



**Análise numérica do termo de interação  
entre fluido e meio poroso formado por  
geometrias constritivas**

Eduardo Cavalcanti de Albuquerque Sá Neto

**Projeto Final em Engenharia Química**

Orientadores

Prof.<sup>a</sup> Tânia Suaiden Klein, Ph.D.

Jovani Luiz Favero, D.Sc.

Julho de 2021

# Análise numérica do termo de interação entre fluido e meio poroso formado por geometrias constritivas

Eduardo Cavalcanti de Albuquerque Sá Neto

Monografia em engenharia química submetida ao Corpo Docente da Escola de Química, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Engenheiro Químico.

Aprovado por:

---

Luiz Fernando Lopes Rodrigues Silva, D.Sc.

---

Roney Leon Thompson, D.Sc.

Orientado por:

---

Tânia Suaiden Klein, Ph.D.

---

Jovani Luiz Favero, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Julho de 2021

SÁ NETO, E. C. A.

Análise numérica do termo de interação entre fluido e meio poroso formado por geometrias constritivas/Eduardo Cavalcanti de Albuquerque Sá Neto - Rio de Janeiro: UFRJ/EQ, 2021

XI, 86 p.; il.

(Monografia) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola de Química, 2021.

Orientador: Tânia Suaiden Klein e Jovani Luiz Favero

1. Fluidodinâmica Computacional. 2. Acidificação de Matriz. 3. Fluido Newtoniano. 4. Fluido Power-Law 5. Termo fonte 6. Monografia. (Graduação - UFRJ/EQ). 7. Tânia Suaiden Klein. 8. Jovani Luiz Favero. I. Título

*“Despite fear, finish the job.”*

-Bryant, Kobe

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, principalmente meu pai, minha mãe e meu irmão, pelo apoio de sempre ao longo da minha vida, nos bons e nos maus momentos, sem o suporte deles esta etapa não seria possível.

Agradeço imensamente à minha namorada, que sempre esteve do meu lado durante este tempo, me dando forças, não me deixando desistir e acreditando em mim mesmo quando eu estava desacreditado. Ela foi o meu apoio e sem ela nada disso teria sido possível.

Um especial agradecimento também aos meus amigos, que viram capacidade e potencial em mim que eu mesmo não via, isso me deu forças para persistir e não desistir.

Por fim, agradeço aos meus orientadores pelas suas contribuições para a minha formação e o desenvolvimento deste trabalho e por terem tido paciência e entendimento comigo.

Resumo da Monografia apresentada à Escola de Química como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Engenheiro Químico.

## **ANÁLISE NUMÉRICA DO TERMO DE INTERAÇÃO ENTRE FLUIDO E MEIO POROSO FORMADO POR GEOMETRIAS CONSTRITIVAS**

Eduardo Cavalcanti de Albuquerque Sá Neto

Julho, 2021

Orientador(a): Prof.<sup>a</sup> Tânia Suaiden Klein, Ph.D.

Orientador(a): Jovani Luiz Favero, D.Sc.

### **Resumo**

A solução numérica de poços porosos pode ser obtida com base na teoria de misturas, na sua forma simplificada. Para isso deve-se determinar um termo fonte de interação do fluido com o meio poroso. Deste modo, o objetivo deste trabalho é determinar o comportamento desse termo para um determinado padrão de poro, em escala de poro. Para isso, foi proposto um padrão de poro cilíndrico com constrições abruptas (um súbita contração seguida de uma súbita expansão). Cinco graus de constrição foram avaliados. Considerou-se escoamento de fluido newtoniano e não-newtoniano, dos tipos pseudo-plástico e dilatante, modelados pela lei da potência. Três diferentes valores de Reynolds em escala de poro foram avaliados, de modo que em todos o escoamento ocorresse em regime laminar. O termo fonte foi relacionado à força exercida pelo fluido sobre a parede do poro. As soluções foram obtidas através de simulações numéricas, usando fluidodinâmica computacional (CFD), sendo realizadas no total 135 simulações no programa de CFD de código aberto OpenFOAM®. Os resultados indicaram variação linear do termo fonte adimensionalizado com o número de Reynolds em escala log-log,

com o coeficiente angular comum à qualquer tipo de fluido e grau de constrição e com o coeficiente linear dependente da reologia do fluido e do grau de constrição do poro. Resultados ainda mostram que as correlações obtidas independem do raio do cilindro de mesmo volume, inclusive para os poros com constrição. Estes resultados podem ser incorporados à uma matriz de dados que forneceria o termo fonte de interação fluido-meio poroso para diferentes cenários, permitindo simulações numéricas de escoamentos ácidos em meios porosos de rochas carbonáticas em escala industrial.

# Conteúdo

<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Contexto e Motivação . . . . .	1
1.2 Objetivos . . . . .	4
<b>2 Fundamentos Teóricos</b>	<b>5</b>
2.1 Estimulação de reservatórios . . . . .	5
2.2 Acidificação de Matriz . . . . .	6
2.3 Equações de transporte em poros . . . . .	9
2.4 Modelagem dos fluidos . . . . .	11
2.4.1 Equações constitutivas . . . . .	13
2.5 Modelagem matemática de escoamento em matriz porosa . . . .	15



2.6	Reynolds em meio poroso . . . . .	16
2.6.1	Teoria de Mistura . . . . .	20
2.6.2	Cálculo do termo de interação entre o fluido e o meio poroso . . . . .	21
2.6.3	Cálculo da relação entre a força do fluido na parede do poro cilíndrico e o termo de interação do fluido com o meio poroso . . . . .	27
2.7	Fluidodinâmica computacional . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Metodologia</b>	<b>35</b>
3.1	Fluidos implementados . . . . .	36
3.2	Geometrias implementadas . . . . .	37
3.2.1	Canais cilíndricos . . . . .	37
3.2.2	Canais constritivos . . . . .	39
3.3	Cálculo das velocidades de entrada . . . . .	43
3.4	Malha computacional . . . . .	44
3.4.1	Convergência de malha . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>53</b>
4.1	Validação dos resultados com base nos valores analíticos para poros cilíndricos . . . . .	53
4.2	Simulações com poros constritivos . . . . .	61

4.2.1	Simulações com fluido Newtoniano . . . . .	62
4.2.2	Simulações com fluido Pseudo-plástico . . . . .	67
4.2.3	Simulações com fluido Dilatante . . . . .	72
4.3	Comparação entre os resultados . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Conclusão e Sugestões para Trabalhos Futuros</b>	<b>86</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>88</b>

# Lista de Tabelas

3.1	Parâmetros dos fluídos implementados, baseado na solução 15% de HCl. . . . .	36
3.2	Valores para o raio do poro cilíndrico $R_0$ , seus respectivos volumes $V$ e o número de Reynolds $Re$ . . . . .	38
3.3	Esquemas de discretização utilizados no OpenFOAM®. . . . .	39
3.4	Valores dos raios das geometrias constritivas, para raio de poro cilíndrico $R_0 = 1\mu m$ . . . . .	42
3.5	Velocidades de entrada calculadas para cada fluido variando com o número de Reynolds. . . . .	44
3.6	Configuração das propriedades para o estudo de teste de malha. . . . .	47
3.7	Discretização radial distribuída entre as diferentes geometrias constritivas do estudo. . . . .	51
4.1	Valores analítico e numérico de força para escoamento em poro cilíndrico do Fluido newtoniano. . . . .	54

4.2	Valores analítico e numérico de força para escoamento em poro cilíndrico dos fluidos <i>power-law</i> . . . . .	55
4.3	Valores analítico e numérico do termo fonte para os fluidos estudados escoando em poro cilíndrico. . . . .	56
4.4	Valores analíticos e numéricos para o termo fonte com índice de consistência 100 vezes maior no caso com poro cilíndrico de raio $R_0 = 100\mu m$ . . . . .	59
4.5	Valores numéricos para o termo fonte nas diferentes geometrias constritivas para fluido newtoniano. . . . .	62
4.6	Valores numéricos para o termo fonte nas diferentes geometrias constritivas para fluido pseudo-plástico. . . . .	67
4.7	Valores numéricos para o termo fonte nas diferentes geometrias constritivas para fluido dilatante. . . . .	72
4.8	Valores de força para o caso de fluido dilatante com $Re = 1$ e $R_0 = 1\mu m$ . . . . .	80
4.9	Valores de força para o caso de fluido pseudo-plástico com $Re = 1$ e $R_0 = 1\mu m$ . . . . .	82

# Lista de Figuras

1.1	Diferentes grandezas de escala abordadas em estudos. Adaptado de [3]. . . . .	3
2.1	Padrões de dissolução ácida em formações carbonáticas. Adaptado de [3]. . . . .	7
2.2	Curvas de evolução de tensão de cisalhamento em escoamento de fluidos newtonianos e não-newtonianos pela taxa de deformação. Retirado de [19]. . . . .	12
2.3	Curva de variação da viscosidade aparente pela taxa de cisalhamento, para casos unidimensionais. Adaptado de [20]. . . . .	15
2.4	Modelo de experimento realizado por Henry Darcy (retirado de [16]). . . . .	17
2.5	Ilustração das regiões de regime de escoamento em meio poroso pela relação do fator de Fanning com o número de Reynolds poroso. Adaptado de [12]. . . . .	19
2.6	Idealização do meio poroso formado por placas paralelas. Adaptado de [30]. . . . .	22

2.7	Idealização do meio poroso formado por cilindros vazados. Baseado em [4]. . . . .	22
2.8	Exemplo de domínio discretizado em malha computacional. Baseado em [25]. . . . .	33
2.9	(a) Arranjo com os nós centrados nos volumes. (b) Arranjo com os nós nas arestas. Adaptado de [26]. . . . .	34
3.1	Geometria constritiva de poro utilizada nas simulações. . . . .	39
3.2	Parâmetros de implementação da geometria. . . . .	40
3.3	Representação do canal de poros constritivos. . . . .	42
3.4	Perfil das malhas computacionais das seções axissimétricas simuladas, vistas no plano XZ do domínio, para os casos de $\delta = 0$ e $\delta = 0.8$ . . . . .	45
3.5	Perspectiva das malhas computacionais das seções axissimétricas simuladas. . . . .	46
3.6	Ilustração do modelo de discretização para o teste de malha na direção radial. . . . .	48
3.7	Perfis das forças aplicadas pelo fluido na parede do poro no estudo de convergência de malha com discretização radial variável, sendo (a) para fluido pseudo-plástico e (b) para fluido dilatante. . . . .	49

