



TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL EM DOMÍNIO ÚNICO APLICADA À ENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

Leonardo Osório Pelisoli

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientadores: Carolina Palma Naveira Cotta
Paulo Couto

Rio de Janeiro
Julho de 2019

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL EM DOMÍNIO ÚNICO APLICADA À
ENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

Leonardo Osório Pelisoli

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Examinada por:

Prof. Carolina Palma Naveira Cotta, D.Sc.

Prof. Paulo Couto, D.Sc.

Prof. Renato Machado Cotta, Ph.D.

Prof. Abelardo Borges Barreto Junior, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JULHO DE 2019

Pelisoli, Leonardo Osório

Transformação Integral em Domínio Único Aplicada à Engenharia de Reservatórios/Leonardo Osório Pelisoli. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XV, 124 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Carolina Palma Naveira Cotta

Paulo Couto

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Mecânica, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 103 – 112.

1. Transformação Integral. 2. GITT. 3. Engenharia de Reservatórios. 4. Avaliação de Formações. 5. Meios Heterogêneos. I. Naveira Cotta, Carolina Palma *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

TRANSFORMAÇÃO INTEGRAL EM DOMÍNIO ÚNICO APLICADA À ENGENHARIA DE RESERVATÓRIOS

Leonardo Osório Pelisoli

Julho/2019

Orientadores: Carolina Palma Naveira Cotta
Paulo Couto

Programa: Engenharia Mecânica

No contexto da Engenharia de Reservatórios, os termos *análise de transientes de pressão* e *interpretação de testes de formação* são usados para designar as ferramentas e técnicas que permitem a caracterização de reservatórios através de operações especializadas conhecidas como *testes de formação*. A física dessas operações é modelada pela Equação da Difusividade, cujas soluções particulares sob condições simplificadas apropriadas são usadas para compreender e quantificar o comportamento do fluxo no reservatório, e assim inferir informações sobre o próprio reservatório.

Neste trabalho, a Técnica da Transformação Integral Generalizada (GITT, em inglês) é aplicada pela primeira vez na resolução do problema do *ponto fonte* em um reservatório heterogêneo tridimensional. A solução exata transiente de um problema auxiliar mais simples — o próprio ponto fonte, em um reservatório homogêneo — é utilizada como filtro analítico, de modo a acelerar a taxa de convergência da solução de meio heterogêneo.

Ao final, o *Princípio da Superposição* é aplicado ao ponto fonte para a construção de uma solução de fluxo uniforme para o problema do poço vertical com canhoneio parcial, também em meio heterogêneo. As soluções obtidas por Transformação Integral são comparadas a soluções analíticas clássicas e resultados de simulação numérica.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

SINGLE DOMAIN INTEGRAL TRANSFORM FORMULATION APPLIED TO
RESERVOIR ENGINEERING

Leonardo Osório Pelisoli

July/2019

Advisors: Carolina Palma Naveira Cotta
Paulo Couto

Department: Mechanical Engineering

In the domain of Reservoir Engineering, *pressure transient analysis* and *well test analysis* are terms used to describe the set of tools and techniques enabling reservoir characterization through specialized operations known as *well tests*. The physics of these operations is modeled by the Diffusivity Equation, whose particular solutions for appropriately simplified situations are used to understand and quantify flow behavior within the reservoir, and in this way to gain information about the reservoir itself.

In this work, the Generalized Integral Transform Technique (GITT) is applied for the first time in the solution of the *continuous point source* problem in a heterogeneous tridimensional reservoir. The exact transient solution of a simpler auxiliary problem — the same continuous point source, but in a homogeneous reservoir — is used as an analytical filter in order to improve the convergence rate of the heterogeneous reservoir solution.

After that, the point source is used as a building block for obtaining an uniform flux solution of the limited entry vertical well in a heterogeneous reservoir. The solutions developed with the integral transform are compared against classical analytical solutions as well as numerical simulation.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xi
Lista de Símbolos	xii
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos	5
1.3 Organização do Trabalho	5
2 Revisão Bibliográfica	7
2.1 Modelos Utilizados em Testes de Formação em Reservatórios Heterogêneos	7
2.2 Histórico de Uso da Transformação Integral na Engenharia de Reservatórios	12
2.3 Avanços Recentes no Uso da GITT	15
2.4 Aspectos da Transformação Integral Ainda Não Explorados na Engenharia de Reservatórios	18
3 Modelagem Matemática e Metodologia de Solução	20
3.1 Formulação e Adimensionalização do Problema	21
3.2 Soluções Analíticas Clássicas	23
3.3 Solução Formal Generalizada por Transformação Integral	25
3.4 Reordenamento de Autovalores e Filtragem Analítica do Problema	30
4 Solução do Ponte Fonte em Reservatório Homogêneo	35
4.1 Solução por Transformação Integral sem Filtro	35
4.2 Aplicação das Soluções Analíticas Clássicas como Filtros para a Transformação Integral	40
4.3 Relação entre as Soluções Clássicas e a Transformação Integral	41

5	Solução do Ponto Fonte em Reservatório Heterogêneo	44
5.1	Transformação e Solução do Problema	44
5.2	Aplicação Numérica: Reservatório Estratificado	55
5.3	Aplicação Numérica: Fluxo em Canal	72
6	Solução de Fluxo Uniforme para Poço Vertical com Canhoneio Par-	
	cial em Reservatório Heterogêneo	82
6.1	Formulação e Adimensionalização do Problema	83
6.2	Solução Analítica Clássica para Reservatório Homogêneo	84
6.3	Solução por Transformação Integral para Reservatório Heterogêneo .	85
6.4	Aplicação Numérica: Reservatório Compartimentado	87
7	Conclusões e Propostas para Trabalhos Futuros	99
	Referências Bibliográficas	103
A	Potencial Transformado com Filtro na Forma Exponencial	113
B	Conceitos Básicos de Interpretação de Testes de Formação	117
C	Características dos Softwares <i>Saphir</i> e <i>Rubis</i>	120
D	Plataforma de Implementação Computacional	123

Lista de Figuras

1.1	Ilustrações esquemáticas de (a) um sistema petrolífero; e (b) um modelo computacional de reservatório.	1
1.2	Gráficos log-log mostrando exemplos de dados reais obtidos em testes de formação.	2
1.3	Representações esquemáticas do (a) problema do ponto fonte; e (b) problema do poço vertical com canhoneio parcial.	4
2.1	Desenho esquemático com a visão do plano $x - y$ de um poço vertical adjacente a uma barreira de extensão infinita (modelo de falha simples). Fonte: (HOUZÉ <i>et al.</i> , 2018)	11
4.1	Gráfico log-log comparando a solução do ponto fonte em meio homogêneo por CITT com a solução clássica pelo método das imagens para reservatório fechado.	39
5.1	Heterogeneidade do domínio representada por uma função $k_D(\mathbf{x}_D)$ constante por partes, onde cada parte tem o formato de um bloco retangular e regular.	48
5.2	Desenho esquemático com o modelo de reservatório da Seção 5.2.	56
5.3	Gráfico log-log com as soluções numéricas de referência para o reservatório da Seção 5.2, comparadas a soluções analíticas de reservatório homogêneo pelo método das imagens.	59
5.4	Gráfico log-log com as soluções numéricas para o caso homogêneo ($k_D = 1$) do reservatório da Seção 5.2, comparadas à solução analítica pelo método das imagens.	61
5.5	Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 50 (63) a 500 (580) termos.	65
5.6	Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 1000 (1350) a 12 000 (17 086) termos.	66

5.7	Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento de 8000 (11 338) e 12 000 (17 086) termos.	67
5.8	Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 2000 (2781) a 12 000 (17 086) termos.	68
5.9	Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para a ordem de truncamento de 12 000 (17 086) termos.	69
5.10	Gráfico log-log comparando a solução numérica de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para a ordem de truncamento de 12 000 (17 086) termos, nas posições dos poços observadores.	70
5.11	Gráfico log-log comparando as soluções da Seção 5.2.1 por GITT com 1000 (1350) e 12 000 (17 086) termos, nas posições dos poços observadores.	71
5.12	Desenho esquemático com o modelo de reservatório da Seção 5.3.	72
5.13	Gráfico log-log com as soluções numéricas de referência para o reservatório da Figura 5.12, comparadas a soluções analíticas de reservatório homogêneo pelo método das imagens.	74
5.14	Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.3.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 100 (115) a 10 000 (12 765) termos.	78
5.15	Gráfico log-log comparando a solução numérica de referência da Seção 5.3 com a solução por GITT, para a ordem de truncamento de 200 (247) termos, nas posições dos poços observadores.	79
5.16	Gráfico log-log comparando as soluções da Seção 5.3 por GITT com 50 (56) e 200 (247) termos, nas posições dos poços observadores.	81
6.1	Desenho esquemático com o modelo de reservatório da Seção 6.4.	89
6.2	Gráfico log-log com as soluções numéricas de referência para o reservatório da Figura 6.1, comparadas à solução analítica de reservatório homogêneo pelo método das imagens.	90
6.3	Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 6.4.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 50 (67) a 2000 (4807) termos.	95
6.4	Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 6.4.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 300 (642) a 2000 (4807) termos.	96

6.5	Gráfico log-log comparando a solução numérica de referência da Seção 6.4 com a solução por GITT, para a ordem de truncamento de 2000 (4807) termos, nas posições dos poços observadores.	97
6.6	Gráfico log-log comparando as soluções da Seção 6.4 por GITT com 300 (642) e 2000 (4807) termos, nas posições dos poços observadores.	98
B.1	Exemplos de gráfico log-log destacando alguns regimes de fluxo comumente observados em testes de formação.	118

Lista de Tabelas

4.1	Propriedades numéricas para o exemplo da Seção 4.1.	38
4.2	Convergência do Δp na posição do ponto fonte para o problema das Equações (4.1a–c).	39
4.3	Convergência do $\Delta p'$ na posição do ponto fonte para o problema das Equações (4.1a–c).	40
5.1	Posições dos poços observadores para a Seção 5.2.	57
5.2	Primeiros 30 autovalores do problema da Seção 5.2.	63
5.3	Quantitativo de autovalores unidimensionais auxiliares distintos para o problema da Seção 5.2.	64
5.4	Convergência do Δp na posição do ponto fonte para a Seção 5.2. . . .	67
5.5	Convergência do $\Delta p'$ na posição do ponto fonte para a Seção 5.2. . . .	68
5.6	Posições dos poços observadores para a Seção 5.3.	73
5.7	Primeiros 30 autovalores do problema da Seção 5.3.	76
5.8	Quantitativo de autovalores unidimensionais auxiliares distintos para o problema da Seção 5.3.	77
5.9	Convergência do Δp na posição do ponto fonte para a Seção 5.3. . . .	80
5.10	Convergência do $\Delta p'$ na posição do ponto fonte para a Seção 5.3. . . .	80
6.1	Propriedades numéricas para o exemplo da Seção 6.4.	88
6.2	Posições dos poços observadores para a Seção 6.4.	89
6.3	Primeiros 30 autovalores do problema da Seção 6.4.	93
6.4	Quantitativo de autovalores unidimensionais auxiliares distintos para o problema da Seção 6.4.	94
6.5	Convergência do Δp na posição do poço para a Seção 6.4.	95
6.6	Convergência do $\Delta p'$ na posição do poço para a Seção 6.4.	96

Lista de Símbolos

$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$	matrizes do problema de autovalor algébrico auxiliar
A_{jk}, B_{jk}, C_{jk}	matrizes do problema de autovalor algébrico auxiliar
\mathbf{A}'	matriz auxiliar para reordenamento dos autovalores
\mathcal{B}	operador usado na GITT
$\hat{\mathcal{B}}$	operador usado na GITT aplicada ao problema de autovalor
c_t	compressibilidade total do sistema, 1/kgf/cm ²
$d(\mathbf{x}_D)$	termo da formulação generalizada do problema
$f(\mathbf{x}_D)$	condição inicial da formulação generalizada
F_D	função filtro escolhida para a formulação da GITT
$f_{z^+,i}, f_{z^-,i}$	termos da solução analítica clássica para o poço vertical com canhoneio parcial
g	termo fonte da formulação generalizada
g'	termo fonte da formulação do poço vertical com canhoneio parcial
h_w	extensão vertical canhoneada do poço, m
h_{wD}	extensão vertical canhoneada adimensionalizada do poço
$H(z - z_w)$	função degrau de Heaviside
$\Delta H(z - z_w)$	soma de funções de Heaviside da formulação do canhoneio parcial
\mathbf{I}	matriz identidade
$I_{jk}(V_n)$	integral dos autovalores auxiliares utilizada na montagem da matriz \mathbf{A}
k_x, k_y, k_z	permeabilidade nas direções x , y e z , mD
$k_D(\mathbf{x}_D)$	multiplicador de permeabilidade na posição \mathbf{x}_D
k_{wD}	permeabilidade adimensional na posição do termo fonte \mathbf{x}_{wD}

$k_{xx}(\mathbf{x}_D)$	elementos do tensor de permeabilidade, mD
k	permeabilidade equivalente esférica, mD
k_ℓ	permeabilidade na direção ℓ , mD
\underline{K}	tensor de permeabilidade
L	comprimento de referência, m
L_x, L_y, L_z	dimensões do domínio nas direções x, y e z , m
L_{xD}, L_{yD}, L_{zD}	dimensões adimensionalizadas do domínio nas direções x_D, y_D e z_D
L_{vD}	dimensão adimensionalizada do domínio na direção v_D onde $v_D \in \{x_D, y_D, z_D\}$
ℓ	referente a uma das direções ortogonais, $\ell \in \{x, y, z\}$
\mathcal{L}	operador usado na GITT
$\hat{\mathcal{L}}$	operador usado na GITT aplicada ao problema de autovalor
n	vetor normal à superfície S do domínio, orientado para fora
N_{ψ_i}	norma i das autofunções ψ
N_{Ω_i}	norma i das autofunções auxiliares Ω
$N_{X_i}, N_{Y_i}, N_{Z_i}$	norma i das autofunções auxiliares X, Y, Z
p	pressão, kgf/cm ²
p_i	pressão inicial, kgf/cm ²
Δp	delta de pressão $p - p_i$
$\Delta p'$	derivada logarítmica da pressão
p_D	delta de pressão adimensional
$\overline{\mathbf{pD}}(t_D)$	vetor de potenciais transformados
q	vazão volumétrica, m ³ /d
r_w	raio do poço, pol
R_D	distância adimensional em relação ao ponto fonte
S	superfície externa do domínio
$S_{ik,jm,ln}$	termo da solução clássica do ponto fonte em meio finito homogêneo
\mathcal{S}	comprimento, área ou volume da fonte

T_{0m}, T_{i0}, T_{im}	termos da expressão para o potencial filtrado transformado
t	tempo, h
t_D	tempo adimensional
V	volume interior do domínio
$w(\mathbf{x}_D)$	função peso da relação de ortogonalidade das autofunções
x, y, z	direções ortogonais do sistema cartesiano em 3D
x_w, y_w, z_w	posição do poço (termo fonte) das equações, m
x_{wD}, y_{wD}, z_{wD}	posição adimensionalizada do poço (termo fonte) das equações
\mathbf{x}	vetor posição (x, y, z)
\mathbf{x}_D	vetor posição adimensional (x_D, y_D, z_D)
x_D, y_D, z_D	posição adimensional
\mathbf{x}_{wD}	vetor posição adimensional do poço (termo fonte)
X, Y, Z	autofunções do problema auxiliar nas direções x_D, y_D e z_D
\mathcal{X}	autofunções do problema auxiliar na direção v_D onde $v \in \{x_D, y_D, z_D\}$

Letras Gregas

$\alpha(\mathbf{x}_D), \beta(\mathbf{x}_D)$	coeficientes das condições de contorno da formulação generalizada
Δp	delta de pressão em relação à inicial
δ_D	delta de Dirac adimensional
δ_{ij}	delta de Kronecker
$\delta(x)$	delta de Dirac, 1/m
$\delta(\mathbf{x})$	produto de deltas de Dirac $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$, 1/m ³
ζ	termo da matriz \mathbf{A} do problema de autovalor algébrico
η	autovalores do problema auxiliar
η'	transformação de variáveis para os autovalores do problema auxiliar
Θ	integral das autofunções auxiliares utilizada no poço vertical com canhoneio parcial

λ, γ, ν	autovalores do problema auxiliar nas direções x, y e z
μ_f	viscosidade do fluido, cP
μ	autovalores do problema generalizado
ξ, ξ_e	termos da Soma de Poisson
$\xi_j(h_{wD})$	termos do potencial transformado no problema do poço vertical com canhoneio parcial
ρ	autovalores do problema auxiliar na direção v_D onde $v_D \in \{x_D, y_D, z_D\}$
ϕ	porosidade, %
φ	termo da condição de contorno da formulação generalizada
ψ	autofunções do problema generalizado auxiliar
Ω	autofunções do problema auxiliar

Subscritos e Superescritos

i, j, k, m, n, l	contadores
\sim	indica normalização da autofunção
\wedge	coeficiente referente ao problema de autovalor auxiliar
$-$	indica a função transformada
$*$	termo do problema filtrado
T	indica vetor ou matriz transposto
-1	indica vetor ou matriz inversa
pf	referente ao ponto fonte

Abreviações

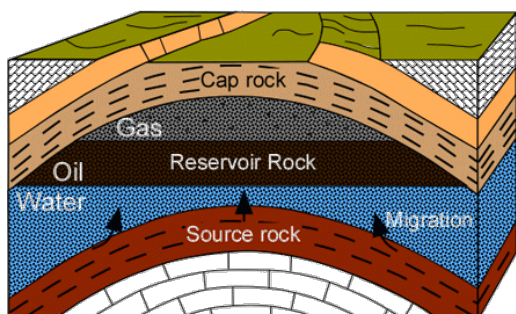
CITT	Classical Integral Transform Technique
DST	Drillstem test
EOR/IOR	Enhanced oil recovery / Improved oil recovery
GITT	Generalized Integral Transform Technique

Capítulo 1

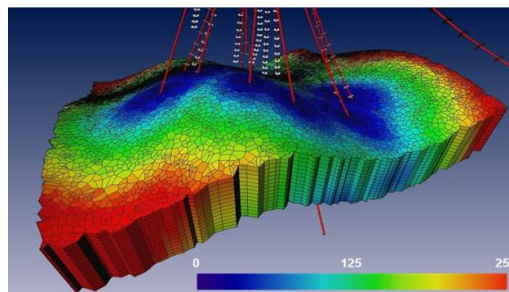
Introdução

1.1 Motivação

Dentre os diversos elementos que compõem um sistema petrolífero, pode-se destacar o *reservatório*, que é o nome dado às rochas porosas e permeáveis de onde se produz o petróleo (ilustração na Figura 1.1a). Profissionais de diversas disciplinas estão envolvidos na exploração de um campo de petróleo, dentre os quais o Engenheiro de Reservatório é o responsável pelo trabalho de previsão da produção e otimização das estratégias de exploração.



(a) Fonte: (SIMPSON, 2016)



(b) Fonte: (THERMO FISHER SCIENTIFIC, 2019)

Figura 1.1: Ilustrações esquemáticas de (a) um sistema petrolífero; e (b) um modelo computacional de reservatório.

Para possibilitar a previsão da produção, é necessário primeiro construir um modelo computacional que represente o comportamento do reservatório (ilustração na Figura 1.1b). Para isso, dados de diversas naturezas são necessários: aquisições sísmicas, ensaios laboratoriais de rocha e fluido, perfis elétricos de poços, entre outros. A maior parte dos dados disponíveis na fase de construção do modelo de reservatório são de natureza *estática*: representam as características físicas do reservatório, mas não o comportamento em relação à movimentação de fluidos no seu interior. A tarefa de adquirir dados *dinâmicos* do reservatório é realizada pelos engenheiros da

Avaliação de Formações, através de operações conhecidas como *testes de formação*.

A interpretação de testes de formação é um típico *problema inverso* (GRINGARTEN *et al.*, 1979). Através do conhecimento da entrada do sistema (vazão $q(t)$ do poço) e da medição da resposta na saída (pressão $p(t)$), busca-se determinar as características do reservatório. Essa busca passa pela necessidade de encontrar e ajustar um modelo que não só represente adequadamente os resultados das medições diretas de pressão e vazão, como também apresente coerência com todas as demais fontes de informação disponíveis.

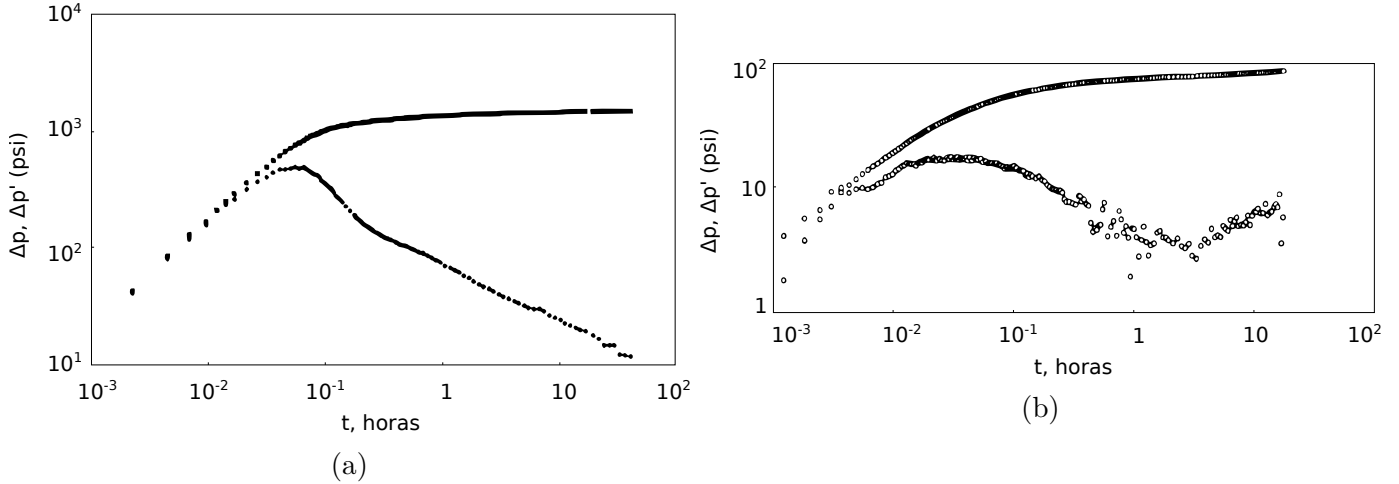


Figura 1.2: Gráficos log-log¹mostrando exemplos de dados reais obtidos em testes de formação. Adaptados de BOURDET (2002).

Soluções de versões simplificadas do *problema direto*, obtidas por meio de métodos analíticos, são amplamente utilizadas nesse contexto, tanto porque permitem testar (e descartar) um grande número de modelos rapidamente (baixo custo computacional), quanto porque a forma e número reduzido de parâmetros de ajuste é conveniente para análise e compreensão dos problemas. Uma vez identificados e quantificados os principais parâmetros que regem o comportamento observado, modelos mais completos e com um menor número de simplificações podem ser construídos ou ajustados para análises mais refinadas. Estes, em geral, são resolvidos de forma aproximada através de métodos numéricos.

Os modelos analíticos utilizados na interpretação de testes de formação são soluções da Equação da Difusividade, expressão matemática que descreve o escoamento de fluidos em meios porosos. Cada modelo representa um conjunto específico de premissas para o reservatório: hipóteses simplificadoras, configurações de poços, geometria do domínio e propriedades físicas representativas. A natureza das simplificações adotadas é fortemente influenciada pela disponibilidade de metodologias para obtenção de uma solução que não dependa de simulação numérica. Por esta

¹Para explicações sobre esse tipo de gráfico, ver apêndice B.

razão, métodos híbridos que permitam ampliar os limites do que é possível tratar analiticamente são tão importantes nesta área.

A Transformada Integral Generalizada (GITT²) se propõe a reunir vantagens tanto das soluções analíticas quanto da simulação numérica: tratamento de problemas de alta complexidade, custo computacional moderado e simplicidade no controle global do erro da solução. Estas características tornam a técnica bastante atrativa no contexto da resolução de problemas inversos, como a interpretação de testes de formação. É necessário investigar a aplicabilidade das técnicas desenvolvidas por outras disciplinas para os problemas específicos da Avaliação de Formações, uma vez que diversas condições dos problemas típicos da área contribuem para que a convergência de soluções baseadas em Transformação Integral seja lenta:

- O termo fonte das equações (poço(s) em produção) é representado por funções espacialmente concentradas (deltas de Dirac);
- O meio poroso, em geral, tem grandes dimensões quando comparado aos tempos de interesse para a solução. Muitos problemas práticos tratam o domínio como sendo semi-infinito³;
- Os tempos de interesse para o fenômeno transiente são extremamente curtos (da ordem de segundos);
- Em geral, o único ponto de interesse para cálculo da pressão é a posição do próprio poço (especialmente próximo à fonte delta de Dirac).

Técnicas de aceleração de convergência serão utilizadas como mitigação para estas questões, incluindo filtragem da equação e reordenamento dos autovalores (COTTA *et al.*, 2018b).

Neste trabalho, a GITT é aplicada pela primeira vez na resolução do problema do *ponto fonte* em um reservatório heterogêneo tridimensional. A solução exata transiente de um problema auxiliar mais simples — o próprio ponto fonte, em um reservatório homogêneo — é utilizada como filtro analítico, de modo a acelerar a taxa de convergência da solução de meio heterogêneo. Ao final, o *Princípio da Superposição* é aplicado ao ponto fonte para a construção de uma solução de fluxo uniforme para o problema do poço vertical com canhoneio parcial, também em meio heterogêneo. As soluções obtidas por Transformação Integral são comparadas a soluções analíticas clássicas e resultados de simulação numérica.

Com relação ao termo *ponto fonte*, vale esclarecer que esta é a nomenclatura aceita na literatura em português da área de Reservatórios como tradução para a

²*Generalized Integral Transform Technique*. Método híbrido (analítico-numérico) desenvolvido como uma evolução da CITT — *Classical Integral Transform Technique*.

³Neste trabalho, o domínio semi-infinito será truncado a um domínio *finito* de tamanho suficientemente grande para os tempos de interesse.

expressão “*point source*”, da literatura em língua inglesa. Trata-se de uma referência à solução apresentada originalmente por KELVIN (1884) para o problema análogo da condução de calor em que o termo fonte é concentrado em um ponto, dado pela expressão $\delta(\mathbf{x}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Esta abstração é tipicamente utilizada em problemas de Reservatório envolvendo o *método de fontes e sumidouros* (RAGHAVAN, 1995) e o *método de Funções de Green*. O conceito aparece ilustrado na Figura 1.3a.

Já o nome *poço vertical com canhoneio parcial* se refere a um poço de petróleo perfurado com trajetória perpendicular ao topo e base do reservatório, e aberto ao fluxo de fluidos do meio poroso em apenas parte da sua extensão. O primeiro modelo matemático descrevendo esta configuração se deve a NISLE (1958), tendo sido aprimorado em diversos trabalhos posteriores (STRELTSOVA-ADAMS, 1979). Matematicamente, o poço (termo fonte do modelo) é representado por uma linha de extensão finita ao longo da direção z , não apresentando dimensão nas direções x e y . O conceito aparece ilustrado na Figura 1.3b.

À luz do Princípio da Superposição, vale observar ainda a relação existente entre estes dois modelos matemáticos:

- O poço vertical com canhoneio parcial é o resultado da soma de infinitos pontos fonte ao longo de uma linha;
- Inversamente, o ponto fonte pode ser considerado o caso limite do canhoneio parcial com extensão tendendo a zero.

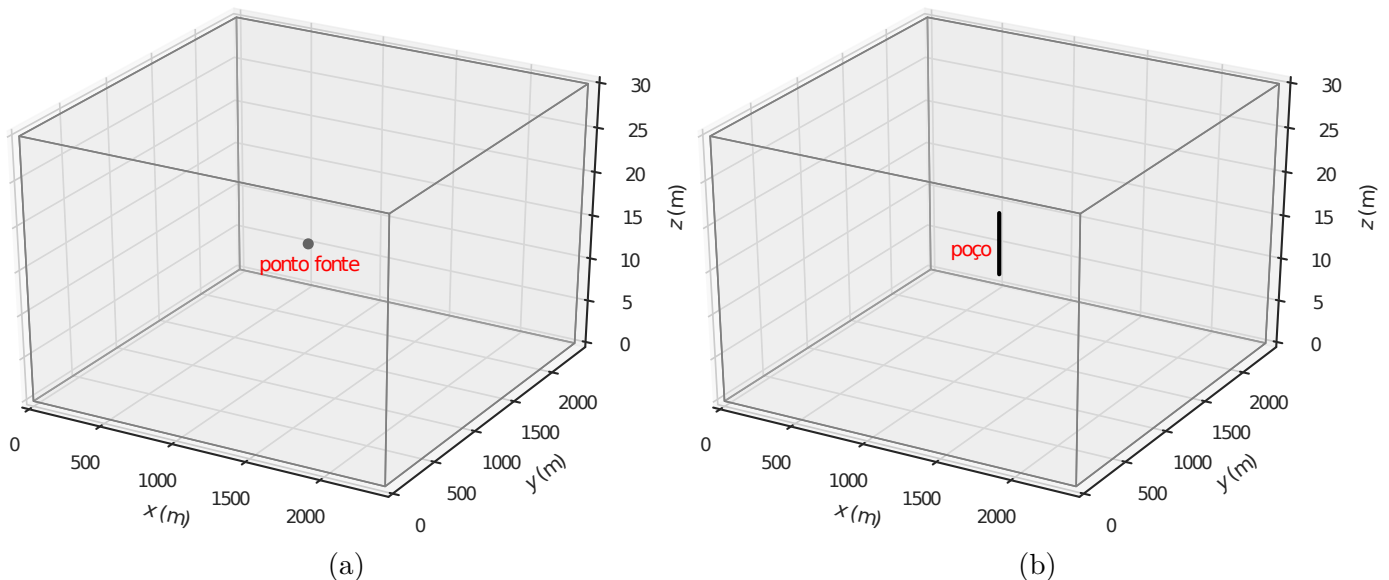


Figura 1.3: Representações esquemáticas do (a) problema do ponto fonte; e (b) problema do poço vertical com canhoneio parcial.

1.2 Objetivos

Este trabalho visa avaliar a utilização da GITT para problemas específicos da área de Reservatórios, envolvendo o cálculo de pressões no meio poroso devido à movimentação de fluidos em sistemas tridimensionais, transientes e heterogêneos. Em particular, o contexto desejado é o da construção de soluções para uso na área de Avaliação de Formações. Os objetivos específicos incluem:

- Demonstrar que a expressão matemática para a solução do ponto fonte por CITT em um meio homogêneo finito se reduz, através de manipulações algébricas, à expressão clássica da literatura de Reservatórios para o mesmo problema resolvido pelo *método das imagens*;
- Resolver o problema do ponto fonte em meio heterogêneo, com campo de permeabilidade variável nas três direções espaciais;
- Construir, a partir do ponto fonte, uma solução de fluxo uniforme para o problema do canhoneio parcial em meio heterogêneo.

1.3 Organização do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta alguns conceitos básicos da área de Reservatórios, necessários à compreensão dos problemas estudados neste trabalho. Uma revisão da literatura é apresentada com a abordagem usual para modelagem de reservatórios heterogêneos no contexto da Avaliação de Formações. Em seguida, é avaliada a utilização histórica da Transformação Integral em problemas específicos da área de Reservatórios.

O Capítulo 3 apresenta as equações de interesse para o problema do ponto fonte em meio heterogêneo, bem como as principais soluções analíticas clássicas para as versões homogêneas do problema. A solução formal para meio heterogêneo por Transformação Integral também é apresentada, assim como as técnicas adotadas para aceleração da sua convergência.

O Capítulo 4 descreve a solução do problema do ponto fonte em meio homogêneo através do uso da CITT. Esta solução é comparada à solução analítica clássica para reservatório homogêneo fechado, construída a partir do método das imagens. Por fim, a Soma de Poisson é utilizada tanto para aceleração da convergência quanto para demonstrar a relação entre a solução clássica e a solução por Transformação Integral.

O Capítulo 5 demonstra os resultados obtidos com a GITT para solução do problema do ponto fonte em meio heterogêneo. Para aceleração da taxa de convergência da expansão em série, a solução do meio homogêneo demonstrada no Capítulo 4 é

utilizada como filtro, bem como um critério duplo de reordenamento dos autovalores que considera tanto a magnitude dos autovalores do problema auxiliar quanto as características do meio heterogêneo. A heterogeneidade do campo de permeabilidade do reservatório é representada por “blocos”: subdomínios adjacentes de permeabilidade constante. Este Capítulo apresenta análises de convergência das soluções por Transformação Integral, e compara estas soluções às formulações analíticas clássicas de meio homogêneo, bem como a resultados numéricos obtidos nos softwares comerciais *Saphir* e *Rubis* (KAPPA, 2013).

O Capítulo 6 busca estender a metodologia para outras geometrias de fonte. O caso específico escolhido foi o de um poço vertical com canhoneio parcial, em reservatório heterogêneo. Esta solução é obtida por aplicação do *Princípio da Superposição* sobre a solução do ponto fonte, reaproveitando assim todo o trabalho analítico já desenvolvido. Os resultados são comparados às soluções analíticas clássicas de meio homogêneo, bem como a soluções numéricas obtidas no simulador *Rubis*.

O Capítulo 7 encerra com as principais conclusões obtidas neste estudo, e sugere pontos de partida para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

A bibliografia existente sobre o comportamento de poços de petróleo em reservatórios contendo algum tipo de heterogeneidade é ampla, datando da década de 1960 com os modelos de dupla porosidade de BARENBLATT *et al.* (1960) e WARREN e ROOT (1963). Uma amostragem rápida, porém representativa, dos estudos disponíveis sobre este tema é considerada na Seção 2.1. Em seguida, na Seção 2.2, são considerados os casos de uso da técnica de Transformação Integral na Engenharia de Reservatório. Finalmente, aspectos importantes da GITT ainda não explorados na área de Reservatórios são brevemente detalhados na Seção 2.4.

2.1 Modelos Utilizados em Testes de Formação em Reservatórios Heterogêneos

A transição do teste de formação, de uma técnica de simples diagnóstico e estimativa de parâmetros de poço para uma verdadeira ferramenta de *caracterização* de reservatórios, ocorreu com a introdução da derivada logarítmica da pressão como parte do processo de interpretação (BOURDET *et al.*, 1983, 1989). Essa ferramenta possibilitou, entre outros, o início do reconhecimento e compreensão do comportamento de reservatórios heterogêneos (GRINGARTEN, 2008), em função da definição clara de assinaturas características dos regimes de fluxo do reservatório. Para explicar os comportamentos observados em testes de formação, modelos matemáticos diversos foram criados ao longo do tempo, enfatizando o efeito que cada tipo de heterogeneidade teria na pressão medida — e na sua derivada — no poço testado. Conforme citado na Seção 1.1, o termo *modelo* é usado neste texto para referenciar uma solução particular da Equação da Difusividade, com um conjunto específico de premissas, tais como:

- hipóteses simplificadoras, tais como linearidade dos diversos termos, influência ou não de efeitos gravitacionais, estado inicial do campo de pressões, etc;

- configurações de poços, resultando em trajetórias diversas, regulares ou irregulares, contínuas ou descontínuas, com diferentes possibilidades de distribuição do fluxo na interface com o reservatório e diferentes possibilidades de condição de contorno interna (em geral, vazão ou pressão prescritas no poço), o que resulta em formas matemáticas distintas para os termos fonte da equação;
- geometria do domínio, que pode ser regular ou irregular, finita ou semi-infinita, com ou sem realimentação nas fronteiras externas, e outros fatores que geralmente influenciam nas condições de contorno da equação;
- valores das propriedades físicas representativas, que podem variar ou não ao longo do domínio, com o tempo, com a pressão, apresentando ou não efeitos de histerese, etc.

A diversidade de modelos existentes é facilmente explicada pelo grande número de combinações possíveis dessas premissas. Cada modelo foi proposto para explicar uma situação física diferente que, em geral, já foi observada durante um teste de formação. Todos tratam do fenômeno físico do escoamento de fluidos em meios porosos, mas cada um descreve um tipo de poço diferente, em um tipo de reservatório diferente, submetido a condições de produção diferentes. Todos estão “corretos” para o caso específico que foram projetados, e todos estão “errados” para os demais casos. Não existe um modelo genérico, único, completo e universal que represente todas as situações possíveis de se observar em um teste de formação. Além disso, convém ressaltar que a listagem exaustiva de todos os modelos já propostos na literatura para a interpretação de testes de formação foge do escopo deste trabalho. O restante desta Seção traz apenas uma breve amostragem que ilustra os principais tipos de heterogeneidades de reservatório já tratados em outros trabalhos, bem como as limitações ou simplificações tipicamente adotadas.

Os modelos de dupla porosidade (BARENBLATT *et al.*, 1960; WARREN e ROOT, 1963) ou dupla permeabilidade (EHLIG-ECONOMIDES e AYOUB, 1986) definem dois meios distintos (matriz e fratura) que encontram-se superpostos e distribuídos ao longo de todo o domínio, e acoplados por uma lei de transferência de massa. As diferenças entre modelos são devidas principalmente às hipóteses adotadas para o fluxo: o modelo de dupla porosidade permite fluxo apenas pelo sistema de fraturas, enquanto o modelo de dupla permeabilidade permite fluxo tanto pelas fraturas quanto pela matriz. Esses modelos são considerados representativos para sistemas moderadamente ou fortemente fraturados, mas não refletem adequadamente sistemas de fraturas discretas (MORTON *et al.*, 2012).

Modelos descrevendo fraturas atravessando poços verticais foram desenvolvidos por GRINGARTEN *et al.* (1974), para o caso de condutividade infinita (quando

comparada à matriz da rocha), e CINCO L. *et al.* (1978) para o caso de condutividade finita. As fraturas, nesses casos, são hidraulicamente induzidas na construção dos poços, e não uma característica natural do reservatório (que é considerado homogêneo pelos autores). Dessa forma, esses modelos têm por objetivo principal o diagnóstico e obtenção de parâmetros relacionados às próprias fraturas, ao invés da caracterização de alguma heterogeneidade do reservatório

O modelo radial composto (SATMAN *et al.*, 1980) define duas regiões radiais concêntricas em torno do poço, com mobilidade¹ e estocabilidade² distintas. Trata-se de um modelo concebido inicialmente para explicar as diferenças de propriedades observadas em uma região limitada em torno do poço após a injeção de vapor à alta temperatura como método de recuperação avançada de petróleo (EOR/IOR). É útil para situações específicas, mas apresenta pouca coerência geológica na maioria dos casos.

O modelo de pinch-out³ (GERARD e HORNE, 1985) foi desenvolvido para representar situações em que poços são perfurados e testados próximos ao final de canais deposicionais, estruturas geológicas que apresentam variação lateral de espessura. O modelo considera o meio homogêneo em suas propriedades, mas permite a estimativa, em casos favoráveis, da distância entre o poço e o final do canal, além do ângulo de pinch-out.

O modelo de *falha parcialmente selante* (YAXLEY, 1987) foi introduzido para permitir a análise de testes de interferência entre dois poços, que podem estar separados por barreiras que restringem parcialmente o fluxo entre as duas regiões. O modelo considera que o reservatório é homogêneo de ambos os lados da barreira semipermeável, e que esta tem extensão infinita, largura desprezível e encontra-se no regime de fluxo pseudopermanente.

O tipo de heterogeneidade mais comum tratado na literatura é a variação vertical e discreta da permeabilidade, através de um sistema multicamadas. BIDAUX *et al.* (1992) adaptaram trabalhos anteriores relacionados a reservatórios multicamadas e demonstraram a possibilidade de descrever sistemas em que: i) cada camada pode apresentar seu próprio modelo de reservatório, diferente do modelo das demais camadas; ii) pode haver interfluxo entre as camadas pelo interior do reservatório; e iii) barreiras impermeáveis ou semipermeáveis são permitidas. Apesar de bastante flexível, vale observar que esta solução não permite heterogeneidades *no interior* de cada camada.

Os modelos de reservatório lineares generalizados (LARSEN, 1993) permitem representar reservatórios compostos pela intersecção de canais lineares. Cada canal

¹Razão k/μ_f

²Produto $\phi c_t L_z$

³Acunhamento lateral da espessura do reservatório

é homogêneo, mas as propriedades podem variar entre canais. Torna-se necessário resolver um sistema de equações diferenciais acopladas para a obtenção das pressões, o que é simplificado pelo autor através da hipótese de fluxo linear (ou seja, desprezando o fluxo radial que ocorre durante o transiente inicial).

DENG e HORNE (1993) não apresentaram nenhum modelo analítico novo. Ao invés disso, demonstraram a aplicabilidade e definiram as condições necessárias para utilização do método de Funções de Green e do Princípio da Reciprocidade em reservatórios heterogêneos. Quase todos os casos práticos de heterogeneidade são válidos para o método, com as notáveis exceções de: i) gradientes de pressão inicial não uniformes; ii) realimentação através da fronteira externa do reservatório; iii) estocagem não desprezível nos poços.

SAGAWA *et al.* (2001) propuseram um modelo de poço horizontal que atravessa compartimentos de um reservatório heterogêneo. Como simplificação, o autor considera que toda a heterogeneidade está contida no plano $x - z$, enquanto o poço tem trajetória ao longo de x . Portanto, o reservatório é considerado homogêneo ao longo de y . O próprio poço é discretizado em segmentos de fluxo uniforme, e a pressão é tomada como média entre segmentos adjacentes de forma a tentar aproximar um modelo de condutividade finita para o poço.

ZHENG (2006) descreve e resume uma série de tentativas desenvolvidas com o intuito de lidar com testes de formação em reservatórios heterogêneos através de simulação numérica. O autor propõe que a interpretação do teste seja feita diretamente em um simulador de fluxo, teoricamente aumentando a coerência entre o resultado do teste e as demais fontes de informação disponíveis (que entraram na construção do modelo de simulação). Hoje, esse tipo de técnica é utilizada nas fases de integração de dados e incorporação de resultados aos modelos de simulação, que são posteriores à fase de diagnóstico do teste de formação. Esta, por sua vez, continua utilizando modelos analíticos sempre que possível.

A técnica de elementos de contorno também já foi utilizada (BIRYUKOV e KUCHUK, 2012; MORTON *et al.*, 2012) para modelar reservatórios 2D com redes de fraturas verticais discretas, através da soma de funções analíticas e sem a necessidade de uma malha densa de discretização do domínio. O modelo criado revela aspectos surpreendentes da resposta de pressão devido à rede de fraturas discretas, que difere significativamente dos modelos de dupla porosidade de WARREN e ROOT (1963) mais conhecidos.

