COPPE
UFRJ
Instituto Alberto Luiz Coimbra de
Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

# PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO E QUASE-EQUILÍBRIO: UMA ABORDAGEM TEÓRICA E NUMÉRICA

Leonardo Araújo de Sousa

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Susana Scheimberg de Makler
Paulo Sérgio Marques dos Santos

Rio de Janeiro
Setembro de 2019

PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO E QUASE-EQUILÍBRIO: UMA ABORDAGEM TEÓRICA E NUMÉRICA

Leonardo Araújo de Sousa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof[a]. Susana Scheimberg de Makler, D.Sc.

Prof. Paulo Sérgio Marques dos Santos, D.Sc.

Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.

Prof. Ronaldo Malheiros Gregório, D. Sc.

Prof. Joao Xavier da Cruz Neto, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
SETEMBRO DE 2019

Sousa, Leonardo Araújo de

Problemas de Equilíbrio e Quase-Equilíbrio: Uma abordagem teórica e numérica/Leonardo Araújo de Sousa. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2019.

IX, 80 p. 29, 7cm.

Orientadores: Susana Scheimberg de Makler
Paulo Sérgio Marques dos Santos

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2019.

Referências Bibliográficas: p. 75 – 80.

1. Problema de Quase-Equilíbrio. 2. Existência de Solução. 3. Teoria KKM. 4. Método Quase-Newton. 5. Problema de Equilíbrio. 6. Qualificação de restrições de posto constante. 7. Jacobiana generalizada computável. I. Makler, Susana Scheimberg de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*À minha esposa Natália.*

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO E QUASE-EQUILÍBRIO: UMA ABORDAGEM TEÓRICA E NUMÉRICA

Leonardo Araújo de Sousa

Setembro/2019

Orientadores: Susana Scheimberg de Makler
Paulo Sérgio Marques dos Santos

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho apresentamos um resultado de existência de solução para problemas de quase-equilíbrio (PQE) em espaços de Banach usando a teoria KKM generalizada, sem exigir a compacidade do conjunto de restrições. Como aplicação, obtemos resultados de existência de solução para problemas de desigualdade quase-variacionais e problemas de equilíbrio de Nash generalizado. Apresentamos exemplos e comparações com trabalhos existentes na literatura. Além disso, neste trabalho desenvolvemos um método do tipo Quase-Newton para problemas de equilíbrio baseadas na estrutura do tipo Newton proximal dada em Santos et. al. (Optimization Letters 12(5)997-1009, 2018). Consideramos uma família de matrizes satisfazendo a propriedade da deterioração limitada. Mostramos a boa definição do método proposto e sobre hipóteses razoáveis, garantimos a convergência linear do algoritmo. Além disso, apresentamos experimentos numéricos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

EQUILILIBRIUM AND QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEMS: A THEORETICAL AND NUMERICAL APPROACH

Leonardo Araújo de Sousa

September/2019

Advisors: Susana Scheimberg de Makler
Paulo Sérgio Marques dos Santos

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this work we present an existence result of solution for the quasi-equilibrium problems (QEP) in Banach spaces using the generalized KKM theory, without compactness assumption on the constrained set. As application we obtain existence results for quasi-variational inequalities and generalized Nash equilibrium problems. We report some examples and comparisons with other problems existent in the literature. Moreover, in this work we develop a Quasi-Newton type method for equilibrium problems based on the proximal Newton-type structure given in Santos et al. (Optimization Letters 12(5)997-1009, 2018). We consider a family of matrices verifying the bounded deterioration property. We prove the well definition of the proposed method and under suitable assumptions we establish the linear convergence of the algorithm. Futhermore, numerical experiments are reported.

# Sumário


**Lista de Tabelas** **ix**

**1 Preliminares** **4**

1.1 Tópicos de Análise no $\mathbb{R}^n$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 4

1.2 Tópicos de Topologia Geral . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.3 Tópicos de Análise Convexa . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1.4 Tópicos de Teoria KKM . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11

**2 Problemas de Equilíbrio** **15**

2.1 Problema de Equilíbrio (EP) . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 15

2.1.1 Métodos do Tipo Tikhonov para EP . . . . . . . . . . . . . . 17

2.2 Uma Regularização do Tipo Tikhonov para o Problema de Equilíbrio 20

**3 Um Método do Tipo Quase-Newton Para Problemas de Equilíbrio** **33**

3.1 O Método Quase-Newton para Problemas de Equilíbrio (QNMEP) . 38

3.2 Análise de Convergência . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 41

3.3 Resultados Numéricos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43

**4 Problemas de Quase-Equilíbrio** **46**

4.1 Existência de solução para o Problema de Quase-Equilíbrio . . . . . . 49

4.1.1 O PQE de MOSCO [1] . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 49

4.1.2 O PQE de NOOR e OETTLI [2] . . . . . . . . . . . . . . . . 51

4.1.3 O PQE de CUBIOTTI [3] . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52

4.1.4 O PQE de AUSSEL *et al.* [4] . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53

4.1.5 O PQE de CASTELLANI e GIULI [5] . . . . . . . . . . . . . 55

**5 Existência de Solução para Problema de Quase-Equilíbrio** **58**

5.1 Existência de Solução . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

5.1.1 Teorema de existencia de solução para o Problema de Quase-Equilíbrio. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 61

5.1.2 Comparações e Exemplos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 64

5.2 Aplicações . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69

5.2.1 Desigualdades Quase-Variacionais . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
5.2.2 Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado . . . . . . . . . . 70

**6 Considerações Finais** **73**

**Referências Bibliográficas** **75**

# Lista de Tabelas

3.1 Resultados para o Exemplo 3.1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
3.2 Resultados para o Exemplo3.2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 44
3.3 Resultados para o Exemplo 3.3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 45

# Introdução

Neste trabalho, estudamos duas classes de problemas: o Problema de Equilíbrio (PE) e o Problema de Quase-Equilíbrio (PQE). Dividimos esta Tese em duas partes: nos Capítulos 2 e 3 mostramos a abordagem teórica e numérica sobre problemas de equilíbrio, e nos Capítulos 4 e 5 apresentamos a abordagem teórica sobre problemas de quase-equilíbrio. Estudamos existência de solução dos dois problemas, desenvolvemos uma regularização do tipo Tikhonov para EP e um método numérico do tipo quase-Newton para obter soluções do Problema de Equilíbrio, além disso desenvolvemos um Teorema que estabelece condições para existência de soluções para o PQE. O Problema de Equilíbrio é definido a seguir:

Sejam $X$ um espaço de Banach real e $C$ um subconjunto convexo, fechado e não vazio de $X$. O Problema de Equilíbrio (PE) consiste em

$$(PE): \begin{cases} \text{Encontrar} \quad \bar{x} \in C \quad \text{tal que} \\ f(\bar{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \end{cases} \tag{1}$$

Vários resultados sobre existência de solução em espaços de dimensão finita e infinita foram extensivamente estudados em IUSEM *et al.* [6], IUSEM [7], OLIVEIRA *et al.* [8], JACINTO e SCHEIMBERG [9].

No estudo do Problema de Equilíbrio, obtivemos a primeira das duas principais motivações para o desenvolvimento de nossa tese. A generalização das regularizações do tipo Tikhonov dada OLIVEIRA *et al.* [8].

$$\text{Encontre } x^k \in C\colon f(x^k, y) + \lambda_k g(x^k, y) \geq 0, \ \forall\, y \in C,$$

onde $f, g\colon C \times C \to \mathbb{R}$ e $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}_+$.

O método de regularização do tipo Tikhonov é uma ferramenta conhecida usada para lidar com problemas mal postos, por exemplo, em otimização convexa, desigualdade variacional e equilíbrio, veja por exemplo HUNG e MUU [10], OLIVEIRA *et al.* [8], FACCHINEI e PANG [11], HAO [12], ALLECHE *et al.* [13] e suas referências.

Esse estudo apresenta condições para a boa definição da sequência $\{x^k\}$ de soluções de problemas regularizados e estabelece a equivalência entre a existência de solução para o (PE) e a limitação de $\{x^k\}$. A prova da boa definição de $\{x^k\}$, em OLIVEIRA *et al.* [8], é baseada em resultados de existência obtidos em IUSEM *et al.* [6]. Desenvolvemos a regularização em espaços de Banach reflexivos e exibimos um exemplo em um espaço de Banach reflexivo que não é Hilbert.

O trabalho com sequências em problemas de equilíbrio nos levou a estudar algoritmos numéricos para problemas de equilíbrio. Algoritmos numéricos para resolver o problema de equilíbrio são propostos baseados no princípio do problema auxiliar, a técnica do ponto proximal, o esquema de penalidade, projeções ou aproximações exteriores sobre o conjunto de restrições, esquemas do tipo Newton, ver e. g. BELO CRUZ *et al.* [14], BIGI e PASSACANTANDO [15], HIEU [16], IUSEM e SOSA [17], NASRI *et al.* [18], SANTOS *et al.* [19], SANTOS e SCHEIMBERG [20], SCHEIMBERG e SANTOS [21], VINH e GIBALI [22] e suas referências.

Nesta tese um dos principais objetivos foi estudar o método dado em SANTOS *et al.* [19] e desenvolver sua versão modificada, considerando um passo do tipo Quase-Newton em vez do passo de Newton. Focamos em problemas onde o passo de Newton pode ser aplicado. Mas, devido ao alto custo computacional da iteração de Newton, usamos uma família de matrizes $\{B_k\}$ com a propriedade da deterioração limitada:

$$\|B_{k+1} - H(x^*)\| \leq \|B_k - H(x^*)\| + c\left\|x^k - x^*\right\|, \quad \forall\, H \in \partial_C F(x^*),$$

onde entraremos em detalhes no Capítulo 3. Neste trabalho, relembramos definições e propriedades que serão úteis na nossa análise, apresentamos o algoritmo e algumas propriedades das matrizes satisfazendo a propriedade da deterioração limitada. Além disso, mostramos a convergência linear do algoritmo. Exibimos alguns experimentos numéricos para mostrar o comportamento do nosso método e comparamos com alguns métodos existentes na literatura.

Na segunda parte desta Tese, trabalhamos com o Problema de Quase-Equilíbrio (PQE). O PQE é definido da seguinte maneira:

Sejam $X$ um espaço de Banach real e $C$ um subconjunto convexo, fechado e não vazio de $X$. Seja $K : C \rightrightarrows C$ uma aplicação ponto-conjunto. Seja $f : C \times C \to \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio, isto é, $f(x, x) = 0$, $\forall x \in C$. O Problema de Quase-Equilíbrio (PQE), consiste em

$$\text{(PQE)}\begin{cases} \text{encontrar} \quad \bar{x} \in K(\bar{x}) \quad \text{tal que} \\ \quad f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K(\bar{x}). \end{cases} \tag{2}$$

O PQE possui, como casos particulares, o problema de equilíbrio clássico, o problema de desigualdades quase-variacionais, o problema de equilíbrio de Nash generalizado, etc. Veja por exemplo, BLUM e OETTLI [23], IUSEM [7], IUSEM *et al.* [6], CASTELLANI e GIULI [5], CUBIOTTI [3], JACINTO [24], FACCHINEI e KANZOW [25] e suas referências. O problema de quase-equilíbrio tem despertado um crescente interesse por vários pesquisadores, devivo a sua estrutura flexível que engloba outros problemas existentes na literatura. A existência de soluções para o PQE tem sido pesquisada, por exemplo, por MOSCO [1], NOOR e OETTLI [2], AUSSEL *et al.* [4], CASTELLANI e GIULI [5], COTRINA e ZÚÑIGA [26], CUBIOTTI [3] e suas referências.

Nesta tese, apresentamos condições para existência de solução para o problema de quase-equilíbrio, e, diferente dos trabalhos existentes na literatura, e. g. AUSSEL *et al.* [4], CASTELLANI e GIULI [5] e CUBIOTTI [3, 27] não exigimos a hipótese de compacidade do conjunto de restrições $C$. Nossa principal ferramenta consiste em aplicar a teoria KKM, desenvolvida nos trabalhos de JACINTO e SCHEIMBERG [9]. Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

No Capítulo 1, apresentamos as principais notações, definições e proposições dadas na literatura sobre análise no $\mathbb{R}^n$, análise convexa, topologia geral, análise funcional e teoria KKM que serão usadas neste trabalho.

No Capítulo 2 apresentamos o Problema de Equilíbrio e propomos uma regularização do tipo Tikhonov para problemas de equilíbrio em espaços de Banach reflexivo. Mostramos a boa definição da trajetória Tikhonov, mostramos que, sob certas condições a sequência dos subproblemas convergem para a solução do problema de equilíbrio e estudamos condições que garantam que a sequência seja limitada, analisando o que acontece com a trajetória Tikhonov.

No Capítulo 3 apresentamos uma versão modificada do método dado em SANTOS *et al.* [19], definimos o método do tipo quase-Newton para poblemas de equilíbrio. Mostramos que sobre certas hipóteses, a sequência gerada pelo algoritmo está bem definida, mostramos que o método converge linearmente para a solução do problema de equilíbrio usando uma família de matrizes que satisfazem a propriedade da deteriorização limitada. Além disso, apresentamos experimentos numéricos comparando com outros métodos existentes na literatura.

No Capítulo 4 definimos o Problema de Quase-Equilíbrio e fazemos uma breve apresentação das principais referências da literatura sobre existência de solução do problema de quase-equilíbrio, destacando os principais teoremas e as principais técnicas de demonstração de MOSCO [1], NOOR e OETTLI [2], CUBIOTTI [3], AUSSEL *et al.* [4], CASTELLANI e GIULI [5] e COTRINA e ZÚÑIGA [26].

No Capítulo 5 usando a teoria desenvolvida em JACINTO e SCHEIMBERG [9] apresentamos o nosso resultado: condições para existência de solução de problemas de quase-equilíbrio e como aplicação, obtemos condições para existência de solução para desigualdades quase-variacionais e problemas de equilíbrio de Nash generaliado, além disso comparamos com os trabalhos existentes na literatura.

No Capítulo 6 fazemos nossas considerações finais e indicamos possíveis trabalhos futuros como consequência da teoria desenvolvida.

# Capítulo 1

# Preliminares

Ao longo deste capítulo, apresentamos algumas definições e notações que serão usadas neste trabalho, a fim de tornar este trabalho autocontido. Além disso, apresentamos algumas propriedades sobre análise no $\mathbb{R}^n$, análise convexa e teoria KKM.

## 1.1 Tópicos de Análise no $\mathbb{R}^n$

Um *espaço vetorial real* $E$ é um conjunto não vazio, onde estão definidas duas operações: a adição, que faz corresponder cada par de vetores $x, y \in E$ em um novo vetor $x + y \in E$, e a multiplicação por um número real, que a associa cada número real $\alpha \in \mathbb{R}$ e a cada vetor $y \in E$ faz corresponder um vetor $\alpha y$. Para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, y, z \in E$, essas operações satisfazem as seguintes propriedades:

(a) $x + y = y + x$;

(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

(c) existe um vetor $0 \in E$, tal que $y + 0 = 0 + y = y$;

(d) para todo vetor $y \in E$, existe um vetor $-y \in E$ tal que $y + (-y) = 0$;

(e) $(\alpha + \beta)y = \alpha y + \beta y$;

(f) $(\alpha\beta)y = \alpha(\beta y)$;

(g) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

(h) $1 \cdot y = y$;

Consideramos o espaço euclideano $\mathbb{R}^n$ com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar definidas por

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \quad \text{e} \quad \alpha x = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n).$$

Por definição, a igualdade vetorial $x = y$ significa que são iguais cada coordenada, isto é $x_1 = y_1, \cdots, x_n = y_n$. Definimos também o vetor nulo, o vetor onde suas coordenadas são todas iguais a zero, isto é $0 = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$. O inverso aditivo de $x = (x_1, \cdots, x_n)$ é $-x = (-x_1, \cdots, -x_n)$. Estas definições tornam o $\mathbb{R}^n$ um espaço vetorial.

Seja $E$ um espaço vetorial. Um *produto interno* é um funcional bilinear, simétrico e positivo, isto é, é a função $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$, que associa a cada par de vetores $x, y \in E$ um número real $\langle x, y \rangle$, chamado de produto interno de $x$ por $y$, de modo que valem as seguintes propriedades, para cada $x, \tilde{x}, y, \tilde{y} \in E$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. Bilinearidade: $\langle x + \alpha\tilde{x}, y \rangle = \langle x, y \rangle + \alpha \langle \tilde{x}, y \rangle$ e $\langle x, y + \alpha\tilde{y} \rangle = \langle x, y \rangle + \alpha \langle x, \tilde{y} \rangle$ ;

2. Simetria: $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

3. Positividade: $\langle x, x \rangle > 0, \quad \text{se} \quad x \neq 0.$

Uma *norma* em um espaço vetorial $E$ é uma função $\| \cdot \| : E \to \mathbb{R}$ que associa o vetor $x \in E$ a um número real $\|x\|$, de modo que valem as seguintes propriedades, $\forall x, y \in E$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0$ se, e só se, $x = 0$;

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$;

3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Se $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, então $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$. Por definição, temos que $\langle x, x \rangle = \|x\|^2$.

As seguintes definições podem ser encontradas em LIMA [28], LIMA [29], LIMA [30] ou LOUREDO *et al.* [31].

Seja $x \in \mathbb{R}^n$. Uma bola em $\mathbb{R}^n$ centrada em $x$ de raio $\epsilon > 0$, denotada por $B(x; \epsilon)$, é o conjunto $\{z \in \mathbb{R}^n : \|z - x\| < \epsilon\}$. Uma *sequência* em $\mathbb{R}^n$ é uma função $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que associa a cada número natural $k$ um ponto $x^k \in \mathbb{R}^n$. A notação que usaremos neste trabalho será $\{x^k\}$, onde $x^k = (x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k) \in \mathbb{R}^n$. Uma *subsequência* de $\{x^k\}$ é a restrição desta sequência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_1 < \cdots < k_m < \cdots\} \subset \mathbb{N}$. A notação $\{x^{k_j}\}$ é usada pra indicar uma subsequência de $\{x^k\}$. Dizemos que a sequência $\{x^k\}$ converge para $a \in \mathbb{R}^n$ quando, para cada $\epsilon > 0$, existir um natural $k_0$ tais que, $\left\|x^k - a\right\| < \epsilon$, sempre que $k \geq k_0$. Usamos a seguintes notações para indicar que $a$ é o limite da sequencia $\{x^k\}$: $\lim\limits_{k \to +\infty} x^k = a$, $x^k \to a$ $(k \to +\infty)$ ou $\lim x^k = a$.

### Tipos de convergência

Seja $\{x^k\}$ uma sequência em $\mathbb{R}^n$ que converge para $\bar{x}$. Dizemos que a sequência $\{x^k\}$ converge linearmente para $\bar{x}$ se existe um $\alpha \in (0,1)$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x^{k+1}-\bar{x}}{x^k-\bar{x}} = \alpha.$$

Se $\alpha = 1$, dizemos que a convergência da sequência é sublinear e se $\alpha = 0$, dizemos que a convergência da sequência é superlinear.

Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Um ponto $a \in A$ é chamado de ponto interior, quando existe um $\epsilon > 0$ tal que a bola centrada em $a$ de raio $\epsilon$, está contida em $A$, ou seja, $B(a,\epsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores a $A$ é chamado de interior de $A$. Um conjunto $A$ é chamado aberto quando todos os seus pontos são pontos interiores.

**Proposição 1.1** *Os conjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *O conjunto vazio $\emptyset$ e o $\mathbb{R}^n$ são abertos;*
2. *A interseção $A = \bigcap_{i=1}^m A_i$ de um número finito de conjuntos abertos $A_1, \cdots, A_m$ é um conjunto aberto;*
3. *A união $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ de uma família qualquer $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de abertos $A_\lambda$ é um conjunto aberto.*

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de aberto em $X$ quando existe um aberto $U$ de $\mathbb{R}^n$ tal que $A = U \cap X$. Uma outra abordagem de verificar se um conjunto $A \subset X$ é aberto em $X$, se, para cada $a \in A$, existe um $\delta > 0$ tal que $B(a,\delta) \cap X \subset A$.

Seja $x \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que $a$ é aderente ao conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ quando existe uma sequência $\{x^k\} \subset F$ convergindo para $x$. O conjunto dos pontos aderentes a $F$ é chamado de fecho e é denotado por $clF$. Um conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ chama-se fechado quando contém todos os seus pontos aderentes, isto é, $F = clF$. Segue direto da definição que um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ não pertence ao fecho de $F$ quando existe um $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \cap F = \emptyset$.

**Teorema 1.1** *Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.*

**Proposição 1.2** *Os conjuntos fechados no $\mathbb{R}^n$ satisfazem as seguintes propriedades:*

1. *O conjunto vazio $\emptyset$ e o $\mathbb{R}^n$ são fechados;*
2. *A união $F = \bigcup_{i=1}^m F_i$ de um número finito de fechados $F_1, \cdots, F_m$ é um conjunto fechado;*
3. *A interseção $F = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$ de uma família qualquer $(F_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de fechados $F_\lambda$ é um conjunto fechado.*

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. Um subconjunto $F \subset X$ é fechado em $X$, se existe um conjunto fechado $G$ em $\mathbb{R}^n$ tal que $F = G \cap X$.

**Teorema 1.2 (Bolzano-Weierstrass)** *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.*

**Conjuntos Compactos**

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado quando existe uma constante $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$, para cada $x \in X$.

Dizemos que um conjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ é *compacto* quando ele é limitado e fechado.

Uma cobertura para um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma família $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de subconjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}^n$ tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$. Uma subcobertura é uma subfamília $(C_\lambda)_{\lambda \in \Lambda'}$, $\Lambda' \subset \Lambda$ tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda'} C_\lambda$. A cobertura é chamada de aberta quando os $C_\lambda$ são abertos e finita quando $\Lambda$ é um conjunto finito.

**Teorema 1.3 (Borel-Lebesgue)** *Toda cobertura aberta $L \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ de um compacto $L \subset \mathbb{R}^n$ admite uma subcobertura finita $L \subset C_{\lambda_1} \cup C_{\lambda_2} \cup \cdots \cup C_{\lambda_m}$.*

**Teorema 1.4** *Se toda cobertura aberta de um conjunto $L \subset \mathbb{R}^n$ admite uma subcobertura finita, então $L$ é limitado e fechado.*

Se definirmos os compactos de $\mathbb{R}^n$ por meio de coberturas abertas, obtemos que os compactos são limitados e fechados, e, se definirmos os compactos de $\mathbb{R}^n$ como conjuntos limitados e fechados, obtemos que de toda cobertura aberta do compacto, podemos obter uma subcobertura finita. De qualquer maneira, todo compacto é fechado. Além disso, se um conjunto fechado estiver contido em um compacto, segue que o fechado também será limitado e portanto, compacto.

## 1.2 Tópicos de Topologia Geral

Recordamos nesta seção, algumas propriedades necessárias para a compreensão da teoria KKM. As seguintes definições podem ser encontradas em BERGE [32] ou DOMINGUES [33].

Seja $E$ um conjunto não vazio. Uma *topologia* sobre $E$ é uma coleção $\mathcal{O}$ de subconjuntos de $E$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset, E \in \mathcal{O}$;

(ii) Se $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \cdots, \mathcal{O}_n \in \mathcal{O}$ $(n \in \mathbb{N})$, então $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \cap \cdots \cap \mathcal{O}_n \in \mathcal{O}$;

(iii) Se $(\mathcal{O}_i)$ é uma família qualquer de subconjuntos de $\mathcal{O}$, então $\bigcup \mathcal{O}_i \in \mathcal{O}$.

O par $(E, \mathcal{O})$ é chamado de *espaço topológico*, os elementos de $\mathcal{O}$ são chamados de *abertos* do espaço e os elementos de $E$ são chamados de ponto. Quando não houver confusão, podemos chamar "espaço $E$", para nos referirmos ao espaço topológico.

Seja $E$ um espaço topológico. Dizemos que $F \subset E$ é um conjunto *fechado*, se o seu complementar $E \setminus F$ é aberto, ou seja, $E \setminus F \in \mathcal{O}$. $cl_B$ denota o fecho relativo a $B$, $cl_B(\cdot) = cl_E(\cdot) \cap B$.

Dado $X \subset E$, $X \neq \emptyset$. A coleção $\mathcal{O}_X = \{A \cap X : A \in \mathcal{O}\}$ é uma topologia sobre $X$ à qual chamamos de topologia induzida por $\mathcal{O}$ sobre $X$. O par $(X, \mathcal{O}_X)$ é chamado subespaço de $(E, \mathcal{O})$.

Um espaço topológico $E$ é chamado espaço $T_1$, se satisfaz o seguinte axioma, chamado de axioma $T_1$:

**Axioma 1.1** **($T_1$)** *Para quaisquer $x, y \in E$, $x \neq y$, existem abertos $U_x, U_y \in \mathcal{O}$ que contêm $x$ e $y$, respectivamente, de maneira que $x \notin U_y$ e $y \notin U_x$.*

Um espaço topológico $E$ é chamado espaço $T_2$ ou *espaço de Hausdorff*, se o seguinte axioma, se verifica:

**Axioma 1.2** **($T_2$)** *Dados quaisquer $x, y \in E$, $x \neq y$, então existem abertos disjuntos $U_x$ e $U_y$, tais que $x \in U_x$ e $y \in U_y$.*

Seja $L$ um subconjunto do espaço topológico $E$. Dizemos que o conjunto $L$ é *compacto* se, para qualquer família $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de abertos tal que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \supset L$, existe uma subfamília finita $A_{\lambda_1}, \cdots, A_{\lambda_n}$ de maneira que $A_{\lambda_1} \cup \cdots \cup A_{\lambda_n} \supset L$. A família $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é chamada de *cobertura* ou *recobrimento* de $L$ e a subfamília $A_{\lambda_1}, \cdots, A_{\lambda_n}$ é chamada de *subcobertura* ou *subrecobrimento* de $L$.