3.8	Perfis das forças aplicadas pelo fluido na parede do poro no estudo de convergência de malha com discretização axial variável, sendo (a) para fluido pseudo-plástico e (b) para fluido dilatante. . . . .	50
3.9	(a) $\delta = 0.8$ (b) $\delta = 0.6$ (c) $\delta = 0.4$ (d) $\delta = 0.2$ (e) $\delta = 0$ ou cilindro equivalente. . . . .	52
4.1	Perfil do termo fonte adimensional pelo inverso do número de Reynolds para cilindro equivalente de raios $1\mu m$ e $10\mu m$ com $Re = 0.0001$ . . . . .	57
4.2	Perfil do termo fonte para o poro cilíndrico com raio $100\mu m$ com $Re = 0.0001$ . . . . .	57
4.3	Perfil do termo fonte para o cilindro equivalente com raio $R_0 = 100\mu m$ , com índice de consistência 100 vezes maior para prevenção de instabilidade numérica. . . . .	60
4.4	Perfil do termo de interação pelo inverso do número de Reynolds para as cinco variações geométricas constritivas de poro, considerando fluido newtoniano e para os três valores de $R_0$ . . . . .	63
4.5	Resultados para a velocidade nos casos de fluido newtoniano com $R_0 = 100\mu m$ e $Re = 0.0001$ . (a) $\delta = 0.4$ (b) $\delta = 0.8$ . . . . .	64
4.6	Resultados para a pressão ao longo do poro para os casos de fluido newtoniano com $R_0 = 100\mu m$ e $Re = 0.0001$ . (a) $\delta = 0.4$ (b) $\delta = 0.8$ . . . . .	64

4.7	Resultados para a velocidade nos casos de fluido newtoniano com $R_0 = 100\mu m$ e $Re = 0.0001$ na mesma escala de velocidade (a) $\delta = 0.4$ (b) $\delta = 0.8$ . . . . .	65
4.8	Resultados para a pressão ao longo do poro para os casos de fluido newtoniano com $R_0 = 100\mu m$ e $Re = 0.0001$ na mesma escala de pressão (a) $\delta = 0.4$ (b) $\delta = 0.8$ . . . . .	65
4.9	Perfil do termo de interação pelo inverso do número de Reynolds para as cinco variações geométricas de poro. Casos com $R_0 = 1\mu m, 10\mu m$ e fluido pseudo-plástico. . . . .	68
4.10	Perfil do termo de interação pelo inverso do número de Reynolds para as cinco variações geométricas de poro. Casos com $R_0 = 100\mu m$ e fluido pseudo-plástico. . . . .	68
4.11	Resultados de velocidade nos casos com fluido pseudo-plástico, $R_0 = 10\mu m$ e $Re = 0.01$ . (a) $\delta = 0.2$ (b) $\delta = 0.6$ . . . . .	69
4.12	Resultados para a pressão ao longo do poro nos casos com fluido pseudo-plástico, $R_0 = 10\mu m$ e $Re = 0.01$ . (a) $\delta = 0.2$ (b) $\delta = 0.6$ . . . . .	70
4.13	Resultados de velocidade nos casos com fluido pseudo-plástico, $R_0 = 10\mu m$ e $Re = 0.01$ na mesma escala de velocidade. (a) $\delta = 0.2$ (b) $\delta = 0.6$ . . . . .	70
4.14	Resultados para a pressão ao longo do poro nos casos com fluido pseudo-plástico, sendo $R_0 = 10\mu m$ e $Re = 0.01$ na mesma escala de pressão. (a) $\delta = 0.2$ (b) $\delta = 0.6$ . . . . .	70



4.15	Perfil do termo de interação pelo inverso do número de Reynolds para as cinco variações geométricas de poro. Casos com $R_0 = 1\mu m, 10\mu m$ e fluido dilatante. . . . .	73
4.16	Perfil do termo de interação pelo inverso do número de Reynolds para as cinco variações geométricas de poro. Casos com $R_0 = 100\mu m$ e fluido dilatante. . . . .	74
4.17	Resultados para a velocidade nos casos com fluido dilatante, $R_0 = 1\mu m$ e $Re = 1$ . (a) $\delta = 0.4$ (b) $\delta = 0.6$ . . . . .	75
4.18	Resultados para a pressão ao longo do poro nos casos com fluido dilatante, $R_0 = 1\mu m$ e $Re = 1$ . (a) $\delta = 0.4$ (b) $\delta = 0.6$ . . . . .	76
4.19	Resultados para a velocidade nos casos com fluido dilatante, $R_0 = 1\mu m$ e $Re = 1$ na mesma escala de velocidade. (a) $\delta = 0.4$ (b) $\delta = 0.6$ . . . . .	76
4.20	Resultados para a pressão ao longo do poro nos casos com fluido dilatante, $R_0 = 1\mu m$ e $Re = 1$ na mesma escala de pressão. (a) $\delta = 0.4$ (b) $\delta = 0.6$ . . . . .	77
4.21	Variação do termo fonte no escoamento com $R_0 = 1\mu m$ e $Re = 10$ para três fluidos estudados (newtoniano, dilatante e pseudo-plástico) em cada geometria implementada. (a) $\delta = 0.2$ (b) $\delta = 0.4$ (c) $\delta = 0.6$ (d) $\delta = 0.8$ . . . . .	78
4.22	Perfil de forças para um caso com fluido dilatante, $Re = 1$ e $R_0 = 1\mu m$ . . . . .	80
4.23	Vetores de velocidade no escoamento em poro cilíndrico para fluido dilatante. . . . .	81

4.24	Vetores de velocidade no escoamento em poro constritivo com $\delta = 0.4$ para fluido dilatante. . . . .	81
4.25	Perfil de forças para um caso com fluido pseudo-plástico, $Re = 1$ e $R_0 = 1\mu m$ . . . . .	82
4.26	Resultados para a viscosidade cinemática aparente no caso com $Re = 0.01$ , $R_0 = 10\mu m$ e $\delta = 0$ . (a) Fluido pseudo-plástico. (b) Fluido dilatante. . . . .	84
4.27	Resultados para a viscosidade cinemática aparente no caso com $Re = 0.01$ , $R_0 = 10\mu m$ e $\delta = 0.6$ . (a) Fluido pseudo-plástico. (b) Fluido dilatante. . . . .	84

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Contexto e Motivação

A demanda energética mundial esta cada vez maior e, mesmo com o grande avanço em tecnologia de energias renováveis na última década, a principal matéria prima para produção de energia no mundo continua sendo o petróleo. Dados do ano de 2017 mostram que 58% da energia produzida no mundo é proveniente do petróleo, sendo ele responsável pela produção de aproximadamente 9000 *TWh* [1].

Apesar de ser de origem natural, o petróleo é um recurso não renovável e de difícil acesso, tanto pela complexidade da exploração em si quanto pela dificuldade de se encontrar novas reservas petrolíferas.

Tendo esses fatores em vista, o uso de técnicas de estimulação de reservatórios é extremamente importante para que se obtenha o maior rendimento possível na extração do produto.

Estimulação pode ser entendida como qualquer operação feita em uma jazida portadora de hidrocarboneto, favorecendo seu escoamento da matriz porosa para o poço ao aumentar a permeabilidade do meio poroso [2]. Neste cenário, ácidos são amplamente utilizados em técnicas de estimulação de poços devido às suas características corrosivas.

Diversos modelos foram desenvolvidos ao longo dos anos para descrever o comportamento do ácido ao ser injetado no meio e, com isso, poder determinar quais características reológicas e operacionais são essenciais para o melhor aproveitamento da técnica. Deste modo, as simulações computacionais surgem como uma poderosa ferramenta de validação destes modelos.

No entanto, apesar do grande avanço da capacidade de processamento, principalmente na última década, tais simulações ainda são inviáveis em uma escala real de poço, devido à enorme diferença em termos de ordem de grandeza, intrínsecas ao problema. Deste modo, abordagens em escalas menores tornam-se razoáveis. A Figura 1.1 mostra as diferentes escalas de abordagem para o problema.

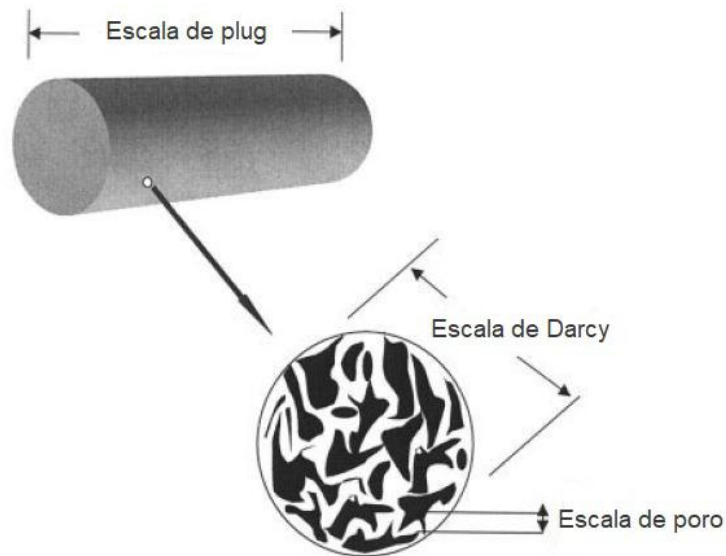


Figura 1.1: Diferentes grandezas de escala abordadas em estudos. Adaptado de [3].

Muitos experimentos e simulações são feitos em escala de *plug*, que se trata de um Volume Elementar Representativo (REV) poroso, da ordem de grandeza de centímetros, no qual injeta-se o ácido. Observa-se nesse caso os efeitos a partir de uma perspectiva macroscópica, com foco em regiões onde se obteve ganhos de permeabilidade ou o caminho que o ácido perseguiu, por exemplo, utilizando-se da abordagem teórica de Darcy para descrever a interação do fluido com o meio poroso e como um afeta o outro.

Entretanto, simulações em escala de poro permitem observar efeitos mais específicos. Com isso, a partir da simulação de uma vasta gama de casos, é possível mapear padrões de influência de cada parâmetro envolvido no caso, extrapolando-os para escalas maiores.

## 1.2 Objetivos

O objetivo deste trabalho é, em escala de poro, determinar o comportamento do termo fonte de interação do fluido com o meio poroso em relação ao número de Reynolds do escoamento, haja visto a importância da determinação deste termo para a aplicação da Teoria de Mistura em soluções numéricas das técnicas de acidificação de poços porosos.

Para isso, serão realizadas 135 simulações fluidodinâmicas no pacote de código aberto OpenFOAM®. Elas irão variar aspectos da geometria do canal, a velocidade de entrada e utilizarão fluidos newtonianas e não-newtonianas, modelados pelo modelo da lei de potência, de modo a emular a passagem de ácido em um canal poroso construtivo durante o processo de acidificação.

A determinação do termo fonte será feita baseado na metodologia definida em [4], na qual é calculado o termo fonte para um meio poroso idealizado por tubos cilíndricos. Deste modo será possível relacioná-lo com a força aplicada pelo fluido na parede do poro calculada nas simulações fluidodinâmicas, nos 135 diferentes cenários propostos.

