



ANÁLISE TERMOELÁSTICA DE PLACAS DE REISSNER VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Arthur Leandro de Azevedo Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Orientadores: José Claudio de Faria Telles
José Antonio Fontes Santiago

Rio de Janeiro
Julho de 2019

ANÁLISE TERMOELÁSTICA DE PLACAS DE REISSNER VIA MÉTODO DOS
ELEMENTOS DE CONTORNO

Arthur Leandro de Azevedo Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:



Prof. José Claudio de Faria Telles, Ph.D.



Prof. José Antonio Fontes Santiago, D.Sc.



Prof. Luiz Carlos Wrobel, Ph.D.



Prof. Edivaldo Figueiredo Fontes Júnior, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 2019

Silva, Arthur Leandro de Azevedo

Análise Termoelástica de Placas de Reissner via Método dos Elementos de Contorno/ Arthur Leandro de Azevedo Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

XV, 78 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: José Claudio de Faria Telles

José Antonio Fontes Santiago

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Civil, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 71-73.

1. Termoelasticidade. 2. Método dos elementos de contorno. 3. Teoria de Reissner. I. Telles, José Claudio de Faria *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil. III. Título.

À minha família, seu apoio e amor sempre serão meu maior abrigo.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Cristina e Ricardo, por terem mantido sempre em alta a minha motivação nesta fase longe de casa e terem se preocupado tanto com meu bem-estar.

Aos meus tios Luciano e Selda por terem me recebido em sua casa e terem me tratado tão bem pelo tempo deste estudo.

Aos meus orientadores Prof. Dr. José Claudio de Faria Telles e Prof. Dr. José Antonio Fontes Santiago pela atenção, paciência e eficiência oferecida ao longo de disciplinas e da elaboração desta dissertação.

Agradeço a todos amigos, colegas de sala e profissionais da UFRJ que de alguma forma contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Ao Conselho Nacional de Pesquisa – CNPq e ao Programa de Engenharia Civil – PEC da COPPE/UFRJ pelo apoio financeiro que tornou possível a realização deste trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE TERMOELÁSTICA DE PLACAS DE REISSNER VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Arthur Leandro de Azevedo Silva

Julho/2019

Orientadores: José Claudio de Faria Telles

José Antonio Fontes Santiago

Programa: Engenharia Civil

Apresenta-se neste trabalho uma formulação do método dos elementos de contorno (MEC) para placas espessas sob 3 tipos de carregamentos: variações térmicas, forças de superfície e reações de apoios elásticos tipo Winkler. A variação de temperatura na seção média do elemento de placa resultará em esforços e deformações axiais estimados através da teoria da elasticidade para chapas em estado plano de tensão (EPT). O gradiente térmico entre as faces superior e inferior do elemento de placa resultará em esforços e deformações estimados através da teoria de Reissner para placas espessas. O acoplamento do campo de temperaturas foi feito com base na formulação de tensões e deformações iniciais. As forças de superfície normais ao plano médio da placa foram implementadas de forma a possuir variação linear ao longo de domínios internos definidos por células triangulares. As reações dos apoios elásticos tipo Winkler foram implementadas de forma que os deslocamentos transversais dos pontos internos farão parte do sistema linear de equações em conjunto das variáveis de contorno. Na implementação numérica utilizada, o sistema de integrais é composto por integrais de contorno de elementos quadráticos e integrais de domínio de células triangulares lineares para a consideração dos 3 tipos de carregamentos. Estudos de caso são apresentados como forma de validar a formulação e demonstrar sua aplicabilidade em problemas presentes no âmbito da engenharia civil.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

THERMOELASTIC ANALYSIS OF REISSNER'S PLATES BY THE BOUNDARY
ELEMENT METHOD

Arthur Leandro de Azevedo Silva

July/2019

Advisors: José Claudio de Faria Telles
José Antonio Fontes Santiago

Department: Civil Engineering

This work presents a boundary element formulation for the analysis of shear deformable plates under three types of loads: temperature variation, linear load distribution and reactions from Winkler's foundations. The elastic and thermal behaviors were considered uncoupled, this way, the thermal variation interferes with the mechanical behavior, while the stress and strain distributions have no influence in temperature fields. Temperature change at the plate mid surface results in axial stresses that are estimated through the theory of elasticity applied to membrane elements in plane stress distribution. Thermal gradients through the plate's section (from top to bottom surface) result in stresses and strains that can be estimated through Reissner's theory for shear deformable plates. Linear loads distributions are considered in the analysis as forces in a perpendicular direction of the plate's midsection. Reactions from Winkler's foundations are considered, resulting in a linear system composed by boundary and internal domain variables. In the numerical implementation used, the system of equations is composed by the integration of boundary quadratic elements and triangular linear cells in the domain for the coupling of the thermal load, surface forces and Winkler's spring reactions. Results are presented through examples for analytical validation and also to demonstrate the program applicability in the scope of civil engineering.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1. MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA.....	1
1.2. OBJETIVOS.....	2
1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO.....	3
2. TEORIA DA ELASTICIDADE EM ESTADO PLANO	5
2.1. INTRODUÇÃO	5
2.2. HIPÓTESES BÁSICAS.....	6
2.3. EQUAÇÕES RELEVANTES.....	6
2.4. SISTEMA DE INTEGRAIS NO CONTORNO DA FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO EM EPT.....	8
3. TEORIA DE REISSNER.....	11
3.1. INTRODUÇÃO	11
3.2. HIPÓTESES BÁSICAS.....	12
3.3. EQUAÇÕES APLICADAS À TEORIA DE REISSNER	12
3.4. SISTEMA DE INTEGRAIS NO CONTORNO DA FORMULAÇÃO PARA PLACAS ESPESAS	16
4. TERMOELASTICIDADE.....	21
4.1. INTRODUÇÃO	21
4.2. FORMULAÇÃO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES INICIAIS	21
4.3. ESFORÇOS GERADOS POR CARGAS TÉRMICAS.....	22
4.4. DEFORMAÇÃO INICIAL NO SISTEMA DE INTEGRAIS NO CONTORNO	22
4.5. CURVATURA INICIAL NO SISTEMA DE INTEGRAIS NO CONTORNO	24
5. APOIOS ELÁSTICOS TIPO WINKLER	28
5.1. INTRODUÇÃO	28
5.2. FORÇAS DE SUPERFÍCIE NA FORMULAÇÃO DO MEC	29
5.3. ACOPLAMENTO DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE AOS DESLOCAMENTOS EM PONTOS INTERNOS.....	32

6. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	34
6.1. INTRODUÇÃO.....	34
6.2. DISCRETIZAÇÃO DO MODELO E PROCEDIMENTOS DE INTEGRAÇÃO.....	36
6.3. CÁLCULO DE TENSÕES NO CONTORNO.....	48
7. ESTUDOS DE CASO.....	50
7.1. INTRODUÇÃO.....	50
7.2. VARIAÇÃO DE TEMPERATURA UNIFORME EM CHAPA.....	52
7.3. FLUXO DE CALOR UNIFORME EM CHAPA.....	53
7.4. GRADIENTE TÉRMICO EM PLACA ESPESSA.....	54
7.5. PLACA ESPESSA APOIADA EM MOLAS TIPO WINKLER.....	55
8. RESULTADOS.....	57
8.1. CASO 01 – VARIAÇÃO DE TEMPERATURA UNIFORME EM CHAPA.....	57
8.2. CASO 02 – FLUXO DE CALOR UNIFORME EM CHAPA.....	58
8.3. CASO 03 – GRADIENTE TÉRMICO EM PLACA ESPESSA.....	60
8.4. CASO 04 – PLACA APOIADA EM MOLAS TIPO WINKLER.....	65
9. CONCLUSÕES.....	69
9.1. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	69
9.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	70
10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	71
APÊNDICE A – NOTAÇÃO INDICIAL.....	74
APÊNDICE B – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA.....	75
B.1 – INTEGRAL NÚMERICA DE GAUSS.....	75
B.2 – TRANSFORMADA DE TELLES.....	77
B.3 – INTEGRAL DE KUTT.....	78

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Componentes de um sólido infinitesimal.....	5
Figura 2.2 – Componentes de forças e tensões no estado plano de tensões.....	7
Figura 3.1 – Representação das deformações cisalhantes.....	11
Figura 3.2 – Convenção de sinais para deslocamentos e rotações.....	12
Figura 3.3 – Convenção dos esforços internos e componentes resultantes.....	15
Figura 4.1 – Esforços gerados por gradientes térmicos ao longo da espessura.....	22
Figura 5.1 – Acoplamento dos deslocamentos em pontos internos ao sistema linear....	33
Figura 6.1 – Interface gráfica orientada a objetos do programa “MEC/CADv01”.....	34
Figura 6.2 – Fluxograma das rotinas do programa “MEC/CADv01”.....	35
Figura 6.3 – Discretização do contorno e domínio em elementos.....	37
Figura 6.4 – Funções de forma do elemento quadrático unidimensional.....	38
Figura 6.5 – Funções geométricas linear da célula bidimensional.....	40
Figura 6.6 – Ponto fonte coincidindo com um dos vértices da célula.....	41
Figura 6.7 – Ponto fonte na região interna da célula.....	42
Figura 6.8 – Ponto fonte situado em um dos lados da célula.....	43
Figura 6.9 – Ponto fonte situado fora do domínio da célula.....	44
Figura 6.10 – Relação entre os sistemas global e local de coordenadas.....	49
Figura 7.1 – Malhas da discretização do contorno para controle de convergência:.....	51
Figura 7.2 - Malhas da discretização do domínio para controle de convergência:.....	51
Figura 7.3 – Geometria e condições de contorno para o estudo de caso 01.....	52
Figura 7.4 – Geometria e condições de contorno para o estudo de caso 02.....	53
Figura 7.5 – Geometria e condições de contorno para o estudo de caso 03.....	54
Figura 7.6 – Malha discretizada com 1600 elementos de placa “S8R”via MEF.....	54
Figura 7.7 – Geometria e condições de contorno do estudo de caso 04.....	55
Figura 7.8 – Distribuição de molas unidimensionais no modelo em MEF.....	56
Figura 8.1 – Gráficos em gradientes de cores pelo MEC para o estudo de caso 01.....	57
Figura 8.2 – Deslocamentos “U1” no ponto interno [0,5;0,5] obtidos pelo MEC e pela solução analítica.....	58
Figura 8.3 – Gráficos em gradientes de cores pelo MEC para o estudo de caso 02.....	58
Figura 8.4 – Deslocamentos “U1” no ponto interno [0,5;0,5] obtidos pelo MEC e pela solução analítica.....	59

Figura 8.5 – Deslocamentos “U3” no ponto interno [0,5;0,5] obtidos pelo MEC e pelo MEF.....	60
Figura 8.6 – Gráficos em gradiente de cores: Deslocamentos do estudo de caso 03.	62
Figura 8.7 – Gráficos em gradiente de cores: Esforços de momentos do caso 03.	63
Figura 8.8 – Gráficos em gradiente de cores: Esforços cortantes do caso 03.	64
Figura 8.9 – Deslocamentos “U3” no ponto interno [0,5;0,5] obtidos pelo MEC e pelo MEF.....	65
Figura 8.10 – Gráficos em gradiente de cores: Deslocamentos do estudo de caso 04. ..	66
Figura 8.11 – Gráficos em gradiente de cores: Esforços de momento do caso 04.....	67
Figura 8.12 – Gráficos em gradiente de cores: Esforços cortantes do caso 04.	68

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Coeficientes de reação ks . Adaptado de Moraes (1976).....	28
Tabela 2 – Propriedades físicas e geométricas dos modelos analisados.	50
Tabela 3 – Comparação entre modelos analítico e numérico no caso 02.....	59
Tabela 4 – Comparação dos valores máximos entre modelos numéricos MEC e MEF no caso 03.....	61
Tabela 5 – Comparação dos valores máximos entre modelos numéricos MEC e MEF no caso 04.....	65
Tabela 6 – Coeficientes e pesos para a integração de Gauss.....	76

SÍMBOLOS

$A(z)$	Componente “A(z)” das funções de Bessel.
$B(z)$	Componente “B(z)” das funções de Bessel.
B_{α}^D	Vetor “B” associado ao gradiente térmico para integrais de domínio no cálculo de deslocamentos pela teoria de EPT.
$B'_{\alpha\beta}{}^D$	Vetor “B’” associado ao gradiente térmico para integrais de domínio no cálculo de tensões pela teoria de EPT.
B_i^{PT}	Vetor “B” associado ao gradiente térmico para integrais de domínio no cálculo de deslocamentos em placas espessas.
$B'_{i\alpha}{}^{PT}$	Vetor “B’” associado ao gradiente térmico para integrais de domínio no cálculo de esforços em placas espessas.
B_i^Q	Vetor “B” associado às cargas distribuídas para integrais de domínio no cálculo deslocamentos em placas espessas.
$B'_{i\alpha}{}^Q$	Vetor “B’” associado às cargas distribuídas para integrais de domínio no cálculo de esforços em placas espessas.
B_i^S	Vetor “B” associado às reações de molas tipo Winkler para integrais de domínio no cálculo de deslocamentos em placas espessas.
$B'_{i\alpha}{}^S$	Vetor “B’” associado às reações de molas tipo Winkler para integrais de domínio no cálculo de esforços em placas espessas.
S_{ij}	Matriz “S” associada às reações de molas tipo Winkler para integrais de domínio no cálculo de deslocamentos em placas espessas.
C	Módulo de rigidez ao cisalhamento
D	Módulo de rigidez à flexão.

E	Módulo de elasticidade longitudinal.
G	Módulo de elasticidade transversal.
I	Momento de inércia da seção transversal.
$K_0(z)$	Constante “ K_0 ” das funções de Bessel.
$K_1(z)$	Constante “ K_1 ” das funções de Bessel.
k_s	Coefficiente de mola tipo Winkler na direção 3.
$M_{\alpha\beta}$	Esforços de momento fletor.
Q_α	Esforços de cisalhamento.
N_C	Número de células internas.
$N_i^u(\xi)$	Funções geométricas associadas ao elemento unidimensional contínuo de ordem quadrática.
$N_i^b(\xi)$	Funções geométricas associadas à célula triangular de ordem linear.
q	Carregamento distribuído na direção 3.
P_α	Forças resultantes nas direções 1 e 2.
U_α	Deslocamentos generalizados nas direções 1 e 2.
u_i	Rotações nas direções 1, 2 e deslocamento na direção 3.
p_i	Momentos resultantes nas direções principais e força resultante na direção normal ao plano da placa.
α, β, γ	Índices gregos com variação de 1 a 2.
i, j, k	Índices romanos com variação de 1 a 3.
α_l	Coefficiente de dilatação térmica.
λ	Fator de cisalhamento.
ψ_α	Deformação específica cisalhante.

$\chi_{\alpha\beta}$	Deformação específica de flexão.
Γ	Contorno do domínio Ω .
Ω	Domínio em análise.
Γ_n	Contorno da célula triangular.
Ω_n	Domínio da célula triangular.

1. INTRODUÇÃO

1.1. MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

O método dos elementos de contorno tem se mostrado uma eficiente ferramenta para a solução de equações diferenciais. Sua principal característica é a aplicação do teorema do divergente para a transformação de integrais de domínio em integrais no contorno, reduzindo-se assim o custo computacional e tempo para obter-se a solução.

Em problemas que abordam a teoria da elasticidade, são encontradas na literatura diferentes formulações do método para a análise de elementos bidimensionais, os quais podem ser modelados como chapa em estado plano de tensão ou estado plano de deformação, como placas delgadas com base na teoria de Kirchhoff e placas espessas com base na teoria de Reissner.

A primeira formulação direta do MEC com base na teoria de Reissner foi proposta por Van der Weeën (1982). Karam (1986) avançou na formulação para a consideração de domínios infinitos e ao apontar a adequação do método tanto para placas finas como espessas. Xiao-Yan (1990) contribuiu para a formulação de placas espessas considerando-se o efeito da não-linearidade geométrica. Karam e Telles (1992) deram continuidade ao estudo de placas ao utilizar a formulação de tensões iniciais para a consideração da não-linearidade física. Rashed (1998) propôs uma formulação para o problema de placas espessas apoiadas em elementos de fundação tipo Winkler.

Tomando-se como base os avanços apresentados nestes trabalhos, as deformações e tensões oriundas de variações térmicas podem ser estimadas de maneira análoga à consideração da não-linearidade física via MEC, ou seja, através da formulação de tensões e deformações iniciais com o auxílio de células internas para contabilizar a parcela energética de carregamentos variáveis ao longo do domínio.

Apresenta-se neste trabalho uma revisão bibliográfica da aplicação do MEC em equações diferenciais referentes à teoria da elasticidade para elementos tipo chapa e à teoria de Reissner para elementos de placas espessas. Em sequência, é feito o acoplamento do comportamento elástico e térmico de um sólido com base na formulação de tensões e deformações iniciais através da discretização do domínio em células triangulares de ordem linear. De maneira análoga, é feito o acoplamento de rotinas para a consideração

de carregamentos distribuídos e reações de fundações elásticas tipo Winkler (com um grau de liberdade).

Foram adotados procedimentos alternativos para as situações de singularidade que existem ao longo da formulação do MEC. Para tal, foi utilizado o princípio do deslocamento de corpo rígido (translação e rotação), a transformação de base polinomial de terceira ordem apresentada por Telles e Oliveira (1994), a transformação de coordenadas polares para células triangulares e a integração numérica em partes finitas pela quadratura de Kutt (1975).

Para validar a formulação utilizada, são apresentados 4 estudos de caso: 2 comparando a formulação com modelos analíticos e 2 comparando-a com um modelo via método dos elementos finitos (Abaqus/CAE).

A notação indicial será utilizada ao longo dos próximos tópicos. Assim, os coeficientes em letras gregas (α , β e γ) variarão de 1 até 2 e os em letras romanas (i , j e k) de 1 até 3.

1.2. OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivos gerais:

- Realizar uma revisão bibliográfica das formulações mais relevantes para o estudo de placas espessas via método dos elementos de contorno;
- Demonstrar as aplicações da formulação desenvolvida neste trabalho no âmbito da engenharia civil;

Este trabalho tem como objetivos específicos:

- Desenvolver um programa com estrutura orientada a objetos e em linguagem MATLAB para a análise de placas espessas via método dos elementos de contorno em situações de carregamento dos tipos: variações de temperatura, cargas distribuídas linearmente e reações de apoios elásticos tipo Winkler;
- Validar a formulação desenvolvida através de estudos de caso, comparando-a com resultados analíticos ou obtidos através de uma formulação numérica alternativa via método dos elementos finitos.

1.3. ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho tem sua composição e narrativa dividida em 9 capítulos:

No capítulo 1 apresenta-se uma contextualização inicial da linha de pesquisa deste trabalho. Em seguida são expostas as motivações que influenciaram sua escolha como tema de dissertação de mestrado e os objetivos propostos a serem alcançados com a sua realização.

No capítulo 2 apresenta-se uma revisão das equações que compõe a teoria da elasticidade e como elas são utilizadas no comportamento de elementos tipo chapa em Estado Plano de Tensão (EPT). Ao final do capítulo são apresentados os sistemas de integrais que compõe a formulação do método dos elementos de contorno para solução destas equações.

No capítulo 3 apresenta-se uma revisão das hipóteses básicas e equações que compõe a teoria de Reissner para placas espessas. De forma semelhante ao capítulo anterior, apresentam-se os sistemas de integrais que compõe a formulação do método dos elementos de contorno para solução das equações desta teoria.

O capítulo 4 discorre sobre o comportamento de materiais elásticos quando submetidos a variações térmicas e como a formulação de tensões e deformações iniciais pode ser utilizada para acoplar o comportamento térmico aos campos de deslocamentos e esforços.

No capítulo 5 apresenta-se o comportamento de placas apoiadas em elementos de fundação tipo Winkler e como a formulação do método dos elementos de contorno acopla esta subrotina de maneira análoga a consideração de carregamentos distribuídos.

No capítulo 6 é apresentada a implementação numérica da formulação via método dos elementos de contorno para o elemento de chapa em EPT e para o elemento de placa espessa solicitados por até três tipos de carregamentos: variações de temperatura, cargas distribuídas e reação de apoio elástico tipo Winkler. Apresenta-se a divisão da estrutura de processamento do programa desenvolvido em linguagem MATLAB, especificando-se os tipos de elementos utilizados para a discretização do contorno e do domínio em análise. Também são expostos os procedimentos adotados para as integrais numéricas do sistema linear e para o cálculo de integrais em situações de singularidade em pontos no contorno ou no interior do domínio.

No capítulo 7 são propostos estudos de caso que comparam a formulação proposta com modelos analíticos e com modelos numéricos via método dos elementos finitos, tendo como objetivo a validação da formulação abordada neste trabalho.

No capítulo 8 apresenta-se os resultados da análise numérica de cada estudo de caso proposto no capítulo anterior.

No capítulo 9 chega-se às conclusões finais deste trabalho e propostas de desenvolvimentos futuros.

Por fim, no capítulo 10 são apresentadas as referências bibliográficas em que este trabalho se fundamentou.

2. TEORIA DA ELASTICIDADE EM ESTADO PLANO

2.1. INTRODUÇÃO

A teoria da elasticidade representa o comportamento de um sólido quando solicitado por forças de superfície ou de volume. Embora sua dedução seja voltada para sólidos tridimensionais, a eliminação de graus de liberdade que apresentam variação desprezível permite sua simplificação para modelos bidimensionais e unidimensionais.

A Figura 2.1 apresenta o conjunto de tensões normais, tensões tangenciais, forças de superfície e forças de volume que compõem um sólido infinitesimal.

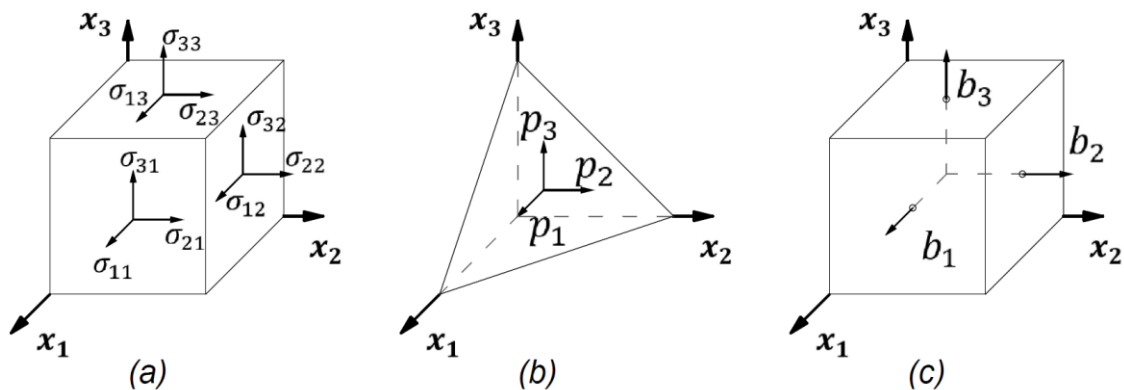


Figura 2.1 – Componentes de um sólido infinitesimal.

(a) Tensões normais e tangenciais; (b) Forças de superfície; (c) Forças de volume.

A equação diferencial que rege a teoria da elasticidade é a equação de Navier, Eq. (1), a qual é deduzida pela combinação de equações de equilíbrio, relações constitutivas, equações de compatibilidade e do tensor de Cauchy. Para um estudo mais aprofundado da dedução desta equação, sugere-se ao leitor a referência [6].

$$GU_{j,kk} + \frac{G}{1-2\nu}U_{k,kj} + b_j = 0 \quad (1)$$

Onde " U_i " representa os deslocamentos generalizados, " b_j " representa as forças de volume, a componente " G " representa o módulo de elasticidade transversal do material e " ν " o coeficiente de Poisson. O módulo de elasticidade transversal se relaciona com o módulo de elasticidade longitudinal através da equação abaixo.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2)$$

2.2. HIPOTESES BÁSICAS

No estado plano de tensões as componentes σ_{13} , σ_{23} e σ_{33} (Figura 2.1) são consideradas nulas. A componente normal do campo de deformações ε_{33} é obtida através da equação abaixo.

$$\varepsilon_{33} = \nu(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (3)$$

Assim, o número de graus de liberdade reduz-se a duas componentes de deslocamentos generalizados e forças resultantes (“ U_α ” e “ P_α ”).