O foco de trabalhos mais recentes está no comportamento de poços horizontais multifaturados (GUO *et al.*, 2016; HE *et al.*, 2018; PRATS e RAGHAVAN, 2013; YAO *et al.*, 2016), projeto relevante apenas para reservatórios não-convencionais

como areias de baixíssima permeabilidade⁴, xisto⁵ ou CBM⁶. Assim como em modelos anteriores de poços fraturados (CINCO L. *et al.*, 1978; GRINGARTEN *et al.*, 1974), as fraturas presentes nestes modelos são hidraulicamente induzidas e diretamente conectadas ao poço, não fazendo parte da resposta natural (possivelmente heterogênea) do reservatório.

Como muitos modelos da área de Reservatórios foram desenvolvidos para meios infinitos ou semi-infinitos, é comum a aplicação do *método das imagens* (LARSEN, 1981) para definir limites finitos em situações de interesse. Trata-se de uma técnica que permite definir barreiras ao fluxo através da superposição da resposta do poço real com a de (possivelmente infinitos) poços virtuais (ou *imagens*) posicionados fora do domínio real. No limite, se utilizado para as três direções ortogonais, o método das imagens constrói modelos de reservatório finitos a partir de modelos de reservatório infinitos ou semi-infinitos. A Figura 2.1 ilustra este conceito para o caso de um poço vertical ao lado de uma barreira de extensão infinita — o chamado *modelo de falha simples*. As linhas representam o raio da região afetada pela produção do poço real (linhas vermelhas) e sua imagem virtual (linhas azuis). A resposta final deste modelo será a soma (superposição) das respostas de ambos os poços.

Vale ressaltar que a Transformação Integral, da forma como é utilizada neste trabalho, obtém diretamente a solução para um domínio finito em todas as direções. Dessa forma, esta técnica dispensa a utilização do método das imagens.

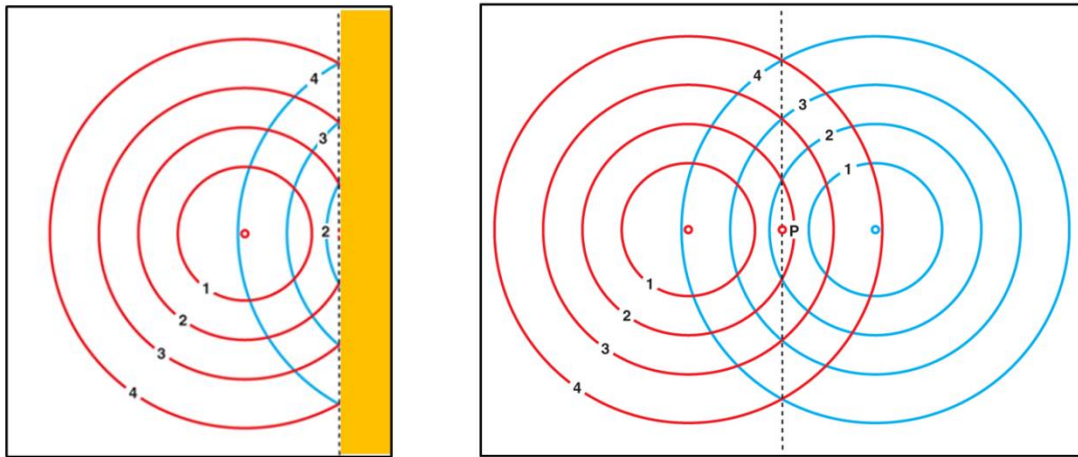


Figura 2.1: Desenho esquemático com a visão do plano $x - y$ de um poço vertical adjacente a uma barreira de extensão infinita (modelo de falha simples). Fonte: (HOUZÉ *et al.*, 2018)

Em geral, as técnicas clássicas da literatura de Reservatórios só permitem a obtenção de modelos que apresentem uma ou mais das seguintes características:

⁴ *tight sand*

⁵ *shale gas* ou *shale oil*

⁶ *coalbed methane*

1. Meio homogêneo;
2. Heterogeneidade distribuída de forma regular ao longo de todo o domínio;
3. Modelo composto regular (regiões radiais concêntricas, planos lineares adjacentes, etc);
4. Fluxo 1D (em geral radial) ou 2D;
5. Parte dos regimes de fluxo são desprezados.

A GITT não possui estas limitações: no caso da Equação da Difusividade, a solução obtida pode descrever todos os regimes de fluxo de um problema 3D, com heterogeneidades distribuídas de forma arbitrária e irregular ao longo do domínio. O desafio na aplicação desta metodologia para um problema específico está mais relacionado com o custo computacional de cálculo da solução, que pode se tornar proibitivo para a precisão desejada se certos cuidados e técnicas não forem empregados. Na Seção 2.3 serão listados de forma mais detalhada alguns avanços recentes no uso da GITT em áreas não relacionadas a Reservatórios, o que ajuda a ilustrar de forma mais abrangente a capacidade desta técnica para a resolução de problemas complexos usualmente abordados apenas através de métodos numéricos. E, principalmente, como reduzir o custo computacional de cálculo da solução para diversos tipos de problemas.

Conforme descrito no Capítulo 1, a técnica será utilizada neste trabalho para a obtenção da solução do ponto fonte em um reservatório heterogêneo tridimensional. Em seguida, através do Princípio da Superposição, será construída a solução de fluxo uniforme para um poço vertical com canhoneio parcial, também em um reservatório heterogêneo. Este procedimento é genérico, podendo ser estendido de forma análoga para outras geometrias de poços.

2.2 Histórico de Uso da Transformação Integral na Engenharia de Reservatórios

O método de resolução de equações diferenciais conhecido como Separação de Variáveis é muito utilizado em diversas áreas da engenharia. Não é o caso da área de Reservatórios, principalmente devido à presença típica de termos fonte não separáveis nas equações diferenciais transientes, característica que inviabiliza a aplicação da separação de variáveis (ÖZİŞIK, 1993). A técnica usual de resolução de problemas na área de Reservatórios é a Transformada de Laplace, com inversão numérica pelo algoritmo de Stehfest (STEHFEST, 1970), ou então por meio de Funções de

Green. Em todos os casos, o problema transformado continua sendo uma equação diferencial parcial, nos casos multidimensionais transientes.

O desenvolvimento da Transformada Integral Clássica (CITT) na área de condução de calor permitiu uma abordagem distinta para os problemas difusivos ditos *transformáveis*, removendo todas as derivadas espaciais da formulação e reduzindo o problema a uma equação diferencial ordinária na variável de evolução (ÖZİŞİK, 1993) — em geral, a variável temporal para problemas transientes, ou uma das direções espaciais para problemas em regime permanente. Apesar do aumento considerável da quantidade de problemas que podem ser abordados com essa técnica, outros — os ditos *não transformáveis* — permaneciam sem solução analítica. Diversas situações podem tornar um problema não transformável: problemas difusivo-convectivos, não-linearidades ou dependências temporais nos coeficientes da equação diferencial ou das condições de contorno, entre outros (COTTA *et al.*, 2018b).

O surgimento da abordagem híbrida numérica-analítica denominada Transformada Integral Generalizada (GITT) estendeu a metodologia de solução para uma ampla classe de problemas que incluem coeficientes da equação e das condições de contorno variáveis, contornos móveis, geometrias irregulares não transformáveis, problemas acoplados de diferentes naturezas, problemas de difusão e convecção-difusão não lineares, entre outros (COTTA e MIKHAILOV, 1997). Segundo essa metodologia, obtém-se um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas para o potencial transformado. Esse sistema pode então ser truncado a uma ordem suficientemente grande e resolvido numericamente, permitindo em seguida a reconstrução do campo potencial original através de uma fórmula de inversão. Essa técnica ainda é pouco conhecida na Engenharia de Reservatórios, apesar do grande potencial para a resolução de problemas de interesse da área e da grande necessidade de ferramentas analíticas para a solução de alguns tipos de problemas.

O trabalho mais antigo na área de Reservatórios usando Transformações Integrais foi apresentado por HOVANESSIAN (1961). O autor propôs a utilização da Transformada de Fourier para a solução de dois problemas particulares da equação da difusividade: reservatório retangular com fronteiras seladas; e reservatório retangular com fronteiras mantidas à pressão constante. O meio e o fluido foram considerados homogêneos e isotrópicos. Não foram apresentadas análises de convergência das soluções, que apresentam a forma de séries infinitas. Vale notar que HOVANESSIAN em momento algum utilizou a nomenclatura *transformação integral*, mas a solução proposta é idêntica à obtida no sistema de coordenadas cartesiano pela aplicação da CITT.

ALMEIDA (1994) e ALMEIDA e COTTA (1995, 1996) aplicaram pela primeira vez a GITT (COTTA, 1993) a um problema da área de Reservatórios: o escoamento

bidimensional de traçadores em um arranjo *five spot*⁷. O campo de pressões e velocidades de fluxo (Equação da Difusividade) foi resolvido pela aplicação direta da CITT. Em seguida, o campo de concentrações do traçador (Equação de Burger) foi resolvido pela GITT, devido à presença de um termo convectivo que torna o problema não-transformável para a utilização direta da CITT. A convergência da solução proposta foi avaliada, e os resultados foram comparados a soluções analíticas alternativas e dados experimentais de outros autores. A necessidade de resolver um problema com caráter fortemente convectivo através de uma expansão em uma base puramente difusiva (problema de autovalores) tornou elevado o custo computacional para convergência da solução.

RAHMAN e BENTSEN (2000) apresentaram diversas soluções da Equação da Difusividade para problemas específicos tridimensionais em coordenadas cartesianas, utilizando como técnica de solução a Transformação Integral. Não houve demonstração formal da técnica, mas apenas citações aos trabalhos de ÖZİŞİK (1993), COTTA (1993), MIKHAILOV e ÖZİŞİK (1994) e ALMEIDA e COTTA (1995). Trabalhos posteriores dos mesmos autores apresentaram soluções equivalentes em coordenadas cilíndricas (RAHMAN e BENTSEN, 2001, 2003). Trata-se de um catálogo de soluções: não foram apresentados exemplos numéricos ou análises de convergência.

COUTO *et al.* (2011) apresentaram uma solução analítica generalizada para a Equação da Difusividade com coeficientes variáveis, seguindo a metodologia desenvolvida por NAVEIRA-COTTA *et al.* (2009) (solução do problema de autovalor com coeficientes variáveis através de nova aplicação da GITT, gerando um segundo problema de autovalor auxiliar, mais simples e com coeficientes constantes). Trata-se do primeiro trabalho na área de Reservatórios a abordar a solução do escoamento em um meio heterogêneo por Transformação Integral. Entretanto, apesar da solução formal em meio heterogêneo, apenas exemplos numéricos mais simples envolvendo meios homogêneos e isotrópicos foram apresentados. Também não foram apresentadas análises de convergência das soluções.

DIAS *et al.* (2012) utilizaram a GITT para a análise do deslocamento de óleo por água em meios porosos através de duas formulações teóricas distintas: a teoria de Buckley-Leverett e a teoria de misturas. Os resultados da GITT foram comparados a uma simulação numérica usando um software do tipo CFD. Não foram apresentadas análises de convergência das soluções.

MARSILI (2013) apresentou a solução generalizada da Equação da Difusividade multidimensional em meios homogêneos e isotrópicos em coordenadas cartesianas por meio da CITT. A solução foi aplicada a alguns casos específicos uni e bidimensionais, incluindo diferentes condições de contorno e múltiplos poços (arranjo *five*

⁷Padrão de malha de drenagem em que quatro poços injetores são posicionados nos cantos de um quadrado, com um poço produtor no centro.

spot). Foram apresentadas análises de convergência da solução.

DEUCHER (2014) propôs uma solução para o balanço de energia no meio poroso por meio da GITT, deixando de lado a abordagem isotérmica adotada na maioria dos trabalhos da área. Após a obtenção da solução formal generalizada, estudos de caso foram realizados em problemas uni e bidimensionais envolvendo reservatórios adjacentes mas hidraulicamente isolados (apenas fluxo de calor entre eles). Foram apresentadas análises de convergência destas soluções e comparações com outros resultados da literatura.

DEUCHER *et al.* (2016) partiram da solução formal de COUTO *et al.* (2011) e avaliaram o problema específico de um escoamento unidimensional em reservatório heterogêneo, considerando variação lateral de permeabilidade em coordenadas cartesianas ($k = k(x)$) e cilíndricas ($k = k(r)$). Foram avaliadas soluções para variação abrupta de permeabilidade e também para variação suave ao longo do reservatório. Além de análises de convergência das soluções, foi apresentada uma comparação dos resultados numéricos com um simulador comercial de reservatórios. Para aceleração da convergência das soluções, foi utilizada a técnica do Balanço Integral (LEIROZ e COTTA, 1990; SCOFANO NETO *et al.*, 1990).

O problema abordado por DA SILVA (2017) não é diretamente da área de Reservatórios. Porém, é um problema de escoamento em meios porosos: ele utilizou a GITT para obter uma solução tridimensional transiente para o problema do rebaixamento de aquíferos sujeitos a bombeamento. Trata-se de um problema anisotrópico, porém homogêneo. Sua complexidade vem do fato de que: i) o termo fonte, relacionado à vazão de bombeamento do sistema, é variável no tempo; ii) a condição de contorno externa apresenta um termo transiente, relacionado ao fluxo variável de retirada de água do aquífero. O autor utilizou um filtro pseudoestacionário para acelerar a convergência da solução, o que foi verificado através de exemplos. A solução apresentada foi validada por comparação com resultados que constam na literatura da área.

2.3 Avanços Recentes no Uso da GITT

Em problemas envolvendo geometrias complexas e meios heterogêneos, propriedades espaciais variáveis em múltiplas escalas, efeitos convectivos ou condições de contorno não lineares, o custo computacional da GITT pode se tornar elevado para obtenção da precisão desejada, se certos cuidados e técnicas não forem empregados. Esta Seção descreve alguns avanços importantes na aplicação desta técnica em trabalhos fora da área de Reservatórios, mas que também podem ser utilizadas em problemas da área com o objetivo de reduzir seu custo computacional.

Conforme será descrito na Seção 3.3, o procedimento de solução por GITT apre-

senda duas etapas que envolvem, potencialmente, aproximações (truncamento de sistemas de equações infinitos): i) o cálculo dos potenciais transformados; e ii) a solução do problema de autovalor. Cada etapa aborda parte das variações espaciais ou temporais do problema, e a combinação dos resultados gerados por cada uma delas, através da fórmula de inversão, reconstrói a solução para os potenciais do problema original.

Os problemas de autovalor mais simples, escolhidos com o intuito de possuírem solução analítica, contêm pouca informação a respeito dos coeficientes do problema original. Por consequência, a etapa de cálculo dos potenciais transformados se torna consideravelmente mais complexa — e de maior custo computacional. Inversamente, se o problema de autovalor incorporar uma maior quantidade de informações a respeito dos coeficientes do problema original, o cálculo dos potenciais transformados pode se tornar mais simples e de menor custo computacional. Essa troca geralmente é vantajosa, pois o problema de autovalor envolve, no máximo, um sistema de equações algébrico, enquanto o cálculo dos potenciais transformados pode envolver um sistema de equações diferenciais. Os trabalhos descritos nesta Seção envolvem, desta forma, métodos para viabilizar esta incorporação de informação adicional ao problema de autovalor.

Problemas envolvendo múltiplos subdomínios de propriedades distintas são classicamente abordados como um problema composto: sistemas de equações são descritos para o potencial de interesse em cada subdomínio, e condições de contorno são usadas para o acoplamento das diferentes regiões. A GITT permite a utilização de uma abordagem dita de *domínio único*: um único sistema de equações é escrito para todo o domínio do problema, e as variações entre os subdomínios são incorporadas através de coeficientes espacialmente variáveis. Esta abordagem foi inicialmente proposta para problemas de transferência de calor, permitindo que regiões sólidas e fluidas fossem tratadas por um único sistema de equações com variações espaciais abruptas de propriedades termofísicas (COTTA *et al.*, 2018a; KNUPP *et al.*, 2015). Esta é a abordagem utilizada neste trabalho, para tratamento do meio heterogêneo.

Problemas envolvendo múltiplas escalas espaciais ou variações espaciais abruptas de propriedades podem requerer ordens de truncamento muito elevadas, o que se traduz em alto custo computacional. Isso ocorre principalmente porque o problema de autovalor auxiliar — que precisa ter forma suficientemente simples para apresentar solução analítica — em geral, não é capaz de incorporar informação sobre as variações espaciais abruptas. Nessas situações, a aplicação do *Balanço Integral* (COTTA *et al.*, 2016b, 2018a) pode ser particularmente útil. Através de uma integração dupla do problema de autovalor sobre o domínio espacial, obtém-se expressões alternativas para as autofunções, que possuem melhores características de convergência que as expressões usuais. A utilização desta técnica é citada no Capítulo 7, como sugestão

para trabalhos futuros.

Tipicamente, o problema de autovalor escolhido para uso com a GITT é de natureza puramente difusiva. No caso de problemas envolvendo efeitos convectivos relevantes, estes efeitos acabam sendo tratados apenas no cálculo dos potenciais transformados. Uma abordagem alternativa consiste em incluir os termos convectivos diretamente no problema de autovalor. Esse procedimento é viabilizado através da utilização de uma transformação de variáveis do problema original, que combina os termos difusivos e convectivos originais em um novo termo difusivo generalizado contendo um coeficiente espacialmente variável (COTTA *et al.*, 2016a, 2017, 2018a). Como o novo problema de autovalor possui informações relevantes sobre os efeitos convectivos do problema original, o resultado final é uma aceleração de convergência da solução. O problema de interesse deste trabalho é puramente difusivo, mas esse tipo de técnica poderia ser utilizada na área de Reservatórios para estudos envolvendo a dispersão de traçadores no meio poroso (ALMEIDA e COTTA, 1995).

Outro desenvolvimento recente com relação à técnica da GITT diz respeito a problemas não lineares. Usualmente, o procedimento da GITT leva uma versão linearizada dos coeficientes originais para o problema de autovalor. As não linearidades do problema original são, posteriormente, tratadas no cálculo dos potenciais transformados. No intuito de melhorar as taxas de convergência da solução, os coeficientes não lineares também podem ser incorporados ao problema de autovalor (COTTA *et al.*, 2018a), como já demonstrado para o caso particular de não linearidades presentes nas condições de contorno do problema (COTTA *et al.*, 2016d). Nesse caso, os autovalores e as autofunções, que normalmente são funções apenas das variáveis espaciais, tornam-se funções também da variável temporal⁸. Dessa forma, torna-se necessária a resolução numérica simultânea do sistema de equações diferenciais ordinárias para os potenciais transformados e do problema de autovalor algébrico não linear — perfeitamente viável, para diversas rotinas computacionais bem consolidadas. Na área de Reservatórios, exemplos de problemas não lineares incluem escoamento não isotérmico, escoamento multifásico de fluidos compressíveis, e reservatórios suscetíveis a efeitos geomecânicos (propriedades físicas variando com a pressão).

⁸Ou então da variável de evolução do problema, caso este seja em regime permanente.

2.4 Aspectos da Transformação Integral Ainda Não Explorados na Engenharia de Reservatórios

Conforme discutido no Capítulo 1, os problemas típicos de Avaliação de Formações apresentam algumas características específicas que dificultam a convergência numérica das soluções por Transformação Integral:

- Termo fonte da equação é uma função espacialmente concentrada (delta de Dirac);
- Domínio de grandes dimensões quando comparado aos tempos de interesse para a solução;
- Tempos de interesse extremamente curtos para o fenômeno transiente (da ordem de segundos);
- Em geral, o único ponto de interesse para cálculo da pressão é a posição do próprio poço (especialmente próximo à fonte delta de Dirac).

Por estas razões, torna-se essencial o uso de estratégias adequadas que aumentem a taxa de convergência da solução.

Um primeiro aspecto relevante é a aplicação de filtros que reduzam a importância dos termos fonte da equação e condições de contorno, resultando em aumento de desempenho computacional (COTTA e MIKHAILOV, 1997). Com exceção de DA SILVA (2017), os demais trabalhos citados na Seção 2.2 utilizam filtros simples, com a intenção apenas de homogeneizar as condições de contorno, e sem se preocupar com a redução de importância do termo fonte da própria equação diferencial. O resultado disso é que a solução obtida tende a apresentar taxas de convergência distintas ao longo do domínio, e particularmente baixas nas proximidades dos termos fonte. Na área de Reservatórios, essas posições correspondem aos poços, que em geral são as regiões de *maior* interesse. A aplicação de um filtro mais geral (COTTA *et al.*, 2013a,c), visando reduzir a importância dos termos fonte da equação, poderia ser melhor explorada em aplicações de Reservatório.

Diversos trabalhos, como DEUCHER (2014), tratam a questão de reservatórios adjacentes como um problema de domínios conjugados. Isso significa que cada região distinta possui seu próprio sistema de equações e suas próprias condições de contorno, algumas das quais representam as interfaces entre cada região. Como a formulação da GITT permite o uso de coeficientes com variações espaciais arbitrárias, fato já utilizado em COUTO *et al.* (2011), torna-se viável a formulação do problema como um domínio único (COTTA *et al.*, 2016c), em que as condições de

contorno de interface tornam-se variações abruptas dos coeficientes espaciais das equações originais.

Apesar de haver trabalhos na área de Reservatórios detalhando a solução formal por GITT de problemas com coeficientes variáveis (COUTO *et al.*, 2011; DEUCHER *et al.*, 2016), nenhum exemplo numérico já foi apresentado de um problema tridimensional transiente em meio heterogêneo. Como a Equação da Difusividade é análoga à Equação do Calor, essa questão é análoga ao trabalho apresentado por ALMEIDA (2017) para o comportamento térmico de materiais heterogêneos tridimensionais. Dentre os exemplos numéricos apresentados, apenas um possuía termo fonte na equação diferencial, e justamente este exemplo apresentou grande dificuldade de convergência da solução nas proximidades da fonte. Conforme já mencionado anteriormente, em problemas de Reservatório, é justamente a região das fontes (poços) que apresenta maior interesse.

Como já citado no Capítulo 1, o uso de um filtro analítico na forma da própria solução do ponto fonte em meio *homogêneo* se mostra essencial para aumento da taxa de convergência da expansão em série e redução do custo computacional da solução de meio *heterogêneo*. A solução por GITT do problema do ponto fonte para meio heterogêneo, apresentada pela primeira vez neste trabalho, é um passo importante para a aplicação da Transformação Integral em outros problemas de Avaliação de Formações. O Capítulo 4 demonstra a equivalência desta formulação com a obtida pelo clássico *método das imagens*, para o caso de meio homogêneo; o Capítulo 5 verifica a solução proposta para o ponto fonte em meio heterogêneo por comparação com resultados de simulação numérica; finalmente, o Capítulo 6 mostra como construir soluções para outras geometrias de fonte usando o ponto fonte deste trabalho como base, por aplicação do *Princípio da Superposição*.

Capítulo 3

Modelagem Matemática e Metodologia de Solução

O problema utilizado neste estudo de uso da técnica da Transformação Integral é o *ponto fonte* em um reservatório heterogêneo, anisotrópico, finito, retangular e fechado. Trata-se de uma solução fundamental, que pode ser utilizada como base para a construção de soluções de fluxo uniforme envolvendo outras geometrias de fonte, a partir do *Princípio da Superposição* (OZKAN e RAGHAVAN, 1991a):

$$p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \frac{1}{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{S}} p_{D_{pf}}(\mathbf{x}_D, t_D) ds \quad (3.1)$$

onde

$p_{D_{pf}}(\mathbf{x}_D, t_D) \equiv$ solução do ponto fonte

$\mathcal{S} \equiv$ comprimento, área ou volume da fonte

Estas soluções de fluxo uniforme, por sua vez, podem ser utilizadas para a construção de soluções de condutividade infinita a partir de procedimentos tradicionais (GRINGARTEN e RAMEY, 1973) ou então métodos propostos mais recentes (BIRYUKOV e KUCHUK, 2012).

A formulação do problema, juntamente com as hipóteses simplificadoras adotadas, será apresentado na Seção 3.1. A Seção 3.2 relembra as principais soluções clássicas que serão utilizadas no restante deste texto. Em seguida, a Seção 3.3 descreve o procedimento formal para aplicação da GITT em uma versão generalizada do problema de interesse descrito na Seção 3.1. Por fim, a Seção 3.4 discute técnicas importantes para acelerar a convergência das soluções, reduzindo seu custo computacional.

3.1 Formulação e Adimensionalização do Problema

A Equação da Difusividade, juntamente com suas condições iniciais e de contorno, para o problema do ponto fonte em um reservatório anisotrópico, heterogêneo e sem fluxo nas fronteiras externas, sob as hipóteses de

- meio heterogêneo e anisotrópico;
- efeito gravitacional desprezível;
- fluxo monofásico e isotérmico;
- escoamento não reativo;
- fluido de baixa compressibilidade;
- propriedades físicas do meio e do fluido independentes da pressão;
- validade da Lei de Darcy;

pode ser escrita como

$$\nabla \cdot (\underline{K}(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t)) - q\mu_f \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_w) = \phi\mu_f c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.2a)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_i \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.2b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \nabla p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (3.2c)$$

onde

$$\underline{K}(\mathbf{x}) \equiv \text{tensor de permeabilidade} \quad (3.2d)$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_w) \equiv \delta(x - x_w)\delta(y - y_w)\delta(z - z_w) \quad (3.2e)$$

$$V \equiv \text{todo o espaço do domínio} \quad (3.2f)$$

$$S \equiv \text{superfície externa do domínio} \quad (3.2g)$$

$$\mathbf{n} \equiv \text{vetor normal à superfície } S, \text{ orientado para fora} \quad (3.2h)$$

No caso mais geral de meio anisotrópico, o tensor $\underline{K}(\mathbf{x})$ pode possuir 9 componentes não nulos. Esta consideração é incomum na área de Reservatórios que, em geral, considera o meio poroso *ortotrópico*, reduzindo o tensor $\underline{K}(\mathbf{x})$ para apenas três componentes não nulos. A título de simplificação, neste trabalho será adotada ainda a premissa de que as razões de anisotropia do meio são idênticas ao longo de todo o

domínio. Dessa forma, o tensor de permeabilidade se reduz a

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{K}}(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} k_{xx}(\mathbf{x}) & k_{xy}(\mathbf{x}) & k_{xz}(\mathbf{x}) \\ k_{yx}(\mathbf{x}) & k_{yy}(\mathbf{x}) & k_{yz}(\mathbf{x}) \\ k_{zx}(\mathbf{x}) & k_{zy}(\mathbf{x}) & k_{zz}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_{xx}(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\ 0 & k_{yy}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & 0 & k_{zz}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{pmatrix} k_D(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Para adimensionalização deste problema, serão utilizados os seguintes grupamentos adimensionais, escolhidos de forma a transformar o meio anisotrópico em um meio isotrópico equivalente:

$$\ell_D = \frac{\ell}{L} \sqrt{\frac{k}{k_\ell}} \tag{3.4a}$$

$$t_D = \frac{kt}{\phi\mu_f c_t L^2} \tag{3.4b}$$

$$p_D(\mathbf{x}, t_D) = \frac{kL}{q\mu_f} \Delta p(\mathbf{x}, t) \tag{3.4c}$$

$$\delta_D(\mathbf{x}_D) = L^3 \delta(\mathbf{x}) \tag{3.4d}$$

onde

$$\ell \in \{x, y, z\} \tag{3.4e}$$

$$k = \sqrt[3]{k_x k_y k_z} \tag{3.4f}$$

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = p_i - p(\mathbf{x}, t) \tag{3.4g}$$

$$L \equiv \text{comprimento de referência} \tag{3.4h}$$

Substituindo a Equação (3.3) e as Equações (3.4a–d) nas Equações (3.2a–c), chega-se à seguinte forma adimensional para o problema do ponto fonte que será tratado neste trabalho:

$$\nabla \cdot [k_D(\mathbf{x}_D) \nabla p_D(\mathbf{x}_D, t_D)] + \delta_D(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_{wD}) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad \mathbf{x}_D \in V \tag{3.5a}$$

$$p_D(\mathbf{x}_D, 0) = 0 \quad \mathbf{x}_D \in V \tag{3.5b}$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial \mathbf{n}} = \nabla p_D(\mathbf{x}_D, t_D) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \tag{3.5c}$$

3.2 Soluções Analíticas Clássicas

Esta Seção não tem por objetivo demonstrar a resolução do ponto fonte através de abordagens clássicas da literatura. Ao invés disso, o objetivo é simplesmente lembrar a forma das principais soluções que serão necessárias no restante do trabalho, como filtro¹ ou como referência para as aplicações numéricas², e homogeneizar eventuais diferenças de notação entre os trabalhos encontrados na literatura.

Todas as soluções para a pressão adimensional p_D serão acompanhadas da sua derivada temporal $\partial p_D / \partial t_D$, devido à grande importância dessa função para a caracterização de reservatórios³, conforme já citado na Seção 2.1.

3.2.1 Ponto Fonte em Meio Homogêneo Infinito

A solução do ponto fonte foi apresentada inicialmente por KELVIN (1884) para problemas de condução de calor, tendo sido extensivamente utilizada por CARSLAW e JAEGER (1959). Na área de Reservatórios, foi utilizada por GRINGARTEN e RAMEY (1973) para construção de uma biblioteca de soluções analíticas, e posteriormente por OZKAN e RAGHAVAN (1991a) para o mesmo propósito no campo de Laplace.

Usando a mesma notação e grupamentos adicionais definidos na Seção 3.1, este problema pode ser descrito por

$$\nabla^2 p_D(\mathbf{x}_D, t_D) + \delta_D(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_{wD}) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.6a)$$

$$p_D(\mathbf{x}_D, 0) = 0 \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.6b)$$

$$\lim_{\mathbf{x}_D \rightarrow \infty} p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = 0 \quad (3.6c)$$

cuja solução é dada por

$$p_D(R_D, t_D) = \frac{1}{4\pi R_D} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_D}{2\sqrt{t_D}}\right) \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{(4\pi t_D)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R_D^2}{4t_D}\right) \quad (3.7b)$$

onde

$$R_D = \sqrt{(x_D - x_{wD})^2 + (y_D - y_{wD})^2 + (z_D - z_{wD})^2} \quad (3.7c)$$

Por comparação entre as Equações (3.5a–c) e (3.6a–c), entende-se que estas expressões seriam um caso limite das Equações (3.5a–c) para o caso em que o tama-

¹Conforme será descrito nas Seções 3.4.2 e 5.1.1.

²Apresentadas nas Seções 5.2 e 5.3.

³Na forma da derivada logarítmica $\partial p_D / \partial \ln t_D = t_D \partial p_D / \partial t_D$.

ndo do domínio V tende ao infinito em todas as direções, para o caso particular de $k_D(\mathbf{x}_D) = 1$ (meio homogêneo).

3.2.2 Ponto Fonte em Meio Homogêneo Finito, Retangular e Sem Fluxo no Contorno

O método das imagens (LARSEN, 1981) pode ser empregado na solução da Seção 3.2.1 para recriar o efeito de um meio finito nas três direções ortogonais x , y e z , efetivamente descrevendo um meio finito retangular, através da soma de infinitas fontes virtuais a distâncias definidas da fonte real. Para todos os efeitos, trata-se da solução do problema

$$\nabla^2 p_D(\mathbf{x}_D, t_D) + \delta_D(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_{wD}) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.8a)$$

$$p_D(\mathbf{x}_D, 0) = 0 \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.8b)$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial \mathbf{n}} = \nabla p_D(\mathbf{x}_D, t_D) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (3.8c)$$

que pode ser escrita como (OZKAN e RAGHAVAN, 1991b)

$$p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 S_{ik,jm,ln}(\mathbf{x}_D, t_D) \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{l=1}^2 \frac{\partial}{\partial t_D} [S_{ik,jm,ln}] \quad (3.9b)$$

onde

$$S_{ik,jm,ln}(\mathbf{x}_D, t_D) = \frac{1}{4\pi R_{Dik,jm,ln}} \operatorname{erfc} \left(\frac{R_{Dik,jm,ln}}{2\sqrt{t_D}} \right) \quad (3.9c)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_D} [S_{ik,jm,ln}] = \frac{1}{(4\pi t_D)^{3/2}} \exp \left(-\frac{R_{Dik,jm,ln}^2}{4t_D} \right) \quad (3.9d)$$

$$R_{Dik,jm,ln} = \sqrt{(x_{Di} - 2kL_{xD})^2 + (y_{Dj} - 2mL_{yD})^2 + (z_{Dl} - 2nL_{zD})^2} \quad (3.9e)$$

$$\ell_{Dq} = \ell_D + (-1)^q \ell_{wD} \quad \ell \in \{x, y, z\}, q \in \{i, j, l\} \quad (3.9f)$$

Por comparação entre as Equações (3.5a–c) e (3.8a–c), nota-se que esta também deve ser a solução do problema descrito na Seção 3.1, para o caso particular $k_D(\mathbf{x}_D) = 1$ (portanto, meio homogêneo).

Pode-se aplicar um critério de reordenamento para a realização dos somatórios múltiplos das Equações (3.9a) e (3.9b), selecionando prioritariamente os termos que mais contribuem para o resultado final. Trata-se do mesmo procedimento utilizado

para soluções obtidas por Transformação Integral⁴. Nesse caso, as Equações (3.9a) e (3.9b) podem ser reescritas como

$$p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi R_{Di}(\mathbf{x}_D)} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_{Di}(\mathbf{x}_D)}{2\sqrt{t_D}}\right) \quad (3.10a)$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(4\pi t_D)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R_{Di}^2(\mathbf{x}_D)}{4t_D}\right) \quad (3.10b)$$

onde cada índice i deste somatório único corresponde a uma combinação dos índices ik, jm, ln originais. O critério de ordenamento mais apropriado, nesse caso, é aquele que prioriza as imagens mais próximas da fonte e, portanto, minimizam o valor da distância $R_{Di}(\mathbf{x}_D)$.

Enquanto a forma encontrada na literatura de Reservatórios é a das Equações (3.9a) e (3.9b), a implementação adotada neste trabalho priorizou a forma das Equações (3.10a) e (3.10b), em função do ganho de desempenho computacional.

3.3 Solução Formal Generalizada por Transformação Integral

Nesta Seção, uma versão generalizada do problema descrito na Seção 3.1 será resolvida por GITT. Esta solução será adotada como base para as discussões apresentadas nos Capítulos 4 a 6.

Seja a seguinte versão generalizada das Equações (3.5a–c):

$$w(\mathbf{x}_D) \frac{\partial p_D}{\partial t_D} + \mathcal{L}\{p_D(\mathbf{x}_D, t_D)\} = g(\mathbf{x}_D, t_D, p_D) \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.11a)$$

$$\mathcal{B}\{p_D(\mathbf{x}_D, t_D)\} = \varphi(\mathbf{x}_D, t_D, p_D) \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (3.11b)$$

$$p_D(\mathbf{x}_D, 0) = f(\mathbf{x}_D) \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.11c)$$

onde os operadores \mathcal{L} e \mathcal{B} são definidos por

$$\mathcal{L} \equiv -\nabla \cdot [k_D(\mathbf{x}_D) \nabla(\cdot)] + d(\mathbf{x}_D)(\cdot) \quad (3.11d)$$

$$\mathcal{B} \equiv \alpha(\mathbf{x}_D)(\cdot) + \beta(\mathbf{x}_D) k_D(\mathbf{x}_D) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{n}} \quad (3.11e)$$

A solução das Equações (3.11a–e) por GITT passa pelos seguintes passos:

1. Definir um problema de autovalor e, a partir dele, estabelecer um par de fórmulas para transformação e inversão do problema original;

⁴Este procedimento será detalhado na Seção 3.4.1.

2. Transformar a equação diferencial parcial original e resolver o sistema para obter os potenciais transformados;
3. Resolver o problema de autovalor escolhido;
4. Reconstruir os potenciais originais através da fórmula de inversão.

Estes passos serão detalhados no restante dessa Seção para obtenção da solução formal do problema generalizado, conforme demonstração em COTTA *et al.* (2018b). De posse desta solução, o problema original poderá ser resolvido através da seguinte correspondência de termos entre as Equações (3.5a–c) e as Equações (3.11a–e):

$$w(\mathbf{x}) = 1 \quad (3.12a)$$

$$g(\mathbf{x}_D, t_D, p_D) = \delta_D(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_{wD}) \quad (3.12b)$$

$$\varphi(\mathbf{x}_D, t_D, p_D) = 0 \quad (3.12c)$$

$$f(\mathbf{x}_D) = 0 \quad (3.12d)$$

$$d(\mathbf{x}_D) = 0 \quad (3.12e)$$

$$\alpha(\mathbf{x}_D) = 0 \quad (3.12f)$$

$$\beta(\mathbf{x}_D) = \frac{1}{k_D(\mathbf{x}_D)} \quad (3.12g)$$

Vale ressaltar que a formulação generalizada das Equações (3.11a–e) admite que o problema possa ser não-linear, através da dependência dos termos fonte g e φ em relação ao potencial p_D . Ainda que o problema tratado neste trabalho seja linear, o que pode ser visto pelas Equações (3.12b) e (3.12c), isso não é uma limitação para aplicação da GITT.

3.3.1 Definição do Problema de Autovalor e Par de Fórmulas para Transformação e Inversão

O problema de autovalor escolhido deverá incorporar o máximo de informação possível sobre as variações espaciais dos coeficientes do problema original, de modo a acelerar a convergência da solução. Este problema pode ser obtido pela aplicação do método de Separação de Variáveis à versão homogênea das Equações (3.11a–e). Dessa forma, define-se o problema de autovalor

$$\mathcal{L} \{ \psi_i(\mathbf{x}_D) \} = \mu_i^2 w(\mathbf{x}_D) \psi_i(\mathbf{x}_D) \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.13a)$$

$$\mathcal{B} \{ \psi_i(\mathbf{x}_D) \} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (3.13b)$$

e, a partir dele, propõe-se o seguinte par de fórmulas para transformação e inversão do problema original:

$$\text{transformada: } \overline{p}_{D_i}(t_D) = \int_V w(\mathbf{x}_D) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) p_D(\mathbf{x}_D, t_D) dv \quad (3.14a)$$

$$\text{inversa: } p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{p}_{D_i}(t_D) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \quad (3.14b)$$

onde

$$\tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) = \frac{\psi_i(\mathbf{x}_D)}{\sqrt{N_{\psi_i}}} \quad (3.14c)$$

$$N_{\psi_i} = \int_V w(\mathbf{x}_D) \psi_i^2(\mathbf{x}_D) dv \quad (3.14d)$$

$$\int_V w(\mathbf{x}_D) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \tilde{\psi}_j(\mathbf{x}_D) dv = \delta_{ij} \equiv \text{delta de Kronecker} \quad (3.14e)$$

3.3.2 Transformação da Equação Diferencial Parcial Original

Aplicando-se o operador $\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x})(\cdot) dv$ às Equações (3.11a–c) obtém-se

$$\frac{d\overline{p}_{D_i}}{dt_D} + \mu_i^2 \overline{p}_{D_i}(t_D) = \overline{g}_i(t_D, \overline{\mathbf{p}}_D(t_D)) \quad (3.15a)$$

$$\overline{p}_{D_i}(0) = \overline{f}_i \quad (3.15b)$$

onde

$$\overline{g}_i(t_D, \overline{\mathbf{p}}_D(t_D)) = \hat{g}_i(t_D) - \int_S \frac{\varphi(\mathbf{x}_D, t_D, p_D) \left[k_D(\mathbf{x}_D) \frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \mathbf{n}} - \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \right]}{\alpha(\mathbf{x}_D) + \beta(\mathbf{x}_D)} ds \quad (3.15c)$$

$$\hat{g}_i(t_D) = \int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) g(\mathbf{x}_D, t_D, p_D) dv \quad (3.15d)$$

$$\overline{f}_i = \int_V w(\mathbf{x}_D) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) f(\mathbf{x}_D) dv \quad (3.15e)$$

$$\overline{\mathbf{p}}_D(t_D) = \{\overline{p}_{D_1}(t_D), \overline{p}_{D_2}(t_D), \dots\}^T \quad (3.15f)$$

Vale ressaltar que não há nenhuma derivada espacial no sistema formado pelas Equações (3.15a–f): o problema original das Equações (3.11a–e), composto por uma equação diferencial parcial em (\mathbf{x}_D, t_D) , foi reduzido a um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias somente em t_D . No caso mais geral de um sistema acoplado, este deverá ser truncado a uma ordem suficientemente grande e resolvido numericamente por rotinas computacionais consolidadas para resolução de EDOs, disponíveis em todas as principais linguagens de programação.

O truncamento de um sistema infinito implica, evidentemente, em uma aproximação da solução para o potencial transformado. Entretanto, vale ressaltar que o erro pode ser controlado através do aumento da ordem de truncamento, tornando-se tão pequeno quanto necessário para a aplicação.

Caso particular de equações desacopladas

Caso $\bar{g}_i(t_D, \bar{\mathbf{p}}_{\mathbf{D}}(t_D)) = \bar{g}_i(t_D)$, o sistema de equações torna-se desacoplado e admite solução analítica pelo método do *fator integrante*:

$$\bar{p}_{D_i}(t_D) = e^{-\mu_i^2 t_D} \left[\bar{f}_i + \int_0^{t_D} e^{\mu_i^2 \tau} \bar{g}_i(\tau) d\tau \right] \quad (3.16)$$

3.3.3 Resolução do Problema de Autovalor

Se o problema de autovalor proposto das Equações (3.13a) e (3.13b) no procedimento da GITT possuir solução analítica, esta pode ser usada diretamente na fórmula de inversão para reconstrução do potencial original. Quando a equação original apresentar coeficientes com variações espaciais arbitrárias, é possível i) escolher coeficientes constantes característicos para o problema de autovalor; ou ii) carregar os coeficientes variáveis originais para o problema de autovalor. No primeiro caso, o problema de autovalor permanece totalmente analítico, mas é possível que ocorra maior dificuldade de convergência da expansão da Equação (3.14b). No segundo caso, não havendo solução analítica, uma forma de resolver a questão é aplicar novamente a GITT sobre o problema de autovalor, produzindo um segundo problema de autovalor auxiliar (mais simples, com solução analítica) que será usado para reconstruir as autofunções do primeiro problema e este, por sua vez, para reconstruir o potencial do problema original.