Com isso, ao reunir os casos estudados e os resultados obtidos busca-se criar uma matriz de dados para alimentar um *software* que buscará modelar e solucionar escoamentos em meios porosos baseado na Teoria de Mistura, desenvolvida para descrever escoamentos em meios porosos em alternativa ao modelo de Darcy, de modo que os resultados possuam maior acurácia e representabilidade.

# Capítulo 2

## Fundamentos Teóricos

### 2.1 Estimulação de reservatórios

Reservatórios carbonáticos de calcário e dolomita representam cerca de 50% das reservas mundiais conhecidas de petróleo e gás natural [5]. Por conta disso, há grande interesse de estudo neste tipo de reservatório, de modo a se desenvolver técnicas que visam otimizar sua exploração.

Um dos principais problemas na exploração desse tipo de reservatório ocorre durante a produção, que tende a ser comprometida por conta de incrustação ou partículas que são arrastadas para próximo da região, o que acarreta na redução de sua permeabilidade, efeito conhecido como "dano" [6]. Neste cenário, técnicas de estimulação são essenciais para a indústria de modo a combater tais efeitos e recuperar a viabilidade econômica de reservatórios.

Entre as técnicas desenvolvidas e disponíveis no mercado, três se destacam: fraturamento hidráulico, acidificação de matriz, e fraturamento ácido

[2]. A primeira consiste na injeção de um fluido de modo que sejam geradas fraturas na rocha, criando canais de alta condutividade entre a rocha e o poço. Na segunda, ácido é injetado no reservatório para reagir e dissolver parte da matriz porosa e das partículas adjacentes ao poço, aumentando a permeabilidade do meio, de forma a criar canais de escoamento de fluido da matriz para o poço. Já a terceira é uma mistura das duas técnicas citadas anteriormente, ou seja, injeta-se um fluido ácido que, além de criar fraturas na matriz porosa, também reaja com a mesma. O presente trabalho utiliza como referência a técnica de acidificação de matriz para seus estudos, portanto, esta será mais aprofundada a seguir.

## 2.2 Acidificação de Matriz

A acidificação de matriz é um processo de estimulação muito utilizado em reservatórios carbonáticos. O objetivo é formar canais condutivos conhecidos como *wormholes*, que aumentem a permeabilidade da matriz porosa próxima ao poço.

Tal perfil de dissolução do ácido é fortemente dependente da taxa de injeção. Como é citado em Panga *et al* [3], em baixas taxas o ácido reage completamente antes de se propagar de forma suficiente, gerando um perfil chamado de dissolução de face. Já em taxas mais altas o ácido reage uniformemente sobre uma longa região do domínio poroso, resultando num perfil de dissolução uniforme. Em ambas as situações não há um aumento eficiente na permeabilidade do meio. Já em taxas intermediárias, obtém-se o perfil de *wormhole*, sendo esse o mais eficiente, com volume mínimo necessário de solução ácida para penetrar a matriz.



O perfil de *wormhole* se divide em três padrões: cônico, dominante e altamente ramificado. No cônico há a formação de um único canal com pouca ramificação. O padrão altamente ramificado é dominado por ramificações, o que prejudica a eficiência dos canais condutivos. Já o perfil dominante é ideal, pois permite ao ácido penetrar mais profundamente, criando ramificações ao entrar em poros menores [7].

A Figura 2.1 mostra os cinco padrões de dissolução discutidos anteriormente num *plug* carbonático, onde a taxa de injeção aumenta de “a” para “e”.

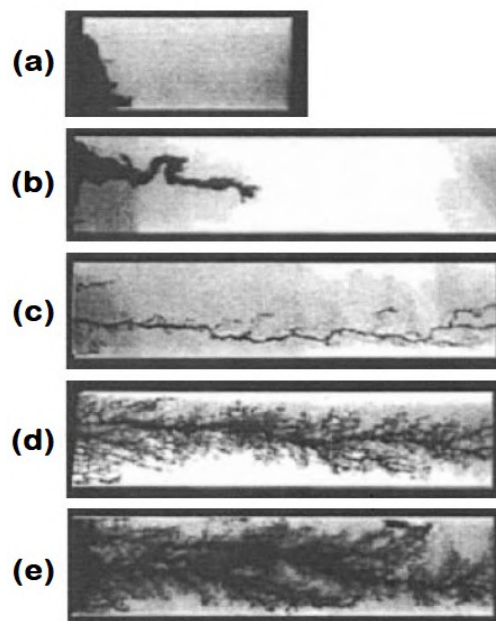


Figura 2.1: Padrões de dissolução ácida em formações carbonáticas. Adaptado de [3].

Os ácidos comumente utilizados são o clorídrico (HCl), fórmico (CH<sub>2</sub>O<sub>2</sub>), acético (C<sub>2</sub>H<sub>6</sub>O<sub>2</sub>) e o EDTA [8], sendo o ácido clorídrico o de maior preferên-

cia devido ao seu baixo custo e alta taxa de dissolução. Uma solução de HCl 15%, por exemplo, possui o dobro de poder dissolutivo que uma solução de  $C_2H_6O_2$  ou  $CH_2O_2$  10% [7]. Já os outros ácidos costumam ser utilizados em situações mais específicas, como é o caso dos fórmico e acético, que são menos corrosivos e são indicados para tratamentos com altas temperaturas [7].

Vale ressaltar que, dependendo das características físicas e químicas do meio, o comportamento do fluido é determinante para a eficiência da estimulação. As soluções ácidas mais utilizadas possuem comportamento newtonianos, porém, fluidos não-newtonianos podem ter propriedades que aumentem a eficiência da técnica, a depender das condições citadas anteriormente. Visto isto, diversos estudos foram feitos com base na utilização de ácidos com esse tipo de comportamento para se entender como cada característica influencia na eficiência da acidificação.

Em 2001, Chang *et al.* [9] desenvolveu um ácido *self-diverting* baseado na tecnologia VES (*Viscoelastic surfactant-based*), em alternativa a misturas *self-diverting* de HCl com polímeros, de modo que formassem ácidos gelificados *in situ* cuja viscosidade aumenta conforme a reação do ácido com a matriz porosa libera íons. O aumento de viscosidade dificulta o escoamento do ácido nas regiões de alta concentração de íons, fazendo com que ele se desvie para áreas de menor permeabilidade. E ainda, ao contrário da mistura ácido-polímero, o ácido VES desenvolvido não gera resíduos de polímeros que prejudicam a formação de *wormhole*.

Em 2012, Ratnakar *et al.* [10] desenvolveu um modelo de ácido *diverting* do tipo ICA (*in-situ cross-linked acids*), baseado no modelo *power-law*. Sua viscosidade varia com o pH, de modo que em baixos valores o ácido flui pela região de maior permeabilidade devido a menor viscosidade e, conforme o pH

de tal região aumenta, a viscosidade também aumenta, até que o pH atinja um valor limite que cria uma resistência muito alta ao escoamento, fazendo com que o ácido seja deslocado para regiões de baixa permeabilidade. O modelo foi validado por meio de experimentos e simulações.

Em 2016, Naizhen e Ming [11] investigaram o comportamento de um ácido VES *self-diverting*, que consiste em uma mistura de HCl com surfactante viscoelástico. O estudo comparou, por meio de simulações, a técnica de acidificação com um ácido HCl newtoniano, comumente utilizado, e com o ácido VES e mostrou que, devido a seus efeitos viscosificantes, o perfil de *wormhole* do VES é melhor desenvolvido. Tais efeitos fazem com que o ácido se desprenda em outros longos *wormholes*, para regiões de menor permeabilidade, ao contrário do ácido newtoniano, que tem preferência pela região de alta permeabilidade. Por tal motivo, o ácido VES é muito utilizado em reservatórios de alta heterogeneidade.

## 2.3 Equações de transporte em poros

As equações que governam a dinâmica dos fluidos decorrem da aplicação das leis básicas da mecânica e termodinâmica ao movimento deformável [14]. Num regime fluido dentro de um poro, desconsiderando qualquer efeito reativo e de transferência de calor ou espécie no escoamento, as grandezas envolvidas são o momento linear e a massa.

A busca por um sistema de equações capaz de descrever o escoamento passa pela aplicação do balanço de tais grandezas baseado em princípios de conservação, de modo a se compor um modelo físico adequado.

Desta forma, o modelo físico para descrever o escoamento dentro de um poro é dado pelo sistema apresentado a seguir.

### Conservação da Massa:

A conservação da massa parte do princípio de que não há variação de massa dentro do domínio de escoamento. Desta forma define-se a equação da conservação da massa, conhecida como Equação da Continuidade, em sua forma diferencial (Equação 2.1).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

em que  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $\mathbf{u}$  sua velocidade.

Para fluidos incompressíveis, a Equação 2.1 pode ser reduzida à Equação 2.2 abaixo.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.2)$$

### Balço de momento linear:

A conservação do momento linear é baseado na segunda lei de Newton [14] e é dada pela Equação 2.3 em sua forma diferencial.

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}) - \rho \mathbf{f}_m = 0 \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{f}_m$  é a força externa que age sobre o fluido, e normalmente assume o valor da gravidade ( $\mathbf{f}_m = \mathbf{g}$ ), e  $\boldsymbol{\tau}$  é o tensor tensão.

É possível expandir o tensor tensão em termos de pressão e tensão viscosa:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} -p & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & -p & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & -p \end{bmatrix} = -p\mathbf{I} + \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}'$$

em que  $p$  se refere à pressão e  $\boldsymbol{\tau}'$  à tensão viscosa, que é substituída por equações constitutivas, que representam modelos de fluidos. Algumas destas equações, mais especificamente de modelos newtoniano e *power-law*, modelos utilizados neste trabalho, serão abordadas mais a fundo na Seção 2.4.

Substituindo na Equação 2.3, define-se a Equação 2.4, que é forma conhecida da Equação de Conservação do Momento Linear.

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}') + \rho \mathbf{g} \quad (2.4)$$

Para fluidos incompressíveis é possível dividir a equação pela densidade  $\rho$  resultando na Equação 2.5 abaixo.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau}') + \mathbf{g} \quad (2.5)$$

## 2.4 Modelagem dos fluidos

Fluidos são substâncias (em geral gases/vapor ou líquidos) que se deformam continuamente sob a ação de um força cisalhante. Eles se dividem basicamente entre fluidos newtonianos e não-newtonianos, dentre os quais há diversos modelos representativos.

**Fluidos Newtonianos:** Por definição, fluidos newtonianos são aqueles cuja tensão de cisalhamento é diretamente proporcional à taxa de deformação, com a adição, de forma mais geral, de uma parcela referente à efeitos de compressibilidade do escoamento. Eles obedecem a Lei de Newton da Viscosidade, que diz que a relação entre tensão e a taxa de deformação é linear e representada pela viscosidade dinâmica  $\mu$  que, apesar de ser função da temperatura e pressão, é por muitas vezes tratada como constante para esse tipo de fluido [17].