2.3. EQUAÇÕES RELEVANTES

2.3.1 Relação deslocamento-deformação

As componentes de deformações normais e tangenciais se relacionam com os deslocamentos no plano conforme expressa a equação abaixo.

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i}) \quad (4)$$

2.3.2 Equações de compatibilidade

A continuidade de um sólido tridimensional é garantida através das equações de compatibilidade. Devido as simplificações desta formulação para o plano bidimensional, a compatibilidade é expressa através da equação a seguir.

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} - 2\varepsilon_{12,12} = 0 \quad (5)$$

2.3.3 Forças resultantes no plano

A componente de forças “ P_α ” é definida pelo somatório de tensões que atuam num plano qualquer, onde “ n_α ” representa as componentes angulares da normal ao plano.

$$P_\alpha = n_\alpha \sigma_{\alpha\beta} \quad (6)$$

A Figura 2.2 apresenta a convenção de sinais para as componentes de tensão “ $\sigma_{\alpha\beta}$ ” e forças resultantes em um plano “ P_α ” para uma determinada normal “ n ”.

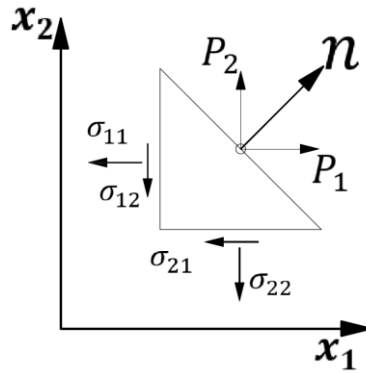


Figura 2.2 – Componentes de forças e tensões no estado plano de tensões.

2.3.4 Relações constitutivas

Para um material considerado elástico e isotrópico utiliza-se a chamada de Lei de Hooke, que define a relação entre tensões e deformações elásticas do material pela equação abaixo.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (7)$$

Onde C_{ijkl} é o tensor isotrópico de quarta ordem para tensões elásticas definido pela seguinte equação:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (8)$$

O tensor “ δ_{ij} ” representa o delta de Kronecker, onde os seus valores são definidos conforme as equações abaixo.

$$\delta_{ij} = 1, \text{ se } i = j \quad (9)$$

$$\delta_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \quad (10)$$

Como forma de utilizar na formulação do MEC para o elemento em estado plano de tensões as mesmas soluções fundamentais utilizadas na formulação do elemento em estado plano de deformação (EPD), pode-se substituir o coeficiente de Poisson nessas equações pelo coeficiente de Poisson modificado “ $\bar{\nu}$ ”, na forma

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu} . \quad (11)$$

2.3.5 Equações diferenciais de equilíbrio

O equilíbrio de forças no elemento em EPT é estabelecido por um sistema linear com duas equações. Alterando-se a equação (1) para torná-la em função das tensões normais, tensões tangenciais e forças de volume, obtém-se o sistema de equações diferenciais de equilíbrio

$$\sigma_{\alpha\beta,\alpha} + b_\beta = 0. \quad (12)$$

2.3.6 Condições de contorno

As condições de contorno são definidas como pelas equações (13) e (14), onde os deslocamentos generalizados e reações no plano serão representados, respectivamente, pela notação U_α e P_α .

$$U_\alpha = \bar{U}_\alpha \text{ em } \Gamma_1 \quad (13)$$

$$P_\alpha = \bar{P}_\alpha \text{ em } \Gamma_2 \quad (14)$$

Onde

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (15)$$

2.4. SISTEMA DE INTEGRAIS NO CONTORNO DA FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO EM EPT

A identidade de Somigliana é definida conforme a equação abaixo.

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{jk} \sigma_{jk}^* d\Omega \quad (16)$$

Através da manipulação da equação (16) e aplicação do teorema do divergente, obtém-se para o elemento de chapa o seguinte sistema linear.

$$C_{\alpha\beta}(\xi)U_\beta(\xi) + \int_{\Gamma} P_{\alpha\beta}^*(\xi, x)U_\beta(x)d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{\alpha\beta}^*(\xi, x)P_\beta(x)d\Gamma \quad (17)$$

O processo de manipulação da identidade de Somigliana até a obtenção de um sistema linear com duas equações por nó da formulação do método dos elementos de contorno pode ser encontrado para um estudo mais aprofundado na referência [6].

Na equação (17) " $C_{\alpha\beta}$ " é um tensor que depende da geometria e orientação do contorno no ponto fonte " ξ " e em contornos suaves equivale a " $\delta_{ij}/2$ ". Vale ressaltar que " Ω " representa o domínio do modelo em análise e " Γ " representa o contorno deste domínio.

Os tensores “ $U_{\alpha\beta}^*$ ” e “ $P_{\alpha\beta}^*$ ” representam, respectivamente, num ponto campo “ x ”, os deslocamentos e forças de superfície de uma carga unitária aplicada no ponto fonte “ ξ ”, sendo definidas pelas equações

$$U_{\alpha\beta}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\bar{\nu})G} [(3 - 4\bar{\nu}) \ln(r) \delta_{\alpha\beta} - r_{,\alpha} r_{,\beta}] \quad (18)$$

e

$$P_{\alpha\beta}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} \left\{ [(1 - 2\bar{\nu}) \delta_{\alpha\beta} + 2r_{,\alpha} r_{,\beta}] \frac{dr}{dn} - (1 - 2\bar{\nu})(r_{,\alpha} n_{\beta} - r_{,\beta} n_{\alpha}) \right\}. \quad (19)$$

Onde “ r ” é a distância entre os pontos campo e fonte, podendo ser escrita na forma de notação indicial como:

$$r = \sqrt{r_{\alpha} r_{\alpha}}. \quad (20)$$

Onde

$$r_{\alpha} = x_{\alpha}(x) - x_{\alpha}(\xi). \quad (21)$$

Através da derivação do sistema linear apresentado na Eq. (17) com base na relação deslocamento-deformação, Eq. (4), e aplicando o resultado deste processo na relação constitutiva, Eq. (7), obtêm-se o sistema linear para componentes de tensão “ σ_{11} ”, “ σ_{12} ” e “ σ_{22} ”, conforme expresso na equação abaixo.

$$\sigma_{\alpha\beta}(\xi) + \int_{\Gamma} P_{\alpha\beta\gamma}^*(\xi, x) U_{\gamma}(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{\alpha\beta\gamma}^*(\xi, x) P_{\gamma}(x) d\Gamma \quad (22)$$

O processo de manipulação das soluções fundamentais “ $U_{\alpha\beta}^*$ ” e “ $P_{\alpha\beta}^*$ ” e do sistema linear da Eq. (17), referentes aos deslocamentos e forças de superfície do elemento de chapa até a obtenção das equações de integrais para as componentes de tensão pode ser encontrado na referência [6] para um estudo mais aprofundado.

As soluções fundamentais “ $U_{\alpha\beta\gamma}^*$ ” e “ $P_{\alpha\beta\gamma}^*$ ” obtidas através do processo especificado no parágrafo anterior são apresentadas nas seguintes equações:

$$U_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} [(1 - \bar{\nu})(r_{,\beta} \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\alpha} \delta_{\beta\gamma} - r_{,\gamma} \delta_{\alpha\beta}) + 2r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma}] \quad (23)$$

e

$$P_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{G}{2\pi(1-\bar{\nu})r} (P_{\alpha\beta\gamma}^{*A} + P_{\alpha\beta\gamma}^{*B} + P_{\alpha\beta\gamma}^{*C}). \quad (24)$$

A divisão da Eq. (24) em 3 componentes ($P_{\alpha\beta\gamma}^{*A}, P_{\alpha\beta\gamma}^{*B}, P_{\alpha\beta\gamma}^{*C}$) foi realizada apenas como forma melhor visualizar o aglomerado de equações da solução fundamental original exposta na referência [6].

$$P_{\alpha\beta\gamma}^{*A} = 2 \frac{dr}{dn} [(1 - 2\bar{v})\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma} + \bar{v}(\delta_{\alpha\gamma}r_{,\beta} + \delta_{\beta\gamma}r_{,\alpha}) - 4r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}] \quad (24.a)$$

$$P_{\alpha\beta\gamma}^{*B} = 2\bar{v}(n_{\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma} + n_{\beta}r_{,\alpha}r_{,\gamma}) + (1 - 2\bar{v})(2n_{\gamma}r_{,\alpha}r_{,\beta} + n_{\beta}\delta_{\alpha\gamma} + n_{\alpha}\delta_{\beta\gamma}) \quad (24.b)$$

$$P_{\alpha\beta\gamma}^{*C} = -(1 - 4\bar{v})n_{\gamma}\delta_{\alpha\beta} \quad (24.c)$$

Vale ressaltar que no sistema linear apresentado anteriormente e referentes a formulação do MEC, Eq. (17), as parcelas associadas a integrais de domínio contabilizadas no vetor “B”, como peso próprio ou carregamento térmico, foram omitidas para serem abordadas em tópicos futuros.

3. TEORIA DE REISSNER

3.1. INTRODUÇÃO

Na análise de estruturas, entende-se como placas os elementos que possuem duas dimensões ortogonais substancialmente maiores que a sua dimensão transversal (espessura) e que são solicitados preponderantemente por carregamentos normais ao seu plano médio. Entre as teorias para elementos de placa, a literatura classifica como placas delgadas os modelos baseados na teoria de Kirchhoff e como placas espessas os modelos baseados na teoria de Reissner.

Como diferença da teoria de Kirchhoff, a teoria de Reissner considera a influência das deformações cisalhantes na solução do problema. Assim, no estado deformado uma linha reta traçada ao longo da espessura não se mantém obrigatoriamente normal ao plano da seção média, conforme representa a Figura 3.1.

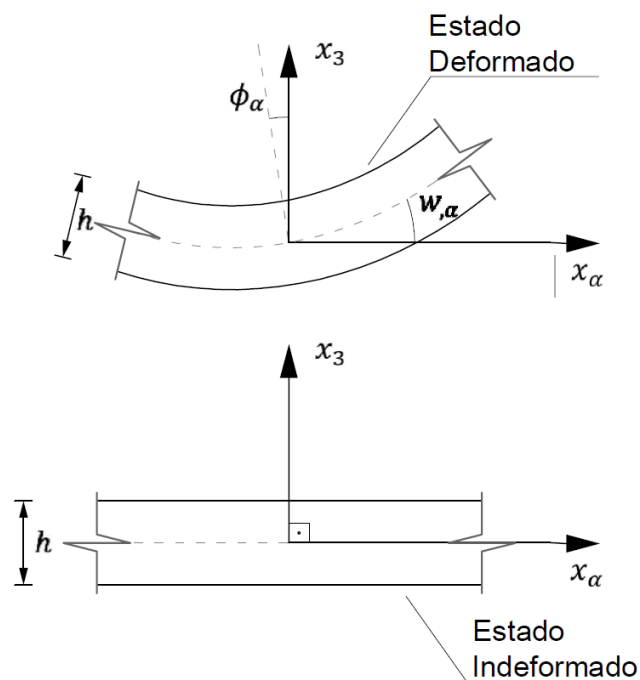


Figura 3.1 – Representação das deformações cisalhantes.

Na teoria de Reissner, um sólido tridimensional é representado por um elemento plano bidimensional composto por três deslocamentos generalizados: rotação no eixo principal (ϕ_1), rotação no eixo secundário (ϕ_2) e deslocamento transversal (w).

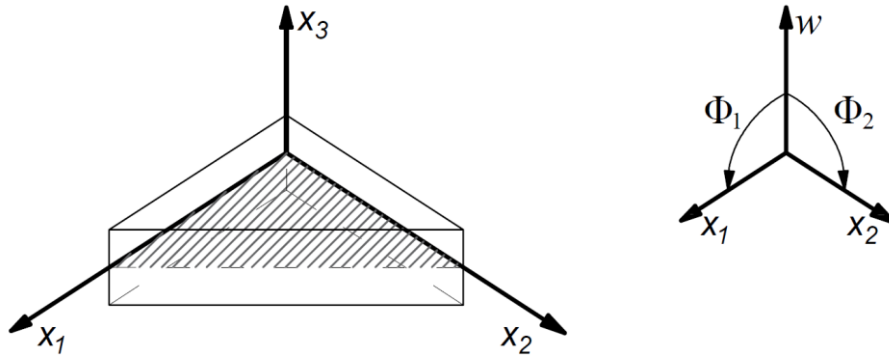


Figura 3.2 – Convenção de sinais para deslocamentos e rotações.

3.2. HIPÓTESES BÁSICAS

Algumas hipóteses básicas devem ser consideradas para a aplicação desta teoria:

- A espessura é considerada pequena em relação as demais dimensões;
- O material em todo o sólido é homogêneo, isotrópico e de comportamento elástico-linear;
- As componentes de tensões tangenciais (σ_{13} e σ_{23}) são consideradas nulas nas faces superior e inferior da placa;
- A componente de tensão normal à superfície das faces é dada como $\sigma_{33} = \pm \frac{q}{2}$ para as coordenadas $x_3 = \pm \frac{h}{2}$;

3.3. EQUAÇÕES APLICADAS À TEORIA DE REISSNER

3.3.1 Deslocamentos generalizados

Os deslocamentos " U_i " nas 3 direções ao longo da espessura do sólido tridimensional são condensados em 3 graus de liberdade do elemento de placa. Esse procedimento é obtido através de integrais com limites definidos entre a face superior ($+h/2$) e inferior ($-h/2$) da placa, conforme expressam as equações (25) e (26). Essas equações expressam, respectivamente, as rotações da normal à superfície média nas direções principais do plano da placa (ϕ_α) e o deslocamento transversal (w).

$$\phi_\alpha = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} U_\alpha x_3 dx_3 \quad (25)$$

$$w = \frac{3}{2h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} U_3 \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right] dx_3 \quad (26)$$

3.3.2 Tensões Solicitantes

As tensões normais e tangenciais nas direções dos planos principais do elemento de placa variam linearmente ao longo da espessura em função dos esforços de momento fletor, conforme expressa a equação

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{12}{h^3} M_{\alpha\beta} x_3. \quad (27)$$

Através das equações diferenciais de equilíbrio, obtém-se as demais componentes de tensão expressas a seguir

$$\sigma_{\alpha 3} = \frac{3}{2h} Q_{\alpha 3} \left[1 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right], \quad (28)$$

$$\sigma_{33} = \frac{qx_3}{2h} \left[3 - \left(\frac{2x_3}{h} \right)^2 \right]. \quad (29)$$

3.3.3 Esforços Solicitantes

De maneira análoga às equações (25) e (26), as tensões normais e tangenciais são condensadas em esforços ao longo da espessura através das integrais expressas na equação (30) para momentos fletores, na equação (31) para esforços cisalhantes e na equação (32) para esforços normais.

$$M_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} x_3 dx_3 \quad (30)$$

$$Q_\alpha = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \quad (31)$$

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \quad (32)$$

3.3.4 Equações de Equilíbrio

Ao integrar as tensões normais e tangenciais em esforços, as equações de equilíbrio apresentadas anteriormente na equação (12) serão representadas nesta teoria em função dos esforços, conforme as equações

$$Q_{\alpha,\alpha} + q = 0 \quad (33)$$

e

$$M_{\alpha\beta,\beta} + Q_\alpha = 0. \quad (34)$$

3.3.5 Deformações Específicas

Os deslocamentos generalizados resultarão em deformações cisalhantes e deformações de flexão que serão posteriormente contabilizados no cálculo dos esforços através das relações constitutivas do material. As deformações cisalhantes dependem da rotação do eixo normal ao plano médio do elemento de placa e da taxa de variação da flecha ao longo de uma direção, conforme expressa a equação a seguir:

$$\psi_\alpha = \phi_\alpha + w_{,\alpha}. \quad (35)$$

As deformações de flexão (curvatura) são calculadas pela taxa de variação das rotações em relação aos eixos principais “ ϕ_α ”, conforme expresso abaixo.

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{(\phi_{\alpha,\beta} + \phi_{\beta,\alpha})}{2} \quad (36)$$

3.3.6 Relações Constitutivas

As relações constitutivas definem a relação esforço-deformação de um material homogêneo, isotrópico e de comportamento elástico linear.

$$Q_\alpha = C\psi_\alpha \quad (37)$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left(2\chi_{\alpha\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} \chi_{\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} q \delta_{\alpha\beta} \quad (38)$$

Onde

“ D ” é a rigidez a flexão: $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

“ C ” é a rigidez ao cisalhamento: $C = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2}$

“ λ ” é o fator de cisalhamento: $\lambda = \frac{\sqrt{10}}{h}$

3.3.7 Equações diferenciais de Reissner

Através da combinação e diferenciação das equações citadas anteriormente, obtém-se o sistema de equações de Reissner:

$$Q_\alpha - \frac{1}{\lambda^2} \nabla^2 Q_\alpha + \frac{1}{\lambda^2(1-\nu)} q_{,\alpha} = -D \frac{\partial(\nabla^2 w)}{\partial x_\alpha} \quad (39)$$

$$D \nabla^4 w + \frac{(2-\nu)}{\lambda^2(1-\nu)} \nabla^2 q = q \quad (40)$$

3.3.8 Condições de Contorno

O elemento de placa com base na teoria de Reissner possui 3 componentes resultantes que são obtidas pelas seguintes equações:

$$p_\alpha = n_\beta M_{\alpha\beta} \quad (41)$$

$$p_3 = n_\alpha Q_\alpha \quad (42)$$

Conforme apresenta a Figura 3.3.

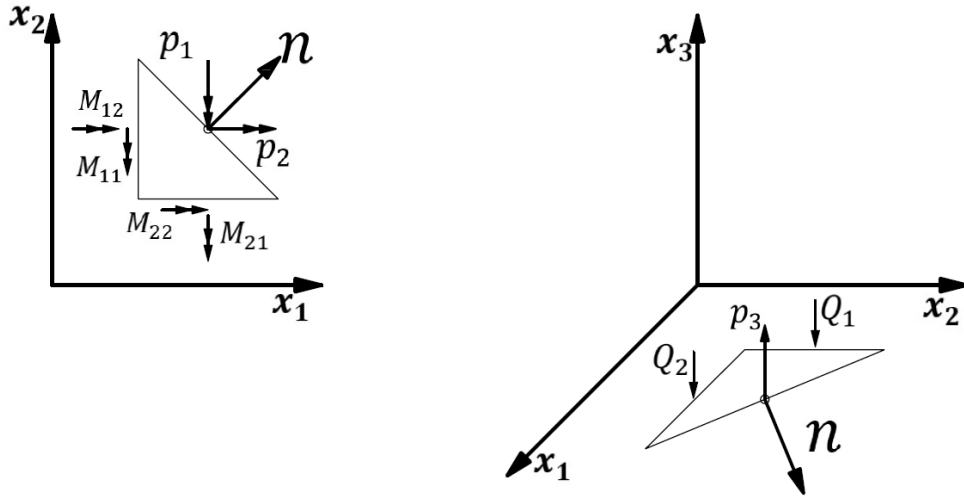


Figura 3.3 – Convenção dos esforços internos e componentes resultantes.

As condições de contorno são definidas como pelas equações:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Gamma_1 \quad (43)$$

$$p_i = \bar{p}_i \text{ em } \Gamma_2 \quad (44)$$

Onde os deslocamentos generalizados (\$\phi_1\$, \$\phi_2\$ e \$w\$) serão representados pela notação \$u_1\$, \$u_2\$ e \$u_3\$ e o contorno é definido pelo conjunto expresso abaixo.

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \quad (45)$$

3.4. SISTEMA DE INTEGRAIS NO CONTORNO DA FORMULAÇÃO PARA PLACAS ESPESAS

O sistema de integrais no contorno para solução das equações diferenciais de Reissner, eq. (39) e (40), pode ser obtido através da diferenciação do teorema de Betti ou através do método dos resíduos ponderados, resultando na equação abaixo.

$$C_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)d\Gamma \quad (46)$$

Para um estudo mais aprofundado destes dois procedimentos, recomenda-se as referências [12] e [28].

De forma análoga ao apresentado no capítulo da teoria da elasticidade em EPT, os tensores “ u_{ij}^* ” e “ p_{ij}^* ” representam, respectivamente, deslocamentos generalizados e forças de superfície num ponto campo “ x ” por uma carga unitária aplicada no ponto fonte “ ξ ”. Neste trabalho utilizaram-se os tensores “ u_{ij}^* ” da solução fundamental apresentada por Weeën (1982) conforme expressas nas equações abaixo:

$$u_{\alpha\beta}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)} \{ [8B(z) - (1-\nu)(2\ln z - 1)]\delta_{\alpha\beta} - [8A(z) + 2(1-\nu)]r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta} \}; \quad (47)$$

$$u_{\alpha 3}^* = -u_{3\alpha}^* = \frac{1}{8\pi D} (2\ln z - 1) \cdot r \cdot r_{,\alpha}; \quad (48)$$

$$u_{33}^* = \frac{1}{8\pi D(1-\nu)\lambda^2} [(1-\nu) \cdot z^2 \cdot (\ln z - 1) - 8\ln z]; \quad (49)$$

Onde

$$z = \lambda r. \quad (50)$$

As variáveis “ $A(z)$ ” e “ $B(z)$ ” são obtidas através de funções de Bessel, as quais são escritas conforme as expressões:

$$A(z) = K_0(z) + \frac{2}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right]; \quad (51)$$

$$B(z) = K_0(z) + \frac{1}{z} \left[K_1(z) - \frac{1}{z} \right]. \quad (52)$$

As funções de Bessel “ $K_0(z)$ ” e “ $K_1(z)$ ” são aproximadas através de expansões polinomiais expandidas conforme as equações à seguir:

Para $0 < z \leq 2$

$$\begin{aligned}
 K_0(z) = & -\ln\left(\frac{z}{2}\right)I_0(z) - 0.5772156 + 0.4227842\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 0.2306975\left(\frac{z}{2}\right)^4 \\
 & + 0.0348859\left(\frac{z}{2}\right)^6 + 0.0026269\left(\frac{z}{2}\right)^8 \\
 & + 0.0001075\left(\frac{z}{2}\right)^{10} + 0.0000074\left(\frac{z}{2}\right)^{12}
 \end{aligned}
 \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
 K_1(z) = & \frac{1}{z}[\ln\left(\frac{z}{2}\right)I_1(z) + 1.0000 + 0.15443144\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 0.67278579\left(\frac{z}{2}\right)^4 \\
 & - 0.18156897\left(\frac{z}{2}\right)^6 - 0.01919402\left(\frac{z}{2}\right)^8 \\
 & - 0.000110404\left(\frac{z}{2}\right)^{10} - 0.00004686\left(\frac{z}{2}\right)^{12}]
 \end{aligned}
 \tag{54}$$

Onde

$$\begin{aligned}
 I_0(z) = & 1.0000 + 3.5156229\left(\frac{z}{3.75}\right)^2 + 3.0899424\left(\frac{z}{3.75}\right)^4 \\
 & + 1.2067492\left(\frac{z}{3.75}\right)^6 + 0.2659732\left(\frac{z}{3.75}\right)^8 \\
 & + 0.0360768\left(\frac{z}{3.75}\right)^{10} + 0.0045813\left(\frac{z}{3.75}\right)^{12}
 \end{aligned}
 \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
 I_1(z) = & z[0.5 + 0.87890594\ln\left(\frac{z}{3.75}\right)^2 + 0.51498869\left(\frac{z}{3.75}\right)^4 \\
 & + 0.15084934\left(\frac{z}{3.75}\right)^6 + 0.02658733\left(\frac{z}{3.75}\right)^8 \\
 & + 0.00301532\left(\frac{z}{3.75}\right)^{10} + 0.00032411\left(\frac{z}{3.75}\right)^{12}]
 \end{aligned}
 \tag{56}$$

E para $z \geq 2$

$$\begin{aligned}
K_0(z) = & \frac{1}{\sqrt{\lambda r} e^{\lambda r}} [1.25331414 - 0.0783235 \left(\frac{2}{z}\right) \\
& + 0.0218956 \left(\frac{2}{z}\right)^2 - 0.01062446 \left(\frac{2}{z}\right)^3 \\
& + 0.00587872 \left(\frac{2}{z}\right)^4 - 0.00251540 \left(\frac{2}{z}\right)^5 \\
& + 0.00053208 \left(\frac{2}{z}\right)^6]
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
K_1(z) = & \frac{1}{\sqrt{\lambda r} e^{\lambda r}} [1.25331414 + 0.23498619 \left(\frac{2}{z}\right) + \\
& - 0.03655620 \left(\frac{2}{z}\right)^2 - 0.01504268 \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \\
& - 0.00780353 \left(\frac{2}{z}\right)^4 + 0.00325614 \left(\frac{2}{z}\right)^5 + \\
& - 0.00068245 \left(\frac{2}{z}\right)^6]
\end{aligned} \tag{58}$$

As forças de superfície correspondentes à solução fundamental, Eq. (59) à (62), foram apresentadas por Karam (1992) aplicando as equações (47) à (49) nas relações esforço-deformação, Eq. (37) e (38), e obtendo-se suas resultantes com as equações (41) e (42).

$$p_{\alpha\beta}^* = -\frac{1}{4\pi r} [p_{\alpha\beta}^{*A} + p_{\alpha\beta}^{*B} + p_{\alpha\beta}^{*C}] \tag{59}$$

Onde

$$p_{\alpha\beta}^{*A} = (4A(z) + 2z \cdot K_1(z) + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\beta} r_{,n} + r_{,\beta} n_{\alpha}) \tag{59.a}$$

$$p_{\alpha\beta}^{*B} = (4A(z) + 1 + \nu) r_{,\alpha} n_{\beta} \tag{59.b}$$

$$p_{\alpha\beta}^{*C} = -2(8A(z) + 2z \cdot K_1(z) + 1 - \nu) r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta} \cdot r_{,n} \tag{59.c}$$

$$p_{\alpha 3}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} [B(z) \cdot n_\alpha - A(z) \cdot r_{,\alpha} \cdot r_{,n}] \quad (60)$$

$$p_{3\alpha}^* = -\frac{(1-\nu)}{8\pi} \left[\left(2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \ln z - 1 \right) n_\alpha + 2r_{,\alpha} \cdot r_{,n} \right] \quad (61)$$

$$p_{33}^* = -\frac{1}{2\pi r} r_{,n} \quad (62)$$

Através da diferenciação da Eq. (46) nas relações esforço-deformação, Eq. (37) e (38), obtêm-se as equações integrais para as componentes de esforços “ $M_{\alpha\beta}$ ” e “ Q_β ”.

$$M_{\alpha\beta}(\xi) + \int_{\Gamma} p_{\alpha\beta i}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta i}^*(\xi, x) p_i(x) d\Gamma \quad (63)$$

$$Q_\beta(\xi) + \int_{\Gamma} p_{3\beta i}^*(\xi, x) u_i(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} U_{3\beta i}^*(\xi, x) p_i(x) d\Gamma \quad (64)$$

O processo de manipulação dos tensores da solução fundamental, Eq. (47) à (49), Eq. (59) à (62), e do sistema linear, Eq. (46), referentes aos deslocamentos e forças generalizadas do elemento de placa espessa via MEC até a obtenção das equações de integrais para as componentes de esforços, pode ser encontrado em Karam (1992) para um estudo mais aprofundado.