Supondo não haver solução analítica para o problema das Equações (3.13a) e (3.13b), propõe-se o seguinte problema de autovalor auxiliar:

$$\hat{\mathcal{L}} \{ \Omega_j(\mathbf{x}_{\mathbf{D}}) \} = \eta_j^2 \hat{w}(\mathbf{x}_{\mathbf{D}}) \Omega_j(\mathbf{x}_{\mathbf{D}}) \quad \mathbf{x}_{\mathbf{D}} \in V \quad (3.17a)$$

$$\hat{\mathcal{B}} \{ \Omega_j(\mathbf{x}_{\mathbf{D}}) \} = 0 \quad \mathbf{x}_{\mathbf{D}} \in S \quad (3.17b)$$

onde

$$\hat{\mathcal{L}} \equiv -\nabla \cdot \left[\hat{k}_D(\mathbf{x}_{\mathbf{D}}) \nabla(\cdot) \right] + \hat{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{D}})(\cdot) \quad (3.17c)$$

$$\hat{\mathcal{B}} \equiv \alpha(\mathbf{x}_{\mathbf{D}})(\cdot) + \beta(\mathbf{x}_{\mathbf{D}}) \hat{k}_D(\mathbf{x}_{\mathbf{D}}) \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{n}} \quad (3.17d)$$

e onde os coeficientes $\hat{w}(\mathbf{x}_{\mathbf{D}})$, $\hat{k}_D(\mathbf{x}_{\mathbf{D}})$ e $\hat{d}(\mathbf{x}_{\mathbf{D}})$ são escolhidos de forma a que o problema auxiliar tenha solução analítica conhecida. O par de fórmulas de transfor-

mação e inversão pode então ser definido por:

$$\text{transformada: } \bar{\psi}_{ij} = \int_V \hat{w}(\mathbf{x}_D) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \psi_i(\mathbf{x}_D) dv \quad (3.18a)$$

$$\text{inversa: } \psi_i(\mathbf{x}_D) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\psi}_{ij} \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \quad (3.18b)$$

onde

$$\tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) = \frac{\Omega_j(\mathbf{x}_D)}{\sqrt{N_{\Omega_j}}} \quad (3.18c)$$

$$N_{\Omega_j} = \int_V \hat{w}(\mathbf{x}_D) \Omega_j^2(\mathbf{x}_D) dv \quad (3.18d)$$

$$\int_V \hat{w}(\mathbf{x}_D) \tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_D) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) dv = \delta_{ij} \equiv \text{delta de Kronecker} \quad (3.18e)$$

Aplicando-se o operador $\int_V \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) (\cdot) dv$ às Equações (3.17a) e (3.17b), obtém-se o problema de autovalor algébrico

$$[(\mathbf{A} + \mathbf{C}) - \mu_i^2 \mathbf{B}] \bar{\psi}_i = \mathbf{0} \quad (3.19a)$$

onde as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} são dadas por:

$$\mathbf{A} \equiv A_{jk} = - \int_S \zeta_j (\hat{\mathcal{B}} - \mathcal{B}) \{ \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D) \} ds - \int_V \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) (\hat{\mathcal{L}} - \mathcal{L}) \{ \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D) \} dv \quad (3.19b)$$

$$\mathbf{B} \equiv B_{jk} = \int_V \hat{w}(\mathbf{x}_D) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D) dv \quad (3.19c)$$

$$\mathbf{C} \equiv C_{jk} = \eta_j^2 \delta_{jk} \quad (3.19d)$$

onde

$$\delta_{jk} \equiv \text{delta de Kronecker} \quad (3.19e)$$

$$\zeta_j = \frac{\tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) - \hat{k}_D(\mathbf{x}_D) \frac{\partial \tilde{\Omega}_j}{\partial \mathbf{n}}}{\alpha(\mathbf{x}_D) + \beta(\mathbf{x}_D)} \quad (3.19f)$$

O problema de autovalor matricial algébrico da Equação (3.19a) pode ser truncado a uma ordem suficientemente grande e resolvido numericamente para obtenção dos autovalores μ_i do problema original e dos autovetores transformados $\bar{\psi}_i$. Então, a fórmula de inversão da Equação (3.18b) pode ser utilizada para reconstruir as autofunções $\psi_i(\mathbf{x}_D)$ do problema original.

Nessa etapa ocorre o truncamento de um sistema algébrico infinito, o que implica uma aproximação. Entretanto, da mesma forma como citado na Seção 3.3.2, o erro pode ser controlado através do aumento da ordem de truncamento, tornando-se tão pequeno quanto necessário para a aplicação.

3.3.4 Reconstrução dos Potenciais Originais

Tendo resolvido o problema transformado das Equações (3.15a–f) para obtenção dos potenciais transformados $\overline{p_{D_i}}$, e de posse dos autovalores μ_i e das autofunções $\psi_i(\mathbf{x}_D)$ obtidos a partir das Equações (3.19a–f), o potencial original $p_D(\mathbf{x}_D, t_D)$ pode ser reconstruído a partir das fórmulas de inversão das Equações (3.14b) e (3.18b).

Vale ressaltar ainda que as fórmulas de inversão são baseadas em somatórios infinitos, o que requer truncamento para uma aplicação numérica. Assim como ocorreu nas Seções 3.3.2 e 3.3.3, isso dá origem a uma aproximação, cujo erro diminui conforme a ordem de truncamento aumenta. No caso particular em que

1. O sistema de equações para os potenciais transformados, Seção 3.3.2, for desacoplado; e
2. O problema de autovalor, Seção 3.3.3, apresentar solução analítica,

o truncamento do somatório na fórmula de inversão será a única fonte de erro para uma aplicação numérica calculada a partir desta formulação. Essa situação ocorre no uso da Transformação Integral Clássica (CITT), que será utilizada na Seção 4.1 para a solução de um problema em meio homogêneo.

3.4 Reordenamento de Autovalores e Filtragem Analítica do Problema

Como a solução formal da Equação (3.14b) é dada por uma série infinita, que precisará ser truncada para cálculo dos potenciais, uma preocupação importante diz respeito à sua taxa de convergência. Se esta taxa for alta, poucos termos do somatório serão necessários para a obtenção da precisão desejada, reduzindo o custo computacional da solução. Duas questões importantes serão consideradas neste trabalho para aceleração das taxas de convergência: o reordenamento dos autovalores e a filtragem analítica da equação diferencial parcial original.

3.4.1 Reordenamento dos Autovalores

No caso de problemas multidimensionais, a aplicação da Transformação Integral resulta em um problema de autovalor que também é multidimensional⁵. Todas as soluções apresentadas até o momento neste trabalho utilizam um somatório único para representar a expansão em série, mesmo no caso geral de problemas multidimensionais. Essa prática não é unânime na literatura, já que muitos textos empregam a notação de somatórios duplos ou triplos para representar as soluções obtidas após

⁵O mesmo raciocínio se aplica para a técnica clássica da Separação de Variáveis.

aplicação da fórmula de inversão da Equação (3.14b) em problemas com, respectivamente, duas ou três dimensões (ÖZİŞİK, 1993).

Apesar de matematicamente correta, a forma contendo múltiplos somatórios induz a escolha de ordens de truncamento independentes para cada dimensão espacial. Esta escolha é ruim do ponto de vista computacional, uma vez que i) resulta em um número grande de termos na série final; e ii) pode privilegiar termos de pequena importância para o resultado final, em detrimento de termos mais importantes. A forma mais recomendável de lidar com o cálculo deste tipo de solução é manter a forma de somatório único e reordenar os autovalores μ_i do problema multidimensional, garantindo que termos de maior importância para o resultado final sejam incluídos antes de termos de menor importância (COTTA *et al.*, 2018b).

Um exemplo simples que ressalta estas duas abordagens seria reescrever a Equação (4.6a) da Seção 4.1 deste trabalho como

$$p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \tilde{X}_0(x_{wD})\tilde{Y}_0(y_{wD})\tilde{Z}_0(z_{wD})\tilde{X}_0(x_D)\tilde{Y}_0(y_D)\tilde{Z}_0(z_D)t_D + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\tilde{X}_j(x_{wD})\tilde{Y}_k(y_{wD})\tilde{Z}_l(z_{wD})\tilde{X}_j(x_D)\tilde{Y}_k(y_D)\tilde{Z}_l(z_D)}{\lambda_j^2 + \gamma_k^2 + \nu_l^2} (1 - e^{-(\lambda_j^2 + \gamma_k^2 + \nu_l^2)t_D}) \quad (3.20a)$$

onde

$$\eta_i^2 = \lambda_j^2 + \gamma_k^2 + \nu_l^2 \quad (3.20b)$$

$$\tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_{wD}) = \tilde{X}_j(x_{wD})\tilde{Y}_k(y_{wD})\tilde{Z}_l(z_{wD}) \quad (3.20c)$$

Ao invés de arbitrar uma ordem de truncamento independente para cada direção ortogonal no somatório triplo da Equação (3.20a), um critério mais razoável seria reordenar os termos em ordem crescente de

$$\left| \frac{\eta_i^2}{\tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_{wD})} \right| = \left| \frac{\lambda_j^2 + \gamma_k^2 + \nu_l^2}{\tilde{X}_j(x_{wD})\tilde{Y}_k(y_{wD})\tilde{Z}_l(z_{wD})} \right| \quad (3.21)$$

e só então definir a ordem de truncamento global do problema, garantindo a contabilização de termos de maior magnitude no somatório (portanto, com maior peso sobre a convergência da solução) antes de termos de menor magnitude.

No caso de soluções para meios heterogêneos, onde os autovalores são resultado da solução do problema de autovalor algébrico das Equações (3.19a–f), existe a dificuldade adicional de que o reordenamento precisa ocorrer *antes* do cálculo dos autovalores μ_i : caso a montagem das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} , influenciada por uma escolha de ordenamento feita para o problema auxiliar homogêneo das Equações (3.17a–d), não contemple os termos de maior importância para o resultado final, nenhum re-

ordenamento posterior será capaz de considerá-los. Além disso, a importância dos termos não é função exclusivamente da magnitude dos autovalores do problema auxiliar escolhido, mas também das variações espaciais de propriedades ($k_D(\mathbf{x}_D)$) do problema original.

Nos exemplos considerados no Capítulo 5, essa questão se mostra particularmente importante em casos onde a direção de menor dimensão do espaço (z_D) apresenta as maiores variações espaciais $k_D(\mathbf{x}_D)$. Como os autovalores da direção z_D no problema homogêneo, nesse caso, têm magnitude muito superior aos autovalores das direções x_D e y_D , um critério de reordenamento como o da Equação (3.21) acaba priorizando termos adicionais nas direções x_D e y_D e selecionando, comparativamente, um menor número de termos na direção z_D . Como resultado, a série truncada pode não conter um quantitativo adequado de termos na direção z_D para representar a heterogeneidade desta direção no resultado final.

Para obter um critério que considere a heterogeneidade do meio, pode-se multiplicar a Equação (3.19a) por \mathbf{B}^{-1} :

$$(\mathbf{A}' - \mu_i^2 \mathbf{I}) \overline{\boldsymbol{\psi}}_i = \mathbf{0} \quad (3.22a)$$

onde

$$\mathbf{A}' = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{C} \quad (3.22b)$$

$$\mathbf{I} \equiv \text{matriz identidade} \quad (3.22c)$$

Fica claro que os elementos da matriz \mathbf{A}' são diretamente responsáveis pelos autovalores μ_i^2 deste problema. Neste trabalho, serão usados dois critérios de reordenamento complementares (COTTA *et al.*, 2013b):

1. Em um primeiro momento, os autovalores do problema auxiliar homogêneo serão selecionados em ordem crescente da diagonal principal da matriz $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}$. Por inspeção da definição das matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} nas Equações (3.19c) e (3.19d), constata-se que nenhuma delas é função do coeficiente variável $k_D(\mathbf{x}_D)$ do problema original. Em contrapartida, a matriz \mathbf{C} é função dos autovalores η_j do problema de autovalor auxiliar. Por consequência, conclui-se que a matriz $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{C}$ utilizada neste primeiro critério considera a magnitude dos autovalores auxiliares, mas não a heterogeneidade do meio. Trata-se de um critério similar ao da Equação (3.21) para a versão homogênea do problema;
2. A esta lista preliminar, devem ser adicionados os elementos que ainda possam contribuir de forma significativa para o resultado final. Estes serão escolhidos em ordem crescente de magnitude dos termos da diagonal principal da matriz $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}$. A definição da matriz \mathbf{A} , dada pela Equação (3.19b), mostra que esta

depende do coeficiente variável $k_D(\mathbf{x}_D)$ através dos operadores \mathcal{B} e \mathcal{L} , definidos pelas Equações (3.11d) e (3.11e). Em contrapartida, não há dependência direta da matriz \mathbf{A} em relação aos autovalores η_j do problema de autovalor auxiliar. Portanto, a matriz $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ considera a influência que a heterogeneidade do meio exerce sobre os autovalores do problema original.

3.4.2 Filtros Adequados ao Problema Proposto

Problemas com termos fonte na equação ou nas condições de contorno apresentam taxas de convergência mais baixas. Consequentemente, para redução do custo computacional do cálculo da solução, sempre é recomendável a aplicação de filtros que reduzam a importância dos termos fonte (COTTA e MIKHAILOV, 1997). Uma estratégia geral para filtragem de problemas é (COTTA *et al.*, 2018b)

$$p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = F_D(\mathbf{x}_D; t_D) + p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D) \quad (3.23)$$

onde t_D é um parâmetro na definição do filtro $F_D(\mathbf{x}_D; t_D)$. A aplicação da Equação (3.23) nas Equações (3.11a–e) resulta em

$$w(\mathbf{x}_D) \frac{\partial p_D^*}{\partial t_D} + \mathcal{L} \{p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D)\} = g^*(\mathbf{x}_D, t_D, p_D^*) \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.24a)$$

$$\mathcal{B} \{p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D)\} = \varphi^*(\mathbf{x}_D, t_D, p_D^*) \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (3.24b)$$

$$p_D^*(\mathbf{x}_D, 0) = f^*(\mathbf{x}_D) \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (3.24c)$$

onde

$$g^*(\mathbf{x}_D, t_D) = g(\mathbf{x}_D, t_D) - \mathcal{L} \{F_D(\mathbf{x}_D; t_D)\} - w(\mathbf{x}_D) \frac{\partial F_D}{\partial t_D} \quad (3.24d)$$

$$\varphi^*(\mathbf{x}_D, t_D) = \varphi(\mathbf{x}_D, t_D) - \mathcal{B} \{F_D(\mathbf{x}_D; t_D)\} \quad (3.24e)$$

$$f^*(\mathbf{x}_D) = f(\mathbf{x}_D) - F_D(\mathbf{x}_D; 0) \quad (3.24f)$$

A aplicação do formalismo da GITT descrito na Seção 3.3 sobre o problema filtrado das Equações (3.24a–f), ao invés de diretamente sobre o problema original das Equações (3.11a–e), resulta em uma expansão em série de autovalores com taxa de convergência mais alta que a do problema não filtrado. Uma vez resolvido o problema para o potencial filtrado $p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D)$, o resultado pode ser substituído novamente na Equação (3.23), juntamente com a definição do filtro $F_D(\mathbf{x}_D; t_D)$, para reconstruir o potencial original $p_D(\mathbf{x}_D, t_D)$.

No caso do problema do ponto fonte tratado neste trabalho, é possível observar na Equação (3.5a) que o termo fonte da equação diferencial é espacialmente concentrado, sendo representado por um delta de Dirac. Em uma situação como essa, o

uso do filtro terá por objetivo primário distribuir a influência deste termo ao longo do domínio, o que exerce efeito benéfico sobre a taxa de convergência da expansão em série. Como será discutido no Capítulo 4, esta técnica se mostra essencial para a utilização da Transformação Integral em problemas relacionados a testes de formação, em função da redução do número de termos necessários e, conseqüentemente, redução do custo computacional da solução.

Capítulo 4

Solução do Ponte Fonte em Reservatório Homogêneo

Neste Capítulo, a CITT será aplicada para a resolução da versão de meio homogêneo ($k_D(\mathbf{x}_D) = 1$) do problema descrito pelas Equações (3.5a–c). Portanto, trata-se do problema

$$\nabla^2 p_D(\mathbf{x}_D, t_D) + \delta_D(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_{wD}) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (4.1a)$$

$$p_D(\mathbf{x}_D, 0) = 0 \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (4.1b)$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial \mathbf{n}} = \nabla p_D(\mathbf{x}_D, t_D) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (4.1c)$$

Vale ressaltar que esta é uma versão particular da formulação generalizada das Equações (3.11a–e), que pode ser obtida através das substituições de variáveis descritas pelas Equações (3.12a–g) e, adicionalmente, fazendo $k_D(\mathbf{x}_D) = 1$.

4.1 Solução por Transformação Integral sem Filtro

Uma primeira tentativa de solução deste problema em meio homogêneo é aplicar a Transformação Integral diretamente sobre as Equações (4.1a–c). A partir da formulação generalizada descrita na Seção 3.3, obtém-se o seguinte problema transformado:

$$\frac{d\overline{p}_{D_i}}{dt_D} + \eta_i^2 \overline{p}_{D_i}(t_D) = \tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_{wD}) \quad (4.2a)$$

$$\overline{p}_{D_i}(0) = 0 \quad (4.2b)$$

Neste trabalho, optou-se por reservar a notação μ_i e $\tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D)$ para representar, respectivamente, os autovalores e autofunções dos problemas em meios *heterogêneos*. Para meios *homogêneos*, será utilizada a notação η_i e $\tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_D)$. Trata-se da mesma notação já utilizada na Seção 3.3.3 para representar o problema de autovalor *auxiliar* que, neste trabalho, será sempre uma versão em meio homogêneo do problema de autovalor original em meio heterogêneo.

As Equações (4.2a) e (4.2b) formam um sistema de equações diferenciais ordinárias desacoplado. Portanto, sua solução analítica é dada pela aplicação da Equação (3.16)¹:

$$\overline{p}_{D_i}(t_D) = \begin{cases} \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{wD})t_D & i = 0 \\ \frac{\tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_{wD})}{\eta_i^2} (1 - e^{-\eta_i^2 t_D}) & i \geq 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

O problema de autovalor escolhido para este problema é

$$\nabla^2 \Omega_i(\mathbf{x}_D) + \eta_i^2 \Omega_i(\mathbf{x}_D) = 0 \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (4.4a)$$

$$\frac{\partial \Omega_i}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (4.4b)$$

que corresponde às Equações (3.17a–d) com as substituições de variáveis

$$\hat{w}(\mathbf{x}_D) = 1 \quad (4.4c)$$

$$\hat{k}_D(\mathbf{x}_D) = 1 \quad (4.4d)$$

$$\hat{d}(\mathbf{x}_D) = 0 \quad (4.4e)$$

$$\alpha(\mathbf{x}_D) = 0 \quad (4.4f)$$

$$\beta(\mathbf{x}_D) = 1 \quad (4.4g)$$

É possível reconhecer aqui a *Equação de Helmholtz* multidimensional. Sua solução é analítica, podendo ser obtida por Separação de Variáveis. Para o caso de interesse neste trabalho, sua forma tridimensional em coordenadas cartesianas é dada por

$$\tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_D) = \tilde{X}_m(x_D) \tilde{Y}_n(y_D) \tilde{Z}_p(z_D) \quad (4.5a)$$

onde $\tilde{X}_m(x_D)$, $\tilde{Y}_n(y_D)$ e $\tilde{Z}_p(z_D)$ são as soluções para os problemas de autovalor

¹O índice $i = 0$ representa o autovalor nulo $\eta_0 = 0$.

auxiliares em cada direção ortogonal, dados por

$$\mathcal{X}_k(v_D) = \cos(\rho_k v_D) \quad k \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad (4.5b)$$

$$\rho_k = \frac{k\pi}{L_{vD}} \quad (4.5c)$$

$$N_{\mathcal{X}_k} = \begin{cases} L_{vD} & i = 0 \\ \frac{L_{vD}}{2} & i \geq 1 \end{cases} \quad (4.5d)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}_k(v_D) = \frac{\mathcal{X}_k(v_D)}{\sqrt{N_{\mathcal{X}_k}}} \quad (4.5e)$$

$$\tilde{\mathcal{X}}_k(v_D) \in \{\tilde{X}_m(x_D), \tilde{Y}_n(y_D), \tilde{Z}_p(z_D)\} \quad (4.5f)$$

$$\rho_k \in \{\lambda_m, \gamma_n, \nu_p\} \quad (4.5g)$$

e com autovalores η_i do problema de autovalor tridimensional dados por

$$\eta_i^2 = \lambda_m^2 + \gamma_n^2 + \nu_p^2 \quad (4.5h)$$

Substituindo a Equação (4.3) e as Equações (4.5a–h) na fórmula de inversão da Equação (3.14b), obtém-se a solução do problema de meio homogêneo por Transformação Integral:

$$p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{wD})\tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_D)t_D + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_{wD})\tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_D)}{\eta_i^2} (1 - e^{-\eta_i^2 t_D}) \quad (4.6a)$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_{wD})\tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_D)e^{-\eta_i^2 t_D} \quad (4.6b)$$

Para aceleração da convergência numérica das séries, os termos foram reordenados em ordem crescente de

$$\left| \frac{\eta_i^2}{\tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_{wD})} \right| \quad (4.7)$$

Mesmo assim, e apesar de formalmente corretas, as Equações (4.6a) e (4.6b) apresentam convergência numérica demasiadamente lenta para os problemas de interesse da área de testes de formação². Para ilustrar essa afirmação, será utilizado um exemplo numérico baseado nos valores da Tabela 4.1 para os parâmetros dimensionais apresentados na Seção 3.1.

A Figura 4.1 apresenta um gráfico log-log³ obtido a partir das Equações (4.6a)

²Algumas características importantes dos problemas desta área já foram detalhadas na Capítulo 1

³Esse tipo de gráfico é uma ferramenta comum na área de Avaliação de Formações. As funções plotadas são o Δp em relação a uma pressão de referência, e sua derivada logarítmica temporal $\Delta p' = \partial \Delta p / \partial \ln t$. Conforme comentado na Seção 2.1, o gráfico da derivada logarítmica permite a identificação de regimes de fluxo que formam assinaturas características para o reservatório.

Tabela 4.1: Propriedades numéricas para o exemplo da Seção 4.1.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Vazão do poço, q	70 m ³ /d	Raio do poço, r_w	4,75 pol
Permeabilidade em x , k_x	2000 mD	Dimensão em x , L_x	2400 m
Permeabilidade em y , k_y	2000 mD	Dimensão em y , L_y	2400 m
Permeabilidade em z , k_z	20 mD	Dimensão em z , L_z	30 m
Porosidade, ϕ	30 %	Posição do poço em x , x_w	1200 m
Viscosidade, μ_f	1 cP	Posição do poço em y , y_w	1200 m
Compressibilidade total, c_t	250×10^{-6} 1/kgf/cm ²	Posição do poço em z , z_w	15 m
Pressão inicial, p_i	300 kgf/cm ²		

e (4.6b) com os parâmetros numéricos da Tabela 4.1. Esta solução é plotada para diferentes ordens de truncamento, e comparada com a solução das Equações (4.1a–c) dada pela formulação clássica do método das imagens das Equações (3.9a–f). A pressão é calculada na parede do “poço” que, conforme convenção adotada na área de Reservatórios, corresponde à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. A razão para evitar o cálculo diretamente sobre a posição do ponto fonte $(x, y, z) = (x_w, y_w, z_w)$ fica aparente pela análise das Equações (3.9c), (3.9e) e (3.9f): nesta posição, que correspondente a $R_D = 0$, a Equação (3.9c) diverge em direção a $+\infty$.

É possível observar que:

1. Tanto as curvas de pressão (curvas superiores) quanto as suas respectivas derivadas (curvas inferiores) apresentam comportamento assintótico durante período significativo de tempo. Vale ressaltar que o horizonte de tempo de 0,01 horas (6 segundos) *está dentro* do intervalo de interesse para utilização no contexto de testes de formação;
2. As curvas de derivada convergem mais rapidamente que as curvas de pressão. Ainda assim, a convergência da derivada para tempos da ordem de 0,01 horas só ocorrem para ordens de truncamento superiores a 100 000 termos;
3. Mesmo com uma ordem de truncamento de 1 000 000 de termos, a pressão ainda apresenta diferença de quase duas ordens de magnitude em relação à solução exata.

Esta análise da dificuldade de convergência da solução por CITT sem filtro também pode ser vista nas Tabelas 4.2 e 4.3.

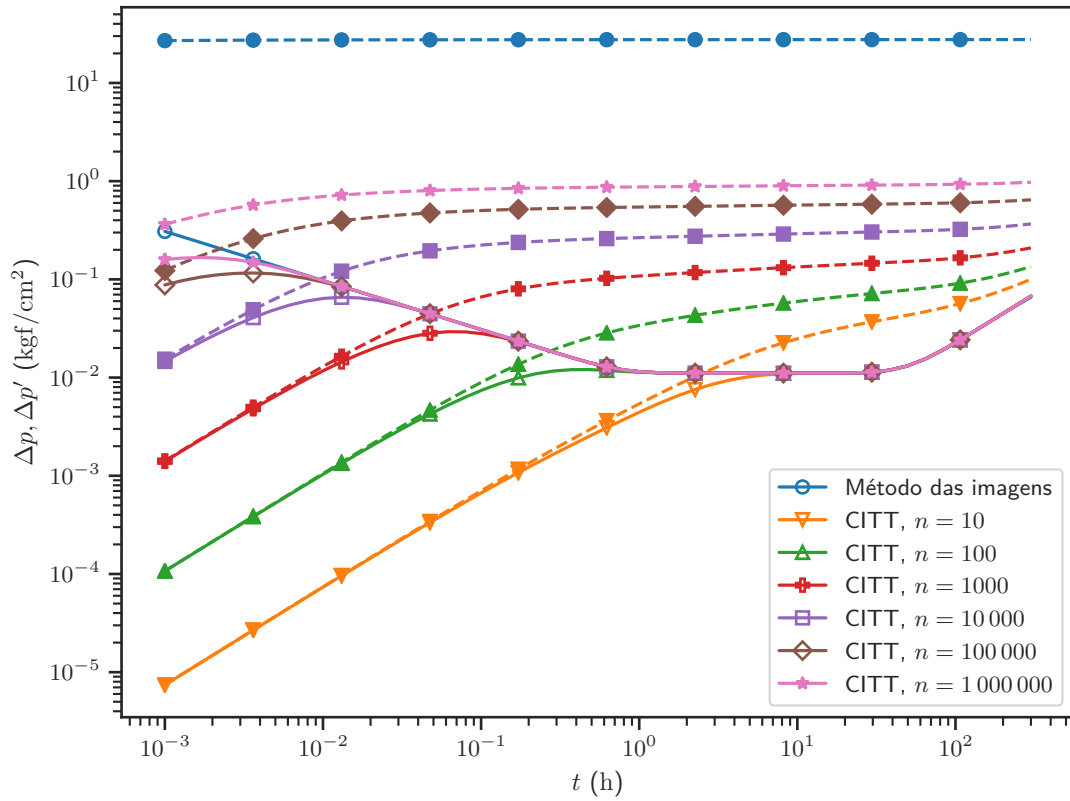


Figura 4.1: Gráfico log-log comparando a solução do ponto fonte em meio homogêneo por CITT com a solução clássica pelo método das imagens para reservatório fechado. Foram utilizados 900 termos na solução pelo método das imagens, ordenados segundo o critério descrito na Seção 3.2.2. Todos os cálculos correspondem à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

Tabela 4.2: Convergência do Δp na posição do ponto fonte para o problema das Equações (4.1a-c), para diferentes ordens de truncamento. Foram utilizados 900 termos na solução pelo método das imagens, ordenados segundo o critério descrito na Seção 3.2.2.

Tempo (horas)	$\Delta p(\mathbf{x}_w, t) = p_i - p(\mathbf{x}_w, t)$ (kgf/cm ²)						Met. Imag.
	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000	
0,001	0,0000	0,0001	0,0014	0,0154	0,1230	0,3632	26,9902
0,01	0,0001	0,0011	0,0129	0,1035	0,3697	0,6975	27,4117
0,1	0,0007	0,0089	0,0661	0,2231	0,5023	0,8307	27,5450
1	0,0054	0,0340	0,1082	0,2659	0,5450	0,8735	27,5877
10	0,0249	0,0596	0,1338	0,2915	0,5707	0,8991	27,6134
100	0,0551	0,0898	0,1640	0,3217	0,6009	0,9294	27,6436
300	0,1001	0,1348	0,2091	0,3667	0,6459	0,9744	27,6883

Tabela 4.3: Convergência do $\Delta p'$ (derivada logarítmica) na posição do ponto fonte para o problema das Equações (4.1a–c), para diferentes ordens de truncamento. Foram utilizados 900 termos na solução pelo método das imagens, ordenados segundo o critério descrito na Seção 3.2.2.

Tempo (horas)	$\Delta p'(\mathbf{x}_w, t) = \partial \Delta p / \partial \ln t$ (kgf/cm ²)						Met. Imag.
	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000	
0,001	0,000007	0,000107	0,001402	0,014609	0,087753	0,159271	0,308126
0,01	0,000073	0,001032	0,011699	0,063914	0,094067	0,097345	0,097472
0,1	0,000667	0,007387	0,028098	0,030824	0,030825	0,030825	0,030825
1	0,004437	0,011328	0,011480	0,011480	0,011480	0,011480	0,011480
10	0,011037	0,011102	0,011102	0,011102	0,011102	0,011102	0,011102
100	0,022660	0,022660	0,022660	0,022660	0,022660	0,022660	0,022660
300	0,067515	0,067515	0,067515	0,067515	0,067515	0,067515	0,065768

4.2 Aplicação das Soluções Analíticas Clássicas como Filtros para a Transformação Integral

Devido à baixa taxa de convergência, as Equações (4.6a) e (4.6b) possuem pouca utilidade no contexto de testes de formação. Um passo natural na direção de melhorar esta taxa de convergência é a utilização de filtros analíticos (Seção 3.4.2). As Equações (4.1a–c) já apresentam condições de contorno e inicial homogêneas. O único termo fonte do sistema, responsável pela sua baixa taxa de convergência, está na própria equação diferencial parcial. Trata-se ainda de uma fonte independente do tempo, e extremamente concentrada no espaço. É natural supor que um filtro que respeite este termo fonte durante o período transiente do problema e distribua sua influência ao longo do domínio possa ter boas chances de acelerar a taxa de convergência da solução.

As soluções analíticas clássicas para meios homogêneos apresentadas na Seção 3.2 respeitam perfeitamente o termo fonte, a condição inicial e a própria equação diferencial parcial do problema descrito pelas Equações (4.1a) e (4.1b). A solução para reservatório fechado da Seção 3.2.2 também respeita integralmente as condições de contorno da Equação (4.1c). Por estas razões, esta solução será adotada como filtro para o problema heterogêneo do Capítulo 5.

4.3 Relação entre as Soluções Clássicas e a Transformação Integral

As soluções clássicas da área de Avaliação de Formações são construídas, de forma geral, a partir da aplicação do *método das imagens* a um núcleo de solução em meio infinito. Portanto, a forma mais simples da solução é aquela de meio *infinito*, com cada contorno adicionando complexidade extra às equações sob a forma de um somatório infinito naquela direção.

A Transformação Integral parte imediatamente de uma formulação de meio *finito*, sendo que sua aplicação a meios infinitos passa pela consideração de algumas particularidades:

- A aplicação da CITT a um problema de meio infinito gera um espectro contínuo de autovalores. Isso pode ser constatado na Equação (4.5c), que mostra que a magnitude dos autovalores tende a zero conforme aumenta o tamanho do domínio. Como os problemas transformados pela CITT resultam em um sistema de equações diferenciais infinito mas *desacoplado*, ainda é possível obter a solução por meio de um processo de limite adequado, convertendo o somatório da fórmula de inversão da Equação (3.14b) para autovalores discretos em uma integral para o espectro contínuo de autovalores do problema (ÖZİŞİK, 1993);
- No caso de problemas não transformáveis no sentido clássico, a aplicação da GITT gera um sistema de equações diferenciais infinito e *acoplado*. No caso de um espectro contínuo de autovalores, não é possível aplicar o procedimento de solução descrito na Seção 3.3 para trincar e resolver este sistema infinito. Nestes casos, as alternativas são i) trincar o domínio *infinito* em um tamanho *finito* suficientemente grande para os tempos de interesse; ii) propor uma mudança de variáveis que transforme o domínio infinito em um domínio finito (ALMEIDA, 1994); ou iii) trabalhar com uma fronteira virtual móvel, conforme descrito nas propostas de trabalhos futuros do Capítulo 7.

Esta Seção se propõe a demonstrar que a solução clássica das Equações (3.9a–f) para o ponto fonte em meio homogêneo finito, obtida pelo método das imagens, e a solução por CITT das Equações (4.6a) e (4.6b) para o mesmo meio homogêneo finito, são, de fato, a mesma solução.

O ponto de partida será a Equação (4.6b), solução por CITT para a derivada da pressão no problema de meio finito. Reescrevendo o somatório em i como um somatório triplo em cada direção ortogonal e substituindo a solução do problema de

autovalor das Equações (4.5a–h), obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p_D}{\partial t_D} &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_{wD}) \tilde{\Omega}_i(\mathbf{x}_D) e^{-\eta_i^2 t_D} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{N_{X_m} N_{Y_n} N_{Z_p}} \cos(\lambda_m x_{wD}) \cos(\gamma_n y_{wD}) \cos(\nu_p z_{wD}) \\
&\quad \times \cos(\lambda_m x_D) \cos(\gamma_n y_D) \cos(\nu_p z_D) e^{-\lambda_m^2 t_D} e^{-\gamma_n^2 t_D} e^{-\nu_p^2 t_D} \\
&= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{N_{X_m}} \cos(\lambda_m x_{wD}) \cos(\lambda_m x_D) e^{-\lambda_m^2 t_D} \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{N_{Y_n}} \cos(\gamma_n y_{wD}) \cos(\gamma_n y_D) e^{-\gamma_n^2 t_D} \right) \\
&\quad \times \left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{N_{Z_p}} \cos(\nu_p z_{wD}) \cos(\nu_p z_D) e^{-\nu_p^2 t_D} \right) \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Os três termos entre parênteses da Equação (4.8) são análogos, representando a expansão em série de autofunções das três direções ortogonais do problema. Dessa forma, a manipulação algébrica de um deles pode ser facilmente estendida aos outros dois. Tomando o termo na direção x para exemplificar essa manipulação algébrica:

$$\begin{aligned}
&\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{N_{X_m}} \cos(\lambda_m x_{wD}) \cos(\lambda_m x_D) e^{-\lambda_m^2 t_D} \\
&= \frac{1}{L_{xD}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{L_{xD}} \frac{1}{2} \left[\cos(\lambda_m(x_D + x_{wD})) + \cos(\lambda_m(x_D - x_{wD})) \right] e^{-\lambda_m^2 t_D} \\
&= \frac{1}{2L_{xD}} \left\{ \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\lambda_m(x_D + x_{wD})) e^{-\lambda_m^2 t_D} \right) + \right. \\
&\quad \left. \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(\lambda_m(x_D - x_{wD})) e^{-\lambda_m^2 t_D} \right) \right\} \\
&= \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2L_{xD}} \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{m^2 \pi^2 t_D}{L_{xD}^2}\right) \cos\left(m\pi \frac{x_D + (-1)^k x_{wD}}{L_{xD}}\right) \right] \quad (4.9)
\end{aligned}$$

A fórmula da *Soma de Poisson* pode ser escrita como (RAGHAVAN, 1995)

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(\xi - 2n\xi_e)^2}{4t}\right] = \frac{\sqrt{\pi t}}{\xi_e} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 t}{\xi_e^2}\right) \cos\left(n\pi \frac{\xi}{\xi_e}\right) \right] \quad (4.10)$$

A menos da mudança de notação, o lado direito da Equação (4.10) corresponde exatamente a cada termo do somatório da Equação (4.9). Portanto, aplicando a

soma de Poisson, a Equação (4.9) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{N_{X_m}} \cos(\lambda_m x_{wD}) \cos(\lambda_m x_D) e^{-\lambda_m^2 t_D} \\ &= \frac{1}{(4\pi t_D)^{3/2}} \sum_{k=1}^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x_D + (-1)^k x_{wD})^2}{4t_D}\right] \end{aligned} \quad (4.11)$$

Aplicando a mesma manipulação aos termos da Equação (4.8) correspondendo às direções y e z , chega-se a

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{(4\pi t_D)^{3/2}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \exp\left(-\frac{R_{Dkm,jn,ip}^2}{4t_D}\right) \quad (4.12a)$$

onde

$$R_{Dkm,jn,ip} = \sqrt{(x_{Dk} - 2mL_{xD})^2 + (y_{Dj} - 2nL_{yD})^2 + (z_{Di} - 2pL_{zD})^2} \quad (4.12b)$$

$$\ell_{Dq} = \ell_D + (-1)^q \ell_{wD} \quad \ell \in \{x, y, z\}, q \in \{k, j, i\} \quad (4.12c)$$

que é exatamente a derivada da solução analítica clássica para o ponto fonte em um reservatório retangular e sem fluxo no contorno, dada pela Equação (3.9b). Dadas condições iniciais $p_D(\mathbf{x}_D, 0)$ idênticas, ambas as expressões produzirão a mesma solução $p_D(\mathbf{x}_D, t_D)$. Entretanto, vale ressaltar que cada forma da solução apresenta características de convergência distintas (RAGHAVAN, 1995):

- A forma exponencial das Equações (3.9a) e (3.9b) converge mais rapidamente para *tempos curtos*, quando $t_D \leq L_{vD}^2/\pi$ em cada direção v ;
- A forma da CITT das Equações (4.6a) e (4.6b) converge mais rapidamente para *tempos longos*, quando $t_D \geq L_{vD}^2/\pi$ em cada direção v .

Para referência, utilizando os parâmetros numéricos da Tabela 4.1, os valores citados para t_D seriam 8,2 dias (197 horas) nas direções x e y , e 3,1 horas na direção z . A aplicação eficiente destas expressões deveria considerar estes limites na escolha da forma mais apropriada para convergência acelerada, em cada situação.

Dessa forma, conclui-se que a solução clássica do ponto fonte em um reservatório fechado é a *própria* solução da CITT, após aplicação da fórmula de Poisson. Ambas as metodologias de solução (método das imagens a partir da solução de meio infinito; e a própria Transformação Integral) produzem expressões equivalentes, em formatos distintos. O formato mais apropriado a utilizar passa pela avaliação das características de convergência mais vantajosas para cada caso de interesse.

Capítulo 5

Solução do Ponto Fonte em Reservatório Heterogêneo

O problema geral para o ponto fonte em um reservatório heterogêneo é descrito pelas Equações (3.5a–c). Trata-se de uma versão particular da formulação generalizada das Equações (3.11a–e), que pode ser obtida através das substituições de variáveis descritas pelas Equações (3.12a–g).

Apesar de ser um problema com condições de contorno e inicial homogêneas, não será tentada sua resolução sem a aplicação de filtros para o termo fonte da equação diferencial. Conforme já demonstrado na Seção 4.1 para a versão homogênea deste problema, essa tentativa não deve atingir desempenho computacional aceitável. Ao invés disso, a própria solução de meio homogêneo será utilizada como filtro, na tentativa de produzir resultado computacional satisfatório para o meio heterogêneo.

5.1 Transformação e Solução do Problema

As Equações (3.24a–f) descrevem de forma generalizada o problema para cálculo do potencial filtrado $p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D)$ que, uma vez resolvido, pode ser utilizado para reconstruir o potencial $p_D(\mathbf{x}_D, t_D)$ através da Equação (3.23), por intermédio do filtro $F_D(\mathbf{x}_D; t_D)$. Substituindo as Equações (3.12a–g) nas Equações (3.24a–f), e considerando $F_D(\mathbf{x}_D; t_D)$ como sendo a solução do problema homogêneo descrito pelas Equações (4.1a–c), chega-se a

$$\nabla \cdot (k_D(\mathbf{x}_D) \nabla p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D)) + g^*(\mathbf{x}_D, t_D) = \frac{\partial p_D^*}{\partial t_D} \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (5.1a)$$

$$p_D^*(\mathbf{x}_D, 0) = 0 \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (5.1b)$$

$$\frac{\partial p_D^*}{\partial \mathbf{n}} = \nabla p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (5.1c)$$

onde

$$g^*(\mathbf{x}_D, t_D) = \delta_D(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_{wD}) - \underbrace{\left[\frac{\partial F_D}{\partial t_D} - \nabla \cdot (k_D(\mathbf{x}_D) \nabla F_D(\mathbf{x}_D, t_D)) \right]}_{(1)} \quad (5.1d)$$

O termo (1) da Equação (5.1d) corresponde ao efeito exercido pelo filtro $F_D(\mathbf{x}_D; t_D)$ escolhido sobre o termo fonte $g(\mathbf{x}_D, t_D)$ original do problema. Na forma atual da Equação (5.1d), ainda não é possível visualizar a razão pela qual o filtro escolhido tem efeito benéfico sobre a taxa de convergência da solução. Esta razão será explicada na Seção 5.1.3, após simplificação do termo (1).

5.1.1 Equações do Filtro

Antes de prosseguir, convém considerar a questão da permeabilidade do filtro $F_D(\mathbf{x}_D, t_D)$. Enquanto o problema de meio homogêneo, por definição, admite um único valor para a permeabilidade $k_D(\mathbf{x}_D)$ (tomado como $k_D(\mathbf{x}_D) = 1$ na Seção 4.1), o meio heterogêneo admite uma função de permeabilidade variando no espaço. Ao utilizar a solução de meio homogêneo como filtro, admite-se a escolha de um único valor de permeabilidade para a retirada do máximo possível de informação do termo fonte da equação diferencial. Dessa forma, torna-se natural a escolha do valor de permeabilidade na posição da própria fonte:

$$k_D(\mathbf{x}_D) \Big|_{\mathbf{x}_D = \mathbf{x}_{wD}} = k_D(\mathbf{x}_{wD}) \equiv k_{wD} \quad (5.2)$$

Substituindo a Equação (5.2) nas Equações (3.5a–c) para o filtro $F_D(\mathbf{x}_D, t_D)$, chega-se a

$$k_{wD} \nabla^2 F_D(\mathbf{x}_D, t_D) + \delta_D(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_{wD}) = \frac{\partial F_D}{\partial t_D} \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (5.3a)$$

$$F_D(\mathbf{x}_D, 0) = 0 \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (5.3b)$$

$$\frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{n}} = \nabla F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (5.3c)$$

cuja solução é dada por

$$F_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi k_{wD} R_{Dj}(\mathbf{x}_D)} \operatorname{erfc} \left(\frac{R_{Dj}(\mathbf{x}_D)}{2\sqrt{k_{wD} t_D}} \right) \quad (5.4a)$$

ou

$$F_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{wD}) \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_D) t_D + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{wD}) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D)}{k_{wD} \eta_j^2} (1 - e^{-k_{wD} \eta_j^2 t_D}) \quad (5.4b)$$

com derivadas

$$\frac{\partial F_D}{\partial t_D} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(4\pi k_{wD} t_D)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R_{Dj}^2(\mathbf{x}_D)}{4k_{wD} t_D}\right) \quad (5.5a)$$

ou

$$\frac{\partial F_D}{\partial t_D} = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{wD}) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) e^{-k_{wD} \eta_j^2 t_D} \quad (5.5b)$$

A equivalência entre as duas formas distintas para a solução do filtro $F_D(\mathbf{x}_D, t_D)$ já foi discutida na Seção 4.3.