**Fluidos Não-Newtonianos:** São aqueles que possuem características específicas, como elasticidade, plasticidade e/ou dependência com o tempo. Em muitos desses casos é possível determinar uma viscosidade aparente, que pode variar com a taxa de deformação, e sofrer influência de diversos fatores como tempo e pH do meio.

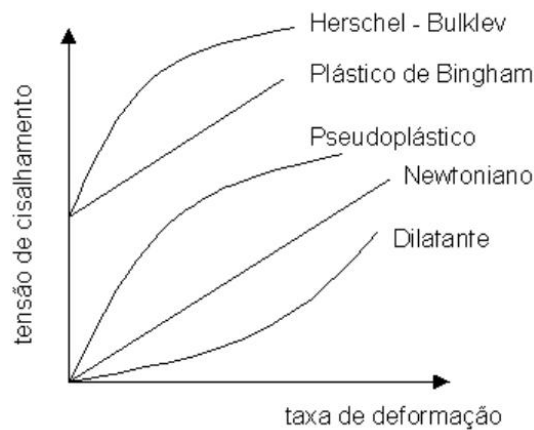


Figura 2.2: Curvas de evolução de tensão de cisalhamento em escoamento de fluidos newtonianos e não-newtonianos pela taxa de deformação. Retirado de [19].

### 2.4.1 Equações constitutivas

As equações constitutivas representam modelos de fluidos e são necessárias para modelar o termo de tensão viscosa da Equação 2.4.

Para casos incompressíveis, a equação constitutiva de fluidos newtonianos é dada pela Equação 2.6 abaixo.

$$\boldsymbol{\tau}' = 2\mu\mathbf{D} \implies \boldsymbol{\tau}' = \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}') \quad (2.6)$$

em que  $\mathbf{D}$  é o tensor de deformação e é a parcela simétrica do gradiente de velocidade, ou seja,  $u_{ij} = u_{ji}$  e  $\mu$  é a viscosidade dinâmica do fluido.

Para casos mais simples, como por exemplo em um escoamento de Couette ou Hagen-Poiseuille, a equação é reduzida à Equação 2.7 que é a sua forma mais conhecida:

$$\boldsymbol{\tau}' = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.7)$$

em que  $\frac{\partial u}{\partial y}$  é a componente da velocidade na direção  $y$  nestes escoamentos

Este modelo é caracterizado por ser deficiente em prever alguns efeitos físicos de fluidos mais complexos [6]. Em escoamentos viscosimétricos, por exemplo, diferenças de tensões normais não são previstas por ele, o que contraria a maioria dos experimentos com fluidos não-newtonianos em escoamentos do tipo [17]. Desta forma, outros modelos foram definidos para melhor descreverem o comportamento do fluido.

Um dos modelos com maior abrangência de aplicações na engenharia é o modelo de lei da potência, ou *power-law*. Também conhecido como Ostwald-

de-Waele, este modelo é representativo de fluidos não-newtonianos que não necessitam da aplicação de uma força cisalhante inicial para escoar e independem do tempo de aplicação dela. Isso quer dizer que a característica reológica do fluido não se altera durante o período em que ele é submetido a uma força cisalhante.

Os fluidos descritos por esse modelo podem ser divididos em pseudo-plásticos (*shear-thinning*) e dilatantes (*shear-tickening*), a depender da viscosidade aparente do fluido, que é descrita pela Equação 2.8 abaixo.

$$\eta(\dot{\gamma}) = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.8)$$

em que  $k$  é o índice de consistência e tem unidade  $\left[\frac{kg}{m} s^{n-2}\right]$ , e o parâmetro  $n$  é o índice de comportamento e define a característica reológica do fluido:

A equação constitutiva de fluidos do tipo *power-law* então assume a forma apresentada na Equação 2.9 abaixo.

$$\boldsymbol{\tau}' = \eta(\dot{\gamma})(\boldsymbol{\nabla}\mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla}\mathbf{u}') \quad (2.9)$$

- $n < 1 \Rightarrow$  Viscosidade aparente inversamente proporcional a taxa de cisalhamento, característica de fluidos pseudo-plásticos.
- $n > 1 \Rightarrow$  Viscosidade aparente diretamente proporcional a taxa de cisalhamento, característica de fluidos dilatantes.

Note também que, se  $n = 1$ , a viscosidade aparente deixa de ser função da taxa de cisalhamento e se iguala ao índice de consistência. Deste modo o fluido assume características newtonianas, sendo o índice de consistência



equivalente a viscosidade dinâmica definida na Equação 2.6.

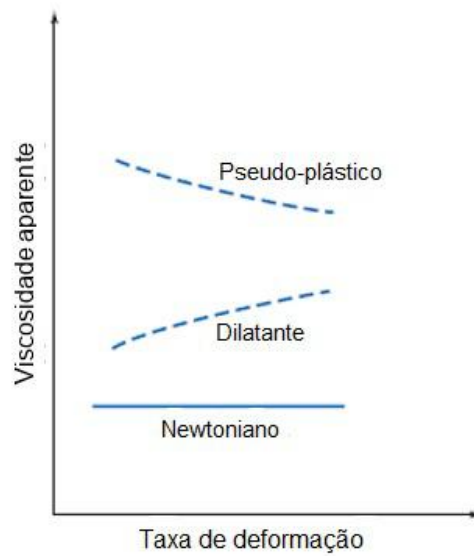


Figura 2.3: Curva de variação da viscosidade aparente pela taxa de cisalhamento, para casos unidimensionais. Adaptado de [20].

## 2.5 Modelagem matemática de escoamento em matriz porosa

A modelagem matemática e simulação numérica de ácidos numa matriz porosa em escala industrial é um processo bastante complexo. Uma possível abordagem é utilizar a Teoria de Mistura, onde, conforme será mostrado abaixo, faz-se necessário um termo fonte que represente a força que o fluido exerce sobre a parede do poro, que é o objeto de estudo do presente trabalho.

## 2.6 Reynolds em meio poroso

Por se tratar de uma região com dimensões de ordem de grandeza muito pequenas, as características físicas do escoamento em escala de poro devem ser tratadas de modo particular, e isso inclui o número de Reynolds.

De acordo com Bears [12] é possível definir as regiões de escoamento de acordo com o número de Reynolds poroso fazendo uma analogia com escoamentos em tubos. Neste tipo de escoamento, o limite do regime de transição entre laminar e turbulento é por volta de 2100 e o número de Reynolds é definido pela Equação 2.10. Para meio poroso é possível fazer uma analogia e definir uma equação para o número de Reynolds similar à Equação 2.10, substituindo o diâmetro do tubo por um diâmetro médio de poro  $d_p$ .

$$Re = \frac{uD}{\nu} \quad \longrightarrow \quad Re = \frac{ud_p}{\nu} \quad (2.10)$$

em que  $D$  é o diâmetro do tubo,  $\mathbf{u}$  é a velocidade do fluido e  $\nu$  é a viscosidade cinemática.

Bears [12] se utiliza da Lei de Darcy para estabelecer uma relação entre o número de Reynolds poroso e um fator de fricção no escoamento, para então definir as regiões de regime de escoamento em meio poroso. Para isso é necessário fazer uma breve introdução à lei de Darcy.

**Lei de Darcy:** Relação experimental desenvolvida por Henry Darcy, baseada em experimentos realizados, nos quais a intenção era mover água utilizando apenas gravidade.

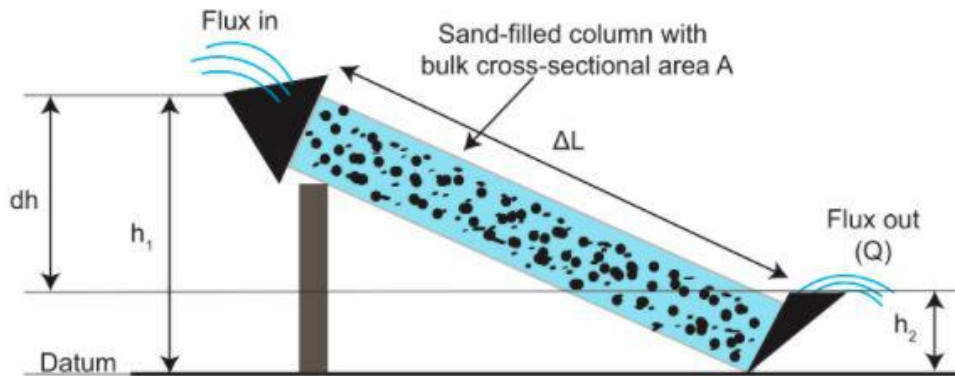


Figura 2.4: Modelo de experimento realizado por Henry Darcy (retirado de [16]).

No experimento mostrado na Figura 2.4 o objetivo era estudar o fluxo de água através de filtros de areia, emulando o sistema de tratamento de água da cidade de Paris. Nele, os níveis de água são mantidos constantes e deve haver um fluxo do ponto mais alto para o ponto mais baixo através do canal. Darcy então descobriu que o fluxo de água era proporcional à diferença de pressão ao longo do fluxo, definindo uma expressão que define a formulação da Lei de Darcy.

$$Q = -k_m A \frac{dh}{dL}$$

em que  $k_m$  é a condutividade hidráulica,  $A$  é a área transversal do canal,  $\frac{dh}{dL}$  é a diferença infinitesimal de altura entre os níveis de água.

Sendo  $Q = u_m A$ ,  $\frac{dh}{dL} = \nabla p$  e fazendo  $k_m = \frac{K}{\eta}$  [13], em que  $K$  é definido como a permeabilidade do meio e  $\eta$  a função viscosidade do fluido, a Lei de Darcy pode ser reescrita como:

$$\mathbf{u}_m = -\frac{K}{\eta} \nabla p$$

Aplicado em meio poroso, tal modelo pode ser novamente reescrito, resultando na seguinte Equação 2.11 bastante conhecida da literatura para meios porosos:

$$\nabla p = -\frac{\phi\eta}{K}(\mathbf{u}_m - \mathbf{U}) \quad (2.11)$$

em que  $\phi$  é a porosidade do meio,  $\mathbf{u}_m$  é a velocidade média do fluido,  $\mathbf{U}$  é a velocidade da matriz porosa, muitas vezes sendo nula, e  $\eta$  é a função viscosidade do fluido, que para o caso de fluidos newtonianos corresponde à viscosidade dinâmica  $\mu$ .

Desta forma o fator de fricção de Fanning pode ser definido pela Equação 2.12 abaixo [12].

$$f = 2R \left( \frac{\Delta P}{L} \right) \left( \frac{g^2}{U} \right) \quad (2.12)$$

em que  $R = \frac{D}{4}$  é o raio hidráulico do canal, que pode ser aplicado em meio poroso substituindo-se  $D$  por  $d_p$ .