Os tensores “ $u_{i\beta k}^*$ ” e “ $p_{i\beta k}^*$ ” foram obtidos através do processo especificado no parágrafo anterior.

$$u_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{1}{4\pi r} [u_{\alpha\beta\gamma}^{*A} + u_{\alpha\beta\gamma}^{*B} + u_{\alpha\beta\gamma}^{*C}] \quad (65)$$

$$u_{\alpha\beta\gamma}^{*A} = (4A + 2zK_1 + 1 - \nu)(\delta_{\beta\gamma} r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma} r_{,\beta}) \quad (65.a)$$

$$u_{\alpha\beta\gamma}^{*B} = -2(8A + 2zK_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma} \quad (65.b)$$

$$u_{\alpha\beta\gamma}^{*C} = (4A + 1 + \nu)\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} \quad (65.c)$$

$$u_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{1}{8\pi} [(2(1+v) \ln z - 1 + v) \delta_{\alpha\beta} + 2(1-v)r_{,\alpha} r_{,\beta}] \quad (66)$$

$$u_{3\beta\gamma}^* = \frac{\lambda^2}{2\pi} (B \delta_{\gamma\beta} - A r_{,\beta} r_{,\gamma}) \quad (67)$$

$$u_{3\beta 3}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{,\beta} \quad (68)$$

$$p_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{D(1-v)}{4\pi r^2} \{p_{\alpha\beta\gamma}^{*A} + p_{\alpha\beta\gamma}^{*B} + p_{\alpha\beta\gamma}^{*C} + p_{\alpha\beta\gamma}^{*D} + p_{\alpha\beta\gamma}^{*E}\} \quad (69)$$

Onde

$$p_{\alpha\beta\gamma}^{*A} = (4A + 2zK_1 + 1 - v)(\delta_{\gamma\alpha} n_{\beta} + \delta_{\gamma\beta} n_{\alpha}) \quad (69.a)$$

$$p_{\alpha\beta\gamma}^{*B} = (4A + 1 + 3v)\delta_{\alpha\beta} n_{\gamma} \quad (69.b)$$

$$p_{\alpha\beta\gamma}^{*C} = -(16A + 6zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2v)[(n_{\alpha} r_{,\beta} + n_{\beta} r_{,\alpha})r_{,\gamma} + (\delta_{\gamma\alpha} r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} r_{,\alpha})r_{,\gamma}] \quad (69.c)$$

$$p_{\alpha\beta\gamma}^{*D} = -(16A + 4z \cdot K_1 + z^2K_0 + 2 + 2v)(\delta_{\alpha\beta} r_{,\gamma} r_{,\gamma} + n_{\gamma} r_{,\alpha} r_{,\beta}) \quad (69.d)$$

$$p_{\alpha\beta\gamma}^{*E} = 4(24A + 8zK_1 + z^2K_0 + 2 - 2v) \cdot r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} r_{,\gamma} \quad (69.e)$$

$$p_{\alpha\beta 3}^* = \frac{D(1-v)\lambda^2}{4\pi r} [(2A + zK_1)(r_{,\beta} n_{\alpha} + r_{,\alpha} n_{\beta}) - 2(4A + zK_1)r_{,\alpha} r_{,\beta} r_{,\gamma} + 2A\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}] \quad (70)$$

$$p_{3\beta\gamma}^* = -\frac{D(1-v)\lambda^2}{4\pi r} [(2A + zK_1)(\delta_{\gamma\beta}r_{,\gamma} + r_{,\gamma}n_{\beta}) - 2(4A + zK_1)r_{,\gamma} r_{,\beta} r_{,\gamma} + 2A n_{\gamma} r_{,\beta}] \quad (71)$$

$$p_{3\beta 3}^* = \frac{D(1-v)\lambda^2}{4\pi r^2} [(z^2B + 1)n_{\beta} - (z^2A + 2)r_{,\beta} r_{,\gamma}] \quad (72)$$

4. TERMOELASTICIDADE

4.1. INTRODUÇÃO

A variação de temperatura em um sólido tem como consequência expansões ou contrações de volume. Em situações onde existe elevado gradiente térmico ou condições de contorno que restringem a variação volumétrica, surgem tensões de natureza termoelástica.

A teoria da elasticidade expressa os efeitos da variação de temperatura no campo de deformações através da equação

$$\varepsilon_{ij}^T = \frac{\bar{\alpha}}{1 + \bar{\nu}} \Delta T \delta_{ij}. \quad (73)$$

Onde

$\bar{\nu}$ é o coeficiente de Poisson modificado para a teoria de EPT ($\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}$);

$\bar{\alpha}$ é o coeficiente linear de dilatação térmica modificado ($\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{1+\bar{\nu}}$);

δ_{ij} é o delta de Kronecker e

ΔT é a variação de temperatura;

4.2. FORMULAÇÃO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES INICIAIS

A variação de temperatura será inserida na implementação numérica do MEC através das formulações de tensões e deformações iniciais, conforme as equações:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{Total} - 2G \left(\frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \right) \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (74)$$

e

$$\varepsilon_{ij}^{Total} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^T. \quad (75)$$

Onde

ε^e é a parcela de deformação elástica do material e

ε^T é a parcela de deformação oriunda da variação de temperatura.

Nestas equações, os campos de tensão e deformação são estimados através da superposição do comportamento elástico do material com o comportamento térmico. Este procedimento pode ser realizado de maneira análoga à consideração de deformações e tensões de diferentes parcelas, como carregamentos de pós-tração, retração, plasticidade, reações expansivas como corrosão ou reação álcali agregado.

4.3. ESFORÇOS GERADOS POR CARGAS TÉRMICAS

Conforme apresentado nas equações (74) e (75), a variação de temperatura resultará em incrementos de tensão e deformação nas direções normais às faces de um sólido. Quando a distribuição de temperatura varia ao longo da espessura em placas, é acrescida uma curvatura de origem térmica, o que resultará em esforços de flexão e torção. Como forma de facilitar a implementação das rotinas do efeito de chapa e placa, o carregamento térmico foi dividido em duas parcelas, conforme representado na Figura 4.1. A primeira parcela representa uma variação de temperatura ao longo da espessura média do sólido tridimensional, tendo efeitos estimados pela rotina de chapa em EPT. A segunda parcela representa uma variação de temperatura ao longo dos bordos inferior e superior, tendo efeitos estimados pela rotina de placa espessa de Reissner.

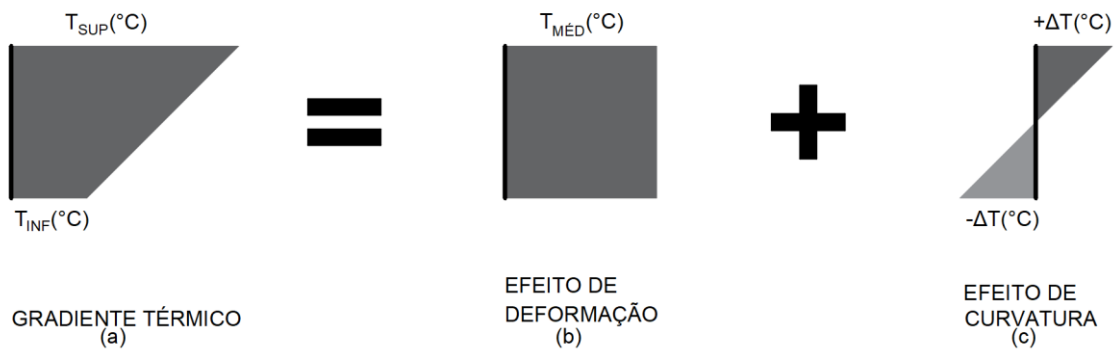


Figura 4.1 – Esforços gerados por gradientes térmicos ao longo da espessura.

4.4. DEFORMAÇÃO INICIAL NO SISTEMA DE INTEGRAIS NO CONTORNO

A formulação de deformações iniciais é inserida no sistema de integrais do método dos elementos de contorno sob a forma de vetores “B” utilizados para contabilizar a parcela de potencial energético oriunda de deformações prescritas ao longo de todo domínio “Ω”. Utilizou-se o índice “D” para indicar o vetor de parcela energética referente às deformações de origem térmica.

$$[H]\{U\} = [H]\{P\} + \{B^D\} \quad (76)$$

$$[S] = [G']\{P\} - [H']\{U\} + \{B'^D\} \quad (77)$$

As equações (76) e (77) representam na forma matricial o sistema linear e equações de integrais apresentados nas equações (17) e (22) acrescidos dos vetores referentes ao efeito de deformação pela variação de temperatura na seção média.

Como foi expresso no tópico anterior, a variação de temperatura ao longo de um sólido tridimensional será dividida em parcelas de efeito de deformação axial e efeito de curvatura inicial. A deformação inicial será acoplada ao sistema de equações da formulação do elemento de chapa em EPT através de vetores “ B_α^D ” e “ $B'_{\alpha\beta}^D$ ”. O primeiro vetor corresponde ao vetor aplicado ao sistema linear para obtenção dos deslocamentos no plano e forças resultantes (“ U_α ” e “ P_α ”). O segundo corresponde ao vetor aplicado às equações de integrais para obtenção das tensões normais e tensões tangenciais (“ $\sigma_{\alpha\beta}$ ”). Estes vetores são calculados por

$$B_\alpha^D = \sum_{n=1}^{ncells} 2\bar{\alpha}G \left(\frac{1 + \bar{\nu}}{1 - 2\bar{\nu}} \right) \int_{\Omega_n} u_{\alpha\beta,\beta}^* T_{M\acute{E}D} d\Omega_n \quad (78)$$

e

$$B'_{\alpha\beta}^D = \sum_{n=1}^{ncells} \bar{\alpha} \int_{\Omega_n} \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^* T_{M\acute{E}D} d\Omega_n. \quad (79)$$

As equações (78) e (79) representam as integrais de domínio que compõem os vetores “ B_α^D ” e “ $B'_{\alpha\beta}^D$ ”, respectivamente. O domínio “ Ω ” será dividido em “ n ” células internas triangulares com um valor de $T_{M\acute{E}D}$ associado a cada um dos seus 3 pontos.

As integrais de domínio na composição dos vetores “ B_α^D ” e “ $B'_{\alpha\beta}^D$ ”, podem ser transformadas em integrais de contorno quando a distribuição de temperaturas em todo domínio “ Ω ” se encontra em estado estacionário. Esse procedimento pode ser encontrado para um estudo mais aprofundado consultando-se a referência [26].

Este trabalho tem como objetivo desenvolver uma rotina para qualquer distribuição de temperaturas. Devido a isso, foram mantidas as integrais de domínio e utilizadas células internas de ordem linear em sua integração numérica. As soluções fundamentais que compõem as equações (78) e (79) foram extraídas de Telles (1983) sendo expressas conforme as equações

$$u_{\alpha\beta,\gamma}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\bar{\nu})G.r} \left\{ (1-2\bar{\nu})(r_{,\beta}\delta_{\gamma\alpha} + r_{,\alpha}\delta_{\gamma\beta} - r_{,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) + 2r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma} \right\} \quad (80)$$

e

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^* = \frac{G}{2\pi(1-\bar{\nu})r^2} (\sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*A} + \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*B} + \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*C} + \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*D} + \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*E}). \quad (81)$$

Onde

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*A} = 2(1-2\bar{\nu})(\delta_{\alpha\beta}r_{,\gamma}r_{,\theta} + \delta_{\gamma\theta}r_{,\alpha}r_{,\beta}); \quad (81.a)$$

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*B} = 2\bar{\nu}(\delta_{\theta\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma} + \delta_{\beta\gamma}r_{,\theta}r_{,\alpha} + \delta_{\alpha\gamma}r_{,\theta}r_{,\beta} + \delta_{\beta\theta}r_{,\alpha}r_{,\gamma}); \quad (81.b)$$

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*C} = -8r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}r_{,\theta}; \quad (81.c)$$

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*D} = (1-2\bar{\nu})(\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\theta\beta} + \delta_{\beta\gamma}\delta_{\theta\alpha}); \quad (81.d)$$

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*E} = -(1-4\bar{\nu})\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\theta}. \quad (81.e)$$

Os procedimentos adotados para a solução das singularidades que ocorrem ao longo das integrais do domínio discretizado em células triangulares serão abordados em tópicos futuros referentes à implementação numérica utilizada.

4.5. CURVATURA INICIAL NO SISTEMA DE INTEGRAIS NO CONTORNO

De maneira análoga ao procedimento da deformação inicial, a curvatura oriunda de um gradiente térmico ao longo da espessura da placa será inserida no sistema de integrais do MEC sob forma de vetores “B”. Esses vetores são utilizados para contabilizar a parcela de potencial energético de curvaturas prescritas aplicadas ao longo de todo o domínio “Ω”.

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} + \{B^{CT}\} \quad (82)$$

$$[S] = [G']\{p\} - [H']\{u\} + \{B'^{CT}\} \quad (83)$$

Utilizou-se o índice “CT” para representar os vetores referentes às parcelas energéticas de curvaturas de origem térmica. As equações (82) e (83) representam na forma matricial o sistema linear e equações de integrais apresentados nas equações (46), (63) e (64) acrescidos dos vetores referentes ao efeito de curvatura pelo gradiente térmico entre as faces superior e inferior do elemento de placa.

Assim, a curvatura referente ao gradiente térmico será acoplada ao sistema de equações lineares da formulação do elemento de placa espessa através de vetores “ B_i^{CT} ” e “ $B'_{i\beta}^{CT}$ ”. O primeiro vetor corresponde a parcela energética aplicada ao sistema linear para a obtenção dos deslocamentos e forças (“ u_i ” e “ p_i ”). O segundo corresponde ao vetor aplicado às equações de integrais para a obtenção de esforços de momento e cisalhamento (“ $M_{\alpha\beta}$ ” e “ Q_α ”).

Os vetores “ B_i^{CT} ” e “ $B'_{i\beta}^{CT}$ ” são definidos por integrais de domínio, conforme expresso nas equações

$$B_i^{CT} = \sum_{n=1}^{ncells} \int_{\Omega_n} \chi_{\alpha\beta i}^* \cdot M_{\alpha\beta}^T d\Omega_n \quad (84)$$

e

$$B'_{i\beta}^{CT} = \sum_{n=1}^{ncells} \int_{\Gamma} \chi_{i\beta\gamma\theta}^* M_{\gamma\theta}^T d\Omega. \quad (85)$$

O domínio “ Ω ” será dividido em “ n ” células internas triangulares com um valor de “ $M_{\alpha\beta}^T$ ” associado a cada um dos seus 3 pontos.

Os tensores “ $\chi_{\alpha\beta i}^*$ ” e “ $\chi_{i\beta\gamma\theta}^*$ ” que compõe as equações (84) e (85) foram extraídas de Karam (1992), onde foi realizada uma formulação para solução da não-linearidade física em placas. Comparando-se a formulação utilizada para plasticidade e a realizada neste trabalho, existe como diferença a necessidade de iterações para a obtenção do momento e curvatura plástica, enquanto na situação de um carregamento térmico, a curvatura aplicada ao longo do domínio depende apenas da distribuição de temperaturas. Assim, a curvatura e o momento oriundo de um gradiente térmico ao longo da espessura são definidos pelas equações:

$$\chi_{\alpha\beta}^T = \alpha \Delta T \delta_{\alpha\beta} \quad (86)$$

e

$$M_{\alpha\beta}^T = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha \delta_{\alpha\beta} \int_{-h/2}^{h/2} x_3 T(x_3) \cdot dx_3. \quad (87)$$

A curvatura total ao longo do elemento de placa será calculada conforme a equação a seguir:

$$\chi_{\alpha\beta}^{Total} = \chi_{\alpha\beta}^e + \chi_{\alpha\beta}^T. \quad (88)$$

Os esforços de momento fletor e esforço cisalhante são expressos conforme as equações:

$$M_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)}{2} \left[2\chi_{\alpha\beta}^{Total} + \frac{2\nu}{1-\nu} \chi_{\gamma\gamma}^{Total} \delta_{\alpha\beta} \right] - M_{\alpha\beta}^T \quad (89)$$

e

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{D(1-\nu)\lambda^2}{2} \psi_{\alpha}. \quad (90)$$

Os tensores da solução fundamental que representam a curvatura ao longo de uma placa de domínio infinito solicitada por cargas unitárias, com base no teorema de trabalho virtual da equação de Betti, são escritas conforme as equações abaixo.

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{-1}{8\pi D(1-\nu)r} [\chi_{\alpha\beta\gamma}^{*A} + \chi_{\alpha\beta\gamma}^{*B} + \chi_{\alpha\beta\gamma}^{*C}] \quad (91)$$

Onde

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^{*A} = (8A + 4z \cdot K_1 + 2 - 2\nu)(r_{,\beta} \cdot \delta_{\alpha\gamma} + r_{,\alpha} \cdot \delta_{\beta\gamma}); \quad (91.a)$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^{*B} = -4(8A + 2z \cdot K_1 + 1 - \nu)r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta} \cdot r_{,\gamma}; \quad (91.b)$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^{*C} = 2(4A + 1 - \nu)(\delta_{\alpha\beta} \cdot r_{,\gamma}). \quad (91.c)$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma}^* = \frac{-1}{8\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(2 \ln z - 1) + 2r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta}]. \quad (92)$$

Para a determinação dos esforços internos de momentos fletores e cisalhamento, os tensores “ $\chi_{i\beta\gamma\theta}^*$ ” são escritos conforme as equações a seguir.

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^* = \frac{1}{16\pi r^2} [\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*A} + \chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*B} + \chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*C} + \chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*D} + \chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*E} + \chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*F}] \quad (93)$$

Onde

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*A} = 4(4A + 2z \cdot K_1 + 1 - \nu)(\delta_{\gamma\alpha} \cdot \delta_{\theta\beta} + \delta_{\theta\alpha} \cdot \delta_{\gamma\beta}); \quad (93.a)$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*B} = 4(4A + 1 + \nu)\delta_{\gamma\theta} \cdot \delta_{\alpha\beta}; \quad (93.b)$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*C} = -8(8A + 2z \cdot K_1 + 1 - \nu)(\delta_{\gamma\theta} \cdot r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta}); \quad (93.c)$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*D} = -8(8A + 2z \cdot K_1 + 1 + \nu)(\delta_{\alpha\beta} \cdot r_{,\gamma} \cdot r_{,\theta}); \quad (93.d)$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*E} = -4(16A + 6z \cdot K_1 + z^2 \cdot K_0 + 2 - 2\nu)(\delta_{\gamma\alpha} \cdot r_{,\theta} \cdot r_{,\beta} + \delta_{\theta\alpha} \cdot r_{,\gamma} \cdot r_{,\beta} + \delta_{\gamma\beta} \cdot r_{,\alpha} \cdot r_{,\theta} + \delta_{\theta\beta} \cdot r_{,\gamma} \cdot r_{,\alpha}); \quad (93.e)$$

$$\chi_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*F} = 16(24A + 8z \cdot K_1 + z^2 \cdot K_0 + 2 - 2\nu) \cdot (r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta} \cdot r_{,\gamma} \cdot r_{,\theta}); \quad (93.f)$$

$$\chi_{3\beta\gamma\theta}^* = -\frac{\lambda^2}{16\pi r} [\chi_{3\beta\gamma\theta}^{*A} + \chi_{3\beta\gamma\theta}^{*B} + \chi_{3\beta\gamma\theta}^{*C}]; \quad (94)$$

Onde

$$\chi_{3\beta\gamma\theta}^{*A} = (8A + 4z \cdot K_1)(r_{,\theta} \cdot \delta_{\gamma\beta} + r_{,\gamma} \cdot \delta_{\theta\beta}); \quad (94.a)$$

$$\chi_{3\beta\gamma\theta}^{*B} = -4(8A + 2z \cdot K_1)r_{,\theta} \cdot r_{,\gamma} \cdot r_{,\beta}; \quad (94.b)$$

$$\chi_{3\beta\gamma\theta}^{*C} = 8A(\delta_{\gamma\theta} \cdot r_{,\beta}). \quad (94.c)$$

Os procedimentos adotados para a solução das singularidades que ocorrem ao longo das integrais do domínio discretizado em células triangulares serão abordados em tópicos futuros referentes à implementação numérica utilizada.

5. APOIOS ELÁSTICOS TIPO WINKLER

5.1. INTRODUÇÃO

Para a análise de elementos apoiados no solo, encontra-se na literatura o modelo matemático de Winkler que aproxima o comportamento do solo tridimensional através do uso de elementos de molas unidimensionais. A relação reação-deslocamento do elemento de mola é expressa conforme a equação

$$R(x) = k_s u_3(x). \quad (95)$$

A constante elástica “ k_s ” é chamada de coeficiente de reação elástica do solo e é utilizada para quantificar a capacidade resistente do solo “ $R(x)$ ” para um dado deslocamento unidirecional “ $u_3(x)$ ”. A determinação destes coeficientes pode ser realizada através de ensaios de prova de carga ou através de valores tabelados em normas técnicas. A Tabela 1 apresenta valores do coeficiente para diferentes tipos de solos catalogados por Moraes (1976).