**Proposição 1.3** *Seja $E$ um espaço topológico e $L \subset E$ um compacto. Se $F \subset L$ é fechado, então $F$ é compacto.*

**Proposição 1.4** *Seja $E$ um espaço topológico de Hausdorff. Se $L \subset E$ é compacto, então $L$ é fechado.*

**Definição 1.1** *Seja $E$ um espaço topológico. Uma família de conjuntos $\{A_\lambda \subseteq E : \lambda \in \Lambda\}$ possui a Propriedade da Interseção Finita se, para todo subconjunto finito $\Lambda'$ de $\Lambda$, vale que $\bigcap_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda \neq \emptyset$.*

Sejam $A$ e $B$ conjuntos não vazios de espaços vetoriais topológicos $X$ e $Y$, respectivamente. Dizemos que $T : A \rightrightarrows B$ é uma *aplicação ponto-conjunto* se, para cada elemento $a$ de $A$, associamos um subconjunto $T(a) \subseteq B$. A notação "$\rightrightarrows$"significa que a aplicação $T$ leva um ponto de $A$ em um conjunto das partes de $B$.

O domínio de $T$ é definido por $dom(T) := \{x \in A : T(x) \neq \emptyset\}$. O gráfico de $T$ é definido por $gra(T) := \{(x, y) \in X \times Y : y \in T(x)\}$.

Se $A$ é um conjunto não vazio de $X$ e $T : A \rightrightarrows A$ é uma aplicação ponto-conjunto cujo domínio é não vazio, então um ponto $a \in A$ é chamado de *ponto fixo* de $T$, se, e somente se, $a \in T(a)$.

## 1.3 Tópicos de Análise Convexa

As seguintes definições e proposições podem ser encontradas nos livros de VAN TIEL [34] ou ROCKAFELLAR [35].

Seja $C \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que o conjunto $C$ é *convexo* quando $(1-t)x + ty \in C$, sempre que $x, y \in C$ e $t \in [0, 1]$. Isto significa que o segmento de reta que une quaisquer dois pontos de $C$ ainda pertence a este conjunto.

Seja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ uma função cujo domínio é um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$. O epígrafo de $f$ é definido pelo conjunto

$$epi(f) := \{(x, \mu) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq \mu\}.$$

A função $f$ é convexa se $epi(f)$ é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^{n+1}$. Uma função $f$ é côncava quando $-f$ é convexa. O domínio efetivo ou simplesmente, domínio de uma função convexa em $C$, onde denotamos por $dom(f)$ é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \exists \mu \in \mathbb{R} : (x, \mu) \in epi(f)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < +\infty\}.$$

**Observação 1.1** *Uma função convexa $f$ definida em $C$ pode sempre ser estendida para uma função convexa em todo $\mathbb{R}^n$ fazendo $f(x) = +\infty$ para $x \notin C$.*

**Teorema 1.5 (Teorema 4.1 p. 25 de [35])** *Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo e $f : C \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função. Então $f$ é convexa se, e somente se,*

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y),$$

*para todo $x, y \in C$ e para todo $t \in [0, 1]$.*

Uma função convexa $f$ é própria se, $f(x) < +\infty$ para algum $x$ e $f(x) > -\infty$, para todo $x$, ou seja, uma função convexa $f$ é própria se, e somente se, o conjunto convexo $C = dom(f)$ é não vazio e a restrição de $f$ a $C$ é finita. Uma outra abordagem é que uma função convexa própria em $\mathbb{R}^n$ é uma função convexa real $f : C \to \mathbb{R}$ definida em um conjunto convexo $C \subset \mathbb{R}^n$ e estendendo para todo $\mathbb{R}^n$ fazendo $f(x) = +\infty$ para $x \notin C$.

**Teorema 1.6 (Teorema 4.2 p. 25 de [35])** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$. Então $f$ é convexa se, e somente se,*

$$f(tx + (1-t)y) < t\alpha + (1-t)\beta, \quad \forall t \in (0,1),$$

*onde $f(x) < \alpha$ e $f(y) < \beta$.*

**Teorema 1.7** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$. Então $f$ é convexa se, e só se,*

$$f(\sum_{i=1}^{m} t_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{m} t_i f(x_i),$$

*sempre que $t_i \geq 0$ $(i \in I_m)$ e $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$.*

**Teorema 1.8 (Teorema 4.6 p. 28 de [35])** *Para qualquer $f : C \to (-\infty, +\infty]$ convexa e $\alpha \in [-\infty, +\infty]$, os seguintes conjuntos*

$$\{x \in C; f(x) < \alpha\} \quad e \quad \{x \in C; f(x) \leq \alpha\}$$

*são convexos. Esses conjuntos são chamados de conjuntos de nível de $f$.*

**Teorema 1.9** *Suponhamos que o conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ seja convexo e a função $f : C \to [-\infty, +\infty]$ seja convexa. Então o conjunto de nível*

$$l(f, \alpha) = \{x \in C; f(x) \leq \alpha\}$$

*é convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.*

**Definição 1.2** *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$, onde $dom(f)$ é um conjunto convexo, é chamada de quaseconvexa se, para cada $x, y \in X$ e qualquer $t \in [0,1]$, valer que*

$$f(tx + (1-t)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

**Observação 1.2** *A definição acima é equivalente a dizer que o conjunto de nível da função $f$ é convexo. Além disso, é possível mostrar que toda função convexa é quaseconvexa, mas a recíproca não é verdadeira.*

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ e $f : S \to [-\infty, +\infty]$. Dizemos que a função $f$ é semicontínua inferior em $x \in S$ se

$$f(x) \leq \liminf_{k \to +\infty} f(x^k),$$

para toda sequência $\{x^k\} \subset S$ tal que $\{x^k\}$ converge para $x$. A função $f : S \to [-\infty, +\infty]$ é semicontínua inferior, quando é semicontínua inferior em cada ponto de $S$.

Esta condição pode ser expressa da seguinte maneira:

$$f(x) \leq \liminf_{y \to x} f(y) = \lim_{\epsilon \searrow 0} (\inf\{f(y) : \|y - x\| \leq \epsilon\}).$$

Analogamente $f : S \to [-\infty, +\infty]$ é chamada de semicontínua superior se,

$$f(x) \geq \limsup_{y \to x} f(y) = \lim_{\epsilon \searrow 0} (\sup\{f(y) : \|y - x\| \leq \epsilon\}),$$

isto é, $-f$ é semicontínua inferior.

**Proposição 1.5 (p.51 de [35])** *Seja $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$. Então as seguintes sentenças são equivalentes:*

*(a) A função $f$ é semicontínua inferior em $\mathbb{R}^n$;*

*(b) $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq \alpha\}$ é fechado para cada $\alpha \in \mathbb{R}$;*

*(c) O epígrafo de $f$ é fechado em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Sobre as funções semicontínuas inferiores, valem os seguintes resultados [34]:

**Proposição 1.6** *(a) O supremo de uma coleção de funções semicontínuas inferiores é semicontínua inferior;*

*(b) Se $L \subset \mathbb{R}^n$ é um compacto e $f : L \to (-\infty, +\infty]$ é semicontínua inferior, então $f$ assume valor mínimo;*

*(c) Se $f$ e $g$ são funções de $\mathbb{R}^n$ em $(-\infty, +\infty]$ e $\alpha > 0$ então $\alpha f$ e $f + g$ são funções semicontínuas inferiores.*

## 1.4 Tópicos de Teoria KKM

Esta seção tem como principal referência JACINTO [24].

Sejam $\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ um subconjunto finito do $\mathbb{R}^n$ e $X := conv\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$. O conjunto $X$ é chamado de simplex e os elementos $x_1, x_2, \cdots, x_m$ de vértices do simplex $X$. O seguinte teorema pode ser encontrado em KNASTER *et al.* [36], é conhecido como lema KKM (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz):

**Teorema 1.10** *Seja $S$ o conjunto de vértices de um simplex em $\mathbb{R}^n$ e $T : S \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ uma aplicação ponto-conjunto tal que:*

*(i) $T(x)$ é compacto para cada $x \in S$;*

*(ii) A envoltória convexa de todo subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_m\}$ de $S$ está contida em $\bigcup_{i=1}^{m} T(x_i)$.*

*Então $\bigcap_{x \in S} T(x) \neq \emptyset$.*

**Teorema 1.11 (Princípio KKM)** *Sejam $E$ um espaço localmente convexo, $A$ um subconjunto não vazio de $E$ e $T :\rightrightarrows E$ uma aplicação ponto-conjunto tais que*

*(i) $T(a)$ é fechado para cada $a \in A$;*

*(ii) A envoltória convexa de todo subconjunto finito $\{a_1, \cdots, a_m\}$ de $A$ está contida em $\bigcup_{i=1}^{m} T(a_i)$.*

*Então a família de conjuntos $\{T(a) : a \in A\}$ tem a propriedade da interseção finita.*

Em FAN [37], o autor generalizou o Lema KKM, garantido o resultado em espaços topológicos.

**Teorema 1.12** *Sejam $A$ um subconjunto não vazio de um espaço vetorial topológico de Hausdorff $X$ e $T : A \rightrightarrows X$ uma aplicação ponto-conjunto tais que:*

*(i) $T(a)$ é fechado em $X$, para todo $a \in A$;*

*(ii) existe um $a_0 \in A$ tal que $T(a_0)$ é compacto;*

*(iii) A envoltória convexa de todo subconjunto finito $\{a_1, \cdots, a_m\}$ de $A$ está contida em $\bigcup_{i=1}^{m} T(a_i)$.*

*Então $\bigcap_{a \in A} T(a) \neq \emptyset$.*

**Definição 1.3** *Sejam $X$ um espaço vetorial topológico de Hausdorff e $A$ um subconjunto não vazio de $X$. Uma aplicação ponto-conjunto $T : A \rightrightarrows X$ é chamada KKM se, para todo subconjunto finito $\{a_1, \cdots, a_m\}$ de $A$, vale que*

$$conv\{a_1, \cdots, a_m\} \subset \bigcup_{i=1}^{m} T(a_i).$$

**Observação 1.3** *Observe que uma aplicação ponto-conjunto $T$ é KKM quando satisfaz o item (iii) do Teorema 1.12.*

Afim de obter versões mais gerais do teorema KKM, da desigualdade minimax de Ky Fan e estudar o problema de existência de pontos de sela e a existência de soluções de problemas de desigualdades variacionais, CHANG e ZHANG [38] introduziram o conceito de aplicação KKM generalizada.

**Definição 1.4** *Sejam $A$ e $B$ dois subconjuntos não vazios de dois espaços vetoriais reais topológicos de Hausdorff $X$ e $Y$ respectivamente, tal que $B$ é convexo. Uma aplicação ponto-conjunto $G : A \rightrightarrows B$ é chamada de KKM generalizada se, para cada subconjunto finito $\{a_1, \cdots, a_p\}$ de $A$, existe um subconjunto finito $\{b_1, \cdots, b_p\}$ de $B$ tal que, para qualquer subconjunto $\{b_{i_1}, \cdots, b_{i_k}\} \subseteq \{b_1, \cdots, b_p\}$ vale*

$$co\{b_{i_1}, \cdots, b_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} G(a_{i_j}).$$

Note que, se uma aplicação $G : A \rightrightarrows B$ é KKM, então ela é KKM generalizada. Além disso, se $G : A \rightrightarrows B$ é uma aplicação KKM, então $y \in G(y)$, para cada $y \in A$, mas aplicações KKM generalizadas podem não ter esta propriedade. Quando $G : A \rightrightarrows B$ é KKM generalizada, então $G(y) \neq \emptyset$, para cada $y \in A$.

Com isso, em [38], os autores obtêm o seguinte resultado, generalizando o Teorema 1.12:

**Teorema 1.13** *Seja $E$ um espaço vetorial topológico de Hausdorff e $X$ um subconjunto convexo não vazio de $E$. Suponha que $T : X \rightrightarrows E$ seja uma aplicação ponto-conjunto com valores fechados e que exista um $x_0 \in X$ tal que $G(x_0)$ seja compacto. Então $\bigcap_{x \in X} T(x) \neq \emptyset$ se, e somente se, $T$ é uma aplicação KKM generalizada.*

TIAN [39] também generaliza o teorema de FAN [40] e a desigualdade minimax de Ky Fan, introduzindo novas condições de continuidade e fecho, que são chamada de propriedades de transferência de fechos (transfer closedness) e transferência de continuidade (transfer continuities).

**Definição 1.5** *Sejam $A$ e $B$ dois subconjuntos não vazios de um dois espaços vetoriais reais topológicos de Hausdorff $X$ e $Y$ respectivamente. Uma aplicação ponto-conjunto $G : A \rightrightarrows B$ possui a propriedade de transferência de fechos de imagem se, para cada $a \in A$, $b \notin G(a)$, existe um elemento $a' \in A$ tal que $b \notin cl_B G(a')$.*

JACINTO e SCHEIMBERG [9] generalizaram o princípio KKM, Teorema 1.11

**Teorema 1.14** *Sejam $A, B$ dois subconjuntos não vazios de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff $X$ sendo $B$ convexo. Considere $T : A \rightrightarrows B$. Então, $cl_B G : A \rightrightarrows B$ é KKM generalizada se, e somente se, a família dos conjuntos $\{cl_B G(a) : a \in A\}$ tem a Propriedade da Interseção Finita (PIF).*

Uma importante aplicação do Teorema 1.14 e uma importante contribuição à teoria KKM foi dada em JACINTO e SCHEIMBERG [9], que consiste na generalização do Lema FKKM.

**Teorema 1.15** *Sejam $A$ e $B$ subconjuntos não vazios de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff $X$ tal que $B$ é convexo. Suponha que a aplicação $G : A \rightrightarrows B$ verifica as seguintes condições:*

*(i) $cl_B G : A \rightrightarrows B$ é uma aplicação KKM generalizada;*

*(ii) $G$ possui a propriedade de transferência de fechos de imagem;*

*(iii) existe um subconjunto finito $A_0$ de $A$ tal que $\bigcap_{z \in A_0} cl_B G(z)$ é compacto;*

*então,*

$$\bigcap_{a \in A} G(a) \neq \emptyset.$$

O Teorema 1.15 será de fundamental importância para mostrarmos o nosso resultado de existência de solução para problemas de quase-equilíbrio, no Capítulo 5.

# Capítulo 2

# Problemas de Equilíbrio

Nesta seção apresentamos conceitos e propriedades sobre Problemas de Equilíbrio. Também adaptamos algumas propriedades da literatura que vamos usar ao longo deste Capítulo.

## 2.1 Problema de Equilíbrio (EP)

Seja $X$ um espaço vetorial topológico de Haussdorff. Seja $K$ um subconjunto não vazio, fechado e convexo de $X$ e seja $f : K \times K \to \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio, isto é, $f(x, x) = 0$, $\forall x \in K$. O problema de equilíbrio (EP), consiste em

$$EP(f, K) \begin{cases} \text{encontrar } \bar{x} \in K, \text{ tal que} \\ f(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in K. \end{cases} \tag{2.1}$$

Denotamos o conjunto solução do problema de equilíbrio por $S(f, K)$.

O problema de equilíbrio contém, como casos particulares, problemas de otimização convexa, de complementaridade, de desigualdades variacionais, de equilíbrio de Nash, de ponto fixo, etc. Exibimos a seguir algumas formulações de casos particulares de EP.

#### Problema de Otimização

Seja $\varphi : K \to \mathbb{R}$ uma função convexa. O problema de otimização convexa consiste em encontrar $\bar{x} \in K$ tal que $\varphi(\bar{x}) \leq \varphi(y)$, $\forall y \in K$. Definindo $f : K \times K \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \varphi(y) - \varphi(x)$, obtemos que $\bar{x} \in K$ é solução de EP, se, e somente se, é solução do Problema de Otimização Convexa.

**Problema do Ponto Fixo**

Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, com seu produto interno denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $T : \mathcal{H} \to \mathcal{P}(\mathcal{H})$ um operador ponto conjunto, tal que, para cada $x \in K$, $T(x)$ seja um subconjunto não vazio, fechado e fracamente compacto de $K$. O Problema do Ponto Fixo (PPF) consiste em

$$\text{encontrar} \quad \bar{x} \in K \quad \text{tal que} \quad \bar{x} \in T(\bar{x}).$$

Definindo $f : K \times K \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = \max_{u \in T(x)} \langle x - u, y - x \rangle$. Então $\bar{x} \in K$ é solução de PPF, se, e somente se, é solução de EP.

**Problema de Pontos de Sela**

Seja $\phi : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$. O Problema de Pontos de Sela consiste em

$$\begin{cases} \text{encontrar } (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in K_1 \times K_2, \text{ tal que} \\ \phi(\bar{x}_1, y_2) \leq \phi(y_1, \bar{x}_2), \text{ para todo } (y_1, y_2) \in K_1 \times K_2. \end{cases} \tag{2.2}$$

Defina $K := K_1 \times K_2$ e $f : K \times K \to \mathbb{R}$ por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \phi(y_1, x_2) - \phi(x_1, y_2)$. Então $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é solução do PPS, se, e só se, é solução do EP.

Para mais detalhes veja, e. g., BIGI *et al.* [41], BLUM e OETTLI [23], FAN [37], IUSEM *et al.* [6], IUSEM e SOSA [42] e suas referências.

**Definição 2.1** *Uma bifunção $\psi : K \times K \to \mathbb{R}$ é chamada de:*

*(i) Fortemente monótona em $K$ com módulo $\beta > 0$, se,*

$\psi(x,y) + \psi(y,x) \leq -\beta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in K.$

*(ii) Monótona em $K$, se,*

$\psi(x,y) + \psi(y,x) \leq 0, \quad \forall x, y \in K.$

*(iii) Pseudomonótona em $K$, se,*

$\forall x, y \in K, \quad \psi(x,y) \geq 0 \Rightarrow \psi(y,x) \leq 0.$

Note que (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Denotamos por $x^k \rightharpoonup x$, a convergência fraca de $\{x^k\}$ para $x$, ou seja, para cada $x^* \in X^*$, $\langle x^*, x^k \rangle \to \langle x^*, x \rangle$, quando $k \to +\infty$.

**Definição 2.2** *Uma função $\varphi : K \to \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua superior em $x \in K$, se, para toda sequência $\{x^k\} \subset K$ tal que $x^k \rightharpoonup x$ $(k \to +\infty)$, tivermos*

$$\limsup_{k \to +\infty} \varphi(x^k) \leq \varphi(x).$$

*A função é chamada de fracamente semicontínua superior, se ela é fracamente semicontínua superior em cada ponto $x \in K$.*

**Definição 2.3** *Uma função $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua inferior em $x \in K$, se, para toda sequência$\{x^k\} \subset K$ tal que $x^k \rightharpoonup x$ $(k \to +\infty)$, tivermos*

$$\liminf_{k \to +\infty} \varphi(x^k) \geq \varphi(x).$$

*A função é chamada de fracamente semicontínua inferior, se ela é fracamente semicontínua inferior em cada ponto $x \in K$.*

As principais hipóteses para resultados de existência para Problema de Equilíbrio são IUSEM *et al.* [6]:

(P1) $f(\cdot, y) : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é hemicontínua superior para todo $y \in K$.

(P2) $f(x, \cdot) : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é pseudoconvexa e semicontínua inferior para todo $x \in K$.

(P3) $f$ é monótona.

(P3') $f$ é pseudomonótona.

(P3") $f$ é propriamente quasemonótona.

(P5) Para toda sequência $\{x^n\} \subset K$ with $\lim_{n \to +\infty} \|x^n\| = +\infty$, existem $u \in K$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $f(x^n, u) \leq 0$, $\forall n \geq n_0$.

O seguinte teorema de existência de solução pode ser encontrado em IUSEM *et al.* [6].

**Teorema 2.1** *Seja $f : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio. Suponha que $f$ satisfaz P1, P2, P5 e qualquer uma entre P3, P3' ou P3". Então $S(f, K) \neq \emptyset$.*

Neste capítulo apresentamos um estudo sobre o estado da arte para Problemas de Equilíbrio. Resultados de existência e métodos do tipo Tikhonov para EP.

### 2.1.1 Métodos do Tipo Tikhonov para EP

O método de regularização do tipo Tikhonov é uma ferramenta conhecida usada para lidar com problemas mal postos, por exemplo, em otimização convexa, desigualdade variacional e equilíbrio.

A ideia principal do método consiste em perturbar a bifunção, adicionando um parâmetro de regularização $\gamma > 0$ e uma outra bifunção $g : K \times K \to \mathbb{R}$, transformando o problema de equilíbrio de $f$ no seguinte problema:

Encontrar $\bar{x} \in K$ tal que

$$f_\gamma(\bar{x}, y) := f(\bar{x}, y) + \gamma g(\bar{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in K, \tag{2.3}$$

onde $\gamma > 0$, $g$ é uma bifunção de equilíbrio fortemente monótona em $K$.

Denotamos a solução deste problema por $x(\gamma)$ e analizamos o que acontece quando $\gamma \to 0$. O conjunto $\{x(\gamma); \gamma > 0\}$ é chamado de tragetória de Tikhonov.

A resolução de problema de equilíbrio usando regularização do tipo Tikhonov em $\mathbb{R}^n$ foi trabalhada por HUNG e MUU [10], onde são consideradas as seguintes hipóteses sobre a bifunção $f$.

A3) Existe um compacto não vazio $B \subset \mathbb{R}^n$ e um vetor $y_0 \in B \cap K$ tal que

$$f(x, y_0) < 0, \quad \forall x \in K \backslash B.$$

A seguinte hipótese é considerada para garantir que qualquer tragetória de Tikhonov convirja para a solução do problema.

H4') $\exists \delta > 0$; $\|g(x,y)\| \leq \delta \|x - x^g\| \|y - x\|$, $\forall x, y \in K$.

No trabalho de OLIVEIRA *et al.* [8], a regularização do tipo Tikhonov foi estendida para espaços de Hilbert. Além disso, as seguintes hipóteses são consideradas:

(H4) $\limsup\limits_{\|y\| \to +\infty} \dfrac{|g(x,y)|}{\|y - x\|} < +\infty \quad \forall x \in K.$

(H5) Para toda sequência $\{x^n\} \subset K$ with $\lim_{n \to +\infty} \|x^n\| = +\infty$, existem $u \in K$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $f(x^n, u) \leq 0$, $\forall n \geq n_0$.

As hipóteses sobre as bifunções $g$ e $f$ de OLIVEIRA *et al.* [8], estendem as anteriores do trabalho de HUNG e MUU [10] e é provado a relação entre a limitação da sequência com o conjunto solução do problema.

Em HAO [12], o autor trabalha com a regularização do tipo Tikhonov para problemas de desigualdades variacionais. Se $F : C \to \mathbb{R}^n$, então o problema de desigualdade variacional $DV(C, F)$ consiste em encontrar $\bar{x} \in C$ tal que

$$\langle F(\bar{x}), y - x \rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

Para cada $\epsilon > 0$, coloca-se $F_\epsilon = F + \epsilon I$, onde $I$ é a aplicação identidade em $\mathbb{R}^n$. Se o problema $DV(C, F_\epsilon)$ possui única solução, denotada por $x(\epsilon)$, então o conjunto $\{x(\epsilon) : \epsilon > 0\}$ é chamado de trajetória Tikhonov de $DV(C, F)$. O autor mostra que, sobre certas condições, o limite $\lim_{\epsilon \searrow 0} x(\epsilon)$ existe e é solução de $DV(C, F)$.

O método de regularização do Tipo Tikhonov de [12] consiste em calcular uma sequência de pontos $\{x(\epsilon_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ ($\epsilon_k \to 0^+$ quando $k \to +\infty$) na trajetória Tikhonov e tomar o limite $\lim_{k \to +\infty} x(\epsilon_k)$.

Em HUNG e MUU [10], a regularização do tipo Tikhonov é estendida para problemas de equilíbrio no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. A ideia principal do método para problemas de equilíbrio, consiste em perturbar a bifunção, adicionando um parâmetro de regularização $\epsilon > 0$ e uma outra bifunção $g : C \times C \to \mathbb{R}$, regularizando o problema de equilíbrio de $f$, com isso é obtido o seguinte problema: encontrar $\bar{x} \in C$ tal que

$$f_\epsilon(\bar{x}, y) := f(\bar{x}, y) + \epsilon g(\bar{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C, \tag{2.4}$$

onde $g$ é uma bifunção de equilíbrio fortemente monótona em $C$. Denotando a solução deste problema por $x(\epsilon)$ e, assim como no caso $DV(C,F)$, é analizado o que acontece quando $\epsilon \to 0$. Além disso, em HUNG e MUU [10] são assumidas certas condições para garantir que qualquer trajetória Tikhonov convirja para a solução do problema de equilíbrio original.

Em ALLECHE *et al.* [13] os autores trabalham com o método de regularização do tipo Tikhonov para problemas de equilíbrio em espaços de Banach. Os autores mostram que bifunções estritamente pseudomonótonas podem ser usadas como bifunções de regularização, assim como bifunções fortemente monótonas. Como aplicação, estabelecem a relação entre desigualdades quase-hemivariacionais e problemas de equilíbrio. A principal ferramente para o resultado de existência de solução para o problema de equilíbrio regularizado, quando $f$ é pseudomonótona, de ALLECHE *et al.* [13] é o Lema FKKM, FAN [37].

Em OLIVEIRA *et al.* [8], a regularização do tipo Tikhonov para problemas de equilíbrio clássico é estudada no contexto de espaços de Hilbert. Os autores exigem uma condição mais fraca que HUNG e MUU [10], sobre a bifunção $g : C \times C \to \mathbb{R}$. Eles mostram a existência de solução para o subproblema $f_{\lambda_k}$ usando o teorema de existência de solução de IUSEM *et al.* [6], IUSEM [7] e IUSEM e SOSA [42]. Os autores garantem que, o problema possui solução se, e somente se, a sequência de soluções do subproblema for limitada.

Como o estudo de IUSEM *et al.* [6] está restrito ao (PE), para abordar a existência de (PQE) via regularizações do tipo Tikhonov, nos deparamos com a segunda principal fonte de motivação: a obtenção de resultados de existência para problemas PQE bem comportados. Após um levantamento bibliográfico, obtivemos uma alternativa para superar essa dificuldade, o estudo da existência de solução para o PQE usando os resultados de JACINTO e SCHEIMBERG [9].