Bears [12] então estabelece uma relação entre o fator de Fanning e o número de Reynolds poroso, determinando as regiões de regime de escoamento, baseado em diversos experimentos realizados abordando as duas definições.

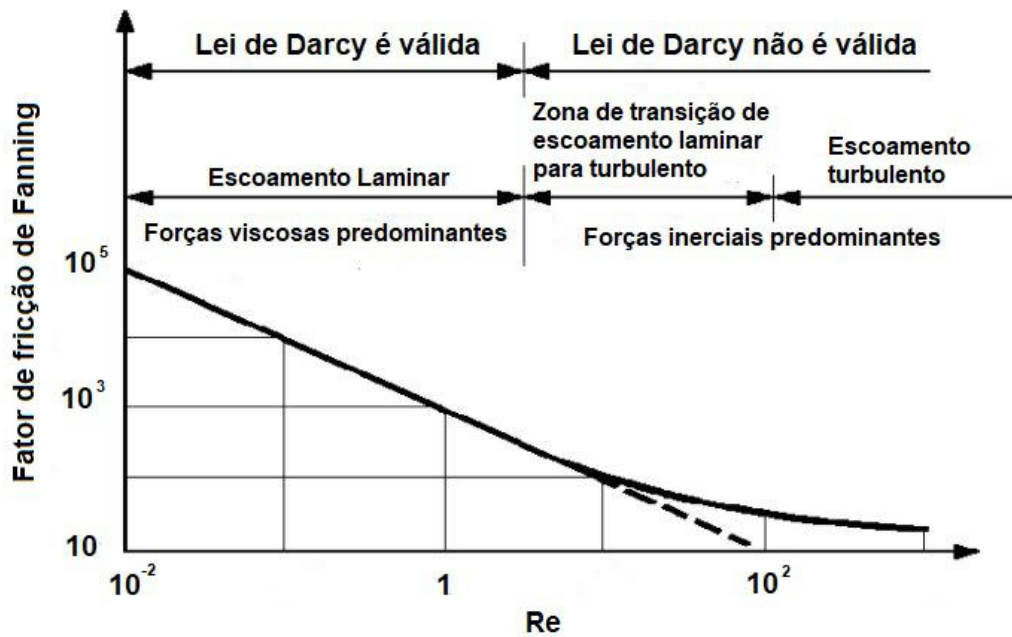


Figura 2.5: Ilustração das regiões de regime de escoamento em meio poroso pela relação do fator de Fanning com o número de Reynolds poroso. Adaptado de [12].

A Figura 2.5 acima mostra que, diferentemente do escoamento em tubos, o regime laminar em meio poroso ocorre para valores de Reynolds extremamente baixos, sendo  $Re < 10$  o limite, onde a lei de Darcy é válida.

A partir de  $Re = 10$  se observa uma zona de transição que culmina em  $Re > 100$ , onde se atinge o regime turbulento no escoamento.

### 2.6.1 Teoria de Mistura

Segundo Atkin [27], uma mistura consiste de dois ou mais materiais deformáveis, tratados individualmente como matéria contínua. A depender do caso, tal abordagem pode ser simplificada para considerar a mistura como uma substância única. No entanto, para estudos mais complexos, a abordagem mais adequada deve considerá-las como substâncias em fases distintas. Neste contexto, a Teoria de Mistura surge como um modelo para representar tais fenômenos multifásicos.

A teoria se baseia no conceito de que a mistura pode ser compreendida como uma superposição de diversos meios contínuos, com volume e movimentos próprios, os quais são ocupados por diferentes partículas de cada constituinte da mistura que interagem entre si.

Tal teoria é amplamente aplicada para estudos envolvendo meios porosos, onde há uma fase fluida e uma fase sólida presente. Para tais casos, assumindo premissas regulares e que não há reação química no meio, as equações de balanço que definem a mistura sólido-fluido se resumem a [28]:

**Balanço de massa:**

$$\frac{\partial \rho_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0 \quad \alpha = 1, 2$$

**Balanço de momento linear:**

$$\rho_\alpha \frac{D\mathbf{u}_\alpha}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_\alpha + \mathbf{m}_\alpha + \rho_\alpha \mathbf{f}_{c\alpha} \quad \alpha = 1, 2$$

$$\sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{m}_{\alpha} = 0$$

em que  $\alpha$  representa as fases s3lida e fluida da mistura, sendo, para cada uma dessas fases,  $\rho_{\alpha}$  a massa espec3fica,  $\boldsymbol{\tau}_{\alpha}$  o tensor parcial das tens3es,  $\mathbf{f}_{c\alpha}$  a for3a de corpo,  $\mathbf{m}_{\alpha}$  o termo de intera33o entre os constituintes por unidade de volume e  $\mathbf{u}_{\alpha}$  a velocidade.

3 poss3vel assumir que a parte s3lida da mistura, representada pela matriz porosa, 3 r3gida e se encontra em repouso. Com isso o escoamento se torna isot3rmico e fica plaus3vel a solu33o apenas da equa33o de movimento referente ao fluido em quest3o ( $\mathbf{m}_{\alpha} = \mathbf{m}$ ) [29]. Tal suposi33o 3 importante para o desenvolvimento do c3lculo do termo de intera33o do fluido com a matriz porosa, que deve levar em considera33o o tipo de fluido utilizado e o fato do escoamento em meios porosos possuir tamb3m car3ter extensional.

### 2.6.2 C3lculo do termo de intera33o entre o flu3ido e o meio poroso

Devido 3 grande heterogeneidade no formato dos poros de uma matriz porosa, para estudos anal3ticos, uma idealiza33o do meio torna-se necess3ria. Um dos m3todos de idealiza33o de matriz porosa mais conhecidos na literatura foi desenvolvido por Sampaio e da Gama [30]. A metodologia se baseia na ideia de um meio poroso constitu3do por placas planas, com o escoamento ocorrendo entre elas, como pode ser observado na Figura 2.6. Baseado nesta hip3tese, Ventura [4] desenvolveu uma outra metodologia considerando o meio poroso constitu3do por cilindros vazados (Figura 2.7), obtendo resultados an3logos. Devido 3 semelhan3as no estudo, a metodologia desenvolvida por Ventura 3

abordada no presente trabalho e será apresentada a seguir.

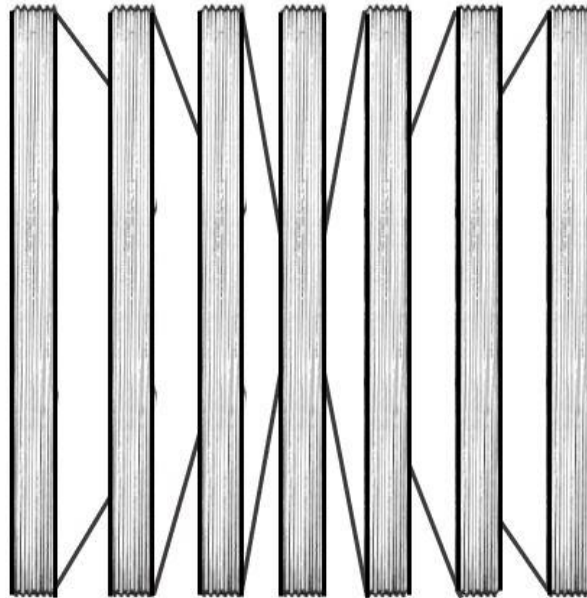


Figura 2.6: Idealização do meio poroso formado por placas paralelas. Adaptado de [30].

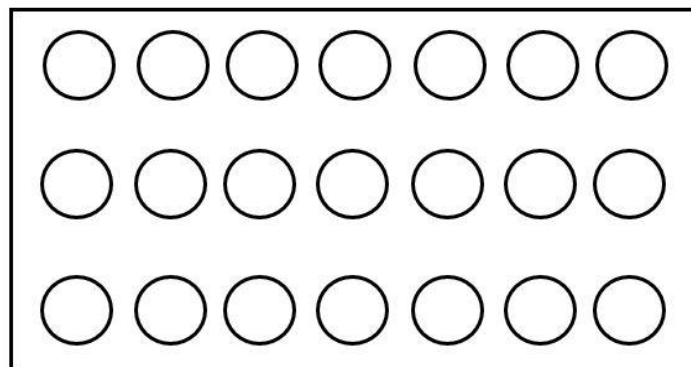


Figura 2.7: Idealização do meio poroso formado por cilindros vazados. Baseado em [4].



Assumindo um poro em formato cilíndrico, pode-se considerar para um escoamento laminar e em regime permanente num tubo de um fluido newtoniano e incompressível, descrito pela Equação 2.6, de modo que a Equação 2.4, em coordenadas cilíndricas, se reduz à Equação 2.13 abaixo.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.13)$$

em que  $\eta = \mu$  para fluidos newtonianos.

Note que para este caso, como há apenas pressão em  $z$ , o gradiente da pressão é a própria derivada em  $z$ , por isso, é possível substituir  $\nabla p$  na expressão. Com isso, integrando a equação chega-se a:

$$\mathbf{u} = \frac{r^2 \nabla p}{4\mu} + C_1 \ln r + C_2$$

em que  $C_1$  e  $C_2$  são constantes oriundas das duas integrações feitas.

Aplicando as condições de contorno de simetria ( $\frac{\partial u}{\partial r}|_{r=0}$ ) e de não deslizamento ( $r = R \rightarrow u = 0$ ), é possível determinar  $C_1$  e  $C_2$  e encontrar o perfil de velocidade pro escoamento, dado pela Equação 2.14 abaixo.

$$\mathbf{u} = \frac{-\nabla p}{4\mu} R^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (2.14)$$

Como pode ser observado na Equação 2.15, a velocidade média do fluido pode ser determinada integrando o perfil de velocidade sobre a área transversal do tubo, dividindo por essa mesma área, resultando na Equação 2.16.

$$u_m = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u 2\pi r dr \quad (2.15)$$

$$u_m = -\nabla p \frac{R^2}{8\mu} \quad (2.16)$$

Substituindo a Equação 2.11 na Equação 2.16, obtém-se as Equações 2.17, 2.18 e 2.19 abaixo.

$$\nabla p = -\frac{\phi\eta}{K} \left( -\nabla p \frac{R^2}{8\mu} \right) \quad (2.17)$$

$$\frac{K}{\phi} = \frac{R^2}{8} \quad (2.18)$$

$$R = \sqrt{\frac{8K}{\phi}} \quad (2.19)$$

A Equação 2.19 representa a relação entre o raio de poro e a porosidade do meio poroso, não sendo dependente do tipo de fluido que escoar no meio.