Tabela 1 – Coeficientes de reação k_s . Adaptado de Moraes (1976)

Tipo de solo	k_s (kN.m⁻³)
Turfa leve – solo pantanoso	5.000 a 10.000
Turfa pesada – solo pantanoso	10.000 a 15.000
Areia fina de praia	10.000 a 15.000
Aterro de silte, areia e cascalho	10.000 a 20.000
Argila molhada	20.000 a 30.000
Argila úmida	40.000 a 50.000
Argila seca	60.000 a 80.000
Argila seca endurecida	100.000
Silte compactado com areia e pedra	80.000 a 100.000
Silte compactado com areia e muita pedra	100.000 a 120.000
Cascalho miúdo com areia fina	80.000 a 120.000
Cascalho médio com areia fina	100.000 a 120.000
Cascalho grosso com areia grossa	120.000 a 150.000
Cascalho grosso com pouca areia	150.000 a 200.000
Cascalho grosso com pouca areia compactada	200.000 a 250.000

Com base na equação (95), pode-se considerar o comportamento do solo como equivalente ao de uma força de superfície de magnitude acoplada ao seu deslocamento na direção transversal. Como esses deslocamentos são incógnitas adicionais para a solução do sistema linear da formulação do MEC, além de um vetor “ B ” associado às forças de superfície produzidas pelo solo, serão adicionadas ao sistema linear da Eq. (46) equações referentes aos deslocamentos transversais “ u_3 ” dos pontos internos.

Ao longo deste capítulo será apresentada a formulação do método dos elementos de contorno para aplicação de forças de superfície através de integrais de domínio. Em seguida, apresenta-se o processo para o acoplamento da equação (95) na magnitude das forças de superfície para modelar o comportamento dos apoios elásticos tipo Winkler.

5.2. FORÇAS DE SUPERFÍCIE NA FORMULAÇÃO DO MEC

De maneira análoga ao procedimento da curvatura inicial, a parcela de energia referente aos efeitos de uma carga distribuída será inserida na formulação do MEC sob forma de vetores “ B^Q ”, utilizados para contabilizar a parcela de potencial energético de forças de superfície aplicadas ao longo de todo o domínio “ Ω ”.

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} + \{B^Q\} \quad (96)$$

$$[S] = [G']\{p\} - [H']\{u\} + \{B'^Q\} \quad (97)$$

Utilizou-se o índice “ Q ” para representar os vetores referentes as parcelas energéticas de carregamentos distribuídos. As equações (96) e (97) representam na forma matricial os sistemas lineares apresentados nas equações (46), (63) e (64) acrescidos dos vetores referentes às forças de superfície aplicadas ao longo do elemento de placa.

Assim, a parcela energética referente à força de superfície será acoplada ao sistema de equações lineares da formulação do elemento de placa espessa através de vetores “ B_i^Q ” “ $B_{i\beta}^Q$ ”. O primeiro vetor corresponde a parcela energética aplicado ao sistema linear para a obtenção dos deslocamentos generalizados e reações de superfície (“ u_i ” e “ p_i ”). O segundo corresponde ao vetor aplicado às equações integrais para a obtenção de esforços de momento e cisalhamento (“ $M_{\alpha\beta}$ ” e “ Q_α ”). O domínio “ Ω ” será dividido em “ n ” células internas triangulares com um valor de força de superfície associado a cada um dos seus 3 pontos.

As integrais de domínio que compõem os vetores “ B_i^Q ” e “ $B'_{i\beta}^Q$ ” são expressas a abaixo.

$$B_i^Q = \sum_{n=1}^{ncells} \int_{\Omega_n} q(x) \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{v}{(1-v)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega_n(x) \quad (98)$$

$$B'_{i\beta}{}^Q = \sum_{n=1}^{ncells} \int_{\Omega_n} q(x) \left[u_{i\beta 3}^*(\xi, x) - \frac{v}{(1-v)\lambda^2} v_{i\beta}^*(\xi, x) \right] d\Omega_n(x) \quad (99)$$

As expressões que compõem os vetores “ B_i^Q ” e “ $B'_{i\beta}^Q$ ” foram extraídas da formulação proposta por Rashed (2005) e são expressas conforme as equações a seguir.

$$u_{\alpha\beta, \gamma}^* = \frac{1}{4\pi D(1-v) \cdot r} [u_{\alpha\beta, \gamma}^{*A} + u_{\alpha\beta, \gamma}^{*B} + u_{\alpha\beta, \gamma}^{*C}] \quad (100)$$

Onde

$$u_{\alpha\beta, \gamma}^{*A} = (4A + 4z \cdot K_1 + 1 - v)r_{, \gamma} \cdot \delta_{\alpha\beta} \quad (100.a)$$

$$u_{\alpha\beta, \gamma}^{*B} = -2(8A + 2z \cdot K_1 + 1 - v)r_{, \alpha} \cdot r_{, \beta} \cdot r_{, \gamma} \quad (100.b)$$

$$u_{\alpha\beta, \gamma}^{*C} = (4A + 1 - v) \cdot (\delta_{\alpha\gamma} \cdot r_{, \beta} + \delta_{\beta\gamma} \cdot r_{, \alpha}) \quad (100.c)$$

$$u_{3\alpha, \beta}^* = -u_{\alpha 3, \beta}^* = \frac{1}{8\pi D} [\delta_{\alpha\beta}(2 \ln z - 1) + 2r_{, \alpha} \cdot r_{, \beta}] \quad (101)$$

No cálculo dos esforços de momento fletor e esforços cisalhantes, são utilizadas as expressões abaixo.

$$u_{\alpha\beta 3}^* = -\frac{1}{8\pi} \{ [2(1+v) \ln z - 1 + v] \delta_{\alpha\beta} + 2(1-v)r_{, \alpha} r_{, \beta} \}; \quad (102)$$

$$u_{\alpha 33}^* = \frac{1}{2\pi r} r_{, \alpha}; \quad (103)$$

$$v_{\alpha\beta}^* = \frac{(1-v)}{2\pi r^2} (\delta_{\alpha\beta} - 2r_{, \alpha} r_{, \beta}); \quad (104)$$

$$v_{3\beta}^* = 0. \quad (105)$$

Como forma de reduzir o custo computacional necessário para a integração numérica das células internas ao longo do domínio “ Ω_n ” pode-se aplicar o teorema do divergente nas equações (98) e (99), alterando-se o domínio de integração para o contorno “ Γ_n ” das células internas. As equações a seguir expressam o resultado desse procedimento.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} q(x) \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{v}{(1-v)\lambda^2} u_{i\alpha, \alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega_n(x) = \\ \int_{\Gamma_n} q(x) \left[v_{i,\alpha}^*(\xi, x) - \frac{v}{(1-v)\lambda^2} (u_{i\alpha}^*)(\xi, x) \right] n_\alpha d\Gamma_n(x); \end{aligned} \quad (106)$$

$$\int_{\Omega_n} q(x) \left[u_{i\beta 3}^*(\xi, x) - \frac{v}{(1-v)\lambda^2} v_{i\beta}^*(\xi, x) \right] d\Omega(x) = \int_{\Gamma_n} q(x) w_{i\beta}^*(\xi, x) d\Gamma_n(x). \quad (107)$$

Abaixo são apresentados os tensores “ $v_{i,\beta}^*$ ” e $w_{i\beta}^*$ que compõem as integrais da carga distribuída em função do contorno.

$$v_{\alpha,\beta}^* = \frac{r^2}{128\pi D} [\delta_{\alpha,\beta} (4 \ln z - 5) + 2(4 \ln z - 3) r_{,\alpha} r_{,\beta}] \quad (108)$$

$$v_{3,\beta}^* = -\frac{r r_{,\beta}}{128\pi D \lambda^2 (1-v)} [32(2 \ln z - 1) - z^2(1-v)(4 \ln z - 5)] \quad (109)$$

$$w_{\alpha\beta}^* = -\frac{r}{64\pi} \{w_{\alpha\beta}^{*A} + w_{\alpha\beta}^{*B} + w_{\alpha\beta}^{*C}\} - \frac{v}{(1-v)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* n_\gamma \quad (110)$$

$$w_{3\beta}^* = \frac{1}{8\pi} [(2 \ln z - 1)n_\beta + 2r_{,\beta} \cdot r_{,n}] - \frac{v}{(1-v)\lambda^2} u_{\alpha\beta\gamma}^* \cdot n_\gamma \quad (111)$$

Onde

$$w_{\alpha\beta}^{*A} = (4 \ln z - 3)(1-v)(r_{,\beta} \cdot n_\alpha + r_{,\alpha} \cdot n_\beta) \quad (111.a)$$

$$w_{\alpha\beta}^{*B} = (4 \ln z - 3)(1+3v)\delta_{\alpha\beta} \cdot r_{,n} \quad (111.b)$$

$$w_{\alpha\beta}^{*C} = 4[(1-v)r_{,\alpha} \cdot r_{,\beta} + v\delta_{\alpha\beta}]r_{,n} \quad (111.c)$$

5.3. ACOPLAMENTO DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE AOS DESLOCAMENTOS EM PONTOS INTERNOS

O acoplamento dos deslocamentos internos à capacidade de reação do solo é implementado adicionando-se uma nova componente às equações de equilíbrio da formulação de Reissner, Eq. (33) e Eq. (34), conforme expresso na equação abaixo.

$$Q_{\alpha,\alpha} + q - R^S = 0 \quad (112)$$

A formulação do método dos elementos de contorno para placas espessas apoiadas em fundações tipo Winkler pode ser encontrada para um estudo mais aprofundado na referência [20]. A referência [2] apresenta um estudo análogo ao procedimento numérico adotado neste trabalho, onde utilizaram-se a discretização do domínio em células triangulares para a contabilização da parcela energética das forças de reação do solo.

$$B_i^S = \sum_{n=1}^{ncells} \int_{\Omega_n} k_s u_3(x) \left[u_{i3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} u_{i\alpha,\alpha}^*(\xi, x) \right] d\Omega_n(x) \quad (113)$$

$$B'_{i\beta}{}^S = \sum_{n=1}^{ncells} \int_{\Omega_n} k_s u_3(x) \left[u_{i\beta 3}^*(\xi, x) - \frac{\nu}{(1-\nu)\lambda^2} v_{i\beta}^*(\xi, x) \right] d\Omega_n(x) \quad (114)$$

Utilizou-se o índice “S” para representar os vetores referentes às parcelas energéticas de forças de reação dos apoios elásticos tipo Winkler. As equações (113) e (114) expressam às contribuições de energia das forças de reação do solo na forma de vetores “ B^S ” e “ B'^S ”, de maneira análoga ao apresentado nas equações (98) e (99).

Como os deslocamentos no interior das células também são incógnitas na composição do vetor “ B_i^S ”, serão adicionadas equações referentes a determinação dos deslocamentos nos pontos internos.

$$\{B_i^S\} = k_s [S_{ij}] \begin{Bmatrix} u_3 \\ u_3^{int} \end{Bmatrix} \quad (115)$$

Além disso, o vetor “ B_i^S ” deverá ser expandido em uma matriz “ S_{ij} ” e um vetor de deslocamentos “ u_3 ”, conforme expresso na Eq. (115), referente as parcelas da integral na equação (113) para cada nó pertencente à célula interna e posteriormente ser manipulado numericamente até a forma do sistema de solução “ $AX = Y$ ”.

A Figura 5.1 representa a extensão do sistema linear após o acoplamento das incógnitas referentes aos deslocamentos nos pontos internos. O número total de equações do sistema linear será igual a 3 vezes o número de pontos no contorno (NNO) adicionado ao número de pontos internos (NINT) que foram associados a células internas de rigidez “ k_s ”. Foi utilizado o indicador “*int*” para indicar as equações que contém pontos fontes “ ξ ” em coordenadas de pontos internos.

$$\begin{array}{l}
 3 \times \text{NNO} \quad \left| \quad [H_{ij}]\{u_i\} = [G_{ij}]\{p_i\} + [S_{ij}] \begin{Bmatrix} k_s u_3 \\ k_s u_3^{int} \end{Bmatrix} + \{B^Q\} \\
 \\
 1 \times \text{NINT} \quad \left| \quad \{u_i^{int}\} + [H_{ij}^{int}]\{u_i\} = [G_{ij}^{int}]\{p_i\} + [S_{ij}^{int}] \begin{Bmatrix} k_s u_3 \\ k_s u_3^{int} \end{Bmatrix} + \{B^{intQ}\}
 \end{array}$$

Figura 5.1 – Acoplamento dos deslocamentos em pontos internos ao sistema linear.

6. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

6.1. INTRODUÇÃO

Apresenta-se neste capítulo os procedimentos numéricos adotados para obter-se a solução da formulação proposta e as rotinas que compõe o código fonte do programa “MEC/CADv01”. O código computacional foi desenvolvido em linguagem MATLAB com o objetivo de integrar as fases de geração de malhas (pré-processamento), implementação numérica da formulação (processamento) e impressão de imagens para análise de resultados (pós-processamento).

A interface gráfica do programa é apresentada na Figura 6.1. Com o objetivo de facilitar a análise de diferentes modelos, foram utilizadas componentes orientadas a objetos para definição das variáveis de entrada: geometria do modelo, propriedades físicas, tipo de análise, carregamentos e condições de contorno.

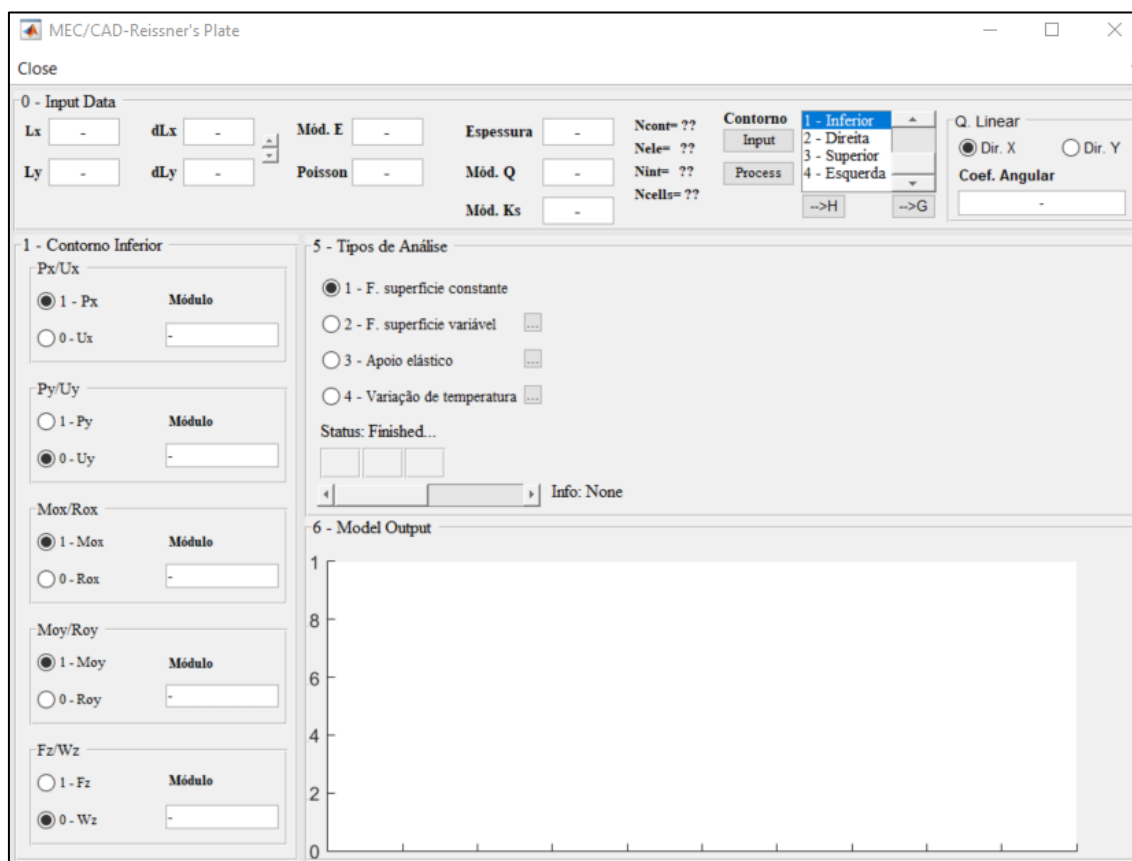


Figura 6.1 – Interface gráfica orientada a objetos do programa “MEC/CADv01”.

A definição de carregamentos está vinculada ao tipo de análise escolhido, variando entre as opções:

- 1 – Força de superfície constante;
- 2 – Força de superfície variável;
- 3 – Apoio elástico;
- 4 – Variação de temperatura;

A Figura 6.2 apresenta o fluxograma de rotinas adotadas no processamento do arquivo de entrada. Em “1 - Input das variáveis de entrada” são estabelecidos os espaços para alocação de memória de acordo com número de pontos no contorno, número de pontos internos, número de elementos do contorno e número de células triangulares. Ainda nesta etapa, o programa calcula todas as constantes que compõem as soluções fundamentais presentes nas formulações de chapas em EPT e de placas espessas.

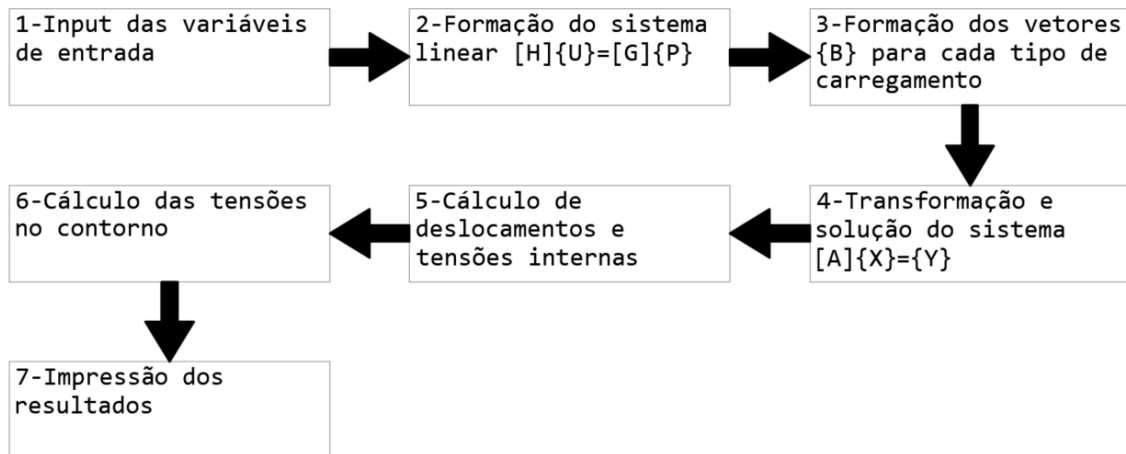


Figura 6.2 – Fluxograma das rotinas do programa “MEC/CADv01”.

Na etapa 2 calculam-se as matrizes “H” e “G” através de integrais ao longo dos pontos “campo” nos elementos unidimensionais do contorno.

$$\begin{bmatrix} H_{ij}^P & 0 \\ 0 & H_{\alpha\beta}^C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ U_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ij}^P & 0 \\ 0 & G_{\alpha\beta}^C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_j \\ P_\beta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_i^P \\ B_\alpha^C \end{Bmatrix} \quad (116)$$

A equação (116) expressa a composição do sistema linear para os deslocamentos generalizados e forças relativas aos graus de liberdade do elemento de placa espessa e elemento de chapa em EPT. O sistema terá uma extensão de “5xNNO” e poderá ser ampliado caso sejam inseridas equações dos deslocamentos de pontos internos, apenas nos modelos com carregamento associado aos apoios elásticos tipo Winkler.

Na etapa 3 são calculados vetores “*B*” relativos a cada tipo de carregamento (força de superfície, apoio elástico ou variação de temperatura) através de integrais ao longo dos pontos “campo” em todo domínio e pontos “fonte” ao longo das células triangulares.

$$\{B_i^P\} = \{B_i^{CT}\} + \{B_i^Q\} + \{B_i^S\} \quad (117)$$

$$\{B_\alpha^C\} = \{B_\alpha^D\} \quad (118)$$

Na etapa 4 foi implementada a alocação de incógnitas (forças e deslocamentos indeterminados) ao longo de um vetor “*X*”. A redistribuição das matrizes “*H*” e “*G*” na matriz “*A*” e no vetor “*Y*” permite que através do método dos gradientes conjugados seja obtida a solução do modelo.

Na etapa 5 são calculados de forma direta os deslocamentos e esforços nos pontos internos do modelo em análise. Na etapa 6 são utilizados métodos aproximados, análogos aos adotados na formulação do método dos elementos finitos, para o cálculo dos esforços nos pontos do contorno.

Na etapa 7 são armazenados tensores com todas as informações relevantes para cada nó (número, coordenadas, deslocamentos, esforços) e são gerados gráficos em gradientes de cores para a interpretação dos resultados pelo usuário.

6.2. DISCRETIZAÇÃO DO MODELO E PROCEDIMENTOS DE INTEGRAÇÃO

Na discretização do contorno foram utilizados elementos unidimensionais contínuos de ordem quadrática para a montagem das matrizes “*H*” e “*G*”. Nas integrais de domínio dos vetores “*B*” foram utilizadas células triangulares de ordem linear. A Figura 6.3 representa a discretização do contorno e do domínio em elementos unidimensionais e células bidimensionais

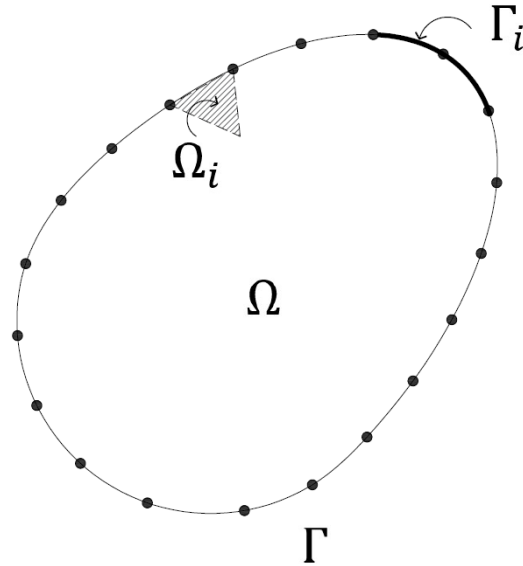


Figura 6.3 – Discretização do contorno e domínio em elementos.

6.2.1 Elemento unidimensional quadrático

O elemento unidimensional de ordem quadrática é utilizado na discretização do contorno dos modelos em análise, sendo composto por 3 pontos por elemento. O domínio deste elemento é definido pela aplicação das funções geométricas nas coordenadas dos seus 3 pontos, conforme expressa a equação abaixo.

$$x_i(\xi) = x_i^1 N_1^u(\xi) + x_i^2 N_2^u(\xi) + x_i^3 N_3^u(\xi) \quad (119)$$

Onde “ $N_i(\xi)$ ” é a função geométrica associada às coordenadas dos 3 pontos internos, conforme expressa a Figura 6.4.

$$N_1^u(\xi) = \frac{\xi^2 - \xi}{2} \quad (119.a)$$

$$N_2^u(\xi) = 1 - \xi^2 \quad (119.b)$$

$$N_3^u(\xi) = \frac{\xi^2 + \xi}{2} \quad (119.c)$$

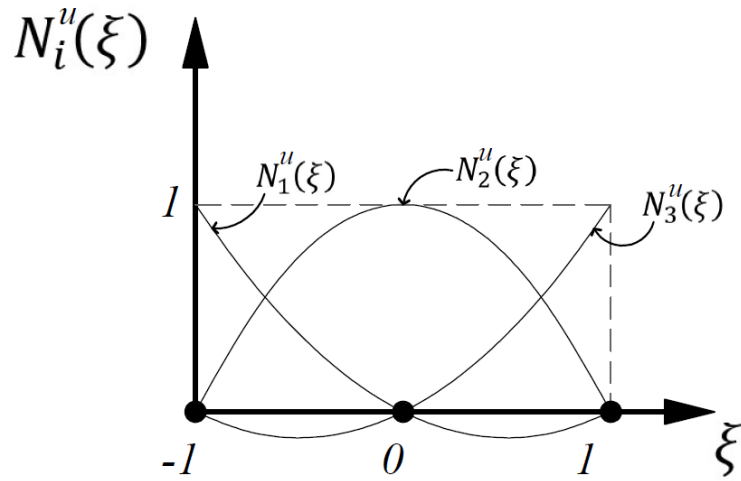


Figura 6.4 – Funções de forma do elemento quadrático unidimensional.