No trabalho de ALLECHE *et al.* [13], a regularização em espaços de Banach é considerada, porém a hipótese exigida é a relaxação natural da hipótese A3) de HUNG e MUU [10] e dependerá de um compacto $B$.

Seja $X$ um espaço de Banach e $K \subset X$ um conjunto limitado e fechado. Sejam $f, g : K \times K \to \mathbb{R}$ bifunções de equilíbrio. Sejam $SEP(K, f)$ e $SREP(K, f_{\epsilon_n})$ o conjunto solução do problema de equilíbrio e do problema de equilíbrio regularizado, respectivamente.

**Teorema 2.2** *Seja* $\{\epsilon_n\}$ *uma sequência de reais positivos tais que* $\lim_{n\to+\infty} \epsilon_n = 0$ *e suponha que valem as seguintes condições:*

*1.* $f$ *e* $g$ *são pseudomonótona em* $K$*;*

*2.* $f + \epsilon_n g$ *é quaseconvexa na segunda variável em* $K$*, para cada* $n \in \mathbb{N}$*;*

*3. existe um subconjunto compacto* $B \subset K$ *e um* $y_0 \in C$ *tal que* $f(x, y_0) < 0$*, para cada* $x \in K \backslash B$*;*

*4. $f$ e $g$ são semicontínua superior na primeira variável em $C$.*

*Então qualquer ponto de acumulação $x^* \in K$ da sequência $\{x_n\}$ com $x_n \in SREP(K, f_{\epsilon_n}) \cap B$ para cada $n \in \mathbb{N}$, é uma solução do problema de equilíbrio:*

$$\text{encontrar } x^* \in SEP(K, f), \quad \text{tal que} \quad g(x^*, y) \geq 0, \quad \forall y \in SEP(K, f).$$

*Supondo que também valem as seguintes hipóteses:*

*1. $g$ é estritamente pseudomonótona em $K$;*

*2. existe $A \subset B$ tal que $g(x, y_0) < 0$, para cada $x \in K \backslash A$.*

*Então, o problema regularizado possui solução, para cada $n \in \mathbb{N}$ e qualquer sequência $\{x_n\}$, com $x_n \in SREP(K, f_{\epsilon_n}), \forall n \in \mathbb{N}$, converge para a solução única do problema de equilíbrio.*

Observe que, o principal teorema de ALLECHE *et al.* [13] para regularização do tipo Tikhonov exige a existência de um compacto $B \subset K$ e da interseção do conjunto solução com esse compacto $B$.

## 2.2 Uma Regularização do Tipo Tikhonov para o Problema de Equilíbrio

Para o problema $EP(f, K)$, consideramos a seguinte bifunção regularizada $f_\gamma : K \times K \to \mathbb{R}$:

$$f_\gamma(x, y) = f(x, y) + \gamma g(x, y), \tag{2.5}$$

onde $\gamma > 0$ e $g : K \times K \to \mathbb{R}$ é uma bifunção de equilíbrio fortemente monótona de módulos $\beta > 0$. Veja que $f_\gamma(x, x) = 0 \ \forall x \in K$.

Algumas das seguintes hipóteses serão consideradas para $f$ ou $g$

Seja $\psi : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio.

(B0) $\text{int}(K) \neq \emptyset$.

(B1) $\psi(\cdot, y) : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é fracamente semicontínua superior para todo $y \in K$.

(B2) $\psi(x, \cdot) : K \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa e fracamente semicontínua inferior para todo $x \in K$.

(B3) $\psi$ é fortemente monótona de módulo $\beta > 0$.

(B4) $\limsup\limits_{\|y\| \to +\infty} \dfrac{|\psi(x, y)|}{\|y - x\|} < +\infty \quad \forall x \in K$.

(B5) Para toda sequência $\{x^n\} \subset K$ with $\lim_{n \to +\infty} \|x^n\| = +\infty$, existem $u \in K$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\psi(x^n, u) \leq 0$, $\forall n \geq n_0$.

O seguinte Lema, será útil para provar a existência de solução do problema regularizado, quando $f$ é pseudomonótona.

**Lema 2.1 (Lema FKKM, [37])** *Sejam $E$ um espaço vetorial real topológico de Haussdorff, $A$ um subconjunto não vazio de $E$ e $T : A \to \mathcal{P}(E)$ um operador ponto conjunto que satisfaz:*

*(i) $T(a)$ é fechado, $\forall a \in A$;*

*(ii) $\exists a \in A$ tal que, $T(a)$ é compacto;*

*(iii) Para todo subconjunto finito $\{a_1, \cdots, a_p\} \subset A$, temos, $conv\{a_1, \cdots, a_p\} \subset \bigcup_{i=1}^{p} T(a_i)$.*

*Então $\bigcap_{a \in A} T(a) \neq \emptyset$.*

Dizemos que o operador $T : A \to \mathcal{P}(E)$ é KKM quando satisfaz (iii) do Lema 2.1.

A seguinte propriedade foi estabelecida em IUSEM [7], quando a bifunção é definida em todo o espaço $X$.

**Lema 2.2** *Sejam $B$ e $K$ subconjuntos fechados e convexos de $X$. Considere as funções $f(x, \cdot) : K \to \mathbb{R}$ convexa, para todo $x \in K$, satisfazendo $f(x, x) = 0$, $\forall x \in K$, e, $h : K \to \mathbb{R}$ convexa.*

*(i) Se $\bar{x}$ minimiza $h$ em $K \cap B$ e $\bar{x}$ pertence ao interior de $B$, então $\bar{x}$ minimiza $h$ em $K$.*

*(ii) Se $\bar{x}$ resolve o problema $EP(f, K \cap B)$ e $\bar{x}$ pertence ao interior de $B$, então $\bar{x}$ resolve o problema $EP(f, K)$.*

*Demonstração:* **(i)** Se $\bar{x}$ minimiza $h$ em $K \cap B$, então $h(\bar{x}) \leq h(z)$, $\forall z \in K \cap B$. Queremos mostrar que $h(\bar{x}) \leq h(y)$, $\forall y \in K$. Suponha, por absurdo que, existe um $y \in K$ tal que $h(y) < h(\bar{x})$. Isso implica $y \neq \bar{x}$.

$K$ é um conjunto convexo e $h$ é uma função convexa, logo $ty + (1-t)\bar{x} \in K$, $\forall t \in (0, 1)$ e, já que $\bar{x}$ pertence ao interior de $B$, existe um $\epsilon > 0$ tal que, $\forall t \in (0, \epsilon / \|y - \bar{x}\|)$, temos $ty + (1-t)\bar{x} \in B$ e

$$
\begin{aligned}
h(ty + (1-t)\bar{x}) &\leq th(y) + (1-t)h(\bar{x}) \\
&< th(\bar{x}) + (1-t)h(\bar{x}) \\
&= h(\bar{x}).
\end{aligned}
$$

Isso contradiz o fato que $\bar{x}$ minimiza $h$ em $K \cap B$. Portanto $h(\bar{x}) \leq h(y)$, $\forall y \in K$.

**(ii)** Se $\bar{x}$ resolve o problema $EP(f, K \cap B)$, então

$$f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K \cap B.$$

Defina $h : K \to \mathbb{R}$ por $h(y) = f(\bar{x}, y)$ $(y \in K)$. Note que

$$h(y) = f(\bar{x}, y) \geq 0 = f(\bar{x}, \bar{x}) = h(\bar{x}), \quad \forall y \in K \cap B.$$

Isto é, $\bar{x}$ minimiza $h$ em $K \cap B$. Como, por hipótese $h$ é uma função convexa e $\bar{x}$ pertence ao interior de $B$. Podemos aplicar o item (i) para obter que $\bar{x}$ minimiza $h$ em $K$. Logo

$$h(y) \geq h(\bar{x}), \quad \forall y \in K,$$

isto é,

$$f(\bar{x}, y) = h(y) \geq h(\bar{x}) = f(\bar{x}, \bar{x}) = 0, \quad \forall y \in K.$$

Portanto, podemos concluir que $\bar{x}$ resolve o problema $EP(f, K)$. □

**Proposição 2.1 (BRÉZIS [43], pg. 69)** *Suponha que $X$ é um espaço de Banach reflexivo e seja $\{x^k\}$ uma sequência limitada em $X$. Então existe uma subsequência $\{x^{k_j}\}$ de $\{x^k\}$ que converge na topologia fraca.*

**Proposição 2.2 (BRÉZIS [43], pg. 71)** *Seja $X$ um espaço de Banach reflexivo. Seja $C \subset X$ um subconjunto fechado, limitado e convexo de $X$. Então $C$ é fracamente compacto.*

**Proposição 2.3 (PASCALLI e SBURLAN [44], pg. 5)** *Seja $X$ um espaço de Banach e $H : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função própria, convexa e semicontínua inferior. Se $x_0 \in$ int(dom(H)), então $\partial H(x_0) \neq \emptyset$.*

**Corolário 2.1** *Seja $X$ um espaço de Banach reflexivo, $K \subset X$ um conjunto convexo fechado tal que int$(K) \neq \emptyset$ e $h : K \to \mathbb{R}$ uma função convexa, fracamente semicontínua inferior. Então $\partial h(x_0) \neq \emptyset$, para todo $x_0 \in$ int(K).*

*Demonstração:* Defina $H : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ por $H(x) = h(x)$, se $x \in K$ e $H(x) = +\infty$, se $x \in X \backslash K$. Então $H$ é própria, pois $\text{dom}(H) = K \supset \text{int}(K) \neq \emptyset$. $H$ é convexa e semicontínua inferior, pois $h$ é convexa, fracamente semicontínua inferior e $K$ é convexo fechado. Se $x_0 \in \text{int}(K)$, então $x_0 \in \text{int}(\text{dom}(H))$. Pela proposição 2.3 e pela definição de $H$, $\partial h(x_0) = \partial H(x_0) \neq \emptyset$. □

**Lema 2.3** *Sejam $f$ e $g$ bifunções de equilíbrio satisfazendo B1 e B2. Então $\forall \gamma > 0$, a bifunção $f_\gamma$ satisfaz B1 e B2.*

*Demonstração:* Dado $\gamma > 0$ e $x, y \in K$.

i)

Suponha que $f$ e $g$ satisfazem B1 e seja $\{x^k\} \subset K$ uma sequência tal que $\{x^k\}$ converge fracamente para $\bar{x} \in K$. Temos,

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to+\infty} f_\gamma(x^k, y) &= \limsup_{k\to+\infty}(f(x^k, y) + \gamma g(x^k, y)) \\
&\leq \limsup_{k\to+\infty} f(x^k, y) + \limsup_{k\to+\infty} \gamma g(x^k, y) \\
&\leq f(\bar{x}, y) + \gamma g(\bar{x}, y) \\
&= f_\gamma(\bar{x}, y).
\end{aligned}$$

ii) Assumindo que $f$ e $g$ satisfazem B2. Sabemos que $f(x,\cdot)$ e $\gamma g(x,\cdot)$ são funções convexas e a soma de funções convexas é convexa. Portanto $f_\gamma(x,\cdot)$ é convexa. Seja $\{y^k\} \subset K$ uma sequência tal que $\{y^k\}$ converge fracamente para $\bar{y} \in K$. Temos,

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to+\infty} f_\gamma(x, y^k) &\geq \liminf_{k\to+\infty}(f(x, y^k) + \gamma g(x, y^k)) \\
&\geq \liminf_{k\to+\infty} f(x, y^k) + \liminf_{k\to+\infty} \gamma g(x, y^k) \\
&\geq f(x, \bar{y}) + \gamma g(x, \bar{y}) \\
&= f_\gamma(x, \bar{y}).
\end{aligned}$$

□

**Teorema 2.3 (IUSEM *et al.* [6], Teorema 4.3)** *Seja $\psi : K \times K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio. Suponha que $\psi$ é pseudomonótona, satisfazendo B1, B2 e B5, então $S(\psi, K) \neq \emptyset$.*

**Lema 2.4** *Suponha que $f$ é uma bifução de equilíbrio monótona e $g$ é uma bifunção de equilíbrio fortemente monótona de módulos $\beta > 0$. Então $f_\gamma$ é fortemente monótona de módulo $\gamma\beta > 0$.*

*Demonstração:* Sejam $x, y \in K$ e $\gamma > 0$.

$$\begin{aligned}
f_\gamma(x, y) + f_\gamma(y, x) &= f(x, y) + \gamma g(x, y) + f(y, x) + \gamma g(y, x) = \\
&= f(x, y) + f(y, x) + \gamma\big(g(x, y) + g(y, x)\big) = \\
&\leq 0 - \gamma\beta \|x - y\|^2 .
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Assim, $f_\gamma$ é fortemente monótona de módulo $\gamma\beta$, em particular, monótona. □

**Lema 2.5** *Supondo B0 e assumindo que $f$ é monótona satisfazendo B1-B2 e $g$ satisfazendo B1, B2 e B3. Então $f_\gamma$ satisfaz B5.*

*Demonstração:* Seja $\{x^n\} \subset K$ uma sequência tal que $\|x^n\| \to +\infty$. Queremos mostrar que $\exists u \in K$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f_\gamma(x^n, u) \leq 0$, $\forall n \geq n_0$. Por hipótese, $\text{int}(K) \neq \emptyset$. Seja $u \in \text{int}(K)$. Pelo Lema 2.4, temos que $f_\gamma$ é fortemente monótona de módulo $\gamma\beta$, isto é,

$$f_\gamma(x^n, u) + f_\gamma(u, x^n) \leq -\gamma\beta \|x^n - u\|^2 .$$

Logo

$$f_\gamma(x^n, u) \leq -f_\gamma(u, x^n) - \gamma\beta \|x^n - u\|^2 .$$

A partir de agora, defina $h : K \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(y) = f_\gamma(u, y)$. então

$$f_\gamma(x^n, u) \leq -h(x^n) - \gamma\beta \|x^n - u\|^2 . \tag{2.7}$$

Como $u \in \text{int}(K)$ e por B2, pelo corolário 2.1, existe $z^* \in \partial h(u)$. Assim, $\langle z^*, x^n - u \rangle \leq h(x^n) - h(u)$.

$$\begin{aligned} -h(x^n) &\leq \langle z^*, u - x^n \rangle - h(u) \\ &\leq \|z^*\| \, \|u - x^n\| - h(u) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Usando o fato que $h(u) = f_\gamma(u, u) = 0$, as desigualdades (2.7) e (2.8), temos

$$\begin{aligned} f_\gamma(x^n, u) &\leq -h(x^n) - \gamma\beta \|x^n - u\|^2 \\ &\leq \|z^*\| \, \|u - x^n\| - \gamma\beta \|x^n - u\|^2 \\ &= \|x^n - u\| \big( \|z^*\| - \gamma\beta \|x^n - u\| \big). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Passando ao limite quando $\|x^n\| \to +\infty$, concluímos que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_\gamma(x^n, u) = -\infty$.

Portanto, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $f_\gamma(x^n, u) \leq 0$. Assim, podemos concluir que a hipótese B5 é satisfeita. □

**Teorema 2.4** *Supondo B0, assumindo que $f$ satisfaz B1, B2 e monotonicidade, e $g$ satisfaz B1, B2 e B3. Então, para qualquer $\gamma > 0$, $EP(f_\gamma, K)$ possui solução única, denotada por $x(\gamma)$.*

*Demonstração:* Pelo Lema 2.3, $f_\gamma$ satisfaz B1 e B2, o Lema 2.4 garante que $f_\gamma$ é monótona e pelo Lema 2.5 temos que $f_\gamma$ satisfaz B5.

Aplicando o Teorema 2.3 para $f_\gamma$, concluímos que $S(f_\gamma, K) \neq \emptyset$.

Para mostrar que a solução é única, suponha que $\tilde{x}$ e $\hat{x}$ são soluções de $EP(f_\gamma, K)$. Segue que:

$$0 \leq f(\tilde{x}, \hat{x}) + \gamma g(\tilde{x}, \hat{x}) \tag{2.10}$$

$$0 \leq f(\hat{x}, \tilde{x}) + \gamma g(\hat{x}, \tilde{x}) \tag{2.11}$$

Somando (2.10) e (2.11), obtemos

$$0 \leq f_\gamma(\hat{x}, \tilde{x}) + f_\gamma(\tilde{x}, \hat{x}) + \gamma(g(\hat{x}, \tilde{x}) + g(\tilde{x}, \hat{x})) \leq 0 - \gamma\beta \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 \leq 0. \tag{2.12}$$

Portanto, $\hat{x} = \tilde{x}$. $\square$

Consideramos uma sequência de parâmetros de regularização $\gamma_k$ e construímos uma sequência de soluções $\{x^k\} := \{x(\gamma_k)\} \subset K$, do problema

$$EP(f_{\gamma_k}, K) \begin{cases} \text{encontrar } x(\gamma_k) \in K, \text{ tal que} \\ f_{\gamma_k}(x(\gamma_k), y) = f(x(\gamma_k), y) + \gamma_k g(x(\gamma_k), y) \geq 0, \forall y \in K, \end{cases} \tag{2.13}$$

Abaixo, mostraremos o principal resultado para o caso monótono.

**Teorema 2.5** *Suponha que $f$ é monótona satisfazendo as condições B1-B2 e $g$ satisfazendo B1-B4. Se $\{x^k\}$ é uma sequência de soluções dos problemas $EP(f_{\gamma_k}, K)$ e $\gamma_k \to 0$, então as seguintes sentenças são equivalentes:*

*(i) A sequência $\{x^k\}$ é limitada.*

*(ii) O conjunto solução $S(f, K)$ é não vazio.*

*Demonstração:* A sequência é bem definida pelo Teorema 2.4. Suponha que a sequência $\{x^k\} \subset K$ é limitada. Dado que $X$ é um espaço de Banach reflexivo, pela Proposição 2.1, temos que existe $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ tal que $x^{k_j} \rightharpoonup \bar{x}$ $(j \to +\infty)$. O conjunto $K$ é fechado e convexo, logo fracamente fechado, logo $\bar{x} \in K$. Temos que

$$f_{\gamma_{k_j}}(x^{k_j}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Assim, $0 \leq f_{\gamma_{k_j}}(x^{k_j}, y) = f(x^{k_j}, y) + \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, y)$. Passando ao limite, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{j \to +\infty} [f(x^{k_j}, y) + \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, y)] \\ &\leq \limsup_{j \to +\infty} f(x^{k_j}, y) + \limsup_{j \to +\infty} \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, y). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $\gamma_{k_j} \to 0$, $f$ e $g$ satisfazem B1, segue que $f(\bar{x}, y) \geq 0$, $\forall y \in K$. Portanto $S(f, K)$ é não vazio.

Reciprocamente, suponha que $S(f, K) \neq \emptyset$. Seja $\{x^k\}$ uma sequência de soluções de $EP(f\gamma_k, K)$ e $\bar{x} \in S(f, K)$, então

$$\begin{aligned} &0 \leq f_{\gamma_k}(x^k, \bar{x}) = f(x^k, \bar{x}) + \gamma_k g(x^k, \bar{x}) \quad \text{e} \\ &0 \leq f(\bar{x}, x^k). \end{aligned}$$

Somando ambas as desigualdades e usando a monotonicidade de $f$, temos

$$0 \leq f(x^k, \bar{x}) + f(\bar{x}, x^k) + \gamma_k g(x^k, \bar{x}) \leq \gamma_k g(x^k, \bar{x})$$

Logo $g(x^k, \bar{x}) \geq 0$, portanto

$$g(\bar{x}, x^k) \leq g(\bar{x}, x^k) + g(x^k, \bar{x}) \leq -\beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|^2,$$

então,

$$\frac{g(\bar{x}, x^k)}{\|x^k - \bar{x}\|} \leq -\beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|,$$

isto é,

$$-\frac{g(\bar{x}, x^k)}{\|x^k - \bar{x}\|} \geq \beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|.$$

Como $g$ é uma bifunção monótona e $g(x^k, \bar{x}) \geq 0$, segue que

$$\frac{|g(\bar{x}, x^k)|}{\|x^k - \bar{x}\|} = -\frac{g(\bar{x}, x^k)}{\|x^k - \bar{x}\|} \geq \beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|.$$

Suponha que a sequência $\{x^k\}$ seja ilimitada. Neste caso, existe $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ tal que $\left\| x^{k_j} \right\| \longrightarrow +\infty$, logo

$$\limsup_{j \to +\infty} \frac{|g(\bar{x}, x^{k_j})|}{\|x^{k_j} - \bar{x}\|} \geq \limsup_{j \to +\infty} \beta \left\| x^{k_j} - \bar{x} \right\| = +\infty.$$

Uma contradição com B4. Portanto a sequência $\{x^k\}$ é limitada.

$\square$

Sabemos que no caso em que $f$ é monótona, o problema perturbado $EP(f_{\gamma_k}, K)$ é fortemente monótono. Logo $EP(f_{\gamma_k}, K)$ possui solução única. Já quando $f$ é pseudomonótona, o problema regularizado pode não ser fortemente monótono nem pseudomonótono. Ao longo deste capítulo, $K_n$ denotará a interseção de $K$ com a bola $B(0, n)$ de raio $n$ com centro na origem. Note que $K_n$ é convexo, fracamente fechado e limitado, porque está contido em $B(0, n)$, portanto é fracamente compacto pela Proposição 2.2.

O próximo Lema estende o Lema 3.1 de [8], de espaços de Hilbert para espaços de Banach reflexivos. Observe que, na hipótese do Lema pedimos a convexidade, mas na prova precisamos apenas que conjunto $\{y \in K; f_\gamma(x, y) < 0\}$ seja convexo $\forall x \in K$, em vez da convexidade de $f_\gamma(x, \cdot)$. Este Lema pode ser uma importante ferramenta para trabalhos futuros. Note também que não é usada a monotonicidade das bifunções, além disso, é possível usar o seguinte Lema, para provar a existência de solução do problema regularizado quando $K$ é limitado.

**Lema 2.6** *Suponha que $f$ e $g$ satisfazem B1 e B2. Então, para cada $\gamma > 0$, existe $\bar{x} \in K_n$ tal que $f_\gamma(\bar{x}, y) \geq 0$, para todo $y \in K_n$.*

*Demonstração:* Pelo Lema 2.3, $f_\gamma$ satisfaz B1 e B2. Fixe $\gamma > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Defina $T_n : K_n \to \mathcal{P}(X)$ por

$$T_n(y) := \{x \in K_n : f_\gamma(x, y) \geq 0\}.$$

Mostraremos que $T_n$ satisfaz as hipóteses do Lema 2.1. Usaremos aqui o fato que $X$ é um espaço de Banach reflexixo com a topologia fraca, que certamente o torna um espaço vetorial topológico de Haussdorff. Para isso, seja $y \in K_n$ e $\{x^k\} \subset T_n(y)$ uma sequência tal que $x^k \rightharpoonup \bar{x}$. Se $x^k \in T_n(y)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, temos $f_\gamma(x^k, y) \geq 0$. Usando B1, obtemos que $\bar{x} \in T_n(y)$, logo $T_n(y)$ é fracamente fechado e verifica (i) do Lema 2.1. Agora, se $y_0 \in K_n$, $T_n(y_0) \subset K_n$. Como $T_n(y_0)$ é fracamente fechado e limitado, usando a Proposition 2.2, temos que $T_n(y_0)$ é fracamente compacto. Assim, $T_n$ satisfaz (ii). Para o terceiro item, suponha por absurdo que, existe um subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_p\}$ de $K_n$ e $y_0 \in \text{conv}\{y_1, \cdots, y_p\}$ tal que $y_0 \notin \bigcup_{i=1}^p T_n(y_i)$, logo, $y_0 \notin \{x \in K_n; f_\gamma(x, y_i) \geq 0\}$, $\forall i \in I_p$ ($I_p := \{1, \cdots, p\}$), $\Rightarrow f_\gamma(y_0, y_i) < 0$, $\forall i \in I_p \Rightarrow y_i \in \{y \in K_n; f_\gamma(y_0, y) < 0\}$. Como $f_\gamma(y_0, \cdot)$ é convexa, o conjunto $\{y \in K_n; f_\gamma(y_0, y) < 0\}$ é convexo, logo

$$\text{conv}\{y_1, \cdots, y_p\} \subset \{y \in K_n; f_\gamma(y_0, y) < 0\}.$$

Usando o fato que $y_0 \in \text{conv}\{y_1, \cdots, y_p\}$, segue que $f_\gamma(y_0, y_0) < 0$, absurdo. Portanto (iii) é satisfeita, i. e., $T_n$ é um operador KKM. Pelo Lema 2.3,

$$\bigcap_{y \in K_n} T_n(y) \neq \emptyset.$$

Logo, existe $\bar{x} \in K_n$ tal que $f_\gamma(\bar{x}, y) \geq 0$, $\forall y \in K_n$. □

No seguinte Teorema, mostraremos que $S(f_\gamma, K)$ é não vazio quando $f$ é pseudomonótona.

**Teorema 2.6** *Suponha que $f$ satisfaz B1, B2 e B5, e $g$ satisfaz B1-B4. Então, para todo $\gamma > 0$, $S(f_\gamma, K)$ é não vazio.*

*Demonstração:* Seja $\gamma > 0$. Pelo Lema 2.3, $f_\gamma$ satisfaz B1-B2. Vamos provar que $f_\gamma$ satisfaz B5.

De fato, seja $\{x^n\} \subset K$ uma sequência tal que $\lim_{n \to +\infty} \|x^n\| = +\infty$ e $u \in K$.

Temos,

$$\begin{aligned}
f_\gamma(x^n,u) &= f(x^n,u) + \gamma g(x^n,u) \\
&\le f(x^n,u) - \gamma g(u,x^n) - \gamma\beta \|x^n - u\|^2 \\
&= f(x^n,u) + \gamma \|x^n-u\| \left[\frac{-g(u,x^n)}{\|x^n-u\|} - \beta\|x^n-u\|\right] \\
&\le f(x^n,u) + \gamma\ \|x^n-u\| \left[\frac{|g(u,x^n)|}{\|x^n-u\|} - \beta\|x^n-u\|\right].
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Passando ao limite em (2.15) com $n \to +\infty$ e usando B4 e B5, temos que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(x^n,u) \le 0$ e $\limsup_{n\to+\infty} \frac{|g(u,x^n)|}{\|x^n-u\|} < +\infty$; então $f_\gamma(x^n,u) \le 0$, $\forall n \ge n_0$. Assim, para cada $\gamma > 0$, temos que $f_\gamma$ satisfaz B5.

