



PROBLEMAS TERMOMECÂNICOS INVERSOS DE PROCESSOS DE  
AQUECIMENTO LOCALIZADO

Victor Daniel Zegarra Torres

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Oceânica.

Orientadores: Julio Cesar Ramalho Cyrino  
Murilo Augusto Vaz

Rio de Janeiro

Julho de 2019

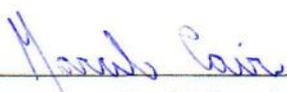
PROBLEMAS TERMOMECÂNICOS INVERSOS DE PROCESSOS DE  
AQUECIMENTO LOCALIZADO

Victor Daniel Zegarra Torres

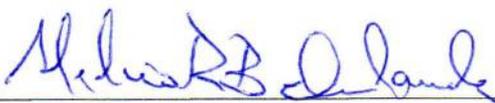
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM  
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA OCEÂNICA.

Examinada por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Murilo Augusto Vaz, Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Marcelo Caire, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Alexandre Landesmann, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Hécio Rangel Barreto Orlande, Ph.D

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Américo Scotti, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 2019

Torres, Victor Daniel Zegarra

Problemas termomecânicos inversos de processos de aquecimento localizado/ Victor Daniel Zegarra Torres. - Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XV, 168 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Julio Cesar Ramalho Cyrino

Murilo Augusto Vaz

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE Programa de Engenharia Oceânica, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 130 - 143.

1. Problemas Inversos. 2. Aquecimento. 3. Soldagem. 4. Elementos Finitos. 5. Testes Experimentais I. Vaz, Murilo Augusto *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Oceânica. III. Título.

## **Dedicatória**

*Á minha esposa Julia e meu filho Miguel  
Daniel, por ser minha motivação.*

*A meu pai Fredy e minha mãe Elsa que já  
não estão entre nós, pelos inestimáveis conselhos e  
ensinamentos.*

*A meus irmãos, família e amigos, pelo apoio.*

*“O temor do Senhor é a instrução da sabedoria, e diante da honra vai a  
humildade”*

Prov. 15.33.

# Agradecimentos

A Deus, porque sem Ele nada pode ser feito.

À minha esposa e filho por ser minha maior motivação e pela sua compreensão e incentivo constante.

A meus pais, pelo apoio incondicional ao longo da minha vida.

Aos Professores Murilo Augusto Vaz e Julio Cesar Ramalho Cyrino pela sua valiosa orientação, paciência e colaboração para o desenvolvimento do presente trabalho.

A minha família em especial a meus irmãos, Fredy, Carolina e Carlos e amigos por sua compreensão e apoio.

Aos amigos e funcionários do Núcleo de Estruturas Oceânicas (NEO) do Centro de Tecnologia e do Parque Tecnológico, em especial a Miguel Manco, Aynor Ariza, Jorge Martinez e Irving Hernandez por compartilhar seus conhecimentos e as valiosas colaborações a meu trabalho, e a Eliene Barreto pela sua ajuda administrativa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, ao Programa de Engenharia Oceânica da COPPE/UFRJ e ao ANP-PRH03 pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

PROBLEMAS TERMOMECÂNICOS INVERSOS DE PROCESSOS DE  
AQUECIMENTO LOCALIZADO

Victor Daniel Zegarra Torres

Julho/2019

Orientadores: Julio Cesar Ramalho Cyrino

Murilo Augusto Vaz

Programa: Engenharia Oceânica

No presente trabalho é apresentado uma metodologia numérica, baseada em elementos finitos, para a determinação do fluxo de calor fornecido e tensão de escoamento do material da estrutura com a variação da temperatura. Para aferir esta metodologia foram realizados ensaios experimentais em placas circulares aquecidas no seu centro por chama oxí-acetilênica. As temperaturas e os deslocamentos em diferentes pontos da placa são medidas por meio de termopares e LVDT's, respectivamente. O modelo de aquecimento envolve uma análise termomecânica desacoplada, empregando elementos finitos axissimétricos 2D. O algoritmo de Levenberg-Marquardt para solução do problema inverso correspondente, adaptado para elementos finitos, foi implementado para trabalhar junto com o programa comercial ANSYS. O desenvolvimento do procedimento de solução envolve a comparação das temperaturas e deslocamentos medidos no experimento com as calculadas na simulação numérica do processo.

Na análise térmica o fluxo calor fornecido é discretizado em blocos e comparado a uma distribuição gaussiana. Na análise mecânica a tensão de escoamento variando com a temperatura é considerada com comportamento multilinear. As temperaturas obtidas numericamente e as experimentais apresentam ótima correlação. Quanto aos deslocamentos, pode ser dito que para as regiões mais afastadas da fonte de calor os deslocamentos numéricos apresentam bom ajustamento aos experimentais.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

INVERSE THERMOMECHANICAL PROBLEMS FOR LOCAL  
HEATING PROCESSES

Victor Daniel Zegarra Torres

July/2019

Advisors: Julio Cesar Ramalho Cyrino

Murilo Augusto Vaz

Department: Ocean Engineering

In the present work is presented a numerical methodology, based on finite elements, for the determination of the heat flux provided and the yield stress of the material of the structure with the temperature variation. To evaluate this methodology, experimental tests were performed on circular plates heated at the center by oxy-acetylene flame. Temperatures and displacements at different points of the plate are measured by means of thermocouples and LVDT's, respectively. The heating model involves an uncoupled thermomechanical analysis using axisymmetric finite elements 2D. The Levenberg-Marquardt algorithm for the solution of the corresponding inverse problem, adapted for finite elements, was implemented to work together with the ANSYS commercial program. The development of the solution procedure involves comparing the temperatures and displacements measured in the experiment with those calculated in the numerical simulation of the process.

In the thermal analysis, the heat flux supplied is discretized in blocks and compared to a Gaussian distribution. In the mechanical analysis, the yield stress varying with temperature is considered with multilinear behavior. The temperatures obtained numerically and the experimental ones present great approximation. Regarding the displacements, it can be said that for the regions farthest from the heat source, the numerical displacements show good agreement with the experimental ones.

# Sumário

Lista de Figuras.....	xi
Lista de Tabelas .....	xv
Capítulo 1.....	1
Introdução .....	1
1.1. Objetivos.....	2
1.2. Organização da Tese.....	4
1.3. Revisão Bibliográfica.....	5
1.3.1. Simulação do Processo. ....	7
1.3.2. Simulação do Material.....	9
1.3.3. Simulação Estrutural.....	10
1.3.4. Solução de Problemas Inversos. ....	12
Capítulo 2.....	18
Aspectos Teóricos para a Análise Termomecânica .....	18
2.1. Modelo de Análise Termomecânico.....	18
2.1.1. Acoplamentos na Análise Termomecânica.....	18
2.2. Modelo de Análise Térmica.....	19
2.2.1. Equações Básicas do Fluxo de Calor.....	20
2.2.2. Equação de Governo.....	20
2.2.3. Condição de Temperatura Inicial e de Contorno.....	21
2.2.4. Equação de Governo do Modelo de Elementos Finitos.....	23
2.3. Análise Mecânica.....	26
2.3.1. Equação de Equilíbrio.....	26
2.3.2. Relações Deformação-Deslocamento.....	27
2.3.3. Relações Tensão-Deformação (Termo-Elasto-Plástico).....	27
2.3.4. Equação Básica do Modelo de Elementos Finitos.....	28
2.3.5. Plasticidade.....	32
2.3.6. Termo Plasticidade.....	33
2.3.7. Esquema Implícito do Mapeamento Preditor Elástico.....	37
2.3.8. Esquema Implícito do Mapeamento Retorno Elástico.....	39
2.3.9. Tangente Elasto-Plástica Consistente para p Modelo de von Mises e Encruamento Isotrópico. ....	42
2.4. Processos de Soldagem por Fusão.....	43

2.4.1. Tipos de Fontes de Calor para Soldagem por Fusão.....	44
2.4.2. Modelo de Fonte de Calor.....	46
Capítulo 3.....	54
Métodos de Solução de Problemas Inversos.....	54
3.1. Método de Levenberg – Marquardt. ....	56
3.1.1. Procedimento Iterativo.....	58
3.1.2. Critérios de Parada.....	61
3.1.3. Algoritmo Computacional. ....	61
3.1.4. Análise Estatística da Estimação de Parâmetros.....	62
3.2. Procedimento na Determinação Numérica dos Coeficientes de Sensibilidade.....	63
3.2.1. Análise Térmica.....	63
3.2.2. Análise Mecânica.....	67
3.3. Sub-Rotinas do ANSYS.....	71
3.3.1. Sub-rotina UELMATX.....	72
3.3.2. Sub-rotina USERMAT.....	72
Capítulo 4.....	74
Procedimento Experimental e Análise dos Resultados.....	74
4.1. Introdução. ....	74
4.2. Equipamento da Soldagem Oxi-Acetilênica.....	75
4.3. Sensores Térmicos e de Deslocamentos. ....	75
4.4. Procedimento dos Ensaio. ....	76
4.5. Modelagem Numérica do Ensaio Experimental.....	80
4.6. Medição de Espessuras. ....	81
4.7. Propriedades do Material.....	83
4.8. Estudo de Sensibilidade e Escolha da Malha de Elementos Finitos.....	85
4.9. Determinação Numérica da Fonte de Calor.....	89
4.9.1. Análise de Discretização Espacial da Distribuição do Fluxo de Calor por Blocos.....	100
4.9.2. Análise de Estatística dos Parâmetros.....	106
4.10. Determinação da Tensão de Escoamento do Material.....	112
4.11. Análise da Discretização do Tempo. ....	119
4.12. Análise da Variação do Módulo Tangente ( $E_t$ ).....	120

4.13. Determinação da Tensão de Escoamento do Material a Temperatura Ambiente.....	123
4.14. Observações e Comentários.....	125
Capítulo 5.....	127
Conclusões e Recomendações de Trabalhos Futuros .....	127
5.1. Conclusões.....	127
5.2. Recomendações de Trabalhos Futuros.....	129
Referências.....	130
Anexo A.....	144
Verificação da Metodologia.....	144
A.1. Validação da Metodologia para Problema Inverso de Transferência de Calor por Condução Unidimensional.....	144
A.2. Validação da Metodologia para Problema Inverso de Transferência de Calor por Condução Bidimensional .....	156

# Lista de Figuras

<b>Figura 1.1.</b> Fenômenos na soldagem, iterações e acoplamentos	6
<b>Figura 1.2.</b> Conexão dos campos físicos na simulação numérica da soldagem.	7
<b>Figura 2.1.</b> Peça de trabalho.	21
<b>Figura 2.2.</b> Modelos de encruamento	37
<b>Figura 2.3.</b> Solda por arco elétrico	44
<b>Figura 2.4.</b> Partes da chama oxi-acetilênica	45
<b>Figura 2.5.</b> Tipos de chamas oxi-acetilênica	45
<b>Figura 2.6.</b> Temperaturas máximas dos principais gases combustíveis.	46
<b>Figura 2.7.</b> Densidade de energia e padrão de fusão de várias fontes de calor	47
<b>Figura 2.8.</b> Fonte de calor de disco circular	48
<b>Figura 2.9.</b> Sistema de coordenadas usado para as análises do modelo de disco	49
<b>Figura 2.10.</b> Esquema para os modelos de fonte de calor com de distribuições semi - elipsoidal e dupla – elipsoidal	52
<b>Figura 2.11.</b> Fonte de calor com distribuição cônica Gaussiana 3D	53
<b>Figura 3.1.</b> Posição do sensor térmico na malha de elementos finitos.	65
<b>Figura 4.1.</b> Equipamento básico da soldagem oxi-acetilênica.	75
<b>Figura 4.2.</b> Fios de termopar.	76
<b>Figura 4.3.</b> LVDT de meia ponte	76
<b>Figura 4.4.</b> Esquema de disposição na superfície inferior da placa.	77
<b>Figura 4.5.</b> Suporte para placa, maçarico e LVDT's.	78
<b>Figura 4.6.</b> Equipamentos de interfase e controle.	79
<b>Figura 4.7.</b> Esquema de conexões.	79
<b>Figura 4.8.</b> Diagrama das restrições de contorno aplicadas a placa circular.	81
<b>Figura 4.9.</b> Marcação das placas circulares.	82
<b>Figura 4.10.</b> Aparelho medidor de espessuras.	82
<b>Figura 4.11.</b> Propriedades térmicas aço A36	84
<b>Figura 4.12.</b> Entalpia para o aço A36.	84
<b>Figura 4.13.</b> Propriedades mecânicas do aço A36,	85
<b>Figura 4.14.</b> Malha de elementos finitos.	86

<b>Figura 4.15.</b> Temperaturas nos pontos de medição na superfície superior da placa (a) e (b); Temperaturas nos pontos de medição na superfície inferior da placa (c) e (d).	87
<b>Figura 4.16.</b> Placas circulares de 6 mm depois do ensaio. Esquerda amostra de PC 1 e direita PC 2.	90
<b>Figura 4.17.</b> Placas circulares de 8 mm depois do ensaio. Esquerda amostra de PC 1 e direita PC 2.	90
<b>Figura 4.18.</b> Placas circulares de 10 mm depois do ensaio. Esquerda amostra de PC 1 e direita PC 2.	90
<b>Figura 4.19.</b> Gráfico Parâmetros vs. Iterações.	92
<b>Figura 4.20.</b> Coeficiente de Sensibilidade placa PC 1-8.	93
<b>Figura 4.21.</b> Fluxo de Calor fornecido à placa	94
<b>Figura 4.22.</b> Curva Tempo vs. Temperatura placa de 6 mm amostra 1	96
<b>Figura 4.23.</b> Curva Tempo vs. Temperatura placa de 8 mm amostra 1.	96
<b>Figura 4.24.</b> Curva Tempo vs. Temperatura placa de 10 mm amostra 1.	97
<b>Figura 4.25.</b> Curva Tempo vs. Temperatura placa de 10 mm amostra 2.	97
<b>Figura 4.26.</b> Perfil de temperaturas na espessura para as placas circulares analisadas.	98
<b>Figura 4.27.</b> Curva de erro vs. Tempo para placas de 6 e 8 mm.	99
<b>Figura 4.28.</b> Curva de erro vs. Tempo para placas de 10 mm.	100
<b>Figura 4.29.</b> Modelo de discretização por blocos.	100
<b>Figura 4.30.</b> Curvas Temperaturas vs. Tempo e resíduos para o sensor TP1.	103
<b>Figura 4.31.</b> Curvas Temperaturas vs. Tempo e resíduos para o sensor TP2.	104
<b>Figura 4.32.</b> Curvas Temperaturas vs. Tempo e resíduos para o sensor TP3.	104
<b>Figura 4.33.</b> Curvas Temperaturas vs. Tempo e resíduos para o sensor TP4.	105
<b>Figura 4.34.</b> Curvas Temperaturas vs. Tempo e resíduos para o sensor TP5.	105
<b>Figura 4.35.</b> Curva de resíduos médios para os modelos por blocos de discretização do fluxo de calor.	106
<b>Figura 4.36.</b> Temperaturas obtidas com os parâmetros $\hat{P}_j$ no sensor TP1.	109
<b>Figura 4.37.</b> Temperaturas obtidas com os parâmetros $\hat{P}_j$ no sensor TP2.	109
<b>Figura 4.38.</b> Temperaturas obtidas com os parâmetros $\hat{P}_j$ no sensor TP3.	110
<b>Figura 4.39.</b> Temperaturas obtidas com os parâmetros $\hat{P}_j$ no sensor TP4.	110

<b>Figura 4.40.</b> Temperaturas obtidas com os parâmetros $\hat{P}_j$ no sensor TP5.	111
<b>Figura 4.41.</b> Calor cedido em cada Caso dos parâmetros $\hat{P}_j$ .	112
<b>Figura 4.42.</b> Posição dos pontos de determinação dos parâmetros.	113
<b>Figura 4.43.</b> Curva tenão – deforção bilinear	114
<b>Figura 4.44.</b> Tensão equivalente de von Mises, tensão de escoamento e temperatura para os tempos 131s e 300s.	116
<b>Figura 4.45.</b> Evolução dos parâmetros em cada iteração.	117
<b>Figura 4.46.</b> Graficos deslocamento versus tempo.	118
<b>Figura 4.47.</b> Tensão de escoamento com a temperatura	119
<b>Figura 4.48.</b> Variação do deslocamento com diferentes passos de tempo.	120
<b>Figura 4.49.</b> Deslocamentos obtidos com os casos de módulo tangente no LVDT 1.	121
<b>Figura 4.50.</b> Deslocamentos obtidos com os casos de módulo tangente no LVDT 2.	122
<b>Figura 4.51.</b> Deslocamentos obtidos com os casos de módulo tangente no LVDT 3.	122
<b>Figura 4.52.</b> Deslocamentos obtidos com os casos de módulo tangente no LVDT 4.	123
<b>Figura 4.53.</b> Corpos de prova instrumentados.	124
<b>Figura 4.54.</b> Curvas Tensão-deformação obtidos com os Strain Gage.	124
<b>Figura A.1.</b> Esquema gráfico do problema.	145
<b>Figura A.2.</b> Posição dos pontos de medição.	148
<b>Figura A.3.</b> Temperaturas calculadas.	156
<b>Figura A.4.</b> (a) Esquema do processo de soldagem TIG, (b) posição dos termopares no cilindro	157
<b>Figura A.5.</b> Temperaturas medidas pelos termopares	158
<b>Figura A.6.</b> Geometria do elemento	158
<b>Figura A.7.</b> Malha de elementos finitos	159
<b>Figura A.8.</b> Propriedades térmicas do aço AISI 304.	159
<b>Figura A.9.</b> Posição dos pontos de medição numéricos.	161
<b>Figura A.10.</b> Nós de medição da temperatura (nós 53, 58, 56 e 54) e seus elementos	162

**Figura A.11.** Comparação das temperaturas medidas experimentalmente e 168  
temperaturas calculadas em cada sensor.

# Lista de Tabelas

<b>Tabela 3.1.</b> Esquemas de passo de tempo	64
<b>Tabela 4.1.</b> Parâmetros dos ensaios	80
<b>Tabela 4.2.</b> Espessuras reais das placas circulares.	83
<b>Tabela 4.3.</b> Composição química do aço A36	83
<b>Tabela 4.4.</b> Descrição das malhas de elementos finitos.	86
<b>Tabela 4.5.</b> Perda de precisão das Malhas 2, 3 e 4 em relação à Malha 1, mais refinada.	88
<b>Tabela 4.6.</b> Tempo computacional requerido.	89
<b>Tabela 4.7.</b> Dados de aquecimento para as análises numéricas.	91
<b>Tabela 4.8.</b> Parâmetros calculados	95
<b>Tabela 4.9.</b> Comprimento de cada bloco de discretização do fluxo de calor.	101
<b>Tabela 4.10.</b> Fluxos de calor da distribuição por blocos.	102
<b>Tabela 4.11.</b> Variância e Intervalos de confiança para os parâmetros estimados.	107
<b>Tabela 4.12.</b> Parâmetros $\hat{P}_j$ aleatórios Casos 1 a 5.	108
<b>Tabela 4.13.</b> Parâmetros $\hat{P}_j$ aleatórios Casos 6 a 10.	108
<b>Tabela 4.14.</b> Parâmetros da curva tensão deformação.	114
<b>Tabela 4.15.</b> Parâmetros iniciais e calculados.	117
<b>Tabela 4.16.</b> Passos de tempo e carga computacional.	120
<b>Tabela 4.17.</b> Casos de módulo tangente analisados.	121
<b>Tabela 4.18.</b> Dimensões dos corpos de prova.	123
<b>Tabela 4.19.</b> Propriedades mecânicas na temperatura ambiente.	125
<b>Tabela A.1.</b> Resultados obtidos.	156
<b>Tabela A.2.</b> Parâmetros da soldagem	157
<b>Tabela A.3.</b> Resultados da solução de métodos inversos.	167

# Capítulo 1

## Introdução

Na indústria naval é comum observar fenômenos termomecânicos complexos tanto nos processos de soldagem na união das diferentes peças do navio, assim como, em processos de aquecimento localizado na correção de distorções induzidas pelos processos de soldagem.

A soldagem por arco elétrico é o processo de união predominante na indústria da construção naval, devido à alta produtividade no processo de construção dos diferentes componentes da estrutura de navios e plataformas [1]. No entanto, a soldagem apresenta problemas e dificuldades para o construtor devido ao intenso calor localizado fornecido pelo arco elétrico nas peças unidas, induzindo distorções e tensões residuais. Quando esta questão não é bem trabalhada no estaleiro, ele perde competitividade e eficiência na construção, chegando a prejudicar a qualidade, e no caso mais extremo podendo comprometer integridade da estrutura.

Muitas pesquisas foram feitas em relação à redução e controle das distorções e tensões residuais utilizando nas análises por método de elementos finitos. Basicamente estes estudos podem ser agrupados em projetos de prevenção, técnicas de pré-soldagem e técnicas baseadas nos próprios processos de soldagem [2]. No entanto, quando as distorções já ocorreram o método de correção de distorções por aquecimento localizado fornece uma ferramenta eficaz para reduzir as deformações geradas pela soldagem. A implementação numérica destes procedimentos está fundamentada numa boa modelagem da parte térmica, assim como, da termomecânica para obtenção de resultados com precisão.

Nas análises térmicas dos processos de soldagem e aquecimento localizado pelo método dos elementos finitos uma dificuldade comum é a representação da fonte de calor por uma função que descreva adequadamente sua distribuição no corpo. A determinação do campo de temperaturas é muito sensível à fonte de calor e à condutividade térmica do material [3][4]. Nas análises mecânicas, a tensão de escoamento dependente da temperatura é uma das propriedades do material que têm maior influência na definição

do campo de deformações e tensões residuais nas simulações da soldagem [5][6]. Apesar disso, os métodos tradicionais para a definição e/ou medição destas variáveis não são muito simples de serem realizados, produzindo muitas incertezas, e quando utilizados em processos para análise de fenômeno relacionado a altas temperaturas podem gerar respostas pouco confiáveis.

Nos últimos anos, têm sido utilizados procedimentos de análise inversa para a determinação dos parâmetros que aproximam o fluxo de calor aplicado, as propriedades térmicas do material [7][8][9] e as suas propriedades mecânicas [10][11][12][13] conseguindo ótimos resultados. Estes desenvolvimentos só foram possíveis devido ao crescente avanço da tecnologia dos computadores e dos métodos de solução que permitem controlar possíveis instabilidades dos algoritmos aplicados aos problemas inversos.

Nesta tese, o aquecimento de chapas circulares com diferentes espessuras é modelado em elementos finitos para determinar os parâmetros que definem o fluxo de calor na análise térmica e a tensão de escoamento em função da temperatura na análise mecânica. Para isto foi utilizado o algoritmo de Levenberg-Marquardt na solução de problemas inversos de transferência de calor por condução e na solução de problemas inversos termomecânicos transientes.

### **1.1. Objetivos.**

O objetivo desta tese é o desenvolvimento de uma metodologia numérica, baseada em elementos finitos, para a determinação dos parâmetros que definem a fonte de calor aplicada a uma estrutura e a tensão de escoamento do material em função da temperatura. Como esta metodologia também utiliza medições da temperatura e do deslocamento em pontos da estrutura em ensaios experimentais, pretende-se obter melhores aproximações para os parâmetros da fonte de calor e para a tensão de escoamento, do que os valores nominais adotados. Assim, os campos de temperaturas e de deslocamentos gerados nos processos termomecânicos com a mesma fonte de calor e material da estrutura, podem ser previstos com maior acurácia.

Como uma contribuição adicional será proposta a discretização por blocos axissimétricos como uma alternativa aos modelos tradicionais de distribuição do fluxo de calor produzido por uma chama, por exemplo, a distribuição Gaussiana.

O processo de aquecimento das placas por chama oxi-acetilênica é utilizado para realizar a validação da metodologia desenvolvida nesta tese devido à vantagem do controle mais apurado que se pode exercer sobre o calor e a temperatura, independente do metal de adição, do tamanho do cordão, da forma e viscosidade da poça de fusão. Apesar disso, a metodologia pode ser estendida aos diferentes processos de soldagens típicos da indústria naval e offshore (arco elétrico e laser), modificando o modelo de distribuição da fonte de calor, conforme será discutido mais adiante.

Para a validação da metodologia proposta na tese analisa-se experimentalmente o aquecimento de chapas circulares por meio de chama oxi-acetilênica fixa em seus centros, sendo as espessuras nominais das chapas iguais a 6,0 mm, 8,0 mm e 10,0 mm. Neste experimento obtêm-se as temperaturas por meio de medições com sensores termopares, assim como, os deslocamentos medidos por sensores LVDT's. As chapas circulares são modeladas em elementos finitos axissimétricos 2D, e nas análises térmicas a fonte de calor é considerada com distribuição Gaussiana de fluxo superficial, enquanto nas análises mecânicas a tensão de escoamento para diferentes temperaturas é considerada multilinear.

Inicialmente os parâmetros da fonte de calor e os coeficientes da função da tensão de escoamento são adotados. As temperaturas e deslocamentos obtidos na análise numérica do problema, junto com os valores das medições destas variáveis são utilizados no problema inverso para redefinir os parâmetros da fonte de calor e coeficientes da função de tensão. Este procedimento é repetido até que a fonte de calor e a função da tensão de escoamento estabelecida pela metodologia proposta reproduzam com precisão, na análise numérica, os resultados experimentais. Assim, a metodologia é considerada validada para ser aplicada em qualquer outro problema deste tipo.

Os valores de variáveis relacionadas a estas grandezas medidas em experimentos são comparados com os valores numéricos obtidos, como a evolução da temperatura no tempo, em pontos escolhidos da estrutura, e os deslocamentos em locais que podem não coincidir com os primeiros. Quando as aproximações das temperaturas e dos deslocamentos estiverem dentro da faixa de precisão requerida, admite-se que os parâmetros da fonte de calor e a variação da tensão de escoamento com a temperatura foram determinados. Visando restringir o erro ao menor valor possível nas simulações termomecânicas do processo, optou-se por considerar o problema inverso para calcular

os parâmetros da fonte de calor na análise térmica e a tensão de escoamento em função da temperatura na análise mecânica, utilizando o algoritmo de Levenberg-Marquardt.

## **1.2. Organização da Tese.**

Esta tese está organizada em seis capítulos, os quais são descritos de forma resumida a seguir:

No Capítulo 1 são apresentadas a introdução, a motivação e os objetivos da tese. Além disso, é feita uma revisão de pesquisas realizadas que tratam das simulações numéricas dos problemas termomecânicos, e para finalizar são examinados os trabalhos relacionados aos métodos de solução de problemas inversos.

No Capítulo 2 são explicitados os fundamentos teóricos e conceitos sobre a modelagem numérica do processo de soldagem, dos processos envolvidos na indução das distorções geométricas e das tensões residuais.

No Capítulo 3 são estudados os conceitos fundamentais dos métodos de solução de problemas inversos aplicados à transferência de calor por condução e a mecânica dos sólidos. Além disso, é apresentada a formulação para determinação dos coeficientes de sensibilidade associado ao modelo de elementos finitos para atender os objetivos da metodologia.

No Capítulo 4 são desenvolvidas as questões relacionadas ao planejamento, projeto e realização dos ensaios experimentais em chapas circulares submetidas a uma fonte de calor oxi-acetilênica em seu centro e apresentados os resultados obtidos, os valores dos parâmetros da fonte de calor e os parâmetros da curva multilinear que define a tensão de escoamento do material com a temperatura.

No Capítulo 5 são apresentadas as conclusões da tese, levando-se em consideração os resultados obtidos e expondo as dificuldades encontradas na realização do trabalho, e, finalmente, são indicadas as recomendações para trabalhos futuros.

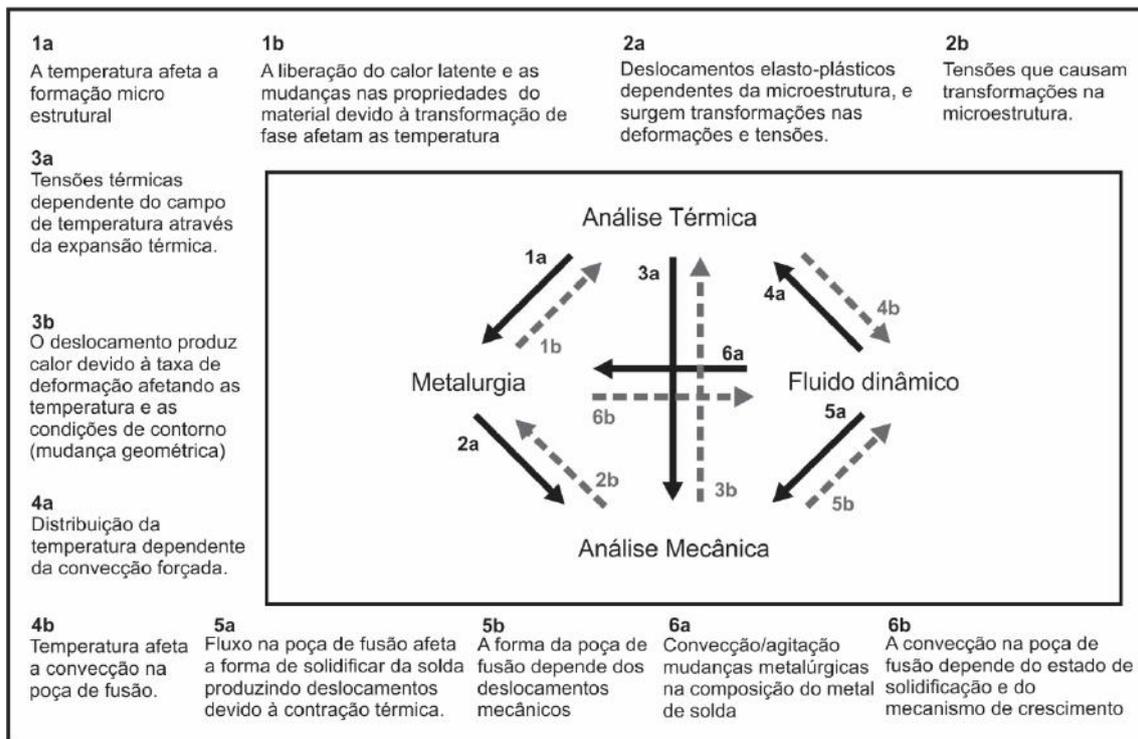
No Anexo A são mostradas as implementações dos modelos numéricos em elementos finitos para a análise direta e inversa, também é mostrado a avaliação da metodologia em problemas 1D e 2D.

### **1.3. Revisão Bibliográfica.**

Os fenômenos físicos que ocorrem no processo de aquecimento são menos complexos que nos processos de soldagem. No entanto, nesta secção serão descritos os fenômenos que acontecem nos processos de soldagem, que correspondem a uma visão mais genérica, pretendendo mostrar a importância de uma boa definição dos fundamentos na simulação numérica da aplicação de uma fonte de calor sobre uma estrutura.

A seguir são apresentados alguns dos trabalhos encontrados na literatura que utilizam a simulação numérica para estudar os fenômenos que ocorrem na soldagem, dando ênfase à sua influência na qualidade dos processos de fabricação na indústria naval, como a distorção geométrica e tensão residual. Os fenômenos que ocorrem num processo de soldagem e as interações desenvolvidas entre eles são esquematizados na *Figura 1.1*.

Os fenômenos termomecânicos que ocorrem na soldagem são muito complexos e afetados, principalmente, por um campo de temperaturas criado pela fonte de calor que se movimenta sobre as superfícies a serem unidas [2][14][15][16]. Para se determinar este campo de temperaturas na maioria dos casos práticos é necessário simplificar a interpretação desses fenômenos para a aplicação de métodos numéricos discretos, como o método dos elementos finitos [17][18]. Ter uma boa estimativa dos parâmetros que definem a fonte de calor é um ponto importante a se considerar na tentativa de obtenção do campo de temperaturas desenvolvido na estrutura e, conseqüentemente, no cálculo mais preciso das distorções geométricas e tensões residuais.



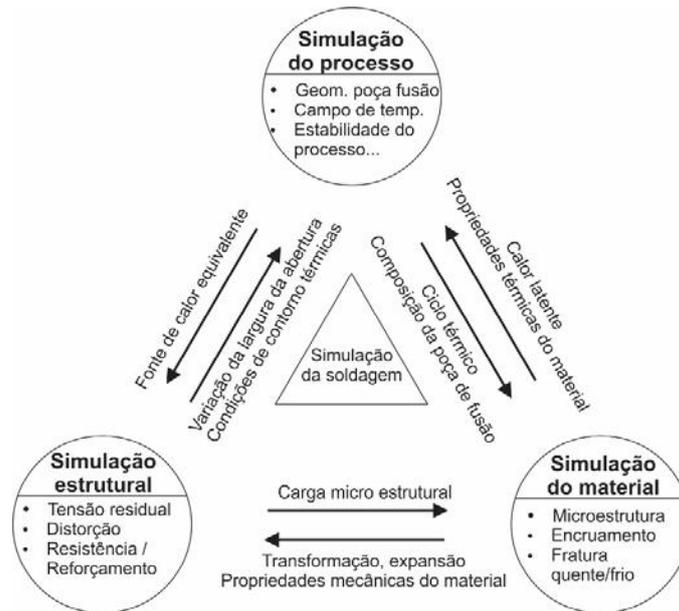
**Figura 1.1.** Fenômenos na soldagem, iterações e acoplamentos. Adaptado da ref. [19]

Segundo Radaj [15], a simulação numérica de problemas termomecânicos pode ser dividida em três importantes áreas do conhecimento, e a interação destas áreas é apresentada na *Figura 1.2*. As áreas do conhecimento mencionadas são as seguintes:

**Simulação do processo.** Nesta área são considerados os fenômenos complexos do campo de temperatura, do campo de velocidades na poça de fusão e a interação da fonte de calor com os corpos a serem soldados ou a estabilidade dos processos de soldagem.

**Simulação do material.** Esta área abrange os temas relacionados ao encruamento, tenacidade, transformação de fase e o comportamento ante o fenômeno de fratura a quente e a frio, ou seja, tudo que se refere ao comportamento micro-estrutural.

**Simulação estrutural.** Compreende a geração das tensões residuais e distorções, a resistência e a rigidez estrutural do metal de solda ou da zona termicamente afetada pelo calor (ZTA) e todos os fenômenos onde o calor da solda tem efeito no campo termomecânico.



**Figura 1.2.** Conexão dos campos físicos na simulação numérica da soldagem. [20]

### 1.3.1. Simulação do Processo.

Nesta seção são considerados os detalhes da modelagem dos fenômenos vinculados ao campo de temperaturas e sua velocidade dentro da poça de fusão, à interação da fonte de calor com o sólido ou à eficiência e estabilidade do processo de soldagem.

O primeiro a propor uma modelagem analítica de uma fonte de calor móvel sobre um sólido foi Rosenthal [21]. Logo depois Kasuya e Yurioka [22] desenvolveram um modelo completo para a predição do histórico térmico, do tempo de resfriamento da zona afetada pelo calor. Sudhakaran et al. [23] desenvolveram um modelo matemático para a otimização do processo de soldagem TIG considerando o ângulo da tocha, velocidade de soldagem, comprimento da chapa, corrente da solda e taxa do fluxo de gás. Devido à complexidade dos fenômenos, estes estudos analíticos incorporaram muitas simplificações para tornar possível a representação da soldagem.

Na atualidade, com o desenvolvimento da computação (cada vez mais potente e eficiente) e dos métodos numéricos, estudos com menos limitações são realizados na área da soldagem, convertendo-se num campo de pesquisa em crescimento. As pesquisas nas simulações do processo estão focadas na compreensão dos fenômenos básicos com relação ao fluxo de calor e de fluido na poça de fusão e à física do arco.

Spille-Kohoff [24] pesquisou, usando simulações em CFX (método dos volumes finitos), o comportamento e a estabilidade do arco elétrico, o aquecimento fornecido pelo eletrodo, o ciclo de resfriamento e as condições da proteção do cordão. Este estudo teve como objetivo analisar e otimizar o arco elétrico, os efeitos da proteção do cordão e a distribuição do calor transferido em sólidos com diferentes geometrias e condições de contorno, nos processos de soldagem TIG, MIG/MAG e plasma. Dreher et al. [25] apresentaram uma investigação em CFX considerando os efeitos magneto-hidrodinâmicos do fluxo de gás de proteção da soldagem tipo MIG/MAG e da concentração na atmosfera, considerando os efeitos da turbulência na distribuição do gás e da difusão dependentes da temperatura. Assim, demonstraram a influência do perfil de corrente e da turbulência sobre o fluxo do gás de proteção, assim como os efeitos da temperatura sobre a difusão. Nas análises realizadas por Schnick et al. [26] usando CFX, foram utilizadas combinações do modelo magnético-hidrodinâmico e do modelo de volume do fluido para a transferência de metal de adição, considerando o vapor do metal. Neste estudo demonstraram a influência das propriedades de difusão e radiação do vapor do metal e da taxa de evaporação relativa sobre a taxa de fornecimento de arame nos processos MIG.

Prasad e Narayanan [27] analisaram, por métodos numéricos, as temperaturas e as taxas de resfriamento, considerando refinamento de malha adaptativa, propriedades mecânicas não lineares dependentes da temperatura e os efeitos do calor latente, para a determinação das tensões residuais. Lindgren et al. [28] desenvolveram um algoritmo para a geração automática da malha de elementos finitos com elementos tetraédricos, para o processo de soldagem por feixe de elétrons. Com este procedimento, conseguiram obter com precisão os efeitos termomecânicos não lineares perto da fonte de calor em movimento. A seguir, Runnemalm e Hyun [29] resolveram com eficácia o problema dos longos tempos de simulação utilizando uma estratégia adaptativa de refinamento da malha na solda de juntas de topo em placas de aço inoxidável. Qingyu et. al. [30] compararam os resultados do campo de temperatura e as distribuições de deslocamentos e tensões durante o processo de soldagem analisados por métodos de elementos finitos com e sem malha adaptativa, obtendo respostas correspondentes com menor tempo computacional para o modelo com malha adaptativa. Um refinamento de malha adaptativo anisotrópico foi realizado por Hamide e Bellet [31][32] num esquema termomecânico-metalúrgico para o processo de soldagem TIG.

A comparação de diferentes métodos de simulação numérica simplificados para soldagem de uso industrial feita por Tikhomirov et al. [33], concluíram que o cálculo das distorções por métodos simplificados fornece uma boa aproximação e com um tempo de computação menor que o método dos elementos finitos. Shen [34] comparou os processos de soldagem de arco submerso com o Tandem - TIG com a técnica *Dynamically Controlled Low Stress No-Distortion* (DC-LSND) obtendo melhor micro-estrutura e menor tensão residual que o arco submerso. O uso do DC-LSND com T-TIG mostrou tendência a endurecer e fragilizar o material.

### **1.3.2. Simulação do Material.**

As pesquisas sobre simulações do material cobrem os aspectos do comportamento micro-estrutural como encruamento e tenacidade, transformação de fase e sua susceptibilidade em relação ao fenômeno da fratura a quente e a frio.

Para a solda por arco submerso Gunaraj e Murugan [35] desenvolveram modelos matemáticos para investigar os efeitos das variáveis do processo e do calor fornecido sobre vários aspectos metalúrgicos, como, largura da zona termicamente afetada, interface da solda, crescimento do grão e regiões de grãos refinados. Utilizando um modelo numérico baseado na termodinâmica dos processos irreversíveis, e considerando o acoplamento dos fenômenos térmicos, de transformação de fase e mecânico, Basto da Silva [36] apresentou uma metodologia que permite a previsão da distribuição das fases micro-estruturais e das tensões residuais após o processo de soldagem em materiais metálicos. Boumerzoug et al. [37] estudaram os efeitos da soldagem por arco elétrico sobre a micro-estrutura e propriedades mecânicas de aços com baixo carbono. Para atingir este objetivo foram usados testes de microscopia ótica, difração de retrodifusão de elétrons (*Electron Backscatter Diffraction* – EBSD), difração por raio-X e dureza. Diferentes zonas e algumas fases foram identificadas, assim como, novos fenômenos micro-estruturais foram observados através da técnica EBSD. Usando um modelo termomecânico validado, Ranjbarnodeh e Farajpour [38] investigaram a evolução das tensões e deformações em diferentes processos de soldagem TIG de aços de baixo carbono e aço inox. Os resultados mostraram que no aço de baixo carbono as deformações plásticas aumentam e a tensão de escoamento do metal base decresce, enquanto no aço inox se produzem as mais elevadas deformações plásticas em juntas similares.

Kasuya et al. [39] desenvolveram uma formulação de alta precisão para prever a máxima dureza da zona termicamente afetada e sua susceptibilidade à fratura considerando a temperatura de pré-aquecimento para soldagem. Khurshid e Mumtaz [40] verificaram o efeito de diferentes condições relativas de resistência entre o metal de base e de adição (*weld strength mismatch*), fazendo cálculos estáticos da resistência. Modelos experimentais também foram desenvolvidos para este estudo. Os resultados mostraram que se a resistência do metal base for semelhante a do material de adição, ou se a resistência do metal de adição for um pouco inferior ao longo do cordão de solda com penetração completa, aumenta a capacidade de resistência última da junta, assim como, a sua ductilidade. Além da resistência relativa dos metais base e de adição e das razões de penetração, também constataram que a geometria da solda e a preparação da junta têm influência na resistência da junta.

### **1.3.3. Simulação Estrutural.**

As simulações no campo estrutural, de maneira geral, incorporam os efeitos termomecânicos do aporte de calor na estrutura devido à soldagem, que incluem, entre outros problemas, as tensões residuais, as deformações permanentes e a perda da resistência devido à degeneração das propriedades do metal base próxima à ZTA.

Andersen [41], para minimizar as distorções, considerou malhas adaptativas no modelo numérico e validou por meio da comparação com dados experimentais, e analisou as distorções e tensões residuais em estruturas em grande escala. Adbi e Qarni [42], em suas análises, consideraram uma fonte dupla elipsoidal de Goldak para estudar o campo de temperaturas, as tensões residuais e distorções em soldas multi-passe. Biswas et al. [43] estimaram o campo de distorções em painéis reforçados soldados para analisar a influência da sequência de soldagem nas distorções. Deng et al. [44], baseados na teoria da deformação inerente e na formulação do elemento de interface, fizeram a previsão das distorções induzidas por soldagem numa estrutura com grandes dimensões e espessura reduzida. Akbarnejad [45] estudou os efeitos do procedimento da soldagem (calor de entrada, geometria da junta e metal de adição) sobre a resistência estática sob tensão uniaxial em aços de alta resistência numa análise de elementos finitos. Syahroni et al. [46] focaram nos efeitos da sequência da soldagem na distribuição de temperaturas, tensões residuais e distorções em juntas tipo T. Xu et al. [47] desenvolveram um modelo em elementos finitos para a predição das tensões residuais e distorções em ligas de alumínio

considerando a geometria da junta e a distribuição do fluxo de calor. Ziaee et al. [48], Schenk [49] e Ma et al. [50] estudaram a influência das restrições externas nas distorções de flambagem e tensões residuais produzidas na soldagem de duas chapas usando o método de elementos finitos em modelos 3D.

Hussain et al. [51], nas suas análises, consideraram grandes deflexões e diferentes taxas de absorção de calor com diferentes áreas de resfriamentos. Wang et al. [52] investigaram o comportamento da deformação de flambagem em estruturas soldadas de chapa fina utilizando elementos finitos e o método de deslocamento/deformação. Aplicaram método de aquecimento em linha para a redução das deformações por flambagem no processo MAG. Yang e Dong [53] investigaram os mecanismos associados às distorções por flambagem em estruturas soldadas de seção fina e aplicaram técnicas térmicas e mecânicas para a mitigação de distorções. Wang et al. [54] estudaram o comportamento da flambagem durante aquecimento e resfriamento em placas finas de aço de alta resistência, encontrando que a placa pode flambar devido à expansão térmica, sendo que depois do resfriamento apresenta uma distorção de flambagem residual. Michaleris et al. [55], Jung et al. [56] e Souto et al. [57] analisaram a influência da técnica das tensões térmicas transientes, concluindo que aplicadas distantes da linha de solda incrementam a resistência à flambagem e reduzem as distorções fora do plano.

Shah [58] desenvolveu uma pesquisa para avaliação da vida à fadiga de juntas soldadas de topo por meio do método dos elementos finitos e ensaios experimentais. Simulou um processo MAG para prever a distorção, as tensões residuais e o desenvolvimento das forças de retenção de pós-soldagem na junta soldada. Gannon [59] investigou resistência e comportamento do casco de um navio sobre os efeitos das tensões residuais e distorções num modelo transiente linear termo-estrutural, analisou o possível alívio de tensões por cargas cíclicas. Aygül [60], utilizando dados de testes de fadiga disponíveis na literatura, calculou as tensões com o método “hot spot” e “effective notch” utilizando elementos finitos e observou que elas podem diferir substancialmente, dependendo do tipo e dimensões dos elementos. Observou que aplicando métodos avançados para avaliação de vida à fadiga, estudado no trabalho junto com elementos finitos, obteve tensões com maior precisão incluindo efeitos de ampliação da tensão em detalhes soldados que são mais propensos à fadiga. Sumi et al. [61] estudaram a fratura frágil em placas grossas soldadas utilizadas em navios porta-contentores, considerando a

iniciação e propagação da trinca por fadiga, e sugeriram recomendações para evitar este tipo de fratura.

#### **1.3.4. Solução de Problemas Inversos.**

Kubo [10] apresentou uma visão geral dos problemas inversos no campo da mecânica, fratura de sólidos e estruturas. As dificuldades encontradas nas análises inversas são discutidas e métodos de solução são descritos. Também são sugeridos desenvolvimentos prospectivos em problemas inversos. Maniatty et al. [11] analisaram problemas inversos de corpos elásticos lineares bi-dimensionais para o cálculo de condições internas e de contorno para os quais alguns dados experimentais estejam disponíveis como deslocamentos ou deformações. Segundo os autores, o algoritmo desenvolvido foi capaz de prever com eficiência o número ótimo, o tipo e as localizações dos sensores, assim como o erro máximo permitido para uma solução numérica aceitável. Dennis et al. [62] apresentaram e demonstraram a aplicação do método dos elementos finitos na solução iterativa de problemas inversos para determinar condições de contorno desconhecidas e para o problema de encontrar a variação do módulo de elasticidade com a posição. Embora tenham obtido sucesso nos exemplos utilizados, concluíram que mais esforço deveria ser empreendido para estender este enfoque para objetos tridimensionais multi-conectados com medidas de erros realísticos de condições de contorno conhecidas.

Turco [12] fez uma revisão sobre as estratégias computacionais desenvolvidas para análise de problemas inversos, inclusive focando as dificuldades intrínsecas para sua solução. Mostra que este estudo possibilita uma escolha mais consciente de estratégias eficazes para o problema que se quer resolver. Problemas inversos novos e desafiadores são apontados, e discutindo profundamente alguns resultados atuais e clássicos delinea perspectivas para o futuro. Na mecânica dos sólidos existe uma grande quantidade de modelos constitutivos, devido à existência de uma diversidade de materiais com uma enorme variedade de observações físicas sob padrões de carregamentos. Todos estes modelos têm parâmetros do material, os quais são calibrados com dados experimentais de modo a descrever o comportamento do material em certa faixa de aplicação. Esta calibração é chamada de identificação dos parâmetros do material. Normalmente, isto é feito resolvendo o problema inverso usando dados de testes de tração, cisalhamento puro, tração bi-axial e compressão. Como estes testes são as bases para problemas com

geometrias e não linearidades físicas mais complexas, Hartmann e Gilbert [13] investigaram alguns destes problemas muito básicos considerando sua identificabilidade. O objetivo do estudo foi entender se alguns problemas levam a parâmetros não identificáveis.

Jarny et al. [63] desenvolveram uma formulação tridimensional para resolver o problema inverso em transferência de calor por condução como um problema geral de otimização aplicando o enfoque da equação adjunta acoplado ao algoritmo do gradiente conjugado. Mostraram que com esta técnica não é necessário ter informação a priori em relação às funções incógnitas a serem determinadas, e que os problemas envolvendo informações a priori são casos especiais do enfoque geral. Bai e Fujita [64] apresentaram uma técnica para solução de problemas inversos de condução de calor, onde a análise de sensibilidade é acoplada à formulação de elementos finitos, possibilitando a estimativa da temperatura e do fluxo de calor desconhecidos sobre a superfície desde que a temperatura seja dada em pontos discretos no sólido. O problema inverso na condução de calor é considerado como mal posto porque pequenas imprecisões nos erros na temperatura causam efeitos drásticos na temperatura e fluxo de calor previstos. Os efeitos da precisão das medidas, número e localização dos pontos de medição, passo de tempo e termos de regularização são discutidos pela comparação dos resultados obtidos pelo método dos autores e de soluções analíticas.

Chunli et al. [65] desenvolveram um procedimento para solução do problema inverso de condução de calor baseado em medidas termográficas da temperatura, o qual é baseado no método de correção unidimensional modificado junto com o método dos volumes finitos para solução de problemas inversos bi e tri-dimensional. Também investigaram o efeito do erro na medida da temperatura e o critério de parada das iterações, dentre outros aspectos, sobre os resultados do problema inverso. Centeno [7] aplicou métodos inversos em volumes finitos para o cálculo dos parâmetros de um processo de soldagem por fricção linear e da fonte de calor de distribuição desconhecida. Cângani [8] se propôs a desenvolver uma técnica para obtenção do fluxo de calor, perfil de temperatura e geometria da poça de fusão durante o processo de soldagem TIG em aço inoxidável. Para isto, o problema térmico é tratado como um problema inverso de transferência de calor com uma mudança de fase e dados experimentais referentes à temperatura da peça soldada e as dimensões da área fundida são usadas para validar o modelo térmico proposto. Além disso, o trabalho apresenta uma análise de erros inerentes

ao modelo térmico numérico e os dados experimentais. Pitter [20] forneceu critérios fundamentais para a otimização do cálculo de problemas de condução de calor por métodos inversos através da detecção dos conjuntos de parâmetros ótimos para o modelo. Min et al. [66] desenvolveram um algoritmo numérico que combina os métodos de Levenberg-Marquardt e de elementos finitos para a estimativa do coeficiente de difusão num problema inverso de condução de calor. Os coeficientes de difusão incógnitos são aproximados por uma forma polinomial e algoritmo desenvolvido é usado para encontrar a solução. Experimentos numéricos são apresentados para mostrar a eficiência do método proposto. Unnikrishnakurup [9] realizou investigação objetivando prever a evolução da forma da poça de fusão e os parâmetros da fonte Gaussiana na solda TIG utilizando métodos inversos. Karkhin et al. [67][68] apresentaram um algoritmo baseado no método de Gauss-Newton para obter os parâmetros desconhecidos da fonte de calor de vários processos de soldagem.

C. Mota et al. [69] determinaram o fluxo de calor imposto por um maçarico oxi-acetilênico utilizando a técnica de estimação de parâmetros e funções para análise inversa de Levenberg-Marquardt. Mostraram que o fluxo de calor não é constante no tempo, sendo maior no início do aquecimento e diminuindo com o avanço do tempo. C. Mota et al. [70] a partir de dados experimentais obtidos pelo aquecimento de um cilindro de grafite com maçarico oxi-acetilênico e a aplicação da abordagem Bayesiana de Monte Carlo com Cadeia de Markov (MCMC), implementada na forma do algoritmo de Metropolis-Hastings, determinaram de forma simultânea e com pequenos resíduos a capacidade de calor volumétrica, a condutividade térmica e o fluxo de calor. H. Orlande et al. [71] estimaram o fluxo de calor a partir de medições transientes feitas na superfície oposta à aplicação do calor em uma placa de aço. Utilizaram o método de Monte Carlo com Cadeia de Markov para problemas inversos tridimensionais não lineares de transferência de calor em processos de aquecimento com laser. Este modelo foi reduzido aplicando a formulação de parâmetros concentrados na espessura, conseguindo tempos quatro vezes menores que o modelo completo. H. da Fonseca et al. [72] analisaram dois processos de aquecimento, sendo um por diodo laser e o outro por resistência elétrica para a determinação da difusividade térmica e fonte de calor através de um enfoque nodal junto com o método de Monte Carlo com Cadeia de Markov (MCMC) para solução de problemas inversos. Em ensaio em placas finas de resina mediram as temperaturas com câmeras infravermelhas, e compararam os resultados obtidos com o MCMC e um método

de estimação por mínimos quadrados ordinários (OLS). O método MCMC conseguiu recuperar com precisão a difusividade térmica do material e a distribuição espacial da fonte de calor com um tempo computacional maior que o método OLS, além disso, o método MCMC obteve maior precisão no aquecimento elétrico.

C. Pacheco et al. [73] usando os sistemas concentrados, Filtro de Kalman (KF) e o modelo de aproximação de erros, resolveram o problema inverso para estimar o fluxo de calor, dependente da posição e do tempo, aplicado na superfície superior de uma placa plana fina. Na superfície inferior da placa plana são medidas as temperaturas transitórias. O modelo reduzido de parâmetros concentrados para a análise térmica é linear e bidimensional. Conseguiram mostrar que é possível resolver problemas inversos complexos usando modelos reduzidos obtendo pequenos resíduos de temperatura e determinando com precisão as variações espaciais e temporais do fluxo de calor imposto. C. Pacheco et al. [74] apresentaram uma metodologia que permite quantificar o fluxo de calor de alta magnitude em tempo real aplicado sobre pequenas regiões na superfície de uma placa. Com esta metodologia é possível determinar o fluxo de calor com a medição das temperaturas na superfície oposta da placa e o uso de uma versão em estado estacionário do método do Filtro de Kalman (SSKF). Com esta técnica analisaram dois casos de testes, com uma fonte de calor e duas fontes de calor. Os resultados obtidos mostraram que se conseguiu recuperar os fluxos de calor concentrados com precisão e menor tempo computacional em relação ao método KF clássico. H. da Fonseca et al. [75] estimaram o fluxo de calor imposto à superfície de uma placa fina por um diodo laser, com medições da temperatura por termografia infravermelho, usando duas implementações do Filtro Kalman para soluções de problemas inversos. O primeiro corresponde ao Filtro Kalman Clássico com uma estratégia nodal (CKF) e o segundo usa o estado estacionário do Filtro de Kalman (SSKF). A comparação das duas implementações exibe resíduos de temperatura pequenos conseguindo recuperar as funções senoidais e de passos, e a amplitude imposta pelo diodo laser. O método SSKF apresentou computação mais rápida que o CKF.