De maneira análoga à definição do domínio do elemento unidimensional na Eq. (119), os campos de forças de superfície e deslocamentos generalizados são definidos na forma matricial conforme as equações a seguir.

$$\{u_i\} = [N_1^u(\xi) \quad N_2^u(\xi) \quad N_3^u(\xi)] \begin{Bmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ u_i^3 \end{Bmatrix} \quad (120)$$

$$\{p_i\} = \{N_1^u(\xi) \quad N_2^u(\xi) \quad N_3^u(\xi)\} \begin{Bmatrix} p_i^1 \\ p_i^2 \\ p_i^3 \end{Bmatrix} \quad (121)$$

$$\{U_\alpha\} = [N_1^u(\xi) \quad N_2^u(\xi) \quad N_3^u(\xi)] \begin{Bmatrix} U_\alpha^1 \\ U_\alpha^2 \\ U_\alpha^3 \end{Bmatrix} \quad (122)$$

$$\{P_\alpha\} = \{N_1^u(\xi) \quad N_2^u(\xi) \quad N_3^u(\xi)\} \begin{Bmatrix} P_\alpha^1 \\ P_\alpha^2 \\ P_\alpha^3 \end{Bmatrix} \quad (123)$$

O Jacobiano é utilizado para a transformação dos limites da integral de linha ao longo do contorno “ Γ_i ” em limites $[-1; 1]$ utilizados na integral numérica de Gauss.

$$|J| = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\xi}\right)^2} \quad (124)$$

- **Elemento unidimensional nas integrais da formulação de chapa em EPT**

Nas equações (17) e (22) será utilizada a integral numérica de Gauss para o cálculo das integrais de contorno quando o ponto fonte se encontra numa situação regular, ou seja, sem singularidade nas soluções fundamentais. Na formação do sistema linear para determinação das incógnitas no contorno, serão necessárias rotinas complementares para os casos de singularidades. Nestas situações, será utilizada para o cálculo da diagonal da matriz “ H^C ” uma propriedade associada ao caso de deslocamento de corpo rígido, conforme expresso na equação abaixo.

$$\sum_{n=1}^{NNO} H_{\alpha\beta}^{Cn} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (125)$$

Ainda nestas situações, será utilizada a transformada de Telles (1994) para o cálculo da diagonal da matriz “ G^C ”, as quais terão uma singularidade na ordem de “ $\ln(r)$ ”. Este procedimento concentra os pontos de integração próximos da região em que a singularidade existe, refinando assim a geometria da malha de pontos e os pesos utilizados na integral numérica.

- **Elemento unidimensional nas integrais da formulação de placa espessa**

Nas equações (46), (63) e (64), de maneira análoga ao elemento de chapa, será utilizada a integral numérica de Gauss para as situações em que não houver singularidades. Utilizou-se a propriedade do corpo rígido para o cálculo da diagonal em “ H^P ”.

$$\sum_{n=1}^{NNO} H_{ij}^{Pn} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (126)$$

A equação (126) demonstra os campos de deslocamentos de corpo rígido em situação de rotação e translação. A transformada de Telles (1994) foi utilizada no cálculo diagonal da matriz “ G^P ” de maneira análoga ao realizado no elemento de chapa em EPT.

6.2.2 Célula triangular linear

A célula triangular é utilizada na discretização do domínio do modelo em análise com ordem linear, sendo composto por 3 pontos. Como forma de evitar singularidades no processo de integração dos vetores “B”, foi adotada a mudança do sistema de coordenadas para o sistema polar, conforme expresso nas equações a seguir.

$$x_i = \begin{cases} x_1^y + r \cos \phi \\ x_2^y + r \sin \phi \end{cases} \quad (127)$$

$$d\Omega = r \cdot dr \cdot d\phi \quad (128)$$

A Figura 6.5 expressa a ordem linear de aproximação dos pontos internos da célula bidimensional utilizada na discretização do domínio de atuação de cada carregamento.

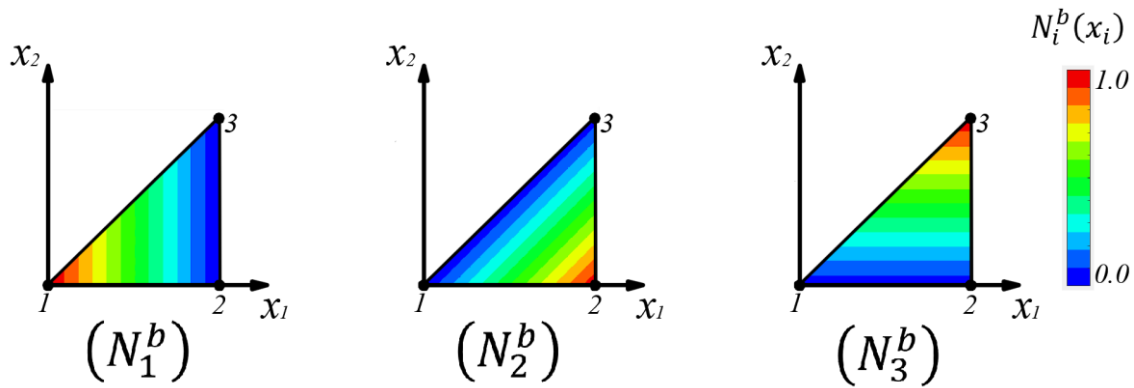


Figura 6.5 – Funções geométricas linear da célula bidimensional.

Onde “ N_i^b ” é a função geométrica bidimensional de ordem linear, sendo calculada conforme a equação a seguir.

$$N_i^b(x_i) = \frac{A_i + a_i x_2 + b_i x_1}{2A} \quad (129)$$

$$a_i = x_1^{\hat{\gamma}} - x_1^{\hat{\beta}} \quad (129.a)$$

$$b_i = x_2^{\hat{\beta}} - x_2^{\hat{\gamma}} \quad (129.b)$$

$$A_i = \frac{1}{2} (x_1^{\hat{\beta}} x_2^{\hat{\gamma}} - x_1^{\hat{\gamma}} x_2^{\hat{\beta}}) \quad (129.c)$$

E as variáveis $\hat{\beta} = \{2,3,1\}$, $\hat{\gamma} = \{3,1,2\}$.

Ao longo do processo de cálculo dos vetores “B” existirão 4 possíveis casos de integração nos domínios definidos pelas células internas. Os Casos 01, 02 e 03 apresentarão singularidades, uma vez que a geometria da célula coincide com a

coordenada do ponto fonte “ γ ”. Para aproximar numericamente os valores das singularidades de ordem “ $\frac{1}{r}$ ”, utiliza-se a integral de Kutt na integral em função do raio “ r ”. A integral em função do ângulo de rotação é feita utilizando-se a integral numérica de Gauss.

O Caso 04 refere-se à situação onde a geometria da célula está distante da coordenada do ponto fonte “ γ ”. Como não há singularidade, utilizam-se pontos de Gauss em ambas integrais, em função de “ ϕ ” e “ r ”.

- **Caso 1 – Ponto fonte coincidindo com um dos vértices da célula**

A Figura 6.6 representa a composição das células triangulares na situação em que o ponto fonte “ γ ” coincide com um dos 3 vértices da célula. Em cada vértice existe uma constante “ ϕ_i ” que representa o ângulo entre a horizontal e a reta que passa pelo vértice.

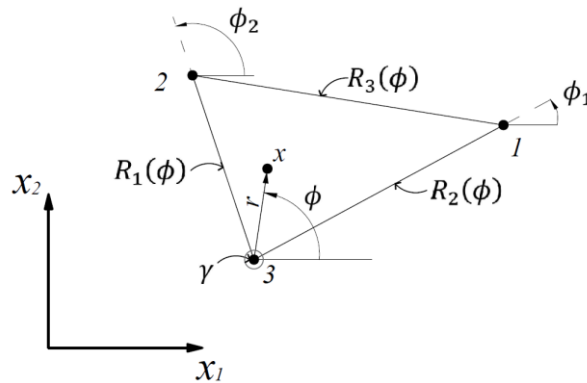


Figura 6.6 – Ponto fonte coincidindo com um dos vértices da célula.

Os limites de cada face da célula são definidos por funções “ $R_i(\phi)$ ”, conforme expresso na equação abaixo.

$$R_i(\phi) = \frac{-2A}{b_i \cos \phi + a_i \sin \phi} \quad (130)$$

As equações (78), (79), (84), (85), (98), (99), (113) e (114), que definem as integrais para composição dos vetores de cada tipo de carregamento “ B ” e “ B' ”, terão seus intervalos de integração em função das variáveis “ r ” e “ ϕ ” de cada célula, conforme expresso na equação a seguir.

$$\sum_{n=1}^{ncells} \int_{\Omega_n} f(x) d\Omega_n(x) = \sum_{n=1}^{ncells} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\epsilon}^{R_3(\phi)} f(r, \phi) \cdot r \cdot dr_n \cdot d\phi_n \quad (131)$$

Onde “ $f(x)$ ” é uma função generalizada usada apenas para representar as soluções fundamentais que serão utilizadas em cada tipo de carregamento “ B ” e “ B' ”.

- **Caso 2 – Ponto fonte situado na região interna da célula**

A Figura 6.7 representa o procedimento adotado para o caso em que o ponto fonte “ γ ” se encontra no interior da célula triangular. São formadas 3 novas células com o ponto fonte “ γ ” como um dos vértices de cada nova célula. Em seguida são realizadas 3 integrais (“A”, “B” e “C”) de maneira análoga ao apresentado no Caso 1.

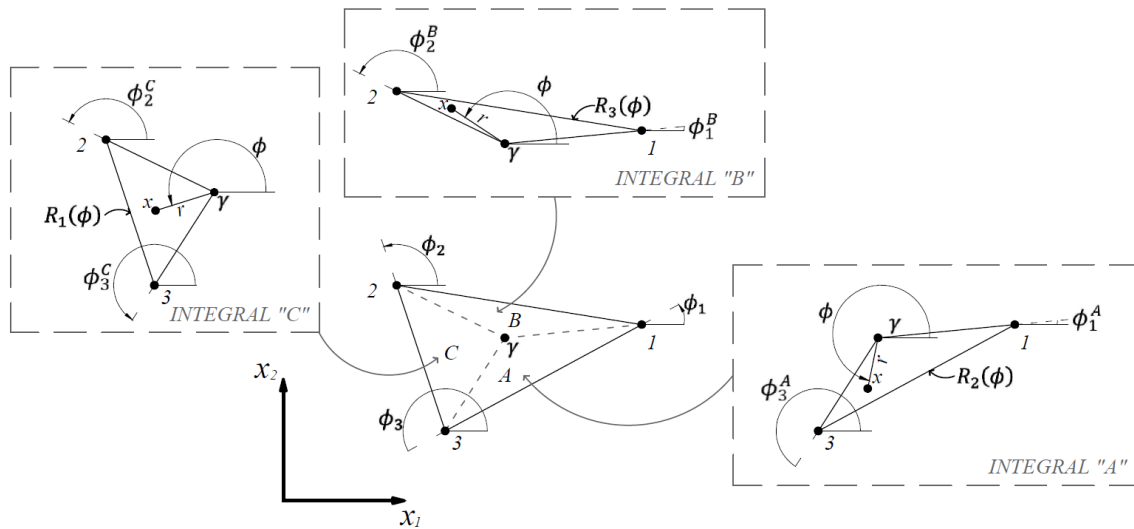


Figura 6.7 – Ponto fonte na região interna da célula.

- **Caso 3 – Ponto fonte situado em um dos lados da célula**

A Figura 6.8 representa o procedimento adotado para o caso em que o ponto fonte “ γ ” se encontra em uma das faces da célula triangular. São formadas duas novas células com o ponto fonte “ γ ” como um dos vértices de cada nova célula. Em seguida são realizadas duas integrais (“A” e “B”) de maneira análoga ao apresentado no Caso 1.

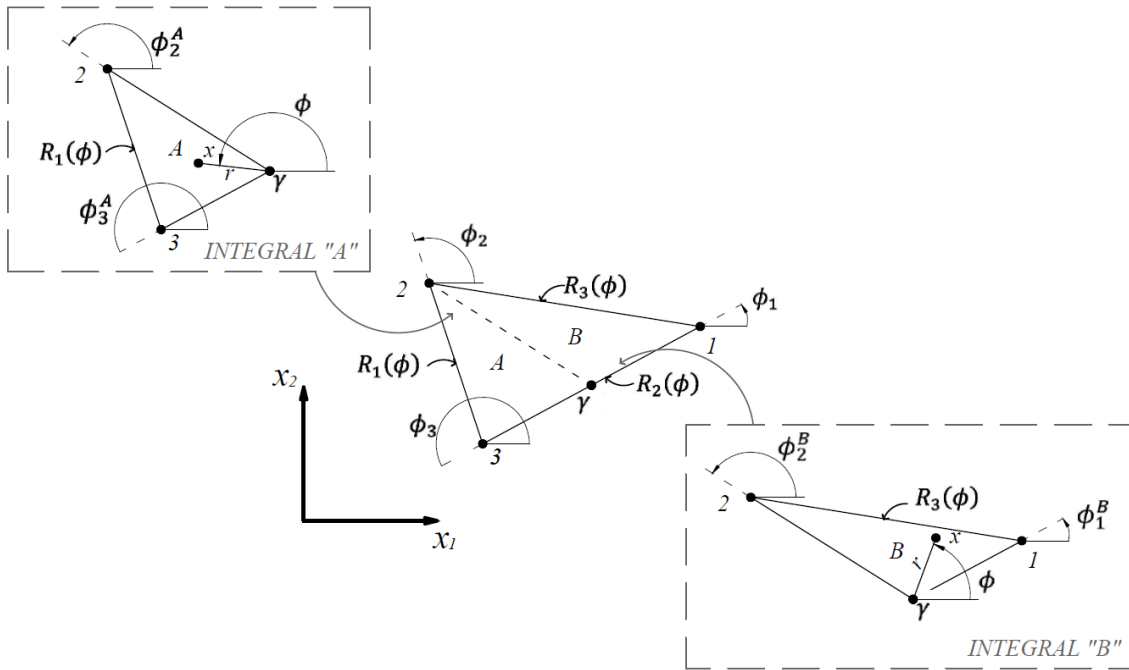


Figura 6.8 – Ponto fonte situado em um dos lados da célula.

- **Caso 4 – Ponto fonte fora da célula**

Neste caso de coordenada do ponto fonte “ γ ” as integrais são todas regulares. No cálculo de ambas integrais, em função de “ r ” e em função de “ ϕ ”, utilizam-se os pontos e pesos de Gauss. A Figura 6.9 expressa as variáveis utilizadas nas 4 integrais com o uso de coordenadas polares da equação abaixo.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{ncells} \int_{\Omega_n} f(x) d\Omega_n(x) = \\
 & \sum_{n=1}^{ncells} \left[\int_{\phi_1}^{\phi_3} \int_{R_2(\phi)}^{R_3(\phi)} f(r, \phi) \cdot r \cdot dr_n \cdot d\phi_n + \int_{\phi_3}^{\phi_2} \int_{R_1(\phi)}^{R_3(\phi)} f(r, \phi) \cdot r \cdot dr_n \cdot d\phi_n \right]
 \end{aligned}
 \tag{132}$$

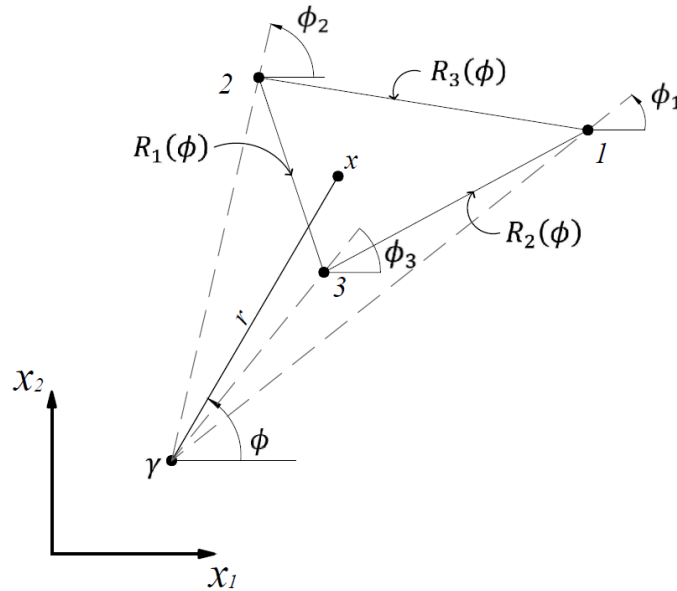


Figura 6.9 – Ponto fonte situado fora do domínio da célula.

Como forma de reduzir o custo computacional e tempo de processamento das integrais regulares, o programa adota uma rotina de programação em que o número de pontos de Gauss é definido em função da distância do ponto fonte “ γ ” ao ponto campo “ x ”.

• **Célula triangular no cálculo dos vetores “B” para chapas em EPT**

No cálculo dos vetores “ B_α^D ” e “ $B_{\alpha\beta}^{D'}$ ” a alteração do sistema de coordenadas cartesianas para o sistema polar permite que a singularidade nas situações em que o ponto fonte “ γ ” coincide com o ponto campo “ x ” seja evitada. Além disso, no lugar das integrais de domínio serem ambas calculadas numericamente, a forma das soluções fundamentais permite que a integral em função de “ r ” seja calculada analiticamente em conjunto da integral numérica em função de “ ϕ ”.

As equações (133) e (134) expressam a alteração do sistema de coordenadas das integrais que compõe os vetores “ B_α^D ” e “ $B_{\alpha\beta}^{D'}$ ”, as quais foram apresentadas anteriormente nas equações (78) e (79).

$$\int_{\Omega_n} u_{\alpha\beta,\beta}^* N_i^b(x_1, x_2) T_i d\Omega_n = \int_{\phi_n} \int_{r_n} u_{\alpha\beta,\beta}^* N_i^b(r, \phi) T_i r \cdot dr_n \cdot d\phi_n \quad (133)$$

$$\int_{\Omega_n} \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^* N_i^b(x_1, x_2) T_i d\Omega_n = \int_{\phi_n} \int_{r_n} \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^* N_i^b(r, \phi) T_i r \cdot dr_n \cdot d\phi_n \quad (134)$$

Onde “ T_i ” é o vetor das variações de temperatura na seção média de cada ponto que compõe a célula triangular.

$$\{T_i\} = \begin{cases} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{cases} \quad (135)$$

A aplicação do sistema de coordenadas polares nas funções de forma da célula bidimensional, expressas anteriormente na equação (129), resulta na equação a seguir.

$$N_i^b(r, \phi) = \frac{A_i + a_i(x_2^Y + r \sen \phi) + b_i(x_1^Y + r \cos \phi)}{2A} \quad (136)$$

A equação (136) pode ser escrita de forma condensada conforme a seguinte equação.

$$N_i^b(x_i) = K_i^A + rK_i^B(\phi) \quad (137)$$

Onde “ K_i^A ” é um vetor de constantes que dependem das coordenadas dos pontos que compõe a célula e “ $K_i^B(\phi)$ ” é um coeficiente que varia em função do ângulo “ ϕ ”. Esse procedimento é realizado para isolar os termos que independem das variáveis dentro das integrais em função de “ r ” e “ ϕ ” para que posteriormente a integral em função do raio seja resolvida analiticamente.

$$K_i^A = \frac{A_i + a_i x_2^Y + b_i x_1^Y}{2A} \quad (137.a)$$

$$K_i^B(\phi) = \frac{(a_i \sen \phi + b_i \cos \phi)}{2A} \quad (137.b)$$

A solução fundamental presente na equação (133) pode ser escrita utilizando-se o mesmo procedimento para isolar-se as variáveis de cada integral, conforme expressa a equação abaixo.

$$u_{\alpha\beta,\beta}^*(r, \phi) = \frac{1}{r} K_{\alpha\beta,\beta}^C(\phi) \quad (138)$$

Onde

$$K_i^C(\phi) = \frac{-1}{8\pi(1-v)G} \{(1-2v)(r_{,\beta}\delta_{\gamma\alpha} + r_{,\alpha}\delta_{\gamma\beta} - r_{,\gamma}\delta_{\alpha\beta}) + 2r_{,\alpha}r_{,\beta}r_{,\gamma}\} \quad (138.a)$$

$$r_{,\alpha} = \begin{cases} \cos \phi \\ \sen \phi \end{cases} \quad (138.b)$$

De maneira análoga à equação (138), a expressão de “ $\sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^*$ ” presente na equação (134) pode ser escrita de forma a isolar as variáveis de cada integral em função de “ r ” e “ ϕ ”.

$$\sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^*(r, \phi) = \frac{1}{r^2} K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) \quad (139)$$

Onde

$$K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} (\sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*A} + \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*B} + \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*C} + \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*D} + \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^{*E}) \quad (139.a)$$

Assim, as integrais apresentadas nas equações (133) e (134) podem ser escritas de forma condensada, isolando-se os termos independentes das variáveis que estão sendo integradas, conforme apresentado abaixo.

$$\int_{\phi_n} \int_{r_n} u_{\alpha\beta,\beta}^* N_i^b(r, \phi) T_i r. dr_n. d\phi_n = \quad (140)$$

$$\int_{\phi_n} \int_{r_n} K_{\alpha\beta,\beta}^C(\phi) [K_i^A + r K_i^B(\phi)] T_i dr_n. d\phi_n$$

$$\int_{\phi_n} \int_{r_n} \sigma_{\alpha\beta\gamma\theta}^* N_i^b(r, \phi) T_i r. dr_n. d\phi_n = \quad (141)$$

$$\int_{\phi_n} \int_{r_n} \frac{1}{r} K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + r K_i^B(\phi)] T_i dr_n. d\phi_n$$

Os limites de integração de “ ϕ_n ” e “ r_n ” foram apresentados anteriormente nas equações (131) e (132), referentes aos casos 01, 02, 03 e 04 da integração no domínio das células. Na equação (131), o limite inferior da integral em função do raio “ $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon$ ” não necessita ser calculado, pois o intervalo de integração em função do ângulo “ ϕ ” em pontos internos é expresso por $[0; 2\pi]$. A demonstração analítica desse comportamento é expressa nas equações (142) à (150) com base nas variáveis apresentadas na Figura 6.7.

As equações (142) à (144) demonstram o processo de solução analítica da integral em função do raio das 3 células internas “A”, “B” e “C” da Figura 6.7.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_3^A}^{\phi_1^A} \int_{\varepsilon}^{R_2(\phi)} \frac{1}{r} K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + rK_i^B(\phi)] T_i dr_n \cdot d\phi_n = \quad (142)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_3^A}^{\phi_1^A} \{\ln[R_2(\phi)] - \ln(\varepsilon)\} K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + rK_i^B(\phi)] T_i \cdot d\phi_n$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1^B}^{\phi_2^B} \int_{\varepsilon}^{R_3(\phi)} \frac{1}{r} K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + rK_i^B(\phi)] T_i dr_n \cdot d\phi_n = \quad (143)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1^B}^{\phi_2^B} \{\ln[R_2(\phi)] - \ln(\varepsilon)\} K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + rK_i^B(\phi)] T_i \cdot d\phi_n$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_2^C}^{\phi_3^C} \int_{\varepsilon}^{R_1(\phi)} \frac{1}{r} K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + rK_i^B(\phi)] T_i dr_n \cdot d\phi_n = \quad (144)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_2^C}^{\phi_3^C} \{\ln[R_1(\phi)] - \ln(\varepsilon)\} K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + rK_i^B(\phi)] T_i \cdot d\phi_n$$

Retira-se das equações acima as parcelas da integral em função de “r” que possuem a singularidade na ordem “ln(ε)”.

$$I^A = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_3^A}^{\phi_1^A} -\ln(\varepsilon) \cdot K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + rK_i^B(\phi)] T_i \cdot d\phi_n \quad (145)$$

$$I^B = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_1^B}^{\phi_2^B} -\ln(\varepsilon) \cdot K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + rK_i^B(\phi)] T_i \cdot d\phi_n \quad (146)$$

$$I^C = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\phi_2^C}^{\phi_3^C} -\ln(\varepsilon) \cdot K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + rK_i^B(\phi)] T_i \cdot d\phi_n \quad (147)$$

Somando-se as equações (145), (146) e (147) pode-se alterar os limites do intervalo de integração para $[0; 2\pi]$, resultando na integral de valor nulo.

$$I^T = I^A + I^B + I^C \quad (148)$$

$$(\phi_1^A - \phi_3^A) + (\phi_2^B - \phi_1^B) + (\phi_3^C - \phi_2^C) = 2\pi \quad (149)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} -\ln(\varepsilon) \cdot K_{\alpha\beta\gamma\theta}^D(\phi) [K_i^A + rK_i^B(\phi)] T_i \cdot d\phi_n = 0 \quad (150)$$

- **Célula triangular no cálculo dos vetores “B” para placas espessas**

As integrais dos vetores “ B_i^{PT} ”, “ B_i^Q ” e “ B_i^S ” serão sempre regulares devido ao uso do sistema de coordenadas polares, sendo calculadas através da integral numérica de Gauss tanto em função do raio “ r ” como do ângulo “ ϕ ”.