5.1.2 Definição e Solução do Problema de Autovalor

Para a resolução do problema filtrado, propõe-se o seguinte problema de autovalor:

$$\nabla \cdot [k_D(\mathbf{x}_D) \nabla \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D)] + \mu_i^2 \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) = 0 \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (5.6a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (5.6b)$$

e, a partir dele, o par de fórmulas para transformação e inversão:

$$\text{transformada:} \quad \overline{p_{Di}^*}(t_D) = \int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D) dv \quad (5.6c)$$

$$\text{inversa:} \quad p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{p_{Di}^*}(t_D) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \quad (5.6d)$$

No caso mais geral de $k_D = k_D(\mathbf{x}_D)$, o problema de autovalor descrito pelas Equações (5.6a) e (5.6b) não possui solução analítica. Como alternativa, será aplicada a própria Transformação Integral, conforme procedimento descrito na Seção 3.3.3, para obtenção de uma solução. Para isso, é proposto o seguinte problema de autovalor auxiliar mais simples:

$$k_{wD} \nabla^2 \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) + \eta_m^2 \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) = 0 \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (5.7a)$$

$$\frac{\partial \tilde{\Omega}_m}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (5.7b)$$

com o seguinte par de fórmulas de transformação e inversão:

$$\text{transformada:} \quad \overline{\tilde{\psi}_{im}}(\mathbf{x}_D) = \int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) dv \quad (5.7c)$$

$$\text{inversa:} \quad \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}_{im}}(\mathbf{x}_D) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) \quad (5.7d)$$

Observa-se que as Equações (5.6a) e (5.6b) e Equações (5.7a) e (5.7b) são um caso particular das Equações (3.13a) e (3.13b) e Equações (3.17a–d), fazendo as seguintes substituições de variáveis:

$$w(\mathbf{x}_D) = 1 \quad (5.8a)$$

$$d(\mathbf{x}_D) = 0 \quad (5.8b)$$

$$\hat{w}(\mathbf{x}_D) = 1 \quad (5.8c)$$

$$\hat{k}_D(\mathbf{x}_D) = k_{wD} \quad (5.8d)$$

$$\hat{d}(\mathbf{x}_D) = 0 \quad (5.8e)$$

$$\alpha(\mathbf{x}_D) = 0 \quad (5.8f)$$

$$\beta(\mathbf{x}_D) = \frac{1}{k_D(\mathbf{x}_D)} \quad (5.8g)$$

Dessa forma, a solução para os autovalores e autofunções transformadas do problema original, necessárias para a utilização da fórmula de inversão da Equação (5.6d), é dada pelas Equações (3.19a–f) com as substituições de variáveis das Equações (5.8a–g):

$$(\mathbf{A} - \mu_i^2 \mathbf{B}) \tilde{\psi}_i = \mathbf{0} \quad (5.9a)$$

onde as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} são dadas por:

$$A_{jk} = \int_V k_D(\mathbf{x}_D) \nabla \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \cdot \nabla \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D) dv \quad (5.9b)$$

$$B_{jk} = \delta_{jk} \equiv \text{delta de Kronecker} \quad (5.9c)$$

A depender da forma da função $k_D(\mathbf{x}_D)$, a integral para os termos A_{jk} da matriz \mathbf{A} poderá ser resolvida analiticamente. Caso isso não seja possível, optar pela integração numérica pode não ser uma boa estratégia: a integração das autofunções $\tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D)$, que são fortemente oscilatórias conforme a ordem j aumenta, pode ter alto custo computacional. Em contrapartida, $k_D(\mathbf{x}_D)$ tende a ser uma função mais bem comportada na maioria das aplicações práticas. Uma opção nesses casos é empregar uma técnica de integração semi-analítica (COTTA *et al.*, 2015; COTTA e MIKHAILOV, 2005), onde o domínio de integração é particionado em subdomínios disjuntos nos quais a função $k_D(\mathbf{x}_D)$ possa ser aproximada e removida do integrando. A forma das heterogeneidades utilizadas a seguir pode ser considerada uma forma particular desta técnica de integração.

Partindo de um domínio inicial V homogêneo, a heterogeneidade será adicionada por meio de N blocos retangulares e regulares, sendo que a função $k_D(\mathbf{x}_D)$ será constante no interior de cada bloco. Essa configuração é ilustrada na Figura 5.1. Esta opção se deve a questões de simplicidade construtiva, mas vale ressaltar que a

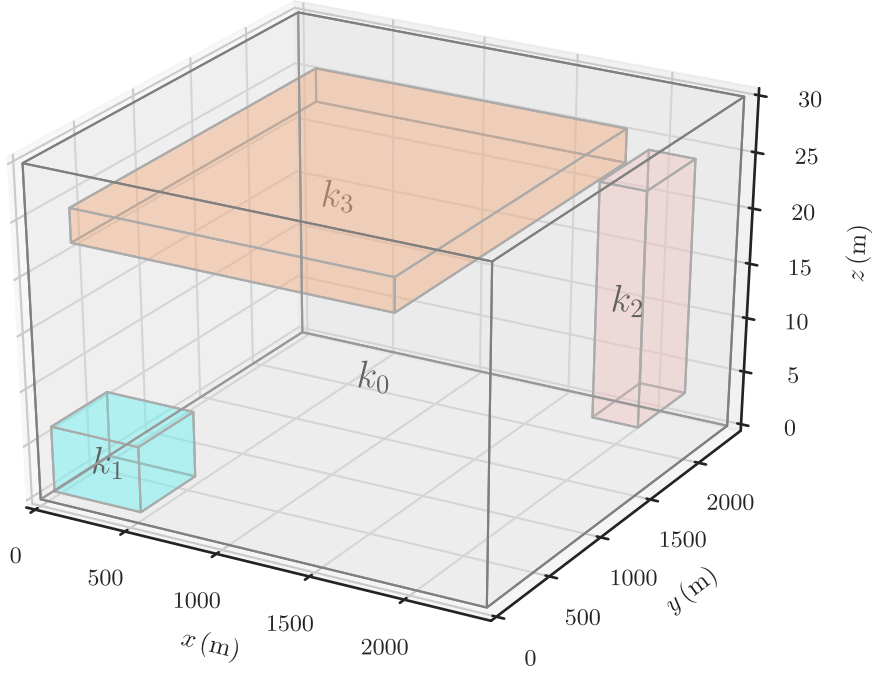


Figura 5.1: Heterogeneidade do domínio representada por uma função $k_D(\mathbf{x}_D)$ constante por partes, onde cada parte tem o formato de um bloco retangular e regular.

presente metodologia não apresenta nenhuma limitação em termos de aplicabilidade para o caso de adoção de formas irregulares. Apenas, eventualmente, outras técnicas de aceleração de convergência poderão se fazer necessárias.

Sob estas hipóteses, a integral da Equação (5.9b) pode ser dividida em integrais separadas para cada subdomínio, o que permite a retirada do fator $k_D(\mathbf{x}_D)$ do integrando, conforme

$$\begin{aligned}
 A_{jk} &= \int_V k_D(\mathbf{x}_D) \nabla \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \cdot \nabla \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D) dv \\
 &= \sum_{n=0}^N k_{Dn} \underbrace{\int_{V_n} \nabla \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \cdot \nabla \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D) dv}_{I_{jk}(V_n)} \\
 &= \sum_{n=0}^N k_{Dn} I_{jk}(V_n)
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

onde o subdomínio V_0 representa a região do domínio original externa a todos os N blocos. A integração da Equação (5.10) pode se tornar trabalhosa: enquanto os subdomínios $V_n, n \in \{1, 2, \dots, N\}$ criados são regulares, V_0 se tornou irregular, contendo “buracos” nas posições dos demais subdomínios. Uma forma de contornar

este problema é reescrever a integral como

$$\begin{aligned}
A_{jk} &= \sum_{n=0}^N k_{Dn} I_{jk}(V_n) \\
&= k_{wD} I_{jk}(V_0) + \sum_{n=1}^N k_{Dn} I_{jk}(V_n) \\
&= \left\{ k_{wD} I_{jk}(V_0) + \sum_{n=1}^N k_{wD} I_{jk}(V_n) \right\} + \left\{ - \sum_{n=1}^N k_{wD} I_{jk}(V_n) + \sum_{n=1}^N k_{Dn} I_{jk}(V_n) \right\} \\
&= k_{wD} I_{jk}(V) - \sum_{n=1}^N (k_{wD} - k_{Dn}) I_{jk}(V_n) \tag{5.11}
\end{aligned}$$

Dessa forma, todos os cálculos da integral $I_{jk}(V_n)$ são sobre domínios retangulares e regulares. A expressão para $I_{jk}(V)$ pode ser ainda mais simplificada pela aplicação da primeira identidade de Green:

$$\begin{aligned}
I_{jk}(V) &= \int_V \nabla \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \cdot \nabla \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D) dv \\
&= - \int_V \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \underbrace{\nabla^2 \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D)}_{(5.7a)} dv + \int_S \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \underbrace{\frac{\partial \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D)}{\partial \mathbf{n}}}_{(5.7b)} ds \\
&= \frac{\eta_k^2}{k_{wD}} \int_V \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D) dv \\
&= \frac{\eta_k^2}{k_{wD}} \delta_{jk} \tag{5.12}
\end{aligned}$$

Substituindo a Equação (5.12) na Equação (5.11), chega-se à expressão final para os termos da matriz \mathbf{A} do problema de autovalor:

$$A_{jk} = \eta_k^2 \delta_{jk} - \sum_{n=1}^N (k_{wD} - k_{Dn}) I_{jk}(V_n) \tag{5.13}$$

Para as demais integrais $I_{jk}(V_n)$:

$$\begin{aligned}
I_{jk}(V_n) &= \int_{V_n} \nabla \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_D) \cdot \nabla \tilde{\Omega}_k(\mathbf{x}_D) dv \\
&= \int_{V_n} \left\{ \frac{\partial \tilde{\Omega}_j}{\partial x_D} \frac{\partial \tilde{\Omega}_k}{\partial x_D} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_j}{\partial y_D} \frac{\partial \tilde{\Omega}_k}{\partial y_D} + \frac{\partial \tilde{\Omega}_j}{\partial z_D} \frac{\partial \tilde{\Omega}_k}{\partial z_D} \right\} dv \\
&= \underbrace{\int_{V_n} \frac{\partial \tilde{\Omega}_j}{\partial x_D} \frac{\partial \tilde{\Omega}_k}{\partial x_D} dv}_{I_{jk}(X)} + \underbrace{\int_{V_n} \frac{\partial \tilde{\Omega}_j}{\partial y_D} \frac{\partial \tilde{\Omega}_k}{\partial y_D} dv}_{I_{jk}(Y)} + \underbrace{\int_{V_n} \frac{\partial \tilde{\Omega}_j}{\partial z_D} \frac{\partial \tilde{\Omega}_k}{\partial z_D} dv}_{I_{jk}(Z)} \tag{5.14}
\end{aligned}$$

O problema de autovalor auxiliar escolhido, Equações (5.7a) e (5.7b), já foi resolvido na Seção 4.1 como parte da solução do problema do ponte fonte em reservatório

homogêneo ($k_{wD} = 1$) pela CITT. Para o caso de k_{wD} qualquer, vale observar que a Equação (5.7a) pode ser reescrita como

$$\nabla^2 \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) + \eta_m'^2 \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) = 0 \quad (5.15a)$$

onde

$$\eta_m' = \frac{\eta_m}{\sqrt{k_{wD}}} \quad (5.15b)$$

Comparando as Equações (4.4a) e (5.15a), vê-se que estas expressões são idênticas, a menos da transformação de variáveis dada pela Equação (5.15b). A solução das Equações (5.7a) e (5.7b), portanto, é dada pelas Equações (4.5a–h) após a mesma substituição de variáveis, resultando em autovalores dados por

$$\eta_m'^2 = \frac{\eta_m^2}{k_{wD}} = \lambda_k^2 + \gamma_n^2 + \nu_p^2 \quad (5.16)$$

Utilizando as Equações (4.5a–h), é possível resolver as integrais $I_{jk}(X)$, $I_{jk}(Y)$ e $I_{jk}(Z)$ como

$$\begin{aligned} I_{jk}(X) &= \int_{V_n} \frac{\partial \tilde{\Omega}_j}{\partial x_D} \frac{\partial \tilde{\Omega}_k}{\partial x_D} dv \\ &= \int_{V_n} \tilde{X}'_{j_x}(x_D) \tilde{X}'_{k_x}(x_D) \tilde{Y}_{j_y}(y_D) \tilde{Y}_{k_y}(y_D) \tilde{Z}_{j_z}(z_D) \tilde{Z}_{k_z}(z_D) dv \\ &= \int_{x_{D_n}} \tilde{X}'_{j_x}(x_D) \tilde{X}'_{k_x}(x_D) dx_D \int_{y_{D_n}} \tilde{Y}_{j_y}(y_D) \tilde{Y}_{k_y}(y_D) dy_D \int_{z_{D_n}} \tilde{Z}_{j_z}(z_D) \tilde{Z}_{k_z}(z_D) dz_D \end{aligned} \quad (5.17a)$$

As integrais $I_{jk}(Y)$ e $I_{jk}(Z)$ são análogas. Para as integrais em cada direção da Equação (5.17a):

$$\begin{aligned} \int \tilde{X}_{j_x}(x_D) \tilde{X}_{k_x}(x_D) dx_D &= \\ &\begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{N_{j_x} N_{k_x}}} \left\{ \frac{\sin[(\lambda_{j_x} - \lambda_{k_x})x_D]}{\lambda_{j_x} - \lambda_{k_x}} + \frac{\sin[(\lambda_{j_x} + \lambda_{k_x})x_D]}{\lambda_{j_x} + \lambda_{k_x}} \right\} & \lambda_{j_x} \neq \lambda_{k_x} \\ \frac{1}{2N_{j_x}} \left[x_D + \frac{\sin(2\lambda_{j_x} x_D)}{2\lambda_{j_x}} \right] & \lambda_{j_x} = \lambda_{k_x} \neq 0 \\ \frac{x_D}{N_{j_x}} & \lambda_{j_x} = \lambda_{k_x} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.17b)$$

$$\int \tilde{X}'_{j_x}(x_D)\tilde{X}'_{k_x}(x_D)dx_D = \begin{cases} \frac{\lambda_{j_x}\lambda_{k_x}}{2\sqrt{N_{j_x}N_{k_x}}}\left\{\frac{\sin[(\lambda_{j_x}-\lambda_{k_x})x_D]}{\lambda_{j_x}-\lambda_{k_x}}-\frac{\sin[(\lambda_{j_x}+\lambda_{k_x})x_D]}{\lambda_{j_x}+\lambda_{k_x}}\right\} & \lambda_{j_x}\neq\lambda_{k_x} \\ \frac{\lambda_{j_x}}{4N_{j_x}}[2\lambda_{j_x}x_D-\sin(2\lambda_{j_x}x_D)] & \lambda_{j_x}=\lambda_{k_x} \end{cases} \quad (5.17c)$$

As integrais nas direções y e z são análogas. Substituindo as Equações (5.17a–c) na Equação (5.14), e esta na Equação (5.13), pode-se calcular os termos A_{jk} da matriz \mathbf{A} do problema de autovalor algébrico da Equação (5.9a). A resolução deste problema, submetido a uma ordem de truncamento suficientemente grande, permite o cálculo dos autovalores μ_i e das autofunções transformadas $\tilde{\psi}_{ij}$ do problema de autovalor original. A fórmula de inversão da Equação (5.7d) pode então ser utilizada para reconstruir as autofunções $\tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D)$ do problema original.

5.1.3 Transformação Integral do Problema Filtrado

Para facilitar a visualização do efeito de filtro que a função $F_D(\mathbf{x}_D, t_D)$ tem sobre o problema, o termo (1) da Equação (5.1d) pode ser manipulado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (1) &= \left[\frac{\partial F_D}{\partial t_D} - \nabla \cdot (k_D(\mathbf{x}_D) \nabla F_D(\mathbf{x}_D, t_D)) \right] \\ &= \left[\frac{\partial F_D}{\partial t_D} - \nabla \cdot (k_D(\mathbf{x}_D) \nabla F_D(\mathbf{x}_D, t_D)) \right] + k_{wD} \nabla^2 F_D(\mathbf{x}_D, t_D) - k_{wD} \nabla^2 F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \\ &= \left[\frac{\partial F_D}{\partial t_D} - \nabla \cdot [(k_D(\mathbf{x}_D) - k_{wD}) \nabla F_D(\mathbf{x}_D, t_D)] \right] - k_{wD} \nabla^2 F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \\ &= -\nabla \cdot [(k_D(\mathbf{x}_D) - k_{wD}) \nabla F_D(\mathbf{x}_D, t_D)] + \underbrace{\left[\frac{\partial F_D}{\partial t_D} - k_{wD} \nabla^2 F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \right]}_{\text{Equação (5.3a)}} \\ &= -\nabla \cdot [(k_D(\mathbf{x}_D) - k_{wD}) \nabla F_D(\mathbf{x}_D, t_D)] + \delta_D(\mathbf{x}_D - \mathbf{x}_{wD}) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Substituindo a Equação (5.18) de volta na Equação (5.1d), chega-se à seguinte expressão para o termo fonte filtrado:

$$g^*(\mathbf{x}_D, t_D) = \nabla \cdot [(k_D(\mathbf{x}_D) - k_{wD}) \nabla F_D(\mathbf{x}_D, t_D)] \quad (5.19)$$

Vê-se pela Equação (5.19) que o termo fonte espacialmente concentrado do delta de Dirac foi substituído por uma função contínua e distribuída ao longo de todo o domínio do problema, o que deve ter efeito benéfico sobre a taxa de convergência da solução.

Aplicando a metodologia descrita na Seção 3.3, chega-se ao seguinte problema

para cálculo dos potenciais transformados $\overline{p_{D_i}^*}(t_D)$:

$$\frac{d\overline{p_{D_i}^*}}{dt_D} + \mu_i^2 \overline{p_{D_i}^*}(t_D) = \overline{g_i^*}(t_D) \quad (5.20a)$$

$$\overline{p_{D_i}^*}(0) = 0 \quad (5.20b)$$

onde

$$\overline{g_i^*}(t_D) = \int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) g^*(\mathbf{x}_D, t_D) dv \quad (5.20c)$$

Substituindo a Equação (5.19) na Equação (5.20c):

$$\begin{aligned} \overline{g_i^*}(t_D) &= \int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \nabla \cdot [(k_D(\mathbf{x}_D) - k_{wD}) \nabla F_D(\mathbf{x}_D, t_D)] dv \\ &= \underbrace{\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \nabla \cdot [k_D(\mathbf{x}_D) \nabla F_D(\mathbf{x}_D, t_D)] dv}_{(1)} - \underbrace{\int_V \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) k_{wD} \nabla^2 F_D(\mathbf{x}_D, t_D) dv}_{(2)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

O termo (1) da Equação (5.21) pode ser simplificado através da aplicação da segunda identidade de Green:

$$\begin{aligned} (1) &= \int_V F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \nabla \cdot [k_D(\mathbf{x}_D) \nabla \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D)] dv + \\ &\quad \int_S k_D(\mathbf{x}_D) \left[\tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \underbrace{\frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{n}}}_{(5.3c)} - F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \underbrace{\frac{\partial \tilde{\psi}_i}{\partial \mathbf{n}}}_{(5.6b)} \right] ds \\ &= \int_V F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \underbrace{\nabla \cdot [k_D(\mathbf{x}_D) \nabla \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D)]}_{(5.6a)} dv \\ &= -\mu_i^2 \int_V F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) dv \\ &= -\sum_{m=0}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}_{im}} \mu_i^2 \int_V F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) dv \end{aligned} \quad (5.22)$$

Na Equação (5.22), as próprias autofunções $\tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D)$ foram transformadas por um problema de autovalor auxiliar mais simples, envolvendo as autofunções auxiliares $\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D)$, conforme procedimento descrito na Seção 3.3.3.

O termo (2) da Equação (5.21) também pode ser simplificado, aplicando-se a

mesma transformação das autofunções e a segunda identidade de Green:

$$\begin{aligned}
(2) &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}}_{im} \int_V \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) k_{wD} \nabla^2 F_D(\mathbf{x}_D, t_D) dv \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}}_{im} \int_V k_{wD} \nabla^2 \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) F_D(\mathbf{x}_D, t_D) dv + \\
&\quad k_{wD} \int_S \left[\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) \underbrace{\frac{\partial F_D}{\partial \mathbf{n}}}_{(5.3c)} - F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \underbrace{\frac{\partial \tilde{\Omega}_m}{\partial \mathbf{n}}}_{(5.7b)} \right] ds \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}}_{im} \int_V \underbrace{k_{wD} \nabla^2 \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D)}_{(5.7a)} F_D(\mathbf{x}_D, t_D) dv \\
&= - \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}}_{im} \eta_m^2 \int_V F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) dv \tag{5.23}
\end{aligned}$$

Substituindo as Equações (5.22) e (5.23) de volta na Equação (5.21), chega-se a

$$\overline{g}_i^*(t_D) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}}_{im} (\eta_m^2 - \mu_i^2) \underbrace{\int_V F_D(\mathbf{x}_D, t_D) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) dv}_{(1)} \tag{5.24}$$

Falta resolver a integral (1) contendo o termo $F_D(\mathbf{x}_D, t_D)$ para obtenção da expressão final para a fonte transformada $\overline{g}_i^*(t_D)$, e então poder resolver o problema transformado das Equações (5.20a) e (5.20b). A forma da Equação (5.4b) é mais conveniente para cálculo da integral da Equação (5.24), tendo sido adotada para demonstração na Seção 5.1.4 e para implementação computacional neste trabalho.

O apêndice A demonstra o cálculo alternativo da fonte transformada usando a forma do filtro dada pela Equação (5.4a). Entretanto, esta forma apresentou custo computacional proibitivo devido à necessidade de aplicação de integração semi-analítica em uma malha altamente discretizada, com um integrando que é função não só de \mathbf{x}_D e t_D como também dos autovalores μ_i e das imagens j da Equação (5.4a). Sendo assim, não será utilizada no restante deste trabalho.

5.1.4 Solução do Problema Filtrado e Transformado

Substituindo a Equação (5.4b) na integral (1) da Equação (5.24):

$$\begin{aligned}
 (1) &= \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{\mathbf{wD}})t_D \underbrace{\int_V \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{\mathbf{D}})\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_{\mathbf{D}})dv}_{(3.18e)} + \\
 &\quad \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{k_{wD}\eta_j^2} \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{\mathbf{wD}}) \left(1 - e^{-k_{wD}\eta_j^2 t_D}\right) \underbrace{\int_V \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{\mathbf{D}})\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_{\mathbf{D}})dv}_{(3.18e)} \\
 &= \begin{cases} \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{\mathbf{wD}})t_D & m = 0 \\ \frac{1}{k_{wD}\eta_m^2} \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_{\mathbf{wD}}) \left(1 - e^{-k_{wD}\eta_m^2 t_D}\right) & m \geq 1 \end{cases} \quad (5.25)
 \end{aligned}$$

Substituindo a Equação (5.25) de volta na Equação (5.24):

$$\overline{g}_i^*(t_D) = -\tilde{\psi}_{i0}\mu_i^2 \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{\mathbf{wD}})t_D + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{im} \left(\frac{\eta_m^2 - \mu_i^2}{k_{wD}\eta_m^2}\right) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_{\mathbf{wD}}) \left(1 - e^{-k_{wD}\eta_m^2 t_D}\right) \quad (5.26)$$

Substituindo a Equação (5.26) na Equação (5.20a), o sistema das Equações (5.20a) e (5.20b) agora pode ser resolvido. Como ele é desacoplado, sua solução é analítica e dada pela Equação (3.16):

$$\begin{aligned}
 \overline{p}_{D_i}^*(t_D) &= \int_0^{t_D} e^{-\mu_i^2(t_D-\tau)} \overline{g}_i^*(\tau) d\tau \\
 &= \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{0m} \frac{\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_{\mathbf{wD}})}{k_{wD}} T_{0m}(t_D) & i = 0 \\ -\tilde{\psi}_{i0} \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{\mathbf{wD}}) T_{i0}(t_D) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\psi}_{im} \frac{\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_{\mathbf{wD}})}{k_{wD}} T_{im}(t_D) & i \geq 1 \end{cases} \quad (5.27a)
 \end{aligned}$$

onde

$$T_{0m}(t_D) = t_D - \frac{1}{k_{wD}\eta_m^2} \left(1 - e^{-k_{wD}\eta_m^2 t_D}\right) \quad (5.27b)$$

$$T_{i0}(t_D) = t_D - \frac{1}{\mu_i^2} \left(1 - e^{-\mu_i^2 t_D}\right) \quad (5.27c)$$

$$T_{im}(t_D) = \left(\frac{1}{\mu_i^2} - \frac{1}{\eta_m^2}\right) \left(1 - e^{-\mu_i^2 t_D}\right) - \frac{1}{\eta_m^2} \left(\frac{\eta_m^2 - \mu_i^2}{k_{wD}\eta_m^2 - \mu_i^2}\right) \left[e^{-\mu_i^2 t_D} - e^{-k_{wD}\eta_m^2 t_D}\right] \quad (5.27d)$$

Derivando a Equação (5.27a) em relação ao tempo, obtém-se ainda

$$\frac{d\overline{p_{D_i}^*}}{dt_D} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}_{0m}} \frac{\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_{wD})}{k_{wD}} \frac{dT_{0m}}{dt_D} & i = 0 \\ -\overline{\tilde{\psi}_{i0}} \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{wD}) \frac{dT_{i0}}{dt_D} + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}_{im}} \frac{\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_{wD})}{k_{wD}} \frac{dT_{im}}{dt_D} & i \geq 1 \end{cases} \quad (5.28a)$$

onde

$$\frac{dT_{0m}}{dt_D} = 1 - e^{-k_{wD}\eta_m^2 t_D} \quad (5.28b)$$

$$\frac{dT_{i0}}{dt_D} = 1 - e^{-\mu_i^2 t_D} \quad (5.28c)$$

$$\frac{dT_{im}}{dt_D} = \left(1 - \frac{\mu_i^2}{\eta_m^2}\right) e^{-\mu_i^2 t_D} - \left(\frac{\eta_m^2 - \mu_i^2}{k_{wD}\eta_m^2 - \mu_i^2}\right) \left[k_{wD} e^{-k_{wD}\eta_m^2 t_D} - \frac{\mu_i^2}{\eta_m^2} e^{-\mu_i^2 t_D} \right] \quad (5.28d)$$

De posse de uma solução para os autovalores μ_i e η_m e para as autofunções $\overline{\tilde{\psi}_{im}}$ e $\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D)$, as Equações (5.27a–d) e (5.28a–d) podem ser utilizadas junto com a fórmula de inversão da Equação (5.6d) para reconstruir o potencial filtrado $p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D)$ e sua derivada temporal:

$$p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \overline{p_{D_i}^*}(t_D) \quad (5.29a)$$

$$\frac{\partial p_D^*}{\partial t_D} = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \frac{d\overline{p_{D_i}^*}}{dt_D} \quad (5.29b)$$

Este potencial filtrado pode ser substituído na Equação (3.23), juntamente com a expressão do filtro dada pela Equação (5.4a) ou Equação (5.5a), para reconstruir o potencial original $p_D(\mathbf{x}_D, t_D)$ ou sua derivada $\partial p_D / \partial t_D$.

5.2 Aplicação Numérica: Reservatório Estratificado

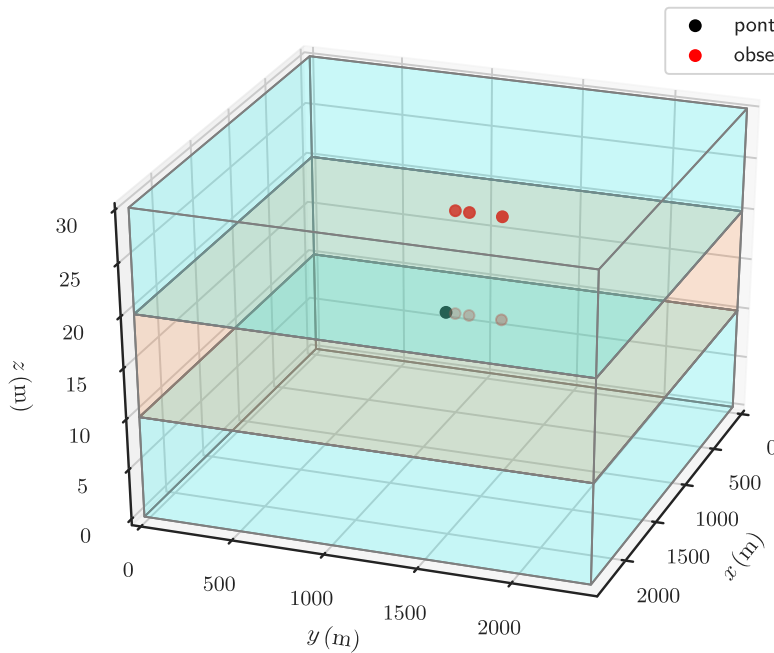
As expressões desenvolvidas na Seção 5.1 serão testadas nesta Seção.

Seja um ponto fonte posicionado em um reservatório retangular fechado, anisotrópico e estratificado em três camadas de permeabilidades distintas. Este problema pode ser formulado pelas Equações (3.5a–c), tomando o multiplicador de permeabilidade $k_D(\mathbf{x}_D)$ no valor de

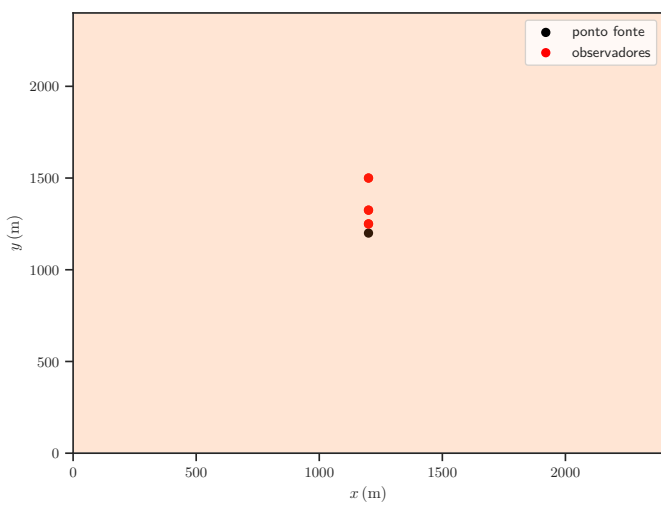
$$k_D(\mathbf{x}_D) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{3}L_{zD} \leq z_D \leq \frac{2}{3}L_{zD} \\ 0,5 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.30)$$

A Figura 5.2 ilustra este modelo de reservatório. O ponto fonte está posicionado em $z_{wD} = 0,5 \cdot L_{zD}$, portanto no centro da camada de maior permeabilidade. Serão utilizados os mesmos valores numéricos do exemplo do caso homogêneo da Seção 4.1, Tabela 4.1. Com estes valores, a forma especificada na Equação (5.30) para $k_D(\mathbf{x}_D)$ resulta em uma camada de 10 m de espessura, para um reservatório que totaliza 30 m na direção z .

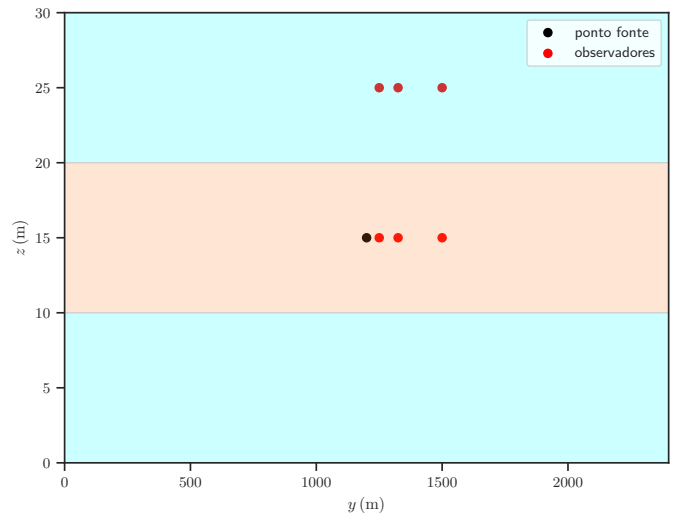
Além da posição do próprio poço, pode-se investigar o comportamento da solução em outros pontos do reservatório. Para isso, foram posicionados poços observadores nas posições apresentadas de forma esquemática na Figura 5.2, com coordenadas em relação ao ponto fonte descritas na Tabela 5.1.



(a) Visão 3D do modelo.



(b) Corte do plano $x - y$ em $z = z_{wD}$.



(c) Corte do plano $y - z$ em $x = x_{wD}$.

Figura 5.2: Desenho esquemático com o modelo de reservatório da Seção 5.2.

Tabela 5.1: Posições dos poços observadores em relação à fonte, conforme esquemático da Figura 5.2.

Ponto	$\Delta x(\text{m})$	$\Delta y(\text{m})$	$\Delta z(\text{m})$
Fonte	0	0	0
Obs 1 inf	0	50	0
Obs 2 inf	0	125	0
Obs 3 inf	0	300	0
Obs 1 sup	0	50	10
Obs 2 sup	0	125	10
Obs 3 sup	0	300	10

Sobre estes pontos de observação, valem as seguintes observações:

- Foram escolhidos 3 pontos progressivamente mais afastados do poço no plano $x - y$, nomeados *Obs 1*, *Obs 2* e *Obs 3*. Para cada ponto, faz-se a medida da interferência de pressão em duas posições ao longo do eixo z : na mesma camada do poço (*inf*) e na camada imediatamente superior (*sup*). Esse raciocínio dá origem aos 6 pontos de observação mostrados na Figura 5.2 e na Tabela 5.1;
- Neste exemplo, toda a heterogeneidade encontra-se na variação de permeabilidade na direção z . Dito de outra forma: para qualquer plano $x - y$ escolhido, não há variação lateral de propriedades. Adicionalmente, o poço encontra-se no centro do reservatório. Trata-se, portanto, de um sistema com simetria radial, para todos os tempos anteriores ao início da influência das bordas do domínio. Isso faz com que a escolha de pontos de observação progressivamente mais afastados do poço apenas ao longo do eixo x seja suficiente para verificar o comportamento lateral da solução, não sendo necessário selecionar pontos equidistantes ao longo do eixo y ;
- Conforme mostra a Tabela 4.1, o domínio tem dimensão muito inferior na direção z do que nas direções x e y . Isso torna desnecessária a escolha de um maior número de pontos de observação ao longo da direção z .
- Na realidade operacional, a medição da pressão em outros pontos do reservatório está reservada a situações em que existirem poços previamente construídos naquelas posições, com sensores de pressão instalados e em operação. A situação mais comum é a de operações de teste de formação envolvendo um único poço.

5.2.1 Soluções de Referência

A Figura 5.3 contém o gráfico log-log com o comportamento esperado para a pressão e sua derivada logarítmica, no reservatório descrito no início da Seção 5.2.

São plotados os seguintes valores:

1. A solução analítica clássica para reservatório homogêneo pelo método das imagens, Equações (5.4a) e (5.5a), no caso em que a permeabilidade em todo o domínio é igual à permeabilidade da camada intermediária que contém a fonte. Foram utilizados 1900 termos no somatório, o que se mostrou suficiente para a convergência na escala gráfica para todos os tempos considerados;
2. A mesma solução pelo método das imagens para reservatório homogêneo, utilizando um campo de permeabilidade equivalente no longo tempo ao modelo heterogêneo de 3 camadas:

$$\begin{aligned}
 k_{D\text{equiv}} &= \frac{\sum_i k_{D_i} L_{zD_i}}{\sum_i L_{zD_i}} \\
 &= \frac{1}{L_{zD}} \left(0,5 \frac{L_{zD}}{3} + 1 \frac{L_{zD}}{3} + 0,5 \frac{L_{zD}}{3} \right) = \frac{2}{3} \quad (5.31)
 \end{aligned}$$

Para este valor mais baixo de permeabilidade, apenas 500 termos foram necessários no somatório para obtenção da solução convergida na escala gráfica;

3. Uma solução dita analítica para o problema heterogêneo de múltiplas camadas descrito no início da Seção 5.2, calculada no software de interpretação de testes *Saphir*¹;
4. Uma solução numérica para o mesmo problema heterogêneo de múltiplas camadas, calculada no simulador de fluxo *Rubis*¹;

As curvas de derivada da Figura 5.3 permitem a visualização de todos os regimes de fluxo² esperados para o modelo de reservatório da Figura 5.2:

- Fluxo esférico no curto tempo ($t < 0,1$ h), enquanto o ponto fonte se comporta como se estivesse em um meio infinito com propriedades equivalentes à camada onde está posicionado;
- Um regime de transição ($0,1 < t < 5$ h), em que a diferença de permeabilidade entre as camadas passa a influenciar a pressão sentida pela fonte. Neste exemplo numérico, esse regime se confunde com o momento em que o topo e base do reservatório foram atingidas, dando fim ao regime de fluxo esférico e início ao regime de fluxo radial;

¹Ver apêndice C sobre as características dos softwares comerciais utilizados.

²Ver apêndice B para explicações sobre os regimes de fluxo.

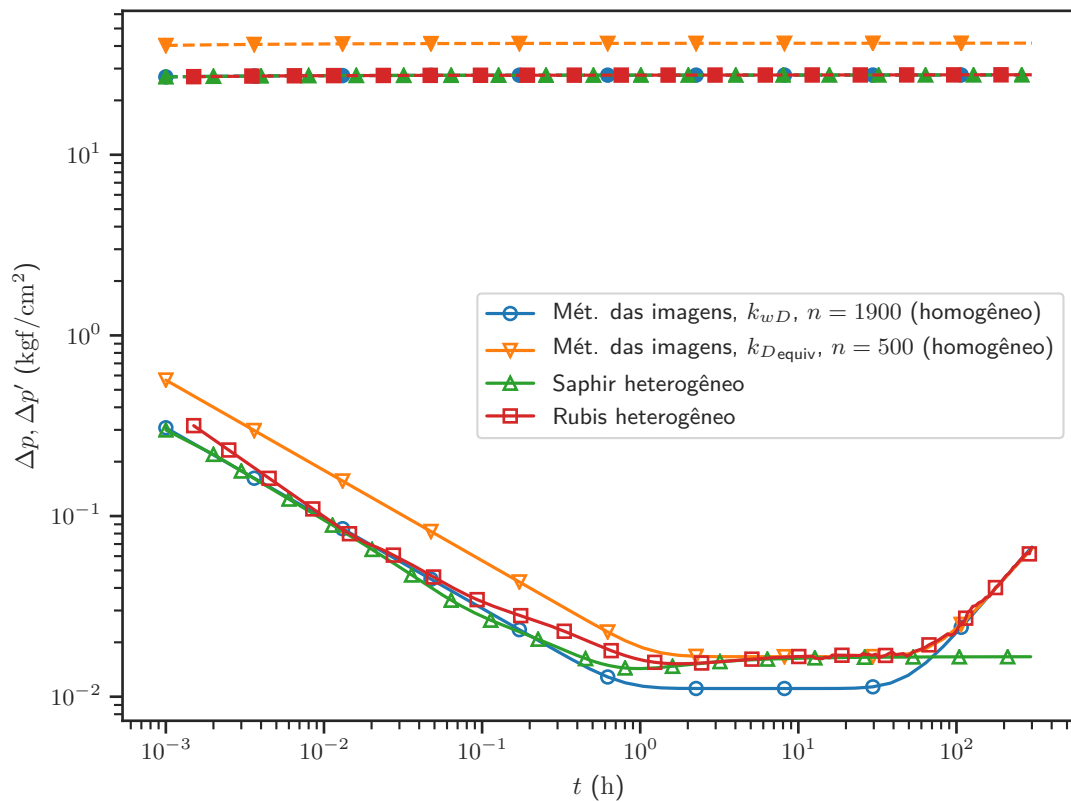


Figura 5.3: Gráfico log-log com as soluções numéricas de referência para o reservatório da Seção 5.2, comparadas a soluções analíticas de reservatório homogêneo pelo método das imagens calculadas na posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

- Fluxo radial no médio tempo ($5 < t < 50$ h), com permeabilidade horizontal equivalente à média entre as camadas e sem influência perceptível dos limites externos do reservatório;
- Regime pseudopermanente no longo tempo ($t > 50$ h), em que a presença dos limites externos do reservatório passa a dominar a resposta observada pela fonte, o que se caracteriza pela reta de inclinação unitária no gráfico log-log.

As soluções analíticas para reservatório homogêneo foram incluídas por fornecerem um balizador do resultado esperado e verificação de consistência, para os casos limite de maior e menor permeabilidade do modelo. É possível observar que a solução analítica para $k_D = 1$ se ajusta bem aos modelos numéricos no curto tempo, enquanto a curva para $k_D = k_{D\text{equiv}}$ se ajusta ao comportamento de longo tempo do sistema. A diferença observada no longo tempo entre os modelos do *Saphir* e do *Rubis* é explicada pela condição de contorno: o *Rubis* utiliza um reservatório fechado, idêntico ao problema tratado neste trabalho, enquanto o *Saphir* modela um reservatório lateralmente infinito. Nos tempos intermediários, os modelos numéricos apresentam a transição esperada entre os casos limite das suas soluções analíticas.