Pelo Lema 2.6, existe $x^n \in K_n$ tal que $f_\gamma(x^n,u) \ge 0$ para todo $y \in K_n$, logo $x^n$ resolve o problema $EP(f_\gamma, K_n)$.

Agora, analisaremos dois casos:

(i) Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^n\| < n$. Neste caso, $x^n \in \text{int}(B(0,n))$, e pelo Lema 2.6, $x^n$ resolve o problema $EP(f_\gamma, K_n) = EP(\gamma, K_n \cap B(0,n))$. Pelo item (ii) do Lema 2.2, segue que $x^n$ resolve o problema $EP(f_\gamma, K)$.

(ii) $\|x^n\| \to +\infty$. Neste caso, B5 garante a existência de um $u \in K$ and $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f(x^n,u) \le 0, \quad \forall n \ge n_0. \tag{2.16}$$

Tome $\bar{n} \ge n_0$ tal que $\|u\| < \bar{n}$. Então $u \in K \cap B(0,\bar{n}) = K_{\bar{n}}$ e, como $x^{\bar{n}}$ resolve o problema $EP(f_\gamma, K_{\bar{n}})$, segue que

$$f_\gamma(x^{\bar{n}},u) \ge 0. \tag{2.17}$$

Comparando (2.16) e (2.17), obtemos

$$f_\gamma(x^{\bar{n}},u) = 0. \tag{2.18}$$

De (2.18), temos

$$f_\gamma(x^{\bar{n}},u) = 0 \le f_\gamma(x^{\bar{n}},y), \quad \forall y \in K_{\bar{n}} \tag{2.19}$$

Seja $h : K \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, definida como $h(y) = f_\gamma(x^{\bar{n}},y)$. Já que $u \in B(0,\bar{n}) = K_{\bar{n}}$, por (2.19), $u$ minimiza $h$ em $K_{\bar{n}}$. Como $\|u\| < \bar{n}$, $u \in \text{int}B(0,\bar{n})$. Segue do item (i) do Lema 2.2 que $u$ minimiza $h$ em $K$. Segue de (2.18) que:

$$0 = f_\gamma(x^{\bar{n}},u) = h(u) \le h(y) = f_\gamma(x^{\bar{n}},y), \quad \forall y \in K. \tag{2.20}$$

Pela desigualdade (2.20), concluímos que $x^{\bar{n}}$ resolve o problema $EP(f_\gamma, K)$.

□

No próximo Teorema, estabelecemos nosso principal resultado para o caso pseudomonótono.

**Teorema 2.7** *Suponha que $f$ é pseudomonótona e satisfaz B1, B2 e B5, e $g$ satisfaz B1 - B4. Se $\{x^k\}$ é uma sequência de soluções de* (2.13) *e $\gamma_k \to 0$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

*(i) A sequência $\{x^k\}$ é limitada.*

*(ii) O conjunto solução $S(f, K)$ é não vazio.*

*Demonstração:* Aplicando o Teorema 2.6 com $\gamma = \gamma_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, que a sequência $\{x^k\}$ é bem definida. Supondo (i) , a limitação da sequência $\{x^k\} \subset K \subset X$ e o fato que $X$ é um espaço de Banach reflexivo, implicam que, deve existir uma subsequência $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ convergindo fracamente para $\bar{x} \in K$.

Como $f(\cdot, y)$ e $g(\cdot, y)$ satisfazem B1 e usando que $\gamma_k \to 0$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \limsup_{j \to +\infty} f_{\gamma_{k_j}}(x^{k_j}, y) &= \limsup_{j \to +\infty} [f(x^{k_j}, y) + \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, y)] \\ &\leq \limsup_{j \to +\infty} f(x^{k_j}, y) + \limsup_{j \to +\infty} \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, y) \\ &\leq f(\bar{x}, y) \quad \forall y \in K. \end{aligned} \tag{2.21}$$

De (2.21), temos que $\bar{x}$ é solução de $EP(f, K)$, logo $S(f, K) \neq \emptyset$.

Agora, assumindo (ii). Tome $\bar{x} \in S(f, K)$. Mostraremos que a sequência $\{x^k\}$ é limitada. Já que $x^k \in S(f_{\gamma_k}, K)$, temos:

$$f(\bar{x}, x^k) \geq 0 \quad \text{and} \quad f_{\gamma_k}(x^k, \bar{x}) \geq 0. \tag{2.22}$$

De (2.22) temos que $f(x^k, \bar{x}) \leq 0$, pois $f$ é pseudomonótona. Note que:

$$\begin{aligned} 0 \leq f_{\gamma_k}(x^k, \bar{x}) &= f(x^k, \bar{x}) + \gamma_k g(x^k, \bar{x}) \\ &\leq \gamma_k g(x^k, \bar{x}). \end{aligned} \tag{2.23}$$

De (2.23) obtemos que $g(x^k, \bar{x}) \geq 0$. Usando B3, temos

$$g(x^k, \bar{x}) + g(\bar{x}, x^k) \leq -\beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|^2. \tag{2.24}$$

Como $g(x^k, \bar{x}) \geq 0$, segue de (2.24) que $g(\bar{x}, x^k) \leq -\beta \left\| x^k - \bar{x} \right\|^2$.

A conclusão de que $\{x^k\}$ é limitada é obtida usando o mesmo argumento da prova da segunda parte do Teorema 2.4.

□

**Teorema 2.8** *Sobre as mesmas hipóteses do Teorema 2.7, se $S(f, K) \neq \emptyset$ e $\gamma_k \to 0$, então a sequência $\{x^k\} \subset S(f_{\gamma_k}, K)$ é fracamente convergente para a solução do* *problema $EP(f,K)$, que por sua vez, é única solução do problema:*

$$\begin{cases} \textit{Encontrar} & \hat{x} \in S(f,K), \ \textit{tal que,} \\ & g(\hat{x},y) \geq 0, \quad \forall y \in S(f,K) \end{cases} \tag{2.25}$$

*Demonstração:* Se o conjunto solução $S(f,K)$ é não vazio, o Teorema 2.7 garante que a sequência $\{x^k\}$ é limitada. Portanto existe pelo menos um valor de aderência fraco. Seja $\bar{x}$ um valor de aderência fraco de $\{x^k\}$, então existe $\{x^{k_j}\} \subset \{x^k\}$ tal que $x^{k_j} \to \bar{x}$ $(j \to +\infty)$. Pelo Teorema 2.7, $\bar{x} \in S(f,K)$. Temos

$$f(x^{k_j}, z) + \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, z) \geq 0, \quad \forall z \in K, \forall j \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Seja $x \in S(f,K)$, então

$$f(x, x^{k_j}) \geq 0, \quad \text{since} \quad x^{k_j} \in K.$$

Pela pseudomonotonicidade de $f$, obtemos

$$f(x^{k_j}, x) \leq 0, \tag{2.27}$$

mas $x \in K$, portanto, por (2.26):

$$f(x^{k_j}, x) + \gamma_{k_j} g(x^{k_j}, x) \geq 0.$$

Logo, pela equação (2.27), $\gamma_{k_j} g(x^{k_j}, x) \geq -f(x^{k_j}, x) \geq 0$. Assim,

$$g(x^{k_j}, x) \geq 0, \quad j \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 0 \leq \limsup_{j \to +\infty} g(x^{k_j}, x) \leq g(\bar{x}, x) \\ &\Rightarrow \bar{x} \quad \text{resolve :} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{Encontrar} & \hat{x} \in S(f,K), \ \text{tal que,} \\ & g(\hat{x},x) \geq 0, \quad \forall x \in S(f,K) \end{cases} \tag{2.28}$$

Para mostrar que a solução é única, suponha que $\tilde{x}$ e $\hat{x}$ são soluções do problema. Segue que:

$$g(\tilde{x}, \hat{x}) \geq 0 \tag{2.29}$$

$$g(\hat{x}, \tilde{x}) \geq 0 \tag{2.30}$$

Somando (2.29) e (2.30), obtemos

$$0 \leq g(\hat{x}, \tilde{x}) + g(\tilde{x}, \hat{x}) \leq -\beta \|\hat{x} - \tilde{x}\|^2 \leq 0.$$

Portanto, $\hat{x} = \tilde{x}$, isto é, todo valor de aderência fraco de $\{x^k\}$ possui a mesma solução, assim, concluímos que toda a sequência é fracamente convergente para a solução do problema de equilíbrio $EP(f, K)$.

$\square$

**Exemplo**

O próximo Teorema pode ser encontrado em KIEN [45]. É importante para fornecer um exemplo no espaço $l^p(\mathbb{N})$. Ressaltamos que $L^p(\Omega, \mu) = l^p(\mathbb{N})$, se considerarmos $\Omega = \mathbb{N}$ e $\mu$ a medida de contagem em $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, [46], [47].

Para cada $x \in X$, a *aplicação dualidade* é definida por:

$$J_p(x) = \{x^* \in X^*; \langle x^*, x\rangle = \|x\| \|x^*\|, \|x^*\| = \|x\|^{p-1}\}.$$

**Teorema 2.9** *Suponha que $X = L^p(\Omega, \mu)$, $p \in (1, +\infty)$. Então valem as seguintes propriedades:*

*(a) Se $1 < p \leq 2$ então*

$$\langle J_p(x) - J_p(y), x - y\rangle \geq \frac{p-1}{64} \|x - y\|^2$$

*para todo $x, y \in X$.*

*(b) Se $p \geq 2$ então*

$$\langle J_p(x) - J_p(y), x - y\rangle \geq \frac{1}{p^2 2^{p-1}} \|x - y\|^p$$

*para todo $x, y \in X$.*

**Exemplo 2.1** *Consideramos $p \in (1, +\infty)$, $X := l^p(\mathbb{N})$, $K := \{(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l^p(\mathbb{N}); \xi_n \in [0, +\infty), \forall n \in \mathbb{N}\}$. Defina $f, g : K \times K \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle$ e $g(x, y) = \langle J_p(x), y - x\rangle$, onde $J_p : l^p(\mathbb{N}) \to l^q(\mathbb{N})$ é a aplicação dualidade, $q$ satisfaz $1/p + 1/q = 1$ e $F : l^p(\mathbb{N}) \to l^q(\mathbb{N})$ é definida por $F(x) = e_1/(1 + \|x\|^p_{l^p})$. Veja que $g$ satisfaz B4, pois,*

$$\frac{|g(x, y)|}{\|y - x\|} = \frac{|\langle J_p(x), y - x\rangle|}{\|y - x\|} \leq \frac{\|J_p(x)\| \|y - x\|}{\|y - x\|} \leq \|J_p(x)\|.$$

*Logo*

$$\limsup_{\|y\| \to +\infty} \frac{|g(x, y)|}{\|y - x\|} \leq \|J_p(x)\| < +\infty.$$

*Para ver que $f$ satisfaz B5, seja $\{x^n\} \subset K$ uma sequência tal que $\|x^n\| \to +\infty$ ($n \to +\infty$). Tome $u = (0, 1, 0, 0, \cdots) \in K$. Então*

$$f(x^n, u) = -x_1^{(n)}/(1 + \|x^n\|_{l^p}^p) \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Sabemos que $l^p(\mathbb{N})$ é um espaço uniformemente convexo, logo $J$ é uniformemente contínua em cada subconjunto limitado de $l^p(\mathbb{N})$. Portanto $g$ satisfaz B1. Para mostrar que $g$ satisfaz B3, sejam $x, y \in K$. $g(x,y)+g(y,x) = \langle J_p(x) - J_p(y), y - x\rangle$, e, pelo teorema acima, temos $\langle J_p(x) - J_p(y), y - x\rangle \leq -\beta \|x - y\|^r$, onde $\beta = (p - 1)/64$ e $r = 2$, se $p \in (1, 2]$, $\beta = 1/p^2 2^{p-1}$ e $r = p$, se $p \in [2, +\infty)$.*

Neste capítulo estendemos os resultados dados em espaços de Hilbert e de dimensão finita de HUNG e MUU [10] e OLIVEIRA *et al.* [8] para espaços de Banach reflexivos. Sobre hipóteses usuais, mostramos a existência de solução de (2.4), quando $f$ é monótona. Para o caso pseudomonótono, assumimos hipóteses consideradas na literatura para provar a existência de solução e a relação entre a limitação da sequência e o conjunto solução. Além disso, provamos que toda a sequência converge fracamente para a solução do problema de equilíbrio ALLECHE *et al.* [13]. Construímos um exemplo de uma bifunção de equilíbrio num espaço de Banach reflexivo que não é Hilbert e que satisfaz as hipóteses do trabalho com os resultados de KIEN [45] e PRUS e SMARZEWSKI [48]. O trabalho sobre a regularização do tipo Tikhonov para problema de equilíbrio em espaços de Banach reflexivo foi publicado como um trabalho completo nos Anais do XLVII SBPO, SOUSA *et al.* [49].

# Capítulo 3

# Um Método do Tipo Quase-Newton Para Problemas de Equilíbrio

Neste capítulo estudamos uma versão modificada do método dado em SANTOS *et al.* [19] considerando um passo do tipo quase-Newton. Apresentamos o método do tipo quase-newton para poblemas de equilíbrio. Mostramos que sobre certas hipóteses, a sequência gerada pelo algoritmo está bem definida, mostramos que o método converge linearmente para a solução do problema de equilíbrio usando uma família de matrizes que satisfazem a propriedade da deteriorização limitada. Além disso, apresentamos experimentos numéricos comparando com outros métodos existentes na literatura.

Consideramos uma bifunção auxiliar $h$ e uma bifunção regularizada $\phi$ definida em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

$$\phi(x, y) := f(x, y) + h(x, y) \tag{3.1}$$

Ao longo deste capítulo, exigiremos as seguintes condições:

**Hipótese 3.1**

*(a) O conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ possui a representação*

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, g(x) \leq 0\} \tag{3.2}$$

*com $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação convexa e duas vezes continuamente diferenciável, i.e., cada função componente $g_i$, $i = 1, \ldots, m$, é convexa em $\mathbb{R}^n$.*

*(b) As bifunções $f$ e $\nabla_y f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são continuamente diferenciáveis e, para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, $f(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função convexa.*

**Hipótese 3.2**

*(a) As bifunções $h$ e $\nabla_y h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ são continuamente diferenciáveis;*

*(b) $h(x, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é fortemente convexa para cada $x \in \mathbb{R}^n$;*

*(c) $\nabla_y h(x, x) = 0$ for all $x \in \mathbb{R}^n$.*

**Proposição 3.1 (Proposição 1, SANTOS *et al.* [19])** *Se as hipóteses 3.1 e 3.2 são satisfeitas, então o seguinte problema de otimização*

$$\min_{y} \phi(x, y) \quad \textit{sujeito a} \quad y \in K. \tag{3.3}$$

*possui uma solução única para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, que denotamos por $y(x)$.*

A próxima caracterização da solução de problema de equilíbrio segue da propriedade acima.

**Proposição 3.2 (Proposição 3, SANTOS *et al.* [19])** *Um ponto $x \in R^n$ resolve EP($K, f$) se, e somente se, $x = y(x)$.*

Com base na Proposição 2, o propósito deste capítulo é desenvolver um método do tipo quase-Newton para encontrar um zero da função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$F(x) = y(x) - x \tag{3.4}$$

Assumiremos a seguinte condição de qualificação das restrições afim de obter propriedades para a função $y(x)$ e do sistema KKT do problema (3.3).

**Hipótese 3.3** *Dado $x \in \mathbb{R}^n$ fixo, a condição de qualificação das restrições de posto costante (constant rank constraint qualification) valem em $y(x)$, i. e., existe uma vizinhança $N(y(x))$ of $y(x)$ tal que, para cada conjunto finito $J \subseteq I_0(x) := \{i \in I_m | g_i(y(x)) = 0\}$, o conjunto $\{\nabla g_i(y) | i \in J\}$ possui o mesmo posto (que depende de $J$) para cada $y \in N(y(x))$.*

**Lema 3.1 (Lema 2 (c), SANTOS *et al.* [19])** *Seja dado $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Suponha que a hipótese 3.3 é satisfeita em $\bar{y} = y(\bar{x})$. Então, a aplicação $F(x) = y(x) - x$ é $PC^1$ próximo de $\bar{x}$, isto é, $F$ é contínua e existe uma vizinhança $V(\bar{x})$ de $\bar{x}$ e uma família finite de aplicações $C^1$ definidas em $V(\bar{x})$, $\{F_1, F_2, \cdots, F_k\}$, para algum natural $k$, tal que $F(y) \in \{F_1(y), F_2(y), \cdots, F_k(k)\}$ para todo $y \in V(\bar{x})$ .*

Além disso, a Hipótese 3.3 garante que o conjunto $\mathcal{M}(x)$ é não vazio, onde $\mathcal{M}(x)$ representa o conjunto dos multiplicadores de Lagrange das condições KKT (Karush-Kuhn-Tucker) do problema (3.3):

$$\begin{aligned} &\nabla_y \phi(x, y) + \nabla g(y)\lambda = 0 \\ &\lambda \geq 0, g(y) \leq 0, \langle \lambda, g(y) \rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.5}$$

onde

$$\mathcal{M}(x) = \{\lambda \in \mathbb{R}^m | (y(x), \lambda) \quad \text{satisfaz} \quad (3.5)\}. \tag{3.6}$$

No próximo Lema, nós iremos considerar a seguinte família de subconjuntos de $I_0(x)$ que será de fundamental importância no desenvolvimento do nosso algoritmo:

$$\mathcal{G}(x) = \{J \subseteq I_0(x)\colon \nabla g_i(y(x))_{i\in J} \text{ é linearmente indepentende, } supp(\lambda) \subseteq J,\ \exists \lambda \in \mathcal{M}(x)\} \tag{3.7}$$

onde $supp(\lambda) := \{i \in I_m | \lambda_i > 0\}$.

Note que $\mathcal{G}(x) \neq \emptyset$ sempre que $\mathcal{M}(x) \neq \emptyset$ (veja e. g. VON HEUSINGER *et al.* [50], Lema 3.2).

**Lema 3.2 (Lema 2, SANTOS *et al.* [19])** *Seja dado $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Suponha que a Hipótese 3.3 seja satisfeita em $\bar{y} = y(\bar{x})$. Então, valem as seguintes sentenças*

*(a) Dado $J \in \mathcal{G}(\bar{x})$, existe um único $\lambda = \lambda^J(\bar{x}) \in \mathcal{M}(\bar{x})$ tal que $g_J(\bar{y}) = 0$ e $\lambda_{\hat{J}} = 0$, onde $\hat{J} = \{1, \ldots, m\} \backslash J$ e a partição $(J, \hat{J})$ é usada para separar os vetores $\lambda$ e $g(\cdot)$ em $\lambda = (\lambda_J, \lambda_{\hat{J}})$ e $g(\cdot) = (g_J(\cdot), g_{\hat{J}}(\cdot))$, respectively;*

*(b) Existe uma vizinhança $V(\bar{x})$ de $\bar{x}$ tal que a Hipótese 3.3 vale em $y(x)$ e $\mathcal{G}(x) \subseteq \mathcal{G}(\bar{x})$ para todo $x \in V(\bar{x})$;*

*(c) O Jacobiano generalizado computável de $F$ em $\bar{x}$ (uma abordagem do Jacobiano de Clarke, ver e. g. VON HEUSINGER* et al. *[50]) é dado por*

$$\partial_C F(\bar{x}) = \{\nabla y^J(\bar{x})^T - I \mid J \in \mathcal{G}(\bar{x})\}, \tag{3.8}$$

*onde*

$$\nabla y^J(\bar{x}) = A^T C^{-1} - A^T C^{-1} D (D^T C^{-1} D)^{-1} D^T C^{-1}, \tag{3.9}$$

*com*

$$\begin{aligned} A &= A(\bar{x}) = -\nabla^2_{yx} f(\bar{x}, \bar{y}) - \nabla^2_{yx} h(\bar{x}, \bar{y}), \\ C &= C^J(\bar{x}) = \nabla^2_{yy} f(\bar{x}, \bar{y}) + \nabla^2_{yy} h(\bar{x}, \bar{y}) + \sum_{i\in J} \lambda_i^J(\bar{x}) \nabla^2 g_i(\bar{y}), \\ D &= D^J(\bar{x}) = \nabla g_J(\bar{y}). \end{aligned} \tag{3.10}$$

*onde $\nabla g_J(\cdot)$ é a notação para a matriz com vetores coluna $\{\nabla g_i(\cdot)\}_{i\in J}$ e $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denota a matriz identidade.*

*(d) Seja $\bar{\lambda}$ uma solução vértice para o problema de programação linear abaixo*

$$\begin{array}{ll} \min_{\lambda} & \sum_{i\in I_0(\bar{x})} \lambda_i \\ s.a & \nabla g(\bar{y})\lambda = -\nabla_y \Phi(\bar{x},\bar{y}) \\ & \lambda_i \geq 0 \quad \forall\, i \in I_0(\bar{x}) \\ & \lambda_i = 0 \quad \forall\, i \in I_m \backslash I_0(\bar{x}), \end{array} \tag{3.11}$$

*e defina $J := \{i \in I_0(\bar{x}) \,|\, \bar{\lambda}_i > 0\}$. Então $J$ pertence $\mathcal{G}(\bar{x})$ (e $\bar{\lambda}$ é o único $\lambda$ mencionado no item (a) acima).*

Além disso, o seguinte resultado é obtido sobre a Hipótese 3. Terá um papel importante na boa definição do nosso algoritmo.

**Lema 3.3 (Lema 5, SANTOS *et al.* [19])** *Seja $x^*$ uma solução do EP$(K, f)$. Suponha que a Hipótese 3.3 é válida em $y(x^*) = x^*$. Então, temos que para qualquer $H \in \partial_C F(x)$,*

$$F(x) - F(x^*) - H(x - x^*) = o(\|x - x^*\|).$$

*Além disso, se o Jacobiano de todo $\nabla g_i$ e $\nabla_y \phi$ são Lipschitz contínuo em $x^*$, então $F(x) - F(x^*) - H(x - x^*) = O(\|x - x^*\|^2)$.*

A próxima condição será considerada na análise do nosso algoritmo.

**Hipótese 3.4** *Para cada $J \in \mathcal{G}(x)$ e $\lambda \in \mathcal{M}(x)$, temos*

$$d^T \left( M(x, y(x)) + \sum_{i \in J} \lambda_i \nabla^2 g_i(y(x)) \right) d \neq 0, \quad \forall d \in \mathcal{T}^J(x), \;\; d \neq 0,$$

*onde $\mathcal{T}^J(x) = \{d \in \mathbb{R}^n | \nabla g_i(y(x))^T d = 0, \;\; \forall i \in J\}$ e $M(x, y) = \nabla^2_{yy}\phi(x, y) + \nabla^2_{yx}\phi(x, y)$.*

**Lema 3.4 (Lema 3, SANTOS *et al.* [19])** *Sejam dados $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\bar{y} = y(\bar{x})$. Suponha que as Hipóteses 3.3 e 3.4 são válidas em $\bar{y}$ e $\bar{x}$, respectivamente. Então a matriz $H^J(\bar{x}) = \nabla^J y(\bar{x}) - I$ é não-singular para todo conjunto de índices $J \in \mathcal{G}(x)$.*

Neste trabalho também exigiremos a seguinte hipótese, o princípio da deteriorização limitada, que será necessário para a convergência da sequência gerada pelo nosso método.

**Hipótese 3.5** *Seja $x^*$ uma solução do EP$(K, f)$. Suponha que as Hipóteses 3 e 4 são válidas em $y(x^*) = x^*$. Considere um número positivo $c \in \mathbb{R}$ e uma sequência de matrizes $\{B_k\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ satisfazendo*

$$\|B_{k+1} - H(x^*)\| \leq \|B_k - H(x^*)\| + c \left\| x^k - x^* \right\|, \quad \forall\, H \in \partial_C F(x^*). \tag{3.12}$$

**Observação 3.1** *Esta hipótese é uma condição padrão para provar a convergência local de métodos do tipo Quase-Newton, veja por exemplo DENNIS e SCHNABEL [51], LUKSAN e VLCEK [52].*

Finalmente, relembramos o conhecido Lema de Banach que será uma ferramenta importante na análise do nosso método.

**Lema 3.5 (Lema de Banach)** *Seja $\|\cdot\|$ uma norma arbitrária em $\mathbb{R}^n$, que também denota a norma (induzida) matricial. Se $\|A\| < 1$, então $I + A$ é não singular e*

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \left\|(I + A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}. \tag{3.13}$$

Agora, estamos prontos para definir o algorimo.

## 3.1 O Método Quase-Newton para Problemas de Equilíbrio (QNMEP)

Método QNMEP:

**Passo 0:** Escolha $x^0 \in \mathbb{R}^n$ e uma matriz $B_0 \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; faça $k := 0$.

**Passo 1:** Encontre $y^k = \arg\min\{\phi(x^k, y) \,|\, y \in K\}$.
Se $y^k = x^k$, Pare. ($x^k$ é uma solução do EP$(K, f)$).

**Passo 2:** Considere a matriz $B_k$ satisfazendo (3.12) e procure uma solução $d^k$ do sistema $B_k d = -F(x^k)$;

**Passo 3:** Faça $x^{k+1} = x^k + d^k$, $k = k + 1$ e volte para o **Passo 1**.

As seguintes propriedades serão usadas para provar a convergência local do algoritmo. Eles generalizam resultados dados em DENNIS e SCHNABEL [51] para o caso suave.