Sabe-se que  $\nabla p$  e o termo de interação  $m$  se relacionam pela Equação 2.20 abaixo.

$$\phi \nabla p = m \quad (2.20)$$

Baseado nisso, é possível calcular o termo, assumindo o mesmo tipo de escoamento e as mesmas hipóteses feitas anteriormente, porém considerando agora um fluido do tipo *power-law*, cuja função viscosidade é dada pela Equação 2.8. Com isso, a Equação 2.3 se reduz a:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \nabla p = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( rk \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} \right)^n \right)$$

Integrando a equação chega-se a:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{(rk)^{\left(\frac{1}{n}\right)}} \left( \frac{r^2 \nabla p}{2k} + \frac{C_1}{k} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Aplicando a condição de simetria, análogo ao caso para fluido newtoniano, encontra-se que  $C_1 = 0$  e integra-se novamente, chegando à Equação 2.21 abaixo:

$$\mathbf{u} = - \left( \frac{\nabla p}{2k} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \left( \frac{n}{n+1} \right) r^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} + C_2 \quad (2.21)$$

Aplicando a condição de não deslizamento como no caso do fluido newtoniano:

$$C_2 = \left( \frac{\nabla p}{2k} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \left( \frac{n}{n+1} \right) R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)}$$

Substituindo  $C_2$  na Equação 2.21, obtém-se o perfil de velocidade na Equação 2.22 abaixo.

$$\mathbf{u} = - \left( \frac{\nabla p}{2k} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} - r^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \right) \quad (2.22)$$

Do mesmo modo, calcula-se a velocidade média pela Equação 2.15, obtendo a Equação 2.23 para a velocidade média abaixo.

$$u_m = - \left( \frac{\nabla p}{2k} \right)^{\left(\frac{1}{n}\right)} R^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} \left( \frac{n}{3n+1} \right) \quad (2.23)$$

Note que tanto para  $\mathbf{u}$  quanto para  $\mathbf{u}_m$ , quando  $n = 1$ , os perfis encontrados para o caso *power-law* recaem aos perfis do caso newtoniano.

Fazendo uma pequena manipulação na Equação 2.22, é possível reescrevê-la isolando o termo  $\nabla p$ , chegando na Equação 2.24.

$$\nabla p = - \frac{2ku_m^n}{R^{(n+1)}} \left( \frac{3n+1}{n} \right)^n \quad (2.24)$$

Substituindo a Equação 2.24 na Equação 2.20:

$$\mathbf{m} = - \frac{2\phi k u_m^n}{R^{(n+1)}} \left( \frac{3n+1}{n} \right)^n$$

Substituindo  $R$  pela Equação 2.19:

$$\mathbf{m} = -2\phi \left( \frac{\phi}{8K} \right)^{\left(\frac{n+1}{n}\right)} k u_m^n \left( \frac{3n+1}{n} \right)^n$$

Note que quando  $n = 1$  o termo fonte recai em um caso de fluido newtoniano, com  $k = \mu$ .

Como dito anteriormente, a suposição de que a matriz porosa é constituída por poros em formatos tubulares regulares e paralelos é tão deficiente quanto a de que ela é formada por placas paralelas, pois a matriz na verdade é extremamente irregular em sua estrutura, e tais idealizações acabam não abordando efeitos viscosimétricos no escoamento. Porém, para fins de cálculo do termo de interação, para se ter uma base analítica comparativa com

o método numérico realizado em estruturas de poros com formatos distintos e seções distintas, a abordagem se torna satisfatória.

### 2.6.3 Cálculo da relação entre a força do fluido na parede do poro cilíndrico e o termo de interação do fluido com o meio poroso

Seguindo o objetivo do trabalho em analisar o termo fonte de interação do fluido com o meio poroso, é necessário determinar a força realizada pelo fluido na parede e sua relação com o termo fonte, visto que o OpenFOAM® calcula apenas esta força e não o termo fonte em si.

Assumindo as mesmas hipóteses da Seção 2.6.2, para um escoamento com fluido newtoniano, é possível substituir a Equação 2.16 na Equação 2.14 e obter um perfil de velocidade em função da velocidade média:

$$\mathbf{u} = 2u_m \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

A tensão cisalhante na parede do poro é dada por:

$$\tau|_{r=R} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=R}$$

$$\tau|_{r=R} = \frac{4\mu u_m}{R}$$

Sendo assim, a força pode ser determinada para um elemento infinitesimal na parede de um tubo de poro de comprimento  $2L$ , integrando a tensão

cisalhante em um elemento de área pela Equação 2.25, resultando na Equação 2.26.

$$d\mathbf{F} = \tau dA \quad (2.25)$$

$$\mathbf{F} = 16\mu u_m \pi L \quad (2.26)$$

A Equação 2.26 acima é referente à força do fluido na parede do tubo, de modo que é possível deduzir que a força exercida pela parede no fluido possui a mesma magnitude, porém com sentido contrário.

Tendo em vista a Equação 2.20, referente ao termo fonte, para o casos com fluidos newtonianos em que  $n = 1$ , a equação se reduz à Equação 2.27 abaixo.

$$\mathbf{m} = -\frac{8\phi k u_m}{R^2} \quad (2.27)$$

Após uma pequena manipulação, é possível substituir a Equação 2.26 na Equação 2.27, obtendo a relação do termo fonte com a força na parede do tubo, que pode ser observada na Equação 2.28 abaixo.

$$\mathbf{m} = \phi \frac{\mathbf{F}}{V} \quad (2.28)$$

em que  $V$  corresponde ao volume do poro em formato de tubo.

Adota-se o mesmo procedimento para fluidos *power-law*, encontrando uma expressão que relaciona o perfil de velocidade com a velocidade média. Sendo

assim, após uma pequena manipulação na Equação 2.23, é possível substituí-la na Equação 2.22, obtendo:

$$\mathbf{u} = u_m \left( \frac{3n+1}{n+1} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^{\left( \frac{n+1}{n} \right)} \right]$$

A tensão na parede é dada por:

$$\tau|_{r=R} = -\eta \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{r=R} = -k \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)^n \Big|_{r=R}$$

$$\tau|_{r=R} = k \left[ \frac{u_m}{R} \left( \frac{3n+1}{n} \right) \right]^n$$

Com isso, a força na parede representada pela Equação 2.29, para um tubo de comprimento  $2L$  é determinada pela Equação 2.25.

$$\mathbf{F} = 4\pi L k u_m^n R^{(1-n)} \left( \frac{3n+1}{n} \right)^n \quad (2.29)$$

Assim como no caso do fluido newtoniano, a força determinada na Equação 2.29 se refere a força que o fluido realiza na parede. O caso contrário possui mesma magnitude, porém sentido inverso.

Retornando à Equação 2.20 do termo fonte, é possível manipulá-la de modo a obter a seguinte configuração:

$$\mathbf{m} = \phi 4\pi L k u_m^n R^{(1-n)} \left( \frac{3n+1}{n} \right)^n \frac{1}{2\pi L R^{(1-n)} R^{(n+1)}} \quad (2.30)$$

Substituindo a Equação 2.29 na Equação 2.30 obtém-se a relação do termo

fonte com a força na parede do poro, que vem a ser a mesma tanto para casos de fluidos newtonianos quanto para casos de *power-law*, representada pela Equação 2.28.

A adimensionalização do termo fonte se torna necessária para comparação entre casos distintos. Desta forma:

$$\mathbf{m}_a = \mathbf{m} \frac{R}{\rho u_m^2}$$

A Equação 2.31 representa o resultado para adimensionalização em casos com fluido newtoniano.

$$\mathbf{m}_a = \phi \frac{16\mu u_m \pi L}{\pi R^2 2L} \frac{R}{\rho u_m^2} = \frac{16\phi}{Re} \quad (2.31)$$

em que o número de Reynolds para um fluido newtoniano é dado pela Equação 2.32 abaixo.

$$Re = \frac{\rho u_m D}{\mu} \quad (2.32)$$

Já para casos com fluidos do tipo *power-law*, a adimensionalização resulta na Equação 2.33.

$$\mathbf{m}_a = \phi \frac{4\pi L k u_m^n R^{(1-n)} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n}{\pi R^2 2L} \frac{R}{\rho u_m^2} = \frac{2\phi}{Re_{pl}} \quad (2.33)$$

em que o número de Reynolds para um fluido *power-law* é dado pela Equação 2.34 abaixo.



$$Re_{pl} = 8 \left( \frac{n}{6n + 2} \right)^n \frac{\rho u_m^{(2-n)} D^n}{k} \quad (2.34)$$

## 2.7 Fluidodinâmica computacional

Fluidodinâmica computacional é um conjunto de ferramentas para resolver numericamente as equações diferenciais governantes de processos envolvendo escoamento de fluidos, transferência de calor e massa e fenômenos associados, como reações químicas, por meio de simulações computacionais [23].

Na seção anterior, determinou-se de forma analítica o termo de interação fluido-meio poroso, necessário para simular escoamentos porosos pela Teoria de Mistura, em poros de formato cilíndrico para escoamentos com fluidos newtonianos e não-newtonianos, modelados pela lei da potência.

Ocorre que os poros são irregulares e não se tem soluções analíticas para os mesmos. Dessa forma, pode-se utilizar a fluidodinâmica computacional para determinar o termo de interação fluido-meio poroso, que é o que o presente trabalho se dispõe a fazer.

O *software* utilizado para as soluções fluidodinâmicas aqui desenvolvidas é o OpenFOAM®<sup>®</sup>, um pacote de código aberto desenvolvido em C++ usado para soluções envolvendo mecânica do contínuo computacional. O pacote possui bastante robustez e acurácia numérica e sua estrutura é baseada em *solvers*, que são algoritmos implementados para soluções numéricas específicas [21]. Ou seja, são códigos que solucionam casos numéricos envolvendo mecânica do contínuo. Além disso, o pacote oferece ferramentas, também de código aberto, para geração de geometria e malha, pós processamento,

aquisição e tratamento de dados, entre muitas outras coisas [22].

Desde 2011 o OpenFOAM® se divide em duas vertentes: uma distribuída pela ESI Group e outra pela OpenFOAM Foundation, uma organização sem fins lucrativos e mantida pela comunidade de desenvolvedores. Ambas as vertentes possuem arquitetura baseada no método de volumes finitos para soluções numéricas, método de ampla aplicação para soluções em CFD.

Para este trabalho, foi utilizada a versão 2019.2 do OpenFOAM®, cuja distribuição é feita pela ESI Group, instalada no subsistema Linux do Windows (WSL).

O OpenFOAM®, assim como a maior parte dos códigos de fluidodinâmica computacional, são baseados no Método dos Volumes Finitos (MVF). Este método consiste na divisão, ou discretização, do domínio em uma quantidade finita de volumes de controle. O objetivo do método é transformar o sistema de equações diferenciais parciais, composto em problemas de mecânica do contínuo pelas equações de conservação, como as de massa e da quantidade de movimento linear, em um sistema linear algébrico.