Um fato que merece atenção é a diferença no curto tempo (de 0,1 a 1 hora) observada nas curvas de derivada entre os modelos do *Saphir* e do *Rubis*. Para o modelo do ponto fonte no reservatório da Figura 5.2, este intervalo deve corresponder ao momento em que a interface entre as camadas de permeabilidades distintas passa a afetar a resposta de pressão sentida pelo ponto fonte. Parece haver uma diferença numérica ou de premissas entre estes dois modelos para o fenômeno que ocorre nesta interface. Esta suspeita é reforçada pela Figura 5.4, onde é tomado o caso limite deste modelo em que $k_D = 1$ no reservatório inteiro, configurando, portanto, um reservatório homogêneo. Seria esperado, neste caso, que os modelos do *Saphir* e do *Rubis* apresentassem curvas superpostas, tanto entre si quanto em relação à solução analítica. Isso não ocorre. Como a documentação dos softwares comerciais não apresenta referências claras sobre o equacionamento, não são possíveis investigações mais aprofundadas. As soluções numéricas obtidas pelo *Saphir* e *Rubis* serão ambas utilizadas como “referência” para o resultado calculado por Transformação Integral neste trabalho.

5.2.2 Solução por Transformação Integral

A Tabela 5.2 mostra a convergência dos primeiros 30 autovalores do problema de autovalor algébrico descrito na Seção 5.1.2. Conforme descrito na Seção 3.4.1, dois critérios de ordenamento complementares foram utilizados:

1. Uma lista preliminar de n autovalores do problema auxiliar foi montada a

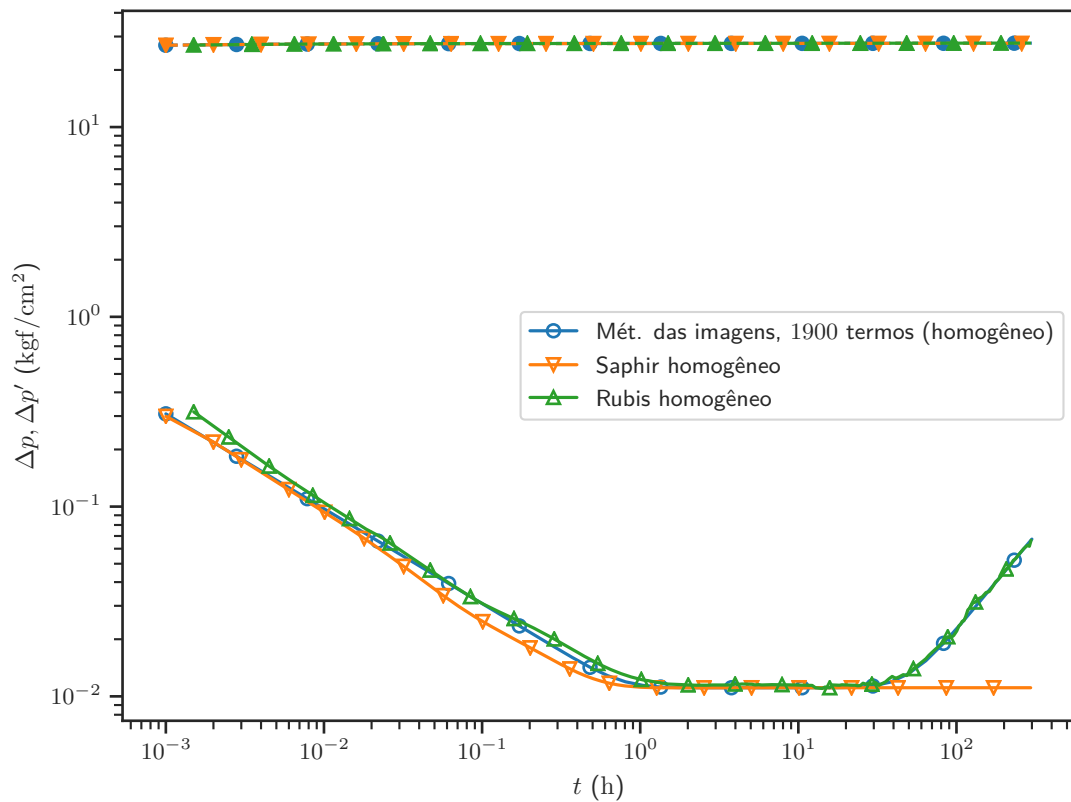


Figura 5.4: Gráfico log-log com as soluções numéricas para o caso homogêneo ($k_D = 1$) do reservatório da Seção 5.2, comparadas à solução analítica de reservatório homogêneo pelo método das imagens calculada na posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

partir do critério η_i^2 ;

2. Δn autovalores adicionais foram acrescentados à lista para levar em conta a heterogeneidade do meio, conforme critério de ordenamento da diagonal principal da matriz $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$.

Os títulos de cada coluna da tabela seguem o formato “ $n(m)$ ”:

- o quantitativo de elementos selecionados apenas pelo critério dos autovalores, que corresponde a n termos;
- seguido do número total de autovalores selecionados combinando os dois critérios, que corresponde a $m = n + \Delta n$ termos.

Portanto, o problema de autovalor foi resolvido sempre para uma ordem de truncamento de $m = n + \Delta n$ termos, que é o número entre parênteses nos títulos da tabela.

Conforme a ordem de truncamento do problema de autovalor algébrico aumenta, pequenas diferenças aparecem entre o primeiro e segundo dígitos decimais dos autovalores. Para entender a origem desta diferença, deve-se considerar a informação da Tabela 5.3, que mostra o quantitativo de autovalores unidimensionais distintos do problema auxiliar selecionados em cada direção ortogonal, cujas combinações compõem os elementos das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{C} do problema de autovalor algébrico, conforme o formalismo apresentado na Seção 3.3.3.

Em problemas da área de Reservatório, o domínio é tipicamente muito *menor*³ na direção z do que nas direções x e y . Neste problema específico, utilizando os dados numéricos da Tabela 4.1, calcula-se as seguintes relações para o tamanho do domínio na forma adimensional:

$$\frac{L_{xD}}{L_{yD}} = 1 \quad \frac{L_{xD}}{L_{zD}} = 8 \quad \frac{L_{yD}}{L_{zD}} = 8 \quad (5.32)$$

Como os autovalores do problema auxiliar em cada direção são inversamente proporcionais ao tamanho do domínio naquela direção, conforme a Equação (4.5c), constata-se que os autovalores das direções x e y têm magnitude muito inferior aos autovalores da direção z , levando esta a ser despriorizada pelo critério de ordenamento por η_i^2 . Uma comparação das Tabelas 5.2 e 5.3 sugere que as diferenças observadas nos primeiros dígitos dos autovalores estão correlacionadas às inclusões de elementos adicionais na direção z , conforme aumenta a ordem de truncamento do problema de autovalor algébrico. Claramente o critério duplo de seleção de autovalores descrito na Seção 3.4.1 não é suficiente para evitar totalmente a tendência

³Possível caso de uso para o *Balanço Integral*, como citado no Capítulo 7.

Tabela 5.2: Convergência dos primeiros 30 autovalores do problema de autovalor algébrico do modelo de reservatório da Seção 5.2, para diferentes ordens de truncamento.

μ_i	$n(m)$, onde $m = n + \Delta n$						
	50 (63)	100 (110)	250 (260)	500 (580)	1000 (1350)	2000 (2781)	12 000 (17 086)
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	1,2825	1,2825	1,2825	1,2823	1,2823	1,2823	1,2823
3	1,2825	1,2825	1,2825	1,2823	1,2823	1,2823	1,2823
4	1,8138	1,8138	1,8138	1,8131	1,8131	1,8131	1,8131
5	2,5651	2,5651	2,5651	2,5632	2,5632	2,5632	2,5631
6	2,5651	2,5651	2,5651	2,5632	2,5632	2,5632	2,5631
7	2,8679	2,8679	2,8679	2,8652	2,8652	2,8652	2,8651
8	2,8679	2,8679	2,8679	2,8652	2,8652	2,8652	2,8651
9	3,6276	3,6276	3,6276	3,6222	3,6222	3,6222	3,6220
10	3,8476	3,8476	3,8476	3,8412	3,8412	3,8412	3,8410
11	3,8476	3,8476	3,8476	3,8412	3,8412	3,8412	3,8410
12	4,0558	4,0558	4,0558	4,0483	4,0483	4,0483	4,0480
13	4,0558	4,0558	4,0558	4,0483	4,0483	4,0483	4,0480
14	4,6243	4,6243	4,6243	4,6132	4,6132	4,6132	4,6128
15	4,6243	4,6243	4,6243	4,6132	4,6132	4,6132	4,6128
16	5,1302	5,1302	5,1302	5,1150	5,1150	5,1150	5,1145
17	5,1302	5,1302	5,1302	5,1150	5,1150	5,1150	5,1145
18	5,2881	5,2881	5,2881	5,2715	5,2715	5,2715	5,2710
19	5,2881	5,2881	5,2881	5,2715	5,2715	5,2715	5,2710
20	5,4414	5,4414	5,4414	5,4233	5,4233	5,4233	5,4227
21	5,7357	5,7357	5,7357	5,7145	5,7145	5,7145	5,7139
22	5,7357	5,7357	5,7357	5,7145	5,7145	5,7145	5,7139
23	6,4127	6,4127	6,4127	6,3832	6,3832	6,3832	6,3823
24	6,4127	6,4127	6,4127	6,3832	6,3832	6,3832	6,3823
25	6,4127	6,4127	6,4127	6,3832	6,3832	6,3832	6,3823
26	6,4127	6,4127	6,4127	6,3832	6,3832	6,3832	6,3823
27	6,5397	6,5397	6,5397	6,5084	6,5084	6,5084	6,5075
28	6,5397	6,5397	6,5397	6,5084	6,5084	6,5084	6,5075
29	6,9067	6,9067	6,9067	6,8699	6,8699	6,8699	6,8688
30	6,9067	6,9067	6,9067	6,8699	6,8699	6,8699	6,8688

do algoritmo de selecionar poucos elementos na direção z , o que pode resultar em um ordenamento que não considera os termos mais significativos para o resultado final.

Tabela 5.3: Quantitativo de autovalores auxiliares unidimensionais distintos selecionados em cada direção ortogonal para compor as matrizes do problema de autovalor algébrico da Seção 5.2, para diferentes ordens de truncamento.

$n(m)$	Quantitativo		
	x	y	z
50 (63)	8	8	2
100 (110)	10	10	2
250 (260)	14	14	2
500 (580)	20	20	3
1000 (1350)	26	26	4
2000 (2781)	34	34	5
8000 (11 338)	56	56	8
12 000 (17 086)	65	65	8

A Figura 5.5 compara as soluções de referência descritas na Seção 5.2.1 com as soluções por GITT segundo a formulação desenvolvida na Seção 5.1.4. São apresentadas curvas para as seguintes ordens de truncamento da expansão do potencial: 50, 100, 250 e 500, sempre idênticas às ordens de truncamento utilizadas para o problema de autovalor algébrico em cada caso. A expressão do filtro, que corresponde à solução analítica clássica pelo método das imagens das Equações (5.4a) e (5.5a), foi calculada com 1900 termos no somatório.

É possível observar que a convergência da solução não ocorre de maneira uniforme ao longo de todo o intervalo de tempo testado. Enquanto grande parte do período já se encontra com a solução convergida na escala gráfica com apenas 50 termos na expansão em autofunções, o intervalo de tempo entre 0,1 a 6 horas ainda não atingiu a convergência com 500 termos.

A Figura 5.6 aumenta a ordem de truncamento do problema para o intervalo de 1000 a 12 000 termos, reduzindo gradativamente o intervalo de tempo para o qual a solução ainda não convergiu. Nota-se que com 1000 termos já ocorreu convergência na escala gráfica para quase todo o período de tempo considerado, com exceção do intervalo entre 0,1 e 1 hora. Ainda na escala gráfica, a convergência de todo o período ocorre com 8000 termos, conforme mostra a Figura 5.7. A ampliação mostrada na Figura 5.8 revela que resta um pequeno intervalo próximo a 0,1 horas em que ainda não ocorreu convergência completa, mesmo com 12 000 termos no problema transformado. Esse comportamento de convergência também pode ser observado nas Tabelas 5.4 e 5.5, para alguns tempos de referência.

Conforme mostrado na Tabela 5.2, o problema de autovalor já está praticamente

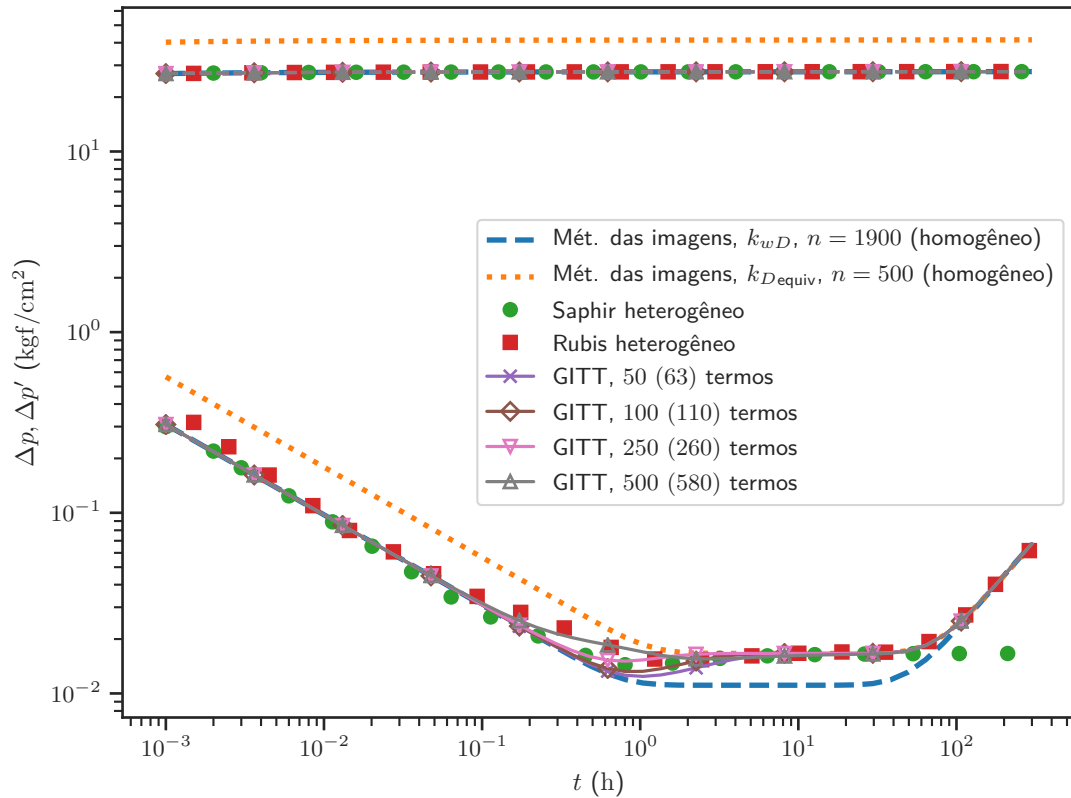


Figura 5.5: Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 50 (63) a 500 (580) termos. O filtro das soluções por GITT foi calculado com 1900 termos, em todos os casos. Todos os cálculos correspondem à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

convergiu com apenas 50 termos. Conclui-se que a necessidade de 8000 termos na expansão do potencial não pode ser causada, portanto, pelo problema de autovalor. Ao invés disso, a dificuldade deverá ser atribuída à convergência do próprio termo fonte filtrado.

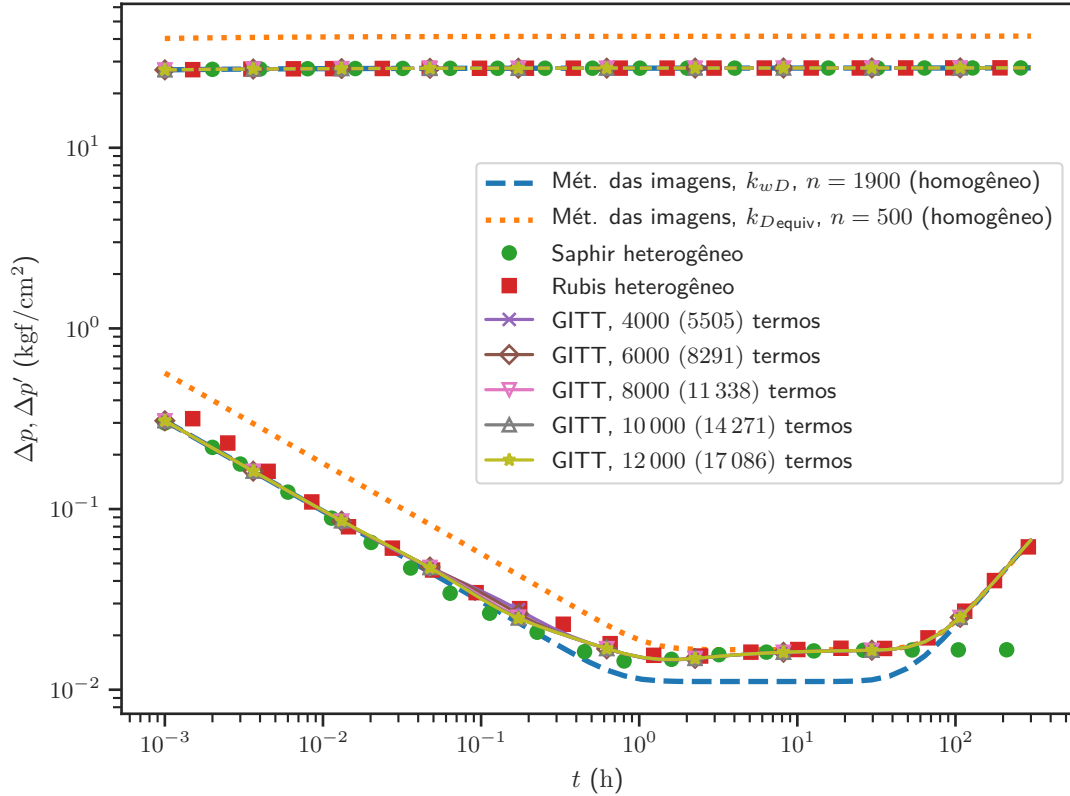


Figura 5.6: Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 1000 (1350) a 12 000 (17 086) termos. O filtro das soluções por GITT foi calculado com 1900 termos, em todos os casos. Todos os cálculos correspondem à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

A Figura 5.9 simplifica a Figura 5.6 para incluir apenas a melhor curva obtida, com 12 000 termos na expansão da pressão, para comparação com as soluções de referência. O comportamento das três soluções é coincidente em quase todo o intervalo, com exceção do período já citado anteriormente entre 0,1 e 1 hora. Neste período, inclusive, é notável que as três soluções diferem entre si. Conforme já discutido na Seção 5.2.1, este período deve corresponder ao momento em que a interface entre as camadas de permeabilidades distintas passa a afetar a resposta de pressão sentida pelo ponto fonte, no modelo de reservatório da Figura 5.2.

Com relação aos poços observadores mostrados na Figura 5.2 e na Tabela 5.1, as curvas de derivada geradas para uma ordem de truncamento de 12 000 termos podem ser vistas na Figura 5.10, comparadas a pontos gerados pelo simulador numérico

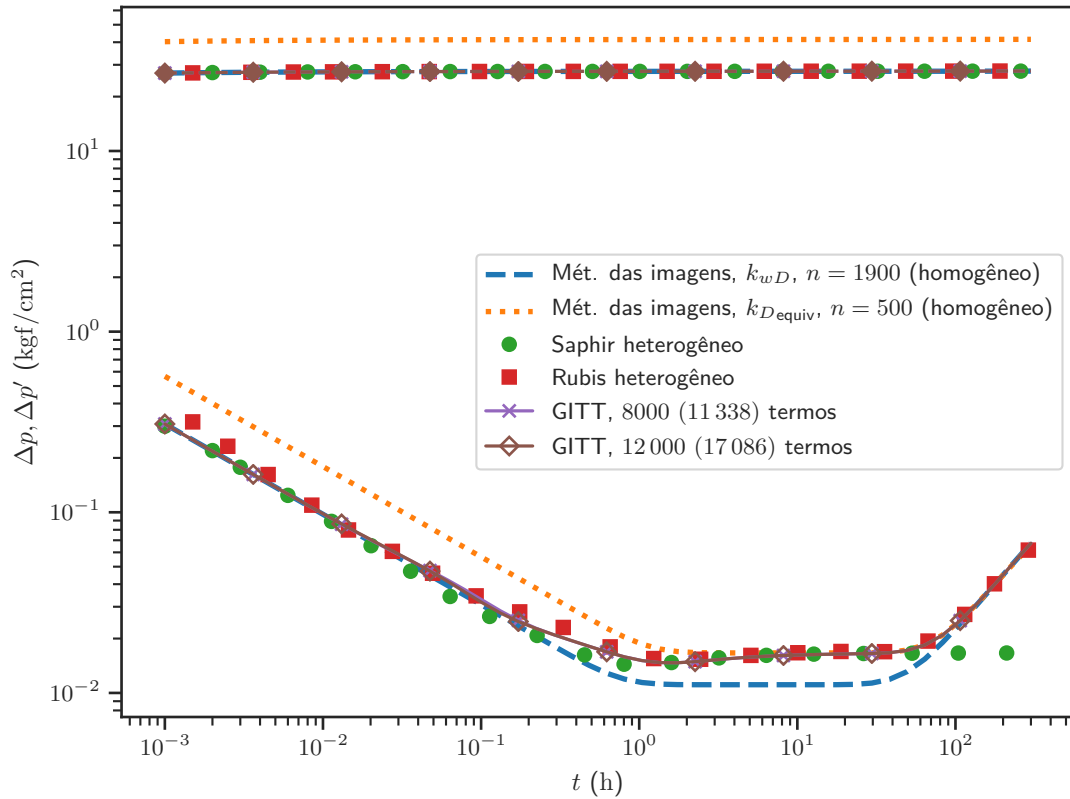


Figura 5.7: Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento de 8000 (11 338) e 12 000 (17 086) termos. O filtro das soluções por GITT foi calculado com 1900 termos, em todos os casos. Todos os cálculos correspondem à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

Tabela 5.4: Convergência do Δp na posição do ponto fonte para o problema da Seção 5.2, para diferentes ordens de truncamento.

Tempo (horas)	$\Delta p(\mathbf{x}_w, t) = p_i - p(\mathbf{x}_w, t)$ (kgf/cm ²)						Saphir	Rubis
	50	100	500	2000	8000	12 000		
0,01	27,4117	27,4117	27,4117	27,4117	27,4119	27,4121	27,4117	27,4117
0,1	27,5450	27,5450	27,5454	27,5478	27,5498	27,5497	27,5364	27,5478
1	27,5883	27,5888	27,5965	27,6018	27,5993	27,5987	27,5806	27,6023
10	27,6221	27,6245	27,6332	27,6371	27,6346	27,6341	27,6162	27,6387
100	27,6627	27,6650	27,6733	27,6772	27,6748	27,6742	27,6543	27,6798

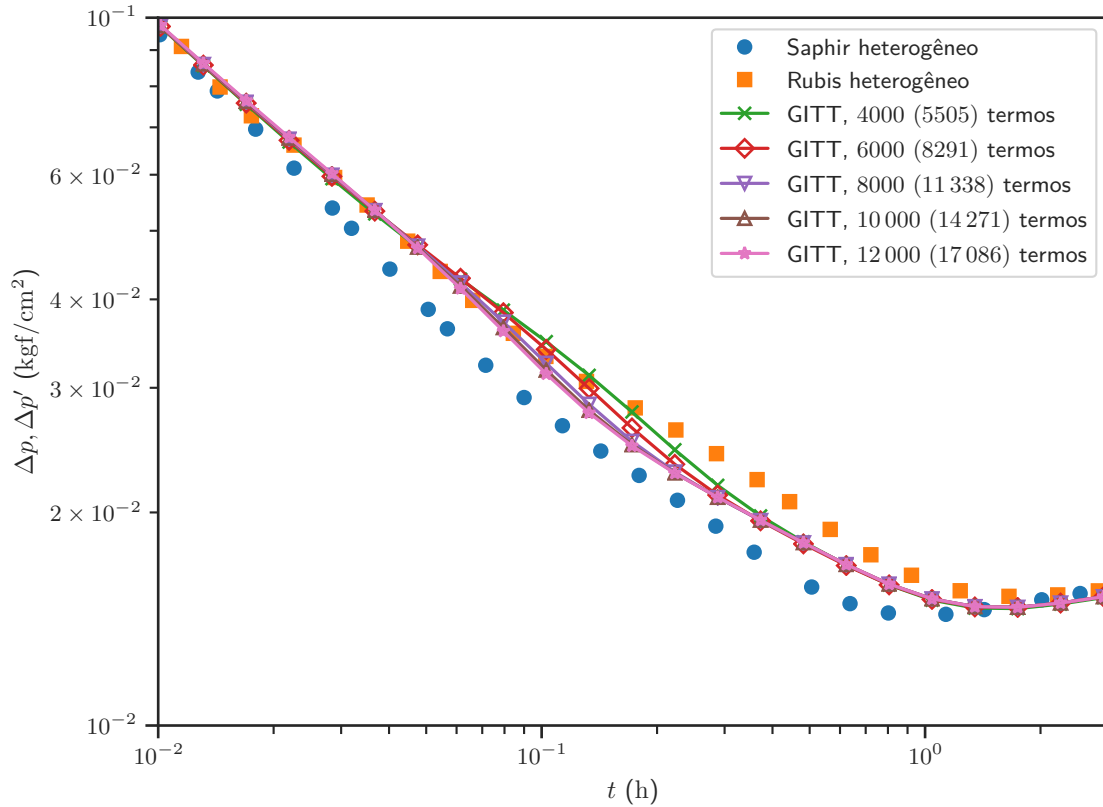


Figura 5.8: Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 2000 (2781) a 12 000 (17 086) termos. O filtro das soluções por GITT foi calculado com 1900 termos, em todos os casos. Todos os cálculos correspondem à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

Tabela 5.5: Convergência do $\Delta p'$ (derivada logarítmica) na posição do ponto fonte para o problema da Seção 5.2, para diferentes ordens de truncamento.

Tempo (horas)	$\Delta p'(\mathbf{x}_w, t) = \partial \Delta p / \partial \ln t$ (kgf/cm ²)						Saphir	Rubis
	50	100	500	2000	8000	12 000		
0,01	0,097472	0,097473	0,097483	0,097576	0,097984	0,098222	0,095104	0,098981
0,1	0,030839	0,030858	0,031597	0,034579	0,032971	0,031845	0,027829	0,033544
1	0,012423	0,013219	0,017106	0,015146	0,015196	0,015196	0,014312	0,016020
10	0,016622	0,016653	0,016205	0,016203	0,016216	0,016216	0,016330	0,016687
100	0,023814	0,023814	0,023803	0,023803	0,023804	0,023804	0,016621	0,023165

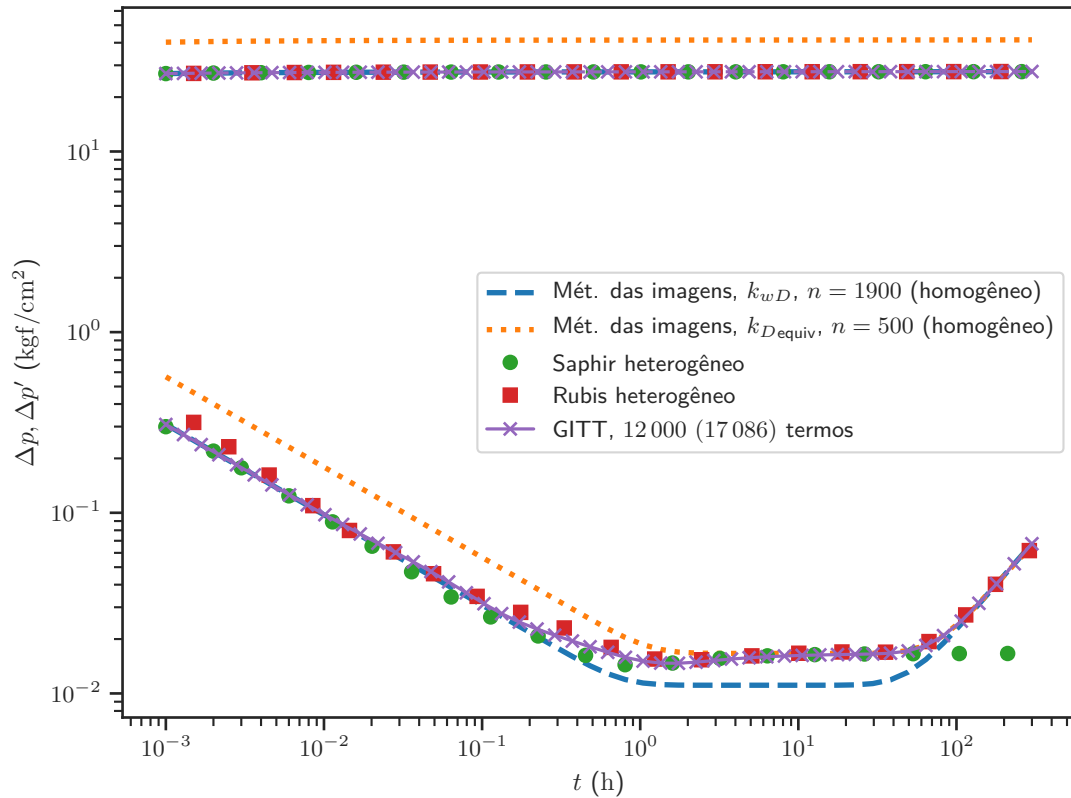


Figura 5.9: Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para a ordem de truncamento de 12 000 (17 086) termos. O filtro da solução por GITT foi calculado com 1900 termos. Todos os cálculos correspondem à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

Rubis. Não foram incluídos pontos de observação a partir da solução do software *Saphir*, por não haver suporte no software para geração dos pontos de observação no modelo de reservatório utilizado. As curvas de pressão foram omitidas, para facilitar a visualização das derivadas.

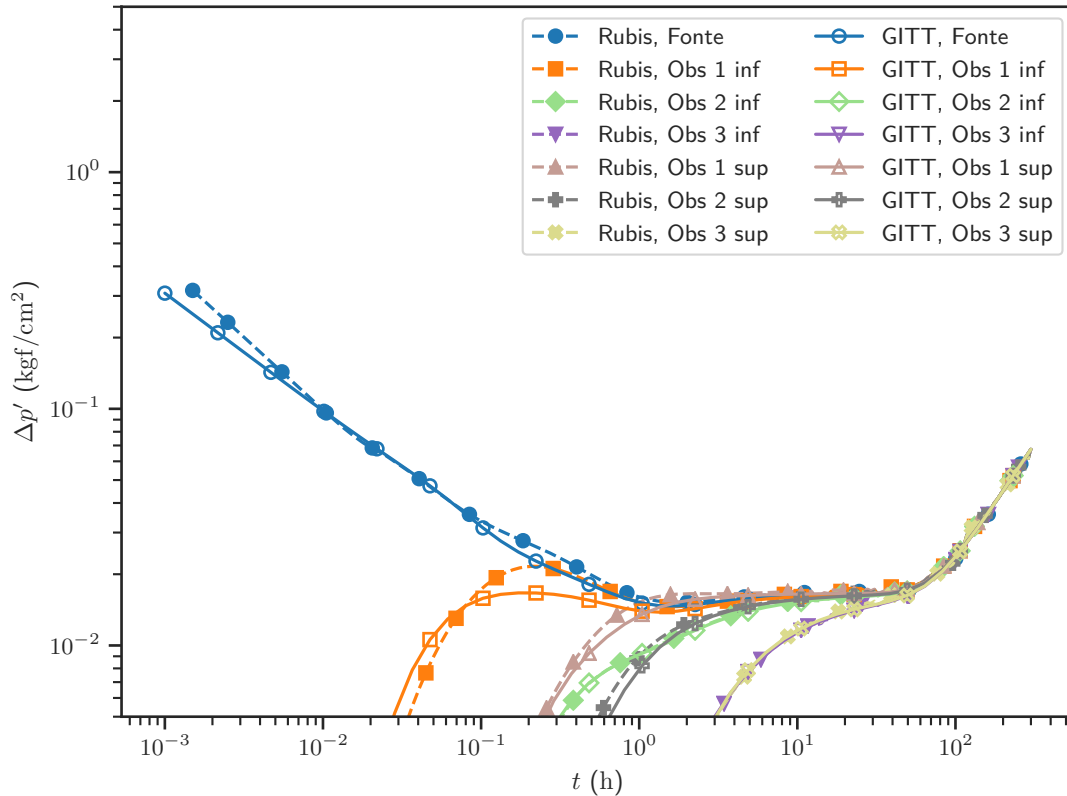


Figura 5.10: Gráfico log-log comparando a solução numérica de referência da Seção 5.2.1 com a solução por GITT, para a ordem de truncamento de 12000 (17086) termos, nas posições dos poços observadores. O filtro da solução por GITT foi calculado com 1900 termos. O cálculo *na fonte* corresponde à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$.

Da mesma forma como ocorreu para a posição do ponto fonte, grande parte do período de tempo apresenta resultado coincidente com a simulação numérica. A exceção está para o período inferior a 1 hora, em que ocorrem divergências entre as duas soluções tanto para o ponto fonte quanto para as posições dos dois observadores mais próximos (*Obs 1 inf* e *Obs 1 sup*), ambos posicionados a 50 m no plano $x - y$ do ponto fonte. A diferença na taxa de convergência da solução entre posições próximas ao ponto fonte e posições mais distantes pode ainda ser observada na Figura 5.11, onde é plotada a solução por GITT com ordem de truncamento de 1000 termos contra a mesma solução com ordem de 12000 termos, para cada ponto observador. Os únicos pontos com diferença significativa entre essas duas ordens de truncamento é a própria fonte, e o observador *Obs 1 inf* (o mais próximo da fonte, entre os observadores).

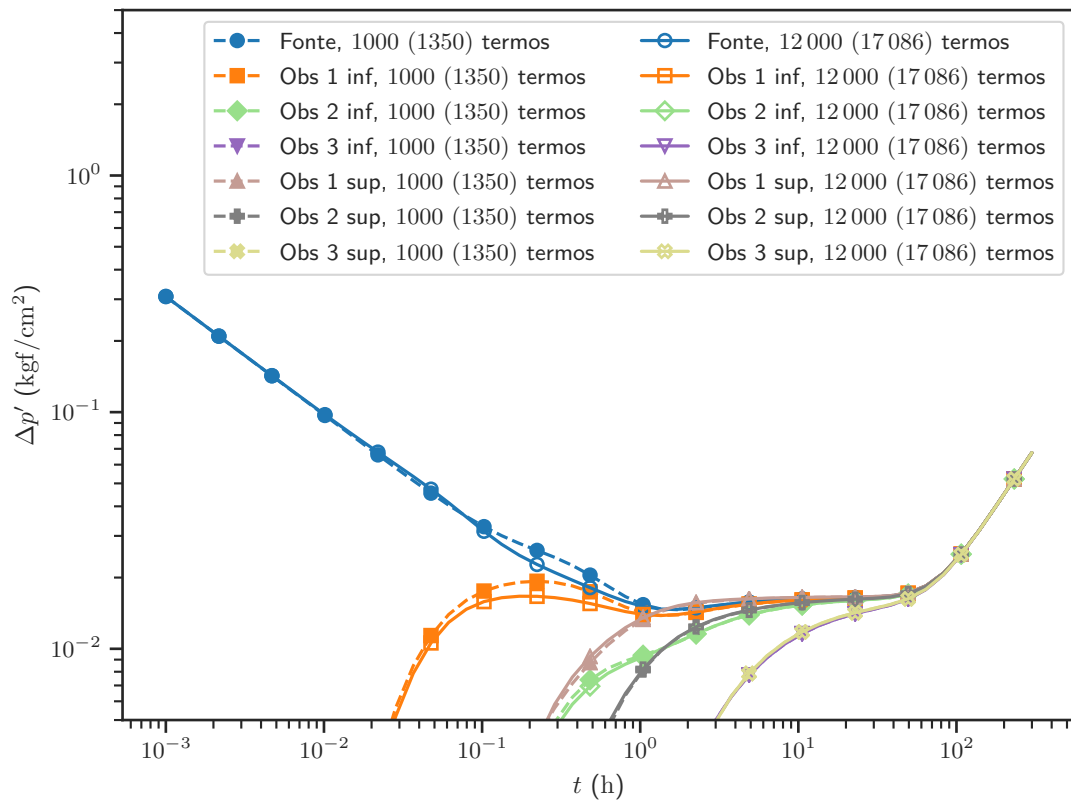


Figura 5.11: Gráfico log-log comparando as soluções da Seção 5.2.1 por GITT com 1000 (1350) e 12 000 (17 086) termos, nas posições dos poços observadores. O filtro das soluções por GITT foi calculado com 1900 termos. O cálculo *na fonte* corresponde à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$.

5.3 Aplicação Numérica: Fluxo em Canal

Seja um ponto fonte posicionado em um reservatório retangular fechado, anisotrópico e contendo um canal de permeabilidade mais elevada. Este problema pode ser formulado pelas Equações (3.5a-c), tomando o multiplicador de permeabilidade $k_D(\mathbf{x}_D)$ no valor de

$$k_D(\mathbf{x}_D) = \begin{cases} 1 & \frac{5}{12}L_{xD} \leq x_D \leq \frac{7}{12}L_{xD} \\ 0,5 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5.33)$$

A Figura 5.12 ilustra este modelo de reservatório. O ponto fonte está posicionado em $x_{wD} = 0,5 \cdot L_{xD}$, portanto no interior do canal de maior permeabilidade ($k_D = 1$). A região externa ao canal tem menor valor de permeabilidade ($k_D = 0,5$). Serão utilizados os mesmos valores numéricos do exemplo do caso homogêneo da Seção 4.1, Tabela 4.1. Com estes valores, a forma especificada na Equação (5.33) para $k_D(\mathbf{x}_D)$ resulta em um canal de 400 m de largura, para um reservatório que totaliza 2400 m na direção x .

Além da posição do próprio poço, pode-se investigar o comportamento da solução em outros pontos do reservatório. Para isso, foram posicionados poços observadores nas posições apresentadas de forma esquemática na Figura 5.12, com coordenadas em relação ao ponto fonte descritas na Tabela 5.6.

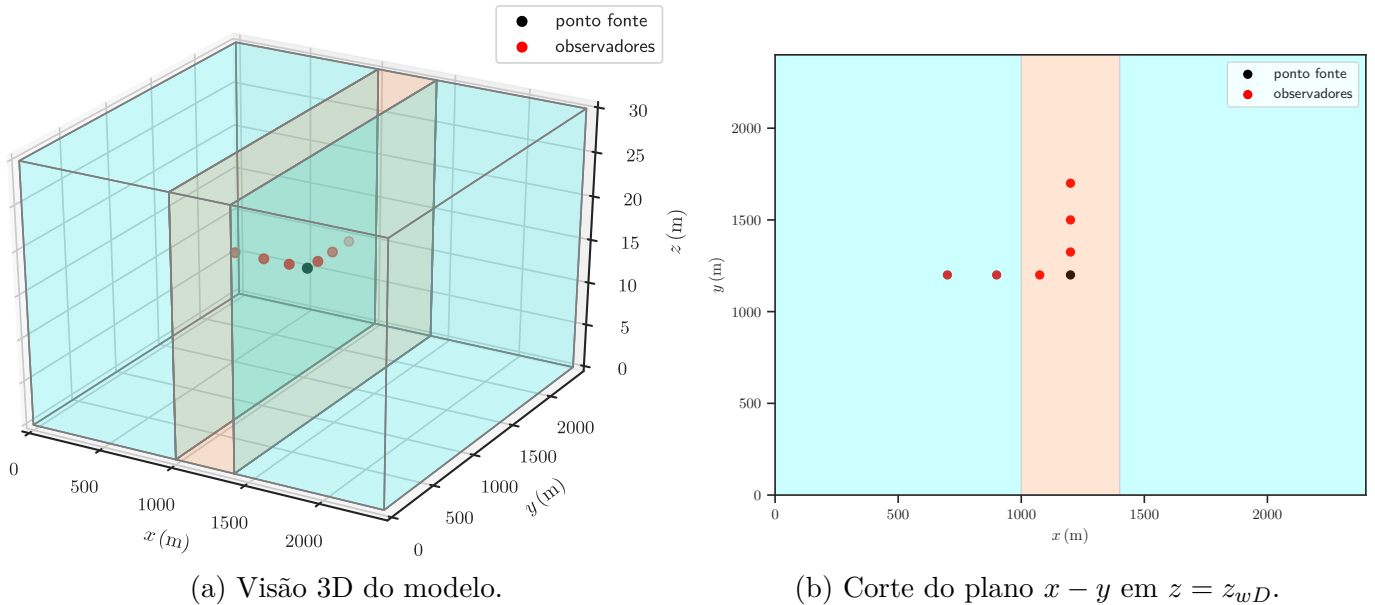


Figura 5.12: Desenho esquemático com o modelo de reservatório da Seção 5.3.

Sobre estes pontos de observação, valem as seguintes observações:

- Os pontos de observação deste exemplo foram escolhidos de forma a investigar a diferença de resposta i) ao longo do canal de alta permeabilidade onde se

Tabela 5.6: Posições dos poços observadores em relação à fonte, conforme esquemático da Figura 5.12.

Ponto	$\Delta x(\text{m})$	$\Delta y(\text{m})$	$\Delta z(\text{m})$
Fonte	0	0	0
Obs N1	0	125	0
Obs N2	0	300	0
Obs N3	0	500	0
Obs W1	-125	0	0
Obs W2	-300	0	0
Obs W3	-500	0	0

encontra o poço; e ii) na direção transversal ao canal, incluindo regiões de mais baixa permeabilidade;

- Diferentemente do que ocorreu no exemplo da Seção 5.2, neste caso a heterogeneidade está concentrada na variação de permeabilidade ao longo do eixo x . Dito de outra forma: para qualquer plano $y - z$ escolhido, não há variação de propriedades ao longo deste plano. Adicionalmente, o poço encontra-se no centro do reservatório. O sistema é, de fato, homogêneo em relação à direção z , tornando desnecessária a escolha de múltiplos pontos de observação nesta direção;
- A distância dos pontos de observação em cada direção são relativas ao poço e calculadas como $\Delta x = x_{\text{obs}} - x_w$, $\Delta y = y_{\text{obs}} - y_w$ e $\Delta z = z_{\text{obs}} - z_w$. Este exemplo apresenta pontos de observação que se encontram em posições no eixo x tal que $x_{\text{obs}} < x_w$, o que justifica a existência de valores negativos na Tabela 5.6.