**Lema 3.6** *Seja$x^*$ uma solução do EP$(K, f)$. Suponha que as Hipóteses 3 e 4 sejam válidas em $y(x^*) = x^*$. Se $H^J(x^*) \in \partial_C F(x^*)$ para algum $J \in \mathcal{G}(x^*)$ e $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ satisfaz*

$$\left\|B - H^J(x^*)\right\| \leq \frac{1}{2\left\|H^J(x^*)^{-1}\right\|}, \tag{3.14}$$

*então, $B^{-1}$ é bem definida e satisfaz*

$$\left\|B^{-1}\right\| \leq 2\left\|H^J(x^*)^{-1}\right\|. \tag{3.15}$$

*Demonstração:* Da definição de $\partial_C F(x^*)$, temos que $H^J(x^*) = \nabla y^J(x^*) - I$. Defina

$$A = BH^J(x^*)^{-1} - I.$$

Observe que $A$ está bem definida pelo Lema 3.4.

Note que $A = (B - H^J(x^*))H^J(x^*)^{-1}$. Logo

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \left\|(B - H^J(x^*))H^J(x^*)^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|(B - H^J(x^*))\right\| \left\|H^J(x^*)^{-1}\right\| \\
&\leq \frac{1}{2\left\|H^J(x^*)^{-1}\right\|} \left\|H^J(x^*)^{-1}\right\| \\
&= \frac{1}{2} < 1.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Lema de Banach 3.5, obtemos que

$$I + A = I + BH^J(x^*)^{-1} - I = BH^J(x^*)^{-1}$$

é não singular, portanto $B^{-1}$ existe e temos

$$(I + A)^{-1} = (BH^J(x^*)^{-1})^{-1} = H^J(x^*)B^{-1}.$$

Além disso,

$$\left\|H^J(x^*)B^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|BH^J(x^*)^{-1} - I\|} \leq 2.$$

Logo, o resultado segue, pois

$$\begin{aligned}
\left\|B^{-1}\right\| &= \left\|H^J(x^*)^{-1}H^J(x^*)B^{-1}\right\| \\
&\leq \left\|H^J(x^*)^{-1}\right\| \left\|H^J(x^*)B^{-1}\right\| \\
&\leq 2\left\|H^J(x^*)^{-1}\right\|.
\end{aligned}$$

□

Agora, a próxima propriedade nos permite estabelecer a boa definição local do algoritmo quando o ponto inicial $x^0$ está próximo a uma solução $x^*$ do problema de equilíbrio e as matrizes $B_k$ estão próximas a alguma $H(x^*) \in \partial_C F(x^*)$.

**Lema 3.7 (Lema das Vizinhanças)** *Seja $x^*$ uma solução do EP($K, f$). Suponha que são válidas as Hipóteses 3 e 4 em $y(x^*) = x^*$. Dado $r \in (0,1)$, existem números positivos $\varepsilon = \varepsilon(r)$ e $\delta = \delta(r)$ tais que a função $\Phi(x, B) = x - B^{-1}F(x)$ está bem definida e satisfaz*

$$\|\Phi(x, B) - x^*\| \leq r\|x - x^*\|$$

*para qualquer $x \in \mathcal{B}[x^*, \varepsilon]$ e para qualquer $B \in \mathcal{B}[H(x^*), \delta]$ para algum $H(x^*) \in \partial_C F(x^*)$.*

*Demonstração:* Considere $H(x^*) \in \partial_C F(x^*)$. Pelo Lema 3.4, a matriz $H(x^*)$ é não singular. Logo, podemos tomar $\delta_1 \in (0, \frac{1}{2\|H(x^*)^{-1}\|})$. Portanto, pelo Lema 3.6, se $B \in \mathcal{B}(H(x^*), \delta_1)$ , então $B^{-1}$ está bem definida e satisfaz

$$\left\|B^{-1}\right\| \leq 2\left\|(H(x^*))^{-1}\right\|. \tag{3.16}$$

Assim, dado $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta \in (0, r\delta_1)$, a função $\Phi(x, B)$ está bem definida e

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x,B) - x^*\| &= \left\|x - B^{-1}F(x) - x^*\right\| \\
&= \left\|x - x^* - B^{-1}F(x) + B^{-1}H(x^*)(x - x^*) - B^{-1}H(x^*)(x - x^*)\right\| \\
&= \left\|x - x^* - B^{-1}H(x^*)(x - x^*) - B^{-1}F(x) + B^{-1}H(x^*)(x - x^*)\right\| \\
&= \left\|x - x^* - B^{-1}H(x^*)(x - x^*) - B^{-1}[F(x) - H(x^*)(x - x^*)]\right\| \\
&\leq \left\|x - x^* - B^{-1}H(x^*)(x - x^*)\right\| + \left\|B^{-1}[F(x) - H(x^*)(x - x^*)]\right\|
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Agora, verificaremos cada termo da soma do lado direito da desigualdade acima.

Usando (3.16), temos

$$\begin{aligned}
\|x - x^* - B^{-1}H(x^*)(x - x^*)\| &= \|B^{-1}B(x - x^*) - B^{-1}H(x^*)(x - x^*)\| \\
&= \|B^{-1}[B - H(x^*)](x - x^*)\| \\
&\leq \|B^{-1}\| \, \|B - H(x^*)\| \, \|x - x^*\| \\
&\leq 2 \, \|H(x^*)^{-1}\| \, \delta \, \|x - x^*\| .
\end{aligned}$$

Por outro lado, obtemos

$$\begin{aligned}
\left\|B^{-1}[F(x) - H(x^*)(x - x^*)]\right\| &\leq \left\|B^{-1}\right\| \|F(x) - H(x^*)(x - x^*)\| \\
&\leq 2 \left\|H(x^*)^{-1}\right\| \|x - x^*\| \frac{\|F(x) - H(x^*)(x - x^*)\|}{\|x - x^*\|}.
\end{aligned}$$

Desde que $F(x^*) = 0$, do Lema 3.3 segue que

$$\lim_{x \to x^*} \frac{\|F(x) - H(x^*)(x - x^*)\|}{\|x - x^*\|} = 0.$$

Seja $\varepsilon = \varepsilon(r) > 0$ tal que

$$2\left(\delta + \sup_{\|x - x^*\| \leq \varepsilon} \left\{\frac{\|F(x) - H(x^*)(x - x^*)\|}{\|x - x^*\|}\right\}\right) \leq \frac{r}{\|H(x^*)^{-1}\|}.$$

Logo, se $\|B - H(x^*)\| \leq \delta$ e $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$, a conclusão segue de

$$\begin{aligned}
\|\Phi(x,B) - x^*\| &= \left\|x - B^{-1}F(x) - x^*\right\| \\
&\leq 2\left\|H(x^*)^{-1}\right\| \delta \|x - x^*\| + 2\left\|H(x^*)^{-1}\right\| \beta(x) \\
&\leq 2\left\|H(x^*)^{-1}\right\| \left(\delta + \frac{\|F(x) - H(x^*)(x - x^*)\|}{\|x - x^*\|}\right) \|x - x^*\| \\
&\leq \left\|H(x^*)^{-1}\right\| \frac{r}{\|H(x^*)^{-1}\|} \|x - x^*\| \\
&= r \|x - x^*\|.
\end{aligned}$$

□

Na próxima seção trabalharemos com a análise de convergência do nosso método.

## 3.2 Análise de Convergência

A análise de convergência do método é mostrada usando o Lema 3.7 e indução sobre a sequência gerada pelo algoritmo.

**Teorema 3.1** *Seja $x^*$ uma solução do EP($K, f$). Suponha que sejam válidas as Hipóteses 3 and 4 em $y(x^*) = x^*$, e seja $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ uma sequência de matrizes satisfazendo a Hipótese 5. Considere $F(x) = y(x) - x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Dado $r \in (0,1)$, existem números positivos $\varepsilon = \varepsilon(r)$ e $\delta = \delta(r)$ tais que, se $\|x^0 - x^*\| \leq \varepsilon$ e $\|B_0 - H(x^*)\| \leq \delta$ para algum $H(x^*) \in \partial_C F(x^*)$, então valem as seguintes sentenças:*

**(a)** $x^k$ é bem definida, $\left\|x^k - x^*\right\| \leq r^k \|x^0 - x^*\|$, $x^k \in \mathcal{B}[x^*, \varepsilon]$ e $B_k \in \mathcal{B}[H(x^*), \delta_1]$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

**(b)** A sequência $\{x^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ gerada pelo algoritmo converge pelo menos linearmente a $x^*$.

*Demonstração:*

**(a)** Considere a função $\Phi(x,B) = x - B^{-1}F(x)$. Dado $r \in (0,1)$, pelo Lema 3.7 temos que existem números positivos $\varepsilon_1$ e $\delta_1$ tais que, se $x \in \mathcal{B}[x^*, \varepsilon_1]$ e $B \in \mathcal{B}[H(x^*), \delta_1]$ vale que $\Phi(x,B)$ está bem definida e $\|\Phi(x,B) - x^*\| \leq r\|x - x^*\|$. Agora, tome $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ e $\delta \in (0, \delta_1)$ tais que

$$\delta + \frac{c\varepsilon}{1-r} \leq \delta_1$$

Provaremos por indução que $x^k$ é bem definida, além disso, a sequência satisfaz

$$\left\|x^k - x^*\right\| \leq r^k \left\|x^0 - x^*\right\|, x^k \in \mathcal{B}(x^*, \varepsilon)$$

e

$$B_k \in \mathcal{B}[H(x^*), \alpha_k] \subseteq \mathcal{B}[H(x^*), \delta_1]$$

onde $\alpha_k := \delta + c\varepsilon(1 + r + r^2 + \cdots + r^{k-1}))$ para todo $k \in \mathbb{N}$ .

Começaremos mostrando que a base de indução é válida. Para isso, seja $x := x^0 \in \mathcal{B}[x^*, \varepsilon]$ e $B := B_0 \in \mathcal{B}[H(x^*), \delta]$ Então, temos que $x^1 = x^0 - B_0^{-1}F(x^0) = \Phi(x^0, B_0)$ é bem definida e satisfaz

$$\left\|x^1 - x^*\right\| = \left\|\Phi(x^0, B_0) - x^*\right\| \leq r \left\|x^0 - x^*\right\|.$$

Além disso, $x^1 \in \mathcal{B}[x^*, \varepsilon]$ pois $r\left\|x^0 - x^*\right\| \leq r\varepsilon < \varepsilon$.
Por outro lado, pela condição (3.12) segue que

$$\|B_1 - H(x^*)\| \leq \|B_0 - H(x^*)\| + c\left\|x^0 - x^*\right\|$$

e usando o fato que $x^0 \in \mathcal{B}[x^*, \varepsilon]$ e $B_0 \in \mathcal{B}[H(x^*), \delta]$, obtemos

$$\|B_1 - H(x^*)\| \leq \delta + c\varepsilon = \alpha_1 \leq \delta + \frac{c\varepsilon}{1-r} \leq \delta_1,$$

assim, concluímos que $B_1 \in \mathcal{B}[H(x^*), \alpha_1] \subseteq \mathcal{B}[H(x^*), \delta_1]$.
Agora, suponha que seja válida a hipótese de indução, isto é, suponha que $x^{k-1}$ é bem definida, $\left\|x^{k-1} - x^*\right\| \leq r^{k-1}\left\|x^0 - x^*\right\|$, $x^{k-1} \in \mathcal{B}[x^*, \varepsilon]$ e $B_{k-1} \in \mathcal{B}[H(x^*), \alpha_{k-1}]$.
Novamente, pelo Lema 3.7 com $x := x^{k-1}$ e $B := B_{k-1}$ segue que $x^k = x^{k-1} - B_{k-1}^{-1}F(x^{k-1}) = \Phi(x^{k-1}, B_{k-1})$ é bem definida e satisfaz

$$\left\|x^k - x^*\right\| = \left\|\Phi(x^{k-1}, B_{k-1}) - x^*\right\| \leq r\left\|x^{k-1} - x^*\right\| \leq r^k\left\|x^0 - x^*\right\| < r^k\varepsilon \leq \varepsilon$$

.
Além disso, usando a condição (3.12), a hipótese de indução e a desigualdade acima, obtemos que

$$\|B_k - H(x^*)\| \leq \|B_{k-1} - H(x^*)\| + c\left\|x^{k-1} - x^*\right\| \leq \alpha_{k-1} + c\varepsilon r^{k-1} = \alpha_k$$

Logo, segue que $B_k \in \mathcal{B}[H(x^*), \alpha_k] \subseteq \mathcal{B}[H(x^*), \delta_1]$ pois $\alpha_k \leq \delta + \frac{c\varepsilon}{1-r} \leq \delta_1$
Portanto, o resultado segue.

**(b)** É consequência imediata de (a).

$\square$

## 3.3 Resultados Numéricos

Nesta seção, apresentamos alguns experimentos numéricos, testando e comparando as performances do nosso algoritmo com dois outros métodos conhecidos para resolver problemas de equilíbrio dados na literatura.

Na verdade, consideramos quatro esquemas numéricos para resolver problemas de equilíbrio. Primeiramente o método Glowinski-Le Tallec splitting estudado em VUONG e STRODIOT [53] (GLT), o método do subgradiente inexato projetado introduzido em SANTOS e SCHEIMBERG [20] (IPSM), QNMEP com atualização BFGS (QNMEP$1_a$) e QNMEP com uma matriz fixa após a primeira iteração de Newton (QNMEP$1_b$), ver e. g. SANTOS *et al.* [19]. Em ambas variações de QNMEP, usamos a função auxiliar $h(x,y) = \frac{\tau}{2}\|x-y\|^2$, $\tau > 0$.

Os algoritmos foram feitos em MATLAB R2019b em um notebook Intel Core i7 1.8 GHz 8 GB RAM para obter os resultados numéricos. A condição de parada é $\|y^k - x^k\| < 10^{-6}$.

**Exemplo 3.1** *Considere o conhecido problema de otimização de Rosen-Suzuki, veja por exemplo BELO CRUZ* et al. *[14], e sua reformulação como um problema de equilíbrio. A bifunção é dada por $f(x,y) = \phi(y) - \phi(x)$ com*

$$\phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4.$$

*O conjunto de restrições é definido por $C = \{x \in \mathbb{R}^4 : \; g_i(x) \leq 0, \; i = 1,2,3\}$, onde*

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 8, \\ g_2(x) &= x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_4^2 - x_1 - x_4 - 10, \\ g_3(x) &= 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2 - x_4 - 5. \end{aligned}$$

*O ponto ótimo é $\overline{x} = (0,1,2,-1)$.*

Para o QNMEP$1_a$ e o QNMEP$1_b$, usamos $\tau = 0.001$. Para o IPSM, tomamos $\beta_k = 24/(k+1)$ e $\gamma_k = \max\{4.9, \|f_y(x^k,x^k)\|\}$. Para o GLT, usamos $\lambda_1 = 0.5$ e $\lambda_2 = 0.3$, como sugerido em VUONG e STRODIOT [53].

A tabela 3.1 mostra o tempo de processamento (CPU time) e o número de iterações para todos os algoritmos testados, considerando os pontos iniciais $x^0 = (1,-1,2,-3)^T$ e $x^0 = (5,-5,5,-5)^T$.

**Exemplo 3.2** *Considere o Problema de Poluição da Bacia Hidrográfica dado em VON HEUSINGER e KANZOW [54] que consiste de três jogadores com funções*

Tabela 3.1: Resultados para o Exemplo 3.1

| | QNMEP1$_a$ | | QNMEP1$_b$ | | IPSM | | GLT | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^0$ | Iter. | CPU($s$) | Iter. | CPU($s$) | Iter. | CPU($s$) | Iter. | CPU($s$) |
| 1 | 5 | 0.0506 | 3 | 0.0302 | 7 | 0.0627 | 1 | 0.0297 |
| 2 | 6 | 0.0595 | 3 | 0.0315 | 7 | 0.0657 | 4 | 0.0810 |

*payoff:*

$$\phi_j(x) = u_j x_j^2 + 0.01 x_j(x_1 + x_2 + x_3) - v_j x_j, \quad j = 1, 2, 3$$

*onde* $u = (0.01, 0.05, 0.01)$ *e* $v = (2.90, 2.88, 2.85)$*, e as restrições são dadas por*

$$\begin{cases} 3.25x_1 + 1.25x_2 + 4.125x_3 & \leq \ 100 \\ 2.291x_1 + 1.5625x_2 + 2.8125x_3 & \leq \ 100. \end{cases}$$

Para o QNMEP1$_a$ e o QNMEP1$_b$, usamos $\tau = 0.001$. Para o IPSM, tomamos $\beta_k = \frac{930}{k+1}$ e $\gamma_k = \max\{1, \|f_y(x^k, x^k)\|\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para o GLT, usamos $\lambda_1 = 15$ e $\lambda_2 = 10$, como sugerido em VUONG e STRODIOT [53].

Na Tabela 3.2 apresentamos o tempo de processamento (CPU time) e o número de iterações para todos os algoritmos testados, considerando $x^0 = (0, 0, 0)^T$ e $x^0 = (1, 1, 1)^T$.

Tabela 3.2: Resultados para o Exemplo3.2

| | QNMEP1$_a$ | | QNMEP1$_b$ | | IPSM | | GLT | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^0$ | Iter. | CPU($s$) | Iter. | CPU($s$) | Iter. | CPU($s$) | Iter. | CPU($s$) |
| 1 | 19 | 0.0935 | 19 | 0.0913 | 31 | 0.1366 | 12 | 0.0994 |
| 2 | 20 | 0.0964 | 18 | 0.0881 | 31 | 0.1380 | 12 | 0.1053 |

**Exemplo 3.3** *Considere o problema de equilíbrio dado em SANTOS e SCHEIMBERG [20], onde*

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^5 : \ \sum_{i=1}^{5} x_1 \geq -1, \ \ -5 \leq x_i \leq 5, \ i = 1, \ldots, 5 \right\}$$

*e a bifunção é da forma*

$$f(x, y) = \langle Px + Qy + q, y - x \rangle.$$

*As matrizes $P, Q$ e o vetor $q$ são definidos por*

$$P = \begin{bmatrix} 3.1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

*e* $q = (1, -2, -1, 2, -1)^T$.

Para o QNMEP1$_a$ e o QNMEP1$_b$, usamos $\tau = 5$. Para o IPSM, tomamos $\beta_k = \frac{10}{k}$ e $\gamma_k = \max\{4.8, \|f_y(x^k, x^k)\|\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para o GLT, usamos $\lambda_1 = 0.2$ e $\lambda_2 = 50$, como sugerido em VUONG e STRODIOT [53].

A Tabela 3.3 apresenta o tempo de processamento (CPU time) e o número de iterações para todos os algoritmos testados, considerando os pontos iniciais $x^0 = (1, 3, 1, 1, 2)^T$ e $x^0 = (-1, 0, 2, 3, 1)^T$.

Tabela 3.3: Resultados para o Exemplo 3.3

| | QNMEP1$_a$ | | QNMEP1$_b$ | | IPSM | | GLT | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^0$ | Iter. | CPU($s$) | Iter. | CPU($s$) | Iter. | CPU($s$) | Iter. | CPU($s$) |
| 1 | 2 | 0.0106 | 2 | 0.0108 | 18 | 0.0809 | 3 | 0.0305 |
| 2 | 2 | 0.0105 | 2 | 0.0111 | 39 | 0.1702 | 3 | 0.0303 |

Os resultados teóricos são confirmados pelos experimentos numéricos. A comparação do método QNMEP com dois esquemas é também apresentada. Parece que o QNMEP possui uma boa performance numérica, ambas em termos no número de iterações e no tempo de processamento. De fato, o comportamento numérico do QNMEP deve ser estudado e é uma direção promissora a ser investigada.

# Capítulo 4

# Problemas de Quase-Equilíbrio

Neste capítulos faremos uma breve apresentação, incluindo seus resultados e principais técnicas de demonstração sobre as principais referências da literatura sobre existência de solução para problemas de quase-equilíbrio.

Sejam $X$ um espaço de Banach real e $C$ um subconjunto convexo, fechado e não vazio de $X$. Seja $K : C \rightrightarrows C$ uma aplicação ponto-conjunto. Seja $f : C \times C \to \mathbb{R}$ uma bifunção de equilíbrio, isto é, $f(x, x) = 0$, $\forall x \in C$. O Problema de Quase-Equilíbrio (PQE), consiste em

$$\text{(PQE)} \begin{cases} \text{encontrar} \quad \bar{x} \in K(\bar{x}) \quad \text{tal que} \\ \quad f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K(\bar{x}). \end{cases} \tag{4.1}$$

O PQE possui, como casos particulares, o problema de equilíbrio clássico, o problema de desigualdades quase-variacionais, o problema de equilíbrio de Nash generalizado, etc.

A seguir exibimos alguns casos particulares do problema de quase-equilíbrio, mostrando que este problema engloba outros problemas importantes da literatura.

**Desigualdade Quase-Variacional**

O problema de desigualdade quase-variacional (DQV) foi introduzido nos trabalhos de BENSOUSSAN *et al.* [55], BENSOUSSAN e LIONS [56], BENSOUSSAN e LIONS [57, 58] e é definido como segue:

Seja $X^*$ o dual topológico de um espaço de Banach real $X$. Seja $C$ um subconjunto fechado, convexo e não vazio de $X$. Dadas duas aplicações ponto-conjunto $T : X \rightrightarrows X^*$ e $K : C \rightrightarrows C$, onde $T$ possui valores fracamente compactos. O Problema de Desigualdade Quase-Variacional consiste em

$$DQV(K, f) : \begin{cases} \text{encontrar} \quad \bar{x} \in K(\bar{x}) \ \text{ tal que} \\ \exists x^* \in T(\bar{x}) \ \text{ com } \ \langle x^*, y - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K(\bar{x}). \end{cases}$$

Para reformular o problema de Desigualdade Quase-Variacional como um problema de quase-equilíbrio, defina a bifunção $f : C \times C \to \mathbb{R}$ por

$$f(x, y) = \sup_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x \rangle .$$

Para mais informações sobre DQV , veja por exemplo, AUSSEL e COTRINA [59].

**Equilíbrio de Nash Generalizado**

O Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado foi introduzido por DEBREU [60] e possui como caso particular o problema de equilíbrio de Nash NASH [61, 62]. O problema é definido a seguir:

Sejam $I_N = \{1, \cdots, N\}$ o conjunto de $N$ jogadores e $C_\nu$ subconjuntos não vazios de espaços de Banach $X_\nu$, onde $C_\nu$ o conjunto de estratégias de cada jogador $\nu \in I_N$. O vetor de estratégias do conjunto de estratégias $C_\nu$ é denotado por $x^\nu$ e definimos

$$C := \prod_{\nu \in I_N} C_\nu = C_1 \times \cdots \times C_N \quad \text{e} \quad C_{-\nu} := \prod_{\mu \in I_N \setminus \{\nu\}} C_\mu,$$

ambos subconjuntos de $X := X_1 \times \cdots X_N$. A função utilidade $\theta_\nu : C \to \mathbb{R}$ do jogador $\nu$ e sua aplicação ponto-conjunto de restrições $K_\nu : C_{-\nu} \rightrightarrows C_\nu$.

O problema de equilíbrio de Nash generalizado para o jogo generalizado $\{C_\nu, \theta_\nu, K_\nu\}_{\nu \in I_N}$ consiste em encontrar um $\bar{x} = (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^N) \in C$ tal que, para todo $\nu \in I_N$, temos que, $\bar{x}^\nu \in K_\nu(\bar{x}^{-\nu})$ e $\bar{x} = (\bar{x}^\nu, \bar{x}^{-\nu})$ é solução do seguinte problema de minimização

$$\begin{cases} \min_{z_\nu} & \theta_\nu(z^\nu, \bar{x}^{-\nu}) \\ \text{s.a.} & z_\nu \in K(\bar{x}^{-\nu}), \end{cases} \tag{4.2}$$

Encontrar uma solução $\bar{x} \in C$ para PENG é equivalente a resolver o PQE com $f : C \times C \to \mathbb{R}$ dada pela bifunção

$$f(x, y) = \sum_{\nu=1}^{N} [\theta_\nu(y^\nu, x^{-\nu}) - \theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu})],$$

e $K : C \rightrightarrows C$ a aplicação dada pelo produto cartesiano dos conjuntos de estratégias de todos os jogadores

$$K(x) := K_1(x^{-1}) \times \cdots \times K_N(x^{-N}).$$

**Problema de Equilíbrio**

Sejam $X$ um espaço de Banach real e $C$ um subconjunto convexo, fechado e não vazio de $X$. O Problema de Equilíbrio (PE) consiste em

$$(PE): \begin{cases} \text{Encontrar} \quad \bar{x} \in C \quad \text{tal que} \\ f(\bar{x}, y) \geq 0 \quad \forall y \in C. \end{cases} \tag{4.3}$$

O problema de equilíbrio clássico foi estudado por FAN [63], mas apareceu com esse nome em BLUM e OETTLI [23], onde os autores mostraram que este problema engloba vários outros problemas interessantes, tais como: problemas de minimização, problemas de desigualdades variacionais, problemas do ponto fixo, etc. Veja e. g. [20, 64–67] e suas referências. Note que o problema de equilíbrio clássico é um caso particular de PQE em que a aplicação ponto-conjunto $K : C \rightrightarrows C$ é constante, isto é, $K(x) = C$ para todo $x \in C$, onde $C$ é um subconjunto de um espaço de Banach real $X$.

A mais antiga literatura encontrada sobre existência de solução para o PQE, foi estabelecida nas notas de MOSCO [1], onde o autor considera o seguinte problema de quase-equilíbrio: encontrar $u \in C$ tal que

$$u \in Q(u) \quad \text{e} \quad g(u, w) \leq 0, \quad \forall w \in Q(u). \tag{4.4}$$

No seu trabalho a existência de solução para problemas de quase-equilíbrio é obtida, exigindo que o conjunto $C$ seja não vazio, convexo e compacto de um espaço de Hausdorff localmente convexo e certas condições de continuidade sobre a aplicação ponto-conjunto $K : C \rightrightarrows C$.

Em NOOR e OETTLI [2] o PQE é dado da seguinte maneira: encontrar $\overline{x} \in C$, $\overline{y} \in D$ tal que

$$\overline{x} \in S(\overline{x}), \overline{y} \in T(\overline{x}), \quad f(x, \overline{y}) \geq f(\overline{x}, \overline{y}), \quad \forall x \in S(\overline{x}),$$

onde $X$ e $Y$ são espaços vetoriais topológicos, $C \subset X$, $S : C \rightrightarrows C$, $T : C \rightrightarrows D$ and $f : C \times D \to \mathbb{R}$. O PQE é estudado, supondo que $C$ e $D$ são conjuntos convexos, compactos e não vazios, a aplicação $S$ é contínua com valores convexos, compactos e não vazios e $f$ é quaseconvexa na primeira variável e contínua em ambas.