S. Ribeiro et al. [76] aplicaram o método de Transferência com Base na Função de Green (TFBGF) para a determinação da fonte de calor em movimento diretamente das temperaturas calculadas por um modelo analítico 3D. A partir do conhecimento do perfil de temperaturas e da função de transferência de calor por condução, é possível estimar o fluxo de calor por um procedimento inverso da Transformada Rápida de Fourier (IFFT)

com boa concordância. E. dos Santos Magalhães et al. [77] apresentaram uma técnica chamada Regularização de Viagem no Tempo (TTR) aplicada à técnica de otimização da Secção Dourada para solucionar problemas mal postos de transferência de calor por condução. Na validação da técnica proposta foram realizados experimentos controlados para medição das temperaturas. Os experimentos foram modelados unidimensional e tridimensionalmente para a determinação do fluxo de calor por soluções de problemas inversos. Os resultados obtidos com o método TTR foram comparados com o método da Função Especificada Sequencial (SFSM) conseguindo boa concordância com os valores experimentais e apresentando menores resíduos que o método SFSM. E. dos Santos Magalhães et al. [78] analisaram a influência da distribuição volumétrica do fluxo de calor em um problema inverso de transferência de calor aplicado na simulação da soldagem a laser comparando diferentes modelos de distribuição de calor. A Regularização de Viagem no Tempo (TTR) é aplicada com o método de otimização da Secção Dourada para estimar o fluxo de calor nos casos estudados em problemas de difusão tridimensional. Os resultados foram comparados com os modelos da literatura, e a metodologia provou ser uma ferramenta alternativa para prever o perfil do cordão de solda e a eficiência térmica na soldagem laser de baixa penetração. A. Fernandes et al. [79] aplicou o método da função de Transferência com Base nas Funções de Green (TFBGF) e adicionou o método de regularização do filtro de média móvel para melhorar a instabilidade produzida pelas incertezas experimentais inerentes. Estimaram o fluxo de calor desconhecido em um modelo térmico tridimensional transiente conseguindo concordância com as temperaturas experimentais, com isso demonstraram a robustez e capacidade da técnica TFBGF com regularização.

Fica claro da literatura acima mencionada que nas simulações numéricas dos processos de soldagem os erros gerados na determinação das principais grandezas de interesse, como distorções geométricas e tensões residuais, podem ser significativos. Estes erros podem ser originados por incertezas na representação da fonte de calor, onde os parâmetros para sua descrição estão mal definidos por descuido ou pela falta de calibração para o problema específico que se quer resolver. Outro motivo de imprecisões pode-se atribuir à descrição deficiente de propriedades físicas do material variando com a temperatura.

Evidentemente, se na simulação de um problema termomecânico a representação da distribuição da fonte de calor sobre o sólido tiver pouca aderência com a realidade, o

campo de temperaturas determinado pelo modelo poderá ter a sua acuidade extremamente prejudicada. Estas incorreções com certeza também repercutirão sobre as variáveis mecânicas.

É sabido que entre as propriedades físicas dos materiais a que mais influencia os resultados das simulações termomecânicas em termos das distorções geométricas é a tensão de escoamento do material variando com a temperatura ([5] e [6]). Assim, é dispensável argumentar sobre a importância de se definir a tensão de escoamento com precisão em diferentes temperaturas para obtenção das distorções ou deslocamentos com acurácia. Devido às dificuldades de se realizar os ensaios para determinação da tensão de escoamento de um material em diversas temperaturas, principalmente em elevadas temperaturas, em aplicações para a predição das distorções de soldagem não é incomum encontrar a utilização de valores nominais da tensão de escoamento dependentes da temperatura ou mesmo o emprego de valores correspondentes a materiais semelhantes dados na literatura.

Existem várias iniciativas na literatura que procuram melhorar a acurácia do campo de temperaturas por meio da solução de problemas inversos de transferência de calor por condução, visando determinar os parâmetros da fonte de calor em problemas de soldagem. As técnicas para a solução de problemas mecânicos inversos vêm sendo utilizadas junto com métodos numéricos, como diferenças e volumes finitos, e com menor frequência o método dos elementos finitos, para determinação das condições de contorno e propriedades mecânicas do material, quando o carregamento envolve forças externamente aplicadas. A proposta desta tese é desenvolver uma metodologia empregando o método dos elementos finitos junto com o algoritmo de Levenberg-Marquardt para solução do problema inverso de condução de calor para determinação dos parâmetros da fonte de calor, visando estabelecer o campo de temperaturas com maior precisão. Utilizando uma metodologia semelhante soluciona-se o problema mecânico inverso, tendo como carregamento o campo de temperaturas estabelecido anteriormente. Como resultado determina-se a função da tensão de escoamento variando com a temperatura de tal modo que as distorções geométricas calculadas representem com acurácia os valores medidos.

# Capítulo 2

## Aspectos Teóricos para a Análise

### Termomecânica

Neste Capítulo, será apresentada a base teórica para a modelagem do processo de aquecimento e/ou soldagem de um sólido, tendo em conta as limitações e restrições inerentes ao conhecimento dos fenômenos complexos que ocorrem em altas temperaturas.

#### 2.1. Modelo de Análise Termomecânico.

Na análise térmica o objetivo é o cálculo do campo de temperaturas, sendo necessário para isto estabelecer a equação de transferência de calor que governa o estudo térmico em sólidos, junto com as condições de contorno. A solução das equações diferenciais correspondentes, é realizada pela discretização do domínio do problema empregando o método dos elementos finitos. Na análise mecânica, para se obter o campo de deslocamentos e/ou o campo de tensões o modelo de elementos finitos exige o estabelecimento das equações de equilíbrio, das equações de compatibilidade e das equações constitutivas (termo-elasto-plásticas), que junto com o campo de temperaturas obtidos na análise térmica, estabelecem as condições para se determinar a solução do problema.

##### 2.1.1. Acoplamentos na Análise Termomecânica.

Nos processos de soldagem de uma estrutura metálica, por exemplo, uma porção limitada é aquecida com uma fonte de calor concentrada até a fusão do material, como visto anteriormente, neste processo termomecânico existem interferências e acoplamentos entre os fenômenos físicos envolvidos. Caracterizando resumidamente o acoplamento termomecânico, se pode dizer que a expansão térmica que depende da temperatura gera deformações, e que ao mesmo tempo as deformações produzem calor e alteram as condições de contorno térmicas. Também pode ser definido que na interferência térmica-micro-estrutural as transformações de fase dependem da temperatura e, no sentido contrário, o calor latente pode estar associado à transformação

de fase. No acoplamento mecânico-micro-estrutural as deformações são afetadas pela mudança de volume provocada pela transformação de fase e, por outro lado, as deformações influenciam a transformação de fase [17][14].

Para aços ferríticos em que suas propriedades físicas podem ter significativas alterações devido à transformação de fase no estado sólido, é importante considerar as modificações micro-estruturais (térmica e mecânica) na análise termomecânica. Quando o material é um aço austenítico é possível desprezar os efeitos micro-estruturais e levar em conta apenas o acoplamento termomecânico [80].

Uma hipótese bastante razoável na maioria dos casos práticos de aquecimento/soldagem é admitir que as deformações mecânicas não alteram o estado de temperatura, já que o calor gerado pela fonte é muito maior que o proveniente das deformações, então podendo ser desconsiderado. Neste caso, a simulação pode ser realizada de maneira separada e sequencial, denominado método de transferência de carga ou método sequencialmente acoplado. Neste método a análise térmica é inicialmente executada com o objetivo de se obter a distribuição das temperaturas, a qual é tomada como um carregamento variando no tempo na análise estrutural.

Quando o estado de temperatura for alterado pelo estado de deformações, o equacionamento deve integrar a parte térmica e mecânica desenvolvendo um modelo de análise único contemplando este tipo de acoplamento [81], o qual é denominado método direto ou método completamente acoplado.

## **2.2. Modelo de Análise Térmica.**

A análise térmica tem por objetivo determinar o campo de temperatura sobre um corpo ao qual se aplica uma fonte de calor, por exemplo, soldagem ou corte por chama oxi-acetilênica. A teoria básica de transferência de calor mostra que este fenômeno é governado pela equação de Fourier. As primeiras aplicações desta equação em processos de soldagem, fonte de calor em movimento, foram atribuídas a Rosenthal e Rykalin no final dos anos 1930 e início dos anos 1940, mas para obter a solução analítica admitiram algumas hipóteses simplificadoras. As principais dificuldades da solução analítica para a soldagem estão associadas às condições de contorno, à complexidade na descrição da fonte de calor, à dependência das propriedades físicas com a temperatura.

### 2.2.1. Equações Básicas do Fluxo de Calor.

transferência de calor por condução dependente do tempo é expressa pela seguinte equação diferencial [2] :

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}_G \quad (2.1)$$

onde,  $c$  é o calor específico,  $[J/kg]$ ,  $\rho$  é a densidade do material,  $[kg/m^3]$ ,  $\dot{Q}_G$  calor gerado no interior do sólido por unidade volume por unidade de tempo  $[J \cdot ^\circ C/s \cdot m^3]$ ,  $\lambda$  é o coeficiente de condutividade térmica,  $[J/m \cdot s \cdot ^\circ C]$ ,  $(x,y,z)$  são as coordenadas cartesianas,  $T$  é a temperatura  $[^\circ C]$  e  $t$  o tempo  $[s]$ .

Devido às dificuldades descritas anteriormente para se determinar a solução analítica da equação (2.1), a alternativa numérica de elementos finitos aparece como uma ferramenta robusta, e tem se mostrado muito eficiente e capaz de obter soluções aproximadas com boa acurácia em relação a resultados experimentais, para os mais complexos problemas.

### 2.2.2. Equação de Governo.

A análise numérica do fluxo de calor é essencialmente a solução da equação (2.1) para uma dada condição inicial e condição de contorno. Reescrevendo na forma matricial a equação diferencial (2.1) para a condução de calor de um sólido homogêneo, dada pela lei de Fourier do balanço energético, tem-se:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} + \{L\}^T \{q\} = \dot{Q}_G \quad (2.2)$$

onde:

$\{L\}$  : vetor coluna operador gradiente.

$$\{L\}^T = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]$$

$\{q\}$  : fluxo de calor por condução

$$\{q\} = -[D]\{L\}^T$$

$[D]$  : matriz condutividade

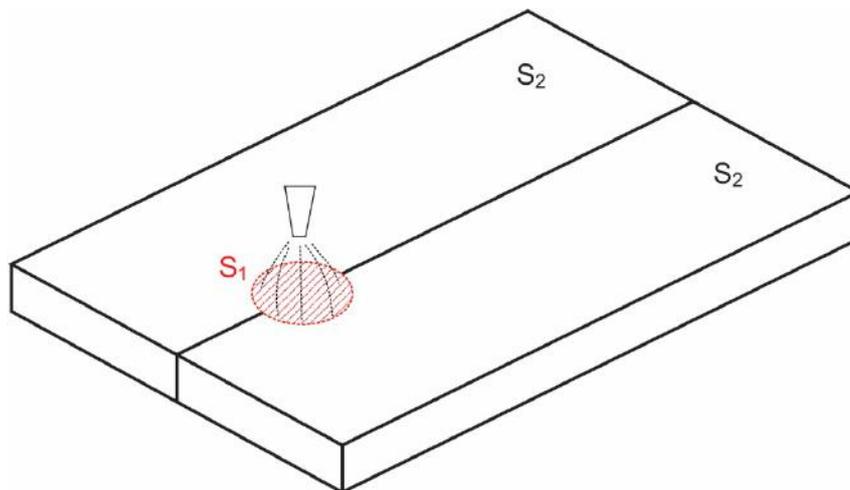
$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_z \end{bmatrix}$$

$\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ : condutividade térmica

### 2.2.3. Condição de Temperatura Inicial e de Contorno.

Imaginemos duas superfícies na peça de trabalho como é mostrado na *Figura 2.1*, a superfície  $S_1$  (em vermelho) representa a região onde é aplicada a fonte de calor, e a superfície  $S_2$  as regiões restantes.

A condição de temperatura inicial é definida em ambas superfícies  $S_1$  e  $S_2$ . Para desenvolver a primeira condição de contorno, como para a segunda, será usado o balanço de energia nas superfícies de troca  $S_1$  e  $S_2$ .



**Figura 2.1.** Peça de trabalho.

#### a) Condição de temperatura inicial:

A condição de temperatura inicial se refere à temperatura do sólido antes de ser aquecido, e normalmente é tomada igual à temperatura do ambiente em que está inserido, ou seja:

$$T = T_{\infty}, \text{ para o tempo } t = 0 \quad (2.3)$$

onde,  $T$  é a temperatura instantânea do sólido e  $T_{\infty}$  é a temperatura ambiente.

### b) Primeira condição de contorno

O fluxo de calor que age sobre a superfície  $S_1$ , está dado por:

$$q_n = -q_{sup} \quad (2.4)$$

$q_n$  : representa a componente do vetor fluxo de calor por condução normal à superfície de troca.

$q_{sup}$  : representa o fluxo de calor fornecido à superfície de troca, pela fonte de calor externa.

$$q_n = \{q\}^t \cdot \{n\}, \text{ para } t > 0 \quad (2.5)$$

onde,  $\{n\}$  é o vetor unitário normal à superfície de troca.

$$\{n\} = [l \quad m \quad n]$$

$l, m, n$  : componentes do vetor unitários nas direções  $x, y$  e  $z$ , respectivamente.

### c) Segunda condição de contorno

Na análise de transferência de calor onde a condução de calor é utilizada, a perda de calor por convecção e radiação para o ambiente pode ser introduzida como condição de contorno. O fluxo de calor por unidade de área devido à convecção é descrito pela lei de Newton do resfriamento, enquanto o fluxo de calor devido à radiação é derivado da lei de Stefan-Boltzmann. Somando-se as perdas de calor ( $q_{per}$ ) devido à convecção e radiação sob toda a superfície de troca  $S_2$  [82], têm-se:

$$q_n = q_{per} \text{ ou } \{q\}^T \{n\} = -h_f (T - T_\infty), \text{ para } t > 0 \quad (2.6)$$

onde,

$h_f$  : coeficiente combinado de convecção e radiação.

#### 2.2.4. Equação de Governo do Modelo de Elementos Finitos.

O sistema de equações acima descrito pode ser resolvido desde que se execute uma apropriada discretização espacial e temporal. Para isso se aplica o na forma residual ponderada para equações transientes. A representação de Galerkin das equações (2.2), para o domínio do problema, é:

$$\int_{\forall} N_i \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \dot{Q}_G - c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] d\forall = 0 \quad (2.7)$$

onde,

$N_i$  : funções de forma.

$i$  : representa os nós

$\forall$  : volume de controle do elemento diferencial

As condições de contorno descritas nas equações (2.5) e (2.6) podem ser reescritas:

$$\begin{aligned} & \int_{S_1} N_i \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) l \cdot dS_1 + \int_{S_1} N_i \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) m \cdot dS_1 + \int_{S_1} N_i \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) n \cdot dS_1 \\ & = - \int_{S_1} N_i q_{sup} \cdot dS_1 \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{S_2} N_i \left( \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) l \cdot dS_2 + \int_{S_2} N_i \left( \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) m \cdot dS_2 + \int_{S_2} N_i \left( \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) n \cdot dS_2 \\
& = - \int_{S_2} N_i h_f (T - T_\infty) \cdot dS_2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Empregando a integração por partes sobre os três primeiros termos da equação (2.7), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\forall} \left[ \lambda_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - N_i \dot{Q}_G - N_i c \rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] d\forall \\
& + \int_{S_1+S_2} N_i \lambda_x \frac{\partial T}{\partial x} l \cdot d(S_1 + S_2) + \int_{S_1+S_2} N_i \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y} m \cdot d(S_1 + S_2) \\
& + \int_{S_1+S_2} N_i \lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} n \cdot d(S_1 + S_2) = 0
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Note que os três termos finais da equação (2.10) podem ser substituídos pelas equações (2.8) e (2.9), resultando em:

$$\begin{aligned}
& - \int_{\forall} \left[ \lambda_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial T}{\partial z} - N_i \dot{Q}_G - N_i c \rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] d\forall \\
& - \int_{S_1} N_i q_{\text{sup}} \cdot dS_1 - \int_{S_2} N_i h_f (T - T_\infty) \cdot dS_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Usando as mesmas equações de interpolação para a temperatura, têm-se:

$$T(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) T_i(t) \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial T(x, y, z, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \frac{\partial T_i(t)}{\partial t} \tag{2.13}$$

onde,  $n$  é o número total de nó sem um elemento.

Substituindo a aproximação das equações (2.12) e (2.13), a equação (2.11) fica:

$$\begin{aligned}
& -\int_{\forall} \left[ \lambda_x \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j(t) + \lambda_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j(t) + \lambda_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} T_j(t) \right] d\forall + \\
& \int_{\forall} \left[ N_i \dot{Q}_G + N_i c \rho N_j \frac{\partial T_j(t)}{\partial t} \right] d\forall - \int_{S_1} N_i q_{sup} \cdot dS_1 - \int_{S_2} N_i h_f (T_e(t) - T_\infty) \cdot dS_2 = 0
\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde,

$T_i(t)$  : temperaturas nodais dependentes do tempo.

$i, j$  : representam os nós

A equação (2.14) pode ser escrita na forma matricial. Tendo em conta que a densidade  $\rho$  é assumida constante, temos:

$$\begin{aligned}
& \rho \int_{\forall} c [N][N]^T d\forall \{ \dot{T}_e \} + \int_{\forall} [B]^T [D][B] d\forall \{ T_e \} = \int_{S_1} [N]^T q_{sup} dS_1 \\
& + \int_{S_2} T_\infty [N]^T h_f dS_2 - \int_{S_2} h_f [N][N]^T dS_2 \{ T_e \} + \int_{\forall} [N]^T \dot{Q}_G d\forall
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$[B] = \{L\} [N]^T$  : matriz gradiente térmica.

$[N]$  : matriz função de forma.

$\{T_e\} = \{T_i \quad \dots \quad T_n\}$  : vetor temperaturas nodais do elemento.

$$\{ \dot{T}_e \} = \left\{ \frac{\partial T_i}{\partial t} \quad \dots \quad \frac{\partial T_n}{\partial t} \right\}$$

A equação (2.15) para cada elemento que compõe o corpo discretizado, pode ser reescrita na forma condensada, como:

$$[C_e^t] \{ \dot{T}_e \} + ([K_e^{th}] + [K_e^{tc}]) \{ T_e \} = \{ Q_e^f \} + \{ Q_e^c \} + \{ Q_e^G \} \tag{2.16}$$

onde,

$$\begin{aligned} \{ \dot{T}_e \} & \quad : \text{vetor variação da temperatura com o tempo do} \\ & \quad \text{elemento.} \\ \{ T_e \} & \quad : \text{vetor temperatura do elemento.} \\ [C_e^t] = \rho \int_{\forall} c [N][N]^T d\forall & \quad : \text{matriz calor específico do elemento.} \\ [K_e^{th}] = \int_{\forall} [B]^T [D][B] d\forall & \quad : \text{matriz de condutividade térmica do elemento.} \\ [K_e^{tc}] = \int_{S_2} h_f [N][N]^T dS_2 & \quad : \text{matriz de superfície de convecção do elemento.} \\ \{ Q_e^f \} = \int_{S_1} [N] q_{sup} dS_1 & \quad : \text{vetor fluxo de calor na superfície } S_1 \text{ do elemento.} \\ \{ Q_e^c \} = \int_{S_2} h_f T_{\infty} [N][N]^T dS_2 & \quad : \text{vetor fluxo de calor na superfície de convecção do} \\ & \quad \text{elemento.} \\ \{ Q_e^G \} = \int_{\forall} [N] \dot{Q}_G d\forall & \quad : \text{vetor carregamento de geração de calor do elemento.} \end{aligned}$$

### 2.3. Análise Mecânica.

Na análise mecânica, o campo de temperaturas encontrado na análise térmica é introduzido como uma carga térmica no modelo estrutural. O cálculo das deformações e tensões térmicas é feito em intervalos de tempo eo material segue o critério de escoamento de von Mises.

A equação básica do modelo de elementos finitos da análise mecânica é obtida através das três equações fundamentais da análise estrutural: de equilíbrio, relações deformação-deslocamento e relações tensão-deformação (equação termo-elastoplástica) [83]. Esta análise é descrita abaixo.

#### 2.3.1. Equação de Equilíbrio.

Em um instante qualquer, durante o aquecimento da chapa, as deformações térmicas resultantes das distribuições de temperatura não linear geram deformações mecânicas, que levam a deformações plásticas incrementais se ocorrer o escoamento do material. As deformações plásticas incrementais se acumulam ao longo dos períodos de aquecimento e resfriamento. Após a conclusão dos ciclos térmicos produzido pelo processo de aquecimento, as deformações plásticas acumuladas interagem com o

enrijecimento de soldagem e a rigidez conjunta, resultando no estado final de tensões residuais e distorção da soldagem [84].

Em cada instante do processo da soldagem as tensões produzem forças em uma dada seção que tendem a equilibrarem-se, então, as forças, que acontecem durante todo o ciclo de soldagem serão nulas, isto é:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.17)$$

Sendo  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  as componentes do tensor de tensões e  $f_i$  as componentes do vetor forças aplicadas ao corpo.

### 2.3.2. Relações Deformação-Deslocamento.

Uma deformação será fisicamente possível se é compatível com um determinado campo de deslocamentos, ou seja, se as seguintes relações para as componentes do tensor deformações são cumpridas:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.18)$$

$\varepsilon_{ij}$  : componentes do tensor de deformações.

$u_i$  : componente do vetor de deslocamentos do corpo.

### 2.3.3. Relações Tensão-Deformação (Termo-Elasto-Plástico).

O modelo termo-elasto-plástico para a material base no processo, é baseado no critério de von Mises. As relações entre tensões e deformações do modelo podem ser escritas da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^{ep} (\sigma_{kl}) + \alpha_{kl} \Delta T \quad (2.19)$$

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl}^{ep} (\varepsilon_{kl} - \alpha_{kl} \Delta T) \quad (2.20)$$

$C_{ijkl}^{ep}$  : componentes da matriz de flexibilidade elasto-plástica do corpo

$D_{ijkl}^{ep}$  : componentes da matriz de rigidez elasto-plástica do corpo

$\alpha_{kl}$  : componente do vetor expansão térmica.

#### 2.3.4. Equação Básica do Modelo de Elementos Finitos.

A forma matricial incremental da equação (2.20), modelo termo-elasto-plástico adotado, é [85]:

$$\{\sigma\} = [D^{ep}] \{\varepsilon\} - \{C^{th}\} \Delta T \quad (2.21)$$

$$[D^{ep}] = [D^e] + [D^p]$$

$$\{C^{th}\} = [D^{ep}] \{\alpha\}$$

onde:

$\{\sigma\}$  : vetor tensão.

$\{\varepsilon\}$  : vetor deformação.

$[D^e]$  : matriz de rigidez elástica.

$[D^p]$  : matriz de rigidez plástica.

$\{C^{th}\}$  : vetor de rigidez por carregamento térmico.

$\{\alpha\}$  : vetor coeficiente de expansão térmica.

$\Delta T$  : variação da temperatura.

De acordo com o princípio dos trabalhos virtuais multiplica-se a equação (2.17) por a função de prova  $\delta u$  e integrando no volume ( $\forall$ ):

$$\int_{\forall} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\forall + \int_{\forall} f_i \delta u_i d\forall = 0 \quad (2.22)$$

O primeiro termo da esquerda da equação (2.22) pode ser escrito:

$$\int_{\forall} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\forall = \int_{\forall} (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} d\forall - \int_{\forall} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\forall \quad (2.23)$$

Aplicando o teorema da divergência à equação (2.23), obtemos:

$$\int_{\forall} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\forall = \int_A \sigma_{ij} n_j \delta u_i dA - \int_{\forall} \sigma_{ij} \delta u_{i,j} d\forall \quad (2.24)$$

As equações de equilíbrio na superfície, comumente chamados condições de contorno de tensão são definidos como:

$$\sigma_{ij} n_j = P_i \quad (2.25)$$

Sendo  $n_j$  são as componentes do vetor normal unitário  $\{n\}$  à superfície do corpo onde é aplicada as tensões de contorno  $\{P\}$  cujos componentes são  $P_i$ .

Substituindo a equação (2.25) e considerando a simetria do tensor de tensões  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  a equação (2.24) pode ser transformada em:

$$\int_{\forall} \sigma_{ij,j} \delta u_i d\forall = \int_A P_i \delta u_i dA - \int_{\forall} \sigma_{ij} \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) d\forall \quad (2.26)$$

Da equação (2.18) obtemos:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \quad (2.27)$$

Introduzindo as equações (2.26) e (2.27) na equação (2.22) obtemos:

$$\int_{\forall} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\forall = \int_A P_i \delta u_i dA + \int_{\forall} f_i \delta u_i d\forall \quad (2.28)$$

Na sua forma matricial:

$$\int_{\forall} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} d\forall = \int_A \{\delta u\}^T \{P\} dA + \int_{\forall} \{\delta u\}^T \{f\} d\forall \quad (2.29)$$

$\{\delta \varepsilon\}$  : vetor de deformações virtuais.

$\{\delta u\}$  : vetor de deslocamentos virtuais.

$\{P\}$  : vetor de forças de superfície.

$\{f\}$  : vetor de forças de corpo.

Discretizando a equação (2.18) das relações deformação deslocamento, que na forma matricial fica:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U_e\} \Rightarrow \{\delta \varepsilon\} = [B]\{\delta U_e\} \quad (2.30)$$

$$\{u\} = [N]\{U_e\} \Rightarrow \{\delta u\} = [N]\{\delta U_e\} \quad (2.31)$$

$$[B] = \{L\}[N]^T \quad (2.32)$$

$\{U_e\}$  : vetor de deslocamentos nodais do elemento.

$[B]$  : matriz deformação – deslocamento baseado nas funções de forma do elemento.

$\{L\}$  : vetor operador diferencial

$[N]$  : vetor função de forma

Substituindo as equações (2.30) a (2.32) na equação (2.29), tem-se:

$$\int_{\forall} [B]^T \{\sigma\} d\forall = \int_A [N]^T \{P\} dA + \int_{\forall} [N]^T \{f\} d\forall \quad (2.33)$$

Substituindo a equação (2.30) na equação (2.21):

$$\{\sigma\} = [D^{ep}] [B] \{U_e\} - \{C^{th}\} \Delta T \quad (2.34)$$

Discretizando a variação de temperatura:

$$\Delta T = [N]^T \{\Delta T_e\} \quad (2.35)$$

$\{\Delta T_e\}$  : vetor variação das temperaturas nodais do elemento.

Considerando a equação (2.34) e (2.35) na equação (2.33) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\forall} [B]^T [D^{ep}] [B] d\forall \{U_e\} - \int_{\forall} [B]^T \{C^{th}\} [N]^T \{\Delta T_e\} d\forall \\ & = \int_A [N]^T \{P\} dA + \int_{\forall} [N]^T \{f\} d\forall \end{aligned} \quad (2.36)$$

Finalmente a equação (2.36) pode ser escrita:

$$[K_e] \{U_e\} - [K_e^{th}] \{\Delta T_e\} = \{F_e^{nd}\} + \{F_e^{pr}\} \quad (2.37)$$

$[K_e] = \int_{\forall} [B]^T [D^{ep}] [B] d\forall$  : matriz de rigidez do elemento.

$[K_e^{th}] = \int_{\forall} [B]^T \{C^{th}\} [N]^T d\forall$  : matriz de rigidez térmica do elemento.

$\{F_e^{nd}\} = \int_{\forall} [N]^T \{f\} d\forall$  : vetor forças nodais aplicadas do elemento.

$\{F_e^{pr}\} = \int_A [N]^T \{P\} dA$  : vetor forças superficiais do elemento

A partir do momento em que as funções dos deslocamentos nodais são não lineares na análise elasto-plástica, é necessário que os cálculos sejam feitos a partir da análise incremental. A equação (2.30) na forma incremental para um passo de tempo  $m+1$  pode ser escrito da seguinte forma:

$${}^{m+1}[K_e]\{\Delta U_e\} - {}^{m+1}[K_e^{th}]\{\Delta T_e\} = \{\Delta F_e^{nd}\} + \{\Delta F_e^{pr}\} \quad (2.38)$$

### 2.3.5. Plasticidade.

A teoria da plasticidade é a teoria matemática das deformações irreversíveis independentes do tempo. A teoria da plasticidade é usada para calcular deformações permanentes de estruturas, para prever o colapso plástico de estruturas, investigar estabilidade, calcular as forças requeridas para as operações de conformado de metais, etc. [86].

Para uma aplicação conveniente no estudo da teoria da plasticidade, o tensor de tensões é dividido em duas partes; o tensor de tensões desviador  $s_{ij}$  e o tensor de tensões hidrostático  $p_{ij}$ . Então:

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + p_{ij} = s_{ij} + \sigma_m \delta_{ij} \quad (2.39)$$

O tensor de tensões hidrostático  $p_{ij}$  é o tensor cujos componentes são  $\sigma_m \delta_{ij}$ :

$$p_{ij} = \sigma_m \delta_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

onde  $\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$  é a tensão média.

O tensor de tensões desviador pode ser escrito:

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - p_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} = \sigma - \frac{1}{3} Tr(\sigma) \mathbf{I} \quad (2.41)$$

$\sigma$  : tensor de tensões.

$\sigma_1, \sigma_2$  e  $\sigma_3$  : tensões principais

### 2.3.6. Termo Plasticidade.

A teoria de termo-plasticidade é a parte da teoria de plasticidade que estuda os problemas que envolvem carregamentos plásticos com mudanças da temperatura. Quando o material está no estado plástico, o incremento total da deformação  $d\varepsilon$  é composta pelo incremento da deformação elástica  $d\varepsilon^e$ , a deformação plástica  $d\varepsilon^p$  e a deformação térmica  $d\varepsilon^{th}$ , expressada da seguinte forma:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p + d\varepsilon^{th} \quad (2.42)$$

Na equação constitutiva termo-elasto-plástica do modelo de elementos finitos expressa na equação (2.21), a matriz de rigidez elasto-plástica  $[D^{ep}]$  pode ser dividida em uma parcela elástica e outra plástica, as quais podem ser consideradas em separado. Os aspectos principais a serem considerados no comportamento plástico são descritos a seguir:

- a) Critério de escoamento: Também conhecido como teoria de escoamento, define o estado limite entre as deformações elásticas e plástica ou frágeis nos materiais.

Seja  $f$  a função de escoamento tal que  $f = 0$  representa o critério de escoamento. Para materiais isotrópicos: a função de escoamento  $f$  é independente da tensão hidrostática, ficando só expressa em termos do tensor desviador  $s$ . Então:

$$\begin{aligned} f < 0 &: \text{deformação elástica} \\ f = 0 &: \text{deformação plástica} \end{aligned} \quad (2.43)$$

Os critérios para definir a função de escoamento do material mais representativos são von Mises e Tresca.

*Critério de Tresca*, assume-se que a tensão máxima de cisalhamento governa o escoamento do material. Em outras palavras quando o valor máximo de cisalhamento atinge um valor específico  $C$  o material escoará. O modelo matemático deste critério é:

$$\tau_{\max} = C \quad (2.44)$$

A tensão máxima de corte em função das tensões principais  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , é:

$$\tau_{\max} = \max \left[ |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2| \right] \quad (2.45)$$

A função de escoamento segundo o critério de Tresca é definida como

$$f = \sigma_e - \sigma_y = \max \left[ |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2| \right] - \sigma_y \quad (2.46)$$

onde

$\sigma_e$  : tensão equivalente.

$$\sigma_e = \max \left[ |\sigma_1 - \sigma_3|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_2| \right] = \tau_{\max}$$

$\sigma_y$  : tensão de escoamento do material

*Critério de von Mises*, é baseado na suposição que o escoamento inicia quando a energia elástica de distorção atinge um valor crítico. A formula matemática para a tensão equivalente de von Mises é:

$$\sigma_e = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (2.47)$$

A função de escoamento segundo o critério de von Mises é definida como

$$f = \sigma_e - \sigma_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} - \sigma_y \quad (2.48)$$

- b) Regra de escoamento: Descreve o incremento de deformação plástica quando ocorre o escoamento, supondo que isto se dá na direção normal à superfície de escoamento no ponto de carga. A formulação em termos da função de escoamento  $f$  é como segue

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} \text{ ou } \dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma} \quad (2.49)$$

onde:

$\frac{\partial f}{\partial \sigma}$  : direção do incremento plástico

$d\lambda$  : multiplicador plástico

- c) Lei de encruamento: Encruamento é uma propriedade dos materiais caracterizada pelo endurecimento do material que acontece com sua deformação plástica. Para as análises numéricas onde é aplicado calor como carregamento para a obtenção das deformações e/ou tensões residuais, comumente, pode ser utilizado um dos três modelos (lei de encruamento) dados a seguir:

*Encruamento isotrópico*: baseia-se na hipótese que a superfície de escoamento mantém sua forma, centro e orientação, mas pode se expandir ou contrair uniformemente em torno de seu centro no espaço de tensão, conforme mostrado na *Figura 2.2 (a)*. É expresso matematicamente da seguinte forma:

$$f(\sigma, \bar{\varepsilon}_n^p) = \sigma_e - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p) = 0 \quad (2.50)$$

onde  $\sigma_y(p)$  pode ser escrito como:

$$\sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p) = \sigma_{y0} + r(\bar{\varepsilon}_n^p) \quad (2.51)$$

sendo,  $\sigma_{y0}$  a tensão de escoamento inicial,  $r(\bar{\varepsilon}_n^p)$  a função de encruamento isotrópico e  $\bar{\varepsilon}_n^p$  a deformação plástica acumulada.

O encruamento isotrópico implica que se as tensões de escoamento em tração e compressão são inicialmente iguais, elas permaneceram iguais conforme a superfície de escoamento se desenvolve com a tensão plástica, isto tende a superestimar o tamanho da região elástica do carregamento inverso. Como pode ser visto na *Figura 2.2 (d)*, o ponto B é a tensão de escoamento no carregamento direto, o ponto E e a linha vermelha representam a tensão de escoamento e o comportamento do carregamento inverso, respectivamente. No entanto, a teoria de encruamento isotrópico é comumente usada para simulações de solda devido ao conjunto de testes facilmente conduzidos necessários para a calibração do modelo[87]. A função de escoamento com critério de von Mises e lei de encruamento isotrópico pode ser escrita em termos do tensor desviador:

$$f = \sigma_e - \sigma_y = \left( \frac{3}{2} s : s \right)^{1/2} - \sigma_y \quad (2.52)$$

*Encruamento Cinemático:* Neste modelo a superfície de escoamento permanece com sua mesma forma, tamanho e orientação, mas seu centro se translada no espaço de tensão, isto é mostrado na *Figura 2.2 (b)*. O conceito do endurecimento cinemático é importante para carregamentos inversos e cíclicos.

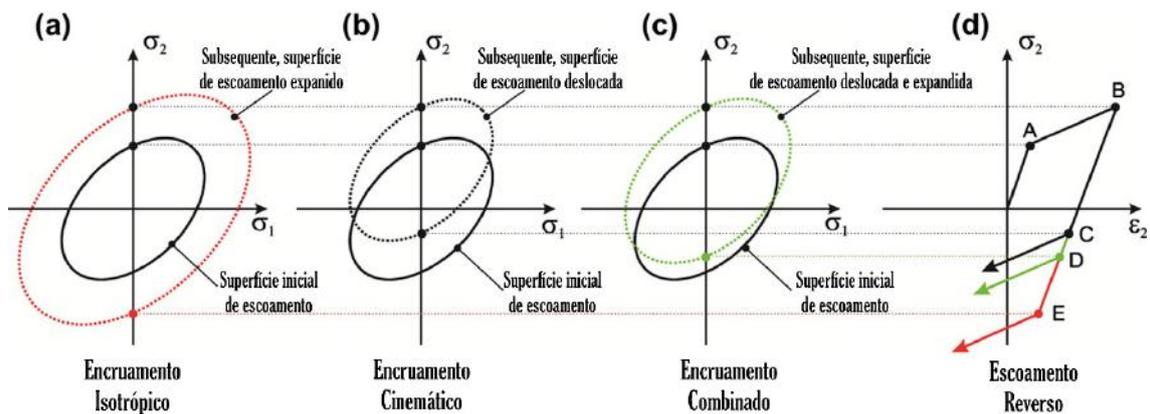
Na *Figura 2.2 (d)* pode-se ver que a tensão de escoamento do carregamento inverso ocorre no ponto C, com um valor menor em relação à prevista no encruamento isotrópico (ponto E). Este comportamento do carregamento inverso com o trecho elástico menor é conhecido como efeito Bauschinger. No encruamento cinemático, a equação (2.52) toma a forma de:

$$f = \left( \frac{3}{2} (s - x') : (s - x') \right)^{1/2} - \sigma_y \quad (2.53)$$

$x'$  : é a variável do encruamento cinemático.

*Encruamento Misto*: combina as características dos modelos de encruamento isotrópico e cinemático, permitindo que a superfície de escoamento se expanda ou contraia e translade ao mesmo tempo como mostra a *Figura 2.2 (c)*. A tensão de escoamento do carregamento inverso na *Figura 2.2(d)* é representada pelo ponto D, descrevendo uma região elástica maior que a esperada no encruamento cinemático (ponto C), mas menor o esperado para o encruamento isotrópico. A função de escoamento é da forma:

$$f = \left( \frac{3}{2} (s - x') : (s - x') \right)^{1/2} - \sigma_y (\bar{\varepsilon}_n^p) = 0 \quad (2.54)$$



**Figura 2.2.** Modelos de encruamento: (a) Isotrópico, (b) Cinemático, (c) Combinado Isotrópico-Cinemático e (d) curva tensão-deformação mostrando as diferentes tensões de escoamento segundo o modelo de plasticidade. [87]

### 2.3.7. Esquema Implícito do Mapeamento Preditor Elástico.

Este esquema se desenvolve considerando o critério de escoamento de von Mises e encruamento isotrópico. O incremento de deformação correspondente a um incremento de tempo típico  $[t_n, t_{n+1}]$  é dado por:

$$\Delta \varepsilon = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n \quad (2.55)$$

As variáveis de estado no tempo  $t_n$  são a deformação elástica ( $\varepsilon_n^e$ ) e a deformação plástica acumulada ( $\varepsilon_n^p$ ). A deformação elástica e plástica acumuladas de teste,  $\varepsilon_{n+1}^{e \text{ teste}}$  e  $\varepsilon_{n+1}^{p \text{ teste}}$ , respectivamente, são definidas como:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{n+1}^{e \text{ teste}} &= \varepsilon_n^e + \Delta \varepsilon \\ \varepsilon_{n+1}^{p \text{ teste}} &= \varepsilon_n^p\end{aligned}\quad (2.56)$$

A tensão de teste é calculada por:

$$\sigma_{n+1}^{\text{teste}} = D^e : \varepsilon_{n+1}^{e \text{ teste}} \quad (2.57)$$

onde,  $D^e$  é o tensor elástico.

A equação (2.57) pode ser descomposta em tensão desviadora e hidrostática:

$$\begin{aligned}s_{n+1}^{\text{teste}} &= 2G \varepsilon_{d \ n+1}^{e \text{ teste}} \\ p_{n+1}^{\text{teste}} &= K \varepsilon_{v \ n+1}^{e \text{ teste}}\end{aligned}\quad (2.58)$$

$$\varepsilon_{n+1}^{e \text{ teste}} = \varepsilon_{d \ n+1}^{e \text{ teste}} + \varepsilon_{v \ n+1}^{e \text{ teste}} \quad (2.59)$$

sendo,  $s_{n+1}^{\text{teste}}$  a tensão desviadora de teste no tempo  $t_{n+1}$ ,  $p_{n+1}^{\text{teste}}$  a tensão hidrostática de teste no tempo  $t_{n+1}$ ,  $G$  o módulo de cisalhamento,  $K$  o módulo de volumétrico,  $\varepsilon_{v \ n+1}^{e \text{ teste}} = \text{tr}[\varepsilon_{n+1}^e]$  a deformação elástica volumétrica de teste e  $\varepsilon_{d \ n+1}^{e \text{ teste}}$  a deformação elástica desviadora de teste.

A tensão de escoamento é:

$$\sigma_{y \ n+1}^{\text{teste}} = \sigma_y(\varepsilon_n^p) = \sigma_{y \ n} \quad (2.60)$$

Após o cálculo do estado elástico de teste, é verificado se  $\sigma_{n+1}^{\text{teste}}$  fica dentro ou fora da superfície de escoamento de teste, ou seja:

$$f(\sigma_{n+1}^{\text{teste}}, \sigma_{y n}) \leq 0 \quad (2.61)$$

No caso da equação (2.61) ser satisfeita, então o processo é puramente elástico e a solução é o mesmo estado elástico de teste:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^e &= \varepsilon_{n+1}^{\text{teste}} \\ \sigma_{n+1} &= \sigma_{n+1}^{\text{teste}} \\ \varepsilon_{n+1}^{\bar{p}} &= \varepsilon_{n+1}^{\bar{p} \text{ teste}} = \varepsilon_n^{\bar{p}} \\ \sigma_{y n+1} &= \sigma_{y n+1}^{\text{teste}} = \sigma_{y n} \end{aligned} \quad (2.62)$$

No caso contrário, é um processo elasto-plástico e é aplicado o procedimento de mapeamento de retorno como segue.

### 2.3.8. Esquema Implícito do Mapeamento Retorno Elástico.

Para o modelo de von Mises um conjunto de equações não lineares deve ser resolvido para o cálculo da deformação elástica  $\varepsilon_{n+1}^e$ , deformação plástica acumulada  $\varepsilon_{n+1}^{\bar{p}}$  no tempo  $t_{n+1}$  e o multiplicador plástico  $\Delta\lambda$ . O sistema de equações a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1}^e &= \varepsilon_{n+1}^{\text{teste}} - \Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} \\ \varepsilon_{n+1}^{\bar{p}} &= \varepsilon_n^{\bar{p}} + \Delta\lambda \\ \sqrt{3J_2(s_{n+1})} - \sigma_y(\varepsilon_{n+1}^{\bar{p}}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.63)$$

onde:

$$s_{n+1} = s_{n+1}(\varepsilon_{n+1}^e) = 2G \text{dev}[\varepsilon_{n+1}^e] \quad (2.64)$$

O tensor de deformações plásticas é atualizado conforme a equação:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} \quad (2.65)$$

Decompondo-se a primeira equação (2.63) em componente de deformação volumétrica e desviadora, têm-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{v\ n+1}^e &= \varepsilon_{v\ n+1}^{e\ teste} \\ \varepsilon_{d\ n+1}^e &= \varepsilon_{d\ n+1}^{e\ teste} - \Delta\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Da mesma maneira, as componentes tensões hidrostática e desviadora são, respetivamente:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_{n+1}^{teste} \\ s_{n+1} &= s_{n+1}^{teste} - \Delta\lambda \cdot 2G \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} \end{aligned} \quad (2.67)$$

A tensão hidrostática  $p_{n+1}$  é calculada nas equações (2.58) pelo preditor elástico e pode ser eliminado do sistema de equações. A segunda equação (2.67) pode ser reorganizada como:

$$\left( 1 + \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\lambda 2G}{\|s_{n+1}\|} \right) s_{n+1} = s_{n+1}^{teste} \quad (2.68)$$

Esta expressão significa que a tensão desviadora de teste e a atualizada são colineares, então:

$$\frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} = \frac{s_{n+1}^{teste}}{\|s_{n+1}^{teste}\|} \quad (2.69)$$

Substituindo a equação (2.69) na segunda equação (2.67), obtêm-se:

$$s_{n+1} = \left( 1 - \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\Delta\lambda 2G}{\|s_{n+1}^{\text{teste}}\|} \right) s_{n+1}^{\text{teste}} = \left( 1 - \frac{\Delta\lambda 3G}{\sigma_{e\ n+1}^{\text{teste}}} \right) s_{n+1}^{\text{teste}} \quad (2.70)$$

onde,  $\sigma_{e\ n+1}^{\text{teste}}$  é a tensão equivalente elástica de von Mises dada por:

$$\sigma_{e\ n+1}^{\text{teste}} = \sqrt{3J_2(s_{n+1}^{\text{teste}})} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|s_{n+1}^{\text{teste}}\| \quad (2.71)$$

Logo, substituindo (2.70) e a segunda equação (2.63) na condição de consistência plástica, terceira equação (2.63), o sistema de equações (2.63) fica reduzido a uma só equação, tendo como única variável incógnita o multiplicador plástico  $\Delta\lambda$ :

$$F(\Delta\lambda) \equiv \sigma_{e\ n+1}^{\text{teste}} - 3G\Delta\lambda - \sigma_y(\bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda) = 0 \quad (2.72)$$

A equação (2.72) é resolvida pelo método de Newton-Raphson. Com o multiplicador plástico  $\Delta\lambda$  já determinado são atualizadas as variáveis de estado como segue:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \left( 1 - \frac{\Delta\lambda 3G}{\sigma_{e\ n+1}^{\text{teste}}} \right) s_{n+1}^{\text{teste}} \\ \sigma_{n+1} &= s_{n+1} + p_{n+1}^{\text{teste}} I \\ \varepsilon_{n+1}^e &= [D^e]^{-1} : \sigma_{n+1} = \frac{1}{2G} s_{n+1} + \frac{1}{3} \varepsilon_{v\ n+1}^e \\ \bar{\varepsilon}_{n+1}^p &= \bar{\varepsilon}_n^p + \Delta\lambda \end{aligned} \quad (2.73)$$

A equação de atualização do tensor de tensões  $\sigma_{n+1}$  pode estabelecida em termos da deformação plástica acumulada  $\bar{\varepsilon}_n^p$  e da deformação elástica de teste  $\varepsilon_{n+1}^{e\ \text{teste}}$ , a partir das duas primeiras equações (2.73), (2.57) e (2.58), isto é:

$$\sigma_{n+1} = \bar{\sigma}_{n+1}(\bar{\varepsilon}_n^p, \varepsilon_{n+1}^{e\ \text{teste}}) \equiv \left[ D^e - \hat{H}(f^{\text{teste}}) \frac{\Delta\lambda 6G^2}{\sigma_{n+1}^{\text{teste}}} I_d \right] : \varepsilon_{n+1}^{e\ \text{teste}} \quad (2.74)$$

onde,

$$\widehat{H}(a) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a \leq 0 \end{cases}, \text{ para algum escalar } a, \quad (2.75)$$

é a função de passo de Heaviside,  $I_d$  é a projeção do tensor desviador e  $f^{\text{teste}}$  é o valor da função de escoamento do estado elástico de teste, dada por:

$$f^{\text{teste}} = f^{\text{teste}} \left( \overset{-p}{\boldsymbol{\varepsilon}}_n, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \right) \equiv \sigma_e^{\text{teste}} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \right) - \sigma_y \left( \overset{-p}{\boldsymbol{\varepsilon}}_n \right) \quad (2.76)$$

### 2.3.9. Tangente Elasto-Plástica Consistente para p Modelo de von Mises e Encruamento Isotrópico.

Na região plástica a fórmula de atualização do mapeamento de retorno dada pela equação (2.74) é:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \left[ D^e - \frac{\Delta\lambda 6G^2}{\sigma_{n+1}^{\text{teste}}} I_d \right] : \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e \quad (2.77)$$

O módulo tangente elasto-plástico consistente é obtido por diferenciação da equação (2.77), ou seja:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} = D^e - \frac{\Delta\lambda 6G^2}{\sigma_{n+1}^{\text{teste}}} I_d - \frac{6G^2}{\sigma_{n+1}^{\text{teste}}} \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^e \otimes \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} + \frac{\Delta\lambda 6G^2}{(\sigma_{n+1}^{\text{teste}})^2} \boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^e \otimes \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{teste}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} \quad (2.78)$$

Sendo:

$$\frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{teste}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} = 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{n+1}^{\text{teste}}}{\|s_{n+1}^{\text{teste}}\|} = 2G \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^e}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^e\|} \quad (2.79)$$

$$\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} = \frac{1}{3G + H} \frac{\partial \sigma_{n+1}^{\text{teste}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^e} = \frac{2G}{3G + H} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{s_{n+1}^{\text{teste}}}{\|s_{n+1}^{\text{teste}}\|} = \frac{2G}{3G + H} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^e}{\|\boldsymbol{\varepsilon}_{d\ n+1}^e\|} \quad (2.80)$$

Sendo  $H$  a declividade da curva de encruamento, dada por:

$$H \equiv \frac{d\sigma_y}{d\varepsilon} \bigg|_{\varepsilon_n^p + \Delta\lambda} \quad (2.81)$$

Finalmente, substituindo as equações (2.79) e (2.80) na equação (2.78), obtemos a expressão para o operador tangente elasto-plástico consistente:

$$\begin{aligned} D^{ep} &= D^e - \frac{\Delta\lambda 6G^2}{\sigma_{e\ n+1}^{\text{teste}}} I_d + 6G^2 \left( \frac{\Delta\lambda}{\sigma_{e\ n+1}^{\text{teste}}} - \frac{1}{3G + H} \right) \frac{s_{n+1}^{\text{teste}}}{\|s_{n+1}^{\text{teste}}\|} \frac{s_{n+1}^{\text{teste}}}{\|s_{n+1}^{\text{teste}}\|} \\ &= 2G \left( 1 - \frac{\Delta\lambda 3G}{\sigma_{e\ n+1}^{\text{teste}}} \right) I_d + 6G^2 \left( \frac{\Delta\lambda}{\sigma_{e\ n+1}^{\text{teste}}} - \frac{1}{3G + H} \right) \frac{s_{n+1}^{\text{teste}}}{\|s_{n+1}^{\text{teste}}\|} \frac{s_{n+1}^{\text{teste}}}{\|s_{n+1}^{\text{teste}}\|} + KII \end{aligned} \quad (2.82)$$

A teoria da plasticidade resumida neste item, apresentada em detalhe nas referências [86], [88], [89] e [90], é utilizada nesta tese para a desenvolvimento de sub-rotinas que fazem parte dos algoritmos aplicados à solução de problemas mecânicos inversos.

#### 2.4. Processos de Soldagem por Fusão.

A soldagem por fusão é um processo de união que usa a fusão do metal base para a solda. Os três mais importantes tipos de processos de soldagem por fusão são os seguintes[91]:

a) *Soldagem a gás:*

Soldagem oxi-acetilênica. (OAW).

b) *Soldagem por arco elétrico:*

Soldagem com eletrodo revestido (SMAW).

Soldagem TIG (GTAW).

Soldagem com arco plasma (PAW).

Soldagem MIG/MAG (GMAW).

Soldagem com arames tubulares (FCAW).

Soldagem com arco submerso (SAW).

Soldagem por eletroescória (ESW).

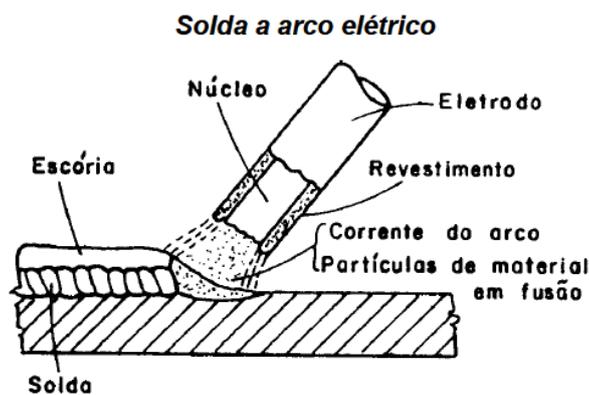
c) *Soldagem por feixe de alta energia:*

Soldagem por feixe de elétrons (EBW).

Soldagem por feixe laser (LBW).

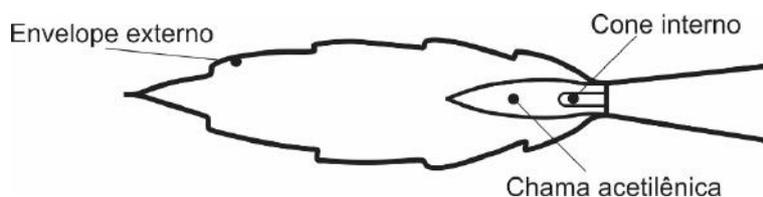
#### 2.4.1. Tipos de Fontes de Calor para Soldagem por Fusão.

a) Arco elétrico: é um método de união de metais realizado pela aplicação de corrente elétrica suficiente a um eletrodo para manter um caminho de corrente num meio ionizado, com desprendimento de intenso calor e luz (arco) entre o eletrodo e a peça de trabalho. Nesse processo, a energia elétrica é transformada em energia térmica, levando os metais a um estado fundido; por meio do qual eles são unidos após o resfriamento. A *Figura 2.3* apresenta um esquema básico da solda por arco elétrico.



**Figura 2.3.** Solda por arco elétrico [92].

b) Chama oxi-acetilênica: consiste de três partes visíveis, uma zona denominada cone interno, uma zona intermediária reduzida conhecida como chama acetilênica e uma zona exterior oxidante denominada chama envolvente ou flamejante. Toda a chama é produzida pelo suprimento de volumes aproximadamente iguais de gás acetileno e oxigênio para a tocha. Na *Figura 2.4* são apresentadas as partes da chama oxi-acetilênica.