5.3.1 Soluções de Referência

A Figura 5.13 contém o gráfico log-log com o comportamento esperado para a pressão e sua derivada logarítmica, no reservatório descrito no início da Seção 5.3. São plotados os seguintes valores:

1. A solução analítica clássica para reservatório homogêneo pelo método das imagens, Equações (5.4a) e (5.5a), no caso em que a permeabilidade em todo o domínio é igual à permeabilidade do interior do canal, onde está posicionada a fonte. Foram utilizados 1900 termos no somatório, o que se mostrou suficiente para a convergência na escala gráfica para todos os tempos considerados;
2. A mesma solução pelo método das imagens para reservatório homogêneo, utilizando a permeabilidade externa ao canal. Para este valor mais baixo de

permeabilidade, apenas 500 termos foram necessários no somatório para obtenção da solução convergida na escala gráfica;

3. Uma solução numérica para o mesmo problema heterogêneo, calculada no simulador de fluxo *Rubis*⁴. Este modelo de reservatório não está disponível no software *Saphir*.

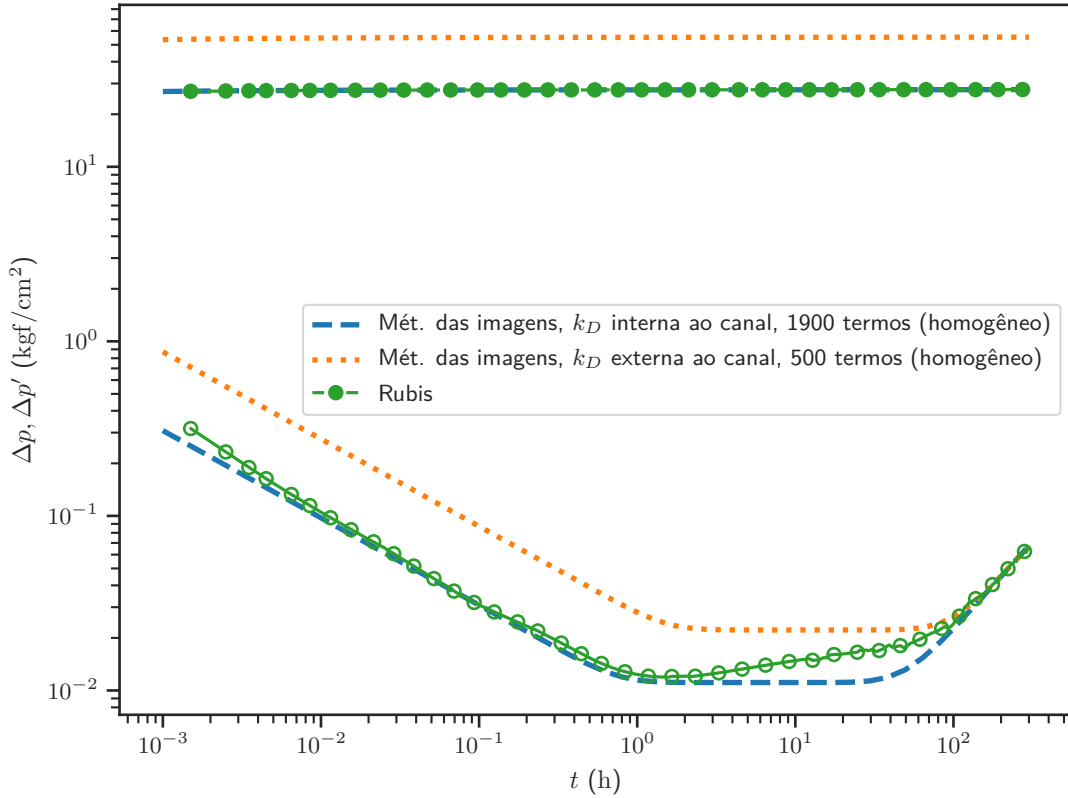


Figura 5.13: Gráfico log-log com as soluções numéricas de referência para o reservatório da Figura 5.12, comparadas a soluções analíticas de reservatório homogêneo pelo método das imagens calculadas na posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

As curvas de derivada da Figura 5.13 permitem a visualização de todos os regimes de fluxo⁵ esperados para o modelo de reservatório da Figura 5.12:

- Fluxo esférico no curto tempo ($t < 1$ h), enquanto o ponto fonte se comporta como se estivesse em um meio infinito;
- Regime de transição no médio tempo ($1 < t < 50$ h), em que o canal de mais alta permeabilidade é realimentado pelo restante do reservatório. Devido às dimensões reduzidas do canal, não há aparecimento de regime radial após o final do fluxo esférico;

⁴Ver apêndice C sobre as características dos softwares comerciais utilizados.

⁵Ver apêndice B para explicações sobre os regimes de fluxo.

- Regime pseudopermanente no longo tempo ($t > 50$ h), em que a presença dos limites externos do reservatório passa a dominar a resposta observada pela fonte, o que se caracteriza pela reta de inclinação unitária no gráfico log-log.

As soluções analíticas para reservatório homogêneo foram incluídas por fornecerem um balizador do resultado esperado e verificação de consistência, para os casos limite de maior e menor permeabilidade do modelo.

5.3.2 Solução por Transformação Integral

A Tabela 5.7 mostra a convergência dos primeiros 30 autovalores do problema de autovalor algébrico descrito na Seção 5.1.2. Conforme descrito na Seção 3.4.1, dois critérios de ordenamento complementares foram utilizados:

1. Uma lista preliminar de n autovalores do problema auxiliar foi montada a partir do critério η_i^2 ;
2. Δn autovalores adicionais foram acrescentados à lista para levar em conta a heterogeneidade do meio, conforme critério de ordenamento da diagonal principal da matriz $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$.

Os títulos de cada coluna da tabela seguem o formato “ $n(m)$ ”:

- o quantitativo de elementos selecionados apenas pelo critério dos autovalores, que corresponde a n termos;
- seguido do número total de autovalores selecionados combinando os dois critérios, que corresponde a $m = n + \Delta n$ termos.

Portanto, o problema de autovalor foi resolvido sempre para uma ordem de truncamento de $m = n + \Delta n$ termos, que é o número entre parênteses nos títulos da tabela.

Da mesma forma como ocorreu com o exemplo da Seção 5.2, pequenas diferenças aparecem nos autovalores conforme a ordem de truncamento do problema de autovalor algébrico aumenta. A Tabela 5.7 mostra um quantitativo de autovalores unidimensionais distintos do problema auxiliar selecionados muito similar ao constatado na Tabela 5.2, apesar da heterogeneidade deste exemplo ter características bastante distintas (existe somente na direção x , enquanto no exemplo da Seção 5.2 ela existia somente na direção z). O que há de comum entre os dois exemplos são as dimensões externas do domínio, o que influencia no critério de seleção pelo valor de η_i^2 . Verifica-se assim que este critério é dominante em relação ao da heterogeneidade, em termos da influência na seleção de termos para compor a matriz \mathbf{A} do problema de autovalor algébrico.

Tabela 5.7: Convergência dos primeiros 30 autovalores do problema de autovalor algébrico do modelo de reservatório da Seção 5.3, para diferentes ordens de truncamento.

μ_i	$n(m)$, onde $m = n + \Delta n$					
	50 (56)	100 (115)	200 (247)	500 (613)	1000 (1188)	10 000 (12 765)
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	1,1928	1,1928	1,1927	1,1927	1,1927	1,1926
3	1,2200	1,2189	1,2182	1,2157	1,2149	1,2125
4	1,6508	1,6500	1,6495	1,6476	1,6470	1,6453
5	2,2456	2,2405	2,2396	2,2393	2,2384	2,2377
6	2,3520	2,3520	2,3516	2,3514	2,3513	2,3512
7	2,5368	2,5362	2,5359	2,5347	2,5343	2,5331
8	2,5751	2,5722	2,5703	2,5701	2,5695	2,5690
9	3,3805	3,3784	3,3779	3,3777	3,3775	3,3774
10	3,4743	3,4742	3,4734	3,4732	3,4730	3,4727
11	3,5522	3,5517	3,5517	3,5506	3,5503	3,5494
12	3,6393	3,6340	3,6326	3,6263	3,6241	3,6183
13	3,8093	3,8039	3,8026	3,7966	3,7944	3,7889
14	4,2784	4,2729	4,2718	4,2663	4,2642	4,2592
15	4,3944	4,3932	4,3929	4,3922	4,3922	4,3919
16	4,5776	4,5652	4,5592	4,5570	4,5518	4,5477
17	4,6059	4,5774	4,5764	4,5761	4,5759	4,5755
18	4,6146	4,6122	4,6116	4,6108	4,6105	4,6099
19	4,7644	4,7379	4,7186	4,7166	4,7117	4,7079
20	4,9616	4,9557	4,9555	4,9499	4,9480	4,9435
21	5,2174	5,1903	5,1741	5,1725	5,1694	5,1656
22	5,4603	5,4600	5,4580	5,4563	5,4561	5,4551
23	5,6757	5,6753	5,6742	5,6739	5,6737	5,6733
24	5,6941	5,6917	5,6911	5,6904	5,6902	5,6896
25	5,8090	5,7821	5,7755	5,7706	5,7688	5,7648
26	5,9126	5,8849	5,8737	5,8725	5,8703	5,8681
27	6,0061	5,9826	5,9798	5,9744	5,9713	5,9662
28	6,1168	6,0926	6,0897	6,0843	6,0811	6,0760
29	6,4365	6,4106	6,4074	6,4019	6,3986	6,3934
30	6,5287	6,5174	6,5127	6,5103	6,5097	6,5078

Tabela 5.8: Quantitativo de autovalores auxiliares unidimensionais distintos selecionados em cada direção ortogonal para compor as matrizes do problema de autovalor algébrico da Seção 5.3, para diferentes ordens de truncamento.

$n(m)$	Quantitativo		
	x	y	z
50 (56)	8	9	2
100 (115)	11	11	2
200 (247)	14	15	2
500 (613)	19	21	3
1000 (1188)	25	27	4
10 000 (12 765)	56	61	8

A Figura 5.14 compara as soluções de referência descritas na Seção 5.3.1 com as soluções por GITT segundo a formulação desenvolvida na Seção 5.1.4. São apresentadas curvas para as seguintes ordens de truncamento da expansão do potencial: 100, 200, 500 e 10 000, sempre idênticas às ordens de truncamento utilizadas para o problema de autovalor algébrico em cada caso. A expressão do filtro, que corresponde à solução analítica clássica pelo método das imagens das Equações (5.4a) e (5.5a), foi calculada com 1900 termos no somatório.

Diferentemente do que ocorreu no problema da Seção 5.2, que precisou de 8000 termos na expansão em série para atingir a convergência na escala gráfica, neste exemplo a derivada está praticamente convergida com apenas 200 termos. Esse comportamento de convergência também pode ser observado nas Tabelas 5.9 e 5.10, para alguns tempos de referência.

Para compreender a diferença significativa de desempenho da solução por GITT entre estes dois exemplos, é importante observar que:

1. O exemplo da Seção 5.2 tem comportamento de reservatório homogêneo até cerca de 0,1 hora, quando a heterogeneidade das estratificações começa a ser sentida pelo ponto fonte. Já na Seção 5.3, o comportamento de reservatório homogêneo dura até quase 1 hora antes que a interface entre a borda do canal e o restante do reservatório passe a ser percebida;
2. Conforme demonstrado na Seção 4.3, a solução de meio homogêneo por CITT é idêntica à solução clássica do ponto fonte, após aplicação da fórmula da soma de Poisson. Ainda nesta Seção, foi citado um trabalho de RAGHAVAN (1995) que explica a diferença de desempenho computacional no caso homogêneo: a forma exponencial tem melhor desempenho para tempos curtos, enquanto a forma da CITT teria melhor desempenho para tempos longos;
3. A técnica primária de aceleração da taxa de convergência da solução utilizada neste trabalho é a filtragem do termo fonte, sendo que o filtro utilizado

corresponde à própria solução em meio homogêneo na forma exponencial.

A resposta de pressão do problema heterogêneo é dada pela soma do potencial filtrado com a resposta do próprio filtro, conforme a Equação (3.23). Como o filtro utilizado é a própria solução do meio homogêneo, uma outra forma de interpretar esta equação é constatar que a solução por GITT do meio heterogêneo nada mais é do que um termo corretivo para a solução do meio homogêneo. A forma exponencial utilizada na expressão do filtro tem maior facilidade para convergir em tempos curtos, diferente da forma da CITT/GITT que converge mais rapidamente em tempos longos. Sendo assim, quanto mais cedo (curto tempo) for necessário aplicar o fator corretivo da GITT, maior será a dificuldade de convergência.

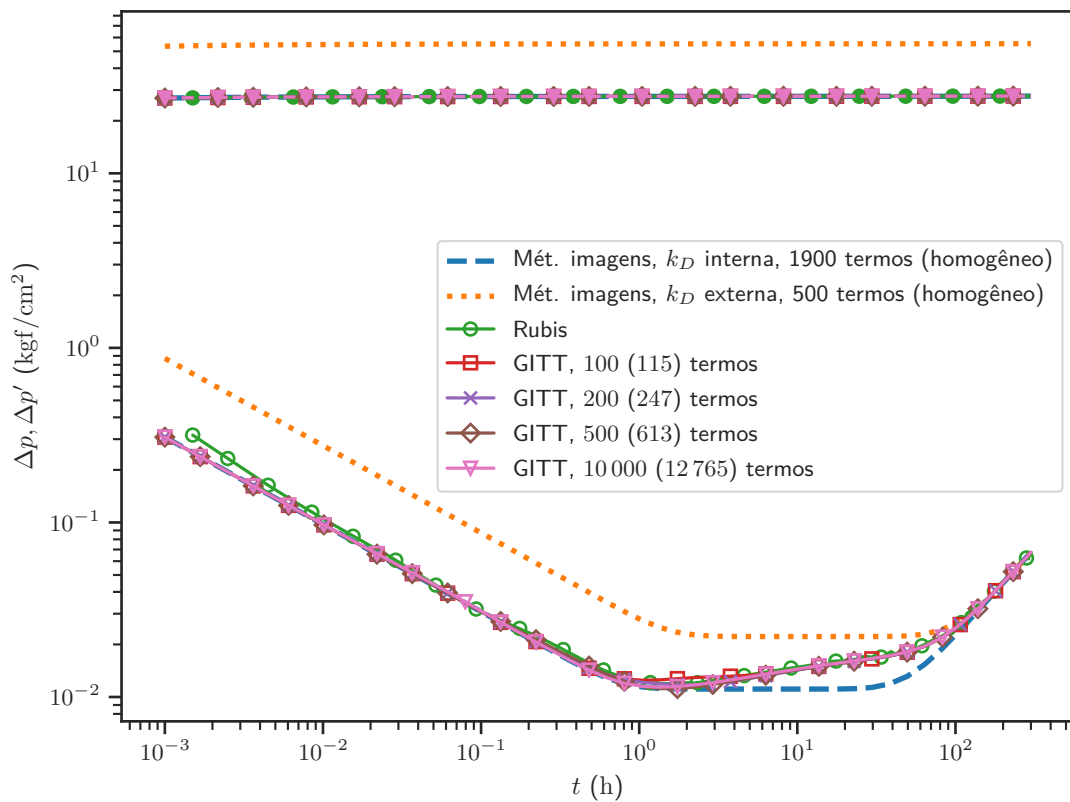


Figura 5.14: Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 5.3.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 100 (115) a 10 000 (12 765) termos. O filtro das soluções por GITT foi calculado com 1900 termos, em todos os casos. Todos os cálculos correspondem à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

Com relação aos poços observadores mostrados na Figura 5.12 e na Tabela 5.6, as curvas de derivada geradas para uma ordem de truncamento de 200 termos podem ser vistas na Figura 5.15, comparadas a pontos gerados pelo simulador numérico *Rubis*. As curvas de pressão foram omitidas, para facilitar a visualização das derivadas.

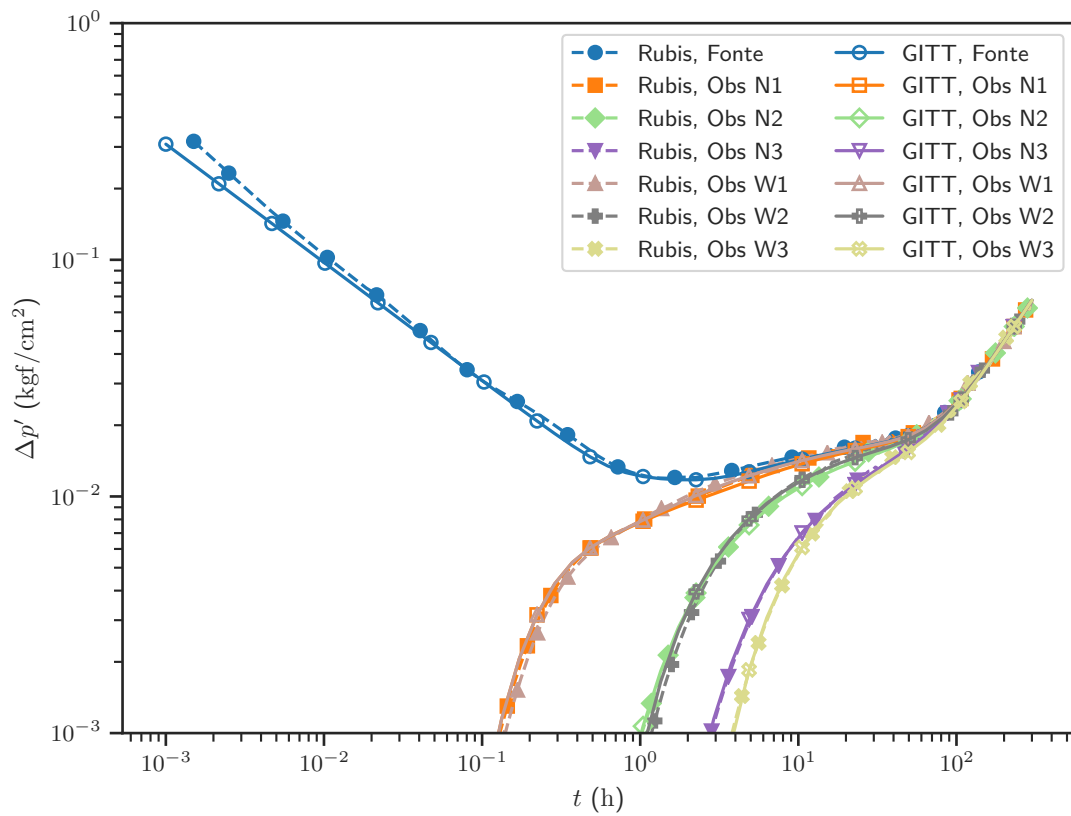


Figura 5.15: Gráfico log-log comparando a solução numérica de referência da Seção 5.3 com a solução por GITT, para a ordem de truncamento de 200 (247) termos, nas posições dos poços observadores. O filtro da solução por GITT foi calculado com 1900 termos. O cálculo *na fonte* corresponde à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$.

Tabela 5.9: Convergência do Δp na posição do ponto fonte para o problema da Seção 5.3, para diferentes ordens de truncamento.

Tempo (horas)	$\Delta p(\mathbf{x}_w, t) = p_i - p(\mathbf{x}_w, t)$ (kgf/cm ²)							Rubis
	50	100	200	500	1000	5000	10 000	
0,01	27,4117	27,4117	27,4117	27,4117	27,4117	27,4117	27,4118	27,4121
0,1	27,5450	27,5450	27,5450	27,5451	27,5452	27,5459	27,5462	27,5520
1	27,5882	27,5884	27,5885	27,5892	27,5891	27,5890	27,5891	27,5977
2	27,5969	27,5972	27,5968	27,5970	27,5969	27,5969	27,5971	27,6060
10	27,6196	27,6187	27,6172	27,6174	27,6176	27,6175	27,6178	27,6273
100	27,6600	27,6588	27,6573	27,6575	27,6579	27,6578	27,6581	27,6684

Tabela 5.10: Convergência do $\Delta p'$ (derivada logarítmica) na posição do ponto fonte para o problema da Seção 5.3, para diferentes ordens de truncamento.

Tempo (horas)	$\Delta p'(\mathbf{x}_w, t) = \partial \Delta p / \partial \ln t$ (kgf/cm ²)							Rubis
	50	100	200	500	1000	5000	10 000	
0,01	0,097472	0,097472	0,097473	0,097476	0,097481	0,097541	0,097635	0,105020
0,1	0,030838	0,030849	0,030872	0,031065	0,031232	0,031448	0,031183	0,030884
1	0,012282	0,012487	0,012198	0,011605	0,011475	0,011481	0,011559	0,012344
2	0,012971	0,012843	0,011744	0,011275	0,011551	0,011533	0,011596	0,012050
10	0,014863	0,014338	0,014255	0,014322	0,014439	0,014432	0,014457	0,014833
100	0,024747	0,024741	0,024745	0,024751	0,024767	0,024767	0,024770	0,024047

Todas as respostas de pressão, em todos os observadores, apresentam boa coerência com o resultado numérico do simulador de fluxo. Para os observadores mais próximos ao ponto fonte, as respostas dos observadores “ao norte” (N) e “a oeste” (W) são praticamente indistinguíveis entre si. Entretanto, para os observadores mais afastados ($N3$ e $W3$), fica claro que a interferência de pressão da fonte é percebida mais rapidamente pelo observador $N3$ do que pelo observador $W3$. Como o interior do canal do modelo de reservatório da Figura 5.12 apresenta permeabilidade mais elevada que o exterior, é perfeitamente coerente que o pulso de pressão se propague mais rapidamente na direção norte (ao longo do canal) do que na direção oeste (para fora do canal). Este fenômeno, resultado da heterogeneidade escolhida para o modelo, foi previsto pela simulação numérica e está bem representado pela solução por GITT.

Finalmente, a Figura 5.16 mostra uma comparação da solução por GITT com ordem de truncamento de 50 termos contra a mesma solução com ordem de 200 termos, para cada ponto observador. Os únicos pontos com diferença significativa entre essas duas ordens de truncamento são a própria fonte, e os observadores mais próximos $N1$ e $W1$.

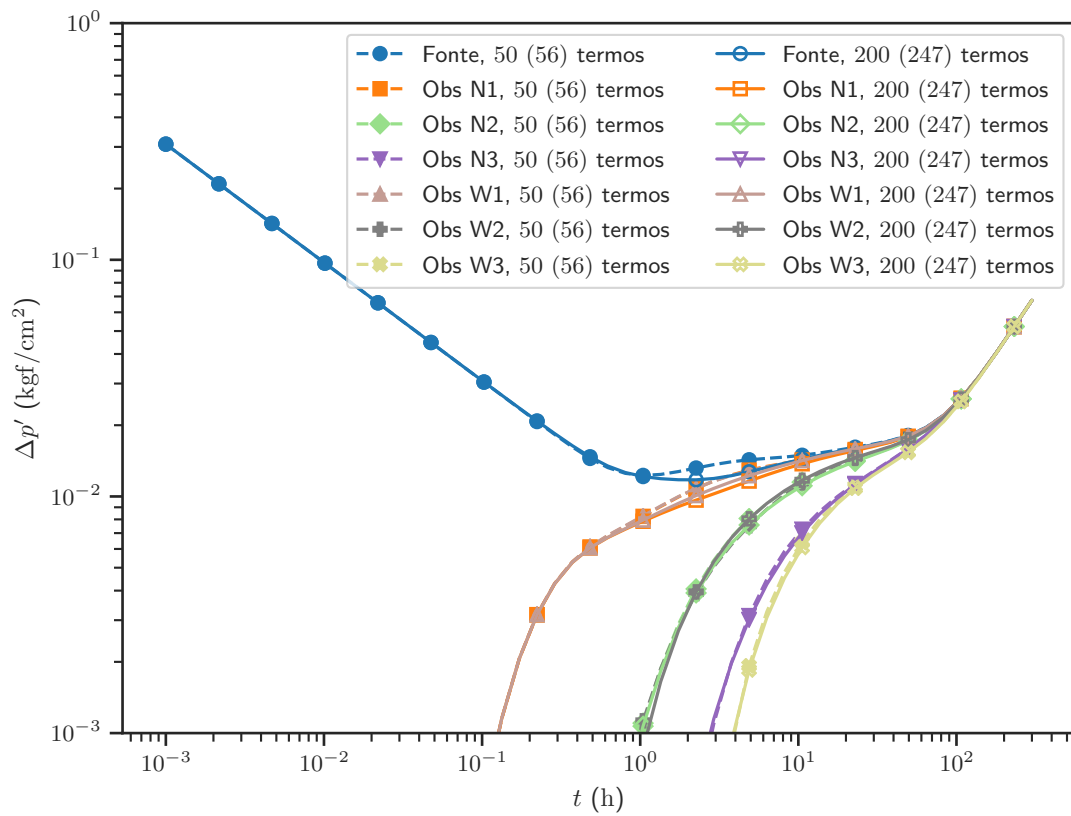


Figura 5.16: Gráfico log-log comparando as soluções da Seção 5.3 por GITT com 50 (56) e 200 (247) termos, nas posições dos poços observadores. O filtro das soluções por GITT foi calculado com 1900 termos. O cálculo *na fonte* corresponde à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$.

Capítulo 6

Solução de Fluxo Uniforme para Poço Vertical com Canhoneio Parcial em Reservatório Heterogêneo

Diversos autores investigaram os efeitos que o canhoneio¹ de um poço em apenas parte do intervalo vertical do reservatório produz sobre seu comportamento de pressão. Alguns modelos mais elaborados propõem, inclusive, formas de representar sistemas multicamadas em conjunto com o canhoneio parcial (STRELTSOVA-ADAMS, 1979). Da mesma forma como ocorre para o ponto fonte tratado nos Capítulos anteriores, não há um modelo analítico na literatura para formas mais gerais de heterogeneidades envolvendo poços nesta configuração.

Da mesma forma como foi demonstrado no Capítulo 5 para o ponto fonte, a GITT pode ser aplicada diretamente para resolver o problema do canhoneio parcial em um reservatório heterogêneo. Este Capítulo visa demonstrar a construção desta solução através das seguintes etapas:

1. Formulação e adimensionalização do problema;
2. Apresentação da solução analítica clássica para reservatório homogêneo;
3. Construção da solução em meio *heterogêneo* a partir da solução do ponto fonte do Capítulo 5, através do Princípio da Superposição.

¹Operação que abre o poço para fluxo de fluidos do meio poroso, conforme brevemente explicado na Seção 1.1.

6.1 Formulação e Adimensionalização do Problema

Sob as mesmas hipóteses apresentadas na Seção 3.1, o problema do poço vertical com canhoneio parcial, sujeito a fluxo uniforme, pode ser representado por

$$\nabla \cdot (\underline{K}(\mathbf{x}) \cdot \nabla p(\mathbf{x}, t)) - g'(\mathbf{x}) = \phi \mu_f c_t \frac{\partial p}{\partial t} \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (6.1a)$$

$$p(\mathbf{x}, 0) = p_i \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (6.1b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} = \nabla p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (6.1c)$$

onde

$$\underline{K}(\mathbf{x}) \equiv \text{tensor de permeabilidade} \quad (6.1d)$$

$$h_w \equiv \text{extensão vertical canhoneada do poço} \quad (6.1e)$$

$$g'(\mathbf{x}) = \frac{q}{h_w} \mu_f \delta(x - x_w) \delta(y - y_w) \Delta H(z - z_w) \quad (6.1f)$$

$$\Delta H(z - z_w) = H \left[z - \left(z_w - \frac{h_w}{2} \right) \right] - H \left[z - \left(z_w + \frac{h_w}{2} \right) \right] \quad (6.1g)$$

$$H(z - z_w) \begin{cases} 1 & z > z_w \\ 0 & z < z_w \end{cases} \equiv \text{função degrau de Heaviside} \quad (6.1h)$$

Usando os mesmos grupamentos adimensionais definidos na Seção 3.1, chega-se à seguinte formulação adimensional:

$$\nabla \cdot (k_D(\mathbf{x}_D) \nabla p_D(\mathbf{x}_D, t_D)) + g(\mathbf{x}_D) = \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (6.2a)$$

$$p_D(\mathbf{x}_D, 0) = 0 \quad \mathbf{x}_D \in V \quad (6.2b)$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial \mathbf{n}} = \nabla p_D(\mathbf{x}_D, t_D) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \mathbf{x}_D \in S \quad (6.2c)$$

onde

$$g(\mathbf{x}_D) = \frac{1}{h_{wD}} \delta_D(x_D - x_{wD}) \delta_D(y_D - y_{wD}) \Delta H(z_D - z_{wD}) \quad (6.2d)$$

$$h_{wD} = \frac{h_w}{L} \quad (6.2e)$$

e demais grupamentos adimensionais dados pelas Equações (3.4a–d).

6.2 Solução Analítica Clássica para Reservatório Homogêneo

A solução analítica clássica para o problema do canhoneio parcial em um reservatório homogêneo, finito, retangular e sem fluxo no contorno pode ser obtida diretamente da solução do ponto fonte para reservatório finito descrita na Seção 3.2.2, através do Princípio da Superposição. Sabendo que a relação entre as Equações (3.10a) e (3.10b) é dada por

$$p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \int_0^{t_D} \frac{\partial p_D}{\partial \tau} d\tau \quad (6.3)$$

pode-se substituir a Equação (6.3) na Equação (3.1), onde S é o comprimento do canhoneado que vai de $z_D = z_{wD} - h_{wD}/2$ até $z_D = z_{wD} + h_{wD}/2$, para chegar em

$$p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} \left[\int_0^{t_D} \frac{\partial p_D}{\partial \tau} d\tau \right] dz'_{wD} \quad (6.4)$$

Invertendo a ordem das integrações em τ e z'_{wD} e usando a expressão de $\partial p_D/\partial t_D$ da Equação (3.10b):

$$p_D(\mathbf{x}_D, t_D) = \frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} \left[\int_0^{t_D} \frac{\partial p_D}{\partial \tau} d\tau \right] dz'_{wD} \quad (6.5a)$$

$$= \int_0^{t_D} \left[\frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} \frac{\partial p_D}{\partial \tau} dz'_{wD} \right] d\tau \quad (6.5b)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{t_D} \left[\frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} \frac{1}{(4\pi\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R_{Di}^2}{4\tau}\right) dz'_{wD} \right] d\tau \quad (6.5c)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^{t_D} \frac{(-1)^{l(i)}}{8\pi h_{wD}\tau} \exp\left(-\frac{r_{Di}^2}{4\tau}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{f_{z^+,i}}{2\sqrt{\tau}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{f_{z^-,i}}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] d\tau \quad (6.5d)$$

onde

$$r_{Di} = \sqrt{(x_D + (-1)^i x_{wD} - 2kL_{xD})^2 + (y_D + (-1)^j y_{wD} - 2mL_{yD})^2} \quad (6.5e)$$

$$f_{z^+,i} = z_D + (-1)^l (z_{wD} + h_{wD}/2) - 2nL_{zD} \quad (6.5f)$$

$$f_{z^-,i} = z_D + (-1)^l (z_{wD} - h_{wD}/2) - 2nL_{zD} \quad (6.5g)$$

e onde cada índice i do somatório único corresponde a uma combinação dos índices ik, jm, ln originais, utilizando a mesma notação empregada na Seção 3.2.2. Diferentemente do que ocorreu com a solução do ponto fonte pelo método das imagens, Equações (3.10a) e (3.10b), a ocorrência da variável espacial z_D separada das variáveis x_D e y_D nas Equações (6.5a–g) faz com que a elaboração de um critério adequado de reordenamento para os somatórios de cada direção ortogonal não seja evidente. Além disso, a integral em τ da Equação (6.5d) não pode ser resolvida

analiticamente, restando para este propósito a integração numérica ou algum tipo de integração semi-analítica. A implementação deste trabalho utilizou a integração numérica, e seguiu o mesmo procedimento adotado na literatura de Reservatórios de somar cada direção ortogonal separadamente.

Usando o mesmo procedimento, a derivada temporal da Equação (6.5d) é dada por

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l(i)}}{8\pi h_{wD} t_D} \exp\left(-\frac{r_{Di}^2}{4t_D}\right) \left[\operatorname{erf}\left(\frac{f_{z^+,i}}{2\sqrt{t_D}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{f_{z^-,i}}{2\sqrt{t_D}}\right) \right] \quad (6.5h)$$

6.3 Solução por Transformação Integral para Reservatório Heterogêneo

Da mesma forma como realizado na Seção 6.2 para a solução clássica de meio homogêneo, a solução por Transformação Integral para o meio heterogêneo também pode ser obtida diretamente da solução do ponto fonte por aplicação do Princípio da Superposição. Substituindo a Equação (3.23) para o ponto fonte na Equação (3.1), onde S é o comprimento do canhoneado que vai de $z_D = z_{wD} - h_{wD}/2$ até $z_D = z_{wD} + h_{wD}/2$:

$$\begin{aligned} p_D(\mathbf{x}_D, t_D) &= \frac{1}{S} \int_S p_{Dpf}(\mathbf{x}_D, t_D) ds \\ &= \underbrace{\frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} F_{Dpf}(\mathbf{x}_D, t_D) dz'_{wD}}_{F_D(\mathbf{x}_D, t_D)} + \underbrace{\frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} \bar{p}_{Dpf}^*(\mathbf{x}_D, t_D) dz'_{wD}}_{\bar{p}_D^*(\mathbf{x}_D, t_D)} \\ &= F_D(\mathbf{x}_D, t_D) + \bar{p}_D^*(\mathbf{x}_D, t_D) \end{aligned} \quad (6.6)$$

A expressão de $F_D(\mathbf{x}_D, t_D)$ na Equação (6.6) é a solução clássica para canhoneio parcial em meio homogêneo, que já foi resolvida na Seção 6.2, sendo dada pela Equação (6.5d). O potencial filtrado $\bar{p}_D^*(\mathbf{x}_D, t_D)$ da solução de canhoneio parcial no meio heterogêneo pode ser obtido substituindo a expressão para o potencial filtrado do ponto fonte em meio heterogêneo da Equação (5.29a):

$$\begin{aligned} \bar{p}_D^*(\mathbf{x}_D, t_D) &= \frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} \bar{p}_{Dpf}^*(\mathbf{x}_D, t_D) dz'_{wD} \\ &= \frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \bar{p}_{Di pf}^*(t_D) dz'_{wD} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \underbrace{\frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} \bar{p}_{Di pf}^*(t_D) dz'_{wD}}_{\bar{p}_{Di}^*(t_D)} \end{aligned} \quad (6.7)$$

onde $\overline{p}_{D_i}^*(t_D)$ é dado pela Equação (5.27a). Vale observar que os únicos fatores desta equação que são função de z_{wD} , são as autofunções auxiliares $\tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{wD})$. Portanto,

$$\overline{p}_{D_i}^*(t_D) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\psi}_{0j} \frac{\Theta_j(\mathbf{x}_{wD})}{k_{wD}} T_{0j}(t_D) & i = 0 \\ -\overline{\psi}_{i0} \Theta_0(\mathbf{x}_{wD}) T_{i0}(t_D) + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\psi}_{ij} \frac{\Theta_j(\mathbf{x}_{wD})}{k_{wD}} T_{ij}(t_D) & i \geq 1 \end{cases} \quad (6.8a)$$

onde

$$\Theta_j(\mathbf{x}_{wD}) = \frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{wD}) dz'_{wD} \quad (6.8b)$$

Substituindo a expressão para as autofunções auxiliares das Equações (4.5a–h) na Equação (6.8b):

$$\begin{aligned} \Theta_j(\mathbf{x}_{wD}) &= \tilde{X}_m(x_{wD}) \tilde{Y}_n(y_{wD}) \frac{1}{h_{wD}} \int_{z_{wD}-h_{wD}/2}^{z_{wD}+h_{wD}/2} \tilde{Z}_p(z'_{wD}) dz'_{wD} \\ &= \tilde{X}_m(x_{wD}) \tilde{Y}_n(y_{wD}) \tilde{Z}_p(z_{wD}) \xi_j(h_{wD}) \\ &= \xi_j(h_{wD}) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{wD}) \end{aligned} \quad (6.9a)$$

onde

$$\xi_j(h_{wD}) = \begin{cases} 1 & p(j) = 0 \\ \frac{2}{h_{wD} \nu_{p(j)}} \sin\left(\frac{h_{wD}}{2} \nu_{p(j)}\right) & p(j) \geq 1 \end{cases} \quad (6.9b)$$

Aqui a notação $p(j)$ representa o índice p correspondente ao autovalor na direção z , conforme o reordenamento que agrupou os somatórios em m , n e p das três direções ortogonais sob o somatório único no índice j . Substituindo a Equação (6.9a) de volta na Equação (6.7), obtém-se a expressão final para os potenciais transformados:

$$\overline{p}_{D_i}^*(t_D) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\psi}_{0j} \frac{\xi_j(h_{wD}) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{wD})}{k_{wD}} T_{0j}(t_D) & i = 0 \\ -\overline{\psi}_{i0} \xi_0(h_{wD}) \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{wD}) T_{i0}(t_D) + \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\psi}_{ij} \frac{\xi_j(h_{wD}) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{wD})}{k_{wD}} T_{ij}(t_D) & i \geq 1 \end{cases} \quad (6.10)$$

Substituindo a Equação (6.10) na Equação (6.8a), obtém-se a expressão para o potencial filtrado do canhoneio parcial:

$$p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D) = \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \overline{p}_{D_i}^*(t_D) \quad (6.11)$$

onde $\overline{p}_{D_i}^*(t_D)$ é dado pela Equação (6.10). Substituindo esta expressão de volta na Equação (6.6), juntamente com a expressão do filtro da Equação (6.5d), pode-se

calcular o campo de pressão no meio heterogêneo submetido à produção por um poço vertical com canhoneio parcial.

De forma análoga, o mesmo procedimento pode ser feito para a derivada da pressão. Ou então, derivando diretamente a Equação (6.6):

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_D}{\partial t_D} &= \frac{\partial F_D}{\partial t_D} + \frac{\partial p_D^*}{\partial t_D} \\ &= \frac{\partial F_D}{\partial t_D} + \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D) \frac{d\overline{p_{D^*}^i}}{dt_D}\end{aligned}\quad (6.12a)$$

onde

$$\frac{d\overline{p_{D^*}^i}}{dt_D} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_{0j} \xi_j(h_{wD}) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{wD})}{k_{wD}} \frac{dT_{0j}}{dt_D} & i = 0 \\ -\tilde{\psi}_{i0} \xi_j(h_{wD}) \tilde{\Omega}_0(\mathbf{x}_{wD}) \frac{dT_{i0}}{dt_D} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\tilde{\psi}_{ij} \xi_j(h_{wD}) \tilde{\Omega}_j(\mathbf{x}_{wD})}{k_{wD}} \frac{dT_{ij}}{dt_D} & i \geq 1 \end{cases}\quad (6.12b)$$

com dT_{0j}/dt_D , dT_{i0}/dt_D e dT_{ij}/dt_D dados pelas Equações (5.28b–d), e onde $\partial F_D/\partial t_D$ é dado pela Equação (6.5h).

Vale ressaltar ainda que os autovalores μ_i e as autofunções $\tilde{\psi}_i(\mathbf{x}_D)$ dependem apenas da heterogeneidade do meio, e não da geometria da fonte. Dessa forma, estas expressões são as mesmas já obtidas para o problema do ponto fonte no Capítulo 5, e permaneceriam inalteradas para qualquer outra geometria de fonte que se deseje utilizar.

6.4 Aplicação Numérica: Reservatório Compartimentado

Seja um poço vertical com canhoneio parcial em um reservatório retangular fechado, anisotrópico e contendo:

- Dois compartimentos V_1 e V_2 , disjuntos e com as mesmas permeabilidades;
- Uma região V_3 de baixíssima permeabilidade que separa o reservatório em dois compartimentos;
- Uma camada de alta permeabilidade V_4 que atravessa ambos os compartimentos próximo à base;
- Um corredor de altíssima permeabilidade V_5 próximo à borda de um dos compartimentos.

A Figura 6.1 ilustra este modelo de reservatório. O problema pode ser formulado pelas Equações (6.1a–c), tomando o multiplicador de permeabilidade $k_D(\mathbf{x}_D)$ no valor de

$$k_D(\mathbf{x}_D) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x}_D \in V_1 \cup V_2 \\ 1 \times 10^{-4} & \mathbf{x}_D \in V_3 \\ 10 & \mathbf{x}_D \in V_4 \\ 100 & \mathbf{x}_D \in V_5 \end{cases} \quad (6.13)$$

onde as regiões V_i são tais que:

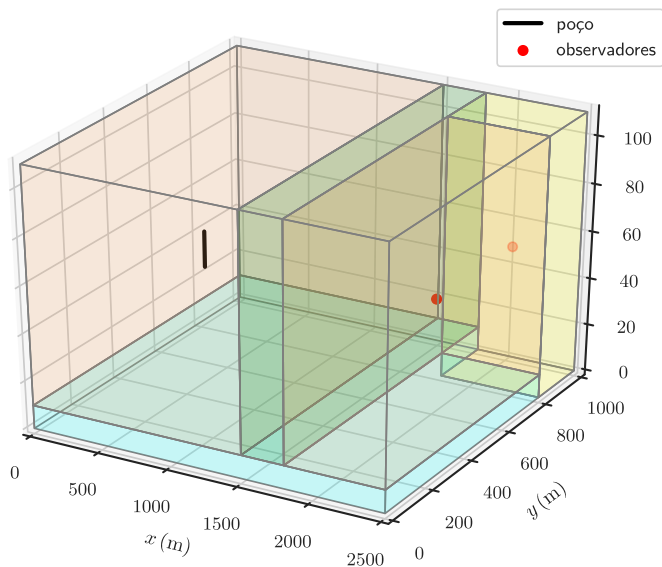
$$\begin{aligned} V_1 : \quad & x_D \in \left(0, \frac{3}{5}L_{xD}\right) & y_D \in (0, L_{yD}) & z_D \in \left(\frac{1}{11}L_{zD}, L_{zD}\right) \\ V_2 : \quad & x_D \in \left(\frac{18}{25}L_{xD}, L_{xD}\right) & y_D \in \left(0, \frac{4}{5}L_{yD}\right) & z_D \in \left(\frac{1}{11}L_{zD}, L_{zD}\right) \\ V_3 : \quad & x_D \in \left(\frac{3}{5}L_{xD}, \frac{18}{25}L_{xD}\right) & y_D \in (0, L_{yD}) & z_D \in \left(\frac{1}{11}L_{zD}, L_{zD}\right) \\ V_4 : \quad & x_D \in \left(0, \frac{18}{25}L_{xD}\right) & y_D \in (0, 1) & z_D \in \left(0, \frac{1}{11}L_{zD}\right) \\ & x_D \in \left(\frac{18}{25}L_{xD}, L_{xD}\right) & y_D \in \left(0, \frac{4}{5}L_{yD}\right) & z_D \in \left(0, \frac{1}{11}L_{zD}\right) \\ V_5 : \quad & x_D \in \left(\frac{18}{25}L_{xD}, L_{xD}\right) & y_D \in \left(\frac{4}{5}L_{yD}, L_{yD}\right) & z_D \in (0, L_{zD}) \end{aligned} \quad (6.14)$$

O poço está posicionado na região V_1 , e serão utilizados os valores numéricos mostrados na Tabela 6.1.