CUBIOTTI [3] mostra resultados de existência, onde as hipóteses de semicontinuidade superior da aplicação ponto-conjunto não é exigida. A ideia consiste em aplicar o Teorema da seleção de Michael (Teorema 3.1"' de MICHAEL [68]), para escolher uma seleção contínua na aplicação ponto-conjunto $K$, a partir dela, usar o teorema do ponto fixo de Brouwer.

Afim de obter resultados de existência para problemas de equilíbrio de Nash, em

CUBIOTTI [27], o autor explora o uso das mesmas técnicas de demonstração para mostrar que o problema de quase-equilíbrio possui solução e, como consequência, resultados de existência de solução para problemas de equilíbrio de Nash são obtidos, com isso, o autor estende o teorema de existência de equilíbrio de DEBREU [60] para problemas de equilíbrio de Nash.

AUSSEL *et al.* [4] estudam o problema de quase-equilíbrio definido em (2), abordando o seguinte problema de quase-equilíbrio de Minty (PQEM) associado: encontrar $\bar{x} \in K(\bar{x})$, tal que

$$f(y, \bar{x}) \leq 0, \text{ para cada } y \in K(\bar{x}).$$

Eles estabelecem a relação entre o PQE e o PQEM. A existência de solução para PQE em $\mathbb{R}^n$ é desenvolvida usando técnicas de ponto-fixo. Os autores supõe que o conjunto $C$ é não vazio e compacto. As principais ferramentas para mostrar o resultado de existência, consiste em usar o lema de Ky Fan para mostrar que o problema de equilíbrio possui solução e definir uma aplicação ponto-conjunto a partir do conjunto solução. Sobre certas condições, é mostrado que o conjunto solução é fechado, convexo e a aplicação ponto-conjunto definida a partir dele é semicontínua inferior. Além disso, os autores usam o teorema do ponto fixo de Kakutani [69].

CASTELLANI e GIULI [5] estabelecem a existência de solução para PQE em espaços de Banach separáveis, estendendo alguns resultados de CUBIOTTI [27], e, como consequência, a existência de solução para problemas de equilíbrio de Nash generalizados é obtida. Em seu trabalho é usada a mesma ferramenta que [3]. A compacidade do conjunto de restrições $C$, entre outras condições é exigida, para aplicar o teorema da seleção de Michael e o teorema do ponto fixo de Schaulder.

Entraremos em mais detalhes nas seções a seguir.

## 4.1 Existência de solução para o Problema de Quase-Equilíbrio

Nesta seção apresentamos o problema de quase-equilíbrio e alguns resultados de existência encontrados na literatura. Inicialmente, apresentamos o PQE estudado por MOSCO [1], em seguida exibimos os principais resultados de existência de solução dados em NOOR e OETTLI [2], CUBIOTTI [3], AUSSEL *et al.* [4], CASTELLANI e GIULI [5] e COTRINA e ZÚÑIGA [26].

### 4.1.1 O PQE de MOSCO [1]

Considera o seguinte Problema de Quase-Equilíbrio:

$$PQE(g,Q) : \begin{cases} \text{Encontrar} \quad u \in C \ \text{ tal que} \\ u \in Q(u) \ \text{ e } \ \ g(u,w) \leq 0, \quad \forall w \in Q(u). \end{cases} \tag{4.5}$$

O autor trabalha com as seguintes definições:

**Definição 4.1** *A função $g$ é hemicontínua em $C \times C$, quando $g(x+t(y-x), y)$ na variável $t \in [0,1]$ é semicontínua inferior quando $t \searrow 0$ para quaisquer $x$, $y \in C$.*

**Definição 4.2** *A função $g$ é monótona quando $g(u,v)+g(v,u) \geq 0$ para todo $u, v \in C$*

**Definição 4.3** *Uma aplicação $Q : C \rightrightarrows C$ é semicontínua superior quando, para toda sequência generalizada $(u_\alpha, v_\alpha)$ convergindo para $(u,v)$ em $C \times C$, satisfazendo $v_\alpha \in Q(u_\alpha)$, tivermos que $v \in Q(u)$.*

**Definição 4.4** *Uma aplicação $Q : C \rightrightarrows C$ é semicontínua inferior quando: se $u_\alpha$ for uma sequência generalizada convergindo para $u \in C$, então, para cada $w \in C$, existe $w_\alpha \in Q(u_\alpha)$ tal que $w_\alpha$ converge para $w \in C$.*

**Definição 4.5** *Uma aplicação $Q : C \rightrightarrows C$ é contínua quando for semicontínua superior e semicontínua inferior.*

**Teorema 4.1** *(Teorema 7.1 pág 110 de MOSCO [1]) Suponha que o problema de quase-equilíbrio* (4.5) *satisfaça as seguintes condições:*

*(a) $C$ é um subconjunto não-vazio, convexo e compacto de um espaço real de Hausdorff localmente convexo;*

*(b) $Q : C \rightrightarrows C$ é uma aplicação ponto-conjunto contínua (4.5) que associa um subconjunto convexo, fechado e não vazio $Q(u)$ de $C$, para cada $u \in C$;*

*(c) $g : C \times C \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferior e tal que $g(u,u) \leq 0$ para todo $u \in C$;*

*(d) $g$ é monótona 4.2 em $C$;*

*(e) $g$ é hemicontínua 4.1 em $C \times C$;*

*(f) $g(u,\cdot) : C \to \mathbb{R}$ é côncava e semicontínua superior, para cada $u \in C$.*

*Então $PQE(K,g)$ possui solução.*

### 4.1.2 O PQE de NOOR e OETTLI [2]

Estuda o seguinte Problema de quase-equilíbrio:

Encontrar $\overline{u} \in X$, $\overline{y} \in Y$ tais que

$$\overline{u} \in C, \overline{u} \in K(\overline{u}), \overline{y} \in T(\overline{u}), \quad f(v, \overline{y}) \geq f(\overline{u}, \overline{y}), \quad \forall v \in K(\overline{u}), \tag{4.6}$$

onde $X$ e $Y$ são espaços vetoriais topológicos, $C \subset X$, $K : C \rightrightarrows X$, $T : C \rightrightarrows Y$ e $f : C \times Y \to \mathbb{R}$. Exibimos a seguir um dos seus principais teoremas de existência de solução:

**Teorema 4.2 (NOOR e OETTLI [2])** *Para $C \subset X$, $D \subset Y$, $S : C \times D \rightrightarrows C$, $T : C \times D \rightrightarrows D$, $f : C \times D \to \mathbb{R}$, $g : C \times D \to \mathbb{R}$. Suponha que valem as seguintes hipóteses:*

*(i) $C$ e $D$ são convexos, compactos e não vazios;*

*(ii) $S$ e $T$ são semicontínuas superiores com valores convexos, compactos e não vazios;*

*(iii) $f$ e $g$ são semicontínuas inferiores, $f(\cdot, y)$ e $g(x, \cdot)$ são quaseconvexas;*

*(iv) as funções*

$$F(x, y) := \min\{f(\xi, y) : \xi \in S(x, y)\},$$

$$G(x, y) := \min\{g(x, \eta) : \eta \in T(x, y)\}$$

*são semicontínuas superiores em $C \times D$.*

*Então existe $(\bar{x}, \bar{y}) \in C \times D$ tal que*

$$\begin{cases} \bar{x} \in S(\bar{x}, \bar{y}), & f(x, \bar{y}) \geq f(\bar{x}, \bar{y}), \quad \forall x \in S(\bar{x}, \bar{y}), \\ \bar{y} \in T(\bar{x}, \bar{y}), & g(\bar{x}, y) \geq g(\bar{x}, \bar{y}), \quad \forall y \in T(\bar{x}, \bar{y}). \end{cases} \tag{4.7}$$

Como aplicação do teorema anterior, os autores obtêm o seguinte resultado:

**Teorema 4.3** *Para $C \subset X$, $D \subset Y$, $S : C \rightrightarrows C$, $T : C \rightrightarrows D$, $f : C \times D \to \mathbb{R}$. Suponha que valem as seguintes condições:*

*(i) $C$ e $D$ são convexos, compactos e não vazios;*

*(ii) $T$ é semicontínua superior com valores convexos, compactos e não vazios;*

*(iii) $S$ é contínua com valores convexos, compactos e não vazios;*

*(iv) $f(\cdot, \cdot)$ é quaseconvexa na primeira variável e contínua am ambas.*

*Então, existe $(\overline{x}, \overline{y}) \in C \times D$ tal que*

$$\overline{x} \in S(\overline{x}), \overline{y} \in T(\overline{x}), \quad f(x, \overline{y}) \geq f(\overline{x}, \overline{y}), \quad \forall x \in S(\overline{x}).$$

### 4.1.3 O PQE de CUBIOTTI [3]

Dados um subconjunto não vazio $C \subset \mathbb{R}^n$, um subconjunto não vazio $D$, duas funções $T : C \to D$, $f : \mathbb{R}^n \times D \to \mathbb{R}$ e uma aplicação ponto-conjunto $S : C \rightrightarrows \mathbb{R}^n$. O problema de quase-equilíbrio considerado em [3] consiste em encontrar $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\hat{x} \in C, \hat{x} \in S(\hat{x}) \quad \text{e} \quad f(\hat{x}, T\hat{x}) \leq f(x, T\hat{x}), \quad \forall x \in S(\hat{x}). \tag{4.8}$$

O autor mostra a existência de solução de problemas de quase-equilíbrio exigindo também a compacidade do conjunto $C$. Além disso, é usada a semicontinuidade inferior da aplicação ponto-conjunto $T : C \rightrightarrows \mathbb{R}^n$.

**Definição 4.6** *Sejam $X, Y$ dois espaços topológicos. Uma aplicação ponto-conjunto $F : X \rightrightarrows Y$ é chamada de semicontínua inferior em $X$ se, para cada aberto $\Omega \subset Y$, o conjunto*

$$F^{-}(\Omega) := \{x \in X : F(x) \cap \Omega \neq \emptyset\}$$

*é aberto em $X$.*

**Definição 4.7** *Uma aplicação ponto-conjunto $F : X \rightrightarrows Y$ é chamada de semicontínua superior em $X$ se, o conjunto para cada fechado $Q \subset Y$, o conjunto $F^{-}(Q)$ é fechado em $X$. Em particular, quando $X = Y$, a aplicação $F$ ser semicontínua superior equivale a dizer que o conjunto $\{x \in X : x \in F(x)\}$ é fechado.*

**Definição 4.8** *Sejam $X$, $Y$ dois espaços topológicos e $F : X \rightrightarrows Y$ uma aplicação ponto-conjunto. Uma seleção de $F$ é uma função $\varphi : X \to Y$ tal que $\varphi(x) \in F(x)$, para cada $x \in X$. Uma seleção contínua de $F$ é uma seleção de $F$, onde $\varphi$ é uma função contínua.*

**Teorema 4.4 (Teorema 3.1"' de MICHAEL [68])** *Toda aplicação ponto-conjunto semicontínua inferior $F$, de um espaço perfeitamente normal $T_1$ em um espaço de Banach separável $Y$ com valores convexos e não vazios, admite uma seleção contínua.*

**Teorema 4.5 (Ponto fixo)** *Seja $C$ um conjunto convexo e compacto de um espaço de Banach. Então toda função contínua $\phi : C \to C$ possui um ponto fixo.*

**Teorema 4.6** *Sejam $C \subset \mathbb{R}^n$, $D$ um conjunto não vazio, $T : C \to D$ e $f : C \times D \to \mathbb{R}$ duas funções. Seja $S : C \rightrightarrows C$ uma aplicação ponto-conjunto. Suponha que:*

*(a) $C$ não vazio, compacto e convexo;*

*(b) $S$ é semicontínua inferior com valores convexos não vazios e o conjunto*

$$E := \{x \in C : x \in S(x)\}$$

*é fechado;*

*(c) para $x \in C$ a função $f(\cdot, Tx)$ é quaseconvexa;*

*(d) a aplicação ponto-conjunto $\Phi : C \rightrightarrows C$ definida por*

$$\Phi(x) = \{v \in S(x) : f(x, Tx) > f(v, Tx)\}$$

*é semicontínua inferior.*

*Então o problema 4.8 possui solução.*

A ideia da prova consiste em aplicar o teorema da seleção de Michael 4.4, para escolher uma seleção contínua (4.8) na aplicação $S$ e a partir dela, usar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Usando as mesmas técnicas de demonstração, em [27] obtém o seguinte resultado:

**Teorema 4.7 (CUBIOTTI [27])** *Sejam $X$ um conjunto convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma : X \rightrightarrows X$ uma aplicação ponto-conjunto e $\phi : X \times X \to \mathbb{R}$ uma função real. Suponha que:*

*(i) $\Gamma$ é semicontínua inferior com valores convexos e não vazios;*

*(ii) o conjunto de pontos fixos $\Delta := \{x \in X : x \in \Gamma(x)\}$ é fechado;*

*(iii) o conjunto $\{(x, y) \in X \times X : \phi(x, y) \leq 0\}$ é fechado;*

*(iv) para cada $x \in X$ a função $\phi(x, \cdot)$ é quasecôncava em $\Gamma(x)$;*

*(v) para cada $x \in \Delta$, temos que $\phi(x, x) \leq 0$.*

*Então existe $\hat{x} \in X$ tal que $\hat{x} \in \Gamma(\hat{x})$ e $\sup_{y \in \Gamma(\hat{x})} \phi(\hat{x}, y) \leq 0$.*

### 4.1.4 O PQE de AUSSEL *et al.* [4]

Aborda o seguinte problema de quase-equilíbrio de Minty (QMEP) associado:

$$\begin{cases} \text{encontrar } \bar{x} \in K(\bar{x}), \text{ tal que} \\ f(y, \bar{x}) \leq 0, \text{ para todo } y \in K(\bar{x}). \end{cases} \tag{4.9}$$

Além disso, estabelece a relação entre QEP e QMEP, exigindo a seguinte hipótese para a bifunção $f$:

**Definição 4.9** *Uma bifunção $f$ possui a propriedade do sinal superior em $x \in K$, se, para cada $y \in K$, vale a seguinte implicação:*

$$f(x_t, x) \leq 0, \quad \forall t \in (0,1) \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) \geq 0,$$

*onde $x_t := (1-t)x + ty$.*

**Definição 4.10** *Uma bifunção $f : X \times X \to \mathbb{R}$ é chamada de quasemonótona em $C$ se, para cada $x, y \in C$, vale que*

$$f(x,y) > 0 \Rightarrow f(y,x) \leq 0.$$

**Definição 4.11** *Uma bifunção $f : X \times X \to \mathbb{R}$ é propriamente quasemonótona em $C$ se, para cada $x_1, x_2, \cdots, x_m \in C$, e para cada $x \in conv\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$, existe $i \in \{1, 2, \cdots, m\}$ tal que*

$$f(x_i, x) \leq 0.$$

**Definição 4.12** *Uma bifunção $f : X \times X \to \mathbb{R}$ é pseudomonótona em $C$ se, para cada $x, y \in C$, vale que*

$$f(x,y) \geq 0 \Rightarrow f(y,x) \leq 0.$$

**Definição 4.13** *Uma função $h : X \to \mathbb{R}$ é chamada de semiestritamente quaseconvexa em um subconjunto convexo $C$, se $h$ for quaseconvexa em $K$ e*

$$h(x) < h(y) \Rightarrow h(z) < h(y), \quad \forall z \in [x, y[,$$

*para todo $x, y \in C$*

**Hipótese 4.1** *$f(x,x) = 0$, para cada $x \in C$.*

**Hipótese 4.2** *$f(x,\cdot)$ é semiestritamente quaseconvexa, para cada $x \in C$.*

**Hipótese 4.3** *$f(x,\cdot)$ é semicontínua inferior, para cada $x \in C$.*

A existência de solução para problemas de quase-equilíbrio em $\mathbb{R}^n$ é provada usando técnicas de ponto fixo. Exibimos a seguir o seu principal teorema de existência de solução para QEP.

**Teorema 4.8 (AUSSEL *et al.* [4])** *Seja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma bifunção, $C$ um subconjunto não vazio e compacto de $\mathbb{R}^n$ e $K : C \rightrightarrows C$ uma aplicação ponto conjunto. Suponha que valem as seguintes propriedades:*

*(i) A aplicação $K$ é fechada e semicontínua inferior, com valores convexos, e $int(K(x)) \neq \emptyset$, para todo $x \in C$;*

*(ii)* $f$ *tem a propriedade do sinal superior em* $C$ *(4.9);*

*(iii)* $int(K(x)) \neq \emptyset$, *para todo* $x \in C$ *e, para cada* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e toda sequência* $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^n$ *convergindo para* $y$, *vale que*

$$\liminf_{n \to +\infty} f(y_n, x) \leq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0,$$

*ou, para cada* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *e todas sequências* $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \mathbb{R}^n$, *convergindo para* $x, y$ *respectivamente, vale que*

$$\liminf_{n \to +\infty} f(y_n, x_n) \leq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0,$$

*(iv)* $f$ *é propriamente quasemonótona (4.11) e satisfaz as hipóteses (4.2) e (4.3).*

*Então o problema de quase-equilíbrio QEP admite pelo menos uma solução.*

As principais ferramentas para provar a existência de solução de PQE em AUSSEL *et al.* [4], consiste em usar o Lema de Ky Fan [37] para mostrar que o problema de equilíbrio CFP possui solução e definir uma aplicação ponto-conjunto a partir do conjunto solução. Sob determinadas hipóteses, é mostrado que o conjunto solução é convexo fechado e a aplicação ponto-conjunto definida a partir dele, é semicontínua superior. Assim é possível aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Kakutani [69] para mostrar que existe um ponto fixo e portanto uma solução para o QMEP.

**Teorema 4.9 (KAKUTANI [69])** *Seja* $X \subset \mathbb{R}^n$ *um conjunto fechado, limitado e convexo. Para cada* $x \in X$, *seja* $F(x)$ *um subconjunto de* $X$, *não vazio e convexo. Suponha que o gráfico da aplicação ponto-conjunto* $F : X \rightrightarrows X$ *é fechado em* $X \times X$. *Então existe um ponto* $x^* \in X$ *tal que* $x^* \in F(x^*)$.

Aqui, necessariamente é usada a compacidade do conjunto $C$. A propriedade do sinal superior garante que toda solução do QMEP é solução do QEP. Assim, a existência de solução é obtida.

### 4.1.5 O PQE de CASTELLANI e GIULI [5]

Afim de estender o resultado em CUBIOTTI [3], os autores estabelecem a existência de solução para problemas de quase-equilíbrio em dimensão infinita, mais especificamente em espaços de Banach separáveis, denotado por $\mathbb{X}$, sem exigir a semicontinuidade inferior da aplicação ponto-conjunto $K$. Além disso, os valores da aplicação $K$ pertencem a uma determinada família de conjuntos, denotada por $\mathcal{D}(\mathbb{X})$.

**Definição 4.14** *Seja $C \subseteq \mathbb{X}$ um conjunto convexo. Um conjunto convexo $S \subset C$ é uma face de $C$ se, $x_1, x_2 \in C$, $t \in (0,1)$ e $tx_1 + (1-t)x_2 \in S$, implica que $x_1, x_2 \in S$. Quando a face contém um único ponto, este ponto é chamado de ponto extremo de $C$.*

**Definição 4.15** *Seja $C$ um subconjunto convexo de $\mathbb{X}$ e $\mathcal{F}$ a coleção (possivelmente vazia) de todas as faces fechadas de $clC$. Então*

$$I(C) := C \setminus \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$$

*é o conjunto dos pontos interiores de $C$.*

$$\mathcal{D}(\mathbb{X}) = \{C \subseteq \mathbb{X} : C \text{ é convexo e } I(clC) \subseteq C\}.$$

Esta família de conjuntos foi introduzida em MICHAEL [68], onde foi mostrado que contém todos os convexos fechados ou com interior não vazio. Além disso, quando $\mathbb{X}$ é um espaço de dimensão finita, $\mathcal{D}(\mathbb{X})$ coincide com a família de todos os conjuntos convexos.

**Teorema 4.10 (Seleção de Michael)** *Toda aplicação ponto-conjunto $F$ semi-contínua inferior de um espaço perfeitamente normal $T_1$ em um espaço de Banach separável $\mathcal{Y}$ com valores não vazios na classe $\mathcal{D}(\mathbb{Y})$ admite uma seleção contínua.*

**Teorema 4.11 (ponto fixo de Schauder)** *Seja $C$ um subconjunto convexo e compacto de um espaço de Banach. Toda função contínua $\varphi : C \to C$ possui um ponto fixo.*

No teorema de existência de solução para problemas de quase-equilíbrio de CASTELLANI e GIULI [5], a compacidade do conjunto $C$ ainda é exigida e a semicontinuidade inferior da aplicação ponto-conjunto $K : C \rightrightarrows C$ também, para então, aplicar o teorema da seleção de Michael 4.10 e o teorema do ponto fixo de Schaulder 4.11. Enunciamos seu principal resultado a seguir:

**Teorema 4.12 (CASTELLANI e GIULI [5])** *Seja $\mathbb{X}$ um espaço de Banach separável e $C \subset \mathbb{X}$ um subconjunto convexo e compacto. Suponha que a aplicação $K : C \rightrightarrows C$ seja semicontínua inferior com $K(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{X})$, não vazia para cada $x \in C$ e $fix(K) := \{x \in C : x \in K(x)\}$ fechado. Além disso, suponha que $f(x,x) \geq 0$, para todo $x \in C$, e o conjunto de nível*

$$\{y \in C : f(x,y) < 0\}$$

*seja convexo para todo $x \in fix(K)$ e o conjunto*

$$\{(x, y) \in fix(K) \times C : f(x, y) < 0\}$$

*seja aberto em $fix(K) \times C$. Então QEP possui solução.*

Como caso particular, é provada a existência de solução para o problema de equilíbrio de Nash generalizado. Neste trabalho é usada a mesma técnica de demonstração de CUBIOTTI [3].

Para métodos computacionais para problemas de quase-equilíbrio no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, veja por exemplo, BIGI e PASSACANTANDO [70] e suas referências.

# Capítulo 5

# Existência de Solução para Problema de Quase-Equilíbrio

Neste capítulo apresentamos, sob hipóteses razoáveis, condições para existência de solução de problemas de quase-equilíbrio usando a teoria FKKM. Além disso, aplicamos a ferramenta desenvolvida na obtenção de existência de solução para problemas de desigualdades quase-variacionais (DQV) e problemas de equilíbrio de Nash generalizado (PENG).

## 5.1 Existência de Solução

Sejam $X$ um espaço de Banach real e $C$ um subconjunto fechado, convexo e não vazio de $X$. Seja $f : C \times C \to \mathbb{R}$ uma bifunção tal que $f(x, x) = 0$, para cada $x \in C$. Seja $K : C \rightrightarrows C$ uma aplicação ponto-conjunto. O problema de quase-equilíbrio consiste em

$$PQE(K, f) : \begin{cases} \text{encontrar} \quad \bar{x} \in K(\bar{x}) \quad \text{tal que} \\ f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K(\bar{x}). \end{cases} \tag{5.1}$$

O problema de quase-equilíbrio (PQE) possui, como casos particulares, o problema de equilíbrio clássico, o problema de desigualdades quase-variacionais, o problema de equilíbrio de Nash generalizado, etc. Veja por exemplo, BLUM e OETTLI [23], IUSEM [7], IUSEM *et al.* [6], AUSSEL e COTRINA [59], JACINTO [24], FACCHINEI e KANZOW [25] e suas referências.

Devido a sua estrutura flexível e adaptável, existência de soluções para o PQE tem sido pesquisada por muitos autores, por exemplo, MOSCO [1], NOOR e OETTLI [2], AUSSEL *et al.* [4], CASTELLANI e GIULI [5], COTRINA e ZÚÑIGA [26], CUBIOTTI [3] e suas referências.

Como visto no capítulo anterior, MOSCO [1], NOOR e OETTLI [2], AUSSEL *et al.* [4], CUBIOTTI [3, 27], CASTELLANI e GIULI [5] e COTRINA e ZÚÑIGA [26] mostram resultados de existência de solução para o PQE exigindo a compacidade do conjunto de restrições $C$. Nossa abordagem é muito importante, já que exigimos que o conjunto $C$ seja fechado e nossa hipótese em $f$ e $K$ que pode ser mais fraca que quaseconvexidade, dependendo das propriedades da aplicação $K$. Além disso, para atingir o nosso objetivo, a nossa principal ferramenta foi o Lema FKKM generalizado, estabelecido em JACINTO e SCHEIMBERG [9] e exploramos a teoria KKM generalizada.

Relembramos algumas definições vistas no Capítulo 1.

**Definição 5.1** *Sejam $A$ e $B$ subconjuntos não vazios de $X$ tal que $B$ é convexo. Uma aplicação ponto-conjunto $G : A \rightrightarrows B$ é chamada de KKM se, para cada subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_p\}$ de $A$, existe um subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_p\}$ de $B$ tal que, para todo subconjunto $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\} \subseteq \{x_1, \cdots, x_p\}$, vale que*

$$co\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} G(y_{i_j}).$$

**Definição 5.2** *Sejam $A$ e $B$ subconjuntos não vazios de $X$. A aplicação ponto-conjunto $G : A \rightrightarrows B$ satisfaz a propriedade de transferência de fechos se, para cada $y \in A$, $x \in B$ e $x \notin G(y)$, existe um elemento $y' \in A$ tal que $x \notin cl_B G(y')$.*

A seguinte caracterização da Definição 5.2 é dada em TIAN [39].

**Lema 5.1** *Uma aplicação ponto-conjunto $G : A \rightrightarrows B$ satisfaz a propriedade de transferência de fechos se, e somente se,*

$$\bigcap_{y \in A} G(y) = \bigcap_{y \in A} cl_B G(y).$$

Note que, quando uma aplicação ponto-conjunto é fechada, isto é, $G(y) = cl_B G(y)$, então ela satisfaz a propriedade de transferência de fechos.