**Figura 2.4.** Partes da chama oxi-acetilênica [93].

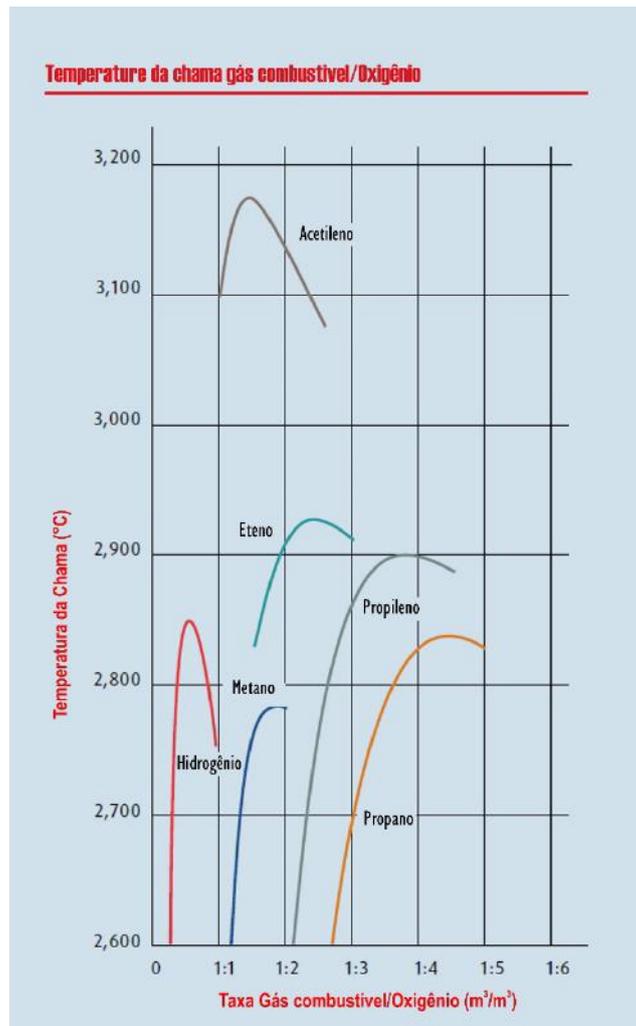
Existem três tipos básicos de chamas oxi-acetilênicas, a chama reduzida ou carburante, chama neutra ou balanceada e chama oxidante. A chama reduzida tem excesso de acetileno, a chama neutra tem, aproximadamente, mesma proporção volumétrica de acetileno e oxigênio e a chama oxidante tem excesso de oxigênio. Na *Figura 2.5* mostram-se os tipos de chama oxi-acetilênicas.



**Figura 2.5.** Tipos de chamas oxi-acetilênica [94].

A chama neutra é o tipo de chama mais usado para aquecimento e corte de metais, obtida mais facilmente pelo ajuste da chama com excesso de acetileno (chama acetilênica), é reconhecida pela extensão do cone interno (“aleta”). A aleta irá diminuir quando o fluxo de acetileno decrescer ou o fluxo de oxigênio aumentar.

Os gases combustíveis mais usados são o acetileno, eteno, propileno, hidrogênio, propano e metano. O acetileno é mais leve que o ar e dá maior temperatura de chama em comparação aos outros combustíveis usando menor quantidade de oxigênio para chegar à combustão completa. A *Figura 2.6* mostra as temperaturas máximas alcançadas pelos diferentes gases combustível em relação à taxa gás combustível/oxigênio.

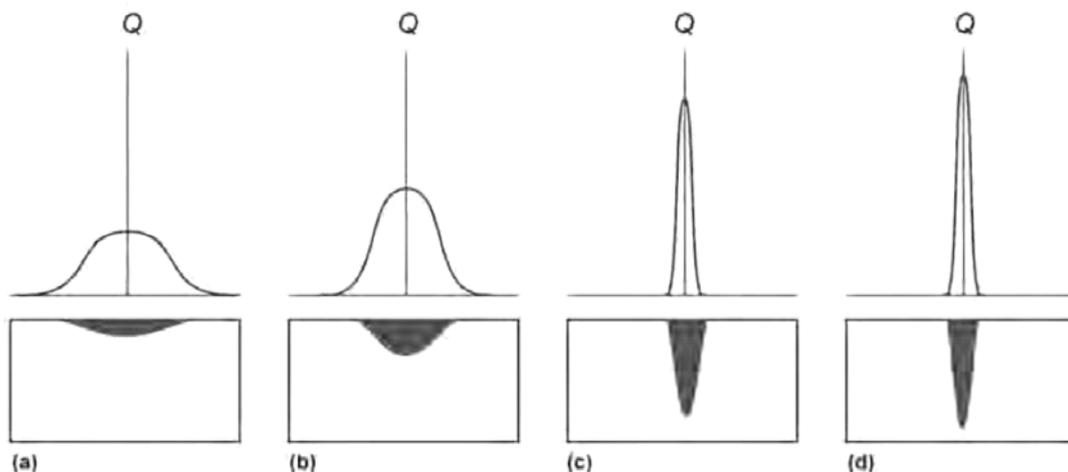


**Figura 2.6.** Temperaturas máximas dos principais gases combustíveis [94].

#### 2.4.2. Modelo de Fonte de Calor.

O modelo matemático da fonte de calor, a qual define a distribuição de calor fornecido tem um efeito importante sobre o padrão de distribuição de calor na proximidade da zona afetada, pois nesta região é onde as principais deformações ocorrerão. A quantidade de calor ( $Q$ ) [W] que é fornecida à peça de trabalho pode ser definida pelos parâmetros da soldagem, como a corrente elétrica ( $I$ ), a voltagem ( $V$ ) e a eficiência ( $\eta$ ) num processo por arco elétrico,  $Q = \eta VI$ , ou diretamente como nos casos das soldas oxi- acetilênica, feixe laser ou de elétrons. A quantidade de energia que a fonte de calor de soldagem fornece por unidade de área de seção transversal é chamada de fluxo de calor ( $q$ ) [W/m<sup>2</sup>].

Na *Figura 2.7* são mostradas as diferenças das distribuições de energia de várias fontes de calor e dos padrões de fusão do metal base associado às respectivas fontes de calor. Observa-se que o processo de soldagem por gás combustível é uma fonte difusa ou distribuída (*Figura 2.7 (a)*), enquanto as soldagens por feixe laser e feixe de elétrons são definidas como processos de alta densidade de energia (*Figura 2.7 (c)* e *(d)*, respectivamente). Finalmente, o processo por arco elétrico pode ser descrito como intermediário entre a fonte difusa e de alta densidade de energia (*Figura 2.7 (b)*). A descrição da fonte de energia é básica para qualquer formulação numérica voltada para a simulação de um processo de soldagem visando prever o campo de temperaturas nas peças de trabalho. Tanto a magnitude quanto a distribuição da fonte são fundamentais e exclusivas para cada processo de união, e a previsão resultante de qualquer modelo numérico é, portanto, afetada pela descrição inicial da fonte de calor. A compreensão da física do processo e sua simulação matemática dessas fontes é essencial para caracterizar a fonte de calor.[95]



**Figura 2.7.** Densidade de energia e padrão de fusão de várias fontes de calor: (a) Chama oxí-acetilênica. (b) Soldagem TIG. (c) Feixe laser. (d) Feixe de elétrons. [95]

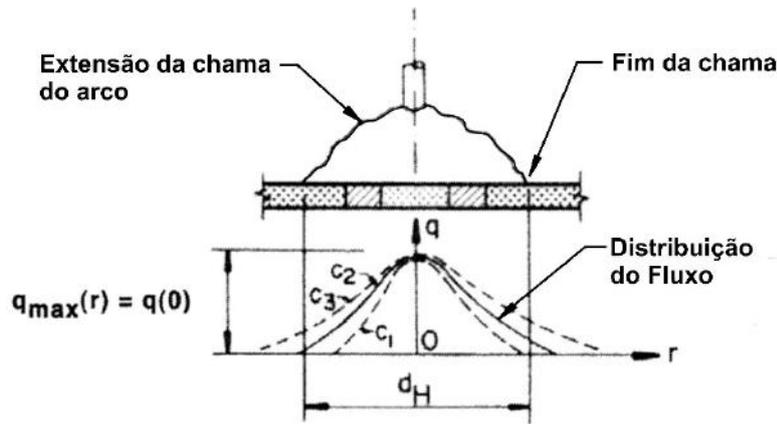
Pavelic et. al. [96] foram os primeiros a sugerir que a fonte de calor deveria ser dispersa, propondo uma distribuição Gaussiana do fluxo sobre a superfície do sólido. Baseados neste estudo foram desenvolvidos uma série de modelos para as fontes de calor, das quais as mais conhecidas são:

a) **Distribuição Gaussiana superficial do fluxo.**

No modelo de “disco circular”, proposto por Pavelic et al [96]., o fluxo térmico tem uma distribuição de Gauss ou normal ao plano como mostra a *Figura 2.8*.

$$q(r) = q(0)e^{-Cr^2} \quad (2.83)$$

onde,  $q(r)$  é o fluxo superficial de raio  $r$  [W/m<sup>2</sup>],  $q(0)$  o máximo fluxo no centro da fonte de calor [W/m<sup>2</sup>],  $C$  coeficiente de largura da distribuição [m<sup>-2</sup>] e  $r$  a distância radial a partir do centro da fonte de calor [m].



**Figura 2.8.** Fonte de calor de disco circular [14].

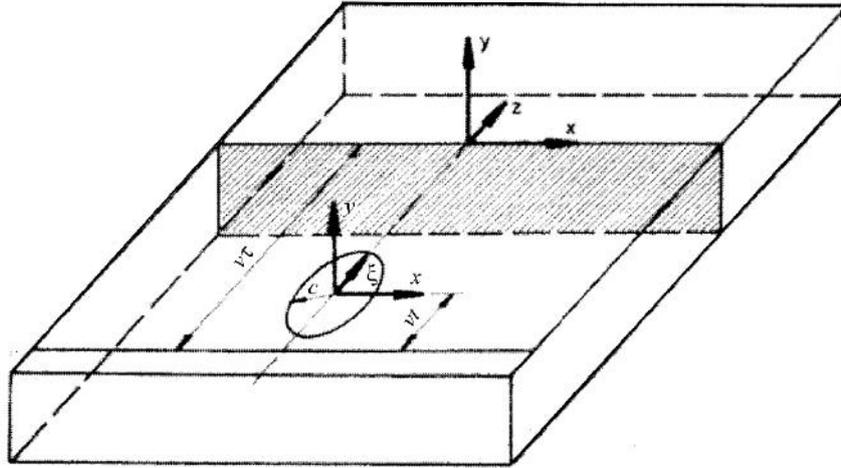
Uma alternativa ao modelo de Pavelic et al. [21] foi sugerido por Friedman [97] e Krutz e Segerland [98], o qual é referido a um sistema de coordenadas locais  $(x, y, \xi)$  mostrado na *Figura 2.9*, é dado na forma:

$$q(x, \xi) = \frac{3Q}{\pi c^2} e^{-3x^2/c^2} e^{-3\xi^2/c^2} \quad (2.84)$$

onde,  $c$  é o raio característico da distribuição do fluxo de calor [m].

A equação (2.83) pode ser expressa nas coordenadas locais  $(x, y, z)$ , que se movimentam junto com a fonte de calor, através da relação das coordenadas  $\xi$  e  $z$ , dada por:  $\xi = z + v(\tau - t)$ , onde  $t$  é o tempo [s],  $\tau$  é a defasagem de tempo [s] e  $v$  é a velocidade da tocha [m/s]:

$$\begin{cases} q(x, z, t) = \frac{3Q}{\pi c^2} e^{-3x^2/c^2} e^{-3[z+v(\tau-t)]^2/c^2}, & \text{para } x^2 + \xi^2 < c^2 \\ q(x, z, t) = 0, & \text{para } x^2 + \xi^2 > c^2 \end{cases} \quad (2.85)$$



**Figura 2.9.** Sistema de coordenadas usado para as análises do modelo de disco [14].

O modelo de distribuição Gaussiana superficial do fluxo pode ser usado para processos de soldagem com baixa penetração como a oxi-acetilênica, TIG e arco submerso.

Uma versão deste modelo usada, pelos pesquisadores, para expressar a distribuição do calor da chama oxi-acetilênica sobre superfícies planas [99], [100] e [101]. É expressa do seguinte modo:

$$q_{\text{sup}}(r) = Q''_{\text{max}} e^{-\gamma \cdot r^2} \quad (2.86)$$

onde:

$Q''_{\text{max}}$  : valor do calor máximo.

$\gamma$  : fator de largura

$r$  : distância desde o centro

O calor de entrada total,  $Q_{\text{tot}}$ , é definido como a integral da distribuição.

$$Q_{tot} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} q_{sup}(r) r dr d\theta = \frac{\pi Q_{max}}{\gamma} \quad (2.87)$$

O valor do parâmetro  $\gamma$  é definido em um “raio de tocha”,  $r_{torch}$ , onde  $q_{sup}(r)$ , equação (2.85), é 1 por cento de  $Q''_{max}$ . O seja:

$$Q''_{max} e^{-\gamma r_{torch}^2} = 0.01 \cdot Q''_{max} \quad (2.88)$$

Então:

$$\gamma = \frac{\ln 100}{r_{torch}^2} \quad (2.89)$$

#### b) Distribuição hemisférica da densidade de potência.

Para os casos onde a profundidade de penetração é maior, é usado uma distribuição de Gauss hemisférica da densidade de potência  $q(x, y, \xi)$  [W/m<sup>3</sup>]:

$$q(x, y, \xi) = \frac{6\sqrt{3}Q}{c^3 \pi \sqrt{\pi}} e^{-3x^2/c^2} e^{-3y^2/c^2} e^{-3\xi^2/c^2} \quad (2.90)$$

#### c) Fonte de calor de Goldak semi - elipsoidal

Embora a fonte de calor hemisférica modele um arco de solda melhor do que a fonte em disco, a poça de fusão está longe de ser esférica. Além disso, uma fonte hemisférica não é apropriada para as soldas que não sejam esfericamente simétricas, como soldas com eletrodo strip, feixe de elétrons de penetração profunda, ou feixe de laser. Para esses casos foi proposta uma fonte com formulação volumétrica elipsoidal mais precisa [102], dada por:

$$q(x, y, z, t) = \frac{6\sqrt{3}Q}{a_h b_h c_h \pi \sqrt{\pi}} e^{-3x^2/c_h^2} e^{-3y^2/a_h^2} e^{-3[z+v(\tau-t)]^2/b_h^2} \quad (2.91)$$

sendo,  $a_h, b_h, c_h$  os parâmetros da fonte Gaussiana mostrados na *Figura 2.10*,  
 $e c_{hf} = c_{hb} = c_h$ .

**d) Fonte de calor de Goldak dupla – elipsoidal**

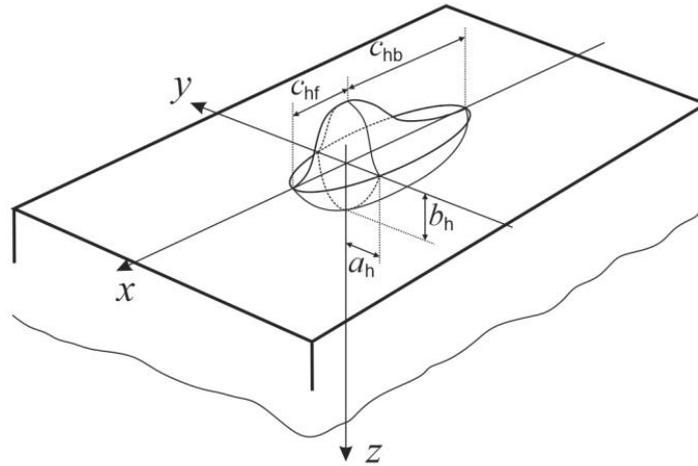
Esta fonte de calor é determinada pela combinação de dois semi-elipsóides diferentes, e o fluxo de calor no interior de cada semi-elipsóide é descrito por diferentes equações. Para um ponto  $(x, y, z)$  na primeira semi-elipsóide localizada à frente do arco de solda, a equação do fluxo de calor é dada por:

$$q(x, y, z, t) = \frac{6\sqrt{3}r_f Q}{a_h b_h c_{hf} \pi \sqrt{\pi}} e^{-3x^2/c_{hf}^2} e^{-3y^2/a_h^2} e^{-3[z+v(\tau-t)]^2/b_h^2} \quad (2.92)$$

e para um ponto  $(x, y, z)$  na segunda semi-elipsóide, cobrindo a parte traseira do arco, têm-se:

$$q(x, y, z, t) = \frac{6\sqrt{3}r_b Q}{a_h b_h c_{hb} \sqrt{\pi}} e^{-3x^2/c_{hb}^2} e^{-3y^2/a_h^2} e^{-3[z+v(\tau-t)]^2/b_h^2} \quad (2.93)$$

onde,  $a_h, b_h, c_{hf}, c_{hb}$ , são os parâmetros da fonte de calor elipsoidal, como descrito na *Figura 2.10*;  $r_f, r_b$ , são coeficientes de proporção do calor na frente e atrás da fonte de calor, respectivamente. Os valores desses parâmetros são determinados por:  $r_f = 2 c_{hf}/(c_{hf} + c_{hb})$ ;  $r_b = 2 c_{hb}/(c_{hf} + c_{hb})$ .



**Figura 2.10.** Esquema para os modelos de fonte de calor com de distribuições semi - elipsoidal e dupla - elipsoidal [14].

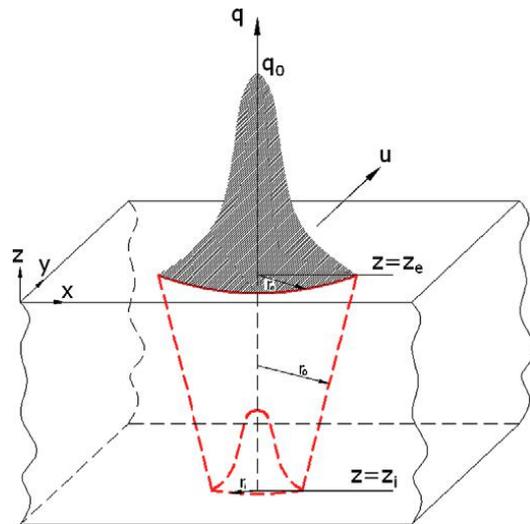
e) **Distribuição cônica Gaussiana 3D (Modelo 2D Gaussiano modificado)**

A máxima densidade de energia é depositada na região da superfície superior da peça de trabalho, e na superfície de fundo é mínima. Ao longo da espessura, o diâmetro da região de distribuição da densidade de potência diminui linearmente. No entanto, a densidade de calor no eixo z (eixo central), é mantida constante [103]. A distribuição da densidade de potência em qualquer plano perpendicular ao eixo Z pode ser expressa como:

$$q(r, z) = Q_0 \exp\left(\frac{-3r^2}{r_0^2}\right) \quad (2.94)$$

onde,  $Q_0$  é a máxima densidade de potência,  $r_0$  é o raio da fonte de calor em Z e  $r$  é a coordenada radial de um ponto interior. Na *Figura 2.11*, a altura da fonte de calor cônica de Gauss é  $H = z_e - z_i$ , a coordenada z da superfície superior e inferior são  $z_e$  e  $z_i$ , respectivamente, e o raio na superfície superior e inferior da fonte de calor em  $z = z_e$  e  $z = z_i$  são  $r_e$  e  $r_i$ , respectivamente. A diminuição linear do parâmetro  $r_0$  é dada por:

$$r_0(z) = r_e - (r_e - r_i) \frac{(z_e - z)}{(z_e - z_i)} \quad (2.95)$$



**Figura 2.11.** Fonte de calor com distribuição cônica Gaussiana 3D [103].

## Capítulo 3

# Métodos de Solução de Problemas Inversos.

Segundo Engl et al. [104], para a solução de um problema direto é requerido o conhecimento completo e preciso das *causas* para a determinação dos *efeitos*, enquanto a solução de um problema inverso implica na determinação das *causas* desconhecidas a partir de *efeitos* desejados ou observados. Em geral, estes *efeitos* são caracterizados por observações incompletas e imprecisas, contendo dados com ruídos ou erros. As *causas*, num modelo matemático, são as condições iniciais e de contorno, termos de fontes/sumidouros e propriedades do sistema. Os *efeitos* são as respostas calculadas a partir do modelo matemático, que no contexto desta tese são, por exemplo, os campos de temperaturas, distorções geométricas e tensões residuais.

Outra definição, dada por Kirsch [105], mas em essência semelhante à anterior, é que o problema direto pode ser estabelecido como a aplicação de um operador  $K$  sobre um “modelo” conhecido  $x$  em um espaço modelo  $X$ , ou seja, dado  $x$  (e  $K$ ) determinar  $K(x)$ . O problema inverso corresponde à solução da equação  $K(x) = y$  para  $x$ , dado  $y$  (e  $K$ ). Seguindo esta orientação geral, é possível determinar qual problema poderá ser considerado direto ou inverso.

Segundo Bell et al. [95], foi o matemático francês Jacques S. Hadamard que definiu o problema bem-posto como aquele que atende a três requisitos essenciais, a saber:

- 1) Apresentar solução – Existência;
- 2) A solução deve ser única – Unicidade;
- 3) A solução deve exibir dependência contínua em relação aos dados que a originou – Estabilidade.

A existência e unicidade podem ser cumpridas delimitando-se o espaço de uma solução, onde provavelmente ela se encontra. Se existir mais de uma solução, isto significa que as informações para definição do operador são insuficientes. Neste caso,

elementos adicionais devem ser fornecidos atendendo a características específicas do modelo.

A estabilidade é uma peculiaridade importante, devido à impossibilidade de convergência para a solução em vista dos efeitos de degradação produzidos por pequenas perturbações dos dados, ou mesmo de particularidades do processo numérico de solução. Se não houver dependência contínua da solução em relação aos dados, provavelmente, a solução calculada estará distante da esperada. A superação desta dificuldade só pode ser alcançada fornecendo informações adicionais precisas sobre a solução.

O problema é dito mal-posto se alguma das condições acima não é satisfeita e, em geral, os problemas inversos não cumprem nenhuma destas condições. Assim, na maioria dos casos um problema inverso tem dados insuficientes ou inadequados, e para que se transforme em problema bem-posto é necessário adicionar outras informações, normalmente, obtidas por meio de experimentos realizados em laboratório. Além disso, para superar dificuldades, tais como, a falta de estabilidade, nos últimos anos foram desenvolvidas várias técnicas numéricas, sendo as pesquisas realizadas por Bell et al. [106], Alifanov [107] e Beck et al. [108] consideradas como precursoras no desenvolvimento de técnicas de regularização (estabilização) de problemas inversos em transferência de calor.

Para entender melhor as características do problema inverso tratado nesta tese considere o problema direto clássico de transferência de calor por condução. Neste problema, a condição inicial corresponde à temperatura ambiente, e as condições de contorno são tomadas como as perdas de calor por convecção e radiação combinadas e a fonte de calor sobre a superfície do corpo é considerada como o carregamento aplicado, nessas circunstâncias a variável a ser determinada é o campo de temperaturas. Este problema é matematicamente classificado como bem-posto, visto que satisfaz os três requisitos essenciais para este enquadramento. No problema inverso se faz uso de temperaturas medidas experimentalmente e das equações de transferência de calor por condução, para se determinar parâmetros da fonte de calor e/ou alguma propriedade física do material do corpo variando com a temperatura, envolvido na formulação.

Na literatura podem-se encontrar vários métodos de regularização (estabilização) para solução de problemas inversos, entre os quais temos: os métodos de Levenberg –

Marquardt, do gradiente conjugado, de Monte Carlo com Cadeias de Markov e de identificação de propriedades termofísicas no domínio da frequência. Estes métodos são considerados suficientemente versáteis e robustos para superarem as dificuldades inerentes aos problemas inversos de transferência de calor. O método de Levenberg-Marquardt é escolhido para ser utilizado nesta tese na determinação dos parâmetros já mencionados do problema inverso térmico e mecânico devido à robustez (Bun [109], Bergou et al. [110], Pujol [111]), eficácia em problemas altamente não lineares (Colaço et al. [112], Naveen et al. [113]), precisão (Golsorkhi e Tehrani [114], Cortés et al. [115]), mínimo impacto por ruído nas medições (Feng et al. [116]) e rapidez na obtenção de resultados (Ranganathan [117], Mejias et al. [118])

### 3.1. Método de Levenberg – Marquardt.

Geralmente, os problemas inversos são resolvidos pela minimização de uma função objetivo com alguma técnica de estabilização usada no procedimento de estimação. Tal função objetivo normalmente envolve a soma do quadrado das discrepâncias entre as variáveis medidas e estimadas. A função objetivo, que fornece as estimativas mínimas da variância, no caso do método Levenberg-Marquardt, é a norma de mínimos quadrados ordinários, no entanto, só resulta em estimativas de máxima verossimilhança se as seguintes hipóteses estatísticas são válidas: os erros nas variáveis medidas forem aditivos, não-correlacionados, com distribuição normal, média zero e desvio-padrão constante e conhecido. A função objetivo é definida como:

$$S(P) = \sum_{i=1}^I [Y_i - T_i(P)]^2 \quad (3.1)$$

onde:

$P^T = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots \ P_N]$  : Vetor de parâmetros a serem determinados.

$T_i = T(P, t_i)$ : Solução calculada no tempo  $t_i$ .

$Y_i = Y(t_i)$ : Solução exata medida com sensores no tempo  $t_i$ .

$N$ : Número total de parâmetros desconhecidos.

$I$ : Número total de medições no tempo.

Este método foi desenvolvido por Levenberg (1944) modificando a norma de mínimos quadrados. Depois Marquardt (1963) desenvolveu basicamente a mesma técnica usando diferente enfoque (Mejias et al [118]). O método de Levenberg - Marquardt é utilizado para a estimação de parâmetros em problemas inversos lineares e não lineares. A teoria deste método de solução para problemas inversos é baseada no livro de Özisik e Orlande [119], os quais indicam que método pode ser adequadamente organizado nas seguintes etapas:

- Problema direto: associado ao problema termomecânico onde se tem a fonte de calor fornecida pela tocha e as propriedades térmicas para a análise térmica são conhecidas, assim como também as propriedades mecânicas e as condições de contorno para a análise estrutural, sendo o objetivo o cálculo transiente da temperatura e deslocamentos, respectivamente.
- Problema inverso: para o caso de problema termomecânico se tem a fonte de calor fornecida pela tocha e/ou as propriedades térmicas para a análise térmica, assim como também as propriedades mecânicas e/ou as condições de contorno na análise estrutural são desconhecidas. Para a estimação desses parâmetros é preciso adicionalmente a informação das medições transientes da temperatura e deslocamentos tomados em posições estratégicas nas análises térmicas e mecânicas concernentes.
- Procedimento iterativo: O método de Levenberg-Marquardt baseia-se na minimização da norma dos mínimos quadrados, equação (3.1), na determinação dos valores do vetor de parâmetros desconhecidos atualizado, os quais resolvem o problema direto. Isto é descrito no item 3.1.1.
- Critério de parada: o processo iterativo finaliza quando os erros dos valores das temperaturas e deslocamentos calculados pelo problema direto com respeito aos valores das temperaturas e deslocamentos medidos em pontos estratégicos alcançam um mínimo estabelecido, como é visto no item 3.1.2.
- Algoritmo computacional: descreve o passo a passo que o método segue até chegar à determinação dos parâmetros desconhecidos, como é descrito no item 3.1.3.

### 3.1.1. Procedimento Iterativo.

Para minimizar a norma de mínimos quadrados dado na equação (3.1) é preciso igualar a zero as derivadas de  $S(P)$  em relação a cada parâmetro desconhecido  $[P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots \ P_N]$ , isto é:

$$\frac{\partial S(P)}{\partial P_1} = \frac{\partial S(P)}{\partial P_2} = \dots = \frac{\partial S(P)}{\partial P_N} = 0 \quad (3.2)$$

A equação (3.2) pode ser representada na notação matricial igualando o gradiente da norma de mínimos quadrados com respeito ao vetor de parâmetros  $P^T = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots \ P_N]$  a zero. Isto é:

$$\nabla S(P) = 2 \left[ -\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right] [Y - T(P)] = 0 \quad (3.3)$$

onde:

$$\frac{\partial T^T(P)}{\partial P} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial P_1} \\ \frac{\partial}{\partial P_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial P_N} \end{bmatrix} [T_1 \ T_2 \ \dots \ T_l] = 0 \quad (3.4)$$

A matriz de Sensibilidade ou Jacobiano,  $J(P)$ , é definida como a transposta da equação (3.4):

$$J(P) = \left[ \frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right]^T \quad (3.5)$$

Na forma explícita, a matriz de sensibilidade é escrita como:

$$J(P) = \left[ \frac{\partial T^T(P)}{\partial P} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_1}{\partial P_1} & \frac{\partial T_1}{\partial P_2} & \frac{\partial T_1}{\partial P_3} & \cdots & \frac{\partial T_1}{\partial P_N} \\ \frac{\partial T_2}{\partial P_1} & \frac{\partial T_2}{\partial P_2} & \frac{\partial T_2}{\partial P_3} & \cdots & \frac{\partial T_2}{\partial P_N} \\ \frac{\partial T_3}{\partial P_1} & \frac{\partial T_3}{\partial P_2} & \frac{\partial T_3}{\partial P_3} & \cdots & \frac{\partial T_3}{\partial P_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T_I}{\partial P_1} & \frac{\partial T_I}{\partial P_2} & \frac{\partial T_I}{\partial P_3} & \cdots & \frac{\partial T_I}{\partial P_N} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

onde:

$N$  : número total de parâmetros desconhecidos.

$I$  : número total de medições.

Os elementos da matriz de sensibilidade representam as variações na solução calculada em relação às variações dos parâmetros, estes são chamados coeficientes de sensibilidades.

Substituindo a equação (3.5) na equação (3.3), obtêm-se:

$$-2J^T(P)[Y - T(P)] = 0 \quad (3.7)$$

Nos problemas inversos não lineares, como é o caso dos fenômenos térmicos e mecânicos envolvidos nos processos de aquecimento a matriz de sensibilidade tem uma dependência funcional do vetor de parâmetros desconhecidos  $P$ , requerendo um processo iterativo, que é obtido pela linearização do vetor de temperaturas calculadas  $T(P)$ , com uma expansão da série de Taylor ao redor da solução atual  $P^k$  na iteração  $k$ . Tal linearização é dada por:

$$T(P) = T(P^k) + J^k(P - P^k) \quad (3.8)$$

onde,  $T(P^k)$  e  $J^k$  são as temperaturas calculadas e a matriz de sensibilidade avaliadas na iteração  $k$ , respectivamente.

A equação (3.8) é substituída na equação (3.7), e a expressão resultante é rearranjada para representar o procedimento iterativo visando a obtenção do vetor de parâmetros desconhecidos  $P$ .

$$P^{k+1} = P^k + \left[ (J^k)^T J^k \right]^{-1} (J^k)^T [Y - T(P^k)] \quad (3.9)$$

Os problemas inversos são geralmente mal-postos, especialmente perto dos parâmetros desconhecidos de teste inicial, criando dificuldades na aplicação da equação (3.9). O método de Levenberg-Marquardt contorna tais dificuldades utilizando a equação (3.9) na forma:

$$P^{k+1} = P^k + \left[ (J^k)^T J^k + \mu^k \Omega^k \right]^{-1} (J^k)^T [Y - T(P^k)] \quad (3.10)$$

$$P^{k+1} = P^k + \Delta P^k \quad (3.11)$$

$$\Delta P^k = \left[ (J^k)^T J^k + \mu^k \Omega^k \right]^{-1} (J^k)^T [Y - T(P^k)] \quad (3.12)$$

$k$  : Número de iterações.

$\Delta P^k$ : Vetor incremento dos parâmetros desconhecidos.

$\mu^k$ : Parâmetro de amortecimento.

$\Omega^k$ : Matriz diagonal.

$$\Omega^k = \text{diag} \left[ (J^k)^T J^k \right]$$

$J^k$  : Matriz de sensibilidade.

$( )^T$ : Denota a transposta da matriz.

$[ ]^{-1}$ : Denota a inversa da matriz.

### 3.1.2. Critérios de Parada.

São utilizados os seguintes critérios para identificar se a solução atingiu a precisão requerida:

$$S(P^{k+1}) < \varepsilon_1 \quad (3.13)$$

$$\|(J^k)^T[Y - T(P^k)]\| < \varepsilon_2 \quad (3.14)$$

$$\|P^{k+1} - P^k\| < \varepsilon_3 \quad (3.15)$$

onde,  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  e  $\varepsilon_3$  são tolerâncias predefinidas pelo usuário e  $\|\cdot\|$  é a norma do vetor Euclidiano  $\|X\| = (X^T X)^{1/2}$ .

### 3.1.3. Algoritmo Computacional.

Consideram-se as medições  $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_I)$ , avaliadas nos tempos  $t_i, i = 1, 2, \dots, I$ . Supõe-se um valor inicialmente adotado  $P^0$  para o vetor dos parâmetros desconhecidos  $P$ ,  $\mu^0 = 0.001$  [119], para a primeira iteração, ou seja,  $k = 0$ . O algoritmo de Levenberg – Marquardt para a determinação dos parâmetros desconhecidos descreve-se a seguir:

Passo 1. Resolve-se o problema direto com os valores estimados  $P^k$  correspondentes à atual iteração, para obter o vetor de solução calculada  $T(P^k) = (T_1, T_2, \dots, T_I)$ .

Passo 2. Calcula-se  $S(P^k)$ .

Passo 3. Calcula-se a matriz de sensibilidade  $J^k$ , e a matriz  $\Omega^k = \text{diag}[(J^k)^T J^k]$ , para a determinação do valor do vetor  $\Delta P^k$ .

Passo 4. Resolve-se o seguinte sistema de equações lineares.

$$[(J^k)^T J^k + \mu^k \Omega^k] \Delta P^k = (J^k)^T [Y - T(P^k)] \quad (3.16)$$

Passo 5. Computa-se nova estimativa  $P^{k+1}$ .

$$P^{k+1} = P^k + \Delta P^k \quad (3.17)$$

Passo 6. Resolve-se o problema direto com nova estimativa do vetor de parâmetros  $P^{k+1}$  para o cálculo do vetor  $T(P^{k+1})$ . Computa-se  $S(P^{k+1})$ .

Passo 7. Se  $S(P^{k+1}) \geq S(P^k)$ , substitui-se  $\mu^k$  por  $10 \cdot \mu^k$  e retorna-se ao passo 4.

Passo 8. Se  $S(P^{k+1}) < S(P^k)$ , aceita-se a nova estimativa  $P^{k+1}$  e substitui-se  $\mu^k$  por  $0.1 \cdot \mu^k$ .

Passo 9. Verifica-se o critério de parada. O procedimento iterativo é interrompido se algum dos critérios é satisfeito, caso contrário, troca-se  $k$  por  $k + 1$  e volta-se ao passo 3.

### 3.1.4. Análise Estatística da Estimação de Parâmetros.

Considerando  $\hat{P}_j, j=1, \dots, N$  como os valores estimados dos  $N$  parâmetros desconhecidos  $P_j, j=1, \dots, N$  e a matriz de covariância,  $V$ , destes valores estimados, dada em [120] e mostrada na equação (3.18), é possível determinar a precisão das estimativas usando as hipóteses estatísticas discutidas na seção 1-4 de [119] e a minimização da norma de mínimos quadrados ordinária para resolver o problema de estimação de parâmetros [119]. A covariância de duas variáveis aleatórias é a medida da dependência linear entre estas variáveis, se a covariância for zero então as duas variáveis são independentes.

$$V = \begin{bmatrix} \text{cov}(\hat{P}_1, \hat{P}_1) & \text{cov}(\hat{P}_1, \hat{P}_2) & \dots & \text{cov}(\hat{P}_1, \hat{P}_N) \\ \text{cov}(\hat{P}_2, \hat{P}_1) & \text{cov}(\hat{P}_2, \hat{P}_2) & \dots & \text{cov}(\hat{P}_2, \hat{P}_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{cov}(\hat{P}_N, \hat{P}_1) & \text{cov}(\hat{P}_N, \hat{P}_2) & \dots & \text{cov}(\hat{P}_N, \hat{P}_N) \end{bmatrix} = (J^T J)^{-1} \sigma^2 \quad (3.18)$$

onde  $J$  é a matriz de sensibilidade e  $\sigma$  é o desvio padrão dos erros das medições, que são assumidas constantes.

O desvio padrão para os parâmetros estimados podem ser obtidos dos elementos da diagonal da matriz  $V$ , ou seja:

$$\sigma_{\hat{P}_j} = \sqrt{V_{jj}} = \sqrt{\text{cov}(\hat{P}_j, \hat{P}_j)} = \sigma \sqrt{[J^T J]_{jj}^{-1}}, j = 1, \dots, N \quad (3.19)$$

O intervalo de confiança com 99% de nível de confiança para os parâmetros estimados é obtido por:

$$\hat{P}_j - 2.576\sigma_{\hat{P}_j} \leq P_j \leq \hat{P}_j + 2.576\sigma_{\hat{P}_j}, \text{ para } j = 1, \dots, N \quad (3.20)$$

Considerando uma função de probabilidade de distribuição normal (Gaussiana) para os valores estimados e com média  $\mu$ , esta função é dada por:

$$f(\hat{P}_j) = \frac{1}{\sigma_{\hat{P}_j} \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{1}{2} \left( \frac{\hat{P}_j - \mu}{\sigma_{\hat{P}_j}} \right)^2 \right] \quad (3.191)$$

## 3.2. Procedimento na Determinação Numérica dos Coeficientes de Sensibilidade

### 3.2.1. Análise Térmica.

A equação (2.16), correspondente à análise de transferência de calor por elementos finitos, pode ser reescrita da seguinte forma:

$$[C]\{\dot{T}_e\} + [K]\{T_e\} = \{f\} \quad (3.20)$$

Sendo:

$$[C] = [C_e^t]$$

$$[K] = [K_e^{th}] + [K_e^{tc}]$$

$$\{f\} = \{Q_e^f\} + \{Q_e^c\} + \{Q_e^G\}$$

Para obter a derivada parcial da temperatura em relação ao tempo, considerando a aproximação por diferenças finitas e a discretização no tempo, obtêm-se[18]:

$$\frac{\partial T^n}{\partial t} \approx \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.21)$$

Introduzindo um parâmetro  $\theta$  tal que:

$$T^{n+\theta} = \theta T^{n+1} + (1 - \theta)T^n \quad (3.22)$$

Logo, inserindo as equações (3.23) e (3.24) na equação (3.22) se obtém:

$$[C] \left\{ \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \right\} + [K] \{T\}^{n+\theta} = \{f\}^{n+\theta} \quad (3.23)$$

ou,

$$[C] \left\{ \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \right\} + [K] \{\theta T^{n+1} + (1 - \theta)T^n\} = \theta \{f\}^{n+1} + (1 - \theta)\{f\}^n \quad (3.24)$$

Fazendo-se um rearranjo a equação (3.26) fica:

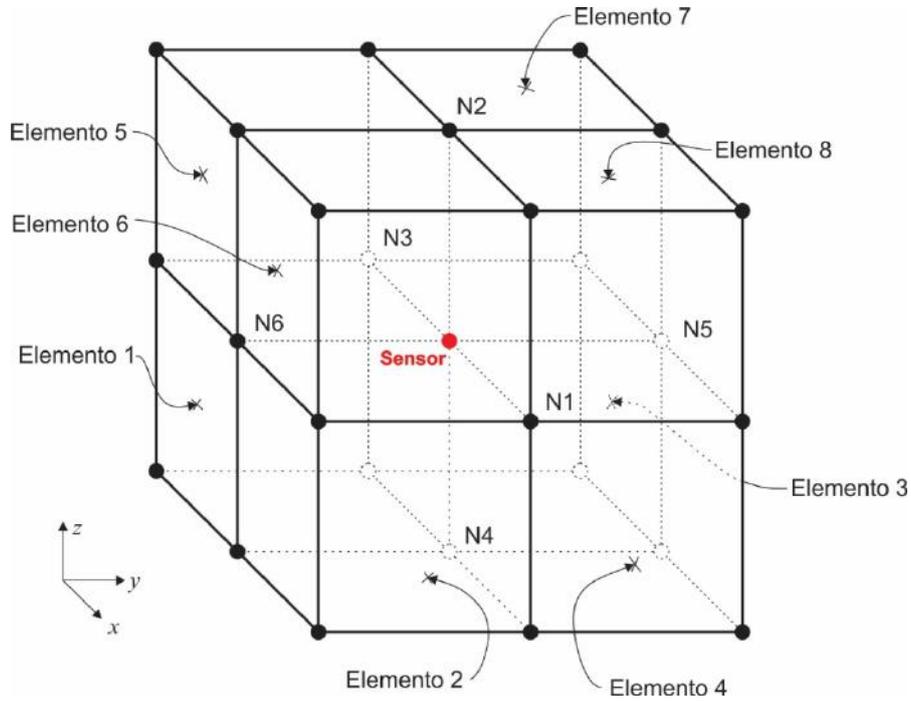
$$[C] \left( \{T\}^{n+1} - \{T\}^n \right) = -\Delta t [K] \{\theta T^{n+1} + (1 - \theta)T^n\} + \Delta t \left( \theta \{f\}^{n+1} + (1 - \theta)\{f\}^n \right) \quad (3.25)$$

Ao variar o parâmetro  $\theta$ , diferentes esquemas transientes podem ser construídos, os quais são apresentados na Tabela 3.1 para vários valores de  $\theta$ .

**Tabela 3.1.** Esquemas de passo de tempo.[18]

$\theta$	Nome do esquema	Método
0.0	Completamente explícito	Diferenças progressivas
1.0	Completamente implícito	Diferenças regressivas
0.5	Semi-implícito	Crank-Nicolson

Os coeficientes de sensibilidade são determinados nos pontos de medição (posição dos sensores térmicos). Suponhamos o sensor na posição no meio de quatro elementos numa malha de elementos finitos como mostra a *Figura.3.1*.



**Figura 3.1.** Posição do sensor térmico na malha de elementos finitos.

O sensor tem influência direta dos nós N1, N2, N3, N4, N5, N6, desta maneira a equação para o sensor baseado na equação matricial (3.27) pode ser escrita:

$$\sum_i [C_{S,i}(T_i^{n+1} - T_i^n)] = \Delta t \sum_i [K_{S,i}(\theta T_i^{n+1} + (1 - \theta)T_i^n)] + \Delta t f_S \quad (3.26)$$

onde,  $i = N1, N2, N3, N4, N5, N6, S$ .

Reordenando a equação (3.28):

$$(T_S^{n+1} - T_S^n) = \Delta t \sum_i \left[ \frac{K_{S,i}}{C_{S,S}} (\theta T_i^{n+1} + (1 - \theta)T_i^n) \right] - \sum_j \left[ \frac{C_{S,j}}{C_{S,S}} (T_j^{n+1} - T_j^n) \right] + \frac{\Delta t f_S}{C_{S,S}} \quad (3.27)$$

sendo,  $i = N1, N2, N3, N4, N5, N6, S$  e  $j = N1, N2, N3, N4, N5, N6$ .

Lembrando que:

$$[C] = [C_e^t]$$

$$[K] = [K_e^{th}] + [K_e^{tc}]$$

$$\{f\} = \{Q_e^f\} + \{Q_e^c\} + \{Q_e^G\}$$

Em termos das componentes da matriz:

$$C_{S,j} = C \cdot I1_j \quad (3.28)$$

$$K_{S,i} = K_{S,i}^{th} + K_{S,i}^{tc} = k \cdot I2_i + h_f \cdot I3_i \quad (3.29)$$

$$f_S = q_{sup} \cdot I4_S + h_f \cdot T_\infty \cdot I3_S + \dot{Q}_G \cdot I5_S \quad (3.30)$$

onde,

$$I1 = \int_V N_{S,i} \cdot N_{i,S} dV$$

$$I2 = \int_V B_{i,S} \cdot B_{S,i} dV$$

$$I3 = \int_{S_1+S_2} N_{S,i} \cdot N_{i,S} d(S_1 + S_2)$$

$$I4 = \int_{S_1} N_{S,i} dS_1$$

$$I5 = \int_V N_{S,i} dV$$

Substituindo as equações (3.30), (3.31) e (3.32) na equação (3.29), temos:

$$\begin{aligned}
(T_S^{n+1} - T_S^n) = & \Delta t \frac{1}{C} \sum_i \left[ \frac{k \cdot I2_i + h_f \cdot I3_i}{I1_S} (\theta T_i^{n+1} + (1 - \theta) T_i^n) \right] \\
& - \sum_j \left[ \frac{I1_j}{I1_S} (T_j^{n+1} - T_j^n) \right] \\
& + \frac{\Delta t (q_{sup} \cdot I4_S + h_f \cdot T_\infty \cdot I3_S + \dot{Q}_G \cdot I5_S)}{C_{S,S}}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Para a determinação dos coeficientes de sensibilidade os parâmetros desconhecidos devem ser estabelecidos, os quais podem ser as propriedades térmicas do material (calor específico, condutividade térmica ou coeficiente de convecção) ou as variáveis que regulam a função de distribuição da fonte de calor. Portanto, a equação (3.33) em função destes parâmetros pode ser colocada na forma:

$$\begin{aligned}
(T_S^{n+1} - T_S^n) = & \Delta t \frac{1}{P_1} \sum_i \left[ \frac{P_2 \cdot I2_i + P_3 \cdot I3_i}{I1_S} (\theta T_i^{n+1} + (1 - \theta) T_i^n) \right] + \\
& \frac{\Delta t (q_{sup}(P_5, P_6, \dots, P_N) \cdot I4_S + P_3 \cdot T_\infty \cdot I3_S + P_4 \cdot I5_S)}{C_{S,S}} \\
& \sum_j \left[ \frac{I1_j}{I1_S} (T_j^{n+1} - T_j^n) \right] = g(P_1, P_2, \dots, P_n)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Quando a equação (3.34) é derivada em relação aos parâmetros desconhecidos produz como resultado os coeficientes de sensibilidade:

$$J(P) = \frac{\partial g(P)}{\partial P} \tag{3.33}$$

onde:  $P = \{P_1 \dots P_N\}$  é o vetor de parâmetros desconhecidos

### 3.2.2. Análise Mecânica.

A formulação correspondente à análise mecânica é mostrada na equação (2.38), a qual pode ser reescrita como:

$${}^{m+1}[K_e]\{\Delta U_e\} - {}^{m+1}[K_e^{th}]\{\Delta T_e\} = \{\Delta F_e^{nd}\} + \{\Delta F_e^{pr}\} \quad (3.34)$$

sendo:

$$[K_e] = \int_{\forall} [B]^T [D^{ep}] [B] d\forall$$

$$[K_e^{th}] = \int_{\forall} [B]^T \{C^{th}\} [N]^T d\forall$$

$$\{F_e^{nd}\} = \int_{\forall} [N]^T \{f\} d\forall$$

$$\{F_e^{pr}\} = \int_A [N]^T \{P\} dA$$

$$\{\Delta R\} = \{F_e^{nd}\} + \{F_e^{pr}\}$$

Na determinação dos coeficientes de sensibilidade considera-se a malha tridimensional de elementos finitos mostrada na *Figura 3.1*, sendo o nó de medição dos deslocamentos o ponto “S”, que pode se deslocar na direção  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tendo ação direta dos nós vizinhos N1, N2, N3, N4, N5, N6. Convenientemente, escolhemos a medição do deslocamento  $v$  pelo sensor, que corresponde à translação na direção  $y$  do ponto S. A equação do deslocamento  $v$  do nó S baseado na equação (3.36) é da forma:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^4 (K1E(2i)_{S,N1}) \Delta u_{N1} + \sum_{i=1}^4 (K1E(2i)_{S,N1+1}) \Delta v_{N1} + \sum_{i=1}^4 (K1E(2i)_{S,N1+2}) \Delta w_{N1} + \\
& \sum_{i=1}^4 (K1E(i+4)_{S,N2}) \Delta u_{N2} + \sum_{i=1}^4 (K1E(i+4)_{S,N2+1}) \Delta v_{N2} + \sum_{i=1}^4 (K1E(i+4)_{S,N2+2}) \Delta w_{N2} + \\
& \sum_{i=1}^4 (K1E(2i-1)_{S,N3}) \Delta u_{N3} + \sum_{i=1}^4 (K1E(2i-1)_{S,N3+1}) \Delta v_{N3} + \sum_{i=1}^4 (K1E(2i-1)_{S,N3+2}) \Delta w_{N3} + \\
& \sum_{i=1}^4 (K1E(i)_{S,N4}) \Delta u_{N4} + \sum_{i=1}^4 (K1E(i)_{S,N4+1}) \Delta v_{N4} + \sum_{i=1}^4 (K1E(i)_{S,N4+2}) \Delta w_{N4} + \\
& \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2i + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N5} \right) \Delta u_{N5} + \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2i + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N5+1} \right) \Delta v_{N5} + \\
& \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2i + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N5+2} \right) \Delta w_{N5} + \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2(i-1) + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N6} \right) \Delta u_{N6} + \\
& \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2(i-1) + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N6+1} \right) \Delta v_{N6} + \\
& \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2(i-1) + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N6+2} \right) \Delta w_{N6} + \\
& \sum_{i=1}^8 (K1E(i)_{S,S}) \Delta u_S + \sum_{i=1}^8 (K1E(i)_{S,S+1}) \Delta v_S + \sum_{i=1}^8 (K1E(i)_{S,S+2}) \Delta w_S - \\
& \sum_{i=1}^8 K2E(i) \Delta TE(i) = \Delta R_{vS}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

sendo,  $E(i)$  o identificador do elemento  $i = 1, \dots, 8$ ,  $K1E(i)_{S,k}$  a componente da matriz de rigidez do elemento número  $i$ ,  $k = N1, \dots, N8$ ,  $K2E(i)$  a componente do vetor do carregamento térmico do elemento número  $i$ ,  $\Delta u_N$  o incremento do deslocamento na direção  $x$ ,  $\Delta v_N$  o incremento do deslocamento na direção  $y$ ,  $\Delta w_N$  o incremento do deslocamento na direção  $z$ ,  $\Delta TE(i)$  o incremento da temperatura do elemento  $i$ ,  $\Delta R_{vS}$  o incremento da força de reação no sentido  $y$  do ponto  $S$ .

Reordenando a equação (3.37) para que o incremento de deslocamento  $v$  do nó  $S$   $\Delta v_S$  fique isolado:

$$\begin{aligned}
\Delta v_S = & \left( \Delta R_{v,S} + \sum_{i=1}^8 K2E(i)\Delta TE(i) - \sum_{i=1}^8 (K1E(i)_{S,S})\Delta u_S - \sum_{i=1}^8 (K1E(i)_{S,S+2})\Delta w_S - \right. \\
& - \sum_{i=1}^4 (K1E(2i)_{S,N1})\Delta u_{N1} - \sum_{i=1}^4 (K1E(2i)_{S,N1+1})\Delta v_{N1} - \sum_{i=1}^4 (K1E(2i)_{S,N1+2})\Delta w_{N1} - \\
& \sum_{i=1}^4 (K1E(i+4)_{S,N2})\Delta u_{N2} - \sum_{i=1}^4 (K1E(i+4)_{S,N2+1})\Delta v_{N2} - \sum_{i=1}^4 (K1E(i+4)_{S,N2+2})\Delta w_{N2} - \\
& \sum_{i=1}^4 (K1E(2i-1)_{S,N3})\Delta u_{N3} - \sum_{i=1}^4 (K1E(2i-1)_{S,N3+1})\Delta v_{N3} - \sum_{i=1}^4 (K1E(2i-1)_{S,N3+2})\Delta w_{N3} - \\
& \sum_{i=1}^4 (K1E(i)_{S,N4})\Delta u_{N4} - \sum_{i=1}^4 (K1E(i)_{S,N4+1})\Delta v_{N4} - \sum_{i=1}^4 (K1E(i)_{S,N4+2})\Delta w_{N4} - \\
& \left. \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2i + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N5} \right) \Delta u_{N5} - \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2i + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N5+1} \right) \Delta v_{N5} - \right. \\
& \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2i + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N5+2} \right) \Delta w_{N5} - \\
& \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2(i-1) + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N6} \right) \Delta u_{N6} - \\
& \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2(i-1) + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N6+1} \right) \Delta v_{N6} - \\
& \left. \sum_{i=1}^4 \left( K1E \left( 2(i-1) + \frac{((-1)^{(i+1)} + 1)}{2} \right)_{S,N6+2} \right) \Delta w_{N6} \right) / \sum_{i=1}^8 (K1E(i)_{S,S+1})
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Lembrando que na equação (3.36) as componentes da matriz de rigidez e da matriz de rigidez térmica no ponto S da malha de elementos finitos são determinadas por:

$$K1Ei_{S,Nj} = \int_{\forall} B_{Nj,S} \cdot D_{S,Nj}^{ep} \cdot B_{S,Nj} d\forall \tag{3.37}$$

$$K2Ei_{S,Nj} = \int_{\forall} B_{Nj,S} \cdot C_{S,Nj}^{th} \cdot M_{S,Nj} d\forall \tag{3.38}$$

As variáveis  $D_{S,Nj}^{ep}$  e  $C_{S,Nj}^{th}$  são dependentes das propriedades mecânicas do material, as quais nesta tese são: o coeficiente de Poisson, módulo de elasticidade, tensão de escoamento e a declividade da curva de encruamento, em função da temperatura. A variável  $M_{Si}$  está em função do coeficiente de expansão térmica. Então, as equações (3.39) e (3.40) podem ser expressas por:

$$\begin{aligned}
K1Ei_{S,Nj} &= \int_{\forall} B_{Nj,S} \cdot D_{S,Nj}^{ep}(E(T), \sigma_y(T), \nu(T), H(T)) \cdot B_{S,Nj} d\forall \\
&= K1Ei_{S,Nj}(E(T), \sigma_y(T), \nu(T), H(T)) \\
&= K1Ei_{S,Nj}(P)
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}
K2Ei_{S,Nj} &= \int_{\forall} B_{Nj,S} \cdot C_{S,Nj}^{th}(E(T), \sigma_y(T), \nu(T), H(T)) \cdot M_{S,Nj}(\alpha(T)) d\forall \\
&= K2Ei_{S,Nj}(E(T), \sigma_y(T), \nu(T), H(T), \alpha(T)) \\
&= K2Ei_{S,Nj}(P)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

sendo,  $P = \{P_1 \dots P_n\}$  o vetor de parâmetros desconhecidos.