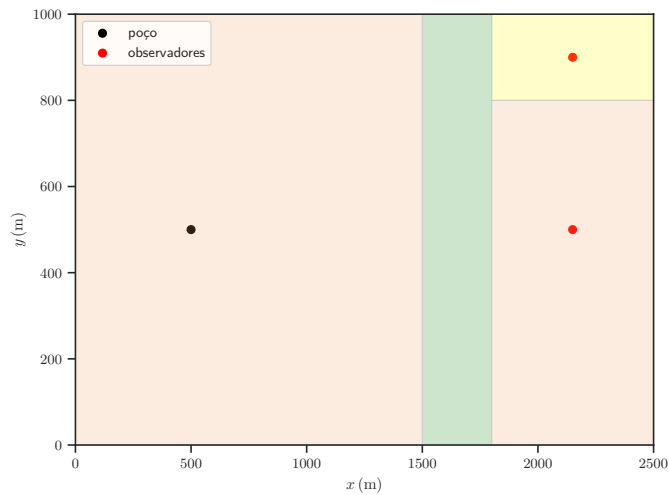
Tabela 6.1: Propriedades numéricas para o exemplo da Seção 6.4.

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
Vazão do poço, q	2500 m ³ /d	Raio do poço, r_w	4,75 pol
Permeabilidade em x , k_x	1000 mD	Dimensão em x , L_x	2500 m
Permeabilidade em y , k_y	1000 mD	Dimensão em y , L_y	1000 m
Permeabilidade em z , k_z	50 mD	Dimensão em z , L_z	110 m
Porosidade, ϕ	15 %	Posição do poço em x , x_w	500 m
Viscosidade, μ_f	1 cP	Posição do poço em y , y_w	500 m
Compressibilidade total, c_t	200×10^{-6} 1/kgf/cm ²	Posição do poço em z , z_w	55 m
Pressão inicial, p_i	300 kgf/cm ²	Comprimento canhoneado, h_w	15 m

Além da posição do próprio poço, pode-se investigar o comportamento da solução em outros pontos do reservatório. Para isso, foram posicionados poços observadores nas posições apresentadas de forma esquemática na Figura 6.1, com coordenadas em relação ao poço ativo descritas na Tabela 6.2.



(a) Visão 3D do modelo.



(b) Corte do plano $x - y$ em $z = z_{wD}$.

Figura 6.1: Desenho esquemático com o modelo de reservatório da Seção 6.4.

Tabela 6.2: Posições dos poços observadores em relação à fonte, conforme esquemático da Figura 6.1.

Ponto	$\Delta x(m)$	$\Delta y(m)$	$\Delta z(m)$
Poço	0	0	0
Obs 1	1650	0	0
Obs 2	1650	400	0

6.4.1 Soluções de Referência

A Figura 6.2 contém o gráfico log-log com o comportamento esperado para a pressão e sua derivada logarítmica, no reservatório descrito no início da Seção 6.4. São plotados os seguintes valores:

1. A solução analítica clássica para reservatório homogêneo, Equações (6.5d) e (6.5h), no caso em que a permeabilidade em todo o domínio é igual à permeabilidade das regiões V_1 e V_2 ;
2. Uma solução numérica calculada no simulador de fluxo *Rubis*² para o reservatório homogêneo;
3. Uma solução numérica calculada no simulador de fluxo *Rubis* para o reservatório heterogêneo da Figura 6.1.

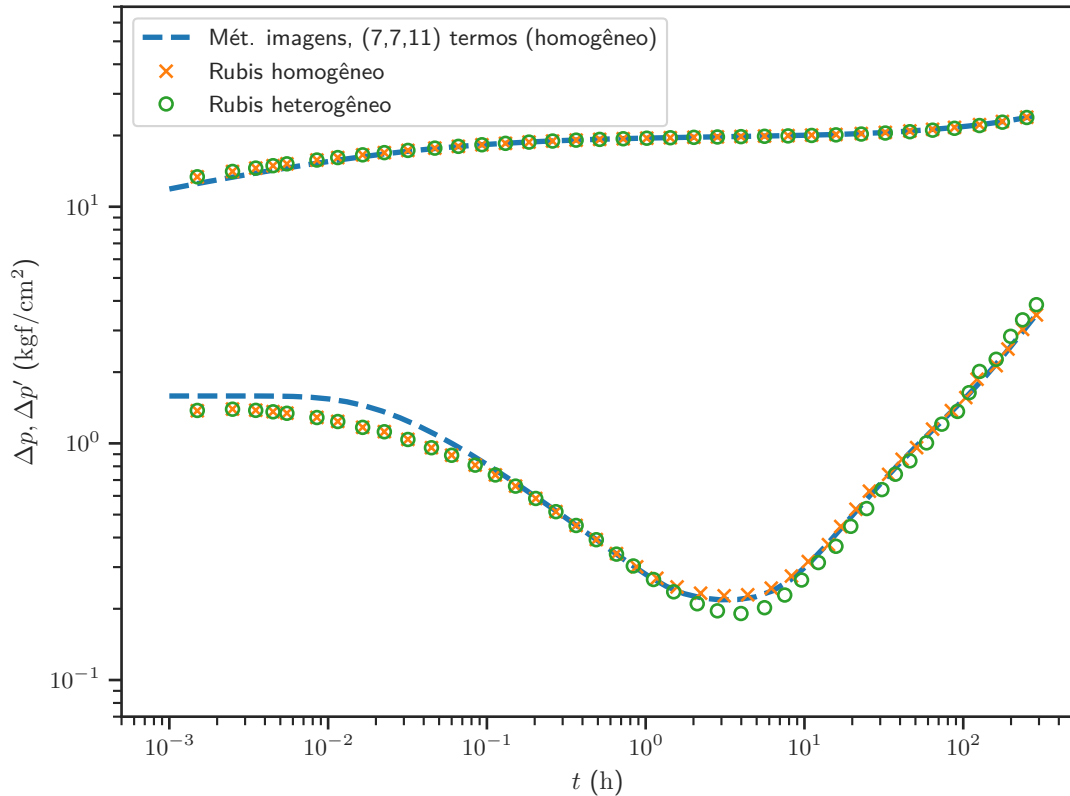


Figura 6.2: Gráfico log-log com as soluções numéricas de referência para o reservatório da Figura 6.1, comparadas à solução analítica de reservatório homogêneo pelo método das imagens calculada na posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

²Ver apêndice C sobre as características dos softwares comerciais utilizados.

As curvas de derivada da Figura 6.2 permitem a visualização dos seguintes regimes de fluxo³ para o modelo de reservatório da Figura 6.1:

- Fluxo radial relativo ao comprimento do canhoneado no curtíssimo tempo ($t < 0,01$ h);
- Fluxo esférico no curto tempo ($0,01 < t < 1$ h), enquanto ocorre investigação vertical em direção ao topo e base do reservatório;
- Regime de transição ($2 < t < 6$ h) em que o fluxo é aproximadamente radial, possivelmente associado ao término da investigação vertical com o atingimento do topo e base do reservatório;
- Regime de rápida subida da curva de derivada ($10 < t < 80$ h) em que o efeito dos limites norte, sul e oeste do reservatório, formando um típico modelo em “U”, passa a ser dominante;
- Regime pseudopermanente no longo tempo ($t > 80$ h), em que a presença de todos os limites externos do reservatório passa a dominar a resposta observada no poço, o que se caracteriza pela reta de inclinação unitária no gráfico log-log.

Ao comparar as curvas fornecidas pelo modelo analítico e pelo simulador, é possível observar que:

1. A resposta do simulador de fluxo para meio homogêneo não é perfeitamente coincidente com a resposta do modelo analítico no curtíssimo tempo. Pode-se atribuir essa diferença à dificuldade em criar uma malha no simulador de fluxo *Rubis* suficientemente refinada para representar corretamente o gradiente de pressão neste intervalo de tempo;
2. O regime de transição ($2 < t < 6$ h) para o caso heterogêneo apresenta transmissibilidade equivalente mais elevada que a do caso homogêneo, o que fica evidente pelo deslocamento vertical para baixo no gráfico log-log. Pode-se explicar esta resposta pela presença da camada de alta permeabilidade da região V_4 , que já foi atingida neste horizonte de tempo. Vale ressaltar que *não houve* aumento de espessura: a camada V_4 também existe no modelo analítico homogêneo, mas apresenta as mesmas propriedades que o restante do domínio.

6.4.2 Solução por Transformação Integral

A Tabela 6.3 mostra a convergência dos primeiros 30 autovalores do problema de autovalor algébrico descrito na Seção 5.1.2. Conforme descrito na Seção 3.4.1, dois critérios de ordenamento complementares foram utilizados:

³Ver apêndice B para explicações sobre os regimes de fluxo.

1. Uma lista preliminar de n autovalores do problema auxiliar foi montada a partir do critério η_i^2 ;
2. Δn autovalores adicionais foram acrescentados à lista para levar em conta a heterogeneidade do meio, conforme critério de ordenamento da diagonal principal da matriz $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$.

Os títulos de cada coluna da tabela seguem o formato “ $n(m)$ ”:

- o quantitativo de elementos selecionados apenas pelo critério dos autovalores, que corresponde a n termos;
- seguido do número total de autovalores selecionados combinando os dois critérios, que corresponde a $m = n + \Delta n$ termos.

Portanto, o problema de autovalor foi resolvido sempre para uma ordem de truncamento de $m = n + \Delta n$ termos, que é o número entre parênteses nos títulos da tabela.

A Tabela 6.3 mostra que o problema de autovalor deste exemplo numérico requer uma ordem de truncamento do problema de autovalor algébrico muito mais alta que a utilizada nos problemas das Seções 5.2 e 5.3. Além disso, ao comparar as Tabelas 5.3, 5.8 e 6.4 com os quantitativos de autovalores unidimensionais distintos do problema auxiliar em cada exemplo, percebe-se que o critério duplo de ordenamento seleciona uma quantidade muito maior de autovalores no problema da Seção 6.4 quando comparado aos problemas anteriores. Esse resultado é intuitivo: nos dois primeiros exemplos a heterogeneidade era limitada a uma variação de 1 para 0,5 no valor de $k_D(\mathbf{x}_D)$ em algumas camadas do reservatório; neste terceiro exemplo, a Equação (6.13) mostra que o parâmetro $k_D(\mathbf{x}_D)$ varia em 6 ordens de magnitude (de 1×10^{-4} na região V_3 até 100 na região V_5). Faz sentido que seja necessário um número maior de termos na expansão em autofunções para representar um campo de permeabilidade com tantas heterogeneidades.

Um fato curioso pode ser observado nas colunas referentes às ordens de truncamento de 5000 e 6000 termos, nas Tabelas 6.3 e 6.4: todos os valores, inclusive o número total de termos selecionados pelo critério duplo de ordenamento dos autovalores, são idênticos. Isso significa que todos os 1000 termos adicionais, selecionados pelo critério de η_i^2 , já haviam sido previamente selecionados pelo critério da heterogeneidade.

A Figura 6.3 compara as soluções de referência descritas na Seção 6.4.1 com as soluções por GITT segundo a formulação desenvolvida na Seção 6.3. São apresentadas curvas para as seguintes ordens de truncamento da expansão do potencial: 50, 100, 200, 300 e 2000, sempre idênticas às ordens de truncamento utilizadas para

Tabela 6.3: Convergência dos primeiros 30 autovalores do problema de autovalor algébrico do modelo de reservatório da Seção 6.4, para diferentes ordens de truncamento.

μ_i	$n(m)$, onde $m = n + \Delta n$								
	100 (223)	300 (642)	500 (1463)	1000 (2807)	2000 (4807)	3000 (7661)	4000 (11 350)	5000 (15 991)	6000 (15 991)
1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
2	1,6432	1,5789	1,4706	0,5648	0,2464	0,1791	0,1726	0,1614	0,1614
3	3,1760	2,9882	1,6980	0,6408	0,2853	0,2078	0,1810	0,1756	0,1756
4	3,8708	3,4224	1,8278	0,8510	0,3579	0,2145	0,1907	0,1847	0,1847
5	4,3943	3,6180	2,0570	0,9262	0,4085	0,2209	0,2030	0,1984	0,1984
6	4,7080	3,8581	2,1050	0,9388	0,4185	0,2391	0,2087	0,1988	0,1988
7	4,9786	4,0592	2,1253	0,9581	0,4347	0,2437	0,2188	0,2130	0,2130
8	5,2810	4,1187	2,1551	0,9635	0,4389	0,2543	0,2225	0,2182	0,2182
9	5,4802	4,1999	2,1831	0,9817	0,4530	0,2558	0,2262	0,2199	0,2199
10	6,1536	4,3083	2,1998	0,9829	0,4556	0,2727	0,2356	0,2310	0,2310
11	6,2172	4,5991	2,2274	1,0065	0,4705	0,2733	0,2466	0,2409	0,2409
12	6,5241	4,8449	2,4135	1,0134	0,4740	0,2754	0,2523	0,2478	0,2478
13	7,1149	5,0112	2,5954	1,0181	0,4803	0,2940	0,2692	0,2601	0,2601
14	7,1496	5,2232	2,6351	1,0345	0,4841	0,3008	0,2724	0,2656	0,2656
15	7,4885	5,5390	2,7250	1,0429	0,4876	0,3011	0,2740	0,2686	0,2686
16	7,6361	5,8113	2,7639	1,0603	0,4964	0,3044	0,2794	0,2735	0,2735
17	7,7735	5,9476	2,9875	1,0753	0,5070	0,3102	0,2871	0,2776	0,2776
18	7,8120	6,1483	3,1605	1,1025	0,5084	0,3245	0,2928	0,2848	0,2848
19	8,1497	6,8072	3,1736	1,1386	0,5189	0,3257	0,2976	0,2912	0,2912
20	8,3070	6,9399	3,3110	1,1519	0,5334	0,3326	0,2984	0,2918	0,2918
21	8,4827	7,0241	3,6305	1,2892	0,5389	0,3458	0,3036	0,2985	0,2985
22	8,5831	7,1183	3,7753	1,3140	0,5403	0,3500	0,3215	0,3152	0,3152
23	8,6879	7,3579	4,0979	1,3617	0,5453	0,3547	0,3222	0,3169	0,3169
24	8,8909	7,4169	4,2454	1,3688	0,5604	0,3660	0,3247	0,3171	0,3171
25	9,1402	7,5202	4,3890	1,4710	0,5642	0,3693	0,3324	0,3196	0,3196
26	9,3182	7,6687	4,5266	1,4991	0,5656	0,3704	0,3412	0,3331	0,3331
27	9,4559	7,7535	4,6839	1,5059	0,5698	0,3799	0,3427	0,3367	0,3367
28	9,5867	7,9484	4,8484	1,5423	0,5882	0,3866	0,3461	0,3394	0,3394
29	9,8160	8,1819	5,1034	1,5786	0,6083	0,3904	0,3501	0,3410	0,3410
30	9,9298	8,3935	5,1840	1,6505	0,6191	0,3952	0,3533	0,3415	0,3415

Tabela 6.4: Quantitativo de autovalores unidimensionais auxiliares distintos selecionados em cada direção ortogonal para compor as matrizes do problema de autovalor algébrico da Seção 6.4, para diferentes ordens de truncamento.

$n(m)$	Quantitativo		
	x	y	z
100 (223)	17	8	4
300 (642)	24	11	6
500 (1463)	33	14	8
1000 (2807)	41	18	10
2000 (4807)	49	22	12
3000 (7661)	58	25	14
4000 (11 350)	66	29	16
5000 (15 991)	74	33	17
6000 (15 991)	74	33	17

o problema de autovalor algébrico em cada caso. A expressão do filtro, que corresponde à solução analítica clássica pelo método das imagens das Equações (6.5d) e (6.5h), foi calculada com 7, 7 e 11 termos nos somatórios das direções x , y e z , respectivamente.

É possível ver que a solução está praticamente convergida na escala gráfica para uma ordem de truncamento de 300 termos na expansão em autofunções. A Figura 6.4 confirma esta observação, mostrando que não ocorrem mudanças significativas no resultado mesmo aumentando a ordem de truncamento para 400 ou 500 termos. Esse comportamento de convergência também pode ser observado nas Tabelas 6.5 e 6.6, para alguns tempos de referência.

A convergência na escala gráfica observada neste exemplo, para ordens de truncamento de cerca de 300 termos, é similar à observada no exemplo da Seção 5.3, que convergiu na escala gráfica para 200 termos. Ambos os exemplos são diferentes do caso apresentado na Seção 5.2, que precisou de cerca de 8000 termos para esta convergência. É importante observar que o tempo a partir do qual as heterogeneidades do modelo passam a influenciar de forma significativa na resposta observada pelo poço é de cerca de 1 hora, tanto neste quanto no exemplo da Seção 5.3. Já no exemplo da Seção 5.2, este tempo é bem mais curto: cerca de 0,1 hora. Toda a discussão apresentada na Seção 5.3.2 a respeito dessa diferença se aplica integralmente a este caso, e permite a mesma conclusão: quanto mais cedo (curto tempo) for necessário aplicar o “fator corretivo” da GITT para o meio heterogêneo, maior será a dificuldade de convergência.

Vale observar ainda que a ordem de truncamento necessária para a convergência da solução no poço é muito inferior à ordem necessária para a convergência do problema de autovalor, conforme mostrado na Tabela 6.3.

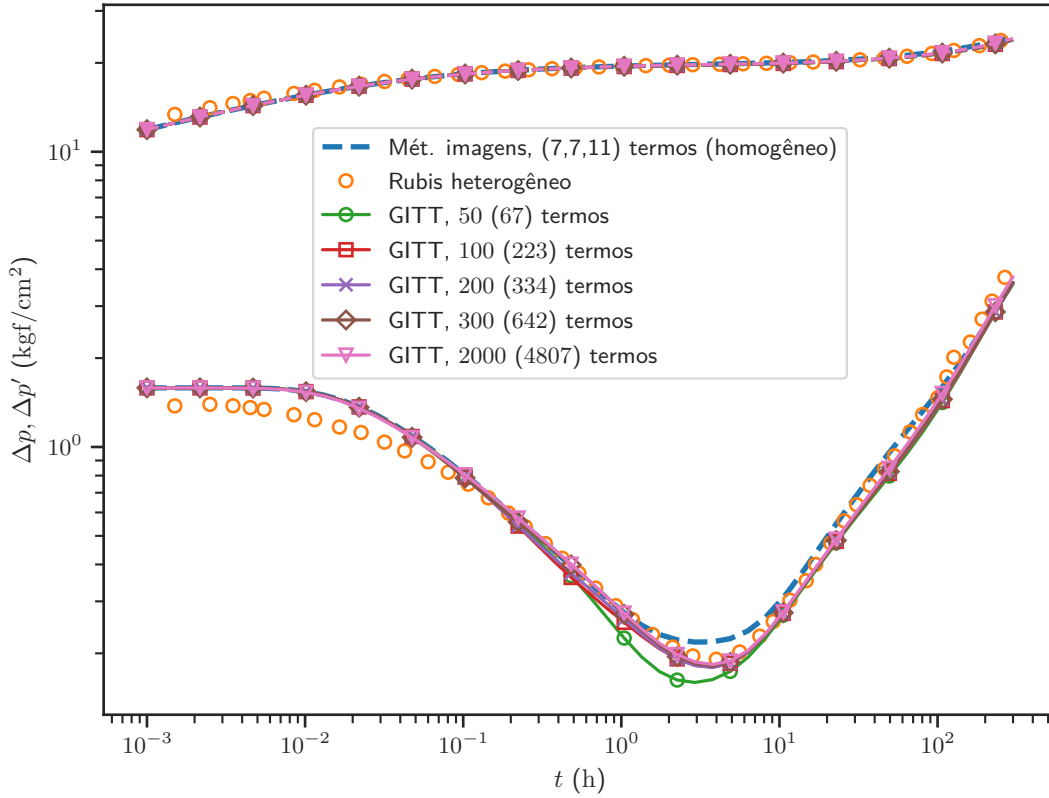


Figura 6.3: Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 6.4.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 50 (67) a 2000 (4807) termos. O filtro das soluções por GITT foi calculado com 7, 7 e 11 termos nas direções x , y e z , respectivamente, em todos os casos. Todos os cálculos correspondem à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

Tabela 6.5: Convergência do Δp na posição do poço para o problema da Seção 6.4, para diferentes ordens de truncamento.

Tempo (horas)	$\Delta p(x_w, t) = p_i - p(x_w, t)$ (kgf/cm ²)							Rubis
	50	100	200	300	400	500	2000	
0,01	15,5209	15,5207	15,5205	15,5201	15,5200	15,5188	15,5143	15,9592
0,1	18,3315	18,3245	18,3207	18,3133	18,3126	18,3029	18,2993	18,3332
0,4	19,1561	19,1284	19,1271	19,1367	19,1400	19,1402	19,1464	19,1542
10	19,8716	19,8982	19,9097	19,9441	19,9564	19,9513	19,9614	19,9782
100	21,3741	21,4269	21,4497	21,4900	21,5031	21,5170	21,5454	21,6352
200	22,6522	22,7152	22,7421	22,7865	22,8004	22,8254	22,9046	23,1048

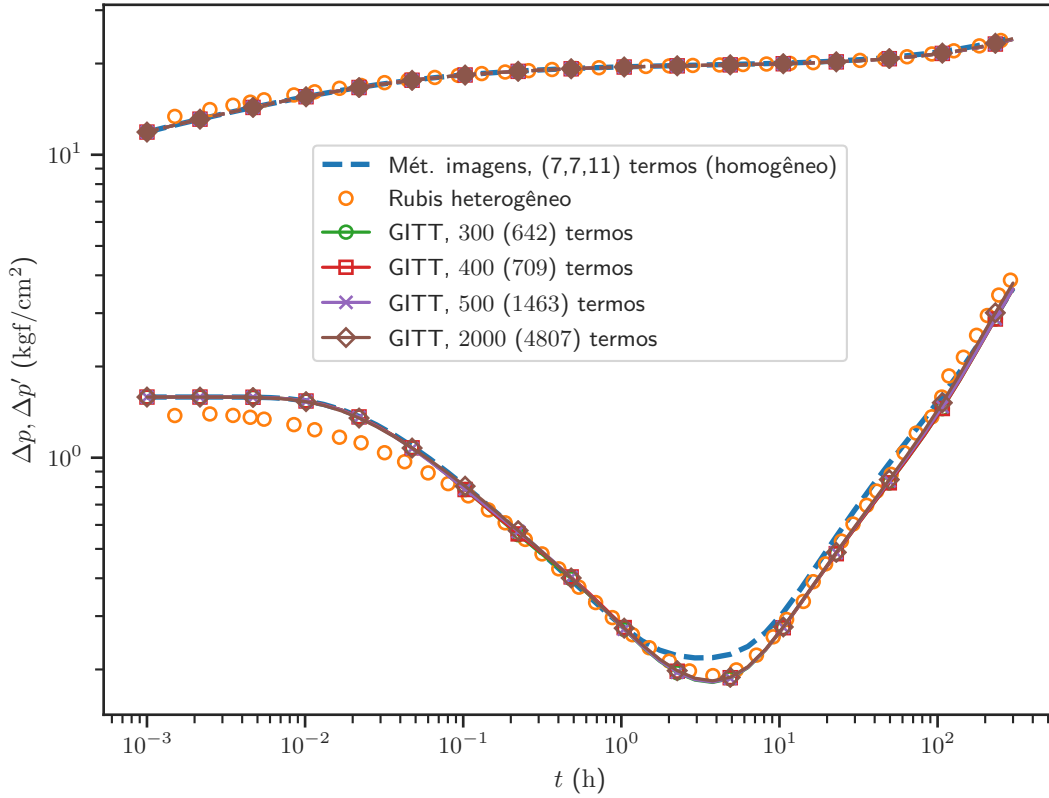


Figura 6.4: Gráfico log-log comparando as soluções de referência da Seção 6.4.1 com a solução por GITT, para ordens de truncamento variando de 300 (642) a 2000 (4807) termos. O filtro das soluções por GITT foi calculado com 7, 7 e 11 termos nas direções x , y e z , respectivamente, em todos os casos. Todos os cálculos correspondem à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$. As curvas na parte superior do gráfico correspondem ao potencial, enquanto na parte inferior estão as curvas da derivada logarítmica.

Tabela 6.6: Convergência do $\Delta p'$ (derivada logarítmica) na posição do poço para o problema da Seção 6.4, para diferentes ordens de truncamento.

Tempo (horas)	$\Delta p'(\mathbf{x}_w, t) = \partial \Delta p / \partial \ln t$ (kgf/cm ²)							Rubis
	50	100	200	300	400	500	2000	
0,01	1,5419	1,5416	1,5413	1,5406	1,5405	1,5387	1,5331	1,2608
0,1	0,8100	0,8005	0,7971	0,7948	0,7949	0,7972	0,8144	0,7669
0,4	0,4079	0,3967	0,4077	0,4331	0,4384	0,4398	0,4377	0,4307
10	0,2588	0,2633	0,2639	0,2642	0,2644	0,2653	0,2658	0,2721
100	1,3349	1,3574	1,3661	1,3738	1,3753	1,3950	1,4349	1,4585
200	2,4958	2,5016	2,5042	2,5072	2,5078	2,5171	2,6305	2,8517

Com relação aos poços observadores mostrados na Figura 6.1 e na Tabela 6.2, as curvas de derivada geradas para uma ordem de truncamento de 2000 termos podem ser vistas na Figura 6.5, comparadas a pontos gerados pelo simulador numérico *Rubis*. As curvas de pressão foram omitidas, para facilitar a visualização das derivadas.

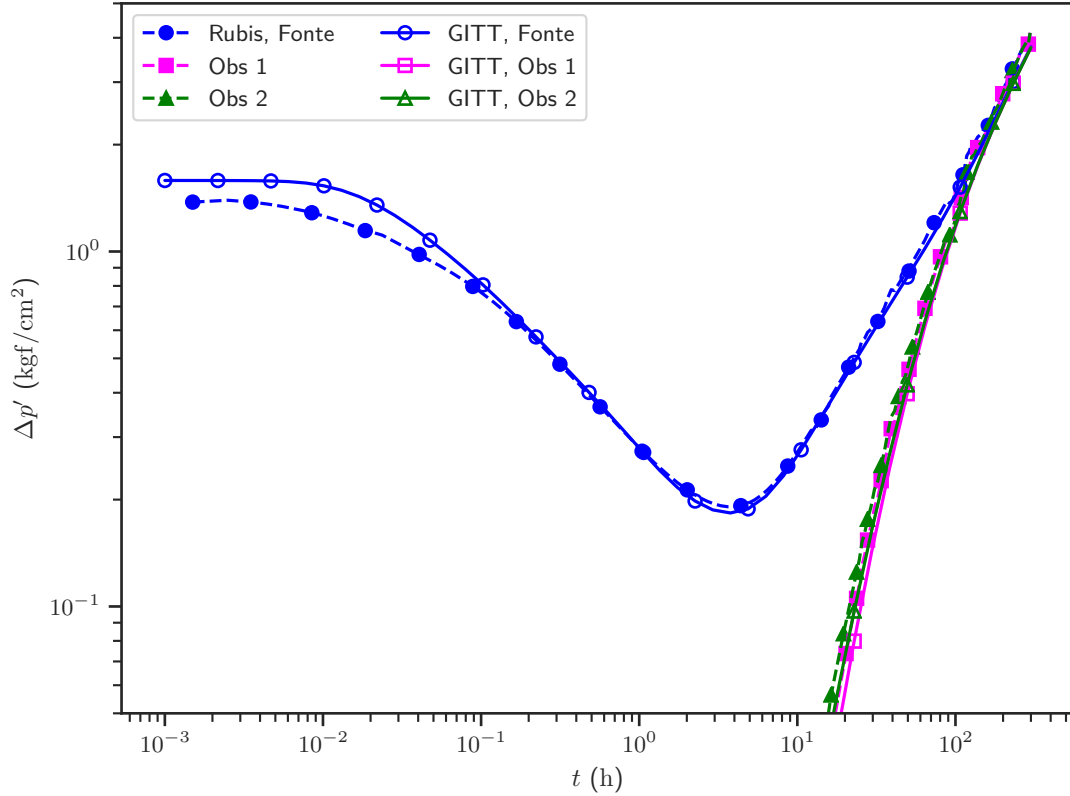


Figura 6.5: Gráfico log-log comparando a solução numérica de referência da Seção 6.4 com a solução por GITT, para a ordem de truncamento de 2000 (4807) termos, nas posições dos poços observadores. O filtro da solução por GITT foi calculado com 7, 7 e 11 termos nas direções x , y e z , respectivamente. O cálculo *na fonte* corresponde à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$.

O poço observador *Obs 1* é fisicamente mais próximo do poço ativo que o poço *Obs 2*, conforme distâncias da Tabela 6.2. Apesar disso, *Obs 2* sente a interferência do poço ativo mais cedo, conforme mostrado na Figura 6.5. Isso ocorre porque *Obs 2* está posicionado dentro da região V_5 , que constitui um caminho de alta transmissibilidade entre este ponto e o poço ativo. Este fenômeno, resultado da heterogeneidade escolhida para o modelo, foi previsto pela simulação numérica e está bem representado pela solução por GITT.

Finalmente, a Figura 6.6 mostra uma comparação da solução por GITT com ordem de truncamento de 300 termos contra a mesma solução com ordem de 2000 termos, para cada ponto observador. As duas soluções são praticamente coincidentes na escala gráfica, para estas ordens de truncamento.

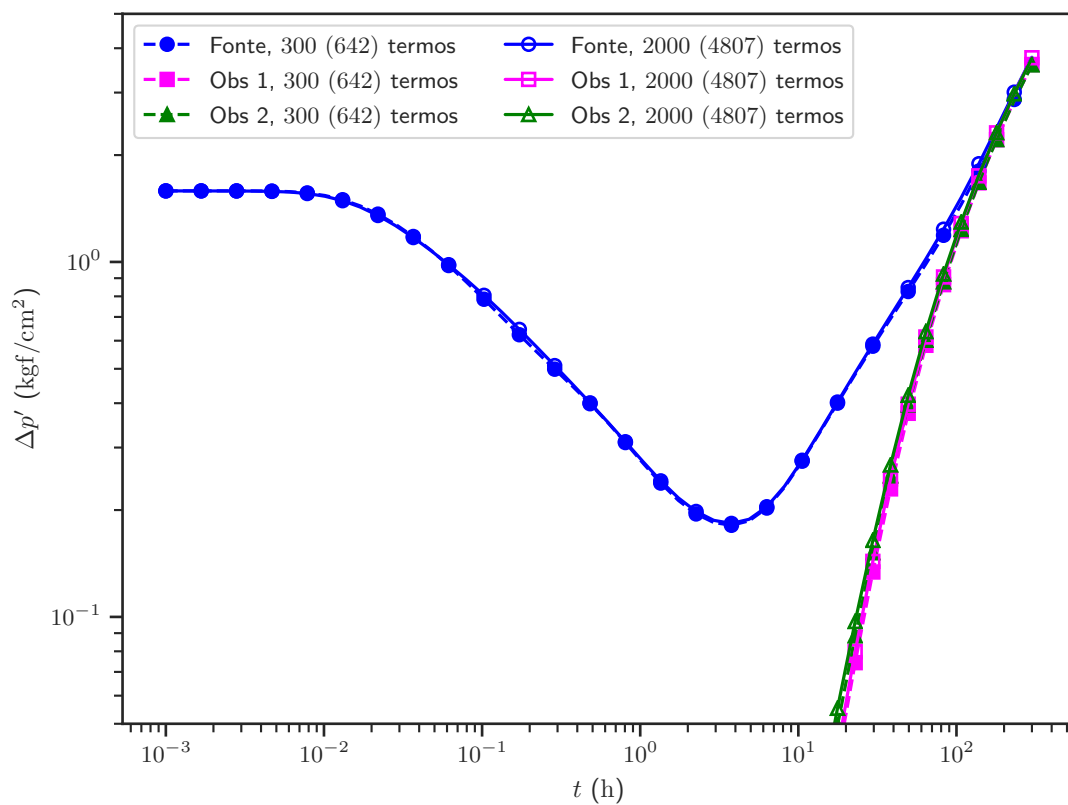


Figura 6.6: Gráfico log-log comparando as soluções da Seção 6.4 por GITT com 300 (642) e 2000 (4807) termos, nas posições dos poços observadores. O filtro das soluções por GITT foi calculado com 7, 7 e 11 termos nas direções x , y e z , respectivamente. O cálculo *na fonte* corresponde à posição $(x, y, z) = (x_w + r_w, y_w, z_w)$.

Capítulo 7

Conclusões e Propostas para Trabalhos Futuros

Neste trabalho, a técnica da Transformação Integral foi utilizada para a resolução de problemas de interesse para a área da Engenharia de Reservatórios envolvendo meios heterogêneos tridimensionais, no contexto da Avaliação de Formações. Como os problemas desta área têm características bastante desfavoráveis para a convergência de soluções, incluindo i) termos fonte espacialmente concentrados (deltas de Dirac); ii) domínio de grandes dimensões (semi-infinito); iii) transientes de curtíssimo tempo; iv) cálculo da pressão no poço (próximo à fonte delta de Dirac); a filtragem analítica do problema se mostrou essencial para a obtenção de soluções. O problema escolhido para teste foi o *ponto fonte*, solução fundamental que pode ser utilizada para a construção de soluções para fontes de geometria mais complexa por aplicação do *Princípio da Superposição*.

No Capítulo 4, foi verificado que a solução direta do ponto fonte por CITT, em meio homogêneo, requer uma quantidade proibitiva de autovalores para a expansão em série. Realizando manipulações algébricas sobre a expressão da solução por CITT, foi demonstrada pela primeira vez a equivalência entre esta e a solução analítica clássica pelo *método das imagens*, através da aplicação da *Soma de Poisson*.

No Capítulo 5, o problema do ponto fonte em um meio heterogêneo foi tratado de forma inédita pela técnica da GITT. De forma a contornar a dificuldade de convergência para tempos curtos já verificada para o meio homogêneo, foi proposta a utilização da própria solução de meio homogêneo (na forma obtida pela Soma de Poisson) como filtro para a solução de meio heterogêneo. Sob esta ótica, a GITT funciona como um termo corretivo em relação à solução base de meio homogêneo. Verificou-se ainda que a dificuldade de convergência aumenta significativamente conforme as heterogeneidades são aproximadas do poço — ou seja, conforme sua presença é percebida pelo poço em tempos cada vez mais curtos.

No Capítulo 6, o *Princípio da Superposição* foi empregado para construir uma solução de fluxo uniforme para o problema do poço vertical com canhoneio parcial, a partir da solução já desenvolvida por GITT para o ponto fonte em meio heterogêneo. Um caso de teste mostrou a capacidade desta solução de reproduzir o transiente de pressão completo em reservatórios com heterogeneidades mais complexas que as abordadas anteriormente em trabalhos da área. Apesar desta generalidade, foi possível verificar o aumento considerável de custo computacional para a representação de meios muito heterogêneos, sob a forma de ordens de truncamento mais elevadas para o problema de autovalor.

A GITT se mostrou viável para a construção de modelos de reservatório heterogêneos, apresentando resultados coerentes com o esperado em todos os casos testados. Apesar dos exemplos utilizados para teste neste trabalho serem relativamente simples, o sucesso em sua implementação sinaliza positivamente para a possibilidade de aplicar a técnica para problemas mais complexos de Reservatório. Vale ressaltar que, em função do tempo de ocorrência das heterogeneidades, o desempenho computacional ainda pode ser aquém do desejado. Nesses casos, técnicas adicionais de aceleração das taxas de convergência do problema devem ser exploradas, de forma a reduzir a ordem de truncamento necessária no problema de autovalor algébrico e na expansão em autofunções.

Como ponto de partida para trabalhos futuros, seguem algumas recomendações:

1. Uma grande quantidade de heterogeneidades no meio pode exigir uma ordem de truncamento bastante elevada no problema de autovalor. De forma a reduzir o custo computacional desta parte da solução, seria útil aplicar a técnica do *Balanço Integral* (LEIROZ e COTTA, 1990; SCOFANO NETO *et al.*, 1990) para lidar com as variações espaciais abruptas de propriedades tais como a permeabilidade (COTTA *et al.*, 2016b). Para um meio unidimensional, ela resulta em um problema de autovalor algébrico linear com taxa de convergência acelerada. Sua aplicação a um meio bidimensional resulta em um problema de autovalor algébrico não linear do tipo polinomial (KNUPP, 2013). Ainda não houve demonstração da técnica para uma aplicação tridimensional como a deste trabalho;
2. A solução analítica clássica de meio homogêneo foi utilizada neste trabalho como um filtro transiente poderoso para a formulação da GITT em meio heterogêneo. Entretanto, apesar de contribuir fortemente para a convergência da solução no curto tempo, conforme o efeito das heterogeneidades se torna importante, a parcela do filtro se torna um “erro” que precisa ser corrigido pelo aumento da ordem de truncamento na expansão em série de autofunções. A utilização de um filtro local instantâneo (MACÊDO *et al.*, 1999) poderia

ser explorada para mitigar este problema;

3. A maior parte dos problemas da área de Avaliação de Formações são de meio semi-infinito. A solução adotada neste trabalho considera a utilização de um domínio finito suficientemente grande para que os efeitos de borda não tenham impacto sobre a solução nos tempos de interesse. Apesar de funcionar, esta solução acaba exigindo um número maior de termos na expansão do problema de autovalor para a reconstrução da solução, problema que se torna particularmente impactante em tempos curtos. Como a GITT exige que o meio seja finito¹, uma proposta alternativa seria estabelecer uma fronteira virtual móvel para o domínio, grande o suficiente para que o potencial (ou sua derivada) na fronteira seja aproximadamente zero. Esse domínio seria tão grande quanto necessário para cada instante de tempo, potencialmente reduzindo o número de termos necessários para as expansões em série. Trata-se de um procedimento análogo ao utilizado na área de Mecânica de Fluidos para o estabelecimento de *camadas limite* em escoamentos, dispensando a solução do problema completo de Navier-Stokes em porções do domínio onde os efeitos da viscosidade do fluido poderiam ter sido desprezados;
4. Neste trabalho foi demonstrada a equivalência entre a solução por CITT em meio homogêneo e a solução clássica pelo método das imagens. Nesse contexto, a Soma de Poisson é uma transformação que acelera a taxa de convergência da solução por CITT para tempos curtos. Esta técnica não pode ser aplicada diretamente à solução por GITT, devido à presença das autofunções transformadas $\tilde{\psi}_{ij}$ dentro do somatório. Há trabalhos que sugerem ser possível generalizar a Soma de Poisson para o somatório de séries irregulares (LYUBARSKII e MADYCH, 2008), o que possivelmente forneceria um método genérico de aceleração da taxa de convergência de soluções obtidas por GITT;
5. A metodologia exposta neste trabalho permite a construção de soluções de fluxo uniforme para qualquer geometria de fonte em reservatórios heterogêneos, a partir do Princípio da Superposição. Entretanto, a hipótese de fluxo uniforme é questionável na presença de heterogeneidades próximas ao poço. A solução do ponto fonte em meio heterogêneo poderia ser empregada como base para a formulação de uma solução de condutividade finita ou infinita no poço, seja por método iterativo (JELMERT e THOMPSON, 1991) ou em combinação com a metodologia de elementos de contorno (BIRYUKOV e KUCHUK, 2012). A validade de tal procedimento se baseia sobre o Princípio da Reci-

¹Caso contrário, os autovalores não seriam discretos, mas formariam um contínuo. Para o meio homogêneo (CITT), em que as equações são desacopladas, isso é aceitável. Para o meio heterogêneo (GITT), com equações acopladas, não seria possível truncar e resolver o sistema numericamente.

proacidade que, sob determinadas condições, é válido para o meio heterogêneo (DENG e HORNE, 1993);

6. Inclusão na formulação de elementos típicos de outras soluções da área de Avaliação de Formações, como perda de carga devido ao efeito de *skin*, raio finito e estocagem de fluido no interior do poço;
7. As soluções demonstradas neste trabalho assumem uma fonte constante, independente do tempo. Os efeitos de vazão variável em problemas de Avaliação de Formações são tipicamente adicionados à solução de vazão constante por meio do Teorema de Duhamel (ÖZİŞIK, 1993). Entretanto, a formulação geral da GITT pode ser utilizada para a geração direta de uma solução para vazão variável, dispensando a aplicação posterior da superposição de Duhamel.

Referências Bibliográficas

- ALMEIDA, A. R., 1994, *Aplicação da Técnica de Transformação Integral a Problemas de Injeção de Traçadores em Reservatórios de Petróleo*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- ALMEIDA, A. R., COTTA, R. M., 1995, “Integral transform methodology for convection-diffusion problems in petroleum reservoir engineering”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 38, n. 18 (dec), pp. 3359–3367. ISSN: 00179310. doi: 10.1016/0017-9310(95)00101-E. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/001793109500101E>>.
- ALMEIDA, A. P., 2017, *Transformação Integral Baseada em Problemas de Autovalor com Coeficientes Variáveis para Fenômenos de Transporte em Meios Heterogêneos Tridimensionais*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- ALMEIDA, A., COTTA, R., 1996, “Analytical Solution of the Tracer Equation for the Homogeneous Five-Spot Problem”, *SPE Journal*, v. 1, n. 01, pp. 31–38.
- BARENBLATT, G., ZHELTOV, I., KOCHINA, I., 1960, “Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata]”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, v. 24, n. 5 (jan), pp. 1286–1303. ISSN: 00218928. doi: 10.1016/0021-8928(60)90107-6. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0021892860901076>>.
- BIDAUX, P., WHITTLE, T., COVENEY, P., et al., 1992, “Analysis of Pressure and Rate Transient Data From Wells in Multilayered Reservoirs: Theory and Application”. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, apr. doi: 10.2118/24679-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/24679-MS>>.
- BIRYUKOV, D., KUCHUK, F. J., 2012, “Transient Pressure Behavior of Reservoirs with Discrete Conductive Faults and Fractures”, *Transport in*

Porous Media, v. 95, n. 1 (oct), pp. 239–268. ISSN: 0169-3913. doi: 10.1007/s11242-012-0041-x. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11242-012-0041-x>>.

BOURDET, D., M. WHITTLE, T., A DOUGLAS, A., et al., 1983, “A new set of type curves simplifies well test analysis”, *World Oil*, v. 196.