Se tratando de casos de CFD, que envolvem necessariamente soluções numéricas, a discretização do domínio ocorre na etapa de geração da malha computacional [24]. Um exemplo de malha pode ser observado na Figura 2.8 abaixo:

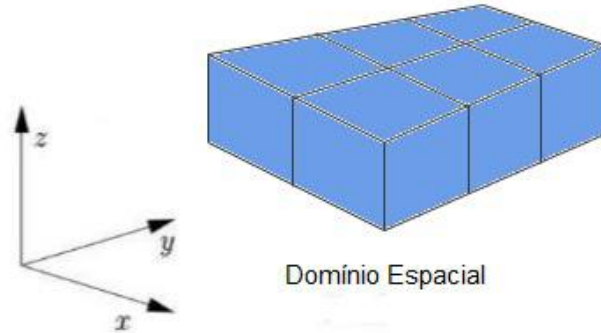


Figura 2.8: Exemplo de domínio discretizado em malha computacional. Baseado em [25].

Na execução do método, o valor de uma grandeza analisada é passada de um volume para outro, por meio de algum método de interpolação, e assim se analisa a evolução de tal grandeza ao longo do domínio. Desta forma, é necessário definir a localização do ponto, também chamado de nó, em que tais valores serão alocados no domínio.

Durante muito tempo foi utilizado um método no qual os nós eram alocados nas arestas dos volumes de controle discretizados. Porém, com o surgimento do procedimento de interpolação de Rhie-Chow, passou-se a adotar com mais frequência um arranjo de modo que os nós estivessem localizados no centroide de cada volume de controle, chamado de arranjo colocalizado [26]. O OpenFOAM®<sup>®</sup>, e a grande maioria dos códigos de CFD, utilizam tal arranjo.

A Figura 2.9 mostra os dois tipos alocação de variáveis.

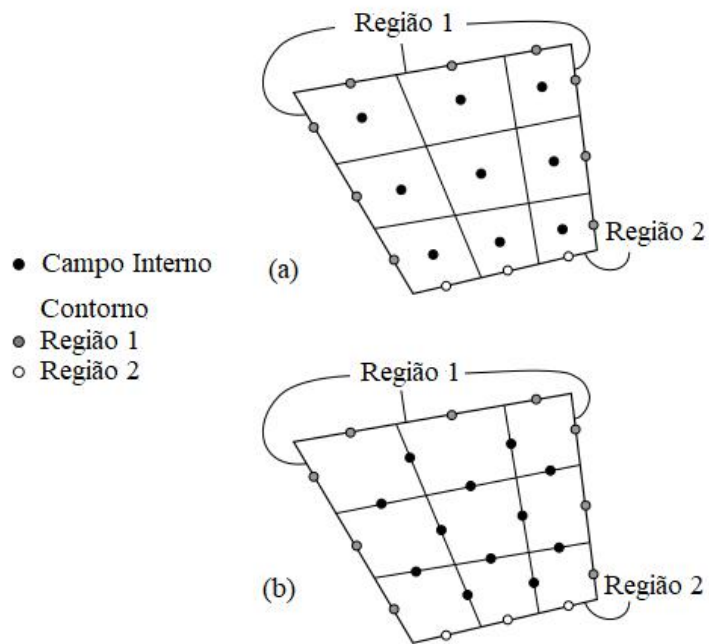


Figura 2.9: (a) Arranjo com os nós centrados nos volumes. (b) Arranjo com os nós nas arestas. Adaptado de [26].

# Capítulo 3

## Metodologia

O presente trabalho se utiliza da simulação fluidodinâmica para realizar um conjunto de simulações abordando modelos de fluidos newtonianos e não-newtonianos escoando, em regime laminar e incompressível, em um canal poroso cilíndrico com constrição abrupta, de modo a se analisar a influência que parâmetros do escoamento possuem no comportamento do termo de interação do fluido com a matriz porosa em função do número de Reynolds do escoamento.

Para tanto, foi proposta a simulação de 135 casos variando os parâmetros da geometria do canal de poros (diâmetro, raio de entrada, comprimento e constrição do canal), o número de Reynolds do escoamento e a reologia do fluido. Os modelos propostos serão apresentados nos tópicos seguintes.

### 3.1 Fluidos implementados

Baseado nas soluções ácidas mais utilizadas nas técnicas de acidificação de matriz, apresentadas e discutidas no Capítulo 2.1, buscou-se no trabalho implementar fluidos que fossem coerentemente representativos. Desta forma, o estudo se baseou na solução 15% de ácido clorídrico, pois esta é a mais comumente utilizada.

Modelou-se a solução ácida com base no modelo *power-law*, de modo que ela assumisse os três comportamentos reológicos distintos: pseudo-plástico ( $n < 1$ ), newtoniano ( $n = 1$ ) e dilatante ( $n > 1$ ).

Os valores para o índice de consistência  $k$  e a massa específica  $\rho$  da solução de HCl utilizados são apresentados na Tabela 3.1, juntamente com os índices de comportamento  $n$  implementados e a viscosidade cinemática  $\nu$  do fluido.

Tabela 3.1: Parâmetros dos fluidos implementados, baseado na solução 15% de HCl.

Massa específica ( $\rho$ )	1106 $kg/m^3$
Índice de consistência ( $k$ )	$1.305 \times 10^{-3} \frac{kg}{m} \cdot s^{n-2}$
Viscosidade dinâmica ( $\mu$ )	$1.305 \times 10^{-3} Pa \cdot s$
Viscosidade cinemática ( $\nu$ )	$1.18 \times 10^{-6} m^2/s$
Índice de comportamento ( $n$ )	0.5
	1
	1.2

## 3.2 Geometrias implementadas

### 3.2.1 Canais cilíndricos

Seguindo a idealização do meio poroso apresentada anteriormente, foram utilizados canais cilíndricos para representação dos poros nas simulações, pois são geometrias de construção simplificadas e que conseguem produzir valores de referência para efeitos de comparação, tanto com resultados analíticos quanto com numéricos em geometrias mais complexas. Seus parâmetros foram definidos como sendo  $R_0$  igual ao raio do poro cilíndrico e  $c$  igual comprimento do cilindro, sendo  $c = 10R_0$ .

Para  $R_0$ , foram implementados três valores distintos, de modo que se pudesse obter uma faixa representativa de poro adequada.

Além disso, foi também aplicada uma faixa de número de Reynolds ( $Re$ ), que deveria respeitar o regime laminar de escoamento visto na Seção 2.6, característico dos processos de acidificação de matriz, e ao mesmo tempo abranger um intervalo condizente para uma análise coerente da influência do termo. Deste modo, é possível avaliar o comportamento do termo de interação do fluido com a matriz porosa em função do número de Reynolds por meio das simulações.

Outra condição importante para o sucesso da análise era manter um parâmetro comum à todas as geometrias equivalentes, pois assim é possível fazer uma análise comparativa correta. Deste modo, os volumes ( $V$ ) dos poros cilíndricos de referência foram conservados para as geometrias de poro de maior complexidade derivadas deles, visto que, como foi mostrado na Equação 2.28, o termo de interação é inversamente proporcional ao volume do poro, e com

isso é possível fixá-lo e realizar a análise comparativa corretamente.

Os valores implementados de  $R_0$ ,  $Re$  e  $V_i$  encontram-se na Tabela 3.2 abaixo.

Tabela 3.2: Valores para o raio do poro cilíndrico  $R_0$ , seus respectivos volumes  $V$  e o número de Reynolds  $Re$ .

$R_0(\mu m)$	$V(\mu m^3)$	$Re$		
1	31.42	1	0.01	0.0001
10	$3.142 \times 10^4$			
100	$3.142 \times 10^7$			

Foi utilizado condição de contorno cíclica, de modo que a saída do poro na iteração anterior seja a entrada do poro na iteração seguinte. Deste modo foi possível simular o canal poroso sem de fato implementar inúmeras geometrias iguais sequencialmente, resultando em um menor custo computacional. Além disso, para a parede do poro, foi implementada a condição de não deslizamento, ou seja, velocidade radial nula, e condição para escoamento incompressível com gradiente de pressão também nulo.

- $\mathbf{u}|_{r=R} = (0, 0, 0)$
- $\nabla p|_{r=R} = (0, 0, 0)$

Os casos estudados são todos incompressíveis e os esquemas de discretização utilizados estão resumidos na Tabela 3.3.



Tabela 3.3: Esquemas de discretização utilizados no OpenFOAM®.

Termo	Esquema numérico
ddtSchemes	steadyState
gradSchemes	Gauss linear
divSchemes	Gauss linear
laplacianSchemes	Gauss linear corrected
interpolationSchemes	linear
snGradSchemes	orthogonal

### 3.2.2 Canais constritivos

Tendo como referência o trabalho de [4], que se utiliza de canais cilíndricos convergentes-divergentes para representar os poros, o presente trabalho modifica tal geometria para estudar o escoamento nestes canais e o comportamento do termo fonte em função do número de Reynolds neles, fazendo uma abordagem com canais de poro cilíndricos constritivos, que geram deformações abruptas no fluido, representado na Figura 3.1.

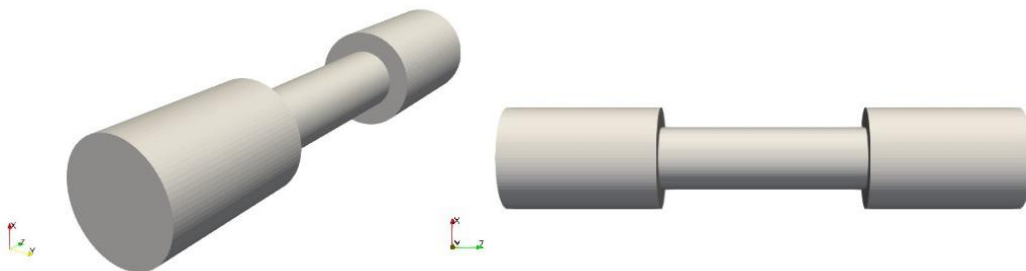


Figura 3.1: Geometria constritiva de poro utilizada nas simulações.

Tal geometria deriva do canal cilíndrico apresentado anteriormente e deve manter o mesmo volume. Desta forma, tal poro cilíndrico é tratado como um cilindro equivalente, tendo seus parâmetros utilizados como referência para a construção da geometria constritiva.

Com isso, para que o volume fosse mantido, o canal foi dividido em três regiões: entrada, saída e constrição, e o comprimento total do canal foi conservado, variando apenas os raios de entrada/saída ( $R_i$ ) e da constrição ( $r_i$ ), sendo  $R_i > R_0$  e  $r_i < R_0$ , de forma proporcional.

Além disso, o comprimento da entrada/saída ( $L$ ) e da constrição do poro ( $2l$ ) são também proporcionais ao raio do cilindro equivalente, sendo respectivamente  $L = 3R_0$  e  $l = 2R_0$ , mantendo o comprimento total do cilindro ( $c = 2L_i + 2l_i$ ).