Para a determinação dos coeficientes de sensibilidade se deriva a equação (3.38) em relação à propriedade do material que se quer designar como parâmetro desconhecido, então:

$$J(P) = \frac{\partial v_s(P)}{\partial P} \tag{3.41}$$

### 3.3. Sub-Rotinas do ANSYS.

O programa de elementos finitos ANSYS fornece uma série de facilidades em sua programação permitindo ao usuário adaptá-lo a suas necessidades, por exemplo, a criação de um novo elemento, novas relações constitutivas do material, elementos especiais ou critérios de falhas.

O ANSYS fornece as seguintes capacidades [121]:

- Ler uma informação interna à estrutura do programa ou buscar informações no banco de dados ANSYS, criar sub-rotinas e ligá-las ao programa ou usá-las como um recurso de comando externo.
- Fornecer um conjunto de sub-rotinas que são usadas para especificar vários tipos de cargas (forças de superfície, forças de corpo, pressão, convecção, fluxo de calor entre outras), propriedades do material (plasticidade, fluência, visco plasticidade,

hiperelasticidade, etc), criar novos elementos, modificar e monitorar elementos existentes, e otimizar projetos.

As sub-rotinas do ANSYS a serem empregadas, tanto na análise térmica como na mecânica, na presente tese, são as UELMATX e USERMAT, as quais serão descritas a seguir.

### 3.3.1. Sub-rotina UELMATX.

Está incluída no conjunto de sub-rotinas do ANSYS para modificar e monitorar elementos existentes e permite o acesso às matrizes dos elementos e vetores de cargas, os quais são necessários para o cálculo dos coeficientes de sensibilidade, dados pela equação (3.6).

Para a parte térmica da simulação termomecânica que é descrita pela equação (3.27), é preciso conhecer a matriz de calor específico  $[C]$ , matriz de condutividade  $[K]$  e o vetor fluxo de calor  $\{f\}$ . Para a parte estrutural, baseada na equação (3.41), é necessário a matriz de rigidez  $[K_e]$  e o vetor de carregamento térmico  $[K_e^{th}]$  e as forças  $\{F_e^{nd}\}$  e  $\{F_e^{pr}\}$ . As componentes dessas matrizes permitem o cálculo dos parâmetros  $I1$ ,  $I2$ ,  $I3$ ,  $I4$  e  $I5$  da equação (3.33), que intervierem no cálculo dos coeficientes de sensibilidade, equação (3.6).

### 3.3.2. Sub-rotina USERMAT.

A sub-rotina USERMAT é usada para definir a relação tensão-deformação, o comportamento mecânico constitutivo do material, e pode ser usado em qualquer procedimento de análise mecânica do ANSYS. Para cada iteração de Newton-Raphson, a sub-rotina USERMAT é chamada em cada ponto de integração do material. Na estrutura de análise do ANSYS, os valores de tensão, deformação e variáveis de estado no início do incremento de tempo, e o atual incremento de deformação são introduzidas na sub-rotina USERMAT, que processa estas informações para atualizar os valores de tensão e variáveis de estado no fim do incremento de tempo. A sub-rotina USERMAT também pode prover a matriz Jacobiano do material  $\partial\sigma_{ij}/\partial\varepsilon_{ij}$ .

Neste trabalho o USERMAT será utilizado para obter os valores das grandezas da equação (2.82), no final de cada incremento de tempo, os quais serão utilizados na determinação da tensão de escoamento dependente da temperatura.

# Capítulo 4

## Procedimento Experimental e Análise dos Resultados

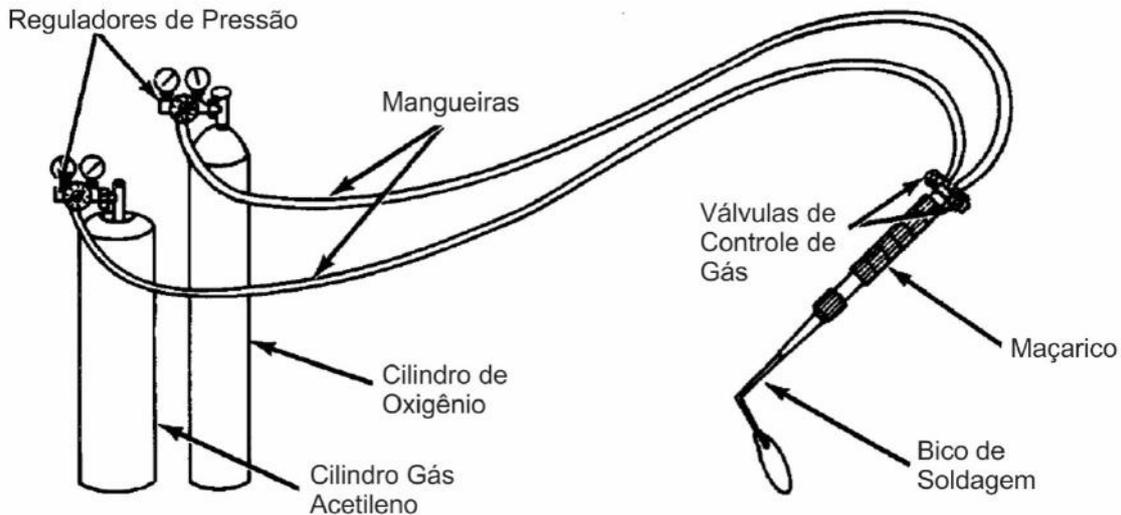
### 4.1. Introdução.

Os processos de soldagem por fusão em que as superfícies do metal a serem unidas são fundidas progressivamente pelo calor fornecido por fontes de arco elétrico ou chama de oxi-gás podem se diferenciar pela intensidade de calor transmitida, como visto no item 2.4.2. Nesse sentido, o arco elétrico é capaz de fundir com facilidade placas de fina e meia espessura em curto espaço de tempo. A chama oxi-acetilênica, que é produzida pela reação entre o gás combustível (acetileno) e o oxigênio, fornece uma alta temperatura da chama em relação a outros gases combustíveis, porém com uma intensidade de calor menor que a do arco elétrico. Com o intuito de avaliar e posteriormente validar a metodologia proposta para a solução de problemas inversos termomecânicos mediante o algoritmo de Levenberg-Marquardt são realizados 6 ensaios experimentais em condições semelhantes. O procedimento experimental desenvolvido nesta tese corresponde ao processo de aquecimento por chama oxi-acetilênica devido à vantagem da sua adequabilidade de trabalho em chapas finas e de meia espessura, como é o caso da presente tese. Além disso, a chama oxi-acetilênica possibilita o controle da temperatura para evitar a fusão do material em intervalo de tempo muito curto, dificultando as medições das temperaturas e dos correspondentes deslocamentos.

Nos ensaios experimentais seis chapas circulares de aço ASTM A36 de diâmetro de 400 mm são aquecidas por meio de chama oxi-acetilênica fixa em seus centros até que nas superfícies inferiores das chapas cheguem a uma temperatura aproximada de 800°C. As seis chapas circulares são constituídas por pares de chapas com espessuras nominais de 6,0 mm, 8,0 mm e 10,0 mm, denominadas PC 1-6, PC 2-6, PC 1-8, PC 2-8, PC 1-10 e PC 2-10. As temperaturas são medidas por meio de sensores termopares, assim como, os deslocamentos medidos por sensores LVDT's.

## 4.2. Equipamento da Soldagem Oxi-Acetilênica.

O equipamento mínimo necessário para executar a soldagem consiste de cilindros de gás oxigênio e acetileno, cada um com regulador de pressão, mangueiras para conduzírem os gases para o maçarico e uma combinação de maçarico e bico para ajuste da mistura gasosa e produção da chama desejada. O esquema do equipamento é mostrado na *Figura 4.1*.



**Figura 4.1.** Equipamento básico da soldagem oxi-acetilênica. [93].

## 4.3. Sensores Térmicos e de Deslocamentos.

### a) Termopares.

O termopar é um sensor utilizado para a medição da temperatura, constituído por dois fios metálicos distintos, que são unidos em contato com a superfície a ser aquecida. Durante o aquecimento gera-se uma tensão proporcional à diferença de temperatura entre a extremidade quente e a da extremidade ligada ao aparelho de aquisição (temperatura ambiente).

Para ensaios onde é preciso medir as temperaturas com exatidão nos processos de soldagem, os termopares tipo K são amplamente utilizados. O terminal positivo é fabricado de uma liga de níquel com 10% de cromo e o terminal negativo de uma liga de níquel com 2% de alumínio, 2% de manganês e 1% de silício. A faixa de temperatura de serviço é de  $-270\text{ }^{\circ}\text{C}$  a  $1200\text{ }^{\circ}\text{C}$  com um erro padrão de 0,75% a 2,2%. No presente trabalho será utilizado o termopar tipo K de fios finos (diâmetro do fio 0,38 [mm]) marca

Omega, *Figura 4.2*. Com esta opção, obtêm-se medições precisas com alta frequência de aquisição, mas limitando a temperatura de serviço máxima em 871 °C.



**Figura 4.2.** Fios de termopar.

#### **b) Transformador Diferencial Variável Linear**

O transformador diferencial de variável linear, ou LVDT por suas siglas em inglês, é um transdutor para medição de deslocamento linear. O funcionamento é baseado em três bobinas e um núcleo cilíndrico de material ferromagnético de alta permeabilidade. Ele dá como saída um sinal linear, proporcional ao deslocamento do núcleo, que está fixado ou em contato no local onde o deslocamento deverá ser medido.

No ensaio experimental é usado o LVDT de meia ponte marca Peter Hirt GmbH modelo T101F, como mostrado na *Figura 4.3*, com as seguintes características: curso total = 4,6 mm, curso de medição (simétrico) =  $\pm 2$  mm, temperatura de trabalho = -10 a 65 °C, erro linear = 0,25% da escala total (em 20 °C  $\pm$  1°C).

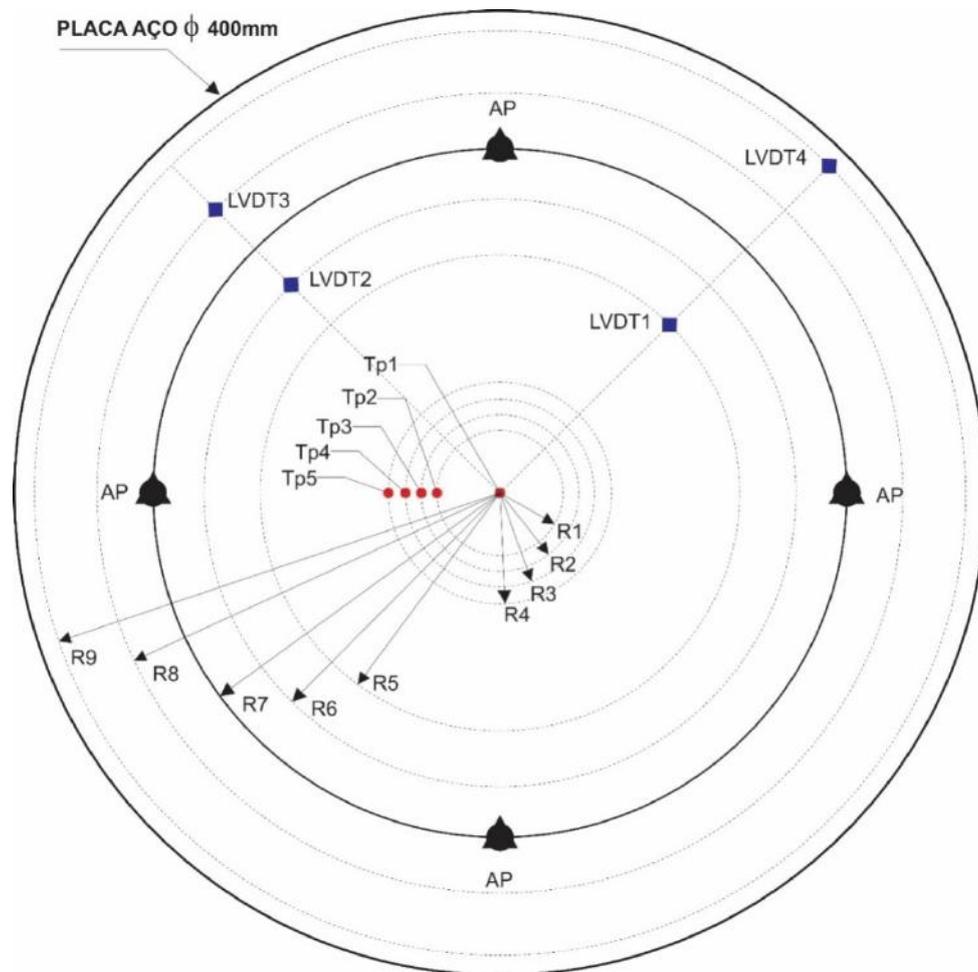


**Figura 4.3.** LVDT de meia ponte

#### **4.4. Procedimento dos Ensaios.**

Cinco termopares do tipo K são fixados na superfície da placa onde não é aplicada a fonte de calor (superfície inferior), evitando que as medições das temperaturas sejam afetadas pela radiação da fonte de calor. Os termopares são representados no esquema da *Figura 4.4* com pontos vermelhos e definidos como TP1, TP2, TP3, TP4 e TP5. Para se ter uma melhor representatividade da distribuição de temperatura na superfície da placa, os pontos de medições foram concentrados na região onde se espera maior gradiente, ou

seja, próximos à fonte de calor. As distâncias destes pontos em relação ao centro da placa circular são: TP1, R0= 0 mm; TP2, R1=10 mm; TP3, R2=15 mm; TP4, R3=20 mm e TP5, R4=25 mm.

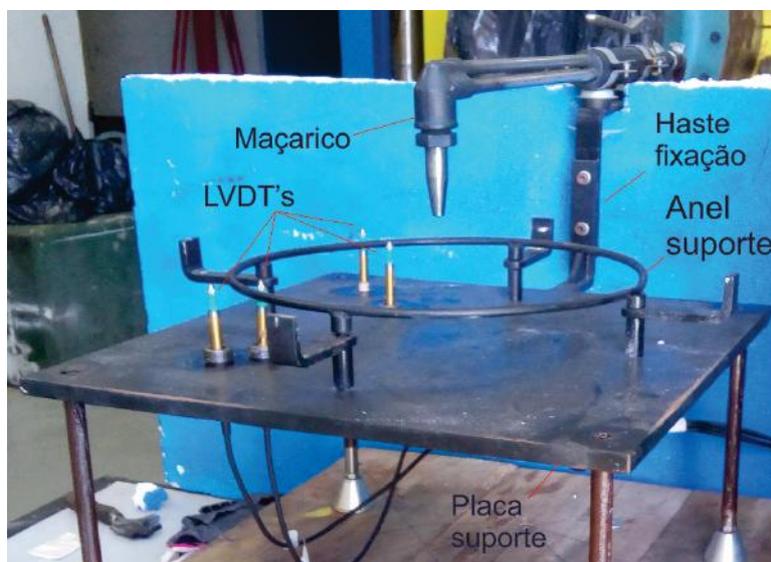


**Figura 4.4.** Esquema de disposição na superfície inferior da placa.

Quatro LVDT's, representados na *Figura 4.4* por quadrados azuis, são definidos como LVDT1, LVDT2, LVDT3 e LVDT4. Devido à baixa temperatura de serviço (65°C) dos LVDT's, utiliza-se uma proteção para altas temperaturas colocando um isolamento de papel cerâmico entre os LVDT's e a placa. As distâncias dos LVDT's em relação ao centro da placa são: LVDT1, R5=120 mm; LVDT2, R6=135 mm; LVDT3, R8=160 mm e LVDT4, R9=190 mm.

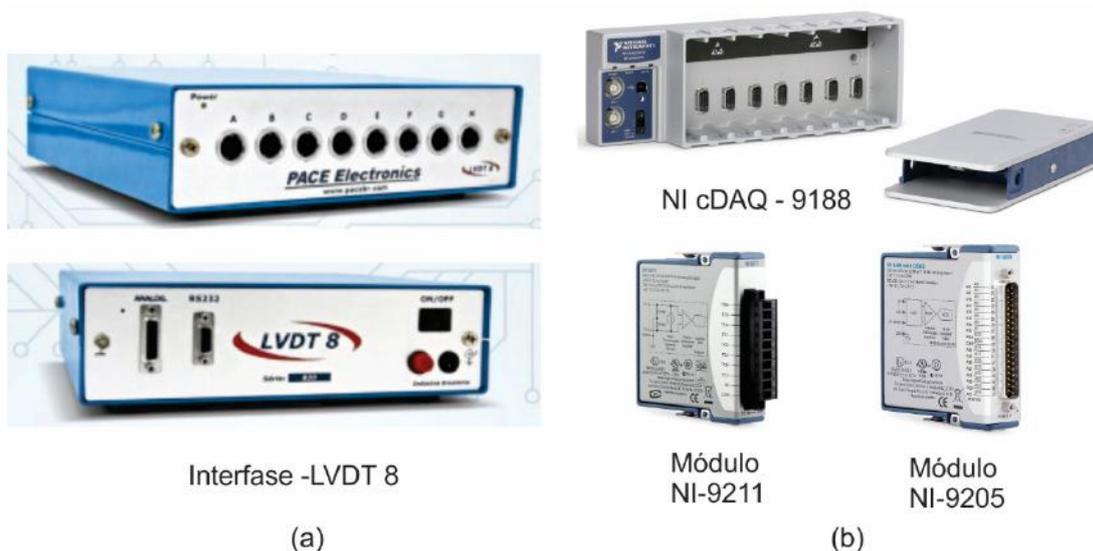
A placa circular é apoiada num anel concêntrico de raio  $R7 = 145$  mm, que é elevado da placa suporte a uma altura de 150 mm por 4 pés, na *Figura 4.4* representados por "AP". Preso a este dispositivo também existe uma haste de fixação do maçarico que permite o posicionamento da chama oxi-acetilênica no centro da placa circular a uma

altura entre 25 mm e 30 mm da superfície. Na placa suporte também existem orifícios onde os LVDT's são introduzidos para sua fixação em locais pré-determinados. Em todos os ensaios utiliza-se o bico de maçarico de número 6. Na *Figura 4.5.* mostra-se o anel de suporte para a placa e a placa suporte com os LVDT's montados.

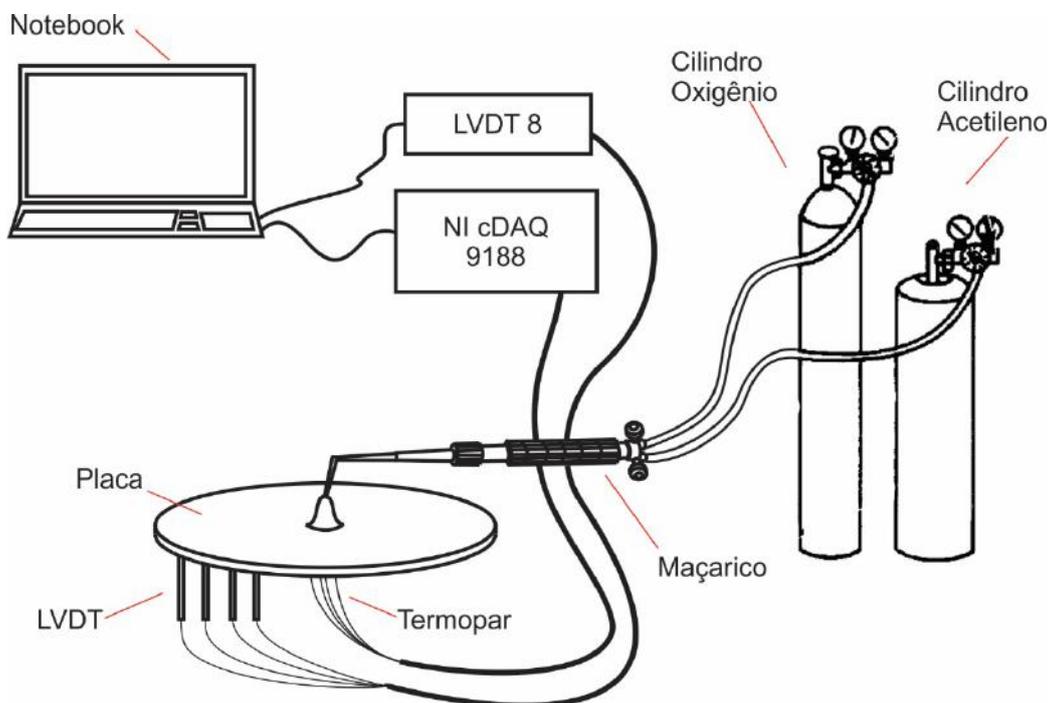


**Figura 4.5.** Suporte para placa, maçarico e LVDT's.

Os LVDT's são conectados a uma interface de medição de alta precisão para sensores indutivos marca PACE Electronics modelo LVDT 8, *Figura 4.6(a)*. A interface mencionada e os cinco termopares são conectados a um controle de temporização, sincronização e transferência de dados, cDAQ marca National Instruments modelo 9188, mediante módulos NI-9205 para a interface LVDT 8 e NI-9211 para os termopares, *Figura 4.6(b)*. O cDAQ é ligado a um notebook Intel core i5, 4 Gb de memória RAM e Windows 10 de 64 bits para o armazenamento das medições das temperaturas e deslocamentos. As temperaturas e deslocamentos são medidos com uma frequência de 16 Hz. Um esquema das conexões é mostrado na *Figura 4.7*.



**Figura 4.6.** Equipamentos de interfase e controle.



**Figura 4.7.** Esquema de conexões.

Uma vez que os sensores são posicionados e fixados na placa e no suporte, procede-se ao aquecimento da placa pela chama oxi-acetilênica neutra até o tempo necessário para que o termopar TP1, posicionado no centro da placa, alcance a temperatura aproximada de 800 °C. Em seguida, a chama é retirada deixando a placa resfriar. Na Tabela 4.1 são mostrados os parâmetros da chama oxi-acetilênica usada nos ensaios experimentais de cada uma das placas.

**Tabela 4.1.** Parâmetros dos ensaios

Placa Circular	Pressão do cilindro de Acetileno [kgf/cm <sup>2</sup> ]	Pressão de trabalho de Acetileno [kgf/cm <sup>2</sup> ]	Pressão do cilindro de Oxigênio [kgf/cm <sup>2</sup> ]	Pressão de trabalho de Oxigênio [kgf/cm <sup>2</sup> ]	Altura da tocha [mm]
PC 1-6	10,0	2,25	88	4,5	29,0
PC 2-6	10,5	2,10	88	4,3	31,3
PC 1-8	10,5	2,20	88	4,3	30,0
PC 2-8	10,0	0,95	90	4,0	33,0
PC 1-10	10,0	2,25	88	4,5	27,6
PC 2-10	10,5	2,30	88	4,1	23,8

#### 4.5. Modelagem Numérica do Ensaio Experimental

Nas análises térmicas as placas circulares modeladas utilizando elementos lineares axissimétricos PLANE75, com capacidade de condução térmica 3D. Este elemento possui 4 nós com um grau de liberdade por nó, que é a temperatura, e aplicável em análises térmicas de estado estável e transiente. Nas análises mecânicas são usados elementos PLANE182, ideal para modelos axissimétricos sólidos estruturais 2D. Este elemento é definido por quatro nós que tem dois graus de liberdade por nó, translações nas direções X e Y e com capacidade de ser empregado em análises não lineares, com grandes deflexões e deformações, [122].

Na simulação de aquecimento da placa circular, e no estudo do seu comportamento mecânico, foram consideradas as hipóteses inerentes a cada processo, as condições iniciais e de contorno, as quais serão descritas a seguir.

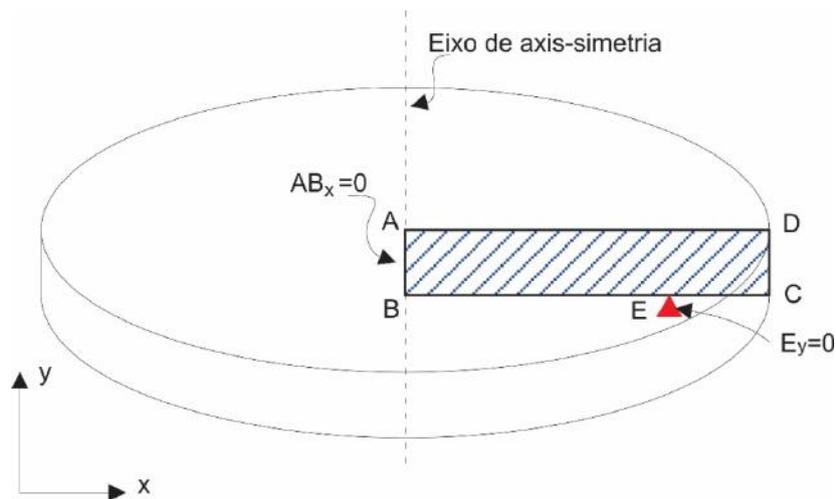
Na análise térmica:

- Todas as propriedades térmicas, com exceção da densidade, são consideradas como função da temperatura.
- O resfriamento é por convecção newtoniana linear e se considera em todas as superfícies da chapa circular e em combinação com as perdas por radiação. O valor do coeficiente combinado de convecção e radiação é de 15 W/m<sup>2</sup>K, conforme recomendado por. [123] e [124].

- É usada a formulação da entalpia para evitar as alterações bruscas na capacidade de calor devido à mudança de fase do material.

Na análise mecânica:

- Considera-se encruamento isotrópico bi-linear com o critério de von Mises.
- Não se considera os efeitos da transformação de fase do metal devido ao seu efeito ser desprezível para os aços de baixo e médio teor carbono, [125].
- As temperaturas nos nós da malha de elementos são tomadas como o carregamento.
- As propriedades mecânicas são consideradas dependentes da temperatura.
- Em todas as análises mecânicas das placas circulares com modelagem axissimétrica são consideradas condições de contorno, tais que: a linha AB tem os movimentos restringidos na direção  $x$  e o ponto E é impedido de deslocar-se na direção  $y$ , como mostrado na *Figura 4.8*.

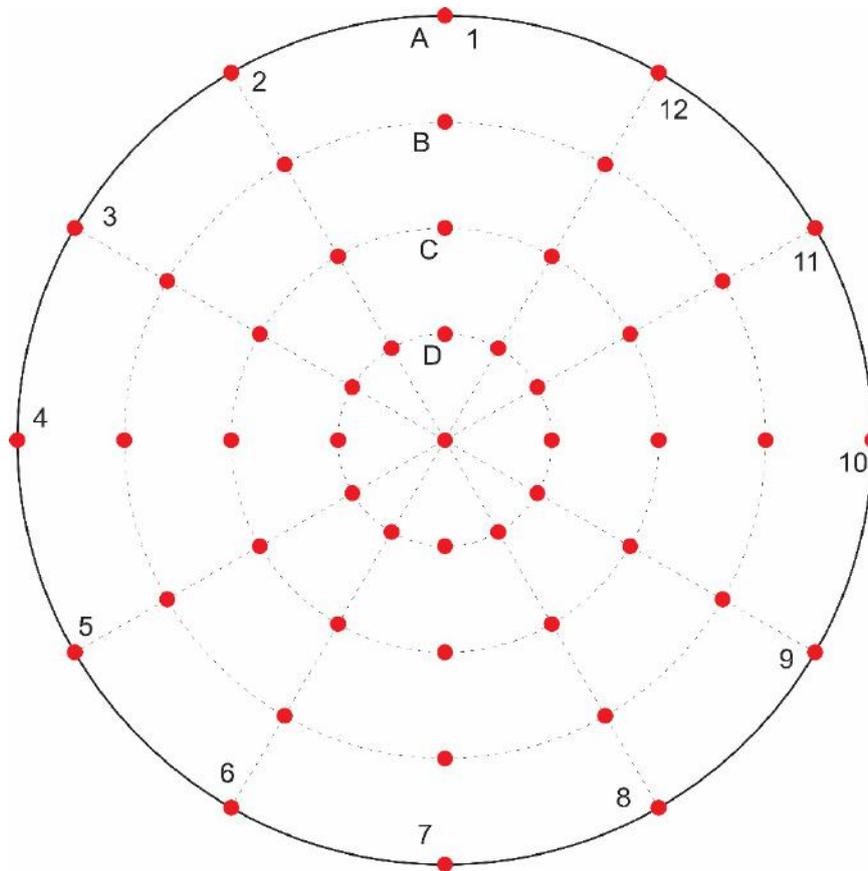


**Figura 4.8.** Diagrama das restrições de contorno aplicadas a placa circular.

#### 4.6. Medição de Espessuras.

As placas circulares têm espessuras nominais de 6, 8 e 10 mm, no entanto, para obter maior precisão nos cálculos na solução dos problemas diretos e inversos optou-se utilizar as espessuras médias em cada uma das placas. Para isto as placas circulares foram divididas em raios de 30° em 30° fazendo um total de doze raios, sobre cada um destes

raios são marcados quatro pontos de medição além do ponto central, ver *Figura 4.9*, constituindo um total de 49 pontos de medição. As medições são feitas por ultrassom com medidor de espessura de chapa marca Instrutherm modelo ME-260, *Figura 4.10*.



**Figura 4.9.** Marcação das placas circulares.



**Figura 4.10.** Aparelho medidor de espessuras.

As espessuras médias das medições feitas em cada uma das placas são apresentadas na Tabela 4.2.

**Tabela 4.2.** Espessuras reais das placas circulares.

Placa Circular	Espessura média
	[mm]
PC 1-6	6,57
PC 2-6	6,59
PC 1-8	8,13
PC 2-8	8,10
PC 1-10	9,59
PC 2-10	9,69

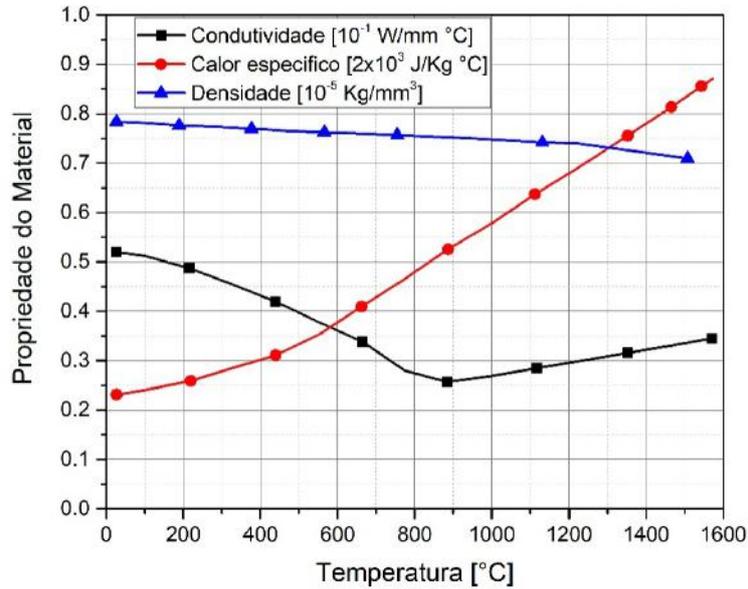
#### 4.7. Propriedades do Material.

Para a simulação numérica dos processos de soldagem são consideradas as propriedades do aço ASTM A36, o mesmo material usado nos testes. Na Tabela 4.3 é apresentada a composição química do aço A36 [126].

**Tabela 4.3.** Composição química do aço A36. ASTM[126]

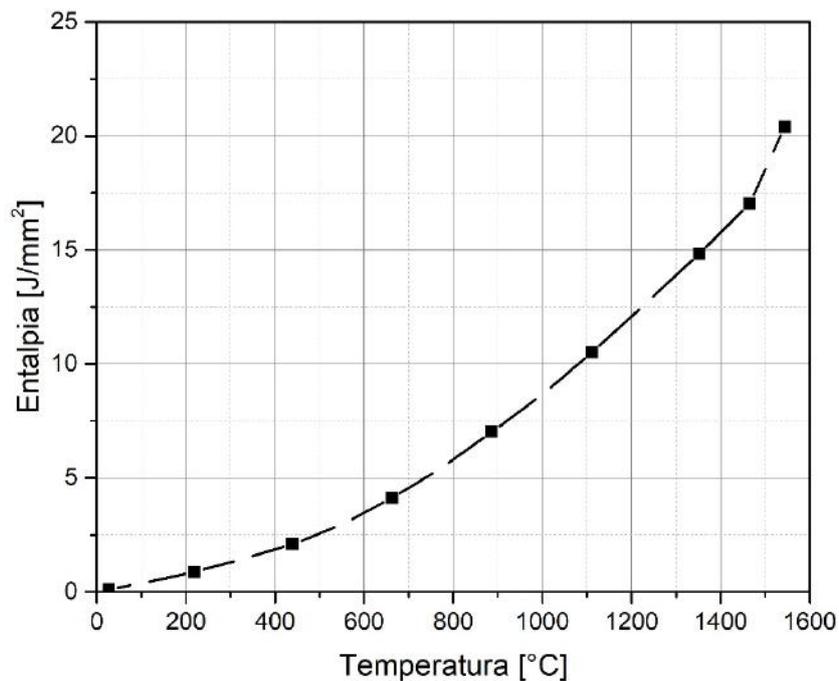
C	Si	Mn	P	S	Cu
[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
0,26	< 0,4	...	0,04	0,05	> 0,2

A condutividade térmica ( $k$ ), calor específico ( $C$ ), densidade ( $\rho$ ), calor latente de fusão e calor latente de solidificação são as propriedades térmicas necessárias nas simulações para determinação da distribuição do calor na placa circular. Baseado no trabalho de Eisazadeh et. al [127], na *Figura 4.11* são apresentadas as curvas das propriedades térmicas em função da temperatura. Além disso, considera-se para o aço A36 o calor latente ( $H_s$ ) igual a 247 kJ e as temperaturas solidus ( $T_s$ ) e liquidus ( $T_l$ ) iguais a 1465 °C e 1544 °C, respectivamente.



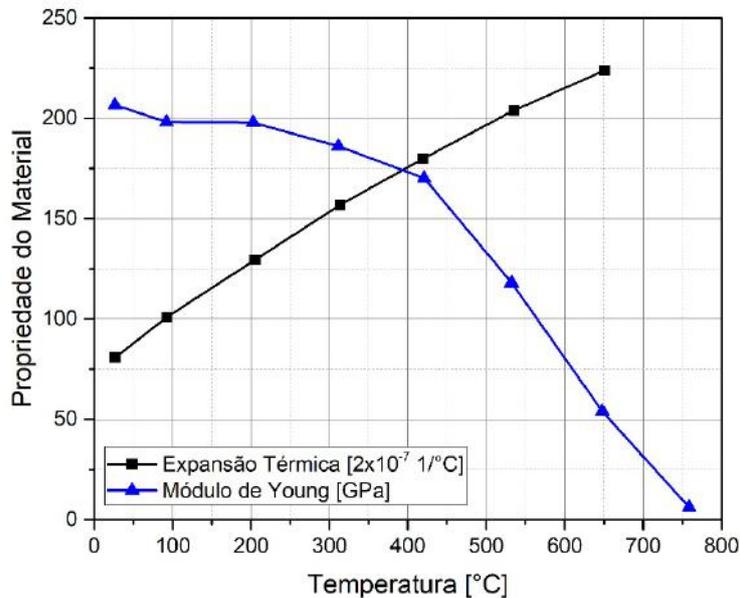
**Figura 4.11.** Propriedades térmicas aço A36, [127].

Para as simulações térmicas é utilizada a formulação da entalpia ( $H$ ) do material conforme à equação (4.30) em vez do calor específico ( $C$ ). Na *Figura 4.12* é mostrada a curva da entalpia versus temperatura calculada pela equação (4.30) para o material ASTM A36.



**Figura 4.12.** Entalpia para o aço A36.

As curvas do módulo de Young e da expansão térmica do aço ASTM A36 em função da temperatura, segundo Eisazadeh et. al [127], são apresentadas na *Figura 4.13*. A tensão de escoamento será calculada por métodos de solução para problemas inversos.



**Figura 4.13.** Propriedades mecânicas do aço A36, [127].

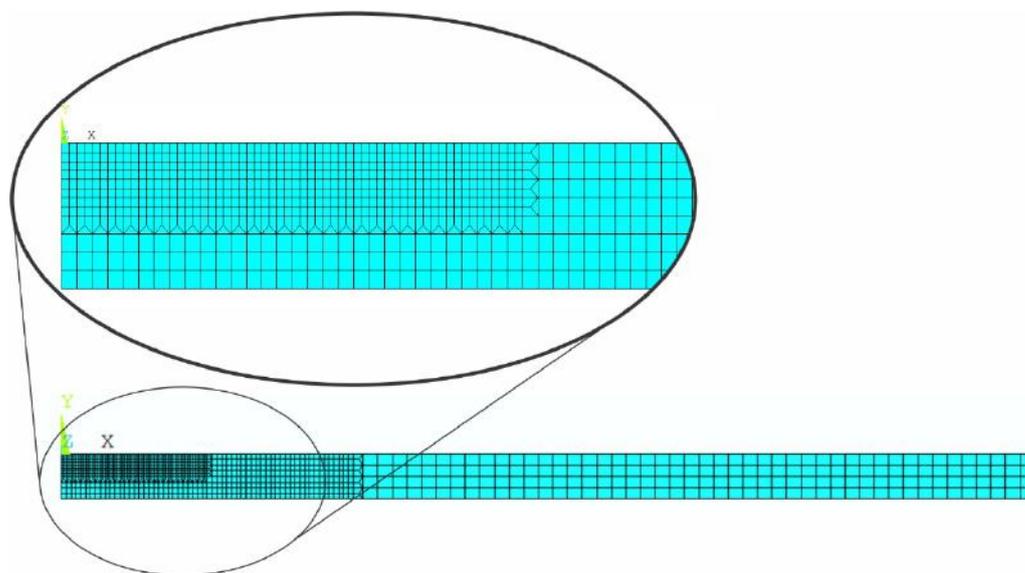
#### 4.8. Estudo de Sensibilidade e Escolha da Malha de Elementos Finitos.

Uma das premissas fundamentais do método dos elementos finitos é que quanto maior a quantidade de elementos da malha (maior densidade), a solução obtida tenderá a ser mais próxima da solução exata. Entretanto, o tempo de solução e os recursos computacionais podem aumentar significativamente com o aumento do número de elementos. Para estudar a variação da precisão e do tempo computacional com o aumento do número de elementos, são consideradas quatro malhas diferentes com elementos quadrangulares axissimétricos para discretizar a chapa circular de 400 mm de diâmetro e com 10 mm de espessura, como mostra a Tabela 4.4.

**Tabela 4.4.** Descrição das malhas de elementos finitos.

	Tamanho [mm]	Número de Elementos	Número de Nós
Malha 1	0,5 x 0,5	8000	8421
Malha 2	1,0 x 1,0	2000	2211
Malha 3	3,0 x 3,0	276	350
Malha 4	Vários	1104	1216

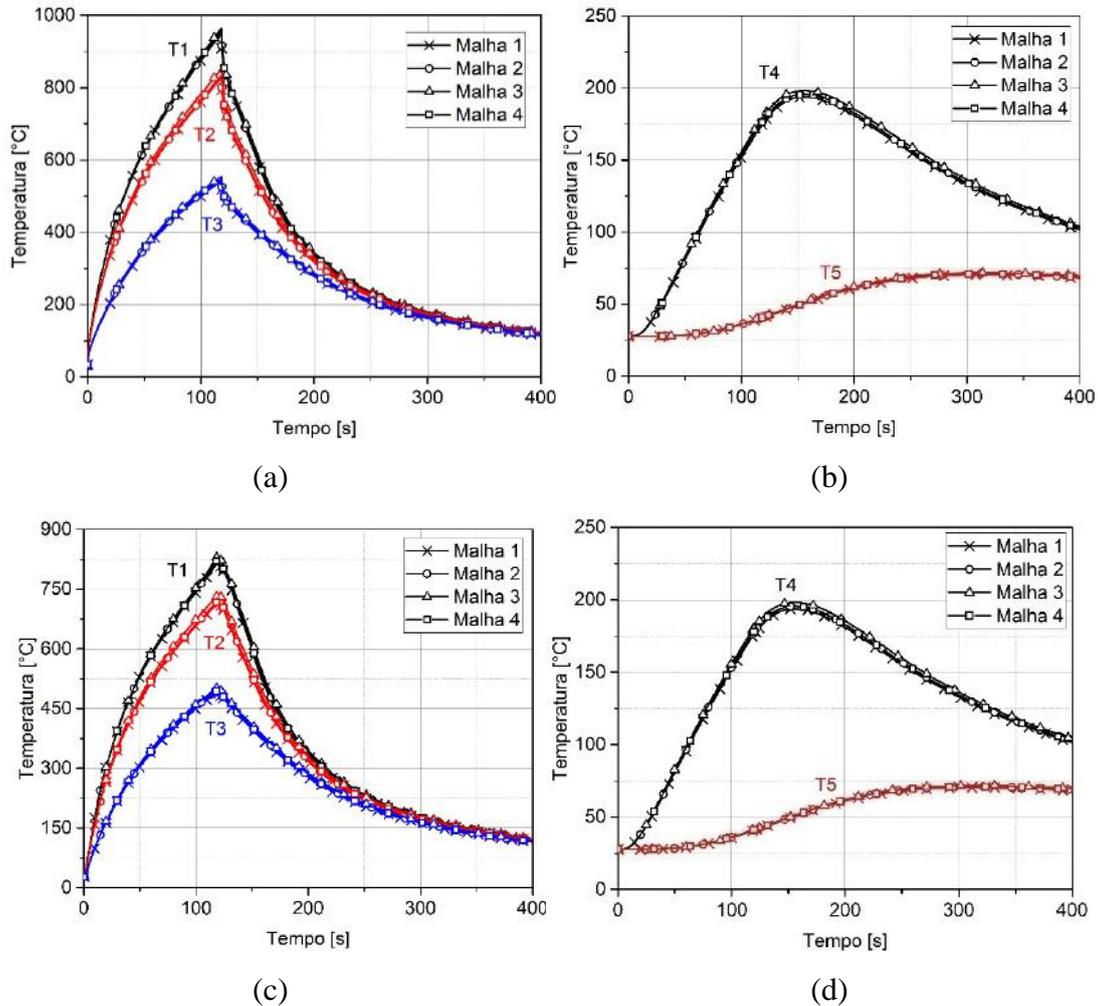
A malha 4 é composta por elementos de vários tamanhos, cujos elementos mais próximos da fonte de calor, até 30 mm na direção radial, são os de menores dimensões, aproximadamente 0,5 x 0,625 mm. Conforme se afasta da fonte de calor, entre 30 mm e 60 mm na direção radial, os tamanhos dos elementos aumentam para 1,0 x 1,25 mm e para as zonas mais afastadas o tamanho dos elementos crescem para 3,0 x 2,5 mm. A *Figura 4.14* mostra a distribuição geral dos elementos na espessura da placa entre linha de centro e a extremidade, além disso, destaca a parte mais refinada próxima ao centro.



**Figura 4.14.** Malha de elementos finitos.

Para cada uma das placas circulares são calculadas as temperaturas variando com o tempo em cinco pontos na superfície superior, designados por  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  e  $T_5$  e, em cinco pontos da superfície inferior com as mesmas distâncias em relação ao centro da placa.  $T_1$  é o ponto central da placa,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  e  $T_5$  estão distantes do centro 15, 30; 60 e 120 mm, respectivamente. As curvas apresentadas nos gráficos da *Figura 4.15* (a) e (b) mostram as variações das temperaturas com o tempo na superfície superior nos pontos de

medições,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$  e  $T_5$ , para as 4 malhas utilizadas. Nas Figuras 4.15 (c) e (d) são apresentadas curvas semelhantes para a superfície inferior nos pontos equivalentes aos anteriores, para as 4 malhas utilizadas.



**Figura 4.15.** Temperaturas nos pontos de medição na superfície superior da placa (a) e (b); Temperaturas nos pontos de medição na superfície inferior da placa (c) e (d).

Na Tabela 4.5 são mostradas as maiores diferenças (erros) em porcentagens das temperaturas calculadas com as malhas 2, 3 e 4 em relação à malha 1, as médias das diferenças e o desvio padrão das temperaturas em graus Celsius, em todos os pontos e intervalos de tempo. Como pode ser observado os piores resultados na superfície superior são obtidos com a malha 3, sendo o erro médio de 3,0% e desvio padrão  $14^{\circ}\text{C}$  no ponto  $T_2$ , e com o maior erro de 14% no ponto  $T_1$ . Na superfície inferior os piores resultados também acontecem na malha 3 e no ponto  $T_2$ , onde maior erro é de 4,2%, o erro médio é 3,0 % e o desvio padrão de  $12,5^{\circ}\text{C}$ . Também pode ser visto na Tabela 4.5 que as malhas 2 e 4 têm resultados de erro médio e desvio padrão muito próximos, tanto na superfície

superior como na inferior. Porém, a malha 4 proporciona o maior erro de 1,6% em ambas as superfícies, enquanto na malha 2 o maior erro na superfície superior é de 4,3% e de 1,7% na superfície inferior. Com estas observações podemos considerar a malha 3 como inaceitável, por produzir resultados com acurácia muito inferior ao que se deseja.

**Tabela 4.5.** Perda de precisão das Malhas 2, 3 e 4 em relação à Malha 1, mais refinada.

<b>Superfície Superior</b>																
		<b>Malha 2</b>					<b>Malha 3</b>					<b>Malha 4</b>				
		<b>T1</b>	<b>T2</b>	<b>T3</b>	<b>T4</b>	<b>T5</b>	<b>T1</b>	<b>T2</b>	<b>T3</b>	<b>T4</b>	<b>T5</b>	<b>T1</b>	<b>T2</b>	<b>T3</b>	<b>T4</b>	<b>T5</b>
Maior erro [%]		4,3	4,0	3,3	1,0	0,7	14,0	13,1	11,8	2,6	1,8	1,6	1,3	1,4	1,0	0,7
Erro Médio [%]		0,9	0,9	1,1	1,0	0,5	2,4	3,0	2,6	2,4	1,3	0,9	0,9	1,1	0,9	0,5
Desvio padrão [°C]		4,0	3,8	3,6	1,4	0,4	10,7	14,0	8,2	3,6	0,9	3,8	3,7	3,5	1,4	0,4
<b>Superfície Inferior</b>																
Maior erro [%]		1,7	1,4	1,2	1,0	0,7	4,1	4,2	3,1	2,6	1,8	1,6	1,3	1,2	1,0	0,7
Erro Médio [%]		0,9	0,9	1,1	1,0	0,5	2,4	3,0	2,6	2,4	1,3	0,9	0,9	1,1	0,9	0,5
Desvio padrão [°C]		3,9	3,6	3,2	1,4	0,4	10,1	12,5	7,7	3,6	0,9	3,9	3,5	3,1	1,4	0,4

Na Tabela 4.6 é apresentado o tempo computacional requerido para as análises numéricas das diferentes malhas, usando o computador com processador Intel core i7-3960X @ 3.30Hz, 24GB de memória RAM, plataforma Windows 10 64bits. Com a malha 2 obtém-se uma redução no tempo de execução de 2415s (60,1%) em relação à malha 1, e de 3470s (86,3%) para a malha 3 e de 2739s (68,2%) para a malha 4. A malha 3 apesar de apresentar a maior redução não será considerada pelo motivos citados anteriormente. A malha 1 tem a melhor precisão de todas as outras, mas a sua utilização na solução de problemas inversos implicaria em tempo computacional excessivo. A malha 4 produziu uma diminuição significativa do tempo computacional, maior que a malha 2, além disso, também apresentou vantagens de precisão, como observado acima. Esta malha foi a escolhida para realizar todas as análises que se seguirão no desenvolvimento desta tese.

**Tabela 4.6.** Tempo computacional requerido.

Malha	Tempo de execução [s]
Malha 1	4019
Malha 2	1604
Malha 3	549
Malha 4	1280

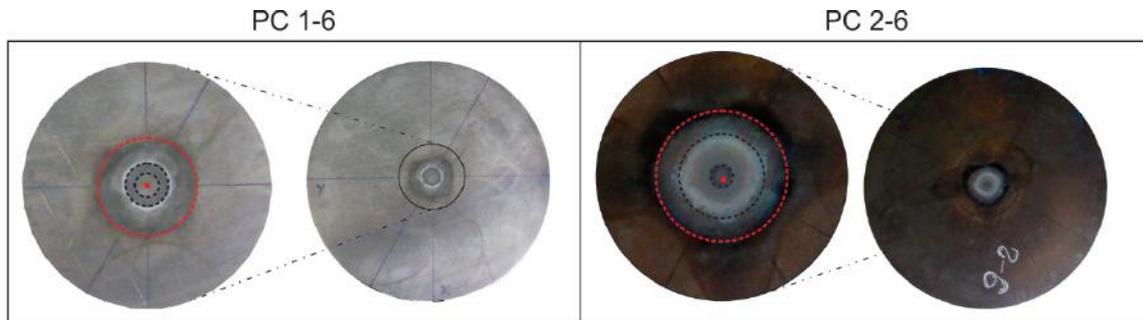
#### **4.9. Determinação Numérica da Fonte de Calor.**

Usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt para a solução de problemas inversos de transferência de calor por condução e as temperaturas medidas nos ensaios experimentais, propõe-se determinar os parâmetros que definem a fonte de calor que deu origem ao campo de temperaturas na placa circular, seguindo a metodologia empregada no exemplo de validação no item 4.2 do Capítulo 4.

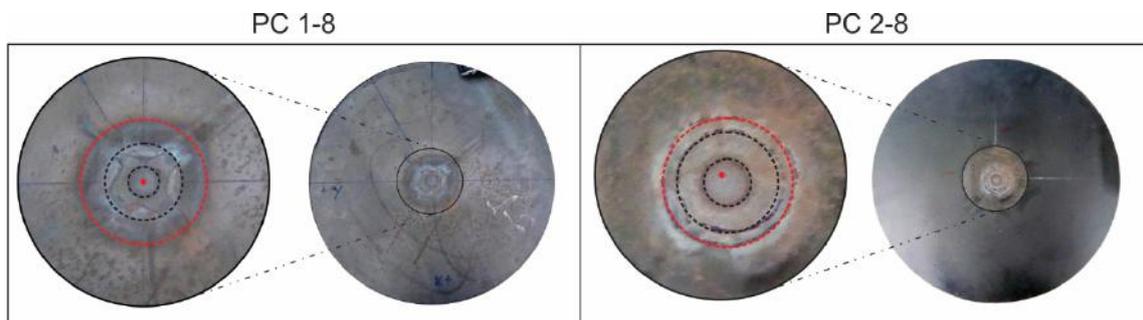
Como se descreveu anteriormente, nos ensaios experimentais realizados em seis placas foram medidas as temperaturas nos pontos especificados, tempo de aquecimento, tempo total e raio da tocha para serem utilizados como dados de entrada para as análises numéricas. Na Tabela 4.7 mostram-se os dados de entrada utilizados nas análises numéricas e que foram extraídos dos experimentos. O tempo de aquecimento é o tempo que a chama oxi-acetilênica está sobre a placa circular. O tempo total é o intervalo de tempo entre o instante de colocação da fonte e o equilíbrio térmico alcançado pelos pontos da placa no resfriamento. O raio de aquecimento é o raio da região onde é aplicado o calor diretamente.

O calor produzido pela chama oxi-acetilênica gera na placa circular regiões de calor que são claramente visíveis através de linhas isotérmicas. Nas *Figuras 4.16, 4.17 e 4.18* observamos as duas amostras das placas de 6, 8 e 10 mm de espessura respectivamente. Nas fotos da direita observam-se as placas circulares inteiras com uma marca circular no seu centro com raio de aproximadamente 60 mm, e as fotos da esquerda mostram a ampliação desta região marcada. O ponto vermelho identifica os centros das placas circulares, e os círculos marcados ressaltam as linhas isotérmicas, cujos centros são claramente diferentes dos centros das placas nas amostras PC 2-6, PC 2-8, PC 1-10 e PC 2-10. O raio do círculo vermelho corresponde ao raio de aquecimento.

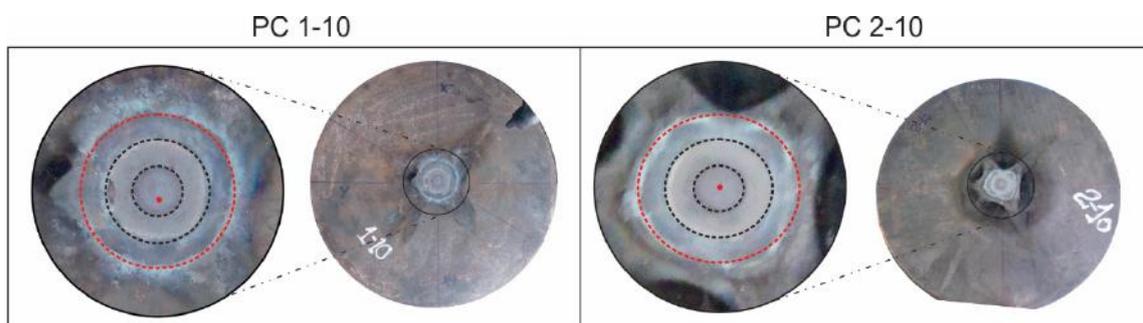
Nos casos das placas circulares PC 2-6 e PC 2-8, as medições foram descartadas devido ao histórico das temperaturas medidas apresentarem ruídos consideráveis devido à falha do revestimento de isolamento dos cabos do termopar. Para os outros ensaios isto foi corrigido cobrindo os cabos dos termopares com papel cerâmico.



