes de um polinõmio dado a matriz de covariância dos

parâmetros do polinômio. Sejam:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = \prod_{i_0}^{n-1} (x - r_i) \tag{A.37}$$

Os vetores $a = \begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$ e $r = \begin{bmatrix} r_0 & \cdots & r_{n-1} \end{bmatrix}$ são o vetor de coeficientes e raízes do polinômio respectivamente. Sabemos que cada uma das raízes r_j satisfazem a equação:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i r_j^i = 0 \tag{A.38}$$

Derivando implicitamente temos:

$$\sum_{i=0}^{n} da_i r_j^i + i a_i r_j^{i-1} dr_j = 0 \tag{A.39}$$

Isolando dr_j:

$$dr_j = -\frac{\sum_{i=0}^{n} da_i r_j^i}{\sum_{i=0}^{n} i a_i r_j^{i-1} dr_j} = -\sum_{i=0}^{n} \frac{r_j^i}{p'(r_j)} da_i \tag{A.40}$$

Sabemos do cálculo que:

$$dr_j = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial r_j}{\partial a_i} da_i \tag{A.41}$$

Assim:

$$\nabla_a r = \begin{bmatrix} \frac{\partial r_0}{\partial a_0} & \cdots & \frac{\partial r_0}{\partial a_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_{n-1}}{\partial a_0} & \cdots & \frac{\partial r_{n-1}}{\partial a_n} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{r_0^0}{p'(r_0)} & \cdots & \frac{r_0^n}{p'(r_0)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{r_{n-1}^0}{p'(r_{n-1})} & \cdots & \frac{r_{n-1}^n}{p'(r_{n-1})} \end{bmatrix} \tag{A.42}$$

E assim usando a equação (A.24) temos por fim:

$$\sigma_r^2 = (\nabla_a r)^T \sigma_a^2 \nabla_a r \tag{A.43}$$

Ou, se queremos considerar a parte real e imaginária das raízes complexas:

$$cov(\begin{bmatrix} Re(r) \\ Im(r) \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} Re(\nabla_a r) \\ Im(\nabla_a r) \end{bmatrix}^T \sigma_a^2 \begin{bmatrix} Re(\nabla_a r) \\ Im(\nabla_a r) \end{bmatrix} \tag{A.44}$$

Voltando para o contexto de polos e zeros, sendo z o vetor de zeros, p o vetor de polos e temos:

$$cov(\begin{bmatrix} Re(p) \\ Im(p) \\ Re(z) \\ Im(z) \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} Re(\nabla_b p) & 0 \\ Im(\nabla_b p) & 0 \\ 0 & Re(\nabla_a z) \\ 0 & Im(\nabla_a z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_a^2 & \sigma_{ba} \\ \sigma_{ab} & \sigma_b^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Re(\nabla_b p) & 0 \\ Im(\nabla_b p) & 0 \\ 0 & Re(\nabla_a z) \\ 0 & Im(\nabla_a z) \end{bmatrix}^T \tag{A.45}$$

Abaixo temos um exemplo da aplicação.

Resposta em frequência

Uma propriedade interessante da função de tranfereência $G(s)$ é que, quando fazemos $s = j\omega$, $G(j\omega)$ é um número complexo que codifica a resposta do sistema para a frequência angular ω: o módulo $|G(j\omega)|$ é o ganho para a frequência ω e o argumento $Arg(G(j\omega))$ é o deslocamento de fase para a frequência ω. Para obtemos a matriz de covariância da parte real e imaginária de $G(j\omega)$ em função da matriz de covariância σ_p^2 do vetor de parâmetros p primeiro vamos calcular qual é a

$$G(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{\sum_{i=0}^{n_b} b_i (j\omega)^i}{\sum_{i=0}^{n_a} a_i (j\omega)^i} = \frac{Re(B(j\omega)) + jIm(B(j\omega))}{Re(A(j\omega)) + jIm(A(j\omega))} \tag{A.46}$$

Daí:

$$w = \begin{bmatrix} Re(B(j\omega)) \\ Im(B(j\omega)) \\ Re(A(j\omega)) \\ Im(A(j\omega)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{i=n/2} b_{2k} \omega^(2k)(-1)^k \\ \sum_{i=0}^{i=n/2} b_{2k+1} \omega^(2k+1)(-1)^k \\ \sum_{i=0}^{i=n/2} a_{2k} \omega^(2k)(-1)^k \\ \sum_{i=0}^{i=n/2} a_{2k+1} \omega^(2k+1)(-1)^k \end{bmatrix} \tag{A.47}$$

Donde:

$$\nabla_w p = \begin{bmatrix} \omega^0 & 0 & \omega^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \omega^1 & 0 & \omega^3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \omega^0 & 0 & \omega^2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega^1 & 0 & \omega^3 & \cdots \end{bmatrix} \tag{A.48}$$

Outro resultado que precisamos é:

$$\frac{a+jb}{c+jd} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + j\frac{-ad+bc}{c^2+d^2} = e + jf \tag{A.49}$$

E assim, seja $\nabla_z x$ a jacobiana da tranformação $z = [abcd] \to [ef] = x$:

$$\nabla_z w = \begin{bmatrix} \frac{c}{c^2+d^2} & \frac{d}{c^2+d^2} & \frac{a(d^2-c^2)-2bcd}{(c^2+d^2)^2} & \frac{b(c^2-d^2)-2acd}{(c^2+d^2)^2} \\ -\frac{d}{c^2+d^2} & \frac{c}{c^2+d^2} & \frac{b(c^2-d^2)-2acd}{(c^2+d^2)^2} & \frac{a(d^2-c^2)-2bcd}{(c^2+d^2)^2} \end{bmatrix} \tag{A.50}$$

Teremos por fim a matriz de covariância de w em função da matriz de covariância dos parâmetros σ_p^2:

$$\sigma_w^2 = \nabla_z w \nabla_w p \sigma_p^2 (\nabla_z w)^T (\nabla_w p)^T \tag{A.51}$$

exemplos... bode e nyquist