As integrais dos vetores “ $B_{i\beta}^{PT}$ ”, “ $B_{i\beta}^Q$ ” e “ $B_{i\beta}^S$ ” possuem soluções fundamentais que apresentarão singularidades na ordem de “ $\frac{1}{r}$ ”. Essas singularidades serão resolvidas através da integral numérica de partes reais de Kutt, expressa no Apêndice B deste trabalho.

Como forma de reduzir o custo computacional e tempo de processamento, para carregamentos do tipo forças de superfície “ q ” de magnitude constante ao longo de todo o domínio “ Ω ”, utiliza-se o teorema do divergente para que os vetores “ B_i^Q ” e “ $B_{i\beta}^Q$ ” sejam calculados através das integrais de contorno apresentadas nas equações (106) e (107).

6.3. CÁLCULO DE TENSÕES NO CONTORNO

Adotou-se a notação “ \hat{x}_i ” para representar os valores referentes aos eixos de coordenadas locais. Os deslocamentos generalizados “ u_i ” e “ U_α ” e reações no contorno “ p_i ” e “ P_α ” são expressos em variáveis locais conforme as equações a seguir.

$$\hat{u}_i = \hat{e}_{ij}u_j \quad (151)$$

$$\hat{p}_i = \hat{e}_{ij}p_j \quad (152)$$

$$\hat{U}_\alpha = \hat{e}_{\alpha\beta}U_\beta \quad (153)$$

$$\hat{P}_\alpha = \hat{e}_{\alpha\beta}P_\beta \quad (154)$$

O tensor “ \hat{e}_{ij} ” representa a matriz de rotação, a qual é escrita de forma expandida como expreso na equação (155).

$$\hat{e}_{ij} \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (155)$$

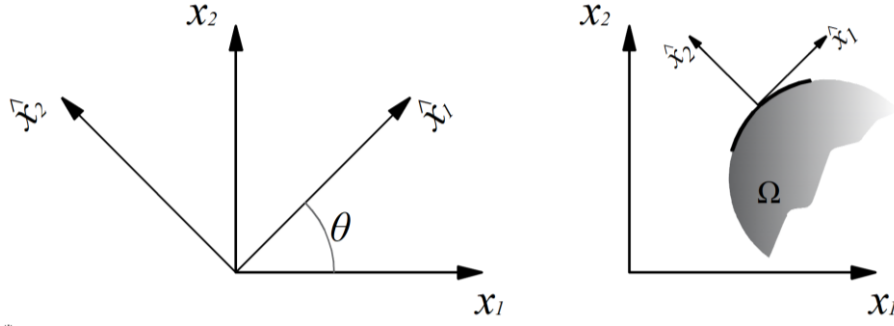


Figura 6.10 – Relação entre os sistemas global e local de coordenadas.

Os esforços “ $M_{\alpha\beta}$ ”, “ Q_{α} ” e “ $N_{\alpha\beta}$ ” ao longo dos elementos no contorno são calculados através da combinação das resultantes locais em cada nó e derivadas de deslocamentos generalizados, conforme expresso nas equações (156) à (161).

$$\widehat{M}_{1\alpha} = \widehat{p}_{\alpha} \quad (156)$$

$$\widehat{M}_{22} = \nu \widehat{p}_1 + D(1 - \nu^2) \widehat{u}_{2,2} \quad (157)$$

$$\widehat{Q}_1 = \widehat{p}_3 \quad (158)$$

$$\widehat{Q}_2 = \frac{D(1 - \nu)\lambda^2}{2} (\widehat{u}_2 + \widehat{u}_{3,2}) \quad (159)$$

$$\widehat{N}_{11} = \nu \widehat{P}_2 + B(1 - \nu^2) \widehat{U}_{1,1} \quad (160)$$

$$\widehat{N}_{\alpha 2} = \widehat{P}_{\alpha} \quad (161)$$

Para o cálculo das componentes locais “ \widehat{M}_{22} ”, “ \widehat{Q}_2 ” e “ \widehat{N}_{11} ” calculam-se as derivadas dos deslocamentos generalizados, as quais são expressas conforme as equações (162) e (163).

$$\widehat{u}_{j,2}(\xi) = \frac{dN_k^u}{d\xi} \widehat{e}_{ji} \widehat{u}_i^k \frac{d\xi}{d\widehat{x}_2} \quad (162)$$

$$\widehat{U}_{\alpha,1}(\xi) = \frac{dN_k^u}{d\xi} \widehat{e}_{\alpha\beta} U_{\beta}^k \frac{d\xi}{d\widehat{x}_1} \quad (163)$$

Após o cálculo das componentes locais dos esforços, aplica-se o tensor de rotação nestes valores e são obtidos os esforços globais nos pontos do contorno.

$$M_{\alpha\beta} = \widehat{e}_{\theta\alpha} \widehat{e}_{S\beta} \widehat{M}_{\theta S} \quad (164)$$

$$Q_{\alpha} = \widehat{e}_{\beta\alpha} \widehat{Q}_{\beta} \quad (165)$$

$$N_{\alpha\beta} = \widehat{e}_{\theta\alpha} \widehat{e}_{S\beta} \widehat{N}_{\theta S} \quad (166)$$

7. ESTUDOS DE CASO

7.1. INTRODUÇÃO

Como forma de validar e demonstrar a aplicabilidade da formulação apresentada, neste capítulo serão propostos 4 estudos de caso:

- Caso 01 – Variação de temperatura uniforme em elemento de chapa;
- Caso 02 – Fluxo de calor uniforme em elemento de chapa;
- Caso 03 – Gradiente térmico em placa espessa;
- Caso 04 – Placa apoiada em molas tipo Winkler.

Em todos os casos foram utilizadas como variáveis de entrada as propriedades físicas e geométricas expostas na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades físicas e geométricas dos modelos analisados.

Variáveis	Módulo	Unidade
Mód. de elasticidade	2,50E+06	tf/m^2
Coef. de Poisson	0,3	u
Coef. de dilatação linear	1,00E-05	$^{\circ}C^{-1}$
Comprimento Lx	1,0	m
Comprimento Ly	1,0	m

Com o objetivo de demonstrar a conformidade dos resultados dos estudos de caso propostos, serão apresentados no próximo capítulo os seguintes resultados de cada modelo:

- Gráficos de gradientes de cores dos campos de deslocamentos e esforços;
- Curvas de convergência para malhas de 4, 8, 16 e 32 pontos no contorno comparados com o valor de uma solução alternativa (analítica ou via MEF).
- Tabelas comparando-se o erro existente entre os valores máximos da malha mais refinada do método dos elementos de contorno com o valor de uma solução alternativa (analítica ou via MEF).

A convergência dos resultados em cada caso de carregamento é demonstrada pela comparação do deslocamento no ponto de coordenada (0,5; 0,5) para 4 malhas de pontos no contorno, conforme apresenta a Figura 7.1. Cada malha possui, respectivamente, 4, 8, 16 e 32 elementos quadráticos em seu contorno.

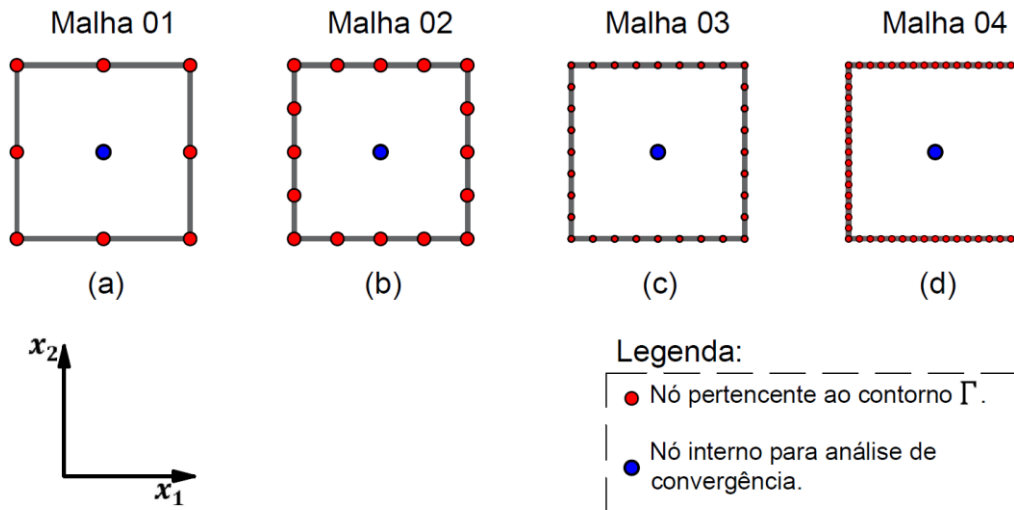


Figura 7.1 – Malhas da discretização do contorno para controle de convergência:

4 elementos (a), 8 elementos (b), 16 elementos (c) e 32 elementos (d).

Além da discretização do contorno, os carregamentos no domínio serão discretizados em células internas. A Figura 7.2 apresenta as malhas de discretização do domínio para a análise de convergência dos resultados no ponto de coordenada [0,5; 0,5], sendo compostas, respectivamente, por 8, 32, 128 e 512 células triangulares.

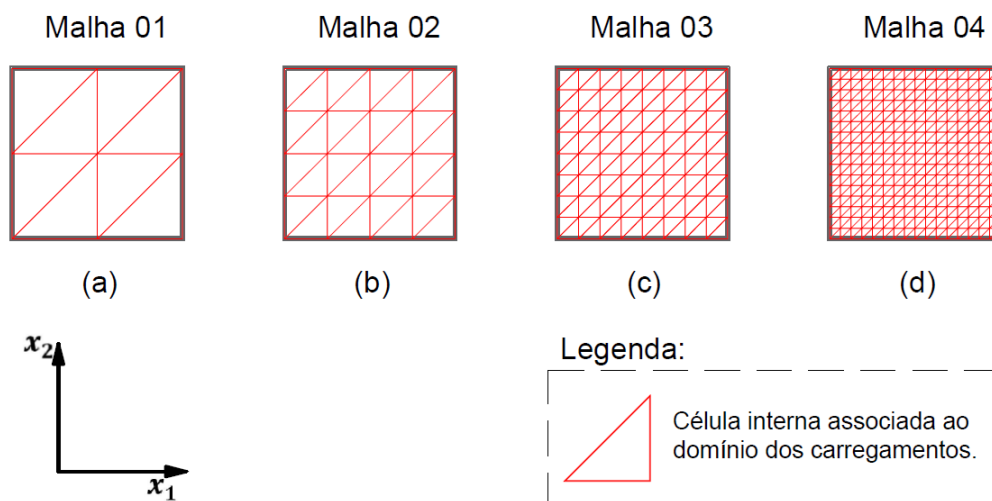


Figura 7.2 - Malhas da discretização do domínio para controle de convergência:

8 células (a), 32 células (b), 128 células (c) e 512 células (d).

7.2. VARIAÇÃO DE TEMPERATURA UNIFORME EM CHAPA

O modelo apresentado na Figura 7.3 pode ser validado analiticamente devido a sua simetria e variação de temperatura constante em todo domínio. Nessa situação de condições de contorno e carregamento térmico, as tensões de cisalhamento e os deslocamentos na direção vertical “ x_2 ” serão nulos, possuindo como valores a serem determinados as tensões na direção do confinamento “ σ_{22} ” e deslocamento na direção do bordo livre “ U_1 ”.

$$\sigma_{22}^{analítico} = \alpha \cdot T_{const} \cdot E \quad (167)$$

$$U_1^{analítico} = \alpha \cdot T_{const} \cdot L_x \cdot (1 + \nu) \quad (168)$$

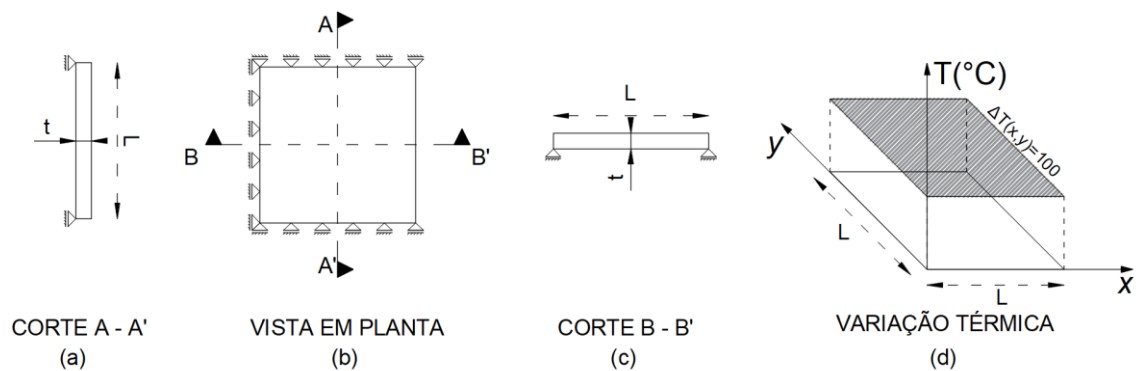


Figura 7.3 – Geometria e condições de contorno para o estudo de caso 01.

7.3. FLUXO DE CALOR UNIFORME EM CHAPA

O modelo apresentado na Figura 7.4 também pode ser validado analiticamente. Novamente, serão nulos os valores das tensões de cisalhamento e dos deslocamentos na direção vertical, possuindo como valores a serem determinados as tensões na direção do confinamento e deslocamento na direção do bordo livre, ou seja, σ_{22} e U_1 .

$$\sigma_{22}^{analítico} = \alpha \cdot T(x, y) \cdot E \quad (169)$$

$$U_1^{analítico} = \alpha \cdot (1 + \nu) \cdot \int_0^{L_x} T(x, y) \cdot dx \quad (170)$$

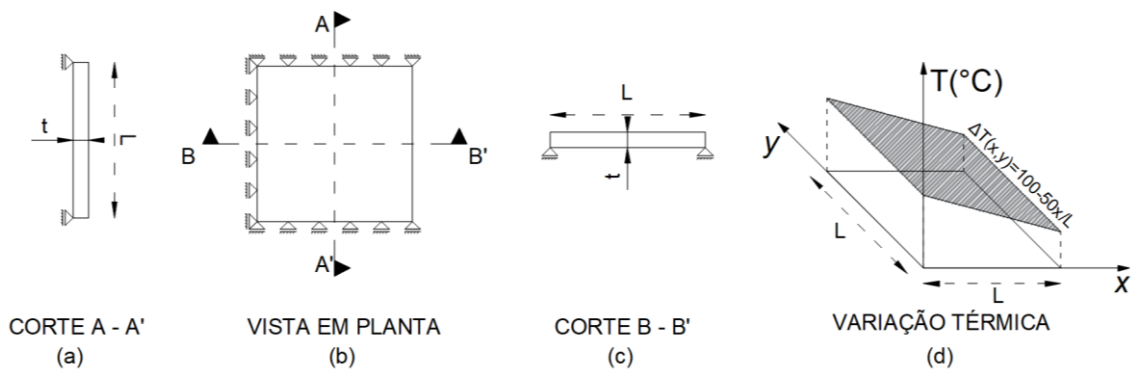


Figura 7.4 – Geometria e condições de contorno para o estudo de caso 02.

7.4. GRADIENTE TÉRMICO EM PLACA ESPESSA

O modelo apresentado na Figura 7.5 é composto por uma placa com um gradiente térmico que alterará sua curvatura, não sendo de fácil solução analítica. Assim, os resultados da formulação via método dos elementos de contorno serão comparados com o modelo de placa espessa obtido pela formulação numérica do método dos elementos finitos (Abaqus/CAE).

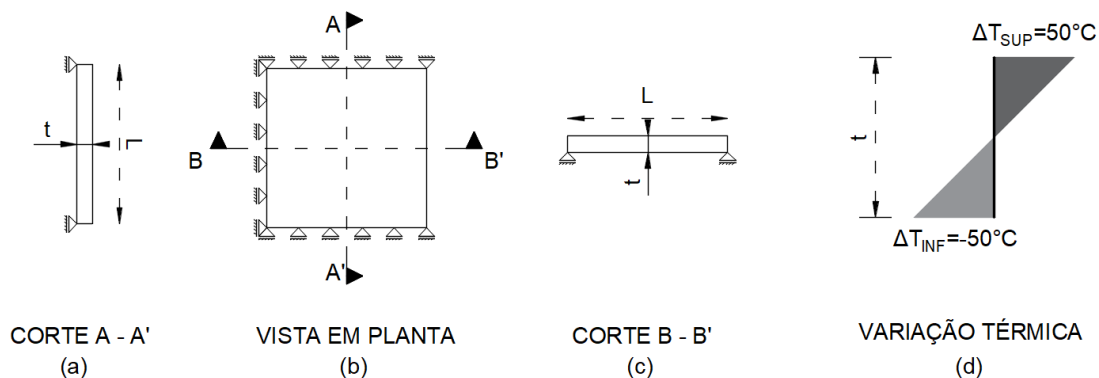


Figura 7.5 – Geometria e condições de contorno para o estudo de caso 03.

A Figura 7.6 apresenta a malha de discretização do domínio na resolução via método dos elementos finitos. Foram utilizados 1600 elementos de placa espessa com ordem quadrática. Adotou-se um gradiente térmico no valor de 100°C ao longo da espessura ($t = 0,10\text{m}$) em todo domínio “ Ω ” da placa.

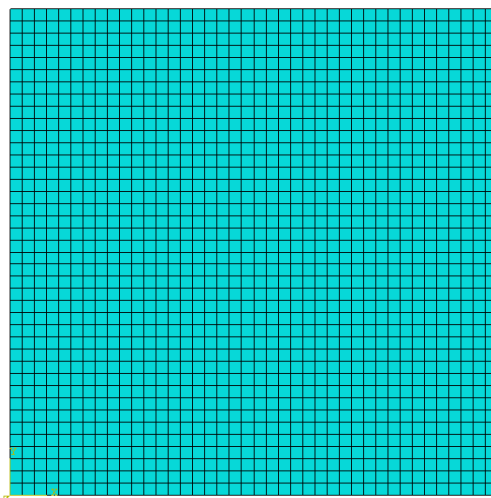


Figura 7.6 – Malha discretizada com 1600 elementos de placa “S8R” via MEF.

7.5. PLACA ESPESSA APOIADA EM MOLAS TIPO WINKLER

O último modelo é apresentado na Figura 7.7. São analisados os resultados de deslocamentos e esforços em elementos de placa espessa apoiados em molas tipo Winkler. Como esse caso também é de difícil solução analítica, comparam-se os resultados obtidos pelo método dos elementos de contorno e pelo método dos elementos finitos de maneira análoga ao estudo de caso anterior.

Adotou-se em ambos modelos (MEC e MEF) a espessura “ t ” igual a $0,10m$. Ao longo de toda superfície da placa, considerou-se um carregamento uniformemente distribuído “ q_{dist} ” de módulo igual a $-10,0\text{ tf}/m^2$. A placa encontra-se em contato direto com o solo, cujo coeficiente de reação elástica “ k_s ” foi fixado em $50.000\text{ tf}/m^3$.

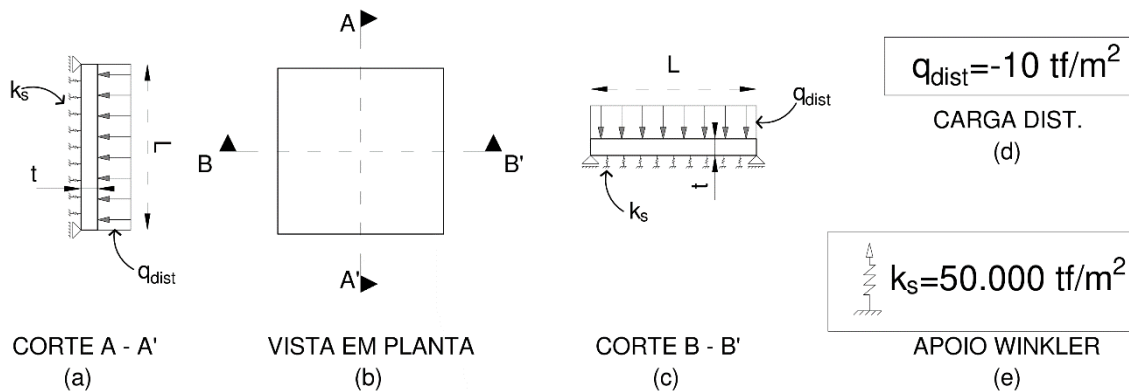


Figura 7.7 – Geometria e condições de contorno do estudo de caso 04.

No modelo de comparação cuja solução foi obtida utilizando-se o método dos elementos finitos, as molas de Winkler foram acopladas em cada um dos 4 nós do elemento de placa. Dessa forma, adotou-se um módulo de coeficiente de reação elástica unidimensional “ k_s^L ” igual a $195,3\text{ tf}/m$ em molas com espaçamento de $0,0625m$ entre si.

A Figura 7.8 apresenta o espaçamento das molas tipo Winkler utilizadas no modelo de comparação via método dos elementos finitos, foram utilizadas 289 molas para aproximar ao comportamento de placa com toda sua base apoiada no solo. Enquanto o modelo do MEC utiliza em sua formulação forças de superfície atuando ao longo do domínio de células internas, na formulação do método dos elementos finitos são utilizadas forças concentradas em cada nó dos elementos de placa.

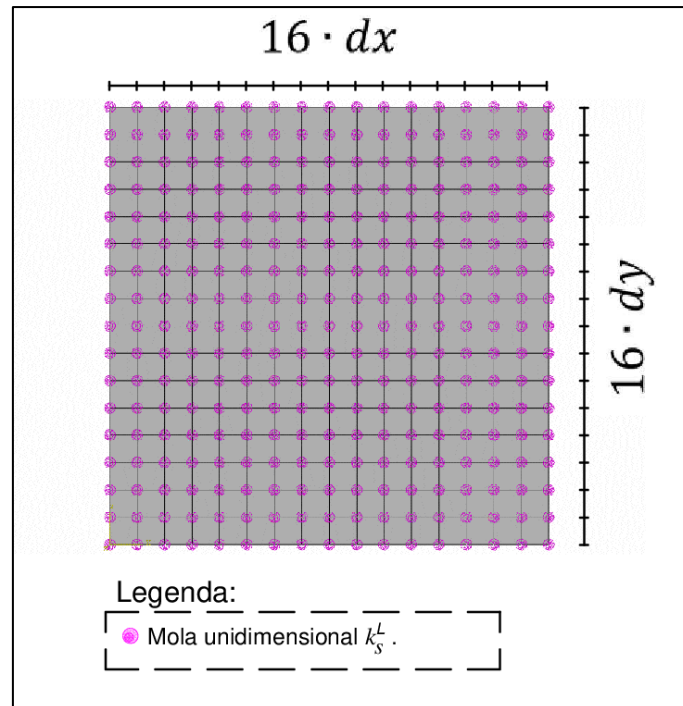


Figura 7.8 – Distribuição de molas unidimensionais no modelo em MEF.

A equação (171) mostra a relação entre o módulo do coeficiente de reação utilizado no cálculo de forças de superfície nas células internas “ k_s ” e o módulo de reação utilizado nas forças em cada nó da formulação do MEF “ k_s^L ”

$$k_s^L = k_s \cdot dx \cdot dy \quad (171)$$

8. RESULTADOS

8.1. CASO 01 – VARIAÇÃO DE TEMPERATURA UNIFORME EM CHAPA

A Figura 8.1 apresenta os resultados da formulação via método dos elementos de contorno para o caso de estudo 01 utilizando-se a malha 04 da Figura 7.2. O confinamento na direção vertical aumenta o deslocamento “ U_1 ” proporcionalmente ao coeficiente de Poisson, conforme apresentado na equação (168). Observando-se os limites dos gradientes de cores nas Figuras 8.1 (a) e (b), chega-se à conclusão de que a formulação convergiu com boa aproximação para o valor da solução analítica.