**Figura 4.16.** Placas circulares de 6 mm depois do ensaio. Esquerda amostra de PC 1 e direita PC 2.



**Figura 4.17.** Placas circulares de 8 mm depois do ensaio. Esquerda amostra de PC 1 e direita PC 2.

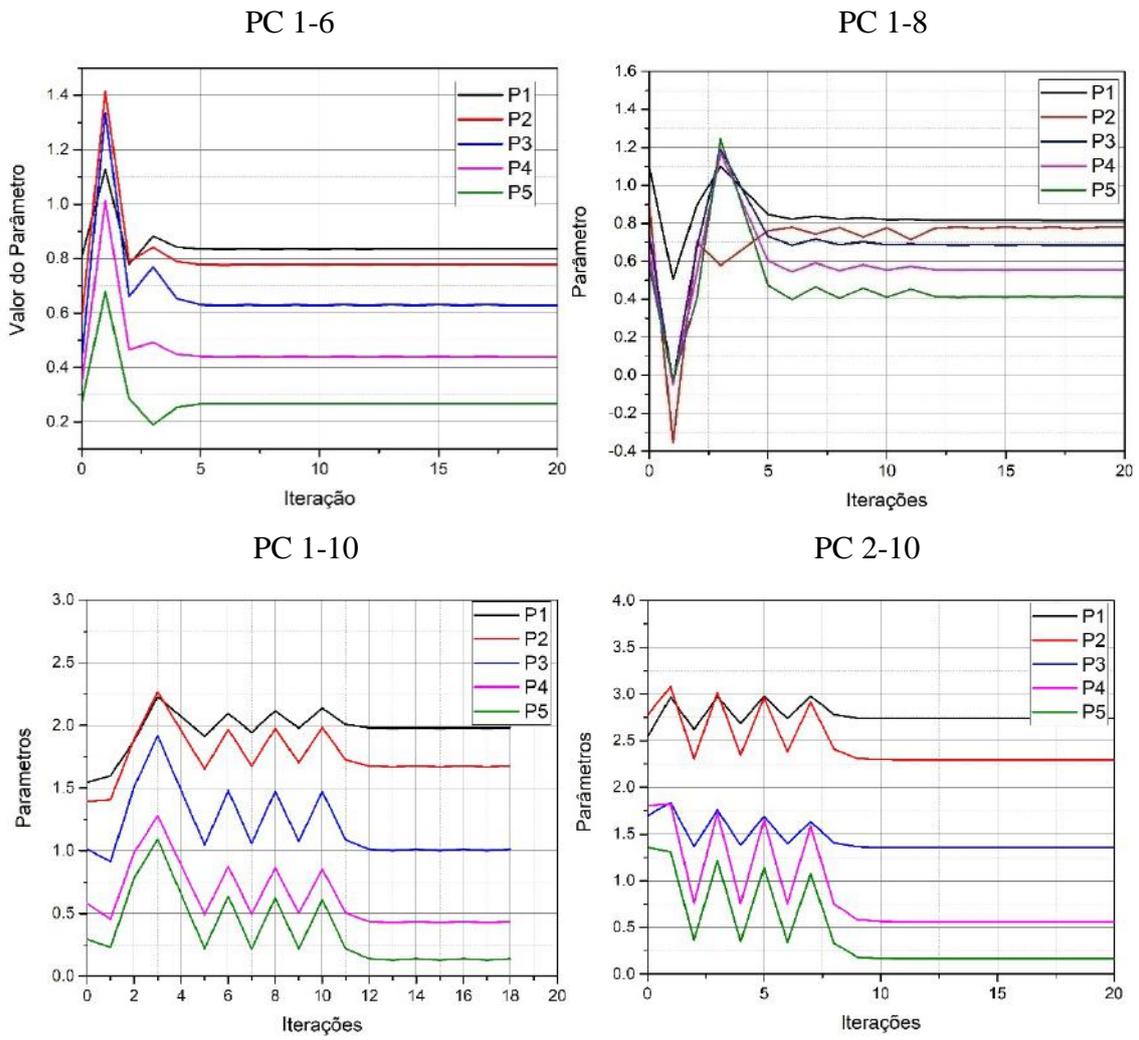


**Figura 4.18.** Placas circulares de 10 mm depois do ensaio. Esquerda amostra de PC 1 e direita PC 2.

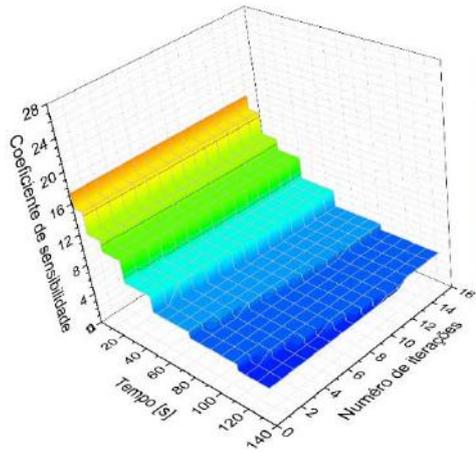
**Tabela 4.7.** Dados de aquecimento para as análises numéricas.

<b>Placa Circular</b>	<b>Tempo total [s]</b>	<b>Tempo de aquecimento [s]</b>	<b>Raio Aquecimento [mm]</b>	<b>Temperatura ambiente [°C]</b>
PC 1-6	630	131	33,52	28,3
PC 2-6	630	113	31,30	30,3
PC 1-8	630	139	43,20	29,6
PC 2-8	630	101	25,00	25,5
PC 1-10	1500	378	31,28	30,5
PC 2-10	630	181	25,62	39,0

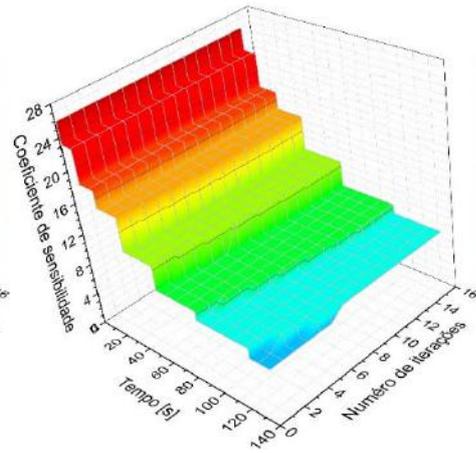
Na *Figura 4.19* são mostradas as curvas dos cinco parâmetros desconhecidos a serem determinados em cada ponto versus o número de iterações em cada uma das placas. Pode ser visto em cada uma destas curvas que a partir de um determinado número de iterações o valor do parâmetro tende a ficar constante, representando a convergência do procedimento. Na *Figura 4.20* são mostrados os valores do coeficiente de sensibilidade de cada parâmetro durante o tempo de aquecimento na placa circular PC 1-8 em cada iteração do processo de solução inverso. Pode-se observar que os coeficientes de sensibilidade relacionados aos parâmetros têm um valor inicial que logo vão diminuindo conforme passa o tempo. O coeficiente de sensibilidade para o parâmetro P1 é quase duas vezes menor que os outros parâmetros, isto acontece devido ao ponto de medição estar localizado no eixo de axissimetria. O valor mínimo dos coeficientes de sensibilidade dos parâmetros ocorre no tempo máximo de aquecimento (139 s) e é maior conforme se afasta de fonte de calor.



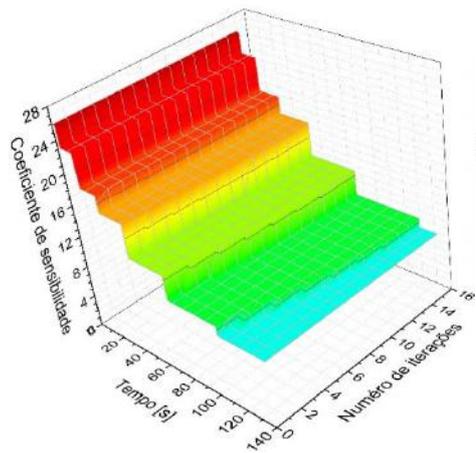
**Figura 4.19.** Gráfico Parâmetros vs. Iterações.



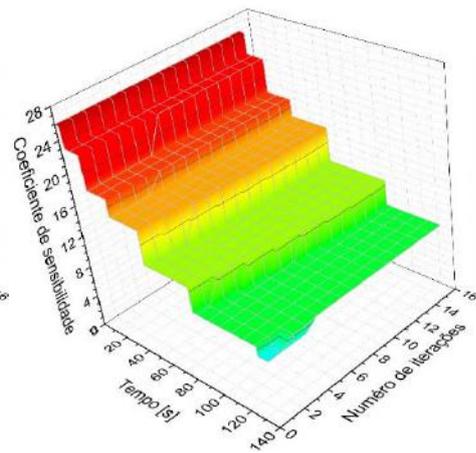
(a) Coeficiente Sensibilidade – P1



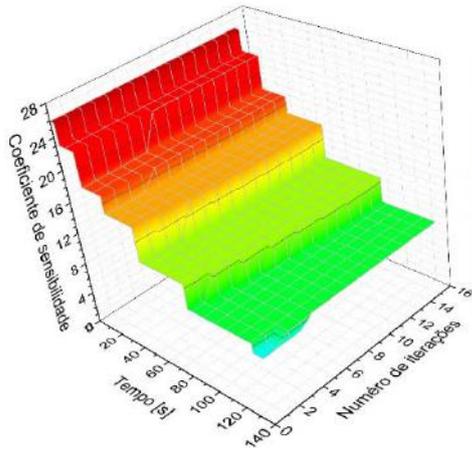
(b) Coeficiente de Sensibilidade – P2



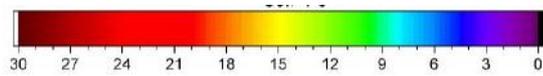
(c) Coeficiente Sensibilidade – P3



(d) Coeficiente de Sensibilidade – P4



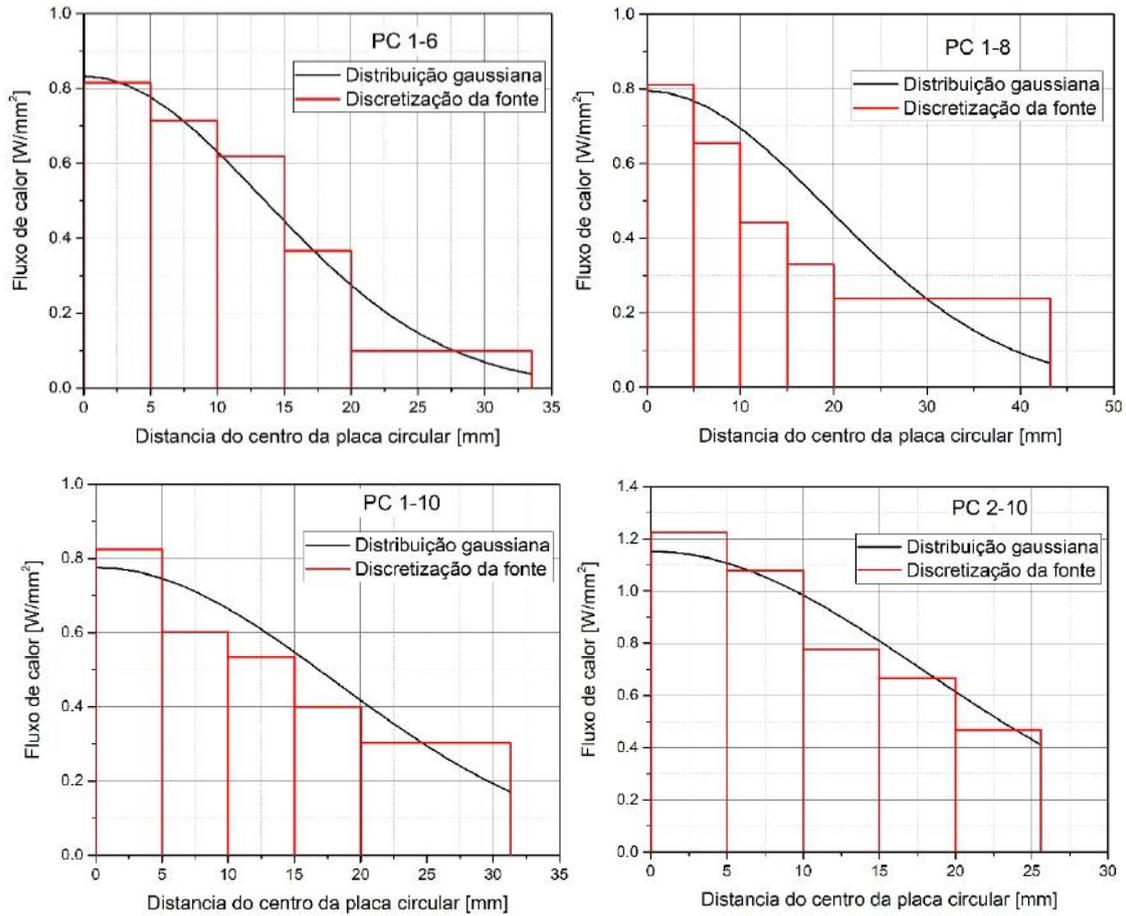
(e) Coeficiente de Sensibilidade – P5



**Figura 4.20.** Coeficiente de Sensibilidade placa PC 1-8.

Os parâmetros desconhecidos são o fluxo de calor fornecido ( $q_{sup}$ , equação (2.85)) em cinco pontos na superfície onde é aplicada diretamente a fonte de calor, distanciados do seu centro de: R1=0 mm; R2=5 mm; R3=10 mm; R4=15 mm e R5= 20 mm. Os valores

do fluxo de calor são discretizados em cinco retângulos como mostra a *Figura 4.21* em linhas vermelhas e aplicado sobre a placa circular. Essa discretização é aproximada por uma distribuição Gaussiana segundo a equação (2.85), linha preta da *Figura 4.21*, obtendo o valor do fluxo de calor máximo  $Q_{máx}$  e o raio da tocha  $r_{toch}$  que é o raio característico da equação de distribuição Gaussiana, equação (2.85). O valor do calor total  $Q_{tot}$  e de  $\gamma$  são obtidos segundo as equações (2.86) e (2.88) respectivamente.



**Figura 4.21.** Fluxo de Calor fornecido à placa

Na Tabela 4.8, mostram-se os valores calculados do calor fornecido P1, P2, P3, P4 e P5 em cada um dos pontos, quando alcançam a convergência, assim como, os valores dos parâmetros da fonte de calor ( $Q_{máx}$ ,  $\gamma$ ,  $Q_{tot}$  e  $r_{toch}$ ). Pode-se observar que na amostra PC 2-10 foi aplicado maior calor.

**Tabela 4.8.** Parâmetros calculados

<b>Placa circular</b>				
<b>Descrição</b>	<b>PC 1-6</b>	<b>PC 1-8</b>	<b>PC 1-10</b>	<b>PC 2-10</b>
P1 [W/mm <sup>2</sup> ]	8,156E-01	8,108E-01	8,241E-01	1,224E+00
P2 [W/mm <sup>2</sup> ]	7,140E-01	6,556E-01	6,026E-01	1,079E+00
P3 [W/mm <sup>2</sup> ]	6,200E-01	4,427E-01	5,341E-01	7,767E-01
P4 [W/mm <sup>2</sup> ]	3,665E-01	3,296E-01	4,004E-01	6,670E-01
P5 [W/mm <sup>2</sup> ]	9,856E-02	2,376E-01	3,027E-01	4,673E-01
$Q_{máx}$ [W/mm <sup>2</sup> ]	8,328E-01	7,949E-01	7,756E-01	1,147E+00
$\gamma$ [1/mm <sup>2</sup> ]	2,774E-03	1,347E-03	1,550E-03	1,530E-03
$Q_{tot}$ [W]	9,431E+02	1,853E+03	1,572E+03	2,354E+03
$r_{toch}$ [mm <sup>2</sup> ]	4,074E+01	5,846E+01	5,451E+01	5,486E+01

Podem ser vistas para as diferentes placas, nas *Figuras 4.22 a 4.25* as curvas das temperaturas em cada um dos pontos de medição experimental apresentadas com símbolos, as calculadas pela solução inversa são dadas com linhas contínuas e as obtidas com a fonte discretizada em 5 blocos com linhas tracejadas. Observa-se boa aproximação das temperaturas experimentais e numéricas para todas as amostras. Na placa PC 1-8 o termopar TP2 mostra falha no registro da temperatura, pois sendo um termopar mais perto da fonte de calor deveria registrar temperatura maior que no termopar TP3. Similar caso ocorre na placa PC 2-10 com o termopar TP3, onde se registra uma menor temperatura que o termopar mais afastado TP4. As temperaturas obtidas com o modelo de fonte de calor discretizada em 5 blocos ficaram abaixo das temperaturas experimentais em as placas, com exceção da placa PC 1-6 que obteve uma ótima aproximação. Os melhores resultados são obtidos com o modelo de fonte de calor com distribuição gaussiana, adaptada a partir do modelo de blocos. A *Figura 4.26* mostra os perfis de temperatura na espessura das placas analisadas (a) PC 1-6, (b) PC 1-8, (c) PC 1-10 e (d) PC 2-10, em 3 tempos representativos, a saber: tempo no aquecimento, tempo de máximo aquecimento e tempo no resfriamento.

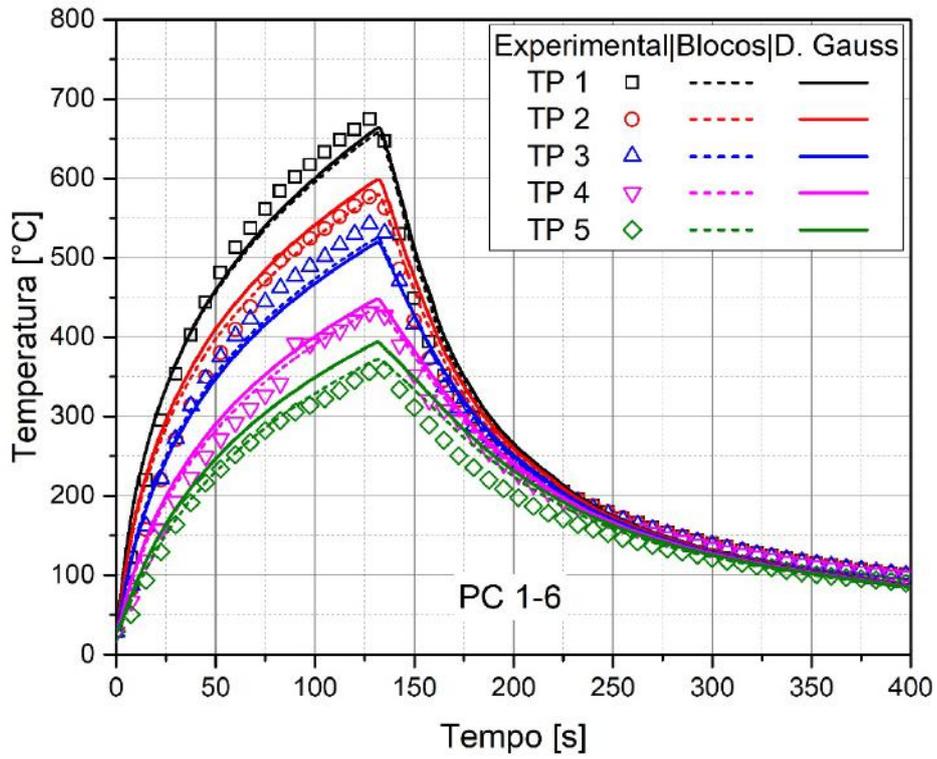


Figura 4.22. Curva Tempo vs. Temperatura placa de 6 mm amostra 1.

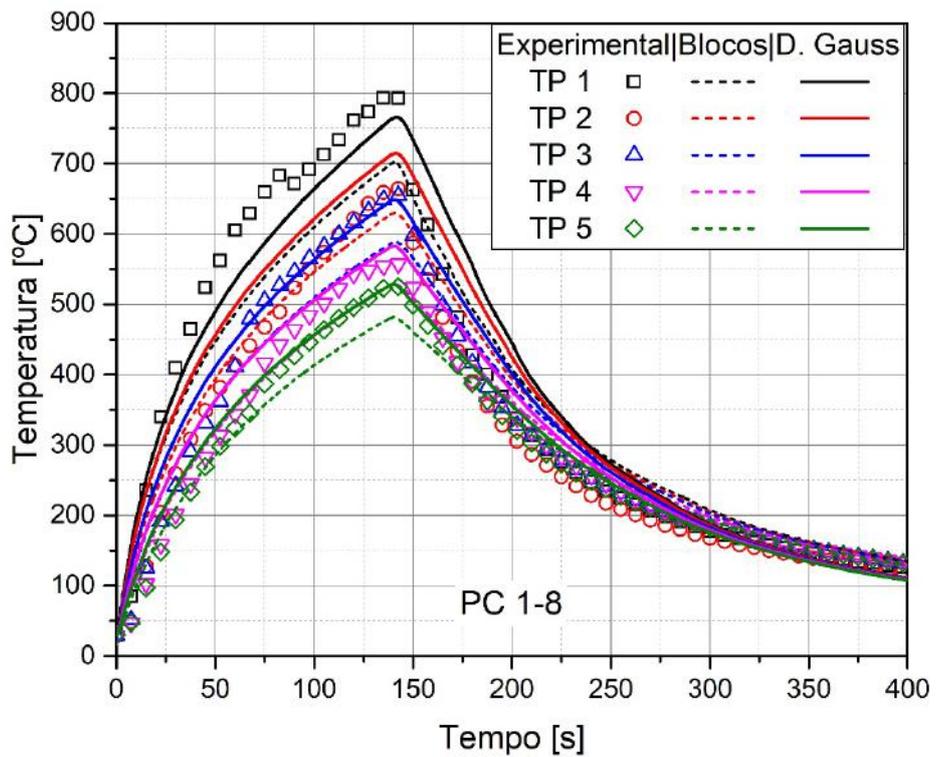


Figura 4.23. Curva Tempo vs. Temperatura placa de 8 mm amostra 1.

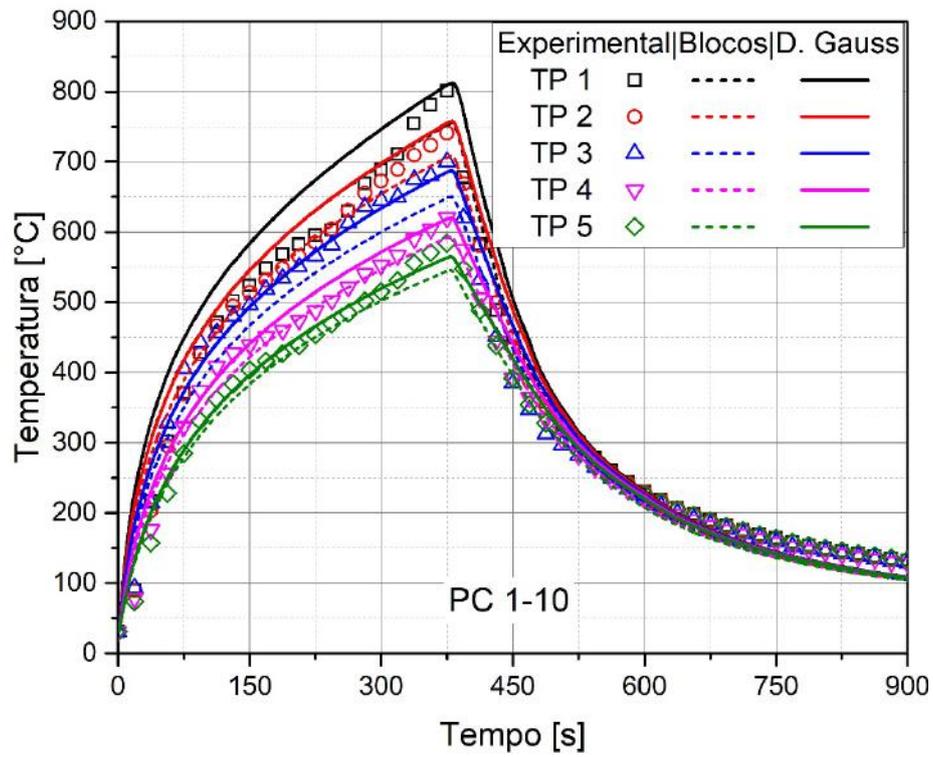


Figura 4.24. Curva Tempo vs. Temperatura placa de 10 mm amostra 1.

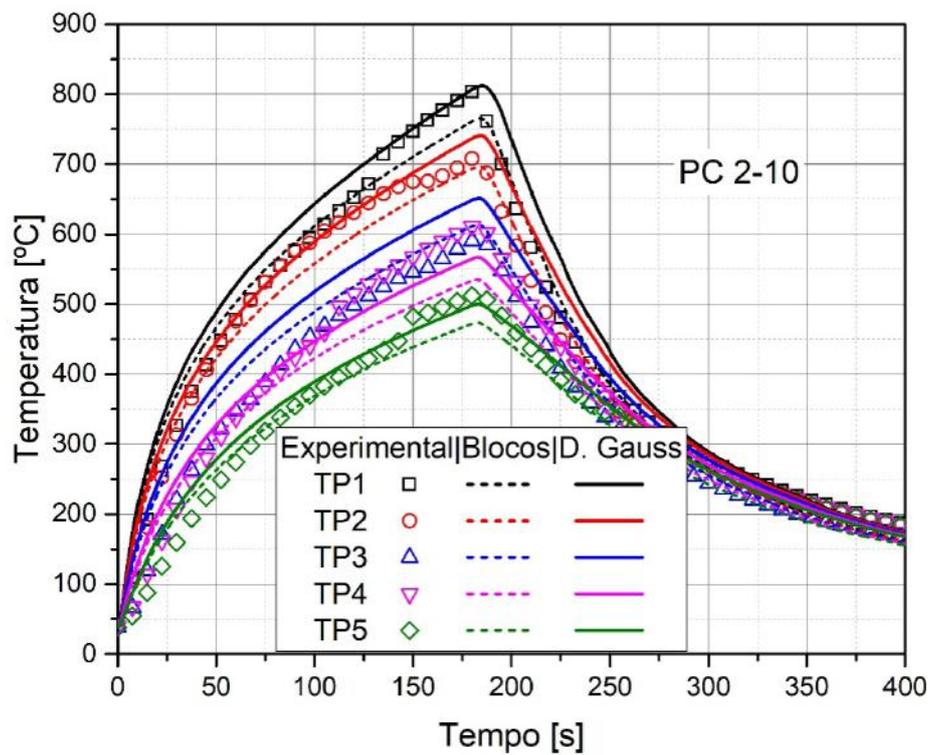


Figura 4.25. Curva Tempo vs. Temperatura placa de 10 mm amostra 2.

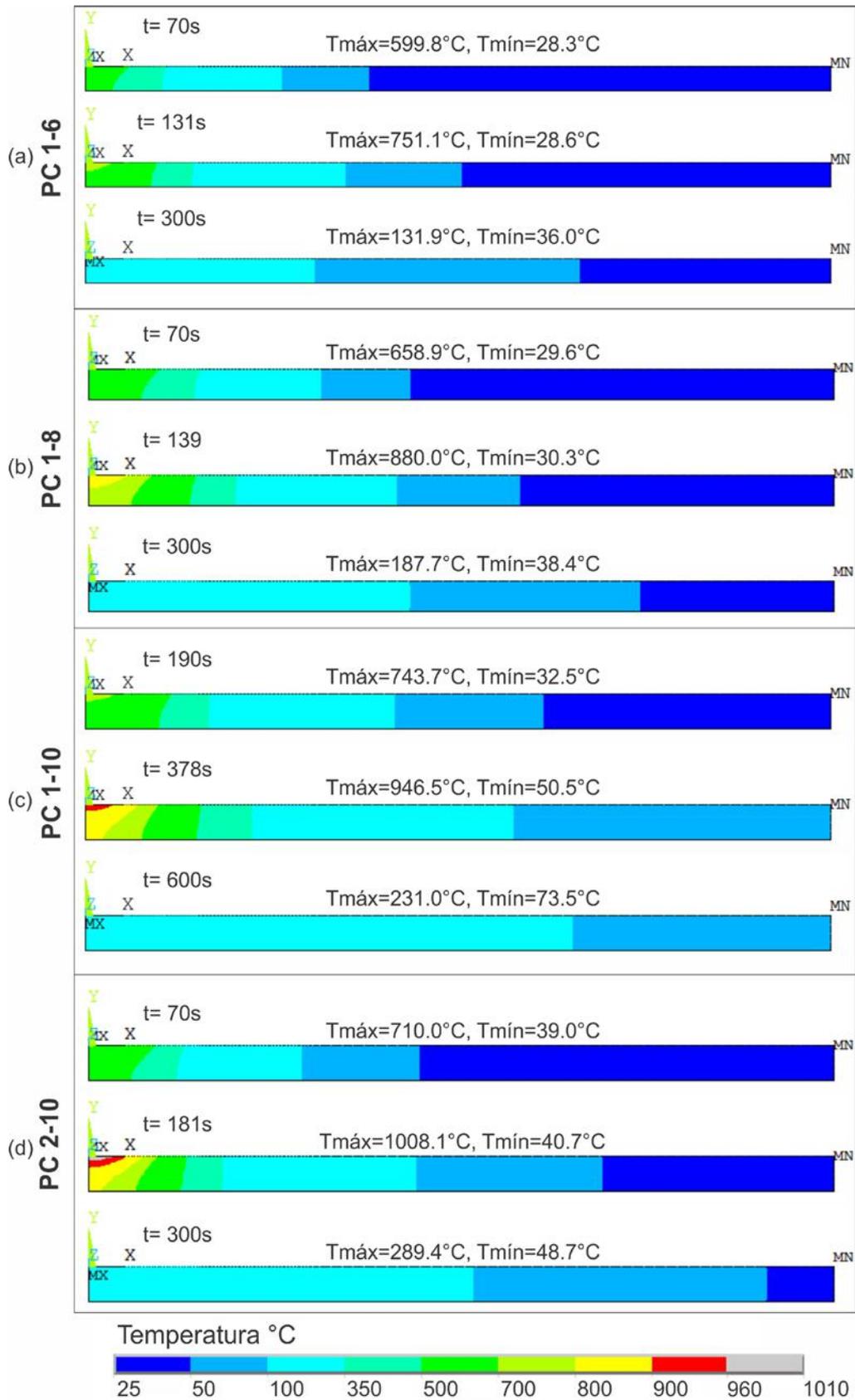
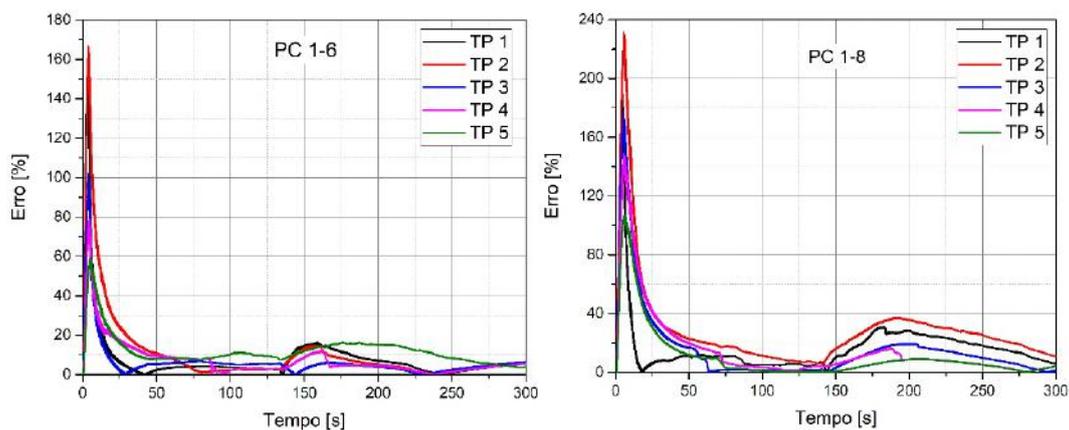
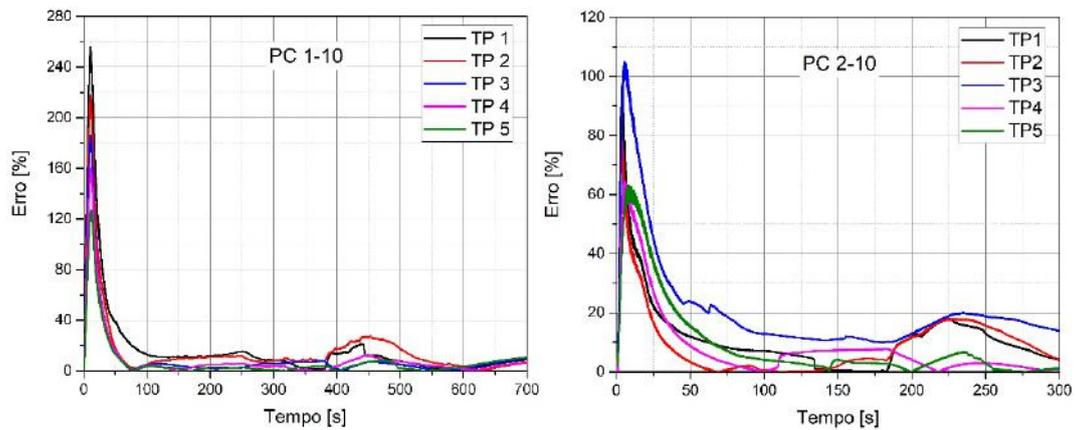


Figura 4.26. Perfil de temperaturas na espessura para as placas circulares analisadas.

Nas *Figuras 4.27 e 4.28* mostra-se o erro existente nas análises numéricas, pode-se ver que o maior erro ocorre dentro da faixa dos 10 primeiros segundos. Isto pode-se dever ao início da combustão da mescla oxigênio – acetileno com excesso de acetileno diretamente sobre a placa circular, e logo regula-se os gases até se conseguir a chama neutra requerida. Nos ensaios experimentais a placa é esquentada durante essa faixa de tempo com um calor menor do que o considerado nas simulações numéricas, onde a fonte de calor fornece o mesmo calor durante todo o tempo de aquecimento. Na placa PC 1-6 o erro médio nas temperaturas é 8,8%, o erro médio das temperaturas máximas alcançadas nos pontos de medição é de 4,3%. Na placa PC 1-8 o erro médio é de 14,1%, isto devido principalmente ao resfriamento rápido no ensaio experimental, o erro médio nas temperaturas máxima é de 3,8% considerando o termopar TP2 descartado por falha o registro das temperaturas. Na placa PC 1-10 o erro médio é de 11,5% devido principalmente ao termopar TP1 que no seu valor numérico apresenta maior taxa de aquecimento com respeito ao experimental (ver *Figura 4.24*), seu erro médio nas temperaturas máximas é de 1,9%. Na placa PC 2-10 o erro médio é de 9,5% apresentando uma maior taxa de aquecimento no termopar TP1 (ver *Figura 4.25*) e o erro médio das temperaturas máximas é de 5,0% considerando o termopar TP3, descartado por falhas nas leituras.



**Figura 4.27.** Curva de erro vs. Tempo para placas de 6 e 8 mm.

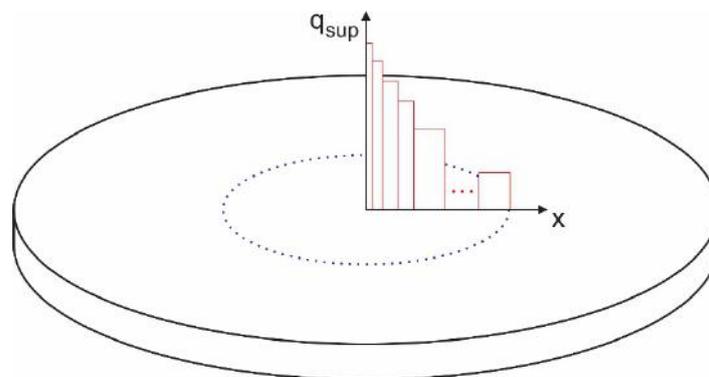


**Figura 4.28.** Curva de erro vs. Tempo para placas de 10 mm.

#### 4.9.1. Análise de Discretização Espacial da Distribuição do Fluxo de Calor por Blocos.

A análise da distribuição do fluxo de calor fornecido será realizada considerando-se apenas a placa circular PC 1-8, onde o fluxo de calor é discretizado em blocos com diferentes comprimentos dentro da área de aquecimento. Serão analisados quatro casos de distribuição do fluxo de calor, que são: 6 blocos, 9 blocos, 12 blocos e 15 blocos, com diferentes comprimentos para estudar a influência na determinação do fluxo.

É sabido que o maior fluxo de calor está concentrado no centro da placa e diminuindo paulatinamente à medida que se afasta. Logo, as distribuições em blocos a serem analisadas deverão ter um maior número de blocos próximos à região central da placa, ou seja, com menor comprimento (distância radial) e aumentando conforme se afasta. Um esboço desta estratégia é apresentado na *Figura 4.29*, e as dimensões dos blocos no eixo x (distância radial) são mostradas na Tabela 4.9.



**Figura 4.29.** Modelo de discretização por blocos.

**Tabela 4.9.** Comprimento de cada bloco de discretização do fluxo de calor.

Num Bloco	Dimensão espacial dos blocos [mm]			
	6 blocos	9 blocos	12 blocos	15 blocos
1	0,5	0,5	0,5	0,5
2	0,5	0,5	0,5	0,5
3	1	1	1	1
4	2	2	2	2
5	20	8	5	4
6	19	8	5	4
7	-	8	5	4
8	-	8	5	4
9	-	7	5	4
10	-	-	5	4
11	-	-	5	3
12	-	-	4	3
13	-	-	-	3
14	-	-	-	3
15	-	-	-	3

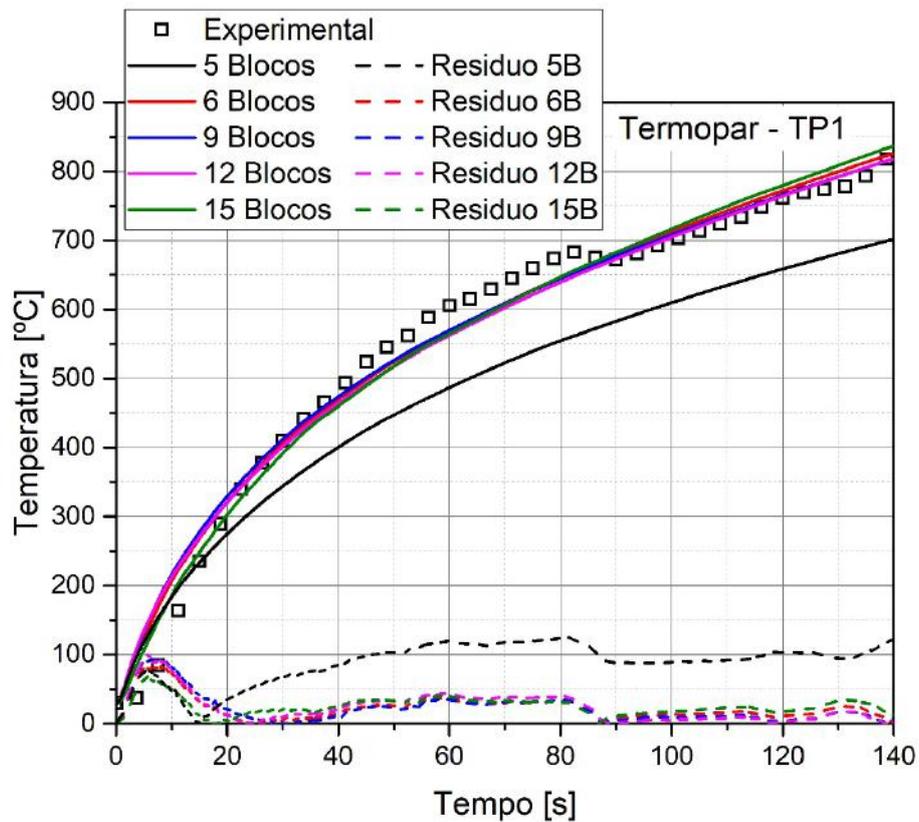
Usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt para solução de problemas inversos foi determinado os fluxos de calor correspondentes a cada bloco para as suas diferentes distribuições em blocos. Estes fluxos de calor para as distribuições de 6, 9, 12 e 15 blocos são mostrados nas Tabelas 4.10.

**Tabela 4.10.** Fluxos de calor da distribuição por blocos

Parâmetro	Fluxo de Calor calculado [W/mm <sup>2</sup> ]			
	6 Blocos	9 Blocos	12 Blocos	15 Blocos
q <sub>sup1</sub>	1,903	2,335	2,696	1,999
q <sub>sup2</sub>	1,706	2,236	2,397	1,805
q <sub>sup3</sub>	1,512	2,039	1,898	1,615
q <sub>sup4</sub>	1,227	1,749	1,700	0,360
q <sub>sup5</sub>	0,671	0,780	1,104	0,170
q <sub>sup6</sub>	0,159	0,565	0,556	0,974
q <sub>sup7</sub>	-	0,400	0,375	0,777
q <sub>sup8</sub>	-	0,190	0,281	0,482
q <sub>sup9</sub>	-	0,036	0,275	0,422
q <sub>sup10</sub>	-	-	0,259	0,413
q <sub>sup11</sub>	-	-	0,242	0,402
q <sub>sup12</sub>	-	-	0,234	0,387
q <sub>sup13</sub>	-	-	-	0,271
q <sub>sup14</sub>	-	-	-	0,258
q <sub>sup15</sub>	-	-	-	0,226

Nas *Figuras 4.30 a 4.34* podem ser vistas as temperaturas transientes até o tempo de máximo aquecimento (139s) para cada termopar (TP1, TP2, TP3, TP4 e TP5) da placa PC 1-8, e seu correspondente resíduo com os quatro casos de distribuição por blocos, conforme Tabela 4.10. Nestas figuras também são apresentadas as mesmas curvas para o caso de 5 blocos, com distribuição de blocos definida na *Figura 4.21*, e das medições experimentais. A *Figura 4.30*, que corresponde ao termopar TP1, mostra que as distribuições de 6, 9, 12 e 15 blocos conseguem boa aproximação nas temperaturas em relação ao resultado experimental, enquanto que a distribuição de 5 blocos apresenta temperaturas inferiores. A *Figura 4.31*, correspondente ao termopar TP2 mostra que as temperaturas com a discretização de 5 blocos aproxima mais ao experimental. A *Figura 4.32*, mostra as temperaturas no sensor TP3, sendo os resultados das distribuições em 9 e

12 blocos que melhor se aproximam ao experimental. A *Figura 4.33*, mostra as temperaturas no sensor TP4 e as discretizações em 5, 9 e 12 blocos apresentam melhores resultados em relação as temperaturas experimentais. A *Figura 4.34* referente ao termopar TP5 mostra que as temperaturas das discretizações em 6, 9 e 12 blocos são as que têm melhor concordância. Os resíduos médios correspondentes à distribuição de blocos do fluxo de calor são mostrados nas *Figuras 4.35*, nelas podem ser vistos que os menores resíduos médios são obtidos com o modelo de 12 blocos.



**Figura 4.30.** Curvas Temperaturas vs. Tempo e residuos para o sensor TP1.

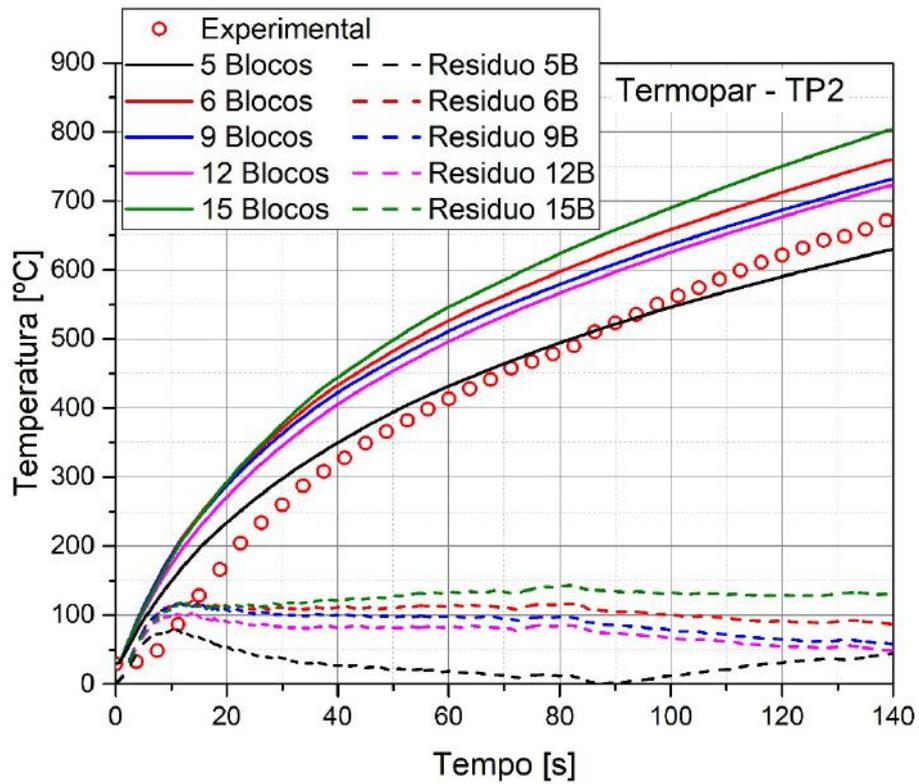


Figura 4.31. Curvas Temperaturas vs. Tempo e residuos para o sensor TP2.

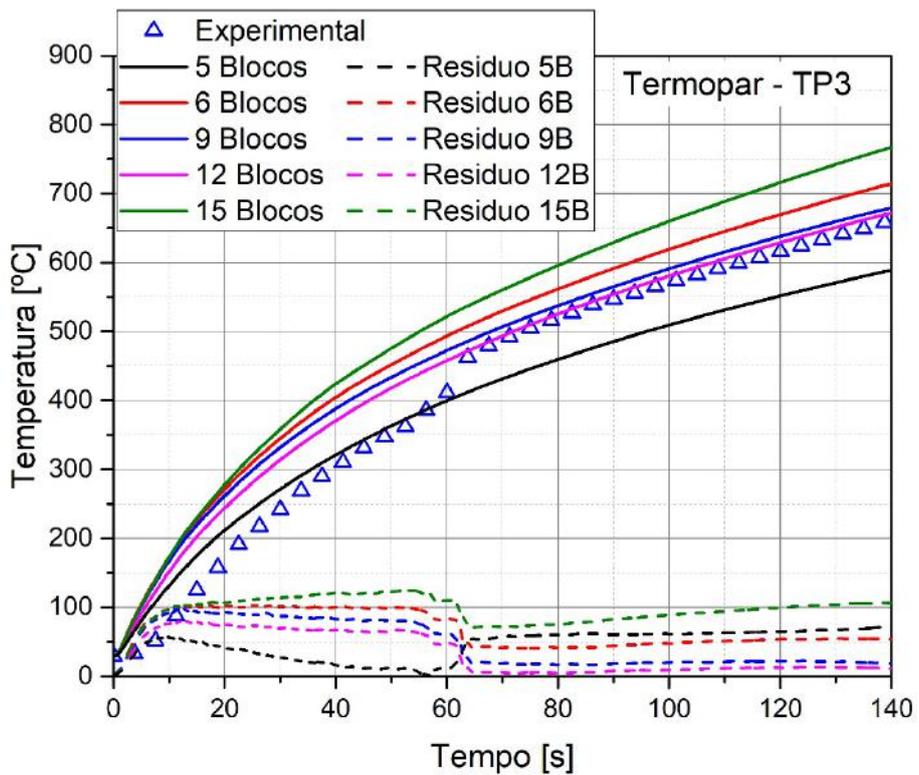


Figura 4.32. Curvas Temperaturas vs. Tempo e residuos para o sensor TP3.

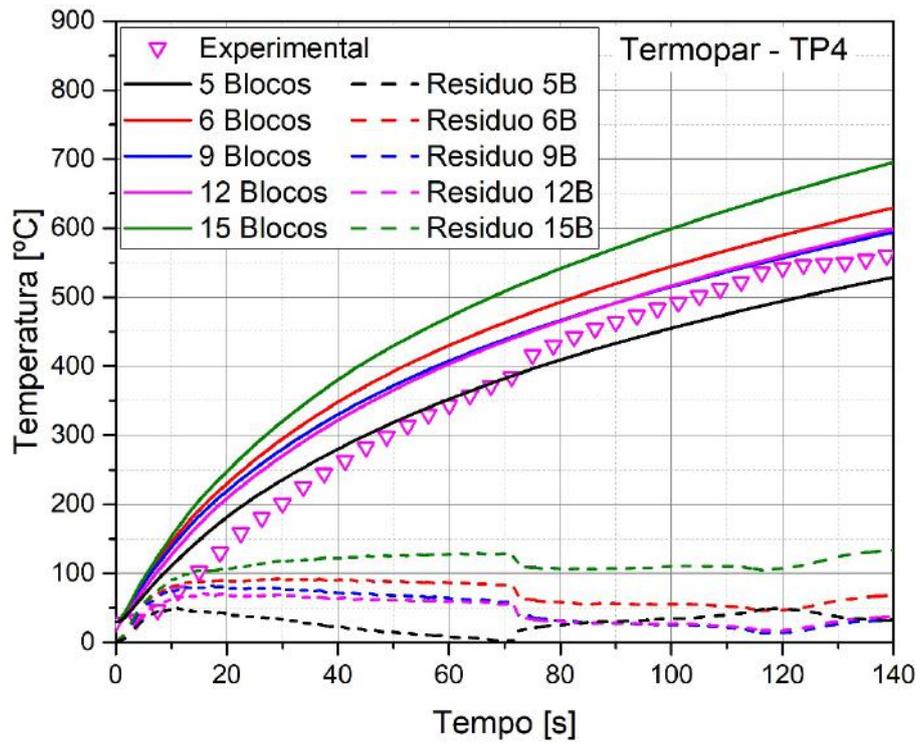


Figura 4.33. Curvas Temperaturas vs. Tempo e residuos para o sensor TP4.

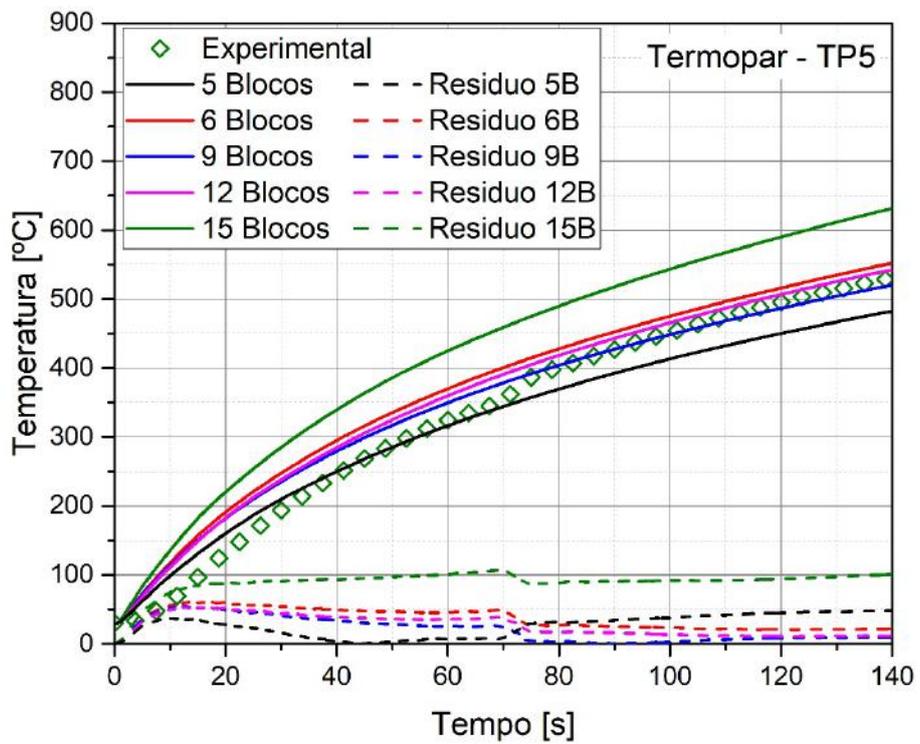
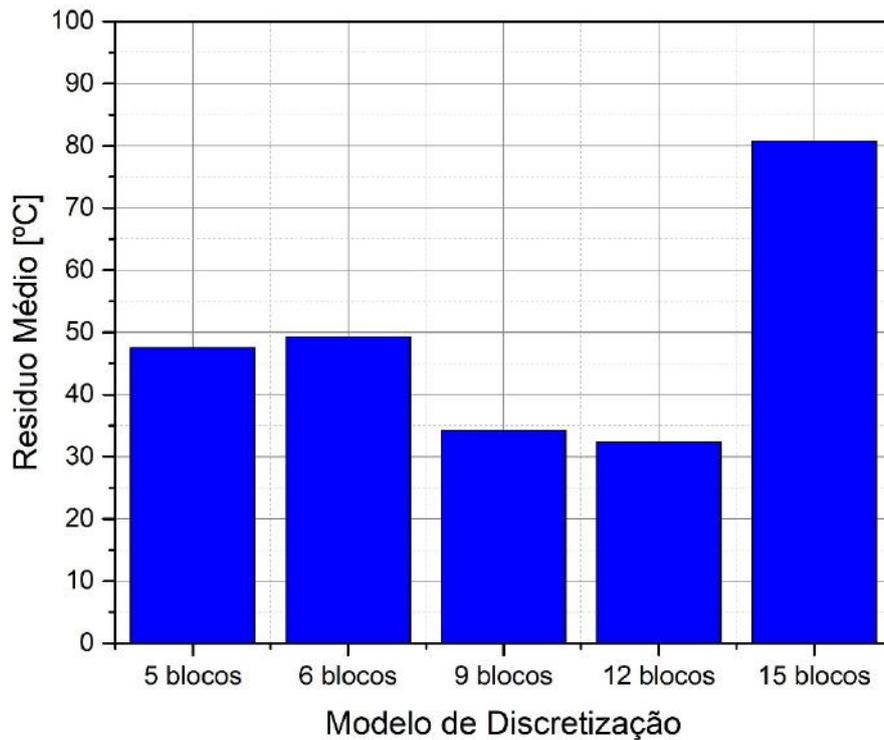


Figura 4.34. Curvas Temperaturas vs. Tempo e residuos para o sensor TP5.



**Figura 4.35.** Curva de resíduos médios para os modelos por blocos de discretização do fluxo de calor.

Em vista destes resultados pode-se concluir que a estratégia utilizada para discretizar o fluxo de calor em blocos com menor comprimento no centro e ir aumentando conforme se afasta é acertada para conseguir melhor concordância nas temperaturas na parte central da placa. A discretização de 12 blocos consegue a melhor aproximação com respeito as outras discretizações. A discretização em 15 blocos perde precisão devido ao número excessivo de parâmetros que geram instabilidade no método de solução inverso.