O próximo resultado terá um papel importante no desenvolvimento do nosso trabalho, pode ser visto em JACINTO e SCHEIMBERG [9], Teorema 3.1.

**Teorema 5.1** *Sejam $A$ e $B$ dois subconjuntos não vazios de tal que $B$ é convexo e seja $G : A \rightrightarrows B$ uma aplicação ponto-conjunto. Então $cl_B G : A \rightrightarrows B$ é uma aplicação KKM generalizada se, e somente se, a família de conjuntos $\{cl_B G(y) : y \in A\}$ possui a propriedade da interseção finita, ou seja, qualquer interseção finita de subconjuntos da família é não vazia.*

Relembramos o teorema que será usado para provar a existência de solução do problema de quase-equilíbrio, estabelecido em JACINTO e SCHEIMBERG [9].

**Teorema 5.2** *Sejam $A$ e $B$ subconjuntos não vazios de um espaço vetorial real topológico de Hausdorff $X$ tal que $B$ é convexo. Suponha que a aplicação $G : A \rightrightarrows B$ verifica as seguintes condições:*

*(i)* $cl_B G : A \rightrightarrows B$ *é uma aplicação KKM generalizada;*

*(ii)* $G$ *possui a propriedade de transferência de fechos de imagem;*

*(iii) existe um subconjunto finito* $A_0$ *de* $A$ *tal que* $\bigcap_{z \in A_0} cl_B G(z)$ *é compacto;*

*então,*

$$\bigcap_{a \in A} G(a) \neq \emptyset.$$

### 5.1.1 Teorema de existencia de solução para o Problema de Quase-Equilíbrio.

O próximo Teorema estabelece condições para existência de solução para o Problema de Quase-Equilíbrio. A demonstração do Teorema é dividida em quatro passos: definiremos uma aplicação $cl_{Fix(K)}G : C \rightrightarrows Fix(K)$ e no Passo 1 mostraremos que a aplicação $G$ : é uma aplicação KKM generalizada, isto é, satisfaz o item (i) do Teorema 5.2; no Passo 2 mostraremos que $G$ satisfaz o item (ii) do Teorema 5.2, isto é, $G$ possui a propriedade de transferência de fecho de imagens; no Passo 3 mostraremos que $G$ satisfaz a condição (iii) do Teorema 5.2 e no Passo 4 mostraremos que um elemento $\bar{x} \in \bigcap_{y \in C} G(y)$ é uma solução do PQE.

**Teorema 5.3** *Seja $X$ um espaço de Banach real e $C$ um subconjunto convexo fechado e não vazio de $X$. Seja $K : C \rightrightarrows C$ uma aplicação ponto-conjunto. Suponha que o conjunto de pontos fixos de $K$, $Fix(K)$ seja não vazio e convexo. Seja $f : C \times C \to \mathbb{R}$ uma bifunção tal que $f(x,x) = 0$, para todo $x \in C$. Suponha que valem as seguintes condições:*

***(Q1)*** *Para todo conjunto finito $\{y_1, \cdots, y_m\} \subset C$, existe um subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_m\}$ de $Fix(K)$, tal que, para todo subconjunto $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$ de $\{x_1, \cdots, x_m\}$ e para todo ponto $x \in co\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$, existe um $j \in I_p$ e uma sequência $\{z^k\} \subset Fix(K)$ com $z^k \in K(z^k)$, convergindo para $x$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$*

$$y_{i_j} \notin K(z^k) \quad ou \quad f(z^k, y_{i_j}) \geq 0.$$

***(Q2)*** *Se, para algum $x \in Fix(K)$ e $y \in K(x)$, valer que*

$$f(x,y) < 0, \tag{5.2}$$

*então, existe um $\epsilon > 0$ e $y' \in C$ tal que:*

$$y' \in K(z), f(z,y') < 0, \quad \forall z \in B(x,\epsilon) \cap Fix(K). \tag{5.3}$$

***(Q3)*** *Existe um subconjunto compacto e não vazio $L$ de $Fix(K)$ e um subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_l\}$ de $C$ tais que, para cada $w \in Fix(K) \setminus L$, existe um $\epsilon > 0$ e um $j \in I_l$ satisfazendo:*

$$y_j \in K(z), \quad f(z, y_j) < 0, \quad \forall z \in B(w,\epsilon) \cap (Fix(K) \setminus L).$$

***Então***, *existe um $\bar{x} \in K(\bar{x})$ tal que*

$$f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K(\bar{x}).$$

*Demonstração:* Primeiramente, definimos a aplicação ponto-conjunto $G : C \rightrightarrows Fix(K)$ por

$$G(y) := \{x \in K(x) : f(x,y) \geq 0 \quad \text{ou} \quad y \notin K(x)\}. \tag{5.4}$$

Note que $\bar{x}$ é solução do PQE$(K,f)$ se, e somente se, $\bar{x} \in \cap_{y\in C} G(y)$. Portanto nosso objetivo é mostrar que $G$ satisfaz as condições do Teorema 5.2 para obter que a interseção $\bigcap_{y\in C} G(y)$ é não vazia.

**Passo 1**: Mostraremos que a aplicação $cl_{Fix(K)}G : C \rightrightarrows Fix(K)$ é uma aplicação KKM generalizada, isto é, satisfaz o item (i) do Teorema 5.2.

Queremos mostrar que, Para todo conjunto finito $\{y_1, \cdots, y_m\} \subset C$, existe um subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_m\}$ de $Fix(K)$, tal que, para todo subconjunto $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$ de $\{x_1, \cdots, x_m\}$, vale que

$$co\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{p} cl_{Fix(K)}G(y_{i_j}).$$

Para isso, seja $\{y_1, \cdots, y_m\}$ um subconjunto finito de $C$. Pela hipótese Q1, existe um subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_m\}$ de $Fix(K)$, tal que, para todo subconjunto $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$ de $\{x_1, \cdots, x_m\}$ e para qualquer ponto $x \in co\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$, existe um $j \in I_p$ e uma sequência $\{z^k\} \subset Fix(K)$ com $z^k \in K(z^k)$, convergindo para $x$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$y_{i_j} \notin K(z^k) \quad \text{ou} \quad f(z^k, y_{i_j}) \geq 0. \tag{5.5}$$

Logo, obtemos que $z^k \in G(y_{i_j})$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $z^k \to x$ $(k \to +\infty)$, temos,

$$x \in cl_{Fix(K)}G(y_{i_j}) \subseteq \bigcup_{l=1}^{p} cl_{Fix(K)}G(y_{i_l}).$$

Assim, $cl_{Fix(K)}G : C \rightrightarrows Fix(K)$ é uma aplicação KKM generalizada.

**Passo 2**: Agora mostraremos que $G$ satisfaz o item (ii) do Teorema 5.2, isto é, $G$ possui a propriedade de transferência de fecho de imagens.

Queremos mostrar que, para cada $y \in C$, $x \in Fix(K)$ e $x \notin G(y)$, então, existe um elemento $y' \in C$ tal que $x \notin cl_{Fix(K)}G(y')$.

De fato, sejam $y \in C$ e $x \in Fix(K)$ tais que $x \notin G(y)$. Desde que $x$ não pertece ao conjunto

$$\{x \in K(x) : f(x,y) \geq 0 \quad \text{ou} \quad y \notin K(x)\},$$

obtemos que,

$$f(x,y) < 0. \quad \text{e} \quad y \in K(x).$$

Logo, pela condição Q2, existe um $\epsilon > 0$ e $y' \in C$ satisfazendo:

$$y' \in K(z), \quad f(z, y') < 0, \quad \forall z \in B(x, \epsilon) \cap Fix(K).$$

Portanto, $x \notin cl_{Fix(K)}G(y')$. Segue que $G$ possui a propriedade de transferência de fechos de imagem.

**Passo 3**: Agora mostraremos que $G$ satisfaz a condição (iii) do Teorema 5.2.

Queremos mostrar que existe um subconjunto finito $A_0$ de $C$ tal que $\bigcap_{z \in A_0} cl_{Fix(K)}G(z)$ é compacto.

Seja $L$ um subconjunto compacto de $Fix(K)$ e seja $\{y_1, \cdots, y_l\}$ um subconjunto finito de $C$ tal que vale (Q3). Tome $A_0 = \{y_1, \cdots, y_l\}$. Mostraremos que $\cap_{j=1}^{l} cl_{Fix(K)}G(y_j) \subseteq L$. Observe que, pelo Teorema 5.1 e pelo Passo 1, obtemos que

$$\bigcap_{j=1}^{l} cl_{Fix(K)}G(y_j) \neq \emptyset.$$

Suponhamos por absurdo que a inclusão não seja válida, isto é, existe $x \in \cap_{j=1}^{l} cl_{Fix(K)}G(y_j)$ tal que $x \notin L$. Como $cl_{Fix(K)}G(\cdot) = clG(\cdot) \cap Fix(K)$, temos que $x \in Fix(K) \setminus L$. Então, em virtude da hipótese (Q3), existe um $\epsilon > 0$ e $j \in I_l$ satisfazendo:

$$y_j \in K(z), \quad f(z, y_j) < 0, \quad \forall z \in B(w, \epsilon) \cap (Fix(K) \setminus L).$$

Logo $z \notin G(y_{i_j}$ para todo $z \in B(x, \epsilon) \cap (Fix(K) \setminus L)$. Portanto $x \notin cl_{Fix(K)}G(y_j)$. Absurdo. Assim, devemos ter

$$\bigcap_{j=1}^{l} cl_{Fix(K)}G(y_j) \subset L. \tag{5.6}$$

Agora, provaremos que esta interseção é um conjunto fechado. Para isso, usando a definição de $cl_{Fix(K)}G(y_j)$ e o fato que $L \subseteq Fix(K)$, obtemos que:

$$cl_{Fix(K)}G(y_j) \cap L = clG(y_j) \cap Fix(K) \cap L = clG(y_j) \cap L, \quad \forall j \in I_l. \tag{5.7}$$

Portanto $cl_{Fix(K)}G(y_j)$ é um conjunto fechado para cada $j \in I_l$. Assim, $\cap_{j=1}^{l}(cl_{Fix(K)}G(y_j) \cap L)$ é fechado. Além disso, por (5.6) e (5.7), obtemos que

$$\bigcap_{j=1}^{l} cl_{Fix(K)}G(y_j) = \bigcap_{j=1}^{l} cl_{Fix(K)}G(y_j) \cap L = \bigcap_{j=1}^{l}(cl_{Fix(K)}G(y_j) \cap L) \subset L.$$

Desde que $L$ é um conjunto compacto e $\cap_{j=1}^{l} cl_{Fix(K)} G(y_j)$ é fechado, segue que $\cap_{j=1}^{l} cl_{Fix(K)} G(y_j)$ é compacto (Teorema 2, pág 68 de BERGE [32]).

**Passo 4**: Agora mostraremos que $\bar{x} \in \bigcap_{y \in C} G(y)$ é uma solução do PQE.

Aplicando o Teorema 5.2, obtemos

$$\bigcap_{y \in C} G(y) \neq \emptyset.$$

Seja $SPQE(f, K, C)$ o conjunto solução do problema de quase-equilíbrio. Mostraremos que, se $x \notin \bigcap_{y \in C} G(y)$, então $x \notin SPQE(f, K, C)$. De fato, se $x \notin K(x)$, então $x \notin SPQE(f, K, C)$, pois as soluções pertencem a $Fix(K)$. Suponha que $x \notin \bigcap_{y \in C} G(y)$, então para cada $y \in C$, $x$ não pertence ao conjunto:

$$\{x \in K(x) : f(x, y) \geq 0 \quad \text{ou} \quad y \notin K(x)\}.$$

Logo $f(x, y) > 0$ e $y \in K(x)$. Portanto $x \notin SPQE(f, K, C)$. Assim,

$$\bigcap_{y \in C} G(y) \subset SPQE(f, K, C).$$

Portanto $\bar{x} \in \bigcap_{y \in C} G(y)$ é solução de do problema:

$$\begin{cases} \text{encontrar} \quad \bar{x} \in K(\bar{x}) \ \ \text{tal que} \\ f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in K(\bar{x}). \end{cases}$$

□

### 5.1.2 Comparações e Exemplos

Exibimos no exemplo a seguir uma função que satisfaz as hipóteses do Teorema 5.3.

**Exemplo 5.1** *Seja $C := \mathbb{R}_+$ e $K : C \rightrightarrows C$ definido por $K(x) = [0, 1] \cap [2x, 3x]$. Seja*

$$f(x, y) = x(y - x)$$

*Verificaremos agora, que a função definida acima, satisfaz as condições do Teorema 5.3, e portanto, o problema de quase-equilíbrio associada a ela possui solução. Note que $Fix(K) = [0, 1]$.*

*(Q1) Seja $\{y_1, ..., y_m\}$ um subconjunto finito de $C$. Defina $x_i = x \equiv 0$, $\forall i \in I_m$ e a sequência $z^k \equiv 0$, $k \in \mathbb{N}$. Então $z^k \to x = conv\{x\}$ e*

$$f(z^k, y_j) = 0, \ \ \forall\, j = 1, \ldots, m \ \ e \ \forall \ \ k \in \mathbb{N}.$$

*(Q2) Se $x \in Fix(K), y \in K(x)$ tais que $f(x,y) = x(y-x) < 0$, então $y < x \neq 0$. Tome $\epsilon = (x-y)/4 > 0$ e $y' = y$. Então $z \in B(x,\epsilon) \cap Fix(K)$ implica que $0 \neq z > y'$ e o resultado segue.*

*(Q3) Tome o compacto $L = \{0\}$ e o subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_l\}$ de $C$ definido por $y_i := 0$, $\forall i \in I_l$. Tome qualquer $\epsilon > 0$ e obteremos o resultado desejado.*

*O Teorema 5.3 garante que o problema possui solução. De fato $\bar{x} = 0$ é uma solução para o problema de quase-equilíbrio.*

Note que a hipótese Q1 do Teorema 5.3, exige uma condição sobre $f$ e uma condição sobre a aplicação ponto-conjunto $K$. Nas condições exigidas na literatura sobre existência de solução para problemas de quase-equilíbrio, as condições assumidas são convexidade ou quaseconvexidade de $f(x,\cdot) : C \to \mathbb{R}$, uma pergunta natural é se a hipótese Q1 está relacionada com convexidade ou quaseconvexidade. Nos exemplos a seguir podemos verificar.

O seguinte exemplo mostra que quaseconvexidade em $y$ de $f(x,y)$, não implica na hipótese Q1.

**Exemplo 5.2** *Sejam $C := \mathbb{R}$ e $K : C \rightrightarrows C$ uma aplicação ponto-conjunto definida por $K(x) = [0,x]$, se $x \geq 0$ e $K(x) = [x/2, 0]$, se $x < 0$. Defina a bifunção $f : C \times C \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) := y^3 - x^3$. Tome qualquer subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_m\}$, onde $y_i := -2$, $\forall i \in I_m$ e note que $f(y_i, x) < 0$, para cada $x \in Fix(K)$.*

O próximo exemplo mostra que se uma função $f(x,y)$ satisfaz Q1, ela não necessariamente é quaseconvexa em $y$.

**Exemplo 5.3** *Seja $C := \mathbb{R}$, $K : C \rightrightarrows C$ definido por $K(x) = [0,x]$. Seja $f : C \times C \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) := x(\sin(y) - \sin(x))$. Para mostrar que $f$ satisfaz Q1, para qualquer subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_m\}$, tome o subconjunto finito $x_i := 0$, $\forall i \in I_m$, então, para cada $x \in co\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\} = \{0\}$, defina a sequência $z^k := x$ ($\forall k \in \mathbb{N}$). A função $f$ não é quaseconvexa em $y$.*

Como podemos verificar nos exemplos 5.2 e 5.3, a hipótese Q1 e a quaseconvexidade de $f(x,\cdot)$ são independentes. De fato, a hipótese Q1 exige ao mesmo tempo uma condição sob $f$ e sob a aplicação $K$. Uma pergunta relacionada a isso é: que condição podemos exigir para a aplicação $K$ para que uma função $f(x,\cdot)$ quaseconvexa, satisfaça a hipótese Q1? Afim de estabelecer a relação entre essas hipóteses, precisaremos das definições 5.3 a 5.6 abaixo.

### Um Estudo da Hipótese Q1 e as Hipóteses da Literatura.

Nossas hipóteses

- $C$ subconjunto não vazio, convexo e fechado de um espaço de Banach real $X$.
- Seja $K : C \rightrightarrows C$ uma aplicação ponto-conjunto.
- $Fix(K)$ não vazio e convexo.
- A bifunção $f : C \times C \to \mathbb{R}$ satisfaz $f(x, x) = 0$, $\forall x \in C$.

Hipóteses de CHANG e ZHANG [38]:

- $X, Y$ espaços vetoriais topológicos.
- $A, B$ subconjuntos não vazios e convexos de $X, Y$ respectivamente.

**Definição 5.3** *Uma função $h : C \to \mathbb{R}$ é quaseconvexa em $C$ se, e somente se, para todo $x, y \in C$ e todo $z_t = (1 - t)x + ty \in [x, y]$, com $t \in [0, 1]$,*

$$h(z_t) \leq \max\{h(x), h(y)\}.$$

**Definição 5.4 (pag. 58 de AUSSEL *et al.* [4])** *Uma função $h : C \to \mathbb{R}$ é semiestritamente quaseconvexa em $C$ se $h$ é quaseconvexa em $C$ e*

$$h(x) < h(y) \Rightarrow h(z_t) < h(y), \quad \forall z_t \in [x, y[.$$

*Para todo $x, y \in C$. Onde $z_t = (1 - t)x + ty$, $\forall t \in [0, 1[$.*

**Definição 5.5 (pag. 209 de CHANG e ZHANG [38])** *Uma função $f : A \times A \to \mathbb{R}$ é chamada **0-quaseconvexa diagonal** em $y$ se, para todo subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_m\} \subseteq A$ e para cada $y_0 \in co\{y_1, \cdots, y_m\}$, existe um $j \in I_m$ tal que*

$$f(y_0, y_j) \geq 0.$$

**Definição 5.6 (pag. 211 de [38])** *Seja $f : A \times B \to \mathbb{R}$. Então $f$ é chamada de **0-quaseconvexa generalizada** em $y$ se, para todo subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_m\} \subset A$, existe um subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_m\} \subset B$ tal que, para cada subconjunto finito $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\} \subset \{x_1, \cdots, x_n\}$ e qualquer $x_0 \in co\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$, existe um $j \in I_p$ tal que*

$$f(x_0, y_{i_j}) \geq 0.$$

Quando $X = Y$ e $A = B$, então $f$ 0-quaseconvexa diagonal implica $f$ 0-quaseconvexa generalizada.

Na sequência lembramos nossa hipótese Q1 para $f : C \times C \to \mathbb{R}$:

**(Q1)** Para todo subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_m\} \subset C$, existe um subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_m\}$ of $Fix(K)$, tal que, para cada subconjunto $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$ of $\{x_1, \cdots, x_m\}$ e para todo ponto $x \in co\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$, existe um $j \in I_p$ e uma sequência $\{z^k\} \subset Fix(K)$, convergindo para $x$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$ vale que

$$y_{i_j} \notin K(z^k) \quad \text{ou} \quad f(z^k, y_{i_j}) \geq 0.$$

A Proposição 5.1 abaixo estabelece a relação entre quaseconvexidade em $y$ e 0-quaseconvexa diagonal em $y$.

**Proposição 5.1** *Seja $f : A \times A \to \mathbb{R}$ uma bifunção e seja $A$ um subconjunto não vazio e convexo de $X$. Se para cada $x \in A$ valer que:*

*(i)* $f(x, x) \geq 0$;

*(ii) o conjunto $\{y \in A : f(x, y) < 0\}$ é convexo.*

*Então $f$ é 0-quaseconvexa diagonal na segunda variável (Definição 5.5).*

*Demonstração:* Suponha por absurdo que exista um subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_m\}$ of $C$ e $y_0 \in \text{co}\{y_1, \cdots, y_m\}$ tal que $f(y_0, y_i) < 0$, para cada $i \in I_m$, assim,

$$y_0 \notin \{x \in A; f(x, y_i) \geq 0\}, \qquad \forall i \in I_m$$

Logo

$$f(y_0, y_i) < 0, \qquad \forall i \in I_m,$$

Portanto

$$y_i \in \{y \in A; f(y_0, y) < 0\}.$$

Como o conjunto $\{y \in A; f(y_0, y) < 0\}$ é convexo, temos que

$$\text{co}\{y_1, \cdots, y_m\} \subset \{y \in A; f(y_0, y) < 0\}.$$

Usando o fato que $y_0 \in \text{co}\{y_1, \cdots, y_m\}$, segue que $f(y_0, y_0) < 0$, absurdo. $\square$

**Proposição 5.2** *Seja $f : A \times A \to \mathbb{R}$ uma bifunção e seja $A$ um subconjunto não vazio e convexo de $X$. Se para cada $x \in A$, a função $f(x, \cdot) : A \to \mathbb{R}$ é quaseconvexa (definição 5.3), então ela satisfaz o item (ii) da Proposição 5.1.*

*Demonstração:* De fato, sejam $a, b \in \{y \in A : f(x, y) < 0\}$. Queremos mostrar que, $\forall t \in [0, 1]$, $(1-t)a + tb \in \{y \in A : f(x, y) < 0\}$. Para isso, note que $f(x, a) < 0$ e $f(x, b) < 0$, pois $a, b \in \{y \in A : f(x, y) < 0\}$. Como $f(x, \cdot)$ é quaseconvexa, temos que

$$f(x, (1-t)a + tb) \leq \max\{f(x, a), f(x, b)\} < 0.$$

Logo $(1-t)a + tb \in \{y \in A : f(x,y) < 0\}$. $\square$

Observe que se uma função $f(x,\cdot) : C \to \mathbb{R}$ é quaseconvexa, então ela satisfaz o item (ii) da Proposição 5.1, portanto quando $f(x,\cdot)$ é quaseconvexa em um problema de quase-equilíbrio, então é 0-quaseconvexa diagonal em $y$.

- Sob a hipótese:

$$\forall y \in K(y), \quad \exists x \in K(x), \quad \text{such that} \quad y \notin K(x). \tag{5.8}$$

  a convexidade de $\{y \in Fix(K) : f(x,y) < 0\}$ junto com $f(x,x) \geq 0$, $\forall x \in C$, implica a hipótese Q1. Assim, quaseconvexidade semiestrita de $f(x,\cdot)$ (exigida em [4]), quaseconvexidade de $f(x,\cdot)$ exigida em [3, 5, 26], sob (5.8) implica a hipótese Q1. A hipótese 5.8 também é obtida quando $Fix(K) = C$.

- CUBIOTTI [3] e CASTELLANI e GIULI [5] exigem que o conjunto $Fix(K)$ seja fechado e $C$ seja compacto, assim $Fix(K)$ será compacto. Isso implica nossa hipótese Q3 tomando $L = Fix(K)$.

- Castellani e Giuli [5] exigem os itens (i) e (ii) da Proposição 5.1.

- AUSSEL *et al.* [4] requer $f(x,x) = 0$, $\forall x \in C$, que implica (i) da Proposição 5.1 e também supõe que $f$ é semiestritamente quaseconvexa, que implica (ii) da Proposição 5.1. Para observar a implicação, note que se uma função é semiestritamente quaseconvexa em $C$, por definição ela é quaseconvexa em $C$ e pela Proposição 5.2, funções quaseconvexas satisfazem o item (ii) da Proposição 5.1.

- CUBIOTTI [3] exige quaseconvexidade de $f$, que implica (ii) e $f(x,x) = 0$, $\forall x \in C$, que implica (i) da Proposição 5.1.

Na sequência mostraremos que nossa hipótese Q1 é menos restritiva que as hipóteses da Proposição 5.1, portanto nossa hipótese Q1 é relacionada com as hipóteses de Castellani e Giuli [5], Aussel et. al. [4] e Cubiotti [3].

**Proposição 5.3** *Seja $C$ um subconjunto convexo e não vazio de um espaço de Banach real $X$. Seja $f : C \times C \to \mathbb{R}$ uma bifunção tal que $f(x,x) \geq 0$, $\forall x \in C$. Seja $K : C \rightrightarrows C$ uma aplicação ponto-conjunto com $Fix(K)$ convexo. Se $f$ é 0-quaseconvexa generalizada na segunda variável e $K$ satisfaz:*

$$\forall y \notin K(y), \quad \exists x \in Fix(K) \quad \textit{tal que} \quad y \notin K(x). \tag{5.9}$$

*Então $f$ satisfaz Q1.*

*Demonstração:* Seja $\{y_1, \cdots, y_m\}$ um subconjunto finito de $C$. Suponha que $y_i \in Fix(K)$, $\forall i \in I_m$. Como $f$ é 0-quaseconvexa generalizada, existe um subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_m\}$ de $Fix(K)$ tal que, para todo subconjunto finito $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$ de $\{x_1, \cdots, x_m\}$, e para cada $x \in co\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$, existe um $j \in I_p$, tal que $f(x, y_{i_j}) \geq 0$.. Defina a sequência $z^k := x$, $\forall k \in \mathbb{N}$ e obtemos o resultado desejado.

Se existe um $j \in I_m$ tal que $y_j \notin K(y_j)$, por (5.9), existe $x_j \in Fix(K)$ tal que $y_j \notin K(x_j)$. Defina a sequência $z^k := x_j$. Portanto $f$ satisfaz Q1. □

**Corolário 5.1** *Se $f : C \times C \to \mathbb{R}$ é quaseconvexa em $y$, $f(x,x) \geq 0$, $\forall x \in C$ e $K$ satisfaz:*

$$\forall y \notin K(y), \quad \exists x \in Fix(K) \quad \textit{tal que} \quad y \notin K(x).$$

*Então $f$ satisfaz Q1.*

*Demonstração:* Já que $f(x,x) \geq 0$, $\forall x \in C$ e $f$ é quaseconvexa em $y$, a Proposição 5.1 garante que $f$ é 0-quaseconvexa diagonal, logo $f$ é 0-quaseconvexa generalizada. O resultado segue da Proposição 5.3. □

## 5.2 Aplicações

Nesta seção, estabelecemos algumas aplicações para problemas de desigualdades quase-variacionais (DQV) e problemas de equilíbrio de Nash generalizado (PENG), obtendo resultados de existência de solução para ambos os problemas.