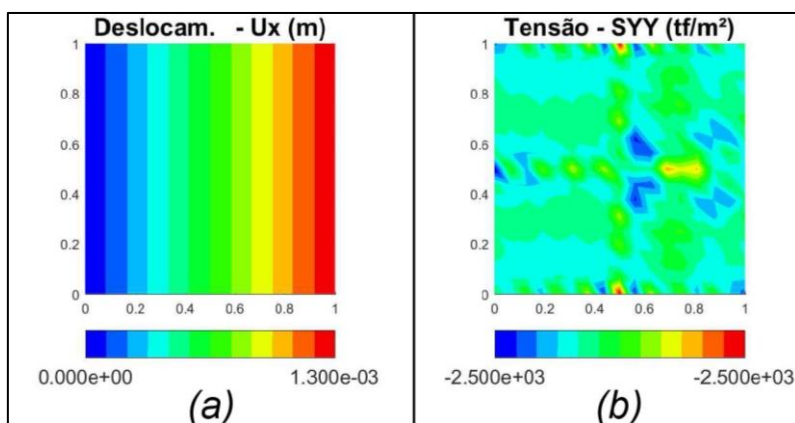


Figura 8.1 – Gráficos em gradientes de cores pelo MEC para o estudo de caso 01.
Deslocamentos na direção horizontal (a); Tensões normais na direção vertical (b).

A Figura 8.2 apresenta a análise de convergência dos resultados da formulação numérica em comparação do valor da solução analítica. Observa-se que a convergência foi alcançada rapidamente, mesmo utilizando-se a Malha 01 com o número mínimo de pontos no contorno, expressa na Figura 7.1 (a) do capítulo anterior.

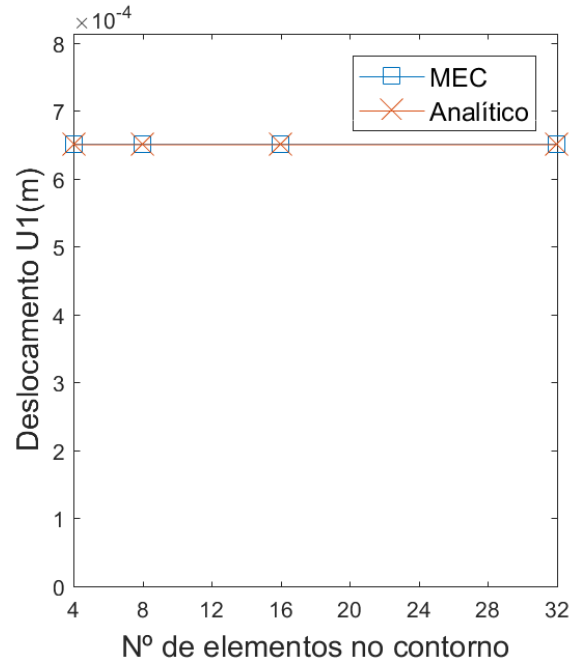


Figura 8.2 – Deslocamentos “U1” no ponto interno [0,5;0,5] obtidos pelo MEC e pela solução analítica.

8.2. CASO 02 – FLUXO DE CALOR UNIFORME EM CHAPA

A Figura 8.3 apresenta os resultados da formulação via método dos elementos de contorno para o caso de estudo 02 utilizando-se a malha 04 da Figura 7.2. Como a temperatura tem variação linear na direção “ x_1 ”, a deformação na direção “ x_1 ” também variará linearmente em todo os pontos com valor igual a “ $\alpha T_{Méd}(x_1)$ ”. Observando-se os limites dos gradientes de cores nas Figuras 8.3 (a) e (b), chega-se à conclusão de que a formulação convergiu com boa aproximação para o valor da solução analítica.

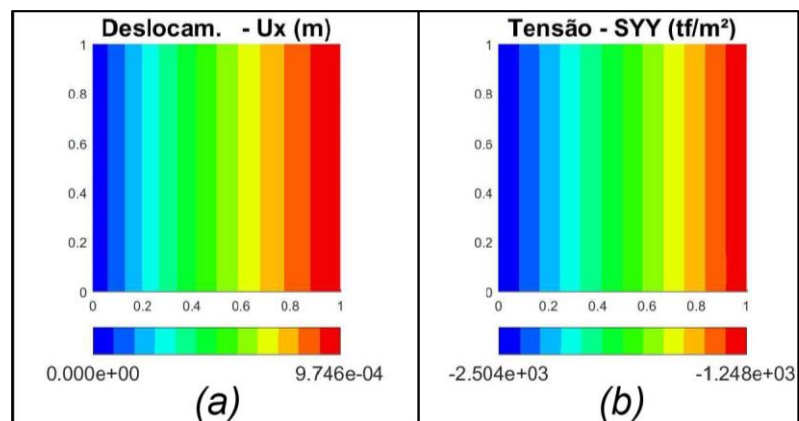


Figura 8.3 – Gráficos em gradientes de cores pelo MEC para o estudo de caso 02. Deslocamentos na direção horizontal (a); Tensões normais na direção vertical (b).

A Tabela 3 corrobora com a afirmação de que a modelagem numérica convergiu para valores acurados. Devido a isso, a formulação pode ser aplicada em modelos de geometria e condições de contorno mais complexos em que a solução analítica não seria de fácil obtenção.

Tabela 3 – Comparação entre modelos analítico e numérico no caso 02.

Modelo	S22 (tf/m ²)	U1 (m)
Analítico	-2,50E+03	9,75E-04
Numérico - MEC	-2,50E+03	9,74E-04
Erro	0,17%	0,06%

A Figura 8.4 demonstra a convergência dos resultados da formulação via MEC com o valor da solução analítica. Observa-se uma diferença de 15% na formulação MEC utilizando-se a Malha 01. Ao se utilizar uma malha de 32 pontos no contorno o valor converge até uma diferença de 0,0591% da solução analítica, demonstrando-se assim o padrão de convergência.

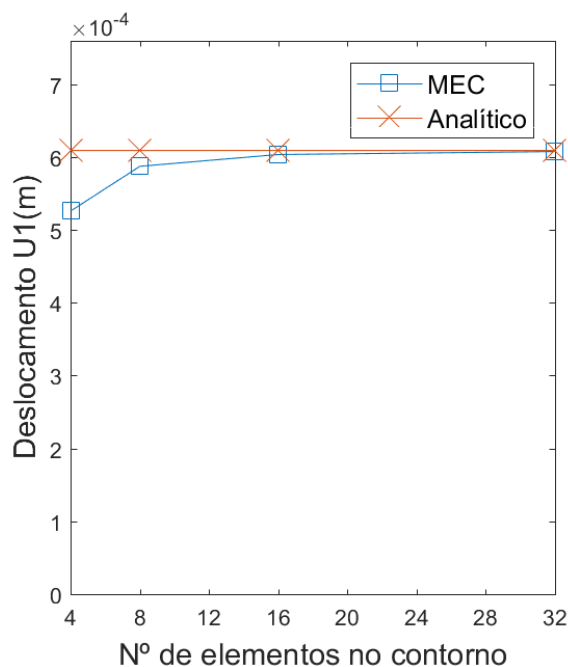


Figura 8.4 – Deslocamentos “U1” no ponto interno [0,5;0,5] obtidos pelo MEC e pela solução analítica.

8.3. CASO 03 – GRADIENTE TÉRMICO EM PLACA ESPESSA

A Figura 8.5 apresenta a análise de convergência do deslocamento transversal “ U_3 ” no ponto $[0,5; 0,5]$ para as 4 malhas apresentadas na Figura 7.1. Observa-se uma diferença de 5% nas malhas menos discretizadas, atingindo-se uma diferença percentual de 2,5% apenas na malha mais refinada de 32 elementos. Embora os resultados de ambas formulações tenham convergido, o tempo de processamento para obter-se a solução via método dos elementos de contorno extrapolou de forma considerável o tempo de processamento da formulação via método dos elementos finitos. A eficiência do método dos elementos de contorno para este tipo de carregamento pode ser melhorada alterando-se o procedimento de integrais no domínio das células por integrais no contorno das mesmas ou pela utilização de um procedimento alternativo como o método da dupla reciprocidade.

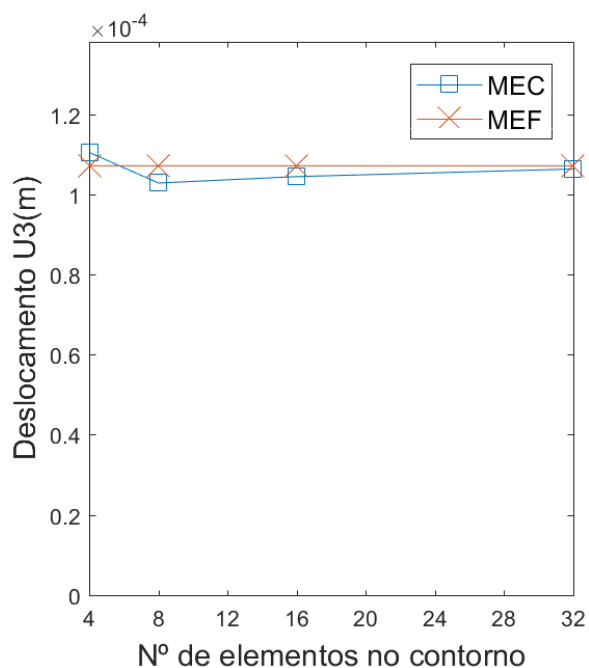


Figura 8.5 – Deslocamentos “ U_3 ” no ponto interno $[0,5;0,5]$ obtidos pelo MEC e pelo MEF.

A Tabela 4 corrobora com a afirmação de que a modelagem numérica convergiu para valores acurados. Devido a simetria da geometria e condições de contorno do modelo nas direções X e Y, foram omitidos os valores de rotação “UR2”, momento fletor “M22” e esforço cortante “Q2”, uma vez que eles seriam iguais aos apresentados para a rotação “UR1”, momento fletor “M11” e esforço cortante “Q1”.

Tabela 4 – Comparação dos valores máximos entre modelos numéricos MEC e MEF no caso 03.

Modelo	U3 (m)	UR1 (rad)	M11 (tf.m)	M12 (tf.m)	Q1 (tf)
Numérico - MEF	1,071E-04	4,827E-04	-1,808E-03	-1,988E-03	1,042E-01
Numérico - MEC	1,044E-04	4,826E-04	-1,873E-03	-1,941E-03	1,011E-01
Erro	2,52%	0,02%	3,60%	2,36%	2,98%

A Figura 8.6 compara os campos de deslocamentos generalizados (ϕ_1 , ϕ_2 e w) obtidos pela formulação do método dos elementos de contorno com os obtidos pelo método dos elementos finitos (Abaqus/CAE) para o caso de estudo 03 utilizando-se a malha 04 da Figura 7.2. Observa-se um comportamento semelhante em todos os campos de deslocamentos, o que demonstra a eficiência da formulação proposta na análise de placas solicitadas ao gradiente térmico ao longo da espessura de todo domínio “ Ω ”.

Com a formulação do gradiente térmico ao longo da espessura validada através dos resultados expostos neste capítulo, pode-se expandir a aplicação do programa para os casos de carregamentos com cargas de protensão (momento de protensão), não-linearidade geométrica (relação esforço normal e curvatura) e não-linearidade física do material (curvatura e momento plásticos).

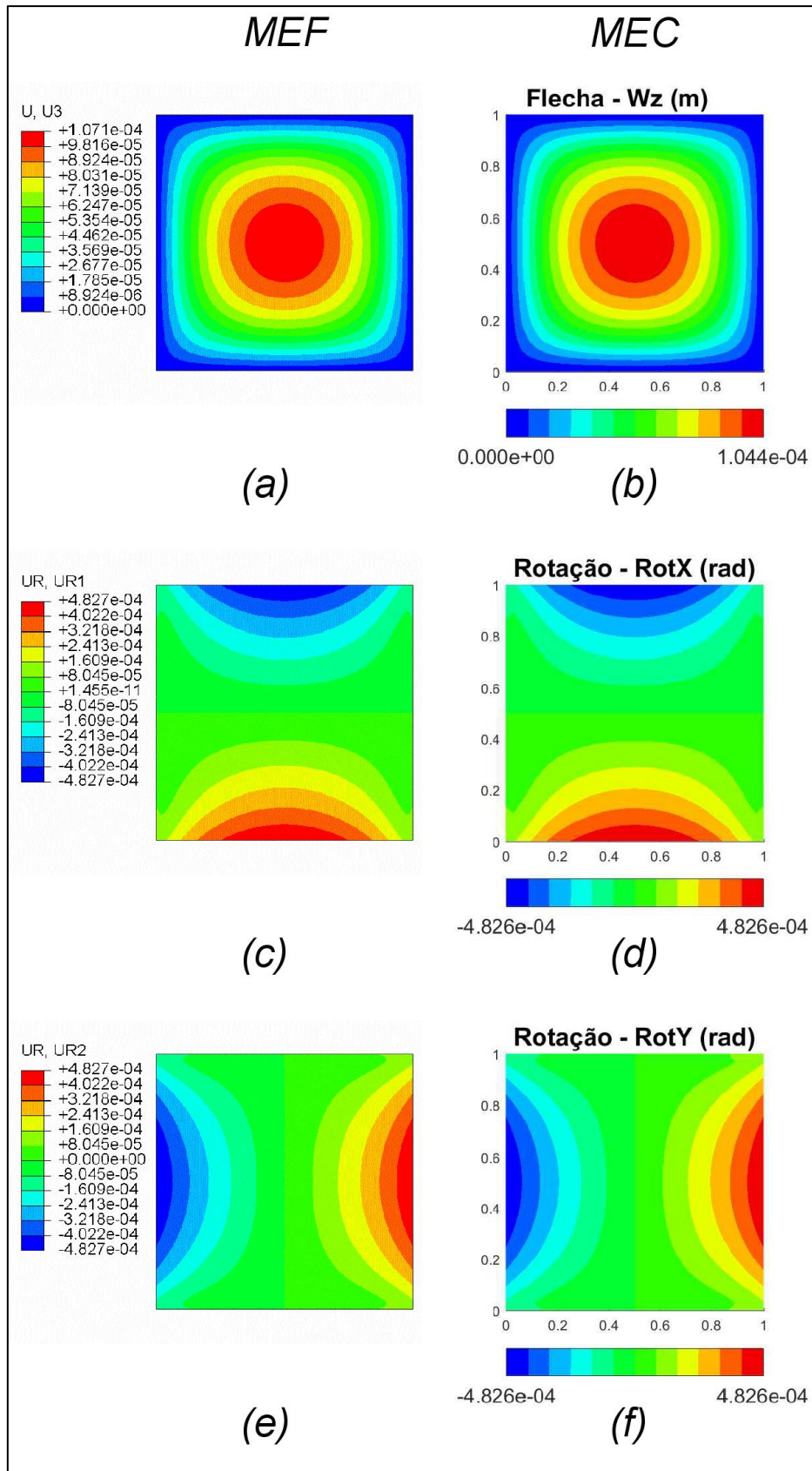


Figura 8.6 – Gráficos em gradiente de cores: Deslocamentos do estudo de caso 03. Deslocamentos transversais pelo MEF (a) e pelo MEC (b); Rotações na direção horizontal pelo MEF (c) e MEC(d); Rotações na direção vertical pelo MEF (e) e pelo MEC (f).

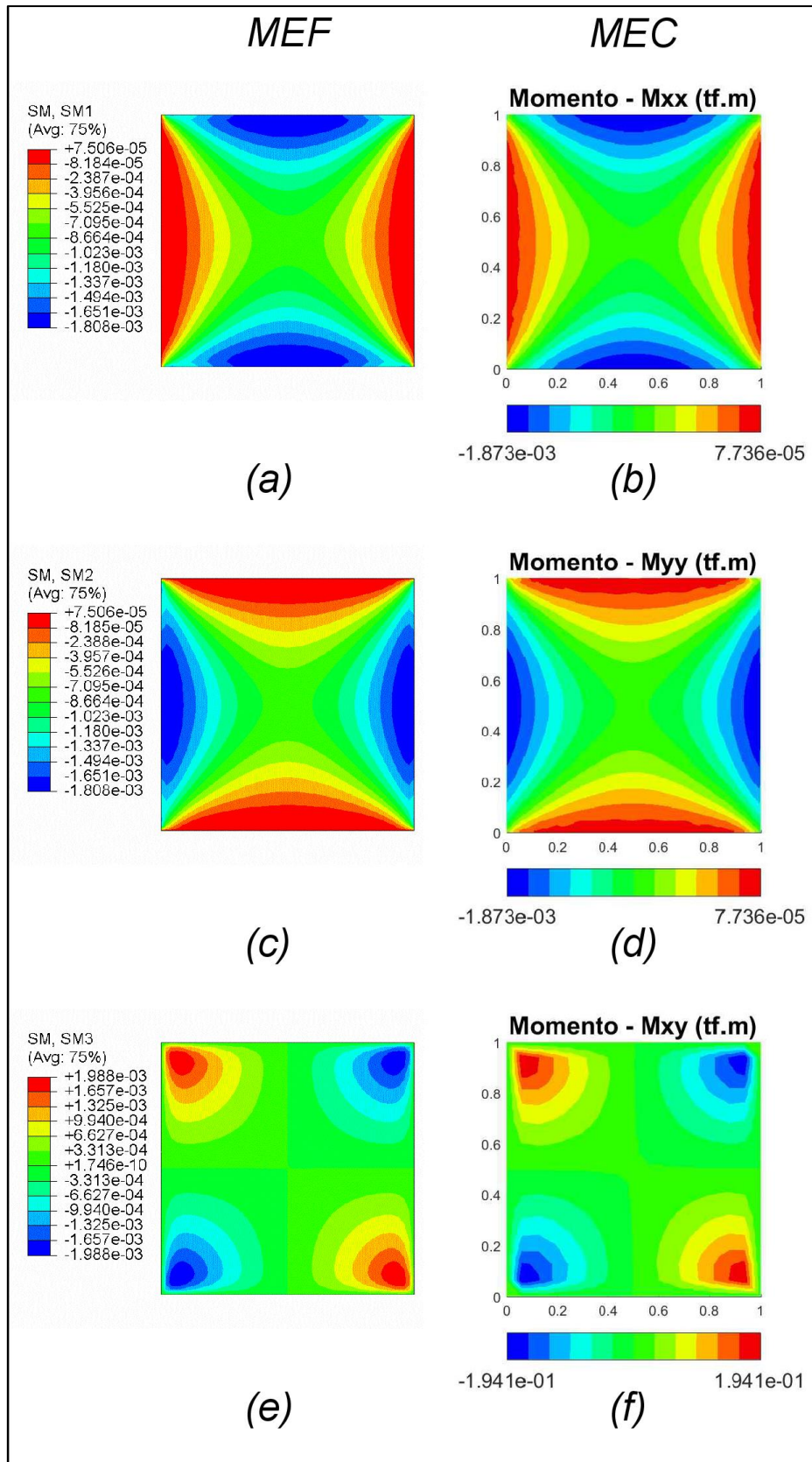


Figura 8.7 – Gráficos em gradiente de cores: Esforços de momentos do caso 03.

Momento fletor “XX” pelo MEF (a) e pelo MEC (b); Momento fletor “YY” pelo MEF (c) e MEC(d); Momento fletor “XY” pelo MEF (e) e pelo MEC (f).

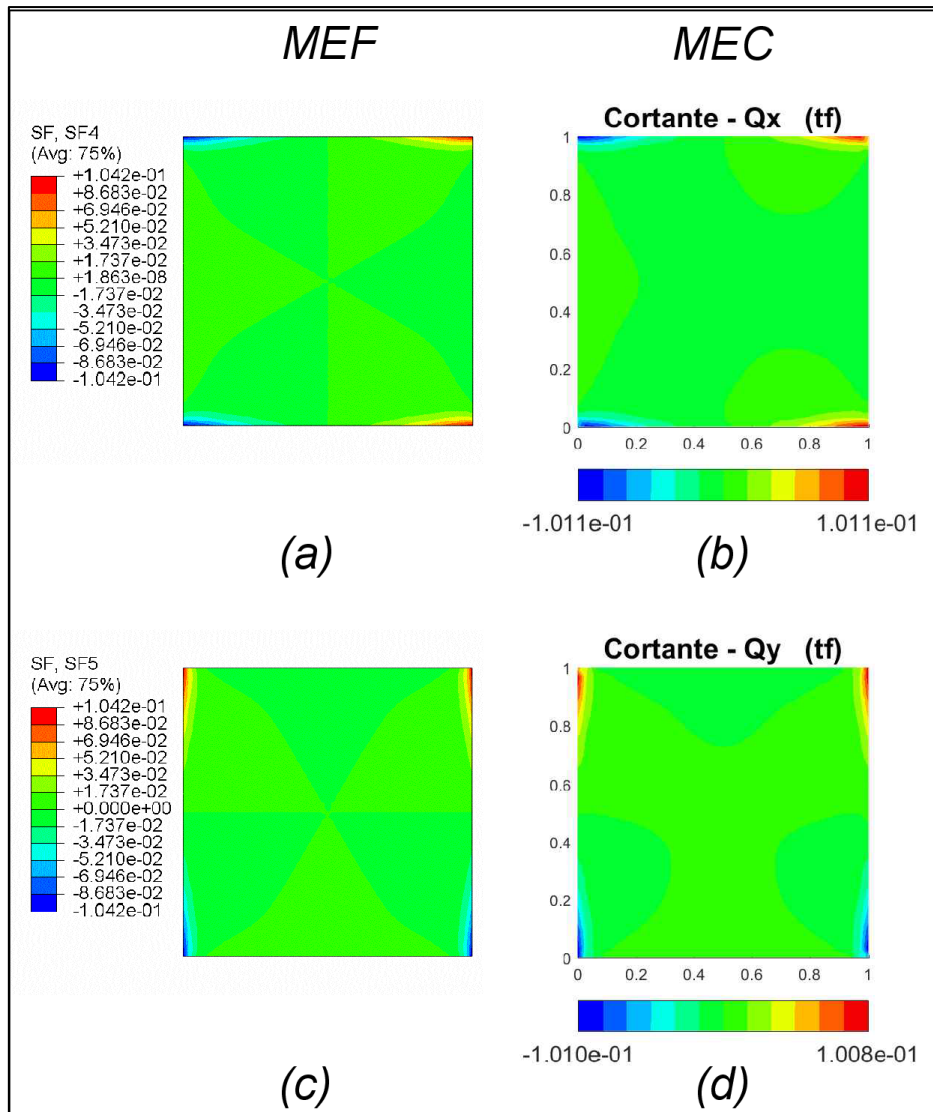


Figura 8.8 – Gráficos em gradiente de cores: Esforços cortantes do caso 03. Esforço cortante "X" pelo MEF (a) e pelo MEC (b); Esforço cortante "Y" pelo MEF (c) e MEC(d).

8.4. CASO 04 – PLACA APOIADA EM MOLAS TIPO WINKLER

A Figura 8.9 demonstra a análise de convergência do deslocamento transversal “ U_3 ” no ponto $[0,5; 0,5]$ para as 4 malhas apresentadas na Figura 7.1. Observa-se uma divergência entre métodos superior a 30% na comparação com a malha 01. Isso ocorre pela influência do número de pontos internos nos valores da solução. Assim, apenas as malhas mais discretizadas da formulação do MEC se aproximam dos resultados da formulação via MEF.

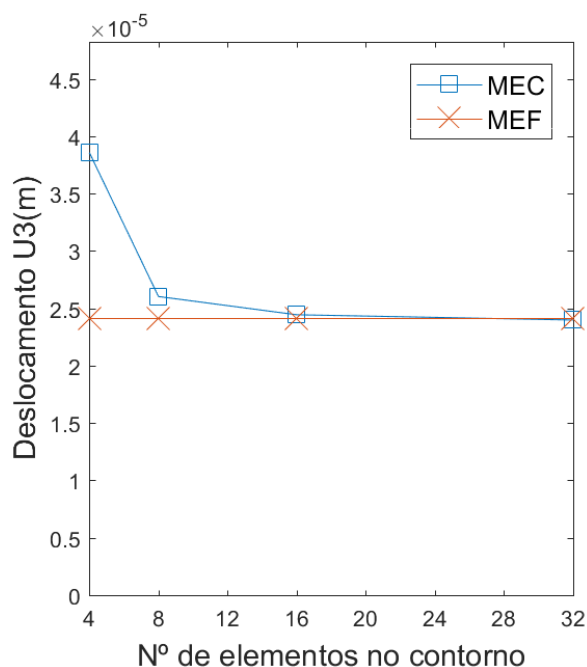


Figura 8.9 – Deslocamentos “ U_3 ” no ponto interno $[0,5;0,5]$ obtidos pelo MEC e pelo MEF.