#### 4.9.2. Análise de Estatística dos Parâmetros.

A análise estatística para a estimativa dos parâmetros é realizada para o caso da placa circular PC 1-8 com distribuição do fluxo de calor discretizado em 12 blocos. Com a covariância dos parâmetros calculada de acordo com a equação (3.19), a Tabela 4.11 mostra os valores do comprimento de cada bloco de fluxo de calor (C), o raio de giro de cada bloco de fluxo de calor (r), o valor dos parâmetros  $P_j$ , os valores obtidos para a covariância  $\sigma_{\hat{p}_j}^2$ , os intervalos de confiança de 99% (equação (3.20)) para cada um dos parâmetros estimados entre os limites  $LI = P_j - 2.576\sigma_{\hat{p}_j}$  e  $LS = P_j + 2.576\sigma_{\hat{p}_j}$  e o calor fornecido por cada bloco (Q). Observa-se que os maiores valores da covariância e

intervalo de confiança corresponde aos parâmetros  $q_{sup1}$ ,  $q_{sup2}$ ,  $q_{sup3}$  e  $q_{sup4}$ , e dentre eles o parâmetro  $q_{sup2}$  apresenta maiores incertezas, isto devido possivelmente ao fato da discretização refinada no centro fornecer os menores valores de calor (Q), por parâmetro. Os parâmetros  $q_{sup5}$  a  $q_{sup12}$  apresentam os maiores aportes de calor e coincidem com os menores valores da covariância e intervalos de confiabilidade.

**Tabela 4.11.** Variância e Intervalos de confiança para os parâmetros estimados.

Parâmetro	C [mm]	r [mm]	$P_j$ [W/mm <sup>2</sup> ]	$\sigma_{\hat{P}_j}^2$ [W <sup>2</sup> /mm <sup>4</sup> ]	LI [W/mm <sup>2</sup> ]	LS [W/mm <sup>2</sup> ]	Q [W]
$q_{sup1}$	0,5	0,25	2,696	4,98E-02	2,121	3,271	2,117
$q_{sup2}$	0,5	0,75	2,397	7,59E-02	1,687	3,107	5,648
$q_{sup3}$	1	1,75	1,898	4,31E-02	1,363	2,433	20,870
$q_{sup4}$	2	3,75	1,700	2,04E-02	1,332	2,068	80,111
$q_{sup5}$	5	8,75	1,104	8,19E-03	0,871	1,337	303,478
$q_{sup6}$	5	13,75	0,556	8,42E-03	0,319	0,792	240,002
$q_{sup7}$	5	18,75	0,375	6,49E-03	0,167	0,582	220,775
$q_{sup8}$	5	23,75	0,281	4,48E-03	0,108	0,453	209,289
$q_{sup9}$	5	28,75	0,275	5,38E-03	0,086	0,464	248,743
$q_{sup10}$	5	33,75	0,259	4,59E-03	0,084	0,433	274,402
$q_{sup11}$	5	38,75	0,242	4,21E-03	0,074	0,409	294,238
$q_{sup12}$	4	42,75	0,234	2,65E-03	0,102	0,367	251,845

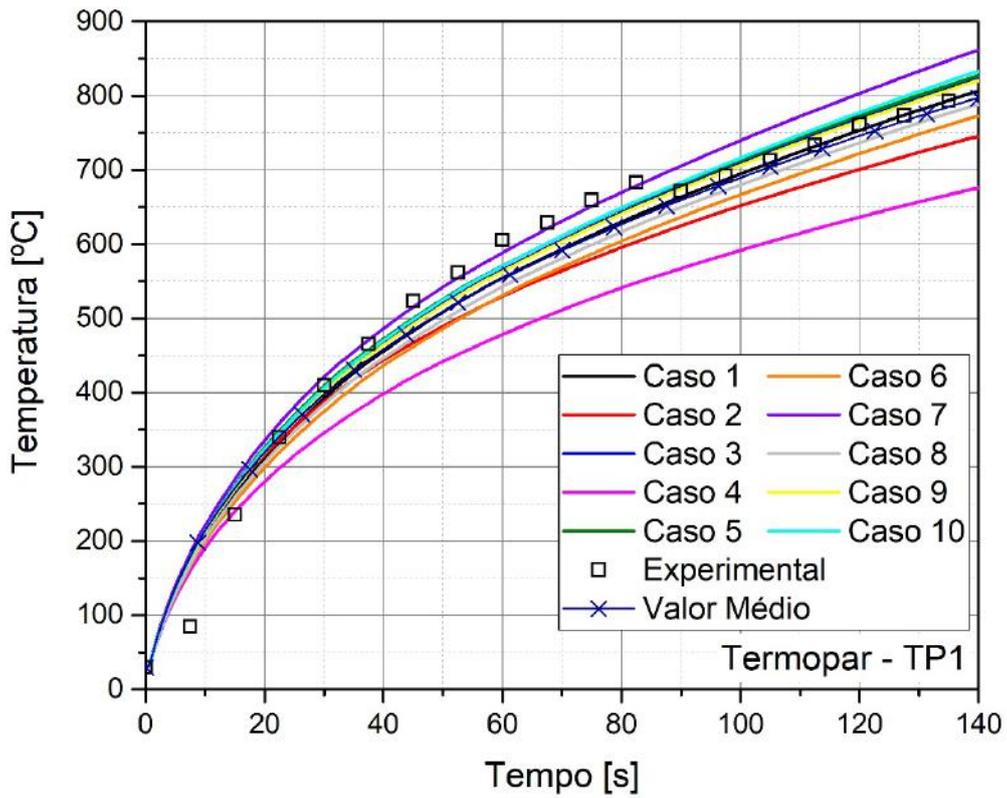
Foram considerados 10 casos, com parâmetros  $\hat{P}_j, j=1, \dots, N$  ( $N = 10$ ) escolhidos aleatoriamente dentro da faixa do seu intervalo de confiança para realizar análises numéricas diretas pelo método de Monte Carlo. Os parâmetros selecionados do Caso 1 ao Caso 5 são mostradas na Tabela 4.12, e os parâmetros do Casos 6 ao Caso 10 na Tabela 4.13. As temperaturas obtidas até o tempo de máximo aquecimento com os valores dos parâmetros em cada caso de análise são mostradas nas *Figuras 4.36 a 4.40*, onde pode ser visto que para o sensor TP1 o Caso 1 obtém melhor aproximação ao experimental. O sensor TP2 não será analisado devido por ter apresentado erro nas leituras. Para o sensor TP3 a melhor concordância se obtém com os parâmetros do Caso 3. Para os sensores TP4 e TP5 os melhores resultados se obtém com os Casos 6 e 8.

**Tabela 4.12.** Parâmetros  $\hat{P}_j$  aleatórios Casos 1 a 5

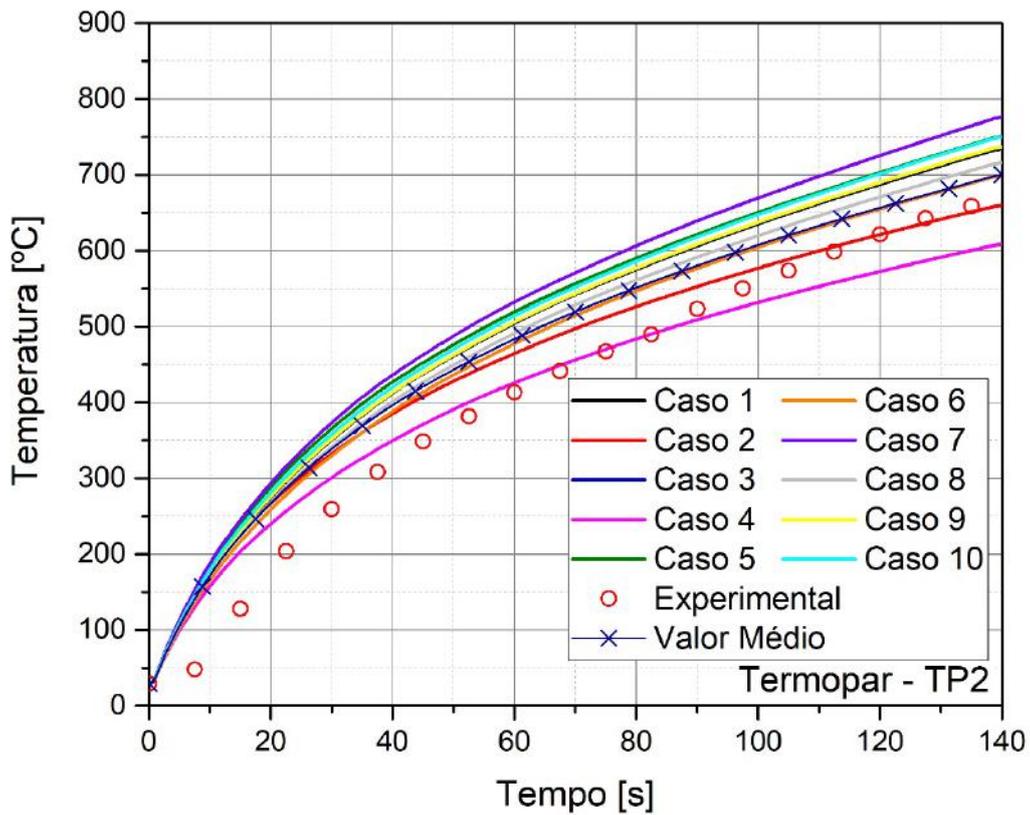
	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>	<b>Caso 4</b>	<b>Caso 5</b>
q <sub>sup1</sub>	3,119	2,113	2,178	2,284	2,151
q <sub>sup2</sub>	2,203	2,328	2,327	2,557	2,875
q <sub>sup3</sub>	1,662	1,708	1,775	2,007	1,846
q <sub>sup4</sub>	1,344	1,876	1,672	1,435	1,697
q <sub>sup5</sub>	1,119	1,115	1,277	0,911	0,968
q <sub>sup6</sub>	0,335	0,670	0,423	0,623	0,507
q <sub>sup7</sub>	0,550	0,399	0,294	0,256	0,553
q <sub>sup8</sub>	0,337	0,175	0,439	0,133	0,434
q <sub>sup9</sub>	0,345	0,191	0,268	0,307	0,323
q <sub>sup10</sub>	0,104	0,108	0,085	0,110	0,196
q <sub>sup11</sub>	0,352	0,082	0,349	0,165	0,134
q <sub>sup12</sub>	0,186	0,184	0,266	0,117	0,175

**Tabela 4.13.** Parâmetros  $\hat{P}_j$  aleatórios Casos 6 a 10

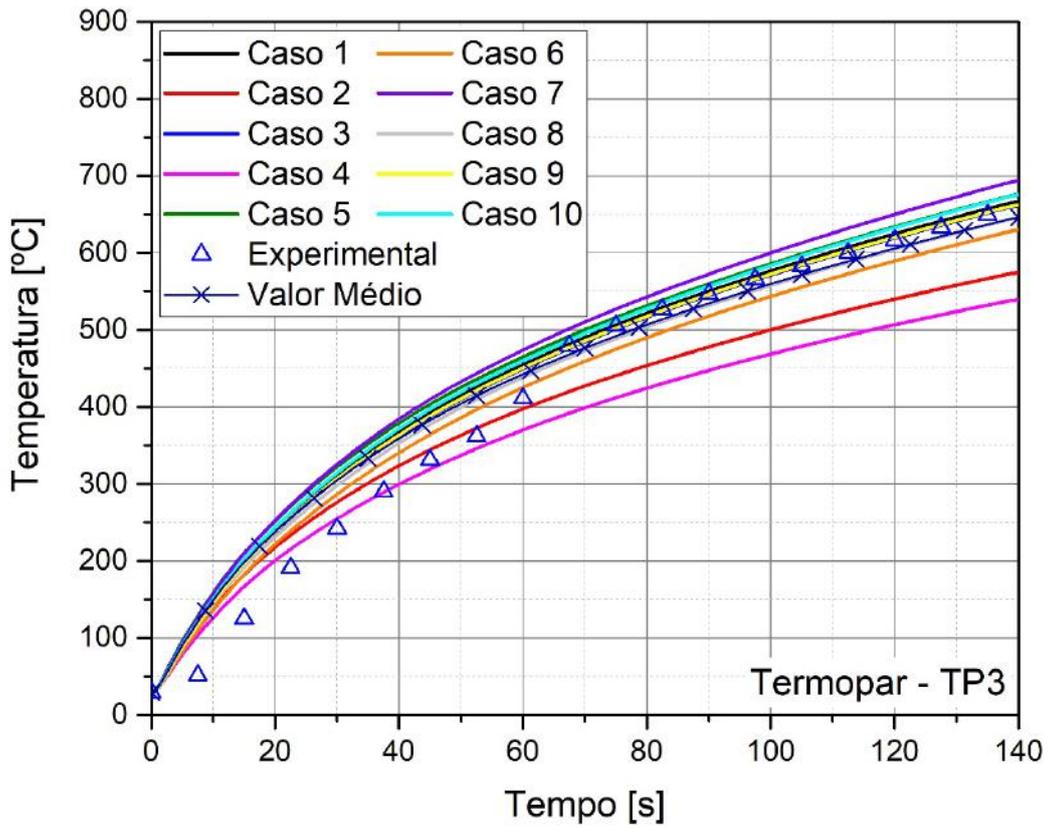
	<b>Caso 6</b>	<b>Caso 7</b>	<b>Caso 8</b>	<b>Caso 9</b>	<b>Caso 10</b>
q <sub>sup1</sub>	2,330	2,735	2,449	2,550	2,981
q <sub>sup2</sub>	2,934	2,084	2,939	1,813	2,619
q <sub>sup3</sub>	1,458	2,144	1,595	1,495	2,300
q <sub>sup4</sub>	1,342	1,688	1,722	1,979	2,043
q <sub>sup5</sub>	1,104	1,086	0,910	1,095	0,990
q <sub>sup6</sub>	0,566	0,626	0,551	0,526	0,475
q <sub>sup7</sub>	0,204	0,423	0,493	0,323	0,488
q <sub>sup8</sub>	0,313	0,428	0,271	0,270	0,301
q <sub>sup9</sub>	0,257	0,086	0,130	0,350	0,338
q <sub>sup10</sub>	0,099	0,393	0,158	0,278	0,126
q <sub>sup11</sub>	0,299	0,366	0,381	0,279	0,321
q <sub>sup12</sub>	0,370	0,114	0,260	0,193	0,251



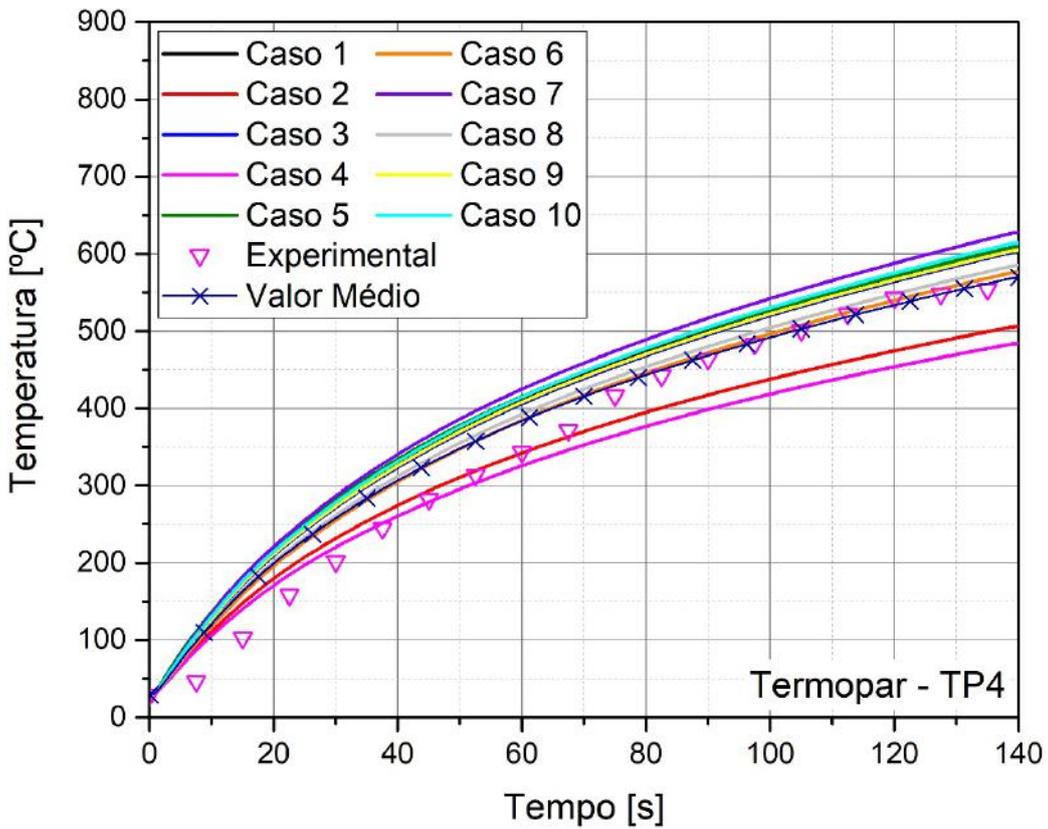
**Figuras 4.36.** Temperaturas obtidas com os parâmetros  $\hat{P}_j$  no sensor TP1.



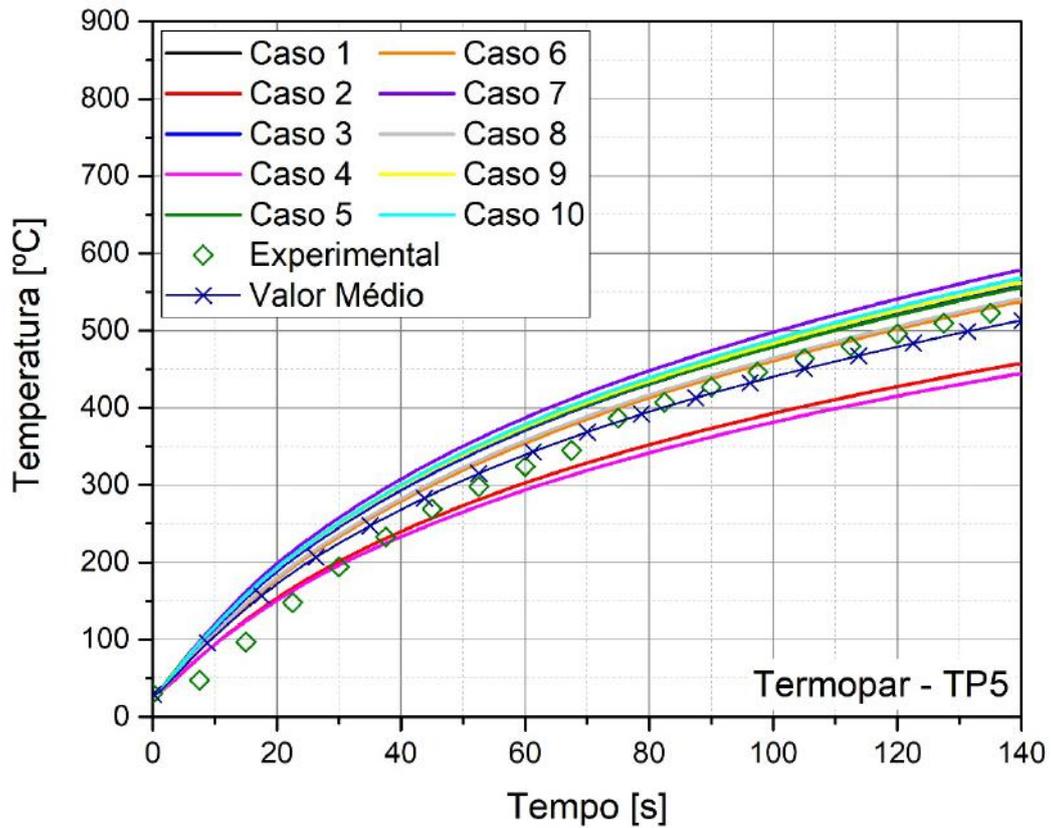
**Figuras 4.37.** Temperaturas obtidas com os parâmetros  $\hat{P}_j$  no sensor TP2.



**Figuras 4.38.** Temperaturas obtidas com os parâmetros  $\hat{P}_j$  no sensor TP3.

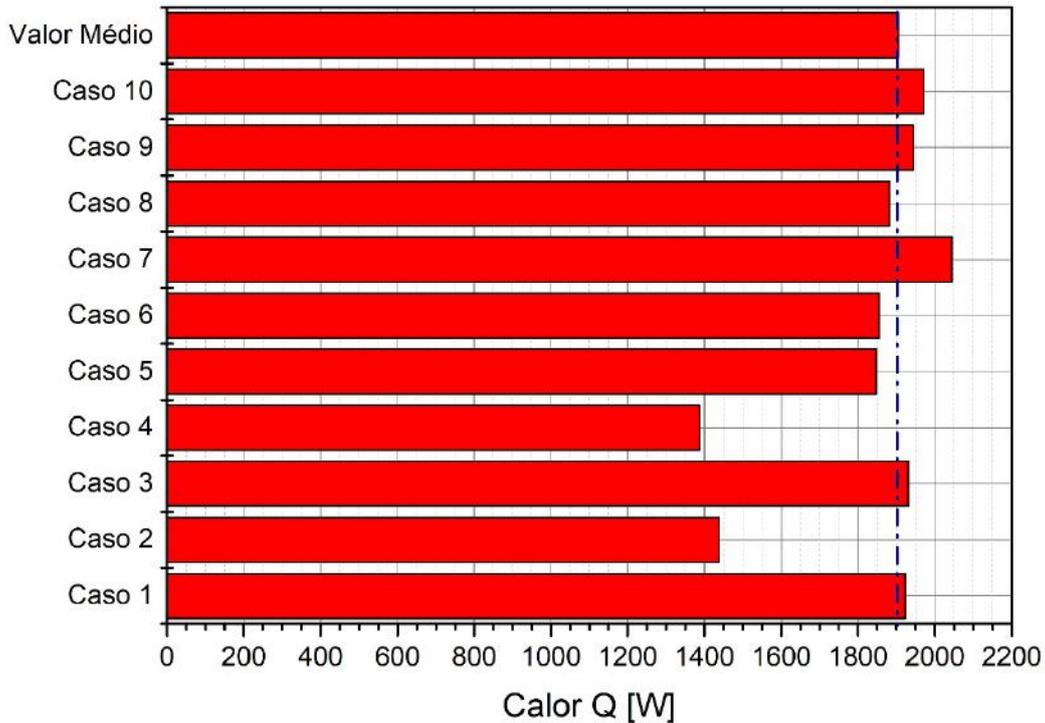


**Figuras 4.39.** Temperaturas obtidas com os parâmetros  $\hat{P}_j$  no sensor TP4.



**Figuras 4.40.** Temperaturas obtidas com os parâmetros  $\hat{P}_j$  no sensor TP5.

Os valores do calor fornecido em cada caso de análise são mostrados na *Figura 4.41*, nela pode ser visto que para o Caso 4 e Caso 2 dos parâmetros aleatórios  $\hat{P}_j$  se obtém o menor calor total cedido, o que é refletido nas temperaturas. O Caso 7 dos parâmetros aleatórios  $\hat{P}_j$  obtém o maior calor total fornecido conseguindo temperaturas maiores que o experimental. O valor médio corresponde ao calor cedido pelos parâmetros  $P_j$  determinados pelo métodos inversos no modelo de discretização do fluxo de calor em 12 blocos.



**Figuras 4.41.** Calor cedido em cada Caso dos parâmetros  $\hat{P}_j$ .

#### 4.10. Determinação da Tensão de Escoamento do Material.

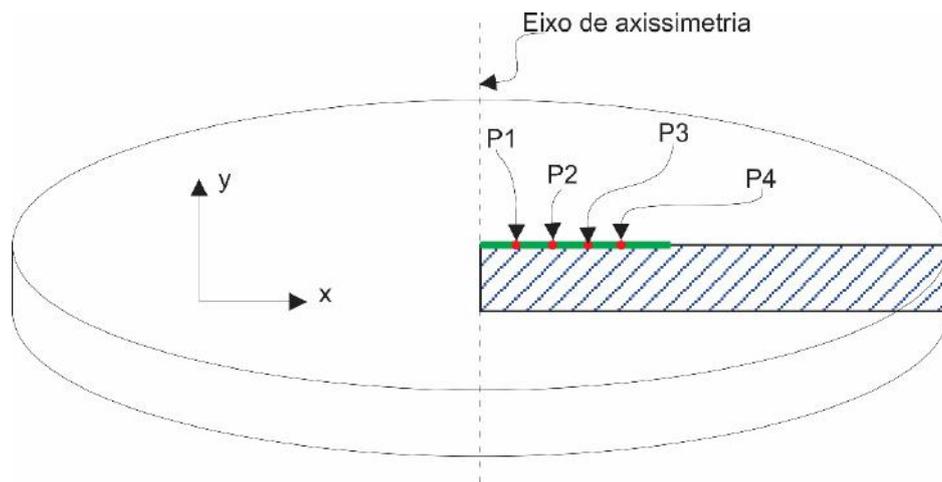
Na solução do problema inverso termomecânico em elementos finitos para a determinação da variação do valor da tensão de escoamento com a temperatura, usaremos o algoritmo de Levenberg-Marquardt, a sub-rotina USERMAT do programa comercial ANSYS e os deslocamentos fora do plano produzidos pelo aquecimento das placas circulares e registrados pelos sensores LVDT's nos ensaios experimentais.

O material usado nos experimentos, o aço ASTM A36, é modelado por uma curva tensão versus deformação bi linear com o critério de escoamento de von Mises, encruamento plástico isotrópico. O comportamento da tensão de escoamento é considerado multilinear com a temperatura, devido ao programa de elementos finitos ANSYS calcular as propriedades mecânicas em temperaturas não definidas na entrada de dados através de interpolação linear.

Estabelece-se nesta tese que a variação da tensão de escoamento com a temperatura para o material estudado fica bem definida quando se conhece seus valores em 5 temperaturas, a saber: T1= 20°C, T2= 200°C, T3= 550°C, T4= 760°C e T5= 1227°C. Os valores da tensão de escoamento nas temperaturas de T1 a T5 serão representadas

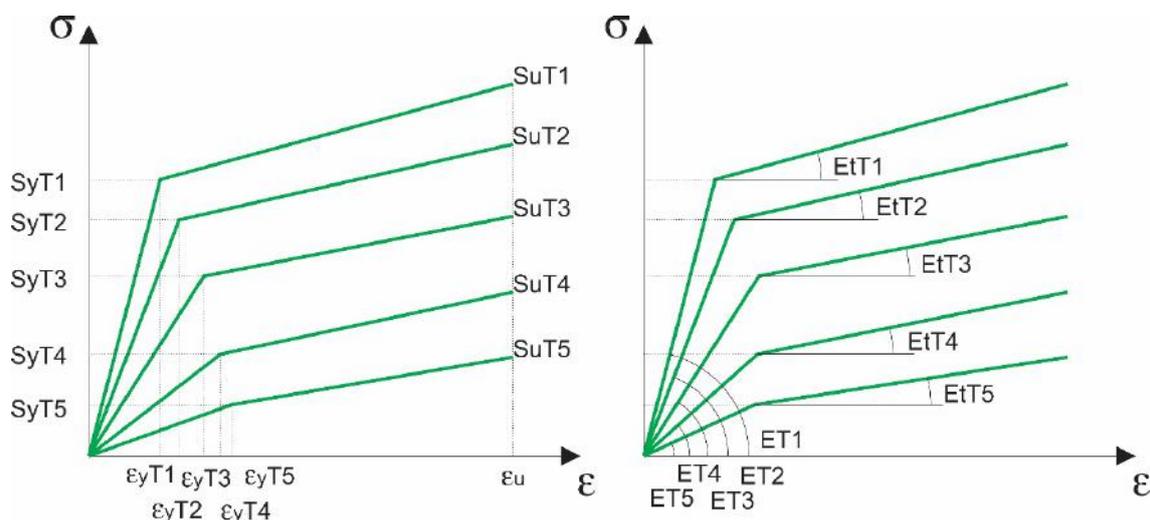
pelos parâmetros SyT1 a SyT5, respectivamente. SyT1 e SyT5 são parâmetros conhecidos, no entanto, SyT2, SyT3 e SyT4 serão os parâmetros a serem determinados pelo método de solução de problemas inversos.

As maiores variações da temperatura ocorrem na superfície onde o calor foi aplicado, assim, espera-se que nesta região também se dará as maiores variações na tensão de escoamento. Neste estudo, definiu-se quatro pontos para o cálculo das tensões SyT2, SyT3 e SyT4 denominados como P1, P2, P3 e P4, distanciados do centro da placa de R1= 1 mm, R2= 3 mm, R3= 5mm e R4= 7 mm respectivamente, como mostra a *Figura 4.42*.



**Figura 4.42.** Posição dos pontos de determinação dos parâmetros.

Para melhor visualização dos parâmetros, o gráfico dos esboços das curvas tensão versus deformação para as temperaturas referenciadas foi repetido como mostra a *Figura 4.43*. Nas curvas do gráfico à esquerda são apresentadas para cada temperatura as correspondentes tensões de escoamento ( $S_y$ ), deformações ( $\varepsilon_y$ ), tensão última ( $S_u$ ) e deformação última ( $\varepsilon_u$ ), no gráfico à direita são representados os módulos de Young ( $E$ ) e módulos tangente ( $Et$ ). Os valores adotados para os parâmetros citados são baseado no trabalho [128], os quais são apresentados na Tabela 4.14, sendo valor da deformação última para todos os casos de  $\varepsilon_u = 0.23$  mm/mm.



**Figura 4.43.** Curva tenção – deformação bilinear.

**Tabela 4.14.** Parâmetros da curva tensão deformação.

Temp. [°C]	Tensão última [MPa]	Deformação escoamento [mm/mm]	Módulo tangente [MPa]			
20	S <sub>u</sub> T1	439	$\epsilon_{yT1}$	1.41E-03	EtT1	608,1
200	S <sub>u</sub> T2	481	$\epsilon_{yT2}$	1.25E-03	EtT2	1009,8
550	S <sub>u</sub> T3	242	$\epsilon_{yT3}$	8.33E-04	EtT3	567,3
760	S <sub>u</sub> T4	112	$\epsilon_{yT4}$	5.10E-04	EtT4	196,1
1227	S <sub>u</sub> T5	50	$\epsilon_{yT5}$	9.92E-05	EtT5	174,0

Nesta tese, como a curva tensão versus deformação é considerada bi linear, o módulo de encruamento dado pela equação (2.81) pode ser redefinido, como:

$$H = \frac{E \cdot Et}{E - Et} \quad (4.1)$$

Sendo o módulo tangente ( $Et$ ) constante para cada temperatura referenciada, e dado por:

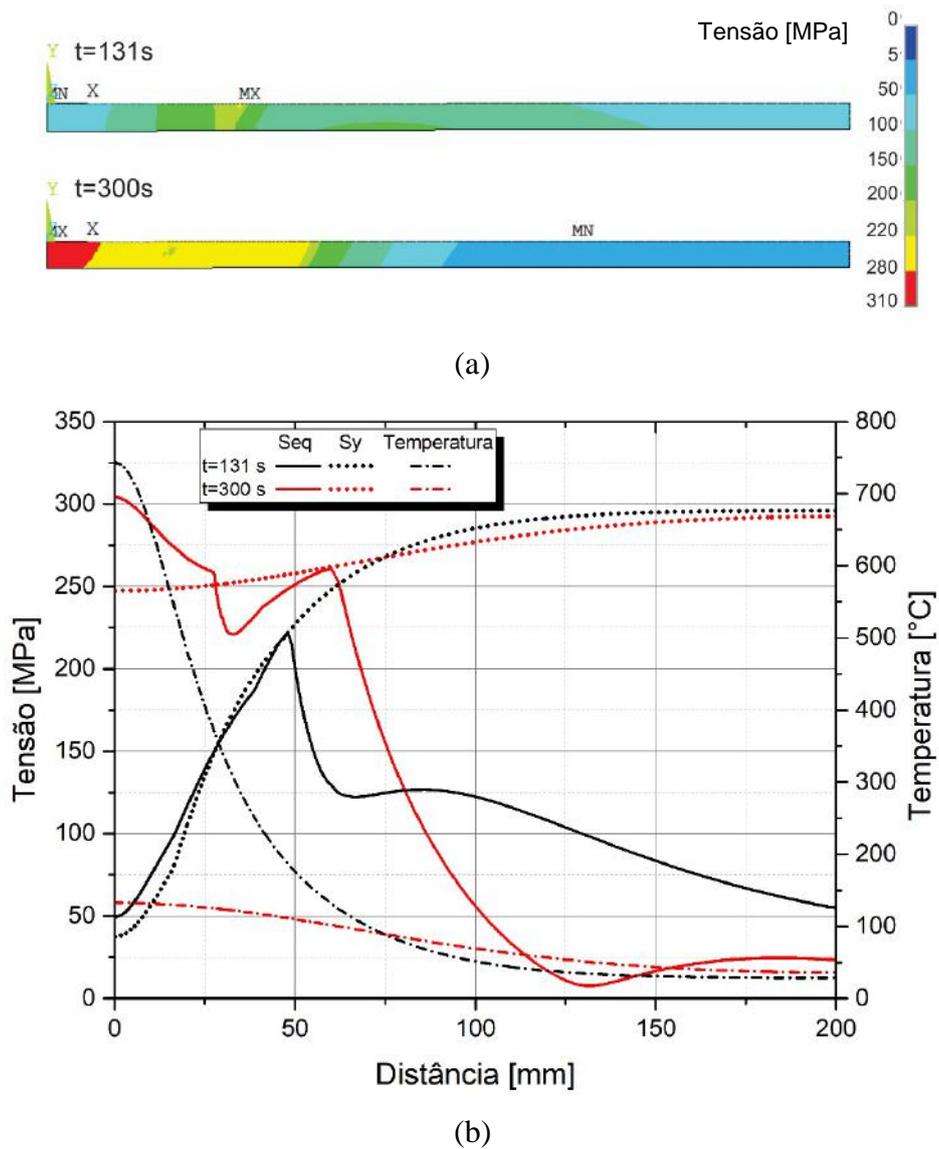
$$Et = \frac{(S_u - S_y)}{(\epsilon_u - \epsilon_y)} \quad (4.2)$$

Substituindo as equações (4.2) e (4.1) na equação (2.82), obtemos:

$$D^{ep} = 2G \left( 1 - \frac{\Delta\lambda 3G}{\sigma_{e\ n+1}^{teste}} \right) I_d + 6G^2 \left( \frac{\Delta\lambda}{\sigma_{e\ n+1}^{teste}} - \frac{1}{E \cdot \frac{(S_u - S_y)}{(\varepsilon_u - \varepsilon_y)}} \right) \frac{s_{n+1}^{teste}}{\|s_{n+1}^{teste}\|} \frac{s_{n+1}^{teste}}{\|s_{n+1}^{teste}\|} + KII \quad (4.3)$$

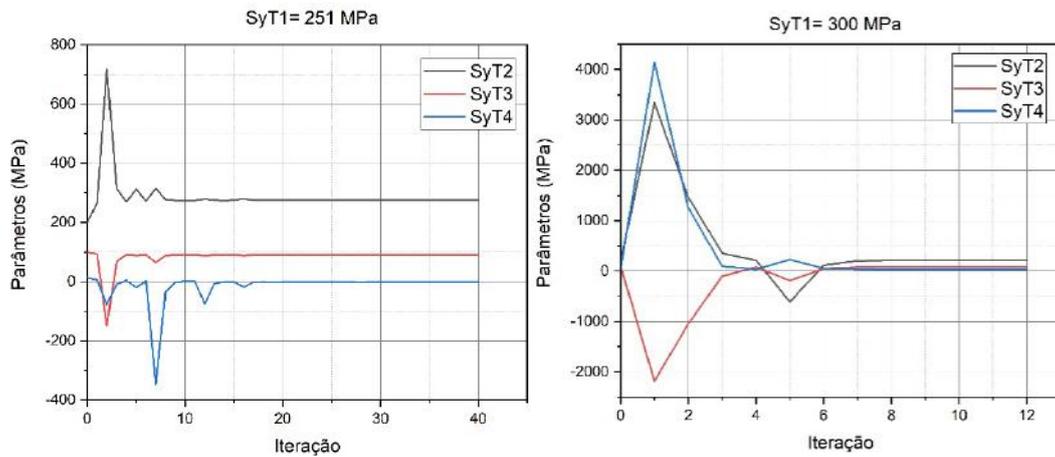
A equação (4.3) é introduzida nas equações (3.41) e (3.42) para a determinação da matriz de sensibilidade do problema inverso termomecânico.

Na *Figura 4.44 (a)* pode-se ver o campo de tensões equivalentes de von Mises ao longo do raio da placa circular PC 1-6 no tempo de 131s (máximo aquecimento) e no tempo de 300s (resfriamento). A *Figura 4.44 (b)* mostra as tensões equivalentes (Seq, linha contínua), tensão de escoamento (Sy, linha pontilhada) nos dois tempos especificados e nos diferentes pontos da superfície superior, além disso, também são mostradas para estes tempos as curvas das variações da temperatura (linha traço e ponto) ao longo do raio da placa na superfície superior. As curvas em linhas pretas se referem ao tempo 131s e em linhas vermelhas ao tempo 300s. Observa-se que próximo ao centro da placa nos tempos de 131s e 300s existe um comportamento complexo da tensão equivalente até próximo à distância de 65 mm do centro. A partir deste ponto observa-se um decréscimo suave da tensão equivalente até o final da placa para o tempo de 131s, e para o tempo de 300s existe um decréscimo acentuado até 125 mm, a partir daí mantendo-se quase constante até o final da placa. Também pode ser visto que em ambos os tempos as tensões equivalentes de von Mises superam as tensões de escoamento até um raio aproximado de 30mm, evidenciando que o material nesta região pode estar plastificado. Por meio das curvas tensão de escoamento versus distância ao centro (que depende das temperaturas) pode ser visto que valor da tensão de escoamento é pouco afetada pela temperatura a partir da distância de aproximadamente 75mm do centro.



**Figura 4.44.** Tensão equivalente de von Mises, tensão de escoamento e temperatura para os tempos 131s e 300s.

Devido ao alto tempo computacional requerido para o problema direto em cada iteração, as distorções fora do plano são analisadas apenas para a placa circular PC 1-6, considerando  $SyT1= 251$  MPa e  $SyT1= 300$  MPa, e com a tensão de escoamento  $SyT5$  igual a 10 MPa para ambos casos. Na *Figura 4.45* observa-se a evolução dos valores de  $SyT2$ ,  $SyT3$  e  $SyT4$  em cada iteração para os dois casos analisados. Note-se que para o caso  $SyT1= 251$ MPa se consegue a convergência desde a iteração 20. No entanto, no caso  $SyT1= 300$  MPa a convergência ocorre desde na iteração 7.

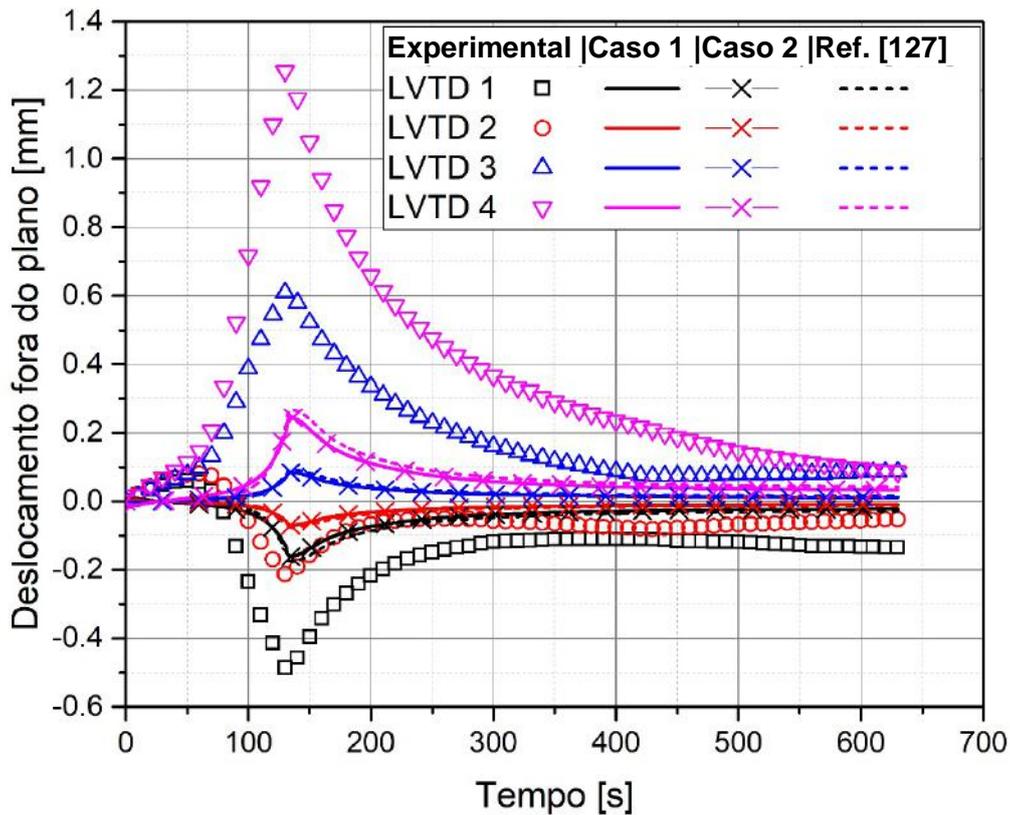


**Figura 4.45.** Evolução dos parâmetros em cada iteração.

Os valores das tensões de escoamento iniciais e finais nas temperaturas de referência são mostrados na Tabela 4.15. Os deslocamentos fora do plano obtidos com os parâmetros calculados pelo método inverso são mostrados na *Figura 4.46*, para as tensões de escoamento finais do Caso 1 e Caso 2. As curvas desta figura mostram que os deslocamentos ficaram inferiores aos experimentais desde o início até o final do ensaio. O LVDT 2 que está posicionado mais perto ao anel de apoio consegue melhor aproximação no deslocamento final. A comparação dos deslocamentos obtidos nas análises dos problemas inversos, com os determinados considerando as tensões de escoamento segundo [127], se observa uma grande aproximação entre eles. Também pode ser visto que, de maneira geral, ficam bastante distantes dos deslocamentos medidos nos experimentos. Das comparações dos resultados numéricos pode-se concluir que os deslocamentos da placa aquecida são pouco sensíveis às variações dos valores das tensões de escoamento nas temperaturas referenciadas.

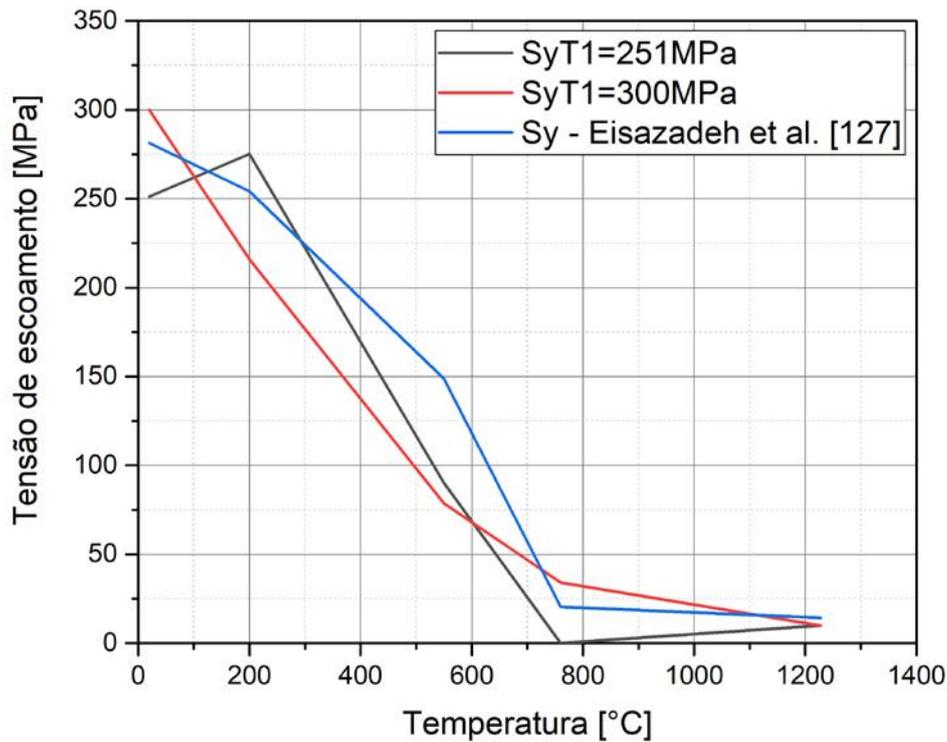
**Tabela 4.15.** Parâmetros iniciais e calculados

Temperatura [C]		Tensões de Esc. Iniciais		Tensão de Esc. Final	
		[MPa]		[MPa]	
		Caso 1	Caso2	Caso 1	Caso2
20	SyT1	2,512E+2	3,000E+2	2,512E+2	3,000E+2
200	SyT2	2,000E+2	2,000E+2	2,751E+2	2,159E+2
550	SyT3	1,000E+2	1,000E+2	9,026E+1	7,862E+1
760	SyT4	1,300E+1	3,000E+1	1,136E-4	3,403E+1
1227	SyT5	1,000E+1	1,000E+1	1,000E+1	1,000E+1



**Figura 4.46.** Gráficos deslocamento versus tempo.

O comportamento multilinear da tensão de escoamento obtida pela aplicação do algoritmo de Levenberg-Marquardt para elementos finitos são mostradas na *Figura 4.47*. Observa-se que a tensão de escoamento tem diferente comportamento com a variação do parâmetro  $SyT1$ , mas consegue-se o mesmo resultado final em termos de deslocamentos. A tensão de escoamento variando com a temperatura segundo [127] é mostrada de cor azul na *Figura 4.47*, que é diferente do comportamento obtido pelas soluções dos problemas inversos com  $SyT1 = 251$  MPa. Esta diferença pode acontecer devido a taxa de deformação dos processos termomecânicos de aquecimento de placas serem variáveis, no entanto, as tensões de escoamento nas diferentes temperaturas apresentadas na literatura, muitas vezes, são determinadas experimentalmente a taxa de deformação constante. Outro motivo desta diferença, identificado anteriormente, é a pouca sensibilidade dos deslocamentos em relação a tensão de escoamento nas temperaturas de referência e vice-versa.



**Figura 4.47.** Tensão de escoamento com a temperatura.

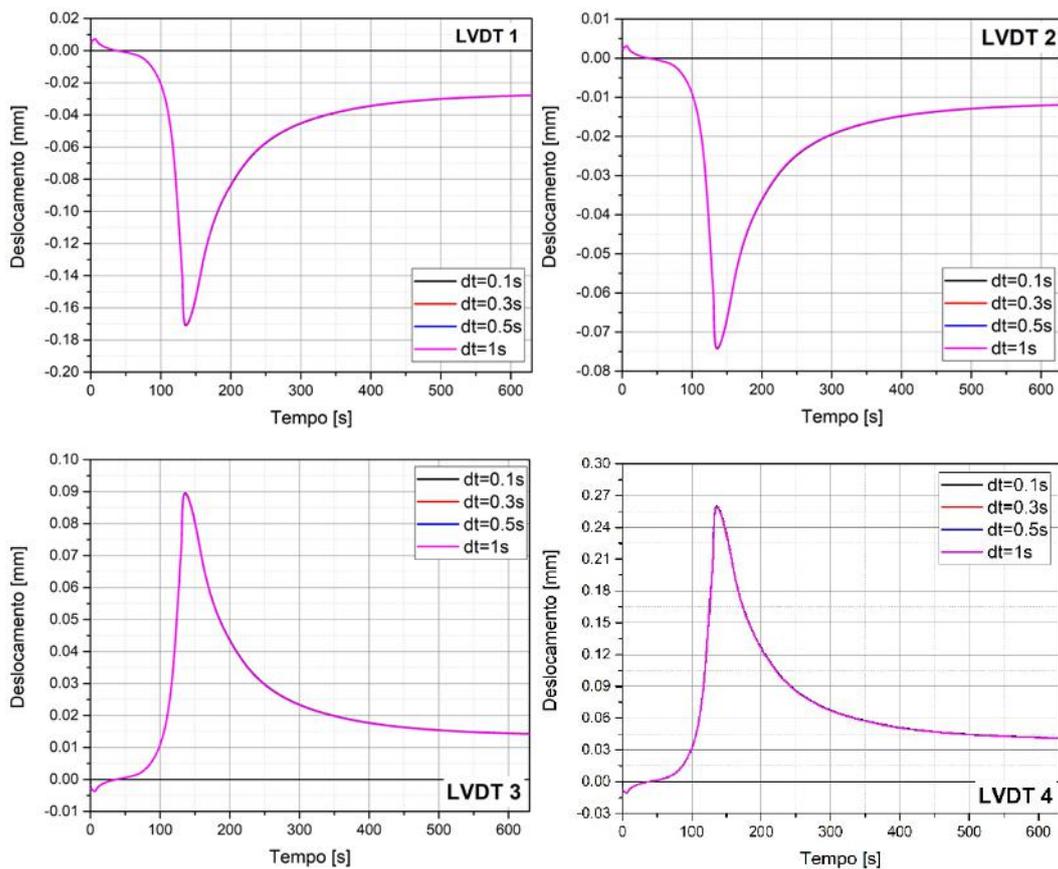
#### 4.11. Análise da Discretização do Tempo.

As análises termomecânicas sequencialmente acopladas apresentam um esforço computacional muito grande quando são realizadas com o mesmo passo do tempo que as análises térmicas correspondentes, em especial quando os incrementos do tempo são muito pequenos, sendo isto refletido na solução do problema inverso, pois, a análise mecânica direta representa a maior carga do tempo requerido para cada iteração na determinação da tensão de escoamento.

No intento de reduzir o tempo computacional é realizado um estudo da sensibilidade temporal das análises mecânicas diretas. Consideram-se quatro passos do tempo  $dt=0.1s$ ,  $dt=0.3s$ ,  $dt=0.5s$  e  $dt=1.0s$ . Na Tabela 4.16 são mostrados os quatro diferentes passos do tempo com seu respectivo custo computacional. As respostas no deslocamento em cada LVDT são mostradas na *Figura 4.48* e mostram que não observou maior variação no deslocamento para os diferentes passos de tempos estudados, mas se consegue otimizar o tempo computacional.

**Tabela 4.16.** Passos de tempo e carga computacional.

Passo de Tempo	Tempo Computacional [min.]
dt=0,1s	210
dt=0,3s	106
dt=0,5s	62
dt=1,0s	25



**Figura 4.48.** Variação do deslocamento com diferentes passos de tempo.

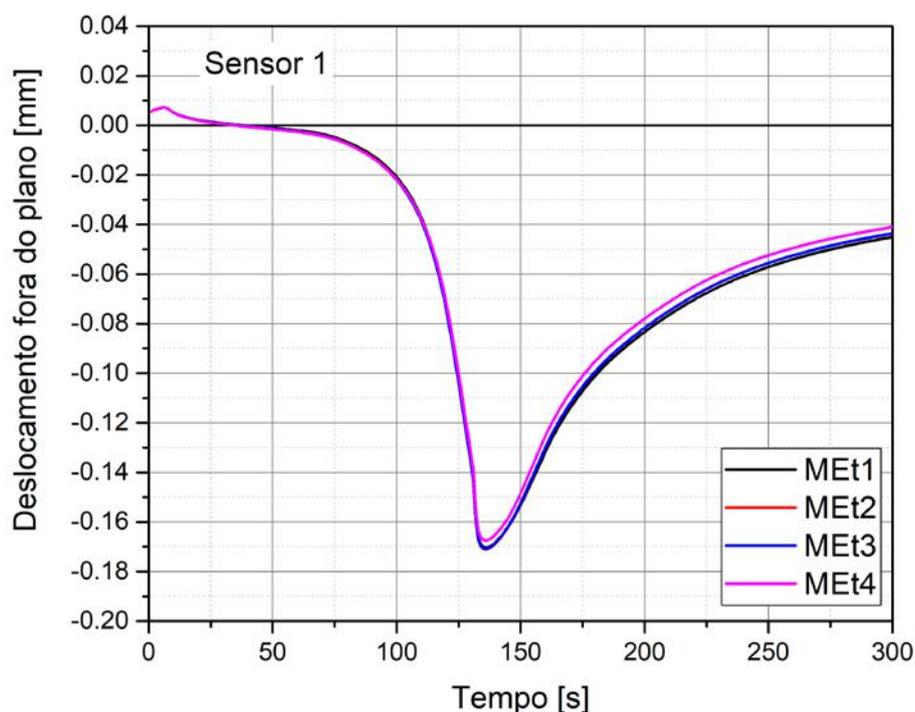
#### 4.12. Análise da Variação do Módulo Tangente ( $E_t$ ).

Nesta secção se analisa a influência do módulo tangente ( $E_t$ ) em diferentes temperaturas no comportamento do deslocamento fora do plano no tempo em placas circulares. Na Tabela 4.17 mostra os 4 casos de módulo tangente analisados, os casos MEt1, MEt2 e MEt3 tem valores diferentes para cada temperatura, o caso MEt4 considera o mesmo valor nas diferentes temperaturas.