### 5.2.1 Desigualdades Quase-Variacionais

Seja $X$ um espaço de Banach real e $X^*$ seu dual topológico. Seja $C$ um subconjunto fechado, convexo e não vazio de $X$. Dadas duas aplicações ponto-conjunto $T : X \rightrightarrows X^*$ e $K : C \rightrightarrows C$, suponha que $T$ possua valores compactos. O problema de desigualdade quase-variacional (DQV) foi introduzido nos trabalhos de BENSOUSSAN *et al.* [55], BENSOUSSAN e LIONS [56], BENSOUSSAN e LIONS [57, 58] e consiste em

$$QVI(K,f) : \begin{cases} \text{encontrar} \quad \bar{x} \in K(\bar{x}) \ \text{ tal que} \\ \exists x^* \in T(\bar{x}) \ \text{ com } \ \langle x^*, y - \bar{x} \rangle \geq 0, \quad \forall y \in K(\bar{x}). \end{cases}$$

Para verificar que um problema de desigualdade quase-variacional é um caso particular de um problema de quase-equilíbrio, basta considerar a mesma aplicação ponto-conjunto $K$ e definir a seguinte função:

$$f(x,y) = \sup_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x \rangle .$$

Enunciamos a seguir uma aplicação do Teorema 5.3.

**Teorema 5.4** *Seja $C$ um subconjunto não vazio convexo e fechado de um espaço de Banach real $X$. Dada uma aplicação ponto-conjunto $K : C \rightrightarrows C$. Suponha que o conjunto de pontos fixos de $K$ é não vazio e $K(x)$ é fechado, para cada $x \in C$. Assuma que valem as seguintes condições:*

*(i) Para todo subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_m\} \subset C$, existe um subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_m\}$ de $Fix(K)$, tal que, para todo subconjunto finito $\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$ de $\{x_1, \cdots, x_m\}$ e para qualquer $x \in co\{x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}\}$, xiste um $j \in I_p$ e uma sequência $\{z^k\} \subset Fix(K)$, convergindo para $x$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ vale que*

$$y_{i_j} \notin K(z^k) \quad ou \quad \sup_{z_k^* \in T(z^k)} \left\langle z_k^*, y_{i_j} - z^k \right\rangle \geq 0.$$

*(ii) Se, para algum $x \in Fix(K)$ e $y \in K(x)$ valer que*

$$\sup_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x \rangle < 0$$

*então, existe um $\epsilon > 0$ e $y' \in C$, tais que:*

$$y' \in K(z), \quad \sup_{z^* \in T(z)} \langle z^*, y' - z \rangle < 0, \quad \forall z \in B(x, \epsilon) \cap Fix(K).$$

*(iii) Existe um subconjunto compacto e não vazio $L$ de $Fix(K)$ e um subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_l\}$ de $C$ tal que, para cada $w \in Fix(K) \setminus L$, existe um $\epsilon > 0$ e um $j \in I_l$ satisfazendo:*

$$y_j \in K(z), \quad \sup_{z^* \in T(z)} \langle z^*, y_j - z \rangle < 0, \quad \forall z \in B(w, \epsilon) \cap (Fix(K) \setminus L).$$

*Demonstração:* Defina $f : C \times C \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \sup_{x^* \in T(x)} \langle x^*, y - x \rangle$ , o resultado segue diretamente do Teorema 5.3. □

### 5.2.2 Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado

Nesta seção, nosso objetivo é obter um resultado de existência de solução para O problema de equilíbrio de Nash generalizado (PENG). O PENG foi introduzido por DEBREU [60], que generaliza o conceito de problema de equilíbrio de Nash NASH [61, 62]. Uma pesquisa recente (survey) sobre PENG pode ser encontrado em FACCHINEI e KANZOW [25]. O problema é definido a seguir:

Seja $I_N = \{1, \cdots, N\}$ o conjunto de $N$ jogadores e seja $C_\nu$ subconjuntos não vazios de espaços de Banach $X_\nu$, onde $C_\nu$ o conjunto de estratégias de cada jogador

$\nu \in I_N$. Denotamos o vetor de estratégias do conjunto de estratégias $C_\nu$ por $x^\nu$ e definimos

$$C := \prod_{\nu \in I_N} C_\nu = C_1 \times \cdots \times C_N \quad \text{e} \quad C_{-\nu} := \prod_{\mu \in I_N \setminus \{\nu\}} C_\mu,$$

ambos subconjuntos de $X := X_1 \times \cdots X_N$. A função utilidade $\theta_\nu : C \to \mathbb{R}$ do jogador $\nu$ e sua aplicação ponto-conjunto de restrições $K_\nu : C_{-\nu} \rightrightarrows C_\nu$.

O problema de equilíbrio de Nash generalizado para o jogo generalizado $\{C_\nu, \theta_\nu, K_\nu\}_{\nu \in I_N}$ consiste em encontrar um ponto $\bar{x} = (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^N) \in C$ tal que, para qualquer $\nu \in I_N$, temos, $\bar{x}^\nu \in K_\nu(\bar{x}^{-\nu})$ e $\bar{x} = (\bar{x}^\nu, \bar{x}^{-\nu})$ é solução do seguinte problema de minimização

$$\min_{z_\nu \in K(\bar{x}^{-\nu})} \theta_\nu(z^\nu, \bar{x}^{-\nu}), \tag{5.10}$$

isto é, consiste em encontrar um ponto $\bar{x} = (\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^N) \in C$ tal que, para cada $\nu \in I_N$, temos, $\bar{x}^\nu \in K_\nu(\bar{x}^{-\nu})$, $\bar{x} = (\bar{x}^\nu, \bar{x}^{-\nu})$ e $\theta_\nu(z^\nu, \bar{x}^{-\nu}) \geq \theta_\nu(\bar{x}^\nu, \bar{x}^{-\nu})$, para cada $z^\nu \in K(\bar{x}^{-\nu})$. A aplicação $K : C \rightrightarrows C$ é dada por $K(x) = K_1(x^{-1}) \times K_2(x^{-2}) \times \cdots \times K_N(x^{-N})$.

A seguir o teorema que estabelece condições para a existência de solução de PENG.

**Teorema 5.5** *Seja $\{C_\nu, \theta_\nu, K_\nu\}_{\nu \in I_N}$ um jogo generalizado como definido acima. Suponha que o espaço de estratégias $C_\nu$ é um subconjunto fechado, convexo e não vazio de $X$ para cada $\nu \in I_N$. Suponha que $K(x)$ é fechado para cada $x \in C$. Suponha que as seguintes condições são válidas:*

*(i) Para todo subconjunto finito $\{y_1, \cdots, y_m\} \subset C$, existe um subconjunto finito $\{x_1, \cdots, x_m\}$ de $Fix(K)$, tal que, para todo subconjunto $\{x_{j_1}, \cdots, x_{j_p}\}$ de $\{x_1, \cdots, x_m\}$ e para qualquer ponto $x \in co\{x_{j_1}, \cdots, x_{j_p}\}$, existe um $q \in J_p$ e uma sequência $\{z^k\} \subset Fix(K)$, convergindo para $x$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, vale que*

$$y_{i_j} \notin K(z^k) \quad ou \quad \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu((y_{j_q})^\nu, (z^k)^{-\nu}) \geq \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu((z^k)^\nu, (z^k)^{-\nu}).$$

*(ii) Para cada $x, y \in K(x)$ tais que $\sum_{\nu=1}^N \theta_\nu(y^\nu, x^{-\nu}) < \sum_{\nu=1}^N \theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu})$, então, existe um $\epsilon > 0$ e um ponto $\tilde{y} \in C$, tal que $\sum_{\nu=1}^N \theta_\nu(\tilde{y}^\nu, z^{-\nu}) < \sum_{\nu=1}^N \theta_\nu(z^\nu, z^{-\nu})$, $\forall z \in B(x, \epsilon) \cap Fix(K)$.*

*(iii) Existe um subconjunto não vazio e compacto $L$ de $Fix(K)$ e um subconjunto finito $Y_l := \{y_1, \cdots, y_l\}$ de $C$ tal que, para cada $w \in Fix(K) \setminus L$, existe $\epsilon > 0$*

*e $y_j \in Y_l$ satisfazendo:*

$$y_j \in K(z), \ \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu((y_j)^\nu, z^{-\nu}) < \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu(z^\nu, z^{-\nu}), \quad \forall z \in B(w,\epsilon) \cap (Fix(K) \backslash L). \tag{5.11}$$

*Então o Problema de Equilíbrio de Nash Generalizado possui solução.*

*Demonstração:* Defina $f : C \times C \to \mathbb{R}$ por

$$f(x,y) = \sum_{\nu=1}^{N} \theta_\nu(y^\nu, x^{-\nu}) - \theta_\nu(x^\nu, x^{-\nu}) \tag{5.12}$$

e defina a aplicação ponto-conjunto $K : C \rightrightarrows C$ por

$$K(x) := K_1(x^{-1}) \times K_2(x^{-2}) \times \cdots \times K_N(x^{-N}). \tag{5.13}$$

O resultado segue do Teorema 5.3.

□

Note que, a função $f$ na prova do Teorema 5.5 é baseada na função de Nikaido-Isoda NIKAIDO e ISODA [71]. Nós não exigimos nenhum tipo de continuidade da aplicação ponto-conjunto $K$, enquanto que em CUBIOTTI [27], CUBIOTTI e YAO [72] e CASTELLANI e GIULI [5], é exigida a semicontinuidade inferior da aplicação. Em CUBIOTTI [27], CUBIOTTI e YAO [72] e CASTELLANI e GIULI [5], a continuidade de $\theta_\nu$ é exigida, que implica na nossa hipótese (iii).

# Capítulo 6

# Considerações Finais

Neste trabalho estudamos duas classes de problemas importantes na literatura, o Problema de Equilíbrio (PE) e o Problema de Quase-Equilíbrio. Primeiramente, apresentamos o Problema de Equilíbrio e seus resultados sobre existência de solução mais recentes IUSEM [7] e propomos uma regularização do tipo Tikhonov para problemas de equilíbrio em espaços de Banach reflexivo, estendendo o trabalho de OLIVEIRA *et al.* [8]. Mostramos a boa definição da trajetória Tikhonov, mostramos que, sob certas condições a sequência dos subproblemas convergem para a solução do problema de equilíbrio e estudamos condições que garantam que a sequência seja limitada, analisando o que acontece com a trajetória Tikhonov. Construímos um exemplo de uma bifunção de equilíbrio num espaço de Banach reflexivo que não é Hilbert e que satisfaz as hipóteses do trabalho usando os resultados de KIEN [45] e PRUS e SMARZEWSKI [48]. Esta parte do trabalho foi aceita nos Anais do XLVII SBPO 2016, SOUSA *et al.* [49].

No estudo de Problemas de Equilíbrio, procuramos desenvolver um método numérico para encontrar uma solução do PE. Apresentamos uma versão modificada do método trabalhado em SANTOS *et al.* [19], definimos o método do tipo Quase-Newton para poblemas de equilíbrio. Mostramos que sobre certas hipóteses, a sequência gerada pelo nosso método está bem definida, mostramos que o método converge pelo menos linearmente para a solução do problema de equilíbrio usando uma família de matrizes que satisfazem a propriedade da deteriorização limitada. Além disso, apresentamos experimentos numéricos comparando com outros métodos existentes na literatura. Esta parte do trabalho foi submetida no periódico *Optimization Letters*.

No nosso estudo sobre o Problema de Quase-Equilíbrio, definimos o problema e fizemos uma breve apresentação do estado da arte das principais referências da literatura sobre existência de solução do problema de quase-equilíbrio, destacando os principais teoremas e as principais técnicas de demonstração de MOSCO [1], NOOR e OETTLI [2], CUBIOTTI [3], AUSSEL *et al.* [4], CASTELLANI e GIULI

[5] e COTRINA e ZÚÑIGA [26]. Destacamos que, nestes trabalhos são exigitar a hipótese de compacidade no conjunto de restrições. Com a teoria desenvolvida em JACINTO e SCHEIMBERG [9], mostramos o nosso resultado para problemas de quase-equilíbrio: estabelecemos condições para existência de solução de problemas de quase-equilíbrio sem exigir a hipótese de compacidade do conjunto de restrições. Finalmente, aplicamos a ferramenta desenvolvida na obtenção de existência de solução para problemas de desigualdades quase-variacionais (DQV) e problemas de equilíbrio de Nash generalizado (PENG) e comparamos com os trabalhos da literatura.

Como linha de futura pesquisa para Problemas de Equilíbrio e Problemas de Quase-Equilíbrio podemos destacar: métodos numéricos para problemas de quase-equilíbrio, por exemplo, métodos do tipo quase-newton para o problema de quase-equilíbrio ou métodos que podem ter a sub-rotina definida pelo resultado de existência de solução desenvolvido neste trabalho, onde podemos provar boa definição de subproblemas usando o nosso resultado de existência de solução. Além disso, pode-se verificar se é possível desenvolver os métodos em dimensão infinita (em espaços de Hilbert ou Banach).

# Referências Bibliográficas


[1] MOSCO, U. “Implicit variational problems and quasi variational inequalities”. In: *Nonlinear Operators and the Calculus of Variations*, v. 543, *Lecture Notes in Mathematics*, cap. 3, pp. 83–156, Berlin, Springer Berlin Heidelberg, 1976.

[2] NOOR, M., OETTLI, W. “On General Nonlinear Complementarity and Quasi-Equilibria”, *Le Matematiche*, v. XLIX, pp. 313–331, 1994.

[3] CUBIOTTI, P. “Existence of solutions for lower semicontinuous quasi-equilibrium problems”, *Computers Math. Applic*, v. 30, n. 12, pp. 11–22, 1995.

[4] AUSSEL, D., COTRINA, J., IUSEM, A. “An Existence Result for Quasi-Equilibrium Problems”, *Journal of Convex Analysis*, v. 24, n. 1, 2017.

[5] CASTELLANI, M., GIULI, M. “An existence result for quasiequilibrium problems in separable Banach spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, v. 425, pp. 8–95, 2015.

[6] IUSEM, A. N., KASSAY, G., SOSA, W. “On Certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems”, *Mathematical Programming*, v. 116, pp. 259–273, 2009.

[7] IUSEM, A. N. “On the maximal monotonicity of diagonal subdifferential operators”, *Journal of Convex Analysis*, v. 18, pp. 489–503, 2011.

[8] OLIVEIRA, P., SANTOS, P. S. M., SILVA, A. N. “A Tikhonov-type regularization for equilibrium problems in Hilbert spaces”, *J. Math. Anal. Appl.*, v. 401, pp. 336–342, 2013.

[9] JACINTO, F. M., SCHEIMBERG, S. “An extension of FKKM Lemma with an application to generalized equilibrium problems”, *Pacific Journal of Optimization*, v. 6, n. 2, pp. 243–253, 2010.

[10] HUNG, P. G., MUU, L. D. "The Tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions", *Nonlinear Analysis*, v. 401, pp. 6121–6129, 2011.

[11] FACCHINEI, F., PANG, J. S. *Finite–Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems.* New York, Springer, 2003.

[12] HAO, N. T. "The Tikhonov regularization algorithm for pseudomonotone variational inequalities", *Acta Math. Vietnam.*, v. 31, pp. 283–289, 2006.

[13] ALLECHE, B., RADULESCU, V. D., SEBAOUI, M. "The Tikhonov regularization for equilibrium problems and applications to quasi-hemivariational inequalities." *Optimization Letters*, v. 9, pp. 483–503, 2015.

[14] BELO CRUZ, J., SANTOS, P., SCHEIMBERG, S. "A two-phase algorithm for a variational inequality formulation of equilibrium problems." *Optimization Theory and Applications*, v. 3, n. 159, pp. 562–575, 2013.

[15] BIGI, G., PASSACANTANDO, M. "Descent and penalization techniques for equilibrium problems with nonlinear constraints." *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 3, n. 164, pp. 804–818, 2015.

[16] HIEU, D. V. "New inertial algorithm for a class of equilibrium problems." *Numerical Algorithms*, v. 4, n. 4, pp. 1413–1436, 2019.

[17] IUSEM, A., SOSA, W. "On the proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces." *Optimization*, , n. 59, pp. 1259–1274, 2010.

[18] NASRI, M., MATIOLI, L., FERREIRA, E., et al. "Implementation of augmented Lagrangian methods for equilibrium problems." *Optimization Theory and Applications*, v. 3, n. 168, pp. 971–991, 2016.

[19] SANTOS, P. J. S., SANTOS, P. S. M., SCHEIMBERG, S. "A proximal Newton-type method for equilibrium problems", *Optimization Letters*, v. 5, n. 12, pp. 997–1009, 2018.

[20] SANTOS, P. S. M., SCHEIMBERG, S. "An inexact subgradient algorithm for Equilibrium Problems", *Computational & Applied Mathematics*, v. 30, n. 1, pp. 91–107, 2011.

[21] SCHEIMBERG, S., SANTOS, P. "A relaxed projection method for finitedimensional equilibrium problems." *Optimization*, v. 8–9, n. 60, pp. 1193–1208, 2011.

[22] VINH, N., D., GIBALI, A. "Gradient projection-type algorithms for solving equilibrium problems and its applications." *Computational and Applied Mathematics*, 2019. doi: https://doi.org/10.1007/s40314-019-0894-5.

[23] BLUM, E., OETTLI, W. "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", *The Mathematics Student*, v. 62, pp. 127–169, 1994.

[24] JACINTO, F. M. O. *Existência de Soluções e Dualidade para um Problema de Equilíbrio Generalizado.* Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação PESC/COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2007.

[25] FACCHINEI, F., KANZOW, C. "Generalized Nash Equilibrium Problems", *Ann Oper Res*, v. 175, pp. 177–211, 2010. doi: 10.1007/s10479-009-0653-x.

[26] COTRINA, J., ZÚÑIGA, J. "A note on quasi-equilibrium problems", *Operations Research Letters*, v. 46, pp. 138–140, 2018. doi: 10.1016/j.orl.2017.12.002.

[27] CUBIOTTI, P. "Existence of Nash Equilibria for Generalized Games without Upper Semicontinuity", *International Journal of Game Theory*, v. 26, pp. 267–273, 1997.

[28] LIMA, E. L. *Álgebra Linear.* Coleção Matemática Universitária. 7 ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2008.

[29] LIMA, E. L. *Curso de Análise, vol. 2.* Coleção Projeto Euclides. 10 ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2010.

[30] LIMA, E. L. *Análise Real: volume 2.* Coleção Matemática Universitária. 4 ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2009.

[31] LOUREDO, A. T., OLIVEIRA, A. M., LIMA, O. A. *Cálculo Avançado.* Campina Grande - PB, Eduepb, 2010.

[32] BERGE, C. *Topological Spaces Including a Treatment of Multi-Valued Functions, Vector Spaces and Convexity.* Oliver and Boyd Ltd, 1963.

[33] DOMINGUES, H. H. *Espaços Métricos e introdução a topologia.* São Paulo, Atual, 1982.

[34] VAN TIEL, J. *Convex Analysis: and Introductory Text.* Netherlands, John Wiley and Sons, 1984.

[35] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex Analysis.* Princeton, Princeton University Press, 1972.

[36] KNASTER, B., KURATOWSKI, C., MAZURKIEWICZ, S. "Ein Beweis des Fixpunktsatzes fur n-dimensionale Simplexe", *Fundamenta Mathematicae*, v. 14, pp. 132–137, 1929.

[37] FAN, K. "A generalization of Tychonoff's fixed point theorem", *Mathematische Annalen*, v. 142, pp. 305–310, 1961.

[38] CHANG, S. S., ZHANG, Y. "Generalized KKM Theorem and variational inequalities", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 159, pp. 208–223, 1991.

[39] TIAN, G. "Generalizations of the FKKM Theorem and the Ky Fan minimax inequality, with applications to maximal elements, price equilibrium and complementarity", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 170, pp. 457–471, 1992.

[40] FAN, K. "Fixed-point and related theorems for non-compact sets", *Game Theory and Related Topics*, pp. 151–156, 1979.

[41] BIGI, G., CASTELLANI, M., PAPPALARDO, M., et al. "Existence and solution methods for equilibria", *European Journal of Operational Research*, v. 227, pp. 1–11, 2012.

[42] IUSEM, A. N., SOSA, W. "New existence results for equilibrium problems", *Nonlinear Analysis*, v. 52, pp. 621–635, 2003.

[43] BRÉZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* USA, Springer, 2011.

[44] PASCALLI, D., SBURLAN, S. *Nonlinear Mappings of Monotone Type*. Netherlands, Springer, 1979.

[45] KIEN, B. T. "The Normalized Duality Mapping and Two Related Characteristic Properties of a Uniformly Convex Banach Space", *Acta Mathematica Vietnamita*, v. 27, pp. 53–67, 2002.

[46] BARTLE, R. G. *The Elements of integration and Lebesgue measure*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1995.

[47] CABRAL, M. *Introdução a Teoria da Medida e Integral de Lebesgue.* UFRJ, 2016.

[48] PRUS, B., SMARZEWSKI, R. "Strongly Unique Best Approximations and Centers in Uniformly Convex Spaces", *Journal of Math. Anal and Appl*, v. 121, pp. 10–21, 1987.

[49] SOUSA, L. A., SCHEIMBERG, S., SANTOS, P. S. M. "Uma Regularização do Tipo Tikhonov para Problemas de Equilíbrio em Espaços de Banach Reflexivo", *Anais do XLVII SBPO*, pp. 2676–2686, 2016.

[50] VON HEUSINGER, A., KANZOW, C., FUKUSHIMA, M. "Newtons method for computing a normalized equilibrium in the generalized Nash game through fixed point formulation." *Mathematical Programming*, v. 1, n. 132, pp. 99–123, 2012.

[51] DENNIS, J. E., SCHNABEL, R. B. "Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations", *SIAM*, 1996.

[52] LUKSAN, L., VLCEK, J. "New quasi-Newton method for solving systems of non- linear equations", *Applications of Mathematics*, v. 2, n. 62, pp. 121–134, 2017.

[53] VUONG, P., STRODIOT, J. J. "The Glowinski-Le Tallec splitting method revisited in the framework of equilibrium problems in Hilbert spaces." *Journal of Global Optimization*, , n. 70, pp. 477–495, 2018.

[54] VON HEUSINGER, A., KANZOW, C. "Relaxation Methods for Generalized Nash Equilibrium Problems with Inexact Line Search." *Journal of Optimization Theory and Applications*, , n. 143, pp. 159–183, 2009.

[55] BENSOUSSAN, A., GOURSAT, M., LIONS, J. L. "Contrôle Impulsionnel et Inequations Quasi-Variationnelles Stationaires", *Comptes Rendus Acad. Sciences*, v. 276, pp. 1279–1284, 1973.

[56] BENSOUSSAN, A., LIONS, J. L. "Nouvelle Formulation des Problèmes de Contrôle Impulsionnel et Applications", *Comptes Rendus Acad. Sciences*, v. 276, pp. 1189–1192, 1973.

[57] BENSOUSSAN, A., LIONS, J. L. "Problèmes de Temps d'Arrêt Optimal et Inequations Variationalles Paraboliques", *Applicable Anal.*, pp. 267–294, 1973.

[58] BENSOUSSAN, A., LIONS, J. L. "Nouvelles Mètodes en Contrôle Impulsionnel", *Appl. Math. Optim.*, v. 1, pp. 289–312, 1973.

[59] AUSSEL, D., COTRINA, J. "Quasimonotone Quasivariational Inequalities Existence Results and Applications", *J Optim Theory Appl*, 2013.

[60] DEBREU, G. "A social equilibrium existence theorem", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, v. 38, pp. 386–393, 1952. doi: 10.1073/pnas.38.10.886.

[61] NASH, J. "Equilibrium points in N-person games", *Prot. Nat. Acad. Sci.*, v. 36, pp. 48–49, 1950.

[62] NASH, J. "Non-cooperative games", *Ann. Math.*, v. 54, pp. 286–295, 1951. doi: 10.2307/1969529.

[63] FAN, K. "A minimax inequality and applications". In: *O. Shisha (Ed.), Inequalities*, cap. Inequalities III, pp. 103–113, New York, Academic Press, 1972.

[64] KONNOV, I. V. "Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems", *Journal of Optimization Theory and Application*, v. 119, pp. 317–333, 2003.

[65] KONNOV, I. V. "Regularization methods for nonmonotone equilibrium problems", *Journal Nonlinear Convex Analysis*, v. 10, pp. 93–101, 2009.

[66] KONNOV, I. V., DYABILKIN, D. A. "Nonmonotone equilibrium:coercivity conditions and weak regularization", *Journal Global Optimization*, v. 49, pp. 575–587, 2011.

[67] SANTOS, P. S. M., SCHEIMBERG, S. "An outer approximation algorithm for equilibrium problems in Hilbert spaces", *Optimization Methods & Software*, 2014.

[68] MICHAEL, E. "Continuous selections. I." *Ann. of Math.*, v. 63, pp. 361–382, 1956.

[69] KAKUTANI, S. "A generalization of Brouwer's fixed point theorem", *Duke Math. J.*, v. 8, pp. 457–459, 1941.

[70] BIGI, G., PASSACANTANDO, M. "Gap functions for quasi-equilibria", *Journal of Global Optimization*, 2016.

[71] NIKAIDO, H., ISODA, K. "Note on noncooperative convex games", *Pac. J. Math.*, v. 4, pp. 65–72, 1955. doi: 10.2140/pjm.1955.5.807.

[72] CUBIOTTI, P., YAO, J. "Nash equilibria of generalized games in normed spaces without upper semicontinuity", *J Glob Optim*, v. 46, pp. 509–519, 2010. doi: 10.1007/s10898-009-9435-x.