A Tabela 5 corrobora com a afirmação de que os valores obtidos pelas duas formulações apresentaram boa aproximação.

Tabela 5 – Comparação dos valores máximos entre modelos numéricos MEC e MEF no caso 04.

Modelo	U_3 (m)	UR_1 (rad)	M_{11} (tf.m)	M_{12} (tf.m)	Q_1 (tf)
Numérico - MEF	2,411E-05	1,000E-04	-7,411E-02	4,898E-02	1,836E+00
Numérico - MEC	2,398E-05	1,018E-04	-7,478E-02	4,767E-02	1,873E+00
Erro	0,54%	1,80%	0,90%	2,67%	2,02%

As Figura 8.10, 8.11 e 8.12 apresentam os campos de deslocamentos e esforços emitidos através da formulação do MEC e do MEF para o estudo de caso 04 . Embora as duas formulações apresentem distribuição de deslocamentos generalizados semelhantes, observa-se que o campo de esforços da solução do MEF apresentou concentração de esforços nas regiões próximas aos elementos de mola unidimensionais, enquanto na formulação do MEC houve continuidade e suavização das tensões nesses pontos.

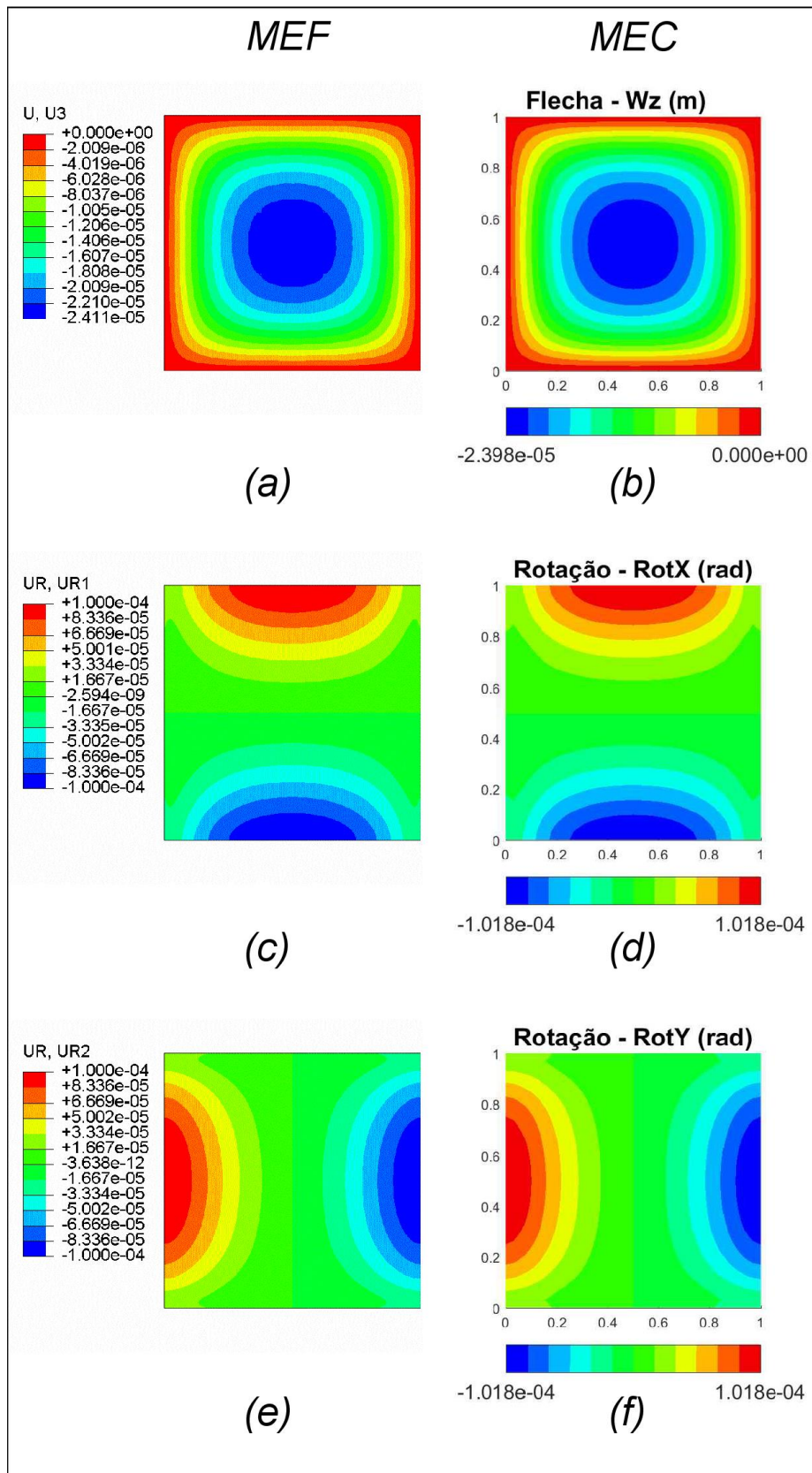


Figura 8.10 – Gráficos em gradiente de cores: Deslocamentos do estudo de caso 04. Deslocamentos transversais pelo MEF (a) e pelo MEC (b); Rotações na direção horizontal pelo MEF (c) e MEC(d); Rotações na direção vertical pelo MEF (e) e pelo MEC (f).

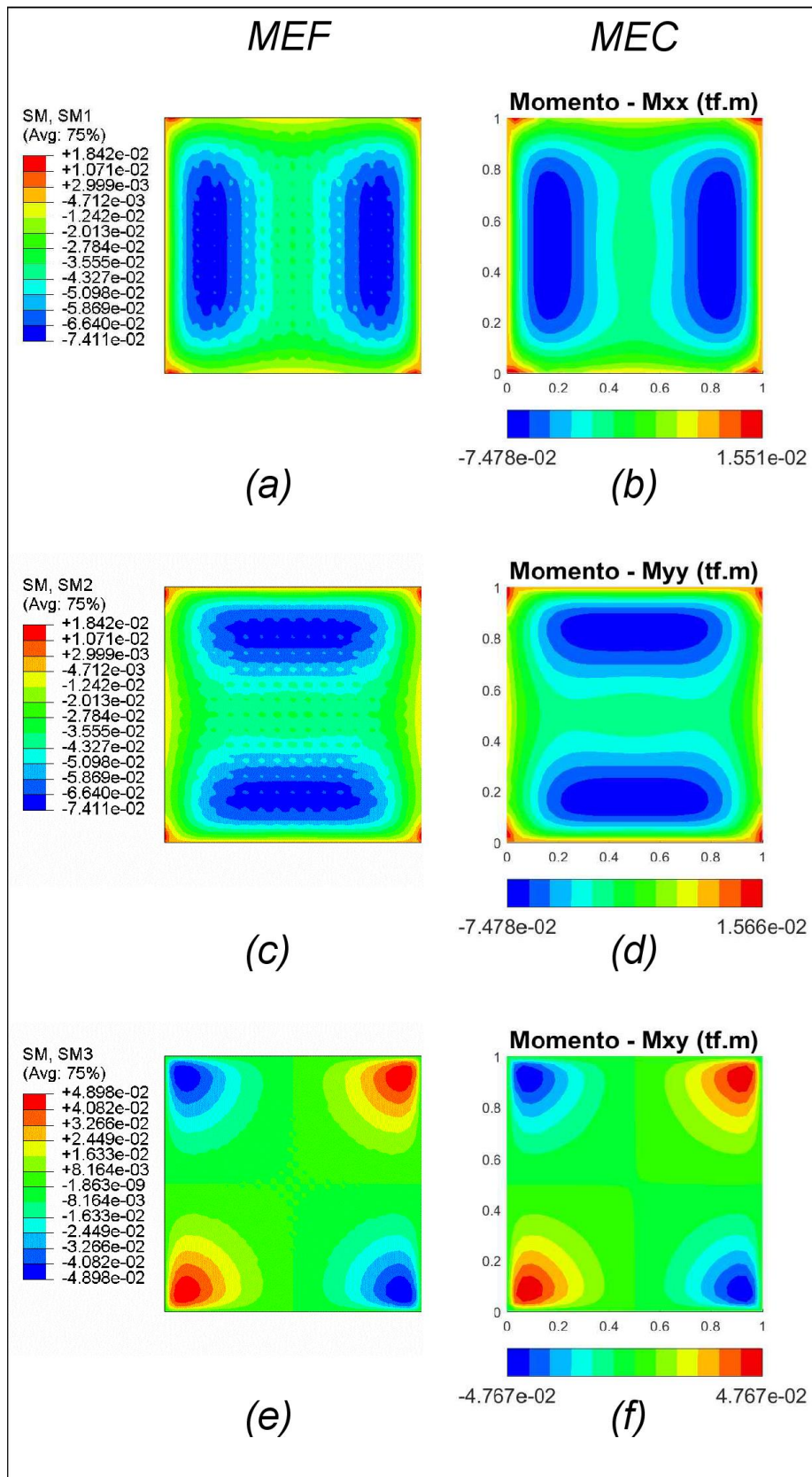


Figura 8.11 – Gráficos em gradiente de cores: Esforços de momento do caso 04. Momento fletor “XX” pelo MEF (a) e pelo MEC (b); Momento fletor “YY” pelo MEF (c) e MEC(d); Momento fletor “XY” pelo MEF (e) e pelo MEC (f).

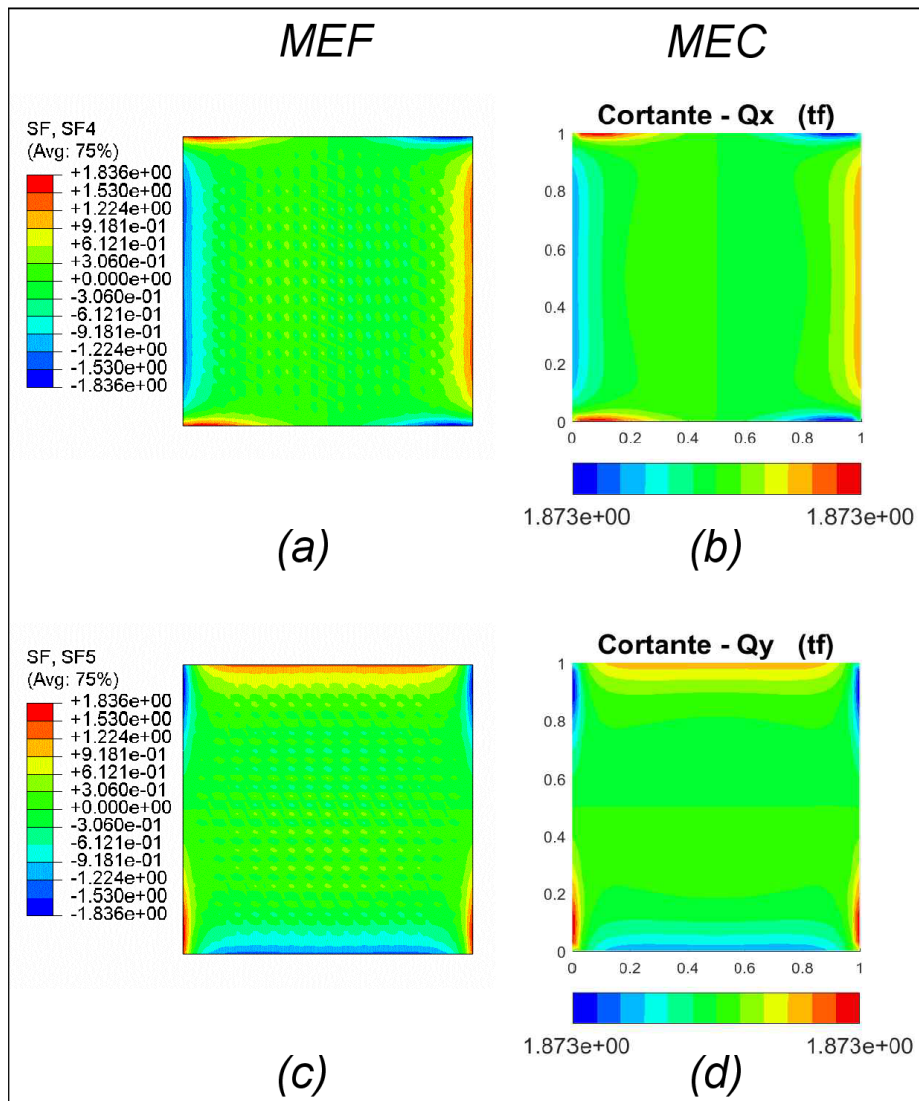


Figura 8.12 – Gráficos em gradiente de cores: Esforços cortantes do caso 04. Esforço cortante “ Q_x ” pelo MEF (a) e pelo MEC (b); Esforço cortante “ Q_y ” pelo MEF (c) e MEC(d).

9. CONCLUSÕES

9.1. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentou-se neste trabalho uma formulação do método dos elementos de contorno para a análise de elementos tipo chapa em estado plano de tensão e tipo placa espessa com base na teoria de Reissner quando sob influência de variações de temperatura, forças de superfície e apoios elásticos tipo Winkler.

Através dos resultados abordados nos 4 estudos de caso propostos, pode-se concluir que a formulação utilizada via método dos elementos de contorno apresentou boa aproximação no cálculo de deslocamentos, reações e esforços.

O programa “MEC/CADv01” desenvolvido neste trabalho demonstrou-se ferramenta útil para a análise e dimensionamento de elementos estruturais como reservatórios, fundações tipo radier, muros de flexão, lajes lisas, etc. A interface orientada a objetos torna fácil a geração de diferentes modelos e as características do método dos elementos de contorno tornam o seu tempo de execução e custo computacional mais vantajosos que outros programas baseados na análise matricial ou no método dos elementos finitos.

A formulação utilizada para a solução de modelos com elementos de chapa em EPT sujeitos a variações de temperatura em sua seção média pode ser expandida para a análise de diferentes fenômenos expansivos como: retração do concreto, corrosão de armaduras e reação álcali agregado.

O procedimento de cálculo dos vetores “ B ” para a consideração da curvatura e momento térmico pode ser adaptado para a consideração da não-linearidade física do material, utilizando para isso procedimentos iterativos, como também para a consideração de esforços internos oriundos de forças de protensão.

A rotina de células internas com rigidez “ k_s ” com base na formulação de Winkler pode ser expandida para a análise de placas apoiadas em elementos como enrijecedores, pilares internos ou elementos de viga.

9.2. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Como temas para trabalhos futuros nesta linha de pesquisa são sugeridos os seguintes estudos:

- Análise de placas espessas solicitadas por forças de protensão através da formulação do método dos elementos de contorno com o uso de células internas para o efeito de força transversal e momento distribuído oriundo da carga e excentricidade dos cabos de protensão.
- Análise de cascas com base na teoria de Reissner pelo método dos elementos de contorno.
- Análise de placas espessas com enrijecedores, pilares, capiteis e vigas pelo método dos elementos de contorno.

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Aliabadi, M. H., *The Boundary Element Method Vol.2: Applications in Solids and Structures*, Wiley, Chichester, 2002.
- [2] Altoé, M., Ribeiro, N. S., Karam, V. J. Analysis of simple supported and clamped Reissner's plates on Pasternak-type foundation by the Boundary Element Method. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 52, p. 64-70, 2015.
- [3] Beskos, D. E., *Boundary Element Analysis of Plates and Shells*, Springer-Verlag, Berlin, p. 93-140, 1991.
- [4] Betti, E. Teoria dell' elasticità. *Il Nuovo Cimento*, p. 7-10, 1872.
- [5] Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method for Engineers*, Pentech Press, London, 1978.
- [6] Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C. *Boundary Element Techniques Theory and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
- [7] Dirgantara, T., Aliabadi, M.H., Elastoplastic boundary element method for shear deformable shells. *Engineering Structures* 45, p. 62-67, 2012.
- [8] Fadhil, A. S. and El-Zafrany. A., Boundary element analysis of thick Reissner plates on two-parameter foundation, *International Journal of Solids and Structures* Vol. 31, p. 2901-2917 1994.
- [9] Farid, A. F., Rashed, Y. F., BEM for thick plates on unilateral Winkler springs. *Innovative Infrastructure Solutions*, p. 3-26, 2018.
- [10] Karam, V. J., *Aplicação do Método dos Elementos de Contorno à Teoria de Reissner para Flexão de Placas*, Dissertação de M.Sc., COPPE/UFRJ, 1986.
- [11] Karam, V. J., Telles, J. C. F., On boundary elements for Reissner's plate theory, *Engineering Analysis* 5(1), p. 21-27, 1988.
- [12] Karam, V. J. and Telles, J. C. F. The BEM Applied to Plate Bending Elastoplastic Analysis Using Reissner's Theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 9, p. 351-375, 1992.

- [13] Kirchhoff, G., *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, J. Math, Crelle, 1850.
- [14] Kutt, H. R., *Quadrature formulae for finite part integrals*, Report Wisk 178, The National Research Institute for Mathematical Sciences, Pretoria, 1975.
- [15] Lachat, J. C., *A further development of the boundary integral technique for elastostatic*, Ph. D Thesis, University of Southampton, 1975.
- [16] Lu P., Huang M. *Boundary element analysis of shallow shells involving shear deformation*. International Journal of Solids and Structures 29, p. 1273-1282, 1992.
- [17] Monnerat, D. D., *Análise de estruturas formadas pela associação de placas e chapas utilizando o método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado em engenharia civil) Rio de Janeiro – Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008.
- [18] Moraes, M. C., *Estruturas de fundações*. São Paulo, McGraw Hill, 1976.
- [19] Oliveira, S. R. C., Karam, V. J. *Elastoplastic analysis of Reissner's plates by the boundary element method*. Engineering Analysis with Boundary Elements 64, p. 247-254, 2016.
- [20] Rashed, Y. F., Aliabadi, M. H., Brebbia, C. A. *The boundary element method for thick plates on a Winkler foundation*, International Journal of Numerical Methods for Engineering 41, p. 1435-1462, 1998.
- [21] Rashed, Y. F. *A Boundary element modelling of flat floors under vertical loadings*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 62, p. 1606-1635, 2005.
- [22] Reissner, E., *On the Theory of Bending of Elastic Plates*. Journal of Mathematics and Physics 23, p. 184-191, 1944.
- [23] Reissner, E., *The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates*, J. Appl. Mech., p. 69-77, 1945.
- [24] Ribeiro, N. S., *Análise da interação solo-estrutura via acoplamento mec/mef*. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 2005.
- [25] Somigliana, C. *Sopra l' equilibrio di un corpo elástico isótropo*. II Nuovo Cimento, p. 17-20, 1885.

- [26] Telles, J. C. F., The boundary element method applied to inelastic problems, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [27] Telles, J. C. F., Oliveira, R. F., Third degree polynomial transformation for boundary element integrals: Further improvements. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 13, p. 135-141 1994.
- [28] Weeën, F. V., Application of the boundary integral equation method to Reissner's plate model, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 18, p. 1-10, 1982.
- [29] Wen, P. H., Aliabadi, M. H. and Young, A.; Plane stress and plate bending coupling in BEM analysis of shallow shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 48, p. 1107-1125, 2000.
- [30] Xiao-Yan, L, Mao-Kuang, H and Xiuxi, W., Geometrically nonlinear analysis of a Reissner type plate by the boundary element method, *Computers and Structures* 37, p. 911-916, 1990.

APÊNDICE A – NOTAÇÃO INDICIAL

Ao longo deste trabalho o método da notação indicial foi utilizado como forma de evitar desperdícios tempo e reduzir a extensão de tensores e equações algébricas. Abaixo são representados os métodos de abreviação de tensores, a expressão do Delta de Kronecker e o método da repetição de índices para a abreviação de somatórios de variáveis.

- **A.1 – Abreviação de tensores**

$$a_i = [a_1 \quad a_2 \quad a_3] \tag{A.1}$$

$$b_\alpha = [b_1 \quad b_2] \tag{A.2}$$

$$c_{ij} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \tag{A.3}$$

- **A.2 – Delta de Kronecker**

$$\delta_{ij} = 1, \text{ se } i = j \tag{A.4}$$

$$\delta_{ij} = 0, \text{ se } i \neq j \tag{A.5}$$

- **A.3 – Somatório de índices**

$$a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \tag{A.6}$$

$$a_i a_i = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \tag{A.7}$$

$$a_{ij} b_j = a_{i1} b_1 + a_{i2} b_2 + a_{i3} b_3 \tag{A.8}$$

APÊNDICE B – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

B.1 – INTEGRAL NÚMERICA DE GAUSS

Para uma integral qualquer variando em um intervalo de domínio unidimensional $[-1, 1]$, conforme expresso na equação (B.1), a integração numérica de Gauss aproxima esse procedimento analítico por uma somatória de pontos “ γ_i ” dentro da função “ $f(x)$ ”, multiplicados por coeficientes “ w_i ”, conforme expresso na equação (B.2)

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx \quad (\text{B.1})$$

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{i=1}^{ng} w_i f(\gamma_i) \quad (\text{B.2})$$

Em situações onde o intervalo de integração varia num domínio diferente do intervalo $[-1, 1]$, deve-se aplicar na equação o coeficiente do Jacobiano para a transformação do intervalo de integração, conforme expresso na equação (B.3).

$$J = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\gamma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\gamma}\right)^2} \quad (\text{B.3})$$

Tabela 6 – Coeficientes e pesos para a integração de Gauss.

i	γ_i	w_i
1	-0,57735	1,00000
2	0,57735	1,00000
1	-0,77460	0,55556
2	0,00000	0,88889
3	0,77460	0,55556
1	-0,86114	0,34785
2	-0,33998	0,65215
3	0,33998	0,65215
4	0,86114	0,34785
1	-0,90618	0,23693
2	-0,53847	0,47863
3	0,00000	0,56889
4	0,53847	0,47863
5	0,90618	0,23693
1	-0,93247	0,17132
2	-0,66121	0,36076
3	-0,23862	0,46791
4	0,23862	0,46791
5	0,66121	0,36076
6	0,93247	0,17132
1	-0,94911	0,12948
2	-0,74153	0,27971
3	-0,40585	0,38183
4	0,00000	0,41796
5	0,40585	0,38183
6	0,74153	0,27971
7	0,94911	0,12948
1	-0,96029	0,10123
2	-0,79667	0,22238
3	-0,52553	0,31371
4	-0,18343	0,36268
5	0,18343	0,36268
6	0,52553	0,31371
7	0,79667	0,22238
8	0,96029	0,10123

B.2 – TRANSFORMADA DE TELLES

- **Intervalo de integração:**

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta$$

- **Função de ordem polinomial cúbica:**

$$\eta(\gamma) = a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d$$

- **Condições de contorno:**

$$\eta(1) = 1$$

$$\eta(-1) = -1$$

$$\left. \frac{d\eta}{d\gamma} \right|_n = 0$$

$$\left. \frac{d^2\eta}{d\gamma^2} \right|_n = 0$$

- **Solução:**

$$a = 1/Q$$

$$b = -3\bar{\gamma}/Q$$

$$c = 3\bar{\gamma}^2/Q$$

$$Q = 1 + 3\bar{\gamma}^2$$

- **Jacobiano:**

$$J = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}$$

B.3 – INTEGRAL DE KUTT

- **Intervalo de integração com singularidade:**

$$I = \int_a^b \frac{1}{(x-s)} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{s-\varepsilon} \frac{1}{(x-s)} f(x) dx + \int_{s+\varepsilon}^b \frac{1}{(x-s)} f(x) dx \right\}$$
$$I = I' + I''$$

- **Divisão do intervalo em parcelas finitas:**

$$I = I' + I''$$

Sendo

$$I' = \int_a^{s-\varepsilon} \frac{1}{(x-s)} f(x) dx$$

$$I'' = \int_{s+\varepsilon}^b \frac{1}{x-s} f(x) dx$$

- **Expansão das integrais I' e I'' :**

$$I' = - \int_0^1 \frac{f[(a-s)t + s]}{(x-s)} dt + f(s) \ln|a-s|$$

$$I'' = \int_0^1 \frac{f[(b-s)t + s]}{t} dt + f(s) \ln|b-s|$$

- **Expansão na forma numérica com os pesos de Kutt:**

$$I' = - \sum_{i=1}^{ng} f[(a-s)t_i + s] w_i^{Kutt} - f(s) \ln|a-s|$$

$$I'' = \sum_{i=1}^{ng} f[(b-s)t_i + s] w_i^{Kutt} + f(s) \ln|b-s|$$