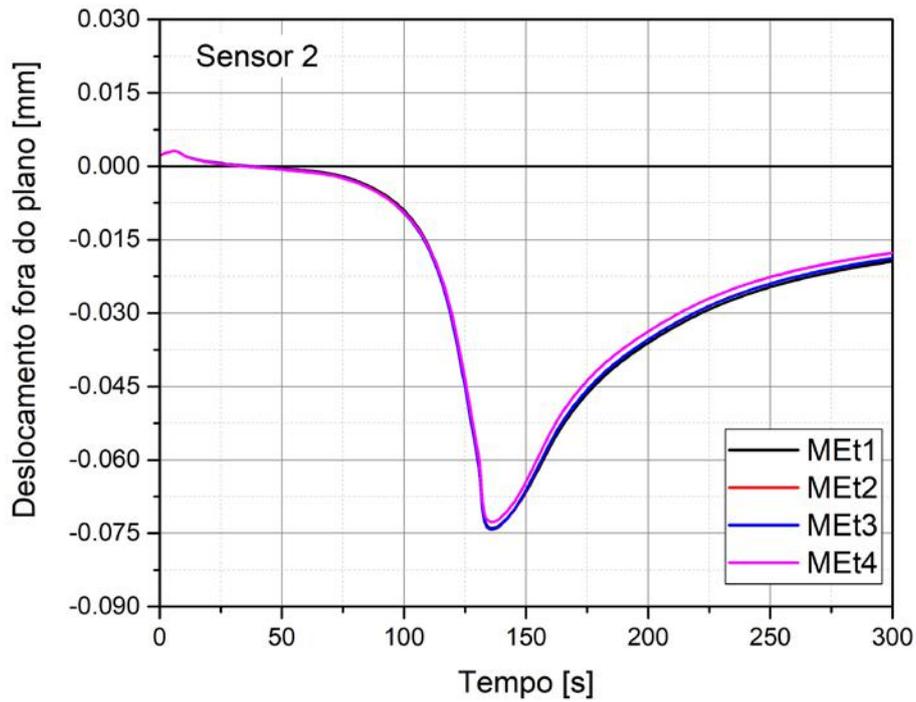
**Tabela 4.17.** Casos de módulo tangente analisados

Temp. [°C]	MEt1 [MPa]	MEt2 [MPa]	MEt3 [MPa]	MEt4 [MPa]
20	1240	800	608	300
200	1377	888	1010	300
250	1313	847	947	300
550	947	611	567	300
760	265	171	195	300

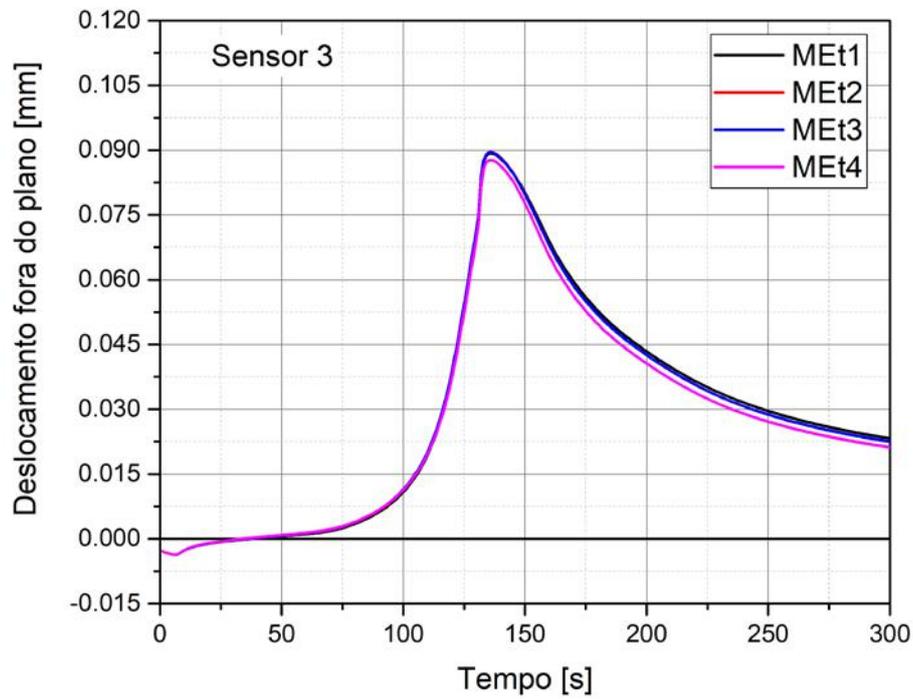
Os resultados obtidos em cada sensor LVDT são mostrados nas *Figuras 4.49, 4.50, 4.51 e 4.52*. Se observa que os casos de módulo tangente MEt1, MEt2 e MEt3 não apresentam influência nos deslocamentos fora do plano em todos os sensores LVDT's. O caso de módulo tangente MEt4 apresenta uma pequena variação com respeito aos outros casos do módulo tangente. Em conclusão, o módulo tangente com valores diferentes em cada temperatura não varia os deslocamentos fora do plano de maneira significativa.



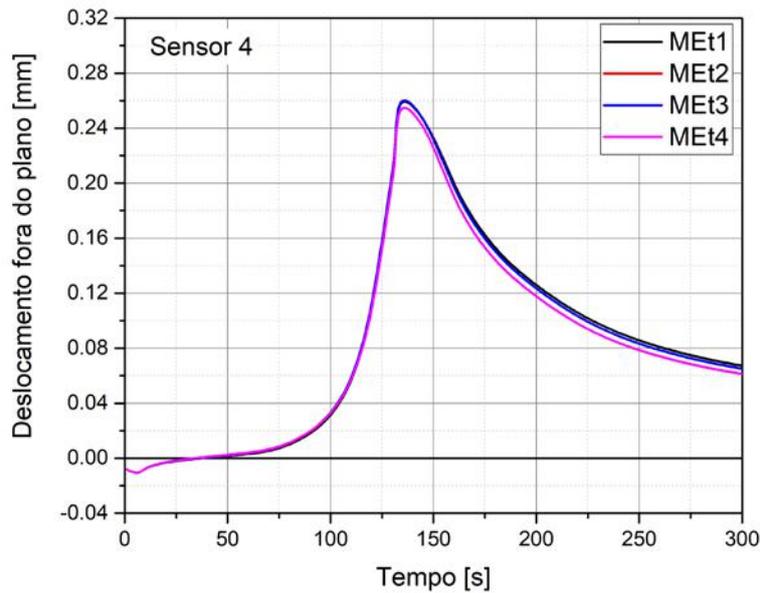
**Figura 4.49.** Deslocamentos obtidos com os casos de módulo tangente no LVDT 1.



**Figura 4.50.** Deslocamentos obtidos com os casos de módulo tangente no LVDT 2.



**Figura 4.51.** Deslocamentos obtidos com os casos de módulo tangente no LVDT 3.



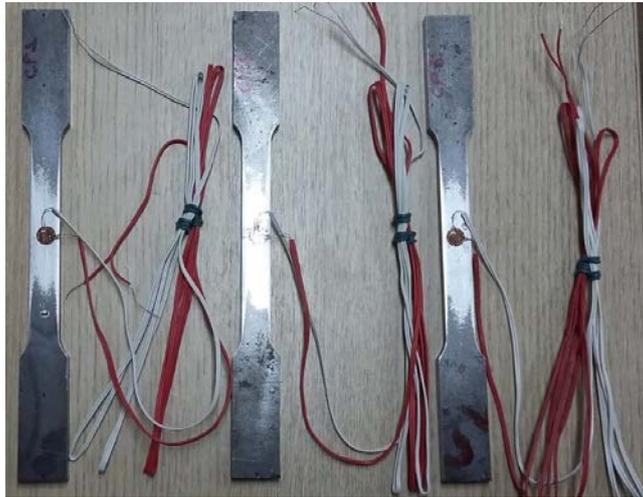
**Figura 4.52.** Deslocamentos obtidos com os casos de módulo tangente no LVDT 4.

#### 4.13. Determinação da Tensão de Escoamento do Material a Temperatura Ambiente

Para a determinar a tensão de escoamento do material a temperatura ambiente se realizaram testes de tração em 03 corpos de prova para a placa PC 1-6. Os corpos de prova foram dimensionados segundo a norma ASTM E8/E8M-13a. As principais dimensões são mostradas na Tabela 4.18. Os corpos de prova são identificados com as iniciais CP1, CP2 e CP3, e foram instrumentados com sensores Strain Gages bi-axiais de 120.4  $\Omega$  de resistência como mostra a *Figura 4.53*, .

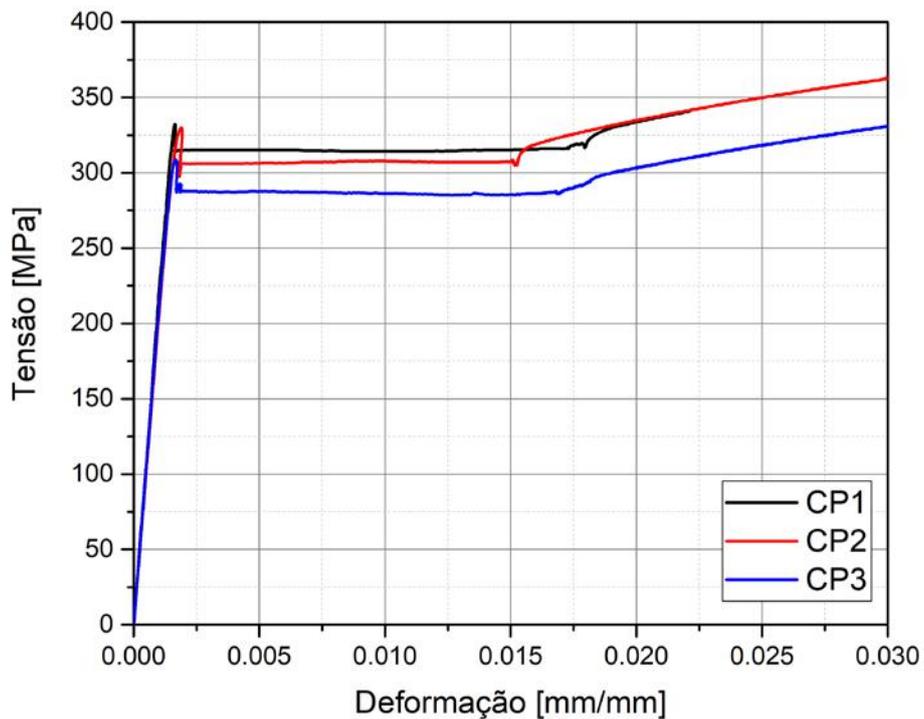
**Tabela 4.18.** Dimensões dos corpos de prova.

	CP1	CP2	CP3
<b>Espessura [mm]</b>	6,41	6,36	6,65
<b>Largura [mm]</b>	12,23	12,13	12,30
<b>Área Sec. Trans. [m<sup>2</sup>]</b>	7,84E-05	7,72E-05	8,18E-05



**Figura 4.53.** Corpos de prova instrumentados.

As medições dos Strain Gages para os três corpos de prova são mostradas na *Figura 4.54*, nelas observa-se o mesmo comportamento para os corpos de prova CP1 e CP2. Os valores de tensão de escoamento, módulo de Young e coeficiente de Poisson para cada amostra na temperatura ambiente são mostrados na Tabela 4.19. O valor da tensão de escoamento para a placa PC 1-6 obtido dos ensaios de tração é 303 MPa.



**Figura 4.54.** Curvas Tensão-deformação obtidos com os Strain Gage.

**Tabela 4.19.** Propriedades mecânicas na temperatura ambiente

	CP1	CP2	CP3	Valor Médio
Tensão de escoamento [MPa]	315,14	306,14	287,45	302,91
Módulo de Young [GPa]	215,5	204,6	208,7	209,6
Coefficiente de Poisson [ ]	0,28	0,27	0,30	0,29

#### 4.14. Observações e Comentários.

- Na centralização da placa circular e do maçarico é utilizado um nivelador laser para conseguir maior exatidão, no entanto, devido a não previsão deste equipamento no projeto do suporte para as placas, tornou-se um pouco difícil o refinamento de posicionamento do maçarico.
- A chama oxi-acetilênica para todos os ensaios não foi a mesma, devido aos ajustes manuais das válvulas de controle do maçarico, obtendo-se diferentes misturas para a chama neutra.
- As temperaturas medidas pelo termopar TP2 na placa PC 1-8 e TP3 na placa PC 2-10 são desprezadas devido a falhas no registro de seus dados.
- Os resultados da comparação entre as temperaturas calculadas e medidas para a placa circular de 6 mm apresenta o menor erro médio (8,8%). A placa PC 1-8 apresenta o maior erro médio (14,7%). A melhor aproximação para as temperaturas máximas é a obtida na placa PC 1-10 (1,9%) e a menos precisa é para a placa PC 2-10 (5,0%)
- Na placa PC 2-10 o calor fornecido é maior do que para a amostra PC 1-10, apesar de apresentarem praticamente o mesmo valor de  $r_{toch}$ . Isto é esperado, pois a tocha oxi-acetilênica está mais perto para o caso de PC 2-10 (ver Tabela 4.1).
- Para as placas PC 1-6 e PC 1-8 as alturas da tocha são muito próximas, porém o calor fornecido em PC 1-8 é quase duas vezes o calor de PC 1-6, isto pode ser atribuído à mistura dos gases.

- A metodologia empregada para a solução de problemas inversos proporciona a determinação dos parâmetros da aproximação Gaussiana da fonte de calor que reproduzem de forma aceitável as temperaturas medidas pelos termopares.

# Capítulo 5

## Conclusões e Recomendações de Trabalhos Futuros

### 5.1. Conclusões.

Nesta tese se apresenta a modelagem numérica termomecânica de um processo de aquecimento com chama oxi-acetilênica, desenvolvida em elementos finitos axissimétricos 2D. Na análise térmica, além de outros dados (como as propriedades térmicas do material, condições de contorno e condição inicial), é necessário o conhecimento da fonte de calor gerada pela mistura dos gases oxigênio e acetileno, e na análise mecânica um dos dados fundamentais é tensão de escoamento do material variando com a temperatura. Como a priori os parâmetros da fonte de calor e a tensão de escoamento em problemas reais não são precisamente conhecidos, o procedimento proposto nesta tese implica na aplicação do algoritmo de Levenberg-Marquardt para a solução dos problemas inversos em elementos finitos, e medições em ensaios experimentais das temperaturas e deslocamentos para determinação das incógnitas.

Para diminuir o tempo computacional das análises numéricas se considerou uma malha com elementos refinados no centro a placa, e aumentando gradualmente seu tamanho conforme se afasta na direção do raio e na espessura. Além da análise de sensibilidade de malha se realizou uma análise de sensibilidade temporal conseguindo diminuir o tempo computacional consideravelmente para as análises diretas.

A metodologia empregada neste trabalho apresenta-se eficaz e confiável para a estimativa da distribuição do fluxo de calor aplicado e o calor fornecido as chapas circulares em processos térmicos.

A distribuição gaussiana em chapas finas representa bem o fluxo de calor aplicado às placas circulares, no entanto, em chapas de espessura média e grossa apenas um setor da distribuição gaussiana representa melhor o processo conseguindo ótimas concordâncias com as temperaturas medidas.

A distribuição do fluxo de calor mediante a discretização em blocos se apresenta como uma alternativa confiável às oferecidas na literatura, obtendo temperaturas com ótimas concordâncias as medidas nos experimentos nas placas de 6, 8 e 10 mm de espessura.

A análise espacial da discretização de blocos mostra que é necessário ter blocos de menor comprimento perto do centro da placa e ir aumentando o comprimento dos blocos conforme se afasta, para conseguir melhor concordância nas temperaturas.

O número de blocos da discretização do fluxo de calor para o problema proposto nesta tese deve ser menor que 15 blocos, pois o excesso de parâmetros envolvidos gera um mal condicionamento nas análises numéricas, o qual pode ser contornado com o aumento de sensores para a medição de temperaturas.

Observa-se que dentro da faixa de confiança os parâmetros estimados  $\hat{P}_j$ , escolhidos aleatoriamente produzem calor total fornecido aproximado ao calor total médio calculado pelos parâmetros  $P_j$ , se obtém boa concordância com as temperaturas medidas nos experimentos. No entanto, na área de aquecimento se obtém diferentes perfis de temperatura.

A aplicação do algoritmo de Levenberg-Marquardt para a solução de problemas inversos termomecânicos consegue prever com razoável aproximação a tensão de escoamento variando com a temperatura, considerando uma variação linear entre as temperaturas de referência. Independentemente do valor da tensão de escoamento nas temperaturas de referência, inclusive as dadas no artigo [127], os deslocamentos determinados são muito semelhantes para os diferentes pontos em todas as temperaturas. Com isto podemos concluir que pequenas variações da tensão de escoamento nas diferentes temperaturas não alteram significativamente os deslocamentos.

A análise do Caso 1, na determinação do comportamento da tensão de escoamento com a temperatura por métodos de solução de problemas inversos, mostra que para a temperatura de 200°C o valor da tensão de escoamento é maior com relação ao valor da tensão de escoamento à temperatura ambiente, pois a metodologia identifica que a tensão de escoamento para a placa PC 1-6 à temperatura ambiente é maior do que a considerada

no Caso 1 (251 MPa). O ensaio de tração determinou que a tensão de escoamento é de 303 MPa.

A análise da influência do módulo tangente do material determina que esta tem pouca sensibilidade no deslocamento fora do plano.

## **5.2. Recomendações de Trabalhos Futuros.**

- Fazer análise térmica modelando a fonte de calor considerando outras distribuições do fluxo de calor existentes na literatura.
- Aplicar outros métodos de solução para problemas inversos considerando como parâmetros desconhecidos o fluxo aplicado e/ou a condutividade térmica.
- Analisar processos de soldagem ou aquecimento com fonte móvel 3D em elementos finitos tridimensionais.
- Modelar e analisar a tensão de escoamento do material seguindo as regras de encruamento cinemático ou mista (Isotrópico-Cinemático).
- Considerar os efeitos metalúrgicos nas análises termomecânicas.
- Utilizar outros métodos de medição de deslocamentos perto da fonte de calor.

# Referências

- [1] R.A. Fedele, Soldagem na Indústria Naval Moderna: Materiais e Processos, Rev. Soldag. Inspeção. 6 (2010) 1–8.
- [2] K. Masubuchi, Analysis of Welded Structures, Pergamon Press, 1982. doi:10.1016/0026-0800(82)90012-X.
- [3] C. Heinze, C. Schwenk, M. Rethmeier, Effect of Heat Source Configuration on the Result Quality of Numerical Calculation of Welding-Induced Distortion, Simul. Model. Pract. Theory. 20 (2012) 112–123. doi:10.1016/j.simpat.2011.09.004.
- [4] G.. Little, A.. Kamtekar, The Effect of Thermal Properties and Weld Efficiency on Transient Temperatures During Welding, Comput. Struct. 68 (1998) 157–165. doi:10.1016/S0045-7949(98)00040-6.
- [5] X.K. Zhu, Y.J. Chao, Effects of Temperature-Dependent Material Properties on Welding Simulation, Comput. Struct. 80 (2002) 967–976.
- [6] A.A. Bhatti, Z. Barsoum, H. Murakawa, I. Barsoum, Influence of Thermo-Mechanical Material Properties of Different Steel Grades on Welding Residual Stresses and Angular Distortion, Mater. Des. 65 (2015) 878–889. doi:10.1016/j.matdes.2014.10.019.
- [7] F.R. Centeno, Análise Inversa da Transferência de Calor em Soldagem por Fricção Linear Utilizando o Método de Otimização Extrema Generalizada, Dissertação de M.Sc., Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2008.
- [8] A.P.M. Cângani, Análise Térmica do Processo de Soldagem TIG de Amostras Metálicas, Dissertação de M.Sc., Universidade Federal de Uberlândia, 2010.
- [9] S. Unnikrishnakurup, Etude Expérimentale et Numérique d ’ un Essai de Soudage TIG Statique et Estimation des Paramètres du Flux de Chaleur, Thèse de D.Sc., Université de Montpellier II, 2014.
- [10] S. Kubo, Inverse Problems Related to the Mechanics and Fracture of Solids and Structures, JSME Int. journal. Ser. 1, Solid Mech. strength Mater. 31 (1988) 157–

166. doi:10.1299/jsmea1988.31.2\_157.

- [11] A. Maniatty, N. Zabaras, K. Stelson, Finite Element Analysis of Some Inverse Elasticity Problems, *J. Eng. Mech.* 115 (1989) 1303–1317. doi:10.1061/(ASCE)0733-9399(1989)115:6(1303).
- [12] E. Turco, Tools for the Numerical Solution of Inverse Problems in Structural Mechanics: Review and Research Perspectives, *Eur. J. Environ. Civ. Eng.* 21 (2017) 509–554. doi:10.1080/19648189.2015.1134673.
- [13] S. Hartmann, R.R. Gilbert, Identifiability of Material Parameters in Solid Mechanics, *Arch. Appl. Mech.* 88 (2018) 3–26. doi:10.1007/s00419-017-1259-4.
- [14] J.A. Goldak, M. Akhlaghi, *Computational welding mechanics*, 1 ed., Springer, New York, NY, 2005.
- [15] D. Radaj, *Welding Residual Stresses and Distortion: Calculation and Measurement*, Elsevier Science & Technology, Berlin, 2003.
- [16] N.R. Mandal, *Welding Techniques, Distortion Control and Line Heating*, Alpha Science International Ltd, Oxford, UK, 2009.
- [17] L.E. Lindgren, *Computational Welding Mechanics: Thermomechanical and Microstructural Simulations*, Woodhead Publishing Limited, Cambridge, England, 2007.
- [18] R.W. Lewis, P. Nithiarasu, K.N. Seetharamu, *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*, John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex, England, 2004.
- [19] J.L. Hansen, *Numerical Modelling of Welding Induced Stresses*, Ph. D. Thesis, Technical University of Denmark, 2003.
- [20] A. Pittner, *A Contribution to the Solution of the Inverse Heat Conduction Problem in Welding Simulation*, D.Sc. These, Technischen Universität Berlin, 2012.
- [21] D. Rosenthal, *Mathematical Theory of Heat Distribution During Welding and Cutting*, *Weld. J.* 20 (1941) 220–234.

- [22] T. Kasuya, N. Yurioka, Prediction of Welding Thermal History by a Comprehensive Solution, *Weld. J. Res. Suppl.* (1993) 107s-115s.
- [23] R. Sudhakaran, V.V. Murugan, P.S. Sivasakthivel, Optimization of Process Parameters To Minimize Angular Distortion in Gas Tungsten Arc Welded Stainless Steel 202 Grade Plates Using Particle Swarm Optimization, *J. Eng. Sci. Technol.* 7 (2012) 195–208.
- [24] A. Spille-Kohoff, Arc Welding: From Process Simulation to Structural Mechanics Part I: Process Simulation with ANSYS CFX, in: *EASC 2009 4th Eur. Automot. Simul. Softw.*, 2009.
- [25] M. Dreher, U. Füssel, M. Schnick, Numerical Optimization of Gas Metal Arc Welding Torches Using ANSYS CFX, in: *63rd Annu. Assem. Int. Conf. Int. Inst. Weld.*, 2010.
- [26] M. Schnick, U. Fuessel, M. Hertel, A. Spille-Kohoff, A.B. Murphy, Numerical investigations of arc behaviour in gas metal arc welding using ANSYS CFX, *Front. Mater. Sci.* 5 (2011) 98–108. doi:10.1007/s11706-011-0134-4.
- [27] N.S. Prasad, T.K.S. Narayanan, Finite Element Analysis of Temperature Distribution During Arc Welding Using Adaptive Grid Technique, *Weld. J.* 75 (1996) S123–S128.
- [28] L.E. Lindgren, H.Å. Häggblad, J.M.J. McDill, A.S. Oddy, Automatic Remeshing for Three-Dimensional Finite Element Simulation of Welding, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 147 (1997) 401–409. doi:10.1016/S0045-7825(97)00025-X.
- [29] H. Runnemalm, S. Hyun, Three-Dimensional Welding Analysis Using an Adaptive Mesh Scheme, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 189 (2000) 515–523. doi:10.1016/S0045-7825(99)00304-7.
- [30] S. Qingyu, L. Anli, Z. Haiyan, W. Aiping, Development and Application of the Adaptive Mesh Technique in the Three-Dimensional Numerical Simulation of the Welding Process, *J. Mater. Process. Technol.* 121 (2002) 167–172. doi:10.1016/S0924-0136(01)00830-5.

- [31] M. Hamide, M. Bellet, Adaptive Anisotropic Mesh Technique for Coupled Problems: Application to Welding Simulation, AIP Conf. Proc. 908 (2007) 1561–1566. doi:10.1063/1.2741031.
- [32] M. Hamide, E. Massoni, M. Bellet, Adaptive Mesh Technique for Thermal-Metallurgical Numerical Simulation of Arc Welding Processes, Int. J. Numer. Methods Eng. 73 (2008) 624–641. doi:10.1002/nme.2083.
- [33] D. Tikhomirov, B. Rietman, K. Kose, M. Makkink, Computing Welding Distortion: Comparison of Different Industrially Applicable Methods, Adv. Mater. Res. 6–8 (2005) 195–202. doi:10.4028/www.scientific.net/AMR.6-8.195.
- [34] C. Shen, Low Distortion Welding for Shipbuilding Industry, M.Sc. Dissertation, University of Wollongong, 2013.
- [35] V. Gunaraj, N. Murugan, Prediction of Heat-Affected Zone Characteristics in Submerged Arc Welding of Structural Steel Pipes, Weld. J. (2002) 94–98.
- [36] R.M. Basto da Silva, Uma Contribuição à Modelagem do Processo de Soldagem de Placas de Aço Utilizando um Modelo Constitutivo Acoplado, Dissertação D.Sc., Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca - CEFET/RJ, 2007.
- [37] Z. Boumerzoug, C. Derfouf, T. Baudin, Effect of Welding on Microstructure and Mechanical Properties of an Industrial Low Carbon Steel, Engineering. 02 (2010) 502–506. doi:10.4236/eng.2010.27066.
- [38] E. Ranjbarnodeh, M. Farajpour, Evolution of Plastic Strains in Dissimilar Weld of Stainless Steel to Carbon Steel, Assoc. Metall. Eng. Serbia. 18 (2012) 19–27.
- [39] T. Kasuya, M. Okumura, N. Yurioka, Methods for Predicting Maximum Hardness of Heat-Affected Zone and Selecting Necessary Preheat Temperature for Steel Welding, Nippon Steel Tech. Rep. (1995) 7–14.
- [40] M. Khurshid, N.A. Mumtaz, Static and Fatigue Design of Load Carrying Welded Joints in High Strength Steels, M.Sc. Thesis, KTH Royal Institute of Technology, 2011.

- [41] L.F. Andersen, Residual Stresses and Deformations in Steel Structures Lars Fuglsang Andersen, PhD thesis, Technical University of Denmark, 2000.
- [42] M. Abid, M.J. Qarni, Numerical Investigation of Residual Stresses and Distortions due to Multi-Pass Welding in a Pipe-Flange Joint, Proc. Inst. Mech. Eng. Part E J. Process Mech. Eng. 224 (2010) 253–267. doi:10.1243/09544089JPME314.
- [43] P. Biswas, D.A. Kumar, N.R. Mandal, M.M. Mahapatra, A Study on the Effect of Welding Sequence in Fabrication of Large Stiffened Plate Panels, J. Mar. Sci. Appl. 10 (2011) 429–436. doi:10.1007/s11804-011-1088-8.
- [44] D. Deng, H. Murakawa, Finite Element Analysis of Welding Distortion in a Large Thin-plate Panel Structure †, Trans. JWRI. 40 (2011) 89–100.
- [45] S. Akbarnejad, Investigation on Static Strength of Welded Joints, M.Sc. Thesis, KTH Royal Institute of Technology, 2012.
- [46] N. Syahroni, M. Irfan, P. Hidayat, 3D Finite Element Simulation of T-Joint Fillet Weld : Effect of Various Welding Sequences on the Residual Stresses and Distortions, in: Numer. Simul. - From Theory to Ind., InTech, 2012: p. 583–606. doi:dx.doi.org/10.5772/50192.
- [47] G. Xu, C. Wu, X. Ma, X. Wang, Numerical Analysis of Welding Residual Stress and Distortion in Laser+GMAW Hybrid Welding of Aluminum Alloy T-Joint, Acta Metall. Sin. (English Lett. 26 (2013) 352–360. doi:10.1007/s40195-012-0166-5.
- [48] S. Ziaee, M.H. Kadivar, K. Jafarpur, Experimental Evaluation of the Effect of External Restraint on Buckling Behavior of Thin Weld Shells, Iran. J. Sci. Technol. Trans. B Eng. 33 (2009) 397–413.
- [49] T. Schenk, Modelling of Welding Distortion The Influence of Clamping and Sequencing, D.Sc. Thesis, Technische Universiteit Delft, 2014.
- [50] N. Ma, H. Huang, H. Murakawa, Effect of Jig Constraint Position and Pitch on Welding Deformation, J. Mater. Process. Technol. 221 (2015) 154–162. doi:10.1016/j.jmatprotec.2015.02.022.

- [51] I. a Hussain, S.K. Radi, M. Majeed, Study of Thermal Distortion in Thick Plate Using Finite Element Technique \*, J. Eng. Dev. 12 (2008) 118–130.
- [52] J. Wang, S. Rashed, H. Murakawa, Investigation of Buckling Deformation of Thin Plate Welded Structures, Proceeding 21st Int. Soc. Ocean Polar Eng. (2011) 125–31.
- [53] Y.P. Yang, P. Dong, Buckling Distortions and Mitigation Techniques for Thin-Section Structures, J. Mater. Eng. Perform. 21 (2012) 153–160. doi:10.1007/s11665-011-9928-x.
- [54] J. Wang, S. Rashed, H. Murakawa, FE Analysis of Buckling Behavior Caused by Welding in Thin Plates of High Tensile Strength Steel, J. Mater. Eng. Perform. 23 (2014) 4358–4365. doi:10.1007/s11665-014-1230-2.
- [55] P. Michaleris, J. Dantzig, D. Tortorelli, Minimization of Welding Residual Stress and Distortion in Large Structures, Weld. J. Res. Suppl. (1999) 361s-366s.
- [56] G. Jung, T.D. Huang, P. Dong, R.M. Dull, C.C. Conrardy, N.C. Porter, Numerical Prediction of Buckling in Ship Panel Structures, Security. 23 (2006) 1–9.
- [57] J. Souto, E. Ares, P. Alegre, Procedure in Reduction of Distortion in Welding Process by High Temperature Thermal Transient Tensioning, Procedia Eng. 132 (2015) 732–739. doi:10.1016/j.proeng.2015.12.554.
- [58] M.S. Alam, Structural Integrity and Fatigue Crack Propagation Life Assessment of Welded and Weld-Repaired Structures, Ph. D. Thesis, Louisiana State University, 2005.
- [59] L. Gannon, Effect of Welding Residual Stress and Distortion on Ship Hull Structural Performance, Ph.D. Thesis, Dalhousie University, 2011.
- [60] M. Aygul, Fatigue Analysis of Welded Structures Using the Finite Element Method, Licentiate Thesis, Chalmers University of Technology, 2012. <http://publications.lib.chalmers.se/records/fulltext/155710.pdf>.
- [61] Y. Sumi, H. Yajima, M. Toyosada, T. Yoshikawa, S. Aihara, K. Gotoh, Y. Ogawa, T. Matsumoto, K. Hirota, H. Hirasawa, M. Toyoda, Y. Morikage, Fracture Control

- of Extremely Thick Welded Steel Plates Applied to the Deck Structure of Large Container Ships, *J. Mar. Sci. Technol.* 18 (2013) 497–514. doi:10.1007/s00773-013-0222-5.
- [62] B. Dennis, W. Jin, Application of the Finite Element Method to Inverse Problems in Solid Mechanics, *Int. J. Struct. Chang. Solids - IJSCS.* 3 (2011) 11–21. <http://journals.tdl.org/ijscs/index.php/ijscs/article/view/2406>.
- [63] Y. Jarny, M.N. Özisik, J.P. Bardon, A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat Conduction, *Int. J. Heat Mass Transf.* 34 (1991) 2911–2919. doi:10.1016/0017-9310(91)90251-9.
- [64] Q. Bai, Y. Fujita, A Finite Element Analysis for Inverse Heat Conduction Problems., *Trans. Japan Soc. Mech. Eng. Ser. B.* 63 (1997) 1320–1326. doi:10.1299/kikaib.63.1320.
- [65] C. Fan, F. Sun, L. Yang, A Numerical Method on Inverse Determination of Heat Transfer Coefficient Based on Thermographic Temperature Measurement, *Chinese J. Chem. Eng.* 16 (2008) 901–908. doi:10.1016/S1004-9541(09)60014-8.
- [66] T. Min, X. Chen, Y. Sun, Q. Huang, A Numerical Approach to Solving an Inverse Heat Conduction Problem Using the Levenberg-Marquardt Algorithm, *Math. Probl. Eng.* 2014 (2014) 1–11. doi:10.1155/2014/626037.
- [67] V.A. Karkhin, V. V. Plochikhine, A.S. Ilyin, H.W. Bergmann, Inverse modelling of fusion welding processes, *Weld. World.* 46 (2002) 2–13. doi:10.1007/BF03263391.
- [68] V.A. Karkhin, A. Pittner, C. Schwenk, M. Rethmeier, Simulation of Inverse Heat Conduction Problems in Fusion Welding with Extended Analytical Heat Source Models, *Front. Mater. Sci.* 5 (2011) 119–125. doi:10.1007/s11706-011-0137-1.
- [69] C.A.A. Mota, M. Mikhailov, H.R.B. Orlande, R. Cotta, Identification of Heat Flux Imposed by an Oxyacetylene Torch, in: *10th AIAA/ISSMO Multidiscip. Anal. Optim. Conf.*, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, Virginia, 2004: p. 887–899. doi:10.2514/6.2004-4374.

- [70] C.A.A. Mota, H.R.B. Orlande, M.O.M. De Carvalho, V. Kolehmainen, J.P. Kaipio, Bayesian estimation of temperature-dependent thermophysical properties and transient boundary heat flux, *Heat Transf. Eng.* 31 (2010) 570–580. doi:10.1080/01457630903425635.
- [71] H.R.B. Orlande, G.S. Dulikravich, M. Neumayer, D. Watzenig, M.J. Colaco, Accelerated bayesian inference for the estimation of spatially varying heat flux in a heat conduction problem, *Numer. Heat Transf. Part A Appl.* 65 (2014) 1–25. doi:10.1080/10407782.2013.812008.
- [72] H.M. Da Fonseca, H.R.B. Orlande, O. Fudym, F. Sepúlveda, A Statistical Inversion Approach for Local Thermal Diffusivity and Heat Flux Simultaneous Estimation, *Quant. Infrared Thermogr. J.* 11 (2014) 170–189. doi:10.1080/17686733.2014.947860.
- [73] C.C. Pacheco, H.R.B. Orlande, M.J. Colaço, G.S. Dulikravich, Estimation of a Location and Time Dependent High-Magnitude Heat Flux in a Heat Conduction Problem Using the Kalman Filter and the Approximation Error Model, *Numer. Heat Transf. Part A Appl.* 68 (2015) 1198–1219. doi:10.1080/10407782.2015.1037136.
- [74] C.C. Pacheco, H.R.B. Orlande, M.J. Colaço, G.S. Dulikravich, Real-Time Identification of a High-Magnitude Boundary Heat Flux on a Plate, *Inverse Probl. Sci. Eng.* 24 (2016) 1661–1679. doi:10.1080/17415977.2016.1195829.
- [75] H. da Fonseca, C.C. Pacheco, H.R.B. Orlande, O. Fudym, G.S. Dulikravich, Experimental Estimation of a Heat Flux Imposed By a Laser Diode With the Steady State Kalman Filter, in: *3rd Therm. Fluids Eng. Conf.*, Fort Lauderdale, FL, USA, 2018; p. 353–365. doi:10.1615/tfec2018.ces.020899.
- [76] S.S. Ribeiro, G.C. Oliveira, G. Guimarães, An Inverse Problem Using Green's Functions and TFBGF Method to Indentificate a Moving Heat Source in 3D Heat Conduction, *Rev. Eng. Térmica.* 17 (2018) 87. doi:10.5380/reterm.v17i2.64135.
- [77] E. Dos Santos Magalhães, B. De Campos Salles Anselmo, A.L.F. De Lima E Silva, S.M.M.L.E. Silva, Time Traveling Regularization for Inverse Heat Transfer Problems, *Energies.* 11 (2018) 507. doi:10.3390/en11030507.

- [78] E. dos S. Magalhães, L.E. dos S. Paes, M. Pereira, C.A. da Silveira, A. de S.P. Pereira, S.M.M. Lima e Silva, A Thermal Analysis in Laser Welding Using Inverse Problems, *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 92 (2018) 112–119. doi:10.1016/j.icheatmasstransfer.2018.02.014.
- [79] A.P. Fernandes, M.B. dos Santos, G. Guimarães, Use of Moving Average Filter for Regularization of the Transfer Function Based on Green's Function Method (TFBGF) to Solve an IHCP, *Inverse Probl. Sci. Eng.* 5977 (2019). doi:10.1080/17415977.2019.1628740.
- [80] L.E. Lindgren, Finite element Modeling and Simulation of Welding. part 2: Improved Material Modeling, *J. Therm. Stress.* 24 (2001) 195–231. doi:10.1080/014957301300006380.
- [81] L.E. Lindgren, Finite Element Modeling and Simulation of Welding part 1: Increased Complexity, *J. Therm. Stress.* 24 (2001) 141–192. doi:10.1080/01495730150500442.
- [82] I.F.Z. Fanous, M.Y.A. Younan, A.S. Wifi, Study of the Effect of Boundary Conditions on Residual Stresses in Welding Using Element Birth and Element Movement Techniques, *J. Press. Vessel Technol.* 125 (2003) 432. doi:10.1115/1.1613952.
- [83] B. Szabó, I. Babuska, *Introduction to Finite Element Analysis: Formulation, Verification and Validation*, 1 ed., Jhon Wiley & Sons, INC., West Sussex, England, 2011.
- [84] Z. Feng, *Mitigating Welding Residual Stress and Distortion*, 1 ed., Woodhead Publishing Limited, Cambridge, England, 2005.
- [85] C.A. de Araújo, *Comparação entre Sequências de Soldagem Progressiva e Passo Reverso Através de Análise Numérica e Experimental*, M.Sc. Dissertação, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.
- [86] J. Lemaitre, J.-L. Chaboche, *Mechanics of Solid Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1992.

- [87] O. Muránsky, C.J. Hamelin, M.C. Smith, P.J. Bendeich, L. Edwards, The effect of Plasticity Theory on Predicted Residual Stress Fields in Numerical Weld Analyses, *Comput. Mater. Sci.* 54 (2012) 125–134. doi:10.1016/j.commatsci.2011.10.026.
- [88] F. Dunne, N. Petrinic, *Introduction to Computational Plasticity*, 1.d, Oxford University Press, New York, USA, 2005.
- [89] E.A. de Souza Neto, D. Peri, D.R.J. Owen, *Computational Methods for Plasticity*, 1 ed., John Wiley & Sons, Ltd, West Sussex, England, 2008.
- [90] J. Yu, Maohong; Ma, Guowei; Li, *Structural Plasticity*, Springer Berlin Heidelberg, New York, USA, 2009.
- [91] S. Kuo, *Welding Metallurgy*, 2 ed., Jhon Wiley & Sons, INC., New Jersey, USA, 2003.
- [92] SENAI, *Noções Básicas de Processos de Soldagem e Corte*, Mecânica. (1996) 123.
- [93] A.Q. Bracarense, *Processo de Soldagem com Chama Oxi-gás - OFW.*, (2000) 21.
- [94] Linde Group, *Flame Solutions*, Boc. (2010) 1–13.
- [95] ASM International Handbook Committee, *ASM Handbook Volume 06A: Welding Fundamentals and Porcesses*, ASM International, 2011.
- [96] V. Pavelic, R. Tanbakuchi, O.A. Uyehara, P.S. Myers, *Experimental and Computed Temperature Histories in Gas Tungsten-Arc Welding of Thin Plates*, *Weld. J.* 48 (1969) 295-s-305-s.
- [97] E. Friedman, *Thermomechanical Analysis of the Welding Process Using the Finite Element Method*, *J. Press. Vessel Technol.* 97 (1975) 206. doi:10.1115/1.3454296.
- [98] G.W. Krutz, L.J. Segerlind, *Finite Element Analysis of Welded Structures*, *Weld. J. Res. Suppl.* (1978) 211s-216s.
- [99] S.J. Hemmati, J.G. Shin, *Estimation of Flame Parameters for Flame Bending Process*, *Int. J. Mach. Tools Manuf.* 47 (2007) 799–804. doi:10.1016/j.ijmachtools.2006.09.005.

- [100] P. Biswas, N.R. Mandal, O.P. Sha, Three-Dimensional Finite Element Prediction of Transient Thermal History and Residual Deformation due to Line Heating, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part M J. Eng. Marit. Environ.* 221 (2007) 17–30. doi:10.1243/14750902JEME60.
- [101] B.H. Clausen, Plate Forming by Line Heating, Ph. D. Thesis, Technical University of Denmark, 2000.
- [102] N.T.Nguyen, A.Ohta, K.Matsuoka, N.Suzuki, Y.Maeda, Analytical Solutions for Transient Temperature of Semi-Infinite Body Subjected to 3-D Moving Heat Sources, *Weld. Res. Suppl.* I (1999) 265–274. e:%5CBIBLIO%5CArticles%5CSolution\_transient-temp-3D-moving-heat-source\_Nguyen\_1999.pdf.
- [103] N.S. Shanmugam, G. Buvanashakaran, K. Sankaranarayananasamy, S. Ramesh Kumar, A transient Finite Element Simulation of the Temperature and Bead Profiles of T-Joint Laser Welds, *Mater. Des.* 31 (2010) 4528–4542. doi:10.1016/j.matdes.2010.03.057.
- [104] H.W. Engl, M. Hanke, A. Neubauer, *Regularization of Inverse Problems*, 1 ed., Kluwer Academic, Dordrecht, Netherlands, 1996.
- [105] A. Kirsch, *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*, 2 ed., Springer New York, New York, USA, 2011.
- [106] J.B. Bell, A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems.*, V. H. Winston & Sons, Washington, USA, 1978.
- [107] O.M. Alifanov, *Inverse Heat Transfer Problems*, 1 ed., Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, USA, 1988.
- [108] J. V. Beck, B. Blackwell, C.R. St. Clair Jr., *Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*, 1 ed., Jhon Wiley & Sons, INC., New York, USA, 1985.
- [109] M. Bun, Applications of the Levenberg-Marquardt Algorithm to the Inverse Problem, (2009) 1–21.
- [110] E. Bergou, Y. Diouane, V. Kungurtsev, Convergence and Iteration Complexity

- Analysis of a Levenberg-Marquardt Algorithm for Zero and Non-zero Residual Inverse Problems, *Math. Optim. Soc.* (2018) 1–23. [http://www.optimization-online.org/DB\\_HTML/2017/05/6005.html](http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2017/05/6005.html).
- [111] J. Pujol, The Solution of Nonlinear Inverse Problems and the Levenberg-Marquardt Method, *Geophysics*. 72 (2007) W1–W16. doi:10.1190/1.2732552.
- [112] M.J. Colaço, H.R.B. Orlande, G.S. Dulikravich, Inverse and Optimization Problems in Heat Transfer, *J. Brazilian Soc. Mech. Sci. Eng.* 28 (2006) 1–24. doi:10.1590/S1678-58782006000100001.
- [113] M. Naveen, S. Jayaraman, V. Ramanath, S. Chaudhuri, Modified Levenberg Marquardt Algorithm for Inverse Problems, in: *Lect. Notes Comput. Sci.* (including Subser. *Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics*), Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010: p. 623–632.
- [114] N.A. Golsorkhi, H.A. Tehrani, Levenberg-Marquardt Method for Solving the Inverse Heat Transfer Problems, *J. Math. Comput. Sci.* 13 (2014) 300–310.
- [115] O. Cort, G. Urquiza, J.A. Hern, A. Universidad, C. Chamilpa, Artificial Neural Networks for Inverse Heat Transfer Problems, in: *Direct*, 2007: p. 198–201. doi:10.1109/CERMA.2007.18.
- [116] T. Feng, P. Edström, M. Gulliksson, Levenberg-Marquardt Methods for Parameter Estimation Problems in the Radiative Transfer Equation, *Inverse Probl.* 23 (2007) 879–891. doi:10.1088/0266-5611/23/3/002.
- [117] A. Ranganathan, *The Levenberg-Marquardt Algorithm, Lecture Notes*, 2004.
- [118] M.M. Mejias, H.R.B. Orlande, M.N. Özisik, A Comparison of Different Parameter Estimation Techniques for the Identification of Thermal Conductivity Components of Orthotropic Solids, in: *3rd Int. Conf. Inverse Probl. Eng.*, WA, 1999: p. 37–53.
- [119] M.N. Özisik, H.R.B. Orlande, *Inverse Heat Transfer*, 1 ed., Taylor & Francis, New York, USA, 2000.
- [120] F.N. David, J. V. Beck, K.J. Arnold, *Parameter Estimation in Engineering and Science*, Jhon Wiley & Sons, INC., New York, USA, 1977. doi:10.2307/2529487.

- [121] T.D. Canonsburg, Programmer ' s Manual for Mechanical APDL, Knowl. Creat. Diffus. Util. 15317 (2009) 724–746.
- [122] T.D. Canonsburg, ANSYS Mechanical APDL Command Reference, (2010) 724–746.
- [123] T.L. Teng, P.H. Chang, W.C. Tseng, Effect of Welding Sequences on Residual Stresses, *Comput. Struct.* 81 (2003) 273–286. doi:10.1016/S0045-7949(02)00447-9.
- [124] P. Biswas, N.R. Mandal, Thermomechanical Finite Element Analysis and Experimental Investigation of Single-Pass Aangle-Sided Submerged Arc Welding of C-Mn Steel Plates, *Proc. Inst. Mech. Eng. Part B J. Eng. Manuf.* 224 (2010) 627–639. doi:10.1243/09544054JEM1624.
- [125] D. Deng, FEM Prediction of Welding Residual Stress and Distortion in Carbon Steel Considering Phase Transformation Effects, *Mater. Des.* 30 (2009) 359–366. doi:10.1016/j.matdes.2008.04.052.
- [126] Astm a 36/a 36M-05, Standard Specification for Carbon Structural Steel, Standards. (2005). doi:10.1520/A0036.
- [127] H. Eisazadeh, A. Achuthan, J.A. Goldak, D.K. Aidun, Effect of Material Properties and Mechanical Tensioning Load on Residual Stress Formation in GTA 304-A36 Dissimilar Weld, *J. Mater. Process. Technol.* 222 (2015) 344–355. doi:10.1016/j.jmatprotec.2015.03.021.
- [128] T.Z. Harmathy, W.W. Stanzak, Elevated-Temperature Tensile and Creep Properties of some Structural and Prestressing Steels, *ASTM Spec. Tech. Publ.* 464 (1970) 186–208.
- [129] M.N. Özisik, *Heat Conduction*, 2 ed., Jhon Wiley & Sons, INC., New York, USA, 1993. papers://6d732309-80c9-4f91-90fd-4ffdb7258f93/Paper/p6649.
- [130] A.K. Pathak, G.L. Datta, Three-Dimensional Finite Element Analysis to Predict the Different Zones of Microstructure in Submerged Arc Welding, in: *Proc. Inst. Mech. Eng. Part B J. Eng. Manuf.*, 2004: p. 269–280.

doi:10.1243/095440504322984821.

# Anexo A

## Verificação da Metodologia

Como é sabido, o método dos elementos finitos é uma ferramenta amplamente utilizada na resolução de problemas termomecânicos com previsão de fenômenos físicos complexos, como os que ocorrem num processo de soldagem, produzindo resultados com alta qualidade e precisão. O programa comercial de elementos finitos, ANSYS®, é usado nesta tese para resolver o problema direto para predição dos históricos de temperaturas em peças a serem aquecidas, e das suas correspondentes distorções geométricas induzidas pelo calor fornecido. Com o objetivo de seguir o procedimento apresentado no item 3.1, da análise direta são extraídas as matrizes de condutividade térmica  $[K_e^{th}]$ , calor específico  $[C_e^t]$  e vetor fluxo de calor  $\{Q_e^c\}$ , cujas características estão descritas no item 2.2, além disso, também são obtidas as matrizes rigidez  $[K_e]$ , rigidez térmica  $[K_e^{th}]$  e vetor de forças nodais  $\{F_e^{nd}\}$ , descritas no item 2.3.

Nesta seção é validada a metodologia usada no presente estudo mediante dois problemas de transferência de calor por condução. No primeiro é analisada uma placa infinita de espessura  $L$  submetida a um termo fonte no centro da espessura, como um problema unidimensional considerando propriedades do material independentes da temperatura. No segundo, um cilindro aquecido no centro de sua superfície superior é analisado como um problema bidimensional axissimétrico-simétrico com propriedades térmicas do material dependentes da temperatura. Ambos os problemas são solucionados pela aplicação do algoritmo de Levenberg-Marquardt para problemas inversos junto com elementos finitos.

### **A.1. Validação da Metodologia para Problema Inverso de Transferência de Calor por Condução Unidimensional.**

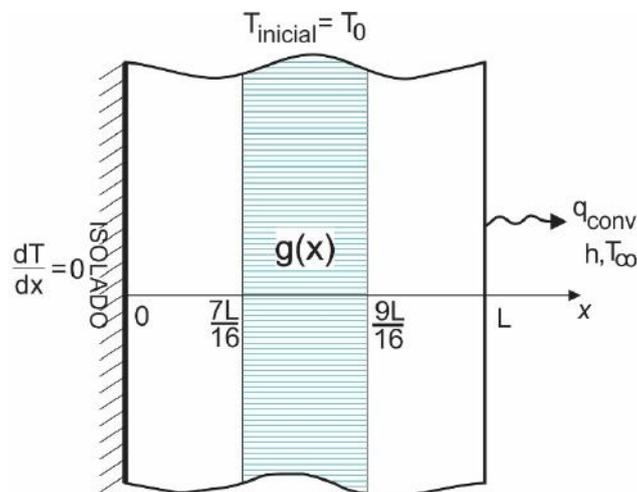
Consideremos um problema de condução de calor linear em uma placa infinita de espessura  $L$ , como é mostrado na *Figura A.1*. A placa está inicialmente à temperatura  $T_0$  e as condições de contorno são:

Em  $x=0$  a placa está isolada, e em  $x=L$  há perda de calor por convecção. A temperatura do meio ambiente é  $T_\infty$  e o coeficiente de convecção é  $h$ . A placa está submetida, em parte de sua espessura a um termo fonte  $g(x)$ , como indicado:

$$g(x) = \begin{cases} g_0, & \frac{7L}{16} \leq x \leq \frac{9L}{16} \\ 0, & \text{fora deste dominio} \end{cases}$$

Sendo dados, o termo fonte  $g_0 = 5 \cdot 10^8 \text{ W/m}^3$ , a largura  $L = 0,1 \text{ m}$  e a área da seção transversal  $A = 100 \text{ m}^2$ .

As propriedades do aço de baixo carbono independentes da temperatura são: condutividade térmica  $k = 52,9 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$ , calor específico  $C = 486 \text{ J/kg}^\circ\text{C}$ , densidade  $\rho = 7.860 \text{ kg/m}^3$ , coeficiente de convecção  $h = 30 \text{ W/m } ^\circ\text{C}$ , tempo = 100 s, incremento de tempo  $\Delta t = 0,02 \text{ [s]}$ .



**Figura A.1.** Esquema gráfico do problema.

Para a solução deste problema os seguintes passos são estabelecidos:

Realizar a solução direta analítica para o cálculo das temperaturas em função do tempo e da coordenada 'x'. O objetivo desta análise é determinar as temperaturas que serão tomadas como padrão a ser atingido pelo cálculo utilizando o problema inverso.

Escolher a quantidade de pontos e suas posições na espessura da placa, os quais serão tomados como pontos de medição térmica.

Modelar o problema em elementos finitos.

Estabelecer os parâmetros para a determinação da matriz de sensibilidade.

Comparar os resultados.

**a) Formulação Matemática do Problema:**

Na faixa da espessura  $L$  da placa compreendida entre  $0 < x < 7L/16$  e  $9L/16 < x < L$  a formulação de transferência de calor por condução sem carregamento térmico é:

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad \begin{array}{l} 0 < x < 7L/16 \\ 9L/16 < x < L, \quad t > 0 \end{array} \quad (\text{A } 1)$$

$$\alpha = \frac{k}{\rho \cdot C}$$

Na faixa entre  $L/4 \leq x \leq 3L/4$  aplica-se a formulação de transferência de calor por condução considerando o termo fonte  $g(x)$ :

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + g(x), \quad 7L/16 \leq x \leq 9L/16, \quad t > 0 \quad (\text{A } 2)$$

A condição de contorno em  $x = 0$  de isolamento térmico é:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \quad t > 0 \quad (\text{A } 3)$$

A condição de contorno de transferência de calor por convecção em  $x = L$  é:

$$k \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + hT = hT_\infty, \quad x = L, \quad t > 0 \quad (\text{A } 4)$$

Na condição inicial a placa encontra-se à temperatura ambiente:

$$T = T_0, \quad t = 0, \quad 0 < x < L \quad (\text{A } 5)$$

A solução analítica para a temperatura normalizada  $\theta(X, \tau)$ , Özisik [129] é:

$$\begin{aligned} \theta(X, \tau) = & 2 \cdot \frac{\beta_m^2 + H_2^2}{L \cdot (\beta_m^2 + H_2^2) + H_2^2} \cdot \frac{\sin \beta_m L}{\beta_m} \cdot \cos \beta_m X \cdot e^{-\beta_m^2 \tau} + \\ & 2 \cdot \frac{\beta_m^2 + H_2^2}{L \cdot (\beta_m^2 + H_2^2) + H_2^2} \cdot \left[ \frac{g_0 \cdot L^2 \cdot \left( \sin \beta_m \frac{3L}{4} - \sin \beta_m \frac{L}{4} \right)}{k \cdot (T_0 - T_\infty) \beta_m} \right] \cdot \\ & \cos \beta_m X \cdot \left( 1 - e^{-\beta_m^2 \tau} \right) \end{aligned} \quad (\text{A } 6)$$

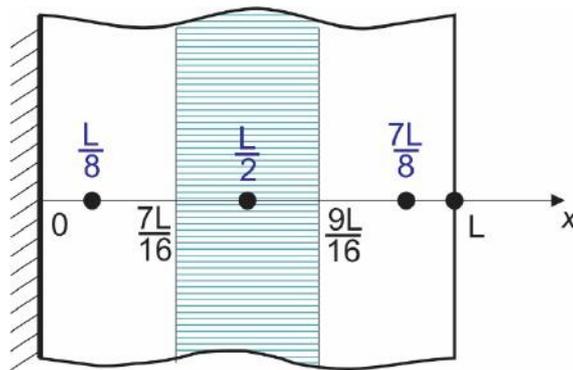
Sendo:

$X$ : posição normalizada $X = x / L$	$H_2$ : número de Biot. $H_2 = \frac{h}{k} \cdot L$
$\theta(x, t)$ : temperatura normalizada. $\theta(X, \tau) = \frac{T(x, t) - T_\infty}{(T_0 - T_\infty)}$	$\beta_m$ : autovalor. $\beta_m = \frac{H_2}{\tan(\beta_m L)}$
$\tau$ : tempo normalizado, $\tau = \frac{\alpha \cdot t}{L^2}$	

onde,  $x$  é a posição na espessura da placa [m],  $t$  o tempo [s],  $h$  o coeficiente de convecção [ $\text{W}/\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ ],  $k$  a condutividade térmica [ $\text{W}/\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C}$ ],  $\rho$  a densidade [ $\text{Kg}/\text{m}^3$ ],  $C$  o calor específico [ $\text{J}/\text{Kg } ^\circ\text{C}$ ],  $T(x, t)$  a temperatura em função da posição e tempo [ $^\circ\text{C}$ ].