BOURDET, D., 2002, *Well Test Analysis: The Use of Advanced Interpretation Models*. 1st ed. ed. Paris, Elsevier Science. ISBN: 0-444-50968-2.

BOURDET, D., AYOUB, J., PIRARD, Y., 1989, “Use of Pressure Derivative in Well Test Interpretation”, *SPE Formation Evaluation*, v. 4, n. 02 (jun), pp. 293–302. ISSN: 0885-923X. doi: 10.2118/12777-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/12777-PA>>.

CARSLAW, H. S., JAEGER, J. C., 1959, *Conduction of Heat in Solids*. Oxford, Oxford University Press. ISBN: 9780198533689.

CINCO L., H., SAMANIEGO V., F., DOMINGUEZ A., N., 1978, “Transient Pressure Behavior for a Well With a Finite-Conductivity Vertical Fracture”, *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 18, n. 04 (aug), pp. 253–264. ISSN: 0197-7520. doi: 10.2118/6014-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/6014-PA>>.

COTTA, R. M., KNUPP, D. C., NAVEIRA-COTTA, C. P., et al., 2013a, “Unified integral transforms algorithm for solving multidimensional nonlinear convection-diffusion problems”, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v. 63, n. 11, pp. 840–866.

COTTA, R. M., KNUPP, D. C., NAVEIRA-COTTA, C. P., 2016a, “Integral transforms in linear or nonlinear convection-diffusion through convective eigenvalue problems”. In: *XXIV ICTAM*, Montreal, Canada, a.

COTTA, R. M., NAVEIRA-COTTA, C. P., KNUPP, D. C., 2016b, “Enhanced convergence of eigenfunction expansions in convection-diffusion with multiscale space variable coefficients”, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, v. 70, n. 5, pp. 492–512.

COTTA, R. M., NAVEIRA-COTTA, C. P., KNUPP, D. C., 2017, “Convective eigenvalue problems for convergence enhancement of eigenfunction expansions in convection-diffusion problems”, *Journal of Thermal Science and Engineering Applications*.

- COTTA, R. M., NAVEIRA-COTTA, C. P., KNUPP, D. C., et al., 2018a, “Recent advances in computational-analytical integral transforms for convection-diffusion problems”, *Heat and Mass Transfer/Waerme- und Stoffuebertragung*, v. 54, n. 8, pp. 2475–2496. ISSN: 14321181. doi: 10.1007/s00231-017-2186-1.
- COTTA, R. M., KNUPP, D. C., NAVEIRA-COTTA, C. P., et al., 2013b, “Unified integral transforms algorithm for solving multidimensional nonlinear convection-diffusion problems”, *Numerical Heat Transfer; Part A: Applications*, v. 63, n. 11, pp. 840–866. ISSN: 10407782. doi: 10.1080/10407782.2013.756763.
- COTTA, R. M., KNUPP, D. C., NAVEIRA-COTTA, C. P., et al., 2015, “The Unified Integral Transforms (Unit) Algorithm With Total and Partial Transformation”, *Computational Thermal Sciences: An International Journal*, v. 6, n. 6, pp. 507–524. ISSN: 1940-2554. doi: 10.1615/computthermalsci.2014008663.
- COTTA, R. M., KNUPP, D. C., NAVEIRA-COTTA, C. P., 2016c, *Analytical Heat and Fluid Flow in Microchannels and Microsystems*. Mechanical Engineering Series. Cham, Springer International Publishing. ISBN: 978-3-319-23311-6. doi: 10.1007/978-3-319-23312-3. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-23312-3>>.
- COTTA, R. M., NAVEIRA-COTTA, C. P., KNUPP, D. C., 2016d, “Non-linear eigenvalue problem in the integral transforms solution of convection-diffusion with nonlinear boundary conditions”, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, v. 26, n. 3/4 (may), pp. 767–789. ISSN: 0961-5539. doi: 10.1108/HFF-08-2015-0309. Disponível em: <<http://www.emeraldinsight.com/doi/10.1108/HFF-08-2015-0309>>.
- COTTA, R. M., 1993, *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. 1st ed. Florida, CRC Press. ISBN: 978-0849386657.
- COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D., 2005, “Semi-Analytical Evaluation of Integrals for the Generalized Integral Transform Technique”. In: *4th Workshop on Integral Transforms and Benchmark Problems*, Rio de Janeiro, Brasil.
- COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D., 1997, *Heat Conduction: Lumped Analysis, Integral Transforms, Symbolic Computation*. 1st ed. Hoboken, New Jersey, Wiley. ISBN: 978-0471956488.

- COTTA, R. M., KNUPP, D. C., NAVEIRA-COTTA, C. P., 2013c, “From analytical heat transfer towards unified hybrid solutions in heat and fluid flow”. In: *13th UK National Heat Transfer Conference*, pp. 1–8, London, UK, c.
- COTTA, R. M., KNUPP, D. C., QUARESMA, J. N., 2018b, *Analytical methods in heat transfer*. Cham, Switzerland, Springer International Publishing. ISBN: 9783319266954. doi: 10.1007/978-3-319-26695-4_2.
- COUTO, P., MOREIRA, R., MARSILI, M. D., 2011, “A General Analytical Solution for the Multidimensional Transient Linear Hydraulic Diffusivity Equation in Heterogeneous and Anisotropic Porous Media”. In: *OTC Brasil*, n. 1, pp. 1–14. Offshore Technology Conference, apr. doi: 10.4043/22578-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.4043/22578-MS>>.
- DA SILVA, E. M., 2017, *Solução do Problema do Rebaixamento de Lençóis Próximos a Correntes por Transformadas Integrais*. Tese de Doutorado.
- DENG, X., HORNE, R., 1993, “Well Test Analysis of Heterogeneous Reservoirs”, , n. 1, pp. 1–12. doi: 10.2118/26458-ms.
- DEUCHER, R. H., 2014, *Solução do Balanço de Energia em Reservatórios de Petróleo Utilizando a Transformada Integral Generalizada*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- DEUCHER, R. H., COUTO, P., BODSTEIN, G. C. R., 2016, “Comprehensive Solution for Transient Flow in Heterogeneous Porous Media”, *Transport in Porous Media*, v. 113, n. 3 (jul), pp. 549–566. ISSN: 0169-3913. doi: 10.1007/s11242-016-0710-2. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1007/s11242-016-0710-2>>.
- DIAS, R. A. C., CHALHUB, D. J. N. M., DE OLIVEIRA, T. J. L., 2012, “Analysis of Oil Displacement Through Water in Porous Media Using Integral Transforms and Cfd Package”, *14th Brazilian Congress of Thermal Sciences and Engineering*, , n. 1.
- EHLIG-ECONOMIDES, C., AYOUB, J., 1986, “Vertical Interference Testing Across a Low-Permeability Zone”, *SPE Formation Evaluation*, v. 1, n. 05 (oct), pp. 497–510. ISSN: 0885-923X. doi: 10.2118/13251-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/13251-PA>>.
- GERARD, M. G., HORNE, R. N., 1985, “Effects of External Boundaries on the Recognition of Reservoir Pinchout Boundaries by Pressure Transient Analysis”, *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 25, n. 03 (jun),

pp. 427–436. ISSN: 0197-7520. doi: 10.2118/11141-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/11141-PA>>.

GRINGARTEN, A. C., 2008, “From Straight Lines to Deconvolution: The Evolution of the State of the Art in Well Test Analysis”, *SPE Reservoir Evaluation & Engineering*, v. 11, n. 01 (feb), pp. 41–62. ISSN: 1094-6470. doi: 10.2118/102079-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/102079-PA>>.

GRINGARTEN, A. C., RAMEY, H. J., 1973, “The Use of Source and Green’s Functions in Solving Unsteady-Flow Problems in Reservoirs”, *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 13, n. 05 (oct), pp. 285–296. ISSN: 0197-7520. doi: 10.2118/3818-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/3818-PA>>.

GRINGARTEN, A. C., RAMEY, H. J., RAGHAVAN, R., 1974, “Unsteady-State Pressure Distributions Created by a Well With a Single Infinite-Conductivity Vertical Fracture”, *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 14, n. 04 (aug), pp. 347–360. ISSN: 0197-7520. doi: 10.2118/4051-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/4051-PA>>.

GRINGARTEN, A. C., BOURDET, D. P., LANDEL, P. A., et al., 1979, “A Comparison Between Different Skin And Wellbore Storage Type-Curves For Early-Time Transient Analysis”. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, apr. doi: 10.2118/8205-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/8205-MS>>.

GUO, J., ZENG, J., WANG, X., et al., 2016, “Analytical Model for Multifractured Horizontal Wells in Heterogeneous Shale Reservoirs”. In: *SPE Asia Pacific Oil & Gas Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, oct. doi: 10.2118/182422-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/182422-MS>>.

HE, Y., CHENG, S., QIN, J., et al., 2018, “A Novel Multi-Well Interference Testing Model of a Fractured Horizontal Well and Vertical Wells”. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, sep. doi: 10.2118/191567-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/191567-MS>>.

HOUZÉ, O., VITURAT, D., FJAERE, O. S., 2018, *Dynamic Data Analysis*. v5.20.01 ed. Sophia Antipolis, KAPPA.

- HOVANESSIAN, S., 1961, “Pressure Studies in Bounded Reservoirs”, *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 1, n. 04 (dec), pp. 223–228. ISSN: 0197-7520. doi: 10.2118/50-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/50-PA>>.
- HUYBRECHS, D., OLVER, S., 2011, “Highly oscillatory quadrature”, *Highly Oscillatory Problems*, pp. 25–50. doi: 10.1017/cbo9781139107136.003.
- JELMERT, T., THOMPSON, L., 1991, “Horizontal Wells - A Test on Infinite Conductivity Solutions”, doi: 10.2118/22171-ms.
- KAPPA, 2013. “Écrin 4.20.07a”. Disponível em: <<https://www.kappaeng.com>>.
- KELVIN, W. T., 1884, *Mathematical and Physical Papers, Vol. 2*. Cambridge, UK, Cambridge University Press.
- KNUPP, D. C., 2013, *Análise de Problemas Conjugados em Microdissipadores Térmicos por Transformação Integral em Domínio Único e Técnicas Ópticas Não Intrusivas*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- KNUPP, D. C., COTTA, R. M., NAVEIRA-COTTA, C. P., et al., 2015, “Transient conjugated heat transfer in microchannels: Integral transforms with single domain formulation”, *International Journal of Thermal Sciences*, v. 88 (feb), pp. 248–257. ISSN: 12900729. doi: 10.1016/j.ijthermalsci.2014.04.017. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1290072914001045>>.
- KUCHUK, F., WILKINSON, D. J., 1991, “Transient Pressure Behavior of Commingled Reservoirs”, , n. March.
- LARSEN, L., 1981, “A Simple Approach to Pressure Distributions in Geometric Shapes by Images”, *56th Annual Fall Technical Conference & Exhibition*, v. 34, n. 2, pp. 65–9. ISSN: 1522-1229. doi: 10.1152/advan.00010.2010. Disponível em: <<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/20524198>>.
- LARSEN, L., 1993, “Pressure-Transient Behavior of Reservoirs Forming a Pattern of Coupled Linear Segments”. In: *SPE Annual Technical Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, apr. doi: 10.2118/26459-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/26459-MS>>.
- LEIROZ, A. J. K., COTTA, R. M., 1990, “Convergence Enhancement of Eigenfunction Expansions for Nonhomogeneous Elliptic Diffusion Problems”. In: *3rd National Thermal Sciences Meeting*, pp. 559–564, Santa Catarina.

- LEVIN, D., 1996, “Fast integration of rapidly oscillatory functions”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 67, n. 1, pp. 95–101. ISSN: 03770427. doi: 10.1016/0377-0427(94)00118-9.
- LYUBARSKII, Y., MADYCH, W. R., 2008, “Irregular Poisson Type Summation”, v. 7, n. 2, pp. 173–186.
- MACÊDO, E. N., COTTA, R. M., ORLANDE, H. R., 1999, “Local-instantaneous filtering in the integral transform solution of nonlinear diffusion problems”, *Computational Mechanics*, v. 23, n. 5, pp. 524–532. ISSN: 01787675. doi: 10.1007/s004660050432.
- MARSILI, M. D., 2013, *Uma Solução Analítica Generalizada Da Equação Da Difusividade Hidráulica Multidimensional Pela Técnica Da Transformação Integral*. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ.
- MIKHAILOV, M. D., ÖZİŞİK, M. N., 1994, *Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion*. New York, John Wiley & Sons. ISBN: 0-471-89830-9.
- MORTON, K. L., NOGUEIRA, P. D. B., BOOTH, R., et al., 2012, “Integrated Interpretation for Pressure Transient Tests in Discretely Fractured Reservoirs”. In: *SPE Europec/EAGE Annual Conference*. Society of Petroleum Engineers, apr. doi: 10.2118/154531-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/154531-MS>>.
- NAVEIRA-COTTA, C. P., COTTA, R. M., ORLANDE, H. R., et al., 2009, “Eigenfunction expansions for transient diffusion in heterogeneous media”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 52, n. 21-22 (oct), pp. 5029–5039. ISSN: 00179310. doi: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.04.014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.04.014><http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S001793100900297X>>.
- NISLE, R. G., 1958. “The Effect of Partial Penetration on Pressure Build-Up in Oil Wells”.
- OZKAN, E., RAGHAVAN, R., 1991a, “New Solutions for Well-Test-Analysis Problems: Part 1-Analytical Considerations”, *SPE Formation Evaluation*, v. 6, n. 03 (sep), pp. 359–368. ISSN: 0885-923X. doi: 10.2118/18615-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/mslib/app/Preview.do?paperNumber=00018615-PA&societyCode=SPE><http://www.onepetro.org/doi/10.2118/18615-PA>>.

- OZKAN, E., RAGHAVAN, R., 1991b, “Supplement to SPE 18615, New Solutions for Well-Test-Analysis Problems: Part 1-Analytical Considerations”, .
- ÖZIŞIK, M. N., 1993, *Heat Conduction*. 2nd ed. New York, John Wiley & Sons. ISBN: 0471532568.
- PRATS, M., RAGHAVAN, R., 2013, “Finite Horizontal Well in a Uniform-Thickness Reservoir Crossing a Natural Fracture Normally”, *SPE Journal*, v. 18, n. 05, pp. 982–992. ISSN: 1086-055X. doi: 10.2118/163098-pa.
- RAGHAVAN, R., 1995, “The Method of Sources and Sinks - A Perspective”, *SPE Memorial Series - Henry J. Ramey Jr.*, v. 1.
- RAHMAN, N. A., BENTSEN, R., 2000, “Use of an Integral-Transform Technique for Comprehensive Solutions to Transient-Flow Problems in Homogeneous Domains”. In: *Canadian International Petroleum Conference*. Petroleum Society of Canada, apr. doi: 10.2118/2000-042. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/2000-042>>.
- RAHMAN, N. A., BENTSEN, R. G. R., 2001, “Comprehensive Solutions for Transient-Flow Problems in 3D Homogeneous Domains”. In: *SPE Middle East Oil Show*. Society of Petroleum Engineers, apr. doi: 10.2118/68139-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/68139-MS>>.
- RAHMAN, N. A., BENTSEN, R. G. R., 2003, “New Analytical Solutions for Predicting Pressure Distribution and Transient Behavior in Wedges and Truncated Wedges”, *SPE Journal*, v. 8, n. 03 (sep), pp. 280–290. ISSN: 1086-055X. doi: 10.2118/86195-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/86195-PA>>.
- SAGAWA, A., CORBETT, P. W., DAVIES, D. R., 2001, “A Semi-Analytical Pressure Transient Model for Wells in Heterogeneous Linear Reservoirs”. In: *SPE Asia Pacific Oil and Gas Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, apr. doi: 10.2118/68984-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/68984-MS>>.
- SATMAN, A., EGGENSCHWILER, M., RAMEY JR., H., et al., 1980, “Interpretation of Injection Well Pressure Transient Data in Thermal Oil Recovery”. In: *SPE California Regional Meeting*. Society of Petroleum Engineers, apr. doi: 10.2118/8908-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/8908-MS>>.

- SCOFANO NETO, F., COTTA, R. M., MIKHAILOV, M. D., 1990, “Alternative Approach to the Integral Transform Solution of Nonhomogeneous Diffusion Problems”. In: *International Conference on Advanced Computational Methods in Heat Transfer*, pp. 39–50, Southampton, UK.
- SIMPSON, D., 2016. “Does Petroleum Have to Come from Squashed Dinosaurs?” Disponível em: <<https://www.engineering.com/IOT/ArticleID/12361/Does-Petroleum-Have-to-Come-from-Squashed-Dinosaurs.aspx>>.
- STEHFEST, H., 1970, “Algorithm 368: Numerical inversion of Laplace transforms [D5]”, *Communications of the ACM*, v. 13, n. 1 (jan), pp. 47–49. ISSN: 00010782. doi: 10.1145/361953.361969. Disponível em: <<http://portal.acm.org/citation.cfm?doid=361953.361969>>.
- STRELTSOVA-ADAMS, T., 1979, “Pressure Drawdown in a Well With Limited Flow Entry”, *Journal of Petroleum Technology*, v. 31, n. 11 (nov), pp. 1469–1476. ISSN: 0149-2136. doi: 10.2118/7486-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/7486-PA>>.
- THERMO FISHER SCIENTIFIC, 2019. “Open Inventor Toolkit”. Disponível em: <<https://www.openinventor.com/en/solutions/oil-gas-and-mining/reservoir-modeling-engineering/>>.
- WARREN, J., ROOT, P., 1963, “The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs”, *Society of Petroleum Engineers Journal*, v. 3, n. 03 (sep), pp. 245–255. ISSN: 0197-7520. doi: 10.2118/426-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/426-PA>>.
- WOLFRAM RESEARCH INC., 2018. “Mathematica 11.3”. Disponível em: <<http://www.wolfram.com>>.
- YAO, S., WANG, X., ZENG, F., et al., 2016, “A Composite Model for Multi-Stage Fractured Horizontal Wells in Heterogeneous Reservoirs”. In: *SPE Russian Petroleum Technology Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, oct. doi: 10.2118/182016-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/182016-MS>>.
- YAXLEY, L., 1987, “Effect of a Partially Communicating Fault on Transient Pressure Behavior”, *SPE Formation Evaluation*, v. 2, n. 04 (dec), pp. 590–598. ISSN: 0885-923X. doi: 10.2118/14311-PA. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/14311-PA>>.

ZHENG, S.-Y., 2006, "Fighting Against Non -Unique Solution Problems in Heterogeneous Reservoirs Through Numerical Well Testing". In: *SPE Asia Pacific Oil & Gas Conference and Exhibition*. Society of Petroleum Engineers, apr. doi: 10.2118/100951-MS. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/100951-MS>>.

Apêndice A

Potencial Transformado com Filtro na Forma Exponencial

Ao utilizar o filtro na forma exponencial da Equação (5.4a), a transformação da fonte se torna consideravelmente mais complexa. Isso ocorre porque esta forma não é separável nas três direções espaciais x , y e z , e sim função de uma distância $R_D(\mathbf{x}_D)$ em relação à posição da fonte. A substituição da Equação (5.4a) na integral (1) da Equação (5.24) não permite simplificações significativas:

$$\overline{g}_i^*(t_D) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\psi}_{im}(\eta_m^2 - \mu_i^2) \sum_{j=0}^{\infty} \int_V \frac{1}{4\pi k_w R_{Dj}(\mathbf{x}_D)} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_{Dj}(\mathbf{x}_D)}{2\sqrt{k_w t_D}}\right) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) dv \quad (\text{A.1})$$

Entretanto, sabendo que o sistema das Equações (5.20a) e (5.20b) admite como solução analítica a Equação (3.16), é possível substituir a Equação (A.1) e inverter a ordem das integrações no tempo e no espaço:

$$\begin{aligned} \overline{p}_{D_i}^*(t_D) &= \int_0^{t_D} e^{-\mu_i^2(t_D-\tau)} \overline{g}_i^*(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{t_D} e^{-\mu_i^2(t_D-\tau)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\psi}_{im}(\eta_m^2 - \mu_i^2) \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{j=0}^{\infty} \int_V \frac{1}{4\pi k_w R_{Dj}(\mathbf{x}_D)} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_{Dj}(\mathbf{x}_D)}{2\sqrt{k_w \tau}}\right) \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) dv \right\} d\tau \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\psi}_{im}(\eta_m^2 - \mu_i^2) \sum_{j=0}^{\infty} \int_V \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) \frac{1}{4\pi k_w R_{Dj}(\mathbf{x}_D)} \\ &\quad \times \underbrace{\left\{ \int_0^{t_D} e^{-\mu_i^2(t_D-\tau)} \operatorname{erfc}\left(\frac{R_{Dj}(\mathbf{x}_D)}{2\sqrt{k_w \tau}}\right) d\tau \right\}}_{f_{ij}(\mathbf{x}_D, t_D)} dv \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

A integral $f_{ij}(\mathbf{x}_D, t_D)$ da Equação (A.2) admite solução analítica, dada por

$$f_{ij}(\mathbf{x}_D, t_D) = \begin{cases} e^{-R_{Dj}^2(\mathbf{x}_D)/4t_D} \left\{ -\sqrt{\frac{R_{Dj}^2(\mathbf{x}_D)t_D}{\pi}} + \right. \\ \left. \left(\frac{R_{Dj}^2(\mathbf{x}_D)}{2} + t_D \right) w \left(\frac{R_{Dj}(\mathbf{x}_D)}{2\sqrt{t_D}} \mathfrak{i} \right) \right\} & i = 0 \\ \frac{1}{\mu_i^2} e^{-R_{Dj}^2(\mathbf{x}_D)/4t_D} \left\{ w \left(\frac{R_{Dj}(\mathbf{x}_D)}{2\sqrt{t_D}} \mathfrak{i} \right) - \right. \\ \left. \text{Re} \left[w \left(\frac{R_{Dj}(\mathbf{x}_D)}{2\sqrt{t_D}} \mathfrak{i} - \mu_i \sqrt{t_D} \right) \right] \right\} & i \geq 1 \end{cases} \quad (\text{A.3a})$$

onde

$$w(z) = e^{-z^2} \text{erfc}(-z\mathfrak{i}) \quad (\text{A.3b})$$

$$\mathfrak{i} = \sqrt{-1} \quad (\text{A.3c})$$

Entretanto, a substituição de $f_{ij}(\mathbf{x}_D, t_D)$ na Equação (A.2) resulta novamente em uma integral que não pode ser resolvida analiticamente:

$$\begin{aligned} \overline{p_{D_i}^*}(t_D) &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\psi}_{im}(\eta_m^2 - \mu_i^2) \sum_{j=0}^{\infty} \int_V \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) \frac{1}{4\pi k_{wD} R_{Dj}(\mathbf{x}_D)} f_{ij}(\mathbf{x}_D, t_D) dv \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\psi}_{im}(\eta_m^2 - \mu_i^2) \sum_{j=0}^{\infty} \int_V \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) f'_{ij}(\mathbf{x}_D, t_D) dv \end{aligned} \quad (\text{A.4a})$$

onde

$$f'_{ij}(\mathbf{x}_D, t_D) = \frac{1}{4\pi k_{wD} R_{Dj}(\mathbf{x}_D)} f_{ij}(\mathbf{x}_D, t_D) \quad (\text{A.4b})$$

Poderia-se pensar na utilização de integração numérica. Entretanto, o custo computacional desse procedimento poderia ser significativo, dado que:

1. O integrando é função de três índices distintos de somatório (i , m e j), além do tempo t_D . Isso significa que o número de operações necessárias para avaliação numérica desta expressão pode ser muito significativo;
2. O integrando é altamente oscilatório, conforme cresce o valor de m , exigindo o uso de técnicas de integração numérica especiais que escolham os intervalos de avaliação do integrando com base em conhecimento prévio sobre a forma das autofunções (COTTA *et al.*, 2013b; HUYBRECHS e OLVER, 2011; LEVIN, 1996).

Exceto pela autofunção $\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D)$, o restante do integrando é uma função suave. Uma abordagem alternativa possível é a integração semi-analítica (COTTA e MIKHAILOV, 2005): divisão do domínio V em N subdomínios menores, e assumindo que a parte não oscilatória do integrando possa ser aproximada por um valor médio dentro do subdomínio. Dessa forma, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \int_V \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) f'_{ij}(\mathbf{x}_D, t_D) dv &= \sum_{n=1}^N \overline{f'_{ij}}(\mathbf{x}_{Dn}, t_D) \int_{V_n} \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) dv \\ &= \sum_{n=1}^N \overline{f'_{ij}}(\mathbf{x}_{Dn}, t_D) I_{\tilde{\Omega}_m}(\mathbf{x}_{Dn}) \end{aligned} \quad (\text{A.5a})$$

onde

$$I_{\tilde{\Omega}_m}(\mathbf{x}_{Dn}) = \int_{V_n} \tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D) dv \quad (\text{A.5b})$$

$$\overline{f'_{ij}}(\mathbf{x}_{Dn}, t_D) = \frac{1}{8} \sum_{p=1}^8 f'_{ij}(\mathbf{x}_{Dnp}, t_D) \quad (\text{A.5c})$$

Entende-se que o domínio esteja sendo discretizado em $N = N_x \cdot N_y \cdot N_z$ blocos retangulares, com N_x , N_y e N_z intervalos nas dimensões x , y e z , respectivamente. A função média $\overline{f'_{ij}}(\mathbf{x}_{Dn}, t_D)$ é calculada com base no valor de $f'_{ij}(\mathbf{x}_D, t_D)$ nos 8 vértices mais próximos. A autofunção auxiliar $\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D)$, que permaneceu no interior da integral, pode então ser integrada analiticamente com facilidade.

Substituindo as Equações (A.5a-c) na Equação (A.4a), obtém-se a expressão para o potencial transformado $\overline{p_{D_i}^*}(t_D)$:

$$\overline{p_{D_i}^*}(t_D) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}_{im}}(\eta_m^2 - \mu_i^2) \sum_{n=1}^N I_{\tilde{\Omega}_m}(\mathbf{x}_{Dn}) \sum_{j=0}^{\infty} \overline{f'_{ij}}(\mathbf{x}_{Dn}, t_D) \quad (\text{A.6})$$

e sua derivada temporal

$$\frac{d\overline{p_{D_i}^*}}{dt_D} = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{\tilde{\psi}_{im}}(\eta_m^2 - \mu_i^2) \sum_{n=1}^N I_{\tilde{\Omega}_m}(\mathbf{x}_{Dn}) \sum_{j=0}^{\infty} \left[\overline{h_j}(\mathbf{x}_{Dn}, t_D) - \mu_i^2 \overline{f'_{ij}}(\mathbf{x}_{Dn}, t_D) \right] \quad (\text{A.7a})$$

onde

$$\overline{h_j}(\mathbf{x}_{Dn}, t_D) = \frac{1}{8} \sum_{p=1}^8 h_j(\mathbf{x}_{Dnp}, t_D) \quad (\text{A.7b})$$

$$h_j(\mathbf{x}_D, t_D) = \frac{1}{4\pi k_{wD} R_{D_j}(\mathbf{x}_D)} \operatorname{erfc} \left(\frac{R_{D_j}(\mathbf{x}_D)}{2\sqrt{k_{wD} t_D}} \right) \quad (\text{A.7c})$$

As Equação (A.6) e Equação (A.7a) são equivalentes às Equações (5.27a) e (5.28a), usando a forma exponencial da solução do filtro. De posse de uma solu-

ção para os autovalores μ_i e para as autofunções $\tilde{\psi}_{im}$ e $\tilde{\Omega}_m(\mathbf{x}_D)$, a Equação (A.6) e Equações (A.7a–c) podem ser utilizadas junto com a fórmula de inversão da Equação (5.6d) para reconstruir o potencial filtrado $p_D^*(\mathbf{x}_D, t_D)$ e sua derivada temporal.

Apêndice B

Conceitos Básicos de Interpretação de Testes de Formação

A interpretação de testes de formação é um típico *problema inverso* (GRINGARTEN *et al.*, 1979). Através do conhecimento da entrada do sistema (vazão $q(t)$ do poço) e da medição da resposta na saída (pressão $p(t)$), busca-se determinar as características do reservatório. Essa busca passa pela necessidade de encontrar e ajustar um modelo que não só represente adequadamente os resultados das medições diretas de pressão e vazão, como também apresente coerência com todas as demais fontes de informação disponíveis.

A transição do teste de formação, de uma técnica de simples diagnóstico e estimativa de parâmetros de poço para uma verdadeira ferramenta de *caracterização* de reservatórios, ocorreu com a introdução da derivada logarítmica da pressão como parte do processo de interpretação (BOURDET *et al.*, 1983, 1989). Essa ferramenta possibilitou, entre outros, o início do reconhecimento e compreensão do comportamento de reservatórios heterogêneos (GRINGARTEN, 2008), em função da definição clara de assinaturas características dos *regimes de fluxo* do reservatório.

O termo *regime de fluxo* é utilizado na literatura para descrever a geometria predominante das linhas de fluxo no interior do reservatório, identificada através do efeito que estas causam na resposta transiente de pressão observada na posição do poço. Essa resposta é tipicamente identificada por meio de um *gráfico log-log*, também conhecido como *gráfico de diagnóstico*, ferramenta comum na área de Avaliação de Formações. As funções plotadas no gráfico são o Δp em relação a uma pressão de referência, e sua derivada logarítmica temporal $\Delta p' = \partial \Delta p / \partial \ln t$. A Figura B.1 reproduz alguns gráficos log-log, destacando uma amostra dos regimes de fluxo comumente observados em testes de formação.

Para a melhor compreensão dos exemplos de aplicação numérica utilizados neste trabalho, os seguintes termos relacionados aos regimes de fluxo são importantes:

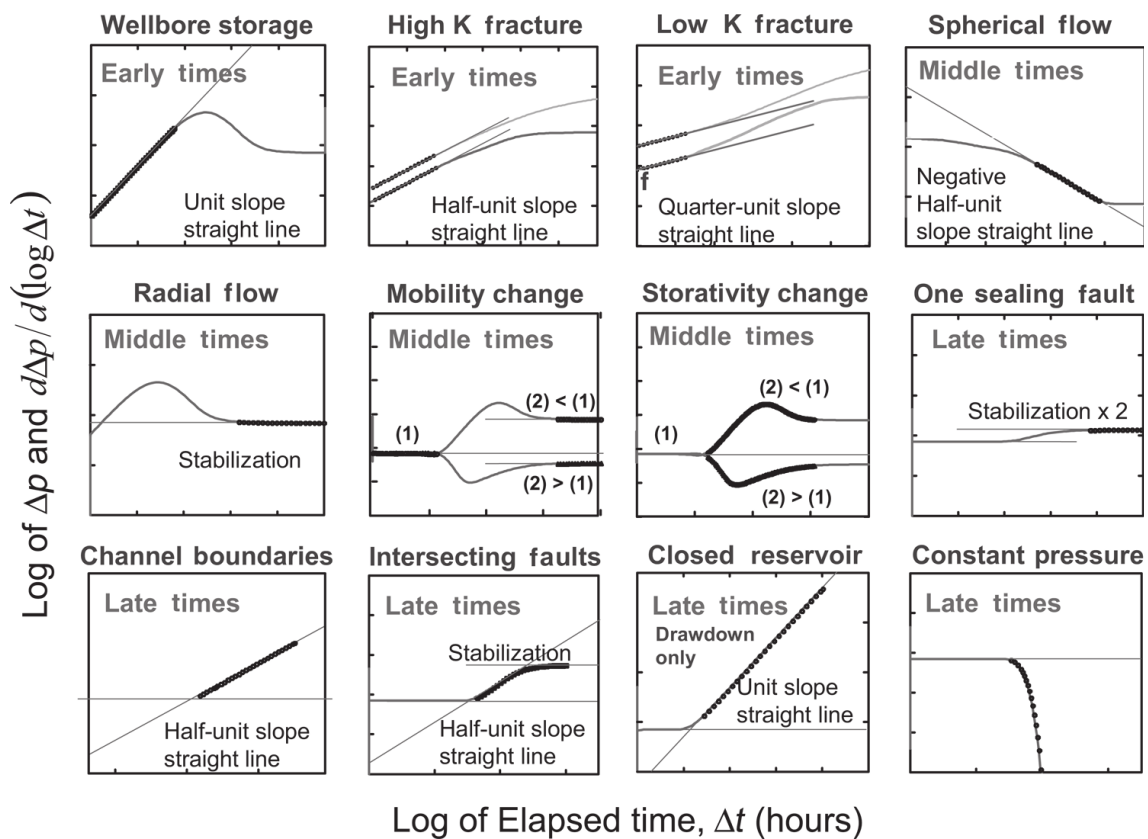


Figura B.1: Exemplos de gráfico log-log destacando alguns regimes de fluxo comumente observados em testes de formação. A função plotada é a derivada logarítmica da pressão no poço em relação ao tempo, e retas com inclinações características são superpostas aos gráficos para auxiliar na identificação dos regimes de fluxo. Fonte: (GRINGARTEN, 2008).

Fluxo esférico: As linhas de fluxo convergem para a posição da fonte no espaço 3D como se esta fosse um ponto posicionado no centro de uma esfera. Trata-se do regime de fluxo observado no curto tempo pela solução do ponto fonte. No gráfico log-log, aparece como uma reta de inclinação $-1/2$. Na Figura B.1, corresponde ao esquemático identificado como *spherical flow*.

Fluxo radial: As linhas de fluxo convergem para a posição da fonte como se esta fosse o eixo principal de um cilindro. Trata-se de um regime de fluxo predominantemente 2D e radial, que em geral ocorre após o atingimento do topo e base do reservatório pelo pulso de pressão da fonte. No gráfico log-log, aparece como uma reta de inclinação zero (horizontal). Na Figura B.1, corresponde ao esquemático identificado como *radial flow*.

Regime pseudopermanente: Um reservatório fechado, em que fluido é retirado pelo poço e não há realimentação pelas fronteiras externas, não pode atingir um regime “permanente”. O regime de fluxo dito *pseudopermanente* ocorre quando todo o volume do reservatório já foi atingido pelo pulso de pressão. A partir desse momento, o reservatório passa a se comportar como um tanque fechado, e a pressão média decresce em todos os pontos do domínio na mesma taxa constante. No gráfico log-log, aparece como uma reta de inclinação unitária. Na Figura B.1, corresponde ao esquemático identificado como *closed reservoir*.

Regimes de transição: Muitos regimes de fluxo não têm uma inclinação ou nome específico. Em geral, estes ocorrem em períodos ditos “de transição” entre outros regimes de fluxo mais bem definidos. Como regra geral, a lógica de interpretação associada às curvas de derivada é de que:

- A subida das curvas de derivada está associada à piora da capacidade de fluxo, à presença de barreiras ao fluxo ou a qualquer outro tipo de aumento na dificuldade de propagação do pulso de pressão conforme este se afasta da fonte;
- Inversamente, a queda das curvas de derivada está associada ao aumento da capacidade de fluxo ou à maior facilidade de propagação do pulso de pressão conforme este se afasta da fonte.

Apêndice C

Características dos Softwares

Saphir e Rubis

Os exemplos de aplicação numérica da GITT apresentados nas Seções 5.2, 5.3 e 6.4 são sempre comparados com soluções ditas *de referência*. Em alguns casos, tratam-se de soluções analíticas de meio finito homogêneo, tipicamente obtidas através da aplicação do *método das imagens* a uma solução base de meio infinito ou semi-infinito. Em outros casos, faz-se referência a dois softwares conhecidos na área de interpretação de testes de formação: o *Saphir* e o *Rubis*, ambos produzidos pela empresa *Kappa* (KAPPA, 2013).

O objetivo deste apêndice é fornecer algumas informações acerca das soluções obtidas por meio destes softwares, de modo a facilitar a compreensão das comparações realizadas neste trabalho.

Saphir

A função primária do *Saphir* é facilitar a aplicação do conjunto de técnicas relacionadas à *análise de transientes de pressão*, também conhecidas como *interpretação de testes de formação*. Apesar de haver um suporte limitado para simulação numérica, grande parte das funcionalidades deste software são voltadas para o uso de modelos analíticos.

Na Seção 5.2.1 é utilizada como referência uma solução “dita analítica”¹ calculada no *Saphir* para o problema heterogêneo de múltiplas camadas descrito no início da Seção 5.2. No software comercial, este modelo é identificado como sendo a solução para um *mini-DST*² em um reservatório de múltiplas camadas, utilizando

¹Conforme documentação do *Saphir*.

²Operação em que uma ferramenta é descida no interior do poço através de um cabo para a realização de um fluxo de curta duração em uma posição específica do reservatório. A menos da geometria da ferramenta (probe) e da parede do poço, trata-se do mais próximo que pode-se chegar na prática da solução do *ponto fonte* descrita na Seção 3.2.1.

um probe simples. A documentação do software não apresenta referências claras sobre o equacionamento utilizado, nem cita referências da literatura para o modelo desenvolvido. Através do contexto desta funcionalidade, das explicações fornecidas na documentação e do conjunto de parâmetros disponibilizados para o usuário na interface, infere-se que este modelo seja uma versão dos trabalhos apresentados por EHLIG-ECONOMIDES e AYOUB (1986); KUCHUK e WILKINSON (1991). Nesse caso, a solução teria como principais características:

- Solução de um problema multicamadas, em que as propriedades físicas podem ser diferentes entre as camadas mas são constantes no interior de cada camada;
- Fluxo 2D radial nas direções r e z ;
- Solução de meio infinito na direção r , e finito na direção z ;
- Forma analítica no domínio de Laplace, com inversão numérica para o domínio do tempo. Este procedimento é muito comum na área de Reservatórios, e tipicamente utiliza o algoritmo de Stehfest.

Por estas características, espera-se que este modelo forneça uma boa aproximação para o problema descrito na Seção 5.2.1 para os tempos iniciais e intermediários. No longo tempo, quando os limites do reservatório começarem a influenciar a resposta observada pela fonte, a diferença nas condições de contorno consideradas (meio lateralmente infinito no *Saphir*; meio finito nas outras soluções) levam a uma diferença entre este modelo e as demais opções consideradas.

Rubis

O propósito do *Rubis* não é interpretar testes de formação, e menos ainda aplicar modelagem analítica. Em vez disso, trata-se de um simulador numérico “full-field”, desenvolvido para o cálculo de soluções tridimensionais, transientes, trifásicas³ em reservatórios heterogêneos e irregulares, possivelmente afetados por questões de não-linearidade (meio e fluidos compressíveis, dependentes do campo de pressões), contendo eventualmente múltiplos poços de diferentes geometrias.

As Seções 5.2.1, 5.3.1 e 6.4.1 citam a utilização de soluções calculadas no *Rubis* como referência para os modelos de reservatório heterogêneos considerados. Da mesma forma como ocorre com o *Saphir*, a documentação disponibilizada sobre o equacionamento implementado no software é limitada. Entretanto, com relação aos problemas de aplicação numérica propostos nas Seções 5.2, 5.3 e 6.4, são conhecidas as seguintes características:

³Considerando o escoamento simultâneo de óleo, água e gás.

- Solução de um problema 3D transiente com geometria e heterogeneidade arbitrárias (idênticas às propostas nos casos de aplicação deste trabalho);
- Meio finito em todas as direções;
- Discretização do domínio espacial através de uma malha não estruturada do tipo Voronoi, cujas células têm geometria hexagonal;
- Não é possível determinar, a partir da documentação, quais os métodos numéricos adotados pelo software para a resolução do problema discretizado;
- Refinamento automático diferenciado da discretização ao longo do domínio, produzindo células menores próximo aos poços e células maiores nas regiões mais afastadas;

Neste trabalho, não foi realizada análise de convergência das soluções numéricas do *Rubis*. Adicionalmente, nenhuma tentativa de aumentar manualmente a discretização da malha de simulação foi capaz de produzir resultados diferentes dos obtidos a partir da malha gerada automaticamente pelo software. É provável que este simulador seja capaz de fornecer resultados razoáveis para comparação com as soluções por GITT em todas as aplicações, salvo por eventuais dificuldades de representação do comportamento assintótico de curtíssimo tempo em torno dos poços.

Apêndice D

Plataforma de Implementação Computacional

A implementação computacional das soluções apresentadas neste texto utilizou a linguagem de programação *Python*. Pode-se destacar ainda o uso de algumas bibliotecas específicas desta linguagem, com rotinas para a manipulação eficiente de tensores e a solução de problemas de álgebra linear: *numpy*, *scipy* e *numexpr*. Todas foram compiladas com suporte à *Intel Math Kernel Library (MKL)*, conjunto de rotinas fortemente otimizadas para a solução de problemas matemáticos em processadores Intel.

O computador utilizado para os testes possui um processador Intel Core i5-8250U com 4 núcleos físicos, habilitado para Hyper-Threading, operando na frequência base de 1,6 GHz e expansível até 3,4 GHz com Turbo Boost. A memória RAM disponível é de 8 GB.

Para os casos de aplicação do canal da Seção 5.3, e do reservatório compartimentado da Seção 6.4, o tempo de computação necessário para calcular as soluções convergidas em escala gráfica¹² foi de cerca de 1 segundo cada uma. Esse valor se deve, em grande parte, à pequena quantidade de termos necessários na expansão em autofunções para a convergência destes dois problemas. Tal desempenho não é atingido no caso de aplicação do reservatório estratificado da Seção 5.2: a convergência na escala gráfica³, neste caso, leva cerca de 5 minutos. Para entender o aumento significativo de tempo necessário entre estes casos de teste, vale lembrar que a preparação das matrizes para o problema de autovalor algébrico tende a ter complexidade da ordem de N^2 , onde N é a ordem de truncamento do problema de autovalor.

Não é possível afirmar que a implementação realizada esteja totalmente otimi-

¹Canal: 200 (247) termos.

²Compartimentado: 300 (642) termos.

³Estratificado: 8000 (11 338) termos.

zada. De fato, alguns pontos importantes de melhoria incluem:

- Utilização de estruturas esparsas e algoritmos que explorem a simetria das matrizes do problema de autovalor algébrico, possivelmente reduzindo pela metade o número de operações necessárias para a montagem⁴ de cada matriz;
- Conversão de trechos específicos do código, cujo desempenho seja crítico, para *Cython*.

Dito isso, para casos como o do reservatório estratificado (com heterogeneidades muito próximas da fonte), o maior impacto em desempenho certamente não viria de otimizações do código para a solução atual. Ao invés disso, seria importante explorar as sugestões de trabalhos futuros do Capítulo 7, visando reduzir a ordem de truncamento necessária na expansão em série, com impacto positivo para o desempenho global do cálculo da solução por GITT.

⁴A resolução do sistema linear já utiliza a simetria das matrizes.