### b) Pontos de medição de temperaturas.

Por conveniência foram escolhidos 4 pontos de medição de temperaturas, como mostrado na *Figura A.2*. O primeiro ponto na posição  $L/8$ , onde a equação (A.1) é aplicável com influência da condição de contorno de isolamento em  $x = 0$ . O segundo ponto na posição  $L/2$ , em que a equação (A.2) é válida e obtemos informação do termo fonte  $g(x)$ . O terceiro ponto na posição  $7L/8$ , a equação (A.1) é aplicável neste ponto com influência da condição de contorno de perda de calor por convecção  $h$  em  $x = L$ , e o quarto ponto na posição  $L$  onde a equação (A.4) permite obter dados sobre  $h$ .



**Figura A.2.** Posição dos pontos de medição.

### c) Modelo de elementos finitos.

A modelagem por elementos finitos é utilizada para resolver o problema direto segundo as etapas para a aplicação do método de solução de problemas inversos vistas no item 3.1 do Capítulo 3.

O problema foi modelado no programa comercial ANSYS®, utilizando oitenta elementos LINK33, os quais são ideais para a transferência de calor por condução unidimensional e um elemento LINK34, ideal para representar a transferência de calor por convecção unidimensional, fazendo um total de 82 nós.

### d) Parâmetros e matriz de sensibilidade.

Nesta seção, assumiremos que as propriedades de condutividade, calor específico e o coeficiente de convecção são desconhecidos e serão determinados através de problemas inversos. Os nós 11, 41, 71 e 81 coincidem com os pontos de medição de temperaturas, e aplicando-se a equação (3.29), obtem-se as seguintes expressões:

Ponto 1 ou nó 11:

$$\begin{aligned}
(T_{11}^{n+1} - T_{11}^n) = & -\Delta t \frac{k}{C} \left[ \frac{MK_{21}^{10}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (T_{10}^{n+1}) + \frac{MK_{22}^{10} + MK_{11}^{11}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (T_{11}^{n+1}) + \right. \\
& \left. \frac{MK_{12}^{11}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (T_{12}^{n+1}) \right] - \left[ \frac{MC_{21}^{10}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (T_{10}^{n+1} - T_{10}^n) + \right. \\
& \left. \frac{MC_{12}^{11}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (T_{12}^{n+1} - T_{12}^n) \right] + \frac{1}{C} \left[ \frac{\Delta t}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (f_2^{10} + f_1^{11}) \right]
\end{aligned} \tag{A 7}$$

Ponto 2 ou nó 41:

$$\begin{aligned}
(T_{41}^{n+1} - T_{41}^n) = & -\Delta t \frac{k}{C} \left[ \frac{MK_{21}^{40}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (T_{40}^{n+1}) + \frac{MK_{22}^{40} + MK_{11}^{41}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (T_{41}^{n+1}) + \right. \\
& \left. \frac{MK_{12}^{41}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (T_{42}^{n+1}) \right] - \left[ \frac{MC_{21}^{40}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (T_{40}^{n+1} - T_{40}^n) + \right. \\
& \left. \frac{MC_{12}^{41}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (T_{42}^{n+1} - T_{42}^n) \right] + \frac{1}{C} \left[ \frac{\Delta t}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (f_2^{40} + f_1^{41}) \right]
\end{aligned} \tag{A 8}$$

Ponto 3 ou nó 71:

$$\begin{aligned}
(T_{71}^{n+1} - T_{71}^n) = & -\Delta t \frac{k}{C} \left[ \frac{MK_{21}^{70}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (T_{70}^{n+1}) + \frac{MK_{22}^{70} + MK_{11}^{71}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (T_{71}^{n+1}) + \right. \\
& \left. \frac{MK_{12}^{71}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (T_{72}^{n+1}) \right] - \left[ \frac{MC_{21}^{70}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (T_{70}^{n+1} - T_{70}^n) + \right. \\
& \left. \frac{MC_{12}^{71}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (T_{72}^{n+1} - T_{72}^n) \right] + \frac{1}{C} \left[ \frac{\Delta t}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (f_2^{70} + f_1^{71}) \right]
\end{aligned} \tag{A 9}$$

Ponto 4 ou nó 81:

$$\begin{aligned}
(T_{81}^{n+1} - T_{81}^n) = & -\Delta t \frac{k}{C} \left[ \frac{MK_{21}^{80}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{80}^{n+1}) + \frac{MK_{22}^{80}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{81}^{n+1}) \right] - \\
& \Delta t \frac{h}{C} \left[ \frac{MK_{11}^{81}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{81}^{n+1}) + \frac{MK_{12}^{81}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{82}^{n+1}) \right] - \\
& \left[ \frac{MC_{21}^{80}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{80}^{n+1} - T_{80}^n) + \frac{MC_{12}^{81}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{82}^{n+1} - T_{82}^n) \right] + \\
& \frac{1}{C} \left[ \frac{\Delta t}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (f_2^{80} - f_1^{81}) \right]
\end{aligned} \tag{A 10}$$

onde:

$i, j = 1, 2$

$MK_{ij}^E$  = Componente da matriz condutividade do elemento E.

$MC_{ij}^E$  = Componente do matriz calor específico do elemento E.

$f_i^E$  = Componente do vetor força do elemento E.

$T_p^n$  = Temperatura no tempo  $n$ , no nó  $p$ .

$\Delta t$  = Variação do tempo.

As componentes das matrizes de condutividade térmica  $MK_{ij}^E$ , calor específico  $MC_{ij}^E$  e componentes do vetor forças são obtidas na execução da sub-rotina UELMATX do ANSYS, mencionado no item 3.3.1.

Como já foi indicado, as propriedades de condutividade térmica ( $k$ ), calor específico ( $C$ ) e coeficiente de convecção ( $h$ ) são desconhecidas, para sua determinação estabeleceremos os seguintes parâmetros:

$$P1 = \frac{k}{C}; \quad P2 = \frac{h}{C}; \quad P3 = \frac{1}{C} \tag{A 11}$$

Introduzindo a equação (A.11) nas equações (A.7), (A.8), (A.9) e (A.10):

Ponto 1 ou nó 11:

$$\begin{aligned}
(T_{11}^{n+1} - T_{11}^n) = & -\Delta t \cdot P1 \cdot \left[ \frac{MK_{21}^{10}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (T_{10}^{n+1}) + \frac{MK_{22}^{10} + MK_{11}^{11}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (T_{11}^{n+1}) + \right. \\
& \left. \frac{MK_{12}^{11}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (T_{12}^{n+1}) \right] - \left[ \frac{MC_{21}^{10}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (T_{10}^{n+1} - T_{10}^n) + \right. \\
& \left. \frac{MC_{12}^{11}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (T_{12}^{n+1} - T_{12}^n) \right] + P3 \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (f_2^{10} + f_1^{11}) \right]
\end{aligned} \tag{A 12}$$

Ponto 2 ou nó 41:

$$\begin{aligned}
(T_{41}^{n+1} - T_{41}^n) = & -\Delta t \cdot P1 \cdot \left[ \frac{MK_{21}^{40}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (T_{40}^{n+1}) + \frac{MK_{22}^{40} + MK_{11}^{41}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (T_{41}^{n+1}) + \right. \\
& \left. \frac{MK_{12}^{41}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (T_{42}^{n+1}) \right] - \left[ \frac{MC_{21}^{40}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (T_{40}^{n+1} - T_{40}^n) + \right. \\
& \left. \frac{MC_{12}^{41}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (T_{42}^{n+1} - T_{42}^n) \right] + P3 \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (f_2^{40} + f_1^{41}) \right]
\end{aligned} \tag{A 13}$$

Ponto 3 ou nó 71:

$$\begin{aligned}
(T_{71}^{n+1} - T_{71}^n) = & -\Delta t \cdot P1 \cdot \left[ \frac{MK_{21}^{70}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (T_{70}^{n+1}) + \frac{MK_{22}^{70} + MK_{11}^{71}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (T_{71}^{n+1}) + \right. \\
& \left. \frac{MK_{12}^{71}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (T_{72}^{n+1}) \right] - \left[ \frac{MC_{21}^{70}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (T_{70}^{n+1} - T_{70}^n) + \right. \\
& \left. \frac{MC_{12}^{71}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (T_{72}^{n+1} - T_{72}^n) \right] + P3 \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (f_2^{70} + f_1^{71}) \right]
\end{aligned} \tag{A 14}$$

Ponto 4 ou nó 81:

$$\begin{aligned}
 (T_{81}^{n+1} - T_{81}^n) = & -\Delta t \cdot P1 \cdot \left[ \frac{MK_{21}^{80}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{80}^{n+1}) + \frac{MK_{22}^{80}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{81}^{n+1}) \right] - \\
 & \Delta t \cdot P2 \cdot \left[ \frac{MK_{11}^{81}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{81}^{n+1}) + \frac{MK_{12}^{81}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{82}^{n+1}) \right] - \\
 & \left[ \frac{MC_{21}^{80}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{80}^{n+1} - T_{80}^n) + \frac{MC_{12}^{81}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{82}^{n+1} - T_{82}^n) \right] + \\
 & P3 \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (f_2^{80} - f_1^{81}) \right]
 \end{aligned} \tag{A 15}$$

A matriz de sensibilidade expressa pela equação (3.6), para 3 parâmetros desconhecidos, 3 pontos de medição e um número total de incrementos de tempo ( $n \max$ ) é dada por:

$$J(P) = \begin{bmatrix} \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T_{11}^1}{\partial P1} \\ \frac{\partial T_{41}^1}{\partial P1} \\ \frac{\partial T_{71}^1}{\partial P1} \\ \frac{\partial T_{81}^1}{\partial P1} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T_{11}^1}{\partial P2} \\ \frac{\partial T_{41}^1}{\partial P2} \\ \frac{\partial T_{71}^1}{\partial P2} \\ \frac{\partial T_{81}^1}{\partial P2} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T_{11}^1}{\partial P3} \\ \frac{\partial T_{41}^1}{\partial P3} \\ \frac{\partial T_{71}^1}{\partial P3} \\ \frac{\partial T_{81}^1}{\partial P3} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T_{11}^2}{\partial P1} \\ \frac{\partial T_{41}^2}{\partial P1} \\ \frac{\partial T_{71}^2}{\partial P1} \\ \frac{\partial T_{81}^2}{\partial P1} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T_{11}^2}{\partial P2} \\ \frac{\partial T_{41}^2}{\partial P2} \\ \frac{\partial T_{71}^2}{\partial P2} \\ \frac{\partial T_{81}^2}{\partial P2} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T_{11}^2}{\partial P3} \\ \frac{\partial T_{41}^2}{\partial P3} \\ \frac{\partial T_{71}^2}{\partial P3} \\ \frac{\partial T_{81}^2}{\partial P3} \end{array} \right] \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T_{11}^{nmax}}{\partial P1} \\ \frac{\partial T_{41}^{nmax2}}{\partial P1} \\ \frac{\partial T_{71}^{nmax}}{\partial P1} \\ \frac{\partial T_{81}^{nmax}}{\partial P1} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T_{11}^{nmax}}{\partial P2} \\ \frac{\partial T_{41}^{nmax2}}{\partial P2} \\ \frac{\partial T_{71}^{nmax}}{\partial P2} \\ \frac{\partial T_{81}^{nmax}}{\partial P2} \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial T_{11}^{nmax}}{\partial P3} \\ \frac{\partial T_{41}^{nmax2}}{\partial P3} \\ \frac{\partial T_{71}^{nmax}}{\partial P3} \\ \frac{\partial T_{81}^{nmax}}{\partial P3} \end{array} \right] \end{bmatrix} \quad (A 16)$$

As componentes são determinadas de acordo com a equação (3.35), que são as derivadas das equações (A.12) - (A.15) em relação aos parâmetros P1, P2 e P3:

No ponto 1 ou nó 11

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial P1} = -\Delta t \cdot \left[ \frac{MK_{21}^{10}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} T_{10}^{n+1} + \frac{MK_{22}^{10} + MK_{11}^{11}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} T_{11}^{n+1} + \frac{MK_{12}^{11}}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} T_{11}^{n+1} \right] \quad (A 17)$$

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial P2} = 0 \quad (\text{A } 18)$$

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial P3} = \frac{\Delta t}{MC_{22}^{10} + MC_{11}^{11}} (f_2^{10} + f_1^{11}) \quad (\text{A } 19)$$

No ponto 2 ou nó 41

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial P1} = -\Delta t \cdot \left[ \frac{MK_{21}^{40}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} T^{n+1} + \frac{MK_{22}^{40} + MK_{11}^{41}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} T^{n+1} + \frac{MK_{12}^{41}}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} T^{n+1} \right] \quad (\text{A } 20)$$

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial P2} = 0 \quad (\text{A } 21)$$

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial P3} = \frac{\Delta t}{MC_{22}^{40} + MC_{11}^{41}} (f_2^{40} + f_1^{41}) \quad (\text{A } 22)$$

No ponto 3 ou nó 71

$$\frac{\partial T_{71}}{\partial P1} = -\Delta t \cdot \left[ \frac{MK_{21}^{70}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} T^{n+1} + \frac{MK_{22}^{70} + MK_{11}^{71}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} T^{n+1} + \frac{MK_{12}^{71}}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} T^{n+1} \right] \quad (\text{A } 23)$$

$$\frac{\partial T_{71}}{\partial P2} = 0 \quad (\text{A } 24)$$

$$\frac{\partial T_{71}}{\partial P3} = \frac{\Delta t}{MC_{22}^{70} + MC_{11}^{71}} (f_2^{70} + f_1^{71}) \quad (\text{A } 25)$$

No ponto 4 ou nó 81

$$\frac{\partial T_{81}}{\partial P1} = -\Delta t \cdot \left[ \frac{MK_{21}^{80}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} T_{80}^{n+1} + \frac{MK_{22}^{80}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} T_{81}^{n+1} \right] \quad (A 26)$$

$$\frac{\partial T_{81}}{\partial P2} = -\Delta t \cdot \left[ \frac{MK_{11}^{81}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{81}^{n+1}) + \frac{MK_{12}^{81}}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (T_{82}^{n+1}) \right] \quad (A 27)$$

$$\frac{\partial T_{81}}{\partial P3} = \frac{\Delta t}{MC_{22}^{80} + MC_{11}^{81}} (f_2^{80} + f_1^{81}) \quad (A 28)$$

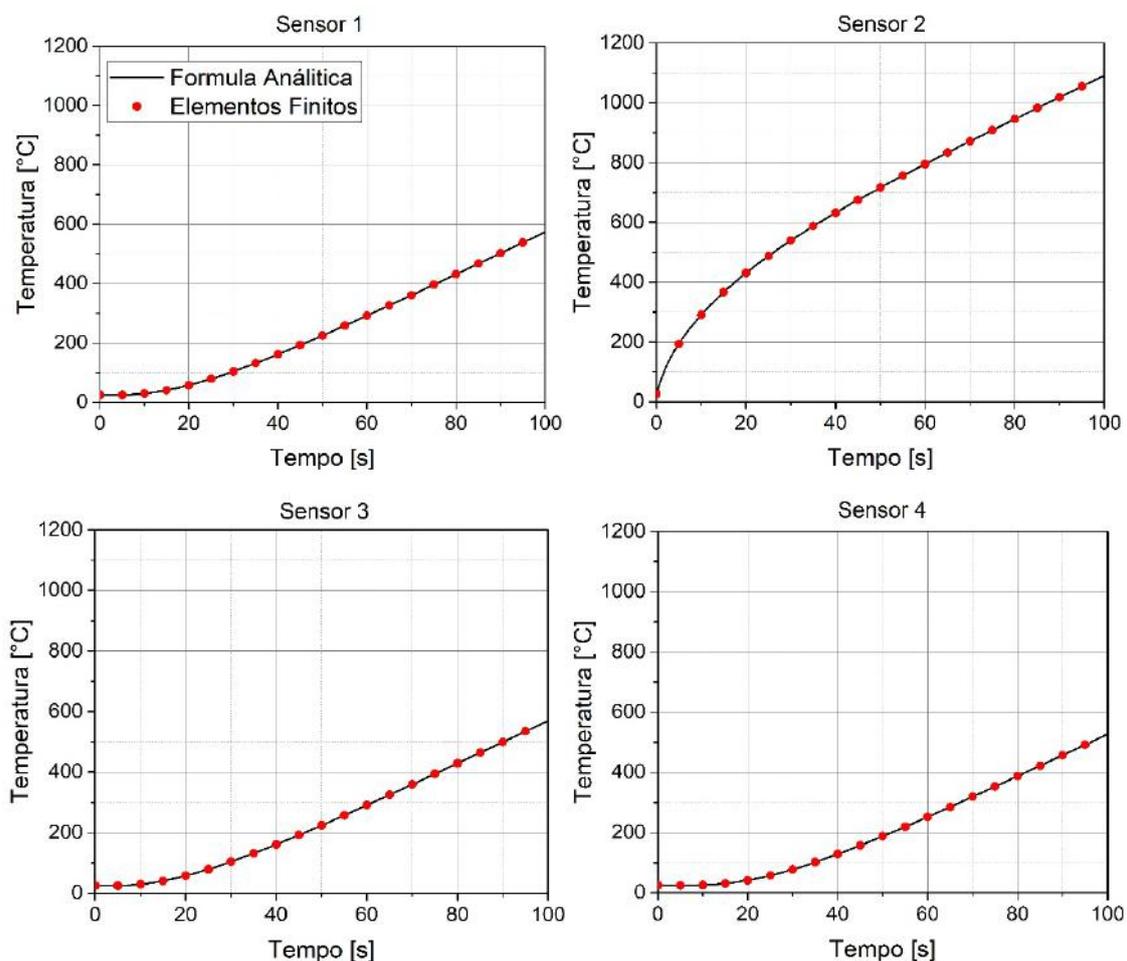
A matriz  $J(P)$  mostrada na equação (A.16) é introduzida nas equações (3.12) obtendo-se o vetor incremento de parâmetros desconhecidos  $\Delta P^k$ , o qual, aplicado à equação (3.11), determina novos valores para os parâmetros desconhecidos. Estes parâmetros são calculados, como indica o algoritmo computacional no item 3.1.3, até que as temperaturas obtidas satisfaçam o critério de parada apresentado no item 3.1.2.

#### e) Resultados

Na Tabela A.1 são apresentados os valores das propriedades do material considerados nos cálculos da formulação analítica e os valores obtidos por meio da aplicação do método de Levenberg-Marquardt assumindo 3 parâmetros (propriedades do material) desconhecidos: condutividade, calor específico e coeficiente de convecção. Como pode ser visto os valores obtidos para condutividade térmica e calor específico determinados no problema inverso apresentam diferenças insignificantes em relação ao adotado para o material no problema direto. A maior diferença foi de 0,5% para o coeficiente de convecção. Na *Figura A.3* são comparadas as temperaturas nos pontos de medição calculadas com a formulação direta analítica do problema e as calculadas por elementos finitos com as propriedades obtidas do problema inverso. Com base nestes resultados, observa-se que para problemas de transferência de calor unidimensional a metodologia consegue reproduzir o campo de temperaturas no corpo com precisão.

**Tabela A.1.** Resultados obtidos.

Parâmetro		F. Analítica	F. Numérica	Erro [%]
Condutividade térmica (k)	[W/m <sup>2</sup> °C]	52,9	52,90	0,002
Calor específico (C)	[J/Kg °C]	486	485,99	0,003
Coef. Convecção (h)	[W/m <sup>2</sup> °C]	30	30,14	0,46

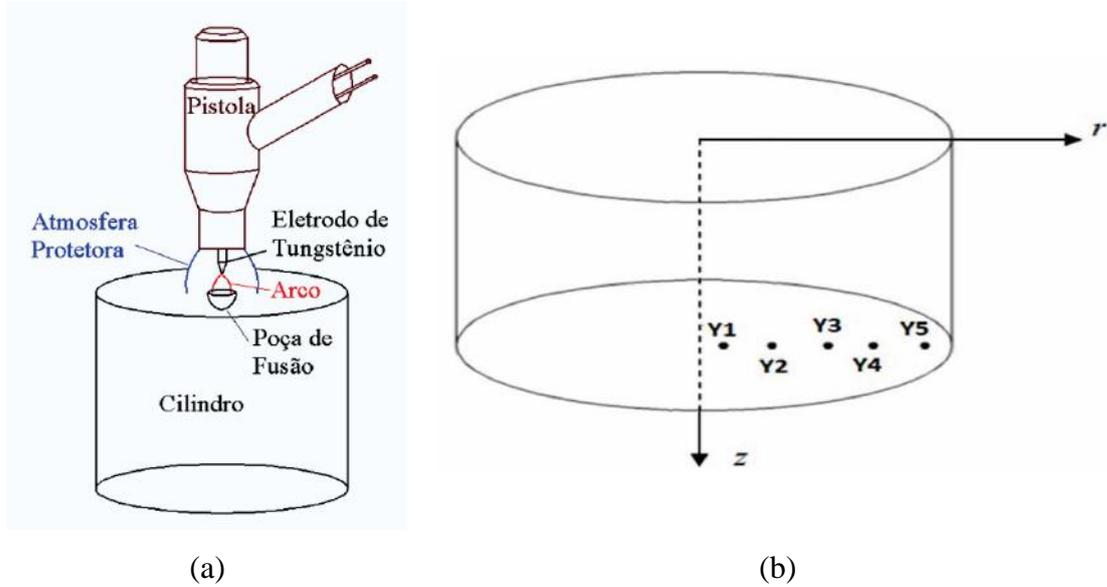


**Figura A.3.** Temperaturas calculadas.

## A.2. Validação da Metodologia para Problema Inverso de Transferência de Calor por Condução Bidimensional

Para esta avaliação usaremos os dados do ensaio experimental da tese de Cângani [8], onde é apresentado um problema físico de soldagem TIG de um cilindro de aço inoxidável AISI 304 com diâmetro de 0,102 m e espessura igual a 0,026 m. Este cilindro é aquecido no seu centro, como mostra a *Figura A.4(a)*, por um tempo de 120 s e resfriado por um tempo igual, perfazendo um tempo total de 240 s. A *Figura A.4(b)* mostra o

esquema de posicionamento dos termopares, cujas distâncias na direção radial são:  $Y1 = 0,004$  m,  $Y2 = 0,012$  m,  $Y3 = 0,022$  m,  $Y4 = 0,032$  m e  $Y5 = 0,042$  m. Os parâmetros de soldagem utilizados no experimento são apresentados na Tabela A.2.

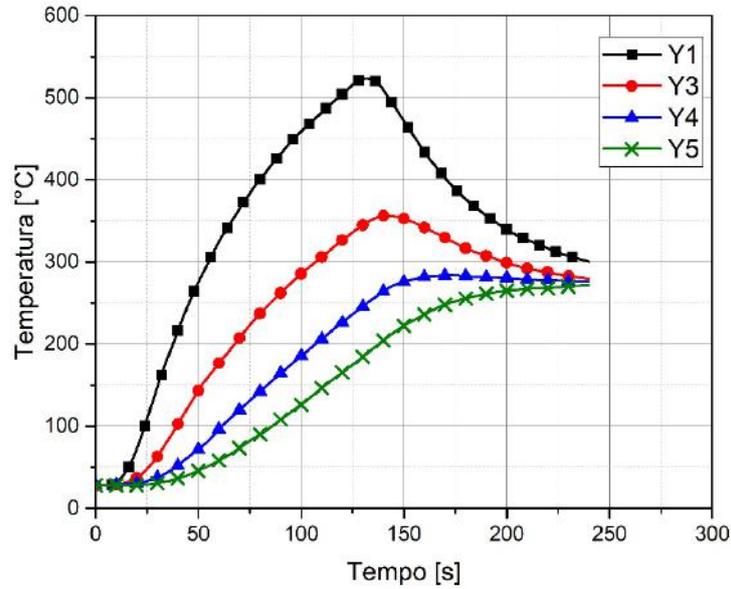


**Figura A.4.** (a) Esquema do processo de soldagem TIG, (b) posição dos termopares no cilindro, [8].

**Tabela A.2.** Parâmetros da soldagem, [8]

Dados de soldagem		Erro
Tensão, V [V]	15	$\pm 10E-2$
Corrente, I [A]	205	$\pm 10E-1$
Rendimento térmico [%]	60,1	-
Energia máxima fornecida [W]	3075	-
Diâmetro da Área de aquecimento [m]	0,01	-

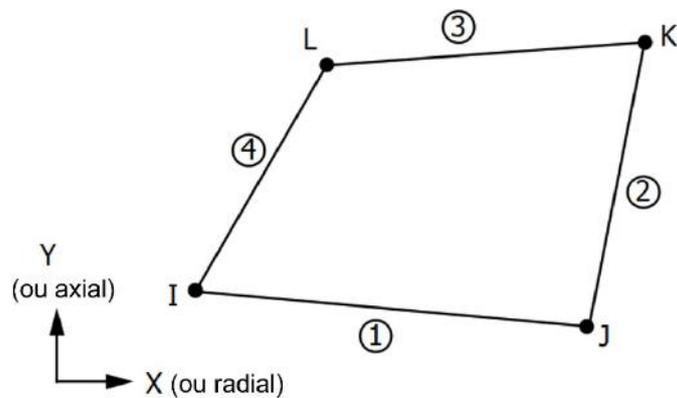
Na *Figura A.5* são apresentadas as variações das temperaturas no tempo obtidas no ensaio experimental nas posições Y1, Y3, Y4 e Y5. A temperatura na posição Y2 foi descartada devido à falha no processo de medição no ensaio. Estas temperaturas serão utilizadas para a determinação da fonte de calor fornecida pela tocha TIG ao cilindro (assumindo-se que seja desconhecida) mediante a aplicação do método de Levenberg-Marquardt para a solução do problema inverso de transferência de calor por condução.



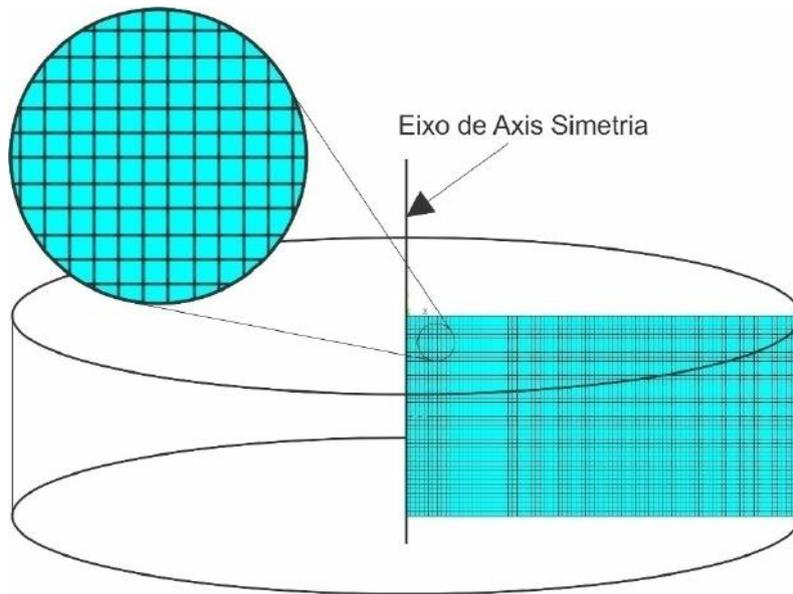
**Figura A.5.** Temperaturas medidas pelos termopares, [8]

**a) Problema direto em elementos finitos**

O cilindro é modelado no ANSYS com elementos lineares quadrangulares axissimétrico-simétricos PLANE75, mostrado na *Figura A.6*, com capacidade de condução térmica 3D. Os graus de liberdade deste elemento são as temperaturas nos nós, e é aplicável em análises térmicas de estado estável e transiente, [122]. A malha de elementos finitos utilizada é exibida na *Figura A.7*, a qual é formada por 3828 elementos, com dimensão aproximada de 0,6 mm, e 3960 nós.

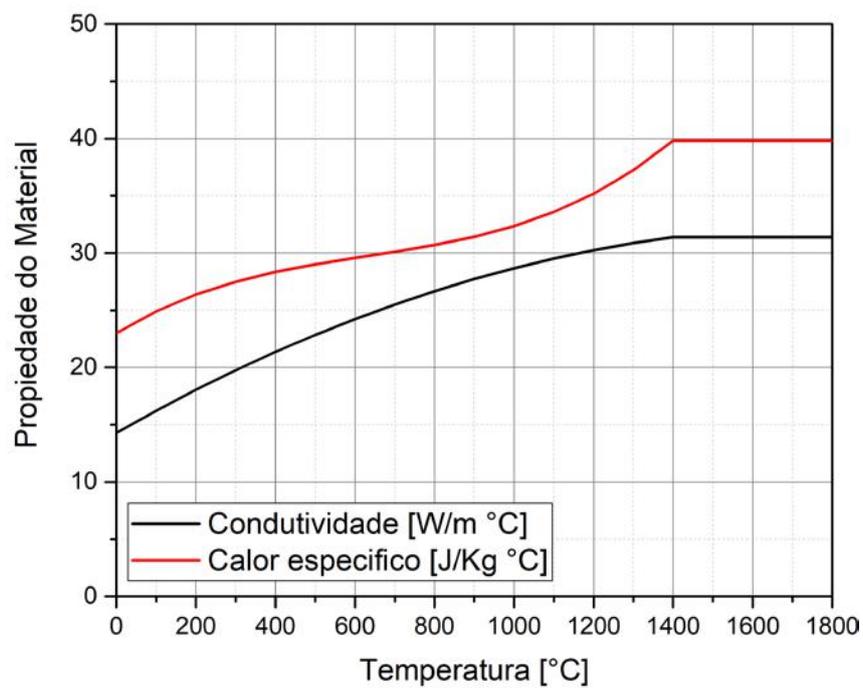


**Figura A.6.** Geometria do elemento. [122]



**Figura A.7.** Malha de elementos finitos

As propriedades consideradas, de acordo com [8] são: densidade ( $\rho$ )= 7200 Kg/m<sup>3</sup>, calor latente ( $H_f$ )=265200 J/Kg, temperatura do líquido ( $T_l$ )=1455 °C, temperatura do sólido ( $T_s$ )=1400 °C, condutividade térmica e calor específico em função da temperatura são mostrados na *Figura A.8*.



**Figura A.8.** Propriedades térmicas do aço AISI 304.

Para evitar mudanças bruscas na capacidade de calor devido à fusão nas simulações térmicas da soldagem, será considerada a entalpia do metal em função da temperatura, [130]. No método de entalpia, é usada uma equação simples para resolver simultaneamente os problemas nos domínios sólido e líquido. A função entalpia  $H$ , ou o teor de calor total, é dada pela equação (A.29) e representa a integral da capacidade térmica em relação à temperatura, apresentando-se como uma função suave mesmo na zona de mudança de fase:

$$H = \int \rho c dT \quad (\text{A } 29)$$

Segundo [129] a variação da entalpia com a temperatura é dada por:

$$H(T) = \begin{cases} \rho(CT) & \text{para } T < T_s \\ \rho \left( CT + \frac{T - T_s}{T_l - T_s} H_f \right) & \text{para } T_s < T < T_l \\ \rho(CT + H_f) & \text{para } T > T_l \end{cases} \quad (\text{A } 30)$$

Para as simulações é utilizada a formulação da entalpia do material ( $H$ ), conforme a equação (A.30), em vez do calor específico ( $C$ ).

#### **b) Determinação dos parâmetros e matriz de sensibilidade**

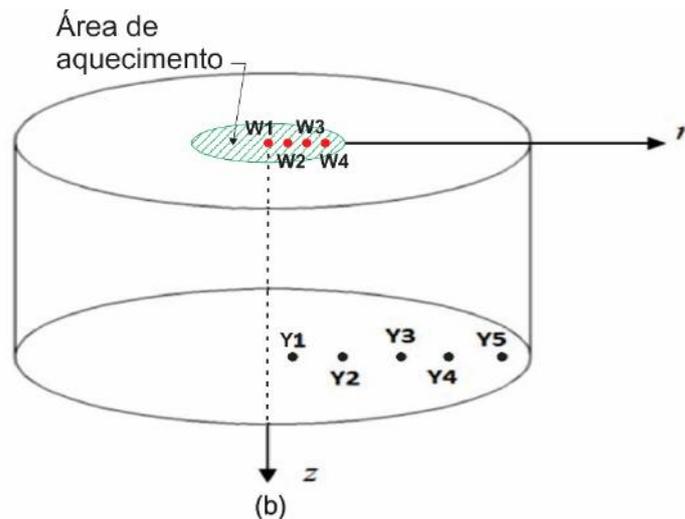
Assumindo que a fonte de calor é desconhecida, através da solução do problema inverso poderá ser determinada. Na malha de elementos finitos são estabelecidos pontos de medição da temperatura que são os nós 53, 58, 56, e 54, que coincidem com os pontos  $W1 = 0,00$  m,  $W2 = 0,00114$  m,  $W3 = 0.00229$  m e  $W4 = 0,00343$  m, que são mostrados na *Figura A.9*. A especificação dos nós na região de aquecimento é importante devido à consideração dos termos da fonte térmica na equação (3.33), a qual é usada para determinar o parâmetro desconhecido,  $q_{sup}^i$ ,  $i = 53, 58, 56$  e  $54$ . Os nós 2, 991, 1756 e 2521 que coincidem com as posições dos termopares Y1, Y3, Y4 e Y5, respectivamente, serão usados para calcular a norma de mínimos quadrados, dada pela equação (3.1).

A *Figura A.10* mostra os elementos que contêm os nós de medição da temperatura obtida numericamente e os outros nós que conformam os elementos. Na *Figura A.10 (a)* o ponto de medição de temperatura, nó 53, se encontra sobre o eixo de axissimetria, por isso consideraremos um elemento imaginário ( $Ei$ ) conformado pelos nós 145i, 60, 53 e 59i. As *Figuras A.10 (b), (c) e (d)* correspondem aos pontos de medição nos nós 58, 56 e 54 respectivamente.

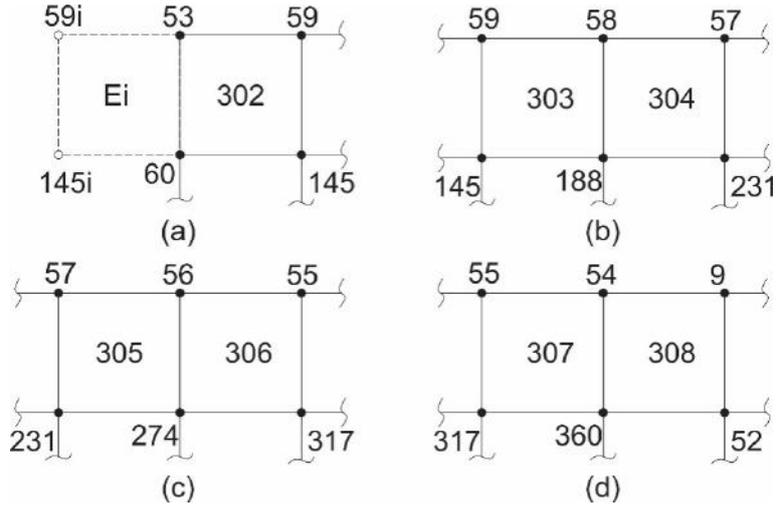
O elemento imaginário ( $Ei$ ) assumido, *Figura A.10 (a)*, ajuda a estabelecer a condição de axissimetria, onde se cumpre que o gradiente da temperatura é zero,  $dT/dx = 0$  em todo o eixo de axissimetria. Então, aplicando derivação por diferenças centrais no nó 53, obtemos:

$$\frac{dT_{53}}{dx} = \frac{T_{59i} - T_{59}}{2\Delta x} = 0 \Rightarrow T_{59i} = T_{59} \quad (\text{A } 31)$$

As matrizes de condutividade térmica e calor específico do elemento  $Ei$  são consideradas iguais às matrizes de condutividade e calor específico do elemento 302.



**Figura A.9.** Posição dos pontos de medição numéricos.



**Figura A.10.** Nós de medição da temperatura (nós 53, 58, 56 e 54) e seus elementos.

Aplicação da equação (3.29) nos respectivos pontos de medição:

Ponto W1 ou nó 53

$$\begin{aligned}
 (T_{53}^{n+1} - T_{53}^n) = & -\Delta t \cdot \left[ \frac{k(T_{60}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \frac{MK_{32}^{Ei} + MK_{41}^{302}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{60}^{n+1}) + \right. \\
 & \frac{k(T_{53}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \frac{MK_{33}^{Ei} + MK_{44}^{302}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{53}^{n+1}) + \frac{k(T_{59i}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \\
 & \left. \frac{MK_{34}^{Ei}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{59i}^{n+1}) + \frac{k(T_{59}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \frac{MK_{43}^{302}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{59}^{n+1}) \right] - \\
 & \left[ \frac{C(T_{60}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \frac{MC_{32}^{Ei} + MC_{41}^{302}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{60}^{n+1} - T_{60}^n) + \frac{C(T_{59i}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \right. \\
 & \left. \frac{MC_{34}^{Ei}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{59i}^{n+1} - T_{59i}^n) + \frac{k(T_{59}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \frac{MC_{43}^{302}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{59}^{n+1} - T_{59}^n) \right] + \\
 & \frac{q_{\text{sup}}^{53}}{C(T_{53}^n)} \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (f_3^{Ei} + f_4^{302}) \right]
 \end{aligned} \tag{A 32}$$

Introduzindo a equação (A.31) na equação (A.32) e lembrando que as matrizes de condutividade térmica e calor específico são simétricas, a equação (A.32) fica:

$$\begin{aligned}
(T_{53}^{n+1} - T_{53}^n) = & -\Delta t \cdot \left[ \frac{k(T_{60}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \frac{MK_{32}^{Ei} + MK_{41}^{302}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{60}^{n+1}) + \right. \\
& \left. \frac{k(T_{53}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \frac{MK_{33}^{Ei} + MK_{44}^{302}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{53}^{n+1}) + 2 \cdot \frac{k(T_{59}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \frac{MK_{43}^{302}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{59}^{n+1}) \right] \\
& - \left[ \frac{C(T_{60}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \frac{MC_{32}^{Ei} + MC_{41}^{302}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{60}^{n+1} - T_{60}^n) + \right. \\
& \left. 2 \cdot \frac{k(T_{59}^n)}{C(T_{53}^n)} \cdot \frac{MC_{43}^{302}}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (T_{59}^{n+1} - T_{59}^n) \right] + \\
& \frac{q_{\text{sup}}^{53}}{C(T_{53}^n)} \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (f_3^{Ei} + f_4^{302}) \right]
\end{aligned} \tag{A 33}$$

Ponto W2 ou nó 58

$$\begin{aligned}
(T_{58}^{n+1} - T_{58}^n) = & -\Delta t \cdot \left[ \frac{k(T_{188}^n)}{C(T_{58}^n)} \cdot \frac{MK_{32}^{303} + MK_{41}^{304}}{MC_{33}^{303} + MC_{44}^{304}} (T_{188}^{n+1}) + \right. \\
& \left. \frac{k(T_{58}^n)}{C(T_{58}^n)} \cdot \frac{MK_{33}^{303} + MK_{44}^{304}}{MC_{33}^{303} + MC_{44}^{304}} (T_{58}^{n+1}) + \frac{k(T_{59}^n)}{C(T_{58}^n)} \cdot \right. \\
& \left. \frac{MK_{34}^{303}}{MC_{33}^{303} + MC_{44}^{304}} (T_{59}^{n+1}) + \frac{k(T_{57}^n)}{C(T_{58}^n)} \cdot \frac{MK_{43}^{304}}{MC_{33}^{303} + MC_{44}^{304}} (T_{57}^{n+1}) \right] - \\
& \left[ \frac{C(T_{188}^n)}{C(T_{58}^n)} \cdot \frac{MC_{32}^{303} + MC_{41}^{304}}{MC_{33}^{303} + MC_{44}^{304}} (T_{188}^{n+1} - T_{188}^n) + \frac{C(T_{59}^n)}{C(T_{58}^n)} \cdot \right. \\
& \left. \frac{MC_{34}^{303}}{MC_{33}^{303} + MC_{44}^{304}} (T_{59}^{n+1} - T_{59}^n) + \frac{C(T_{57}^n)}{C(T_{58}^n)} \cdot \frac{MC_{43}^{304}}{MC_{33}^{303} + MC_{44}^{304}} (T_{57}^{n+1} - T_{57}^n) \right] \\
& + \frac{q_{\text{sup}}^{58}}{C(T_{58}^n)} \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{33}^{303} + MC_{44}^{304}} (f_3^{303} + f_4^{304}) \right]
\end{aligned} \tag{A 34}$$

Ponto W3 ou nó 56

$$\begin{aligned}
(T_{56}^{n+1} - T_{56}^n) = & -\Delta t \cdot \left[ \frac{k(T_{274}^n)}{C(T_{56}^n)} \cdot \frac{MK_{32}^{305} + MK_{41}^{306}}{MC_{33}^{305} + MC_{44}^{306}} (T_{274}^{n+1}) + \right. \\
& \frac{k(T_{56}^n)}{C(T_{56}^n)} \cdot \frac{MK_{33}^{305} + MK_{44}^{306}}{MC_{33}^{305} + MC_{44}^{306}} (T_{56}^{n+1}) + \frac{k(T_{57}^n)}{C(T_{56}^n)} \cdot \\
& \left. \frac{MK_{34}^{305}}{MC_{33}^{305} + MC_{44}^{306}} (T_{57}^{n+1}) + \frac{k(T_{55}^n)}{C(T_{56}^n)} \cdot \frac{MK_{43}^{306}}{MC_{33}^{305} + MC_{44}^{306}} (T_{55}^{n+1}) \right] - \\
& \left[ \frac{C(T_{274}^n)}{C(T_{56}^n)} \cdot \frac{MC_{32}^{305} + MC_{41}^{306}}{MC_{33}^{305} + MC_{44}^{306}} (T_{274}^{n+1} - T_{274}^n) + \frac{C(T_{57}^n)}{C(T_{56}^n)} \cdot \right. \\
& \left. \frac{MC_{34}^{305}}{MC_{33}^{305} + MC_{44}^{306}} (T_{57}^{n+1} - T_{57}^n) + \frac{C(T_{55}^n)}{C(T_{56}^n)} \cdot \frac{MC_{43}^{306}}{MC_{33}^{305} + MC_{44}^{306}} (T_{55}^{n+1} - T_{55}^n) \right] + \\
& \frac{q_{\text{sup}}^{56}}{C(T_{56}^n)} \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{33}^{305} + MC_{44}^{306}} (f_3^{305} + f_4^{306}) \right]
\end{aligned} \tag{A 35}$$

Ponto W4 ou nó 54

$$\begin{aligned}
(T_{54}^{n+1} - T_{54}^n) = & -\Delta t \cdot \left[ \frac{k(T_{360}^n)}{C(T_{54}^n)} \cdot \frac{(MK_{32}^{307} + MK_{41}^{308})}{(MC_{33}^{307} + MC_{44}^{308})} (T_{360}^{n+1}) + \right. \\
& \frac{k(T_{54}^n)}{C(T_{54}^n)} \cdot \frac{MK_{33}^{307} + MK_{44}^{308}}{MC_{33}^{307} + MC_{44}^{308}} (T_{54}^{n+1}) + \frac{k(T_{55}^n)}{C(T_{54}^n)} \cdot \\
& \left. \frac{MK_{34}^{307}}{MC_{33}^{307} + MC_{44}^{308}} (T_{55}^{n+1}) + \frac{k(T_9^n)}{C(T_{54}^n)} \cdot \frac{MK_{43}^{308}}{MC_{33}^{307} + MC_{44}^{308}} (T_9^{n+1}) \right] - \\
& \left[ \frac{C(T_{360}^n)}{C(T_{54}^n)} \cdot \frac{MC_{32}^{307} + MC_{41}^{308}}{MC_{33}^{307} + MC_{44}^{308}} (T_{360}^{n+1} - T_{360}^n) + \frac{C(T_{55}^n)}{C(T_{54}^n)} \cdot \right. \\
& \left. \frac{MC_{34}^{307}}{MC_{33}^{307} + MC_{44}^{308}} (T_{55}^{n+1} - T_{55}^n) + \frac{C(T_9^n)}{C(T_{54}^n)} \cdot \frac{MC_{43}^{308}}{MC_{33}^{307} + MC_{44}^{308}} (T_9^{n+1} - T_9^n) \right] \\
& + \frac{q_{\text{sup}}^{54}}{C(T_{54}^n)} \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{33}^{307} + MC_{44}^{308}} (f_3^{307} + f_4^{308}) \right]
\end{aligned} \tag{A 36}$$

onde:

$T_p^n$  = Temperatura no tempo  $n$ , no nó  $p$ .

$MK_{ij}^E$  = Componente da matriz condutividade do elemento E.

$MC_{ij}^E$  = Componente da matriz calor específico do elemento E.

$f_i^E$  = Componente do vetor força do elemento E.

$k(T_p^n)$ : Condutividade térmica na temperatura  $T_p^n$ .

$C(T_p^n)$ : Calor específico na temperatura  $T_p^n$ .

$q_{sup}^p$ : Fluxo calor fornecido no ponto  $p$ .

Os parâmetros a serem determinados serão os fluxos de calor fornecido nos pontos de medição de temperaturas  $q_{sup}^{53}$ ,  $q_{sup}^{58}$ ,  $q_{sup}^{56}$  e  $q_{sup}^{54}$ , assim:

$$P1 = q_{sup}^{53}; \quad P2 = q_{sup}^{58}; \quad P3 = q_{sup}^{56}; \quad P4 = q_{sup}^{54} \quad (A 37)$$

As componentes da matriz de sensibilidade são determinadas de acordo com a equação (3.35) e são as derivadas das equações (A.33) - (A.36) com relação aos parâmetros P1, P2, P3 e P4, então:

Ponto W1 ou nó 53

$$\frac{\partial T_{53}}{\partial P1} = \frac{1}{C(T_{53}^n)} \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{33}^{Ei} + MC_{44}^{302}} (f_3^{Ei} + f_4^{302}) \right] \quad (A 38)$$

Ponto W2 ou nó 58

$$\frac{\partial T_{58}}{\partial P2} = \frac{1}{C(T_{58}^n)} \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{33}^{303} + MC_{44}^{304}} (f_3^{303} + f_4^{304}) \right] \quad (A 39)$$

Ponto W3 ou nó 56

$$\frac{\partial T_{56}}{\partial P3} = \frac{1}{C(T_{56}^n)} \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{33}^{305} + MC_{44}^{306}} (f_3^{305} + f_4^{306}) \right] \quad (\text{A } 40)$$

Ponto W4 ou nó 54

$$\frac{\partial T_{54}}{\partial P4} = \frac{1}{C(T_{54}^n)} \cdot \left[ \frac{\Delta t}{MC_{33}^{307} + MC_{44}^{308}} (f_3^{307} + f_4^{308}) \right] \quad (\text{A } 41)$$

As derivadas das temperaturas determinadas nas equações (A.38) - (A.41) são introduzidas na matriz de sensibilidade J, equação (3.6). A matriz J com quatro parâmetros desconhecidos e quatro sensores é semelhante à matriz apresentada na equação (A.16), que corresponde a um problema com três parâmetros desconhecidos e quatro sensores, adicionando uma coluna para o respectivo quarto parâmetro. Com esta informação é calculado o vetor incremento de parâmetros desconhecidos  $\Delta P^k$ , através da equação (3.12). A aplicação do vetor incremento  $\Delta P^k$  na equação (3.11) permite a determinação dos novos valores para os parâmetros desconhecidos de forma iterativa até que estes parâmetros, calculados como indica o algoritmo computacional no item 3.1.3, obtenham as temperaturas satisfazendo critério de parada do item 3.1.2 .

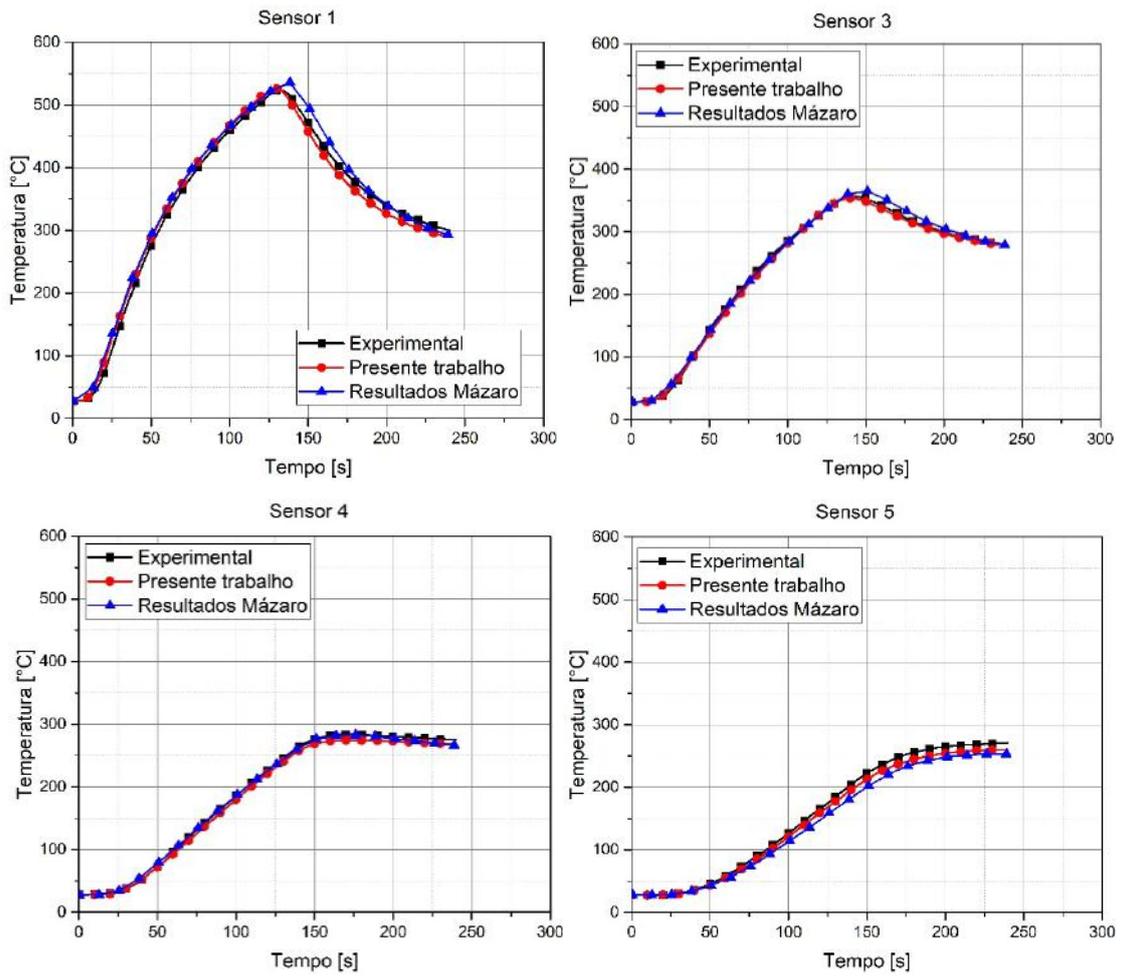
### c) Resultados

Cângani utilizou o método da Seção Áurea junto com volumes finitos para a solução do problema inverso de transferência de calor para determinar o aporte de calor durante o processo de soldagem. Seus resultados junto com os resultados obtidos através da metodologia proposta nesta tese são comparados na Tabela A.3.

**Tabela A.3.** Resultados da solução de métodos inversos.

	<b>Cângani [8]</b>	<b>Presente Trabalho</b>
Fluxo de calor experimental, $Q_{exp}$ [W/m <sup>2</sup> ]	3,91E7	
Fluxo de calor estimado, $Q_{est}$ [W/m <sup>2</sup> ]	2,35E7	2,43E7
Rendimento térmico [%]	60,1	62,1

Nos gráficos da *Figura A.11* são feitas as comparações das temperaturas medidas nos ensaios experimentais com as temperaturas obtidas por Cângani [8] através do método da Seção Áurea para solução de problemas inversos e as temperaturas calculadas no presente trabalho, onde é usado o método de Levenberg-Marquardt junto com elementos finitos. As temperaturas mostradas na *Figura 4.11* nos locais (Sensores) designados por Y1, Y3, Y4 e Y5 mostram que o método proposto consegue uma aproximação melhor às temperaturas experimentais do que as calculadas por Cângani. Destes resultados conclui-se que o método de Levenberg-Marquardt consegue determinar com precisão os parâmetros desconhecidos da formulação de transferência de calor por condução.



**Figura A.11.** Comparação das temperaturas medidas experimentalmente e temperaturas calculadas em cada sensor.