Foi também implementada uma extensão na entrada e saída do canal, de comprimento  $ext$ , de modo a absorver efeitos de desenvolvimento do escoamento, sendo  $ext = 1.5L$ . A Figura 3.2 ilustra a parametrização da geometria.

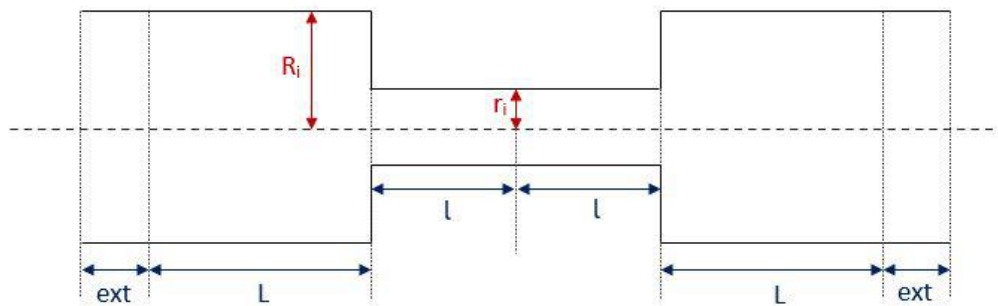


Figura 3.2: Parâmetros de implementação da geometria.

Foram então criadas quatro geometrias distintas para cada raio de poro cilíndrico  $R_0$  ( $1\mu m$ ,  $10\mu m$  e  $100\mu m$ ), nas quais o raio da constrição variava baseado no parâmetro  $\delta$  definido na Equação 3.1, o qual determina a relação de proporcionalidade do raio da constrição em relação ao raio do cilindro equivalente.

$$\delta = \frac{R_0 - r_i}{R_0} \quad (3.1)$$

Sendo assim, foi determinado quatro variações para o raio construtivo: 80%, 60%, 40% e 20% do raio do cilindro equivalente, dando um total de 15 geometrias. Já os raios de entrada e saída foram determinados a partir do cálculo dos volumes do canal construtivo e do volume do cilindro equivalente.

$$V = 2V_i + v_i$$

em que:

$$V_i = \pi R_i^2 L \quad e \quad v_i = \pi r_i^2 2l$$

Com isso:

$$R_i = \left( \frac{V - v_i}{2\pi L} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sendo  $V_i$  o volume das regiões de entrada e saída,  $v_i$  o volume da constrição e  $V$  o volume do cilindro equivalente. Valores dos parâmetros calculados podem ser observados na Tabela 3.4 abaixo, para raio de poro cilíndrico  $R_0 = 1\mu m$ .

Tabela 3.4: Valores dos raios das geometrias constritivas, para raio de poro cilíndrico  $R_0 = 1\mu m$ .

$\delta$	$r_i(\mu m)$	$R_i(\mu m)$
0	1	1
0.2	0.8	1.114
0.4	0.6	1.194
0.6	0.4	1.249
0.8	0.2	1.281

Os valores dos raios da geometria constritiva referentes aos cilindros equivalentes de raios de  $10 \mu m$  e  $100 \mu m$  seguem o mesmo padrão, apenas com uma ordem de grandeza maior.

Assim como nos casos cilíndricos mencionados anteriormente, foram aplicadas as condições de não-deslizamento e gradiente de pressão nulo, além da condição de contorno cíclica para simular um canal de poros constritivos.



Figura 3.3: Representação do canal de poros constritivos.

Vale ressaltar que a condição cíclica aplicada nas regiões de entrada e saída do poro construtivo definido nesta Seção assegura que o trabalho trata de um canal de poros com súbita contração, não com súbita expansão.

### 3.3 Cálculo das velocidades de entrada

Visto que o objetivo deste trabalho é estudar a relação entre o termo fonte e o número de Reynolds nos escoamentos em poros com geometrias constritivas, a velocidade de entrada do fluido ácido no canal poroso foi mantida constante, para um mesmo fluido em uma mesma faixa de Reynolds, independente da constrição aplicada na geometria.

Desta forma, é possível analisar a influência do número de Reynolds na força aplicada na parede do poro pelos fluidos, comparando os casos em diferentes geometrias para encontrar um padrão de comportamento.

O cálculo da velocidade de entrada é feito a partir da equação de Reynolds para fluidos do tipo *power-law* (Equação 2.34). Sendo assim, tendo os valores dos parâmetros geométricos e de fluido é possível calcular essa velocidade em função destes parâmetros.

$$u_i = \left[ \frac{kRe}{8 \left(\frac{n}{6n-2}\right)^n \rho (2R_i)^n} \right]^{\frac{1}{2-n}} \quad (3.2)$$

Vale ressaltar que, assim como para as equações constitutivas, para  $n = 1$  a Equação 2.34 se reduz à equação de Reynolds para fluido newtoniano mais comumente conhecida (Equação 2.32).

Visto que, como citado anteriormente, a velocidade foi mantida constante independente da constrição aplicada,  $R_i$  então se resumiu ao raio do poro cilíndrico  $R_0$ , que assume os valores  $1\mu m$ ,  $10\mu m$  e  $100\mu m$ . A Tabela 3.5 mostra as velocidades calculadas.

Tabela 3.5: Velocidades de entrada calculadas para cada fluido variando com o número de Reynolds.

		Velocidade (m/s)		
$R_0$ ( $\mu m$ )	Fluido ( $n$ )/Re	1	0.01	0.0001
1	0.5	$4.773 \times 10^{-3}$	$2.215 \times 10^{-4}$	$1.028 \times 10^{-5}$
	1.0	$5.899 \times 10^{-1}$	$5.899 \times 10^{-3}$	$5.899 \times 10^{-5}$
	1.2	21.69	$6.859 \times 10^{-2}$	$2.169 \times 10^{-4}$
10	0.5	$2.215 \times 10^{-3}$	$1.028 \times 10^{-4}$	$4.773 \times 10^{-6}$
	1.0	$5.899 \times 10^{-2}$	$5.899 \times 10^{-4}$	$5.899 \times 10^{-6}$
	1.2	$6.859 \times 10^{-1}$	$2.169 \times 10^{-3}$	$6.859 \times 10^{-6}$
100	0.5	$1.028 \times 10^{-3}$	$4.773 \times 10^{-5}$	$2.215 \times 10^{-6}$
	1.0	$5.899 \times 10^{-3}$	$5.899 \times 10^{-5}$	$5.899 \times 10^{-7}$
	1.2	$2.169 \times 10^{-2}$	$6.859 \times 10^{-5}$	$2.169 \times 10^{-7}$

### 3.4 Malha computacional

As malhas computacionais foram geradas a partir do utilitário blockMesh. Esta ferramenta é parte nativa do OpenFOAM® e se baseia na geração de geometria por meio de um conjunto de blocos hexaédricos que são então divididos em um determinado número de células nas direções cartesianas, gerando a malha computacional.

De modo a explorar a simetria axissimétrica da geometria e reduzir o custo computacional, o domínio computacional foi definido com uma seção axissimétrica de  $5^\circ$ , equivalendo a apenas 1,4% do volume da geometria completa, aproximadamente. O comprimento axial das peças foi mantido como

na geometria original proposta, como mostram as Figuras 3.4 e 3.5, para um caso de poro cilíndrico e outro caso de poro com  $\delta = 0.8$ . Desta forma, as direções observadas no escoamento são apenas a radial e axial, tornando o caso axissimétrico.

Vale ressaltar que essas malhas são apenas representativas e não correspondem as malhas finais utilizadas. Entretanto, observa-se o refino nas paredes da geometria para capturar as camadas-limite nesses contornos.

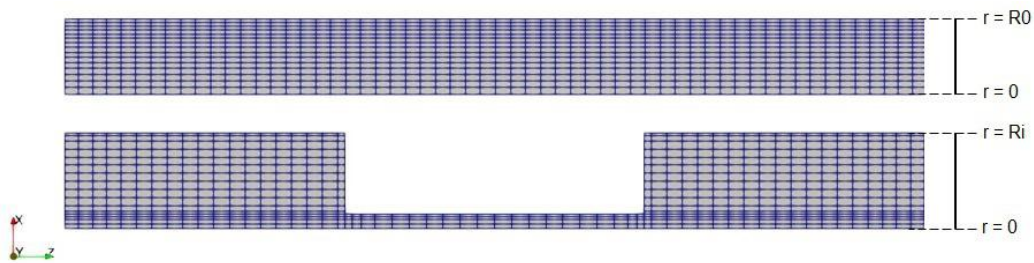


Figura 3.4: Perfil das malhas computacionais das seções axissimétricas simuladas, vistas no plano XZ do domínio, para os casos de  $\delta = 0$  e  $\delta = 0.8$ .

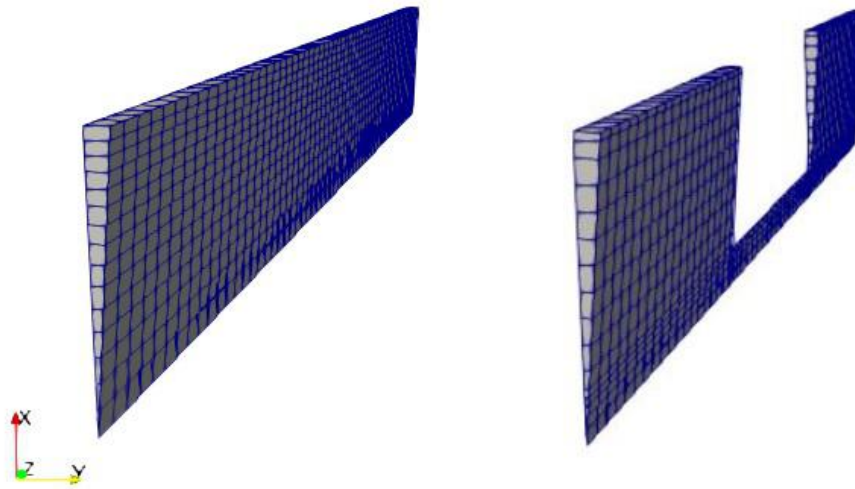


Figura 3.5: Perspectiva das malhas computacionais das seções axissimétricas simuladas.

### 3.4.1 Convergência de malha

O estudo de convergência de malha deve ser feito para que a simulação una resultados acurados com o menor custo computacional possível. Para tal é preciso encontrar a malha ideal para o estudo que preencha estes dois requisitos.

Este tipo de estudo é feito variando a discretização de elementos em cada direção do domínio. Visto que o caso já foi otimizado para uma geometria que representa uma uma seção axissimétrica do domínio total, eliminando uma dimensão para refino, as direções de discretização avaliadas neste caso foram então a radial e a axial.

As configurações de caso escolhidas para o estudo levaram em consideração os casos mais críticos, onde se esperaria maior oscilação e instabilidade



na simulação. Com isso, escolheu-se a geometria de poro com  $\delta = 0.8$ , por se tratar da geometria com maior deformação em relação ao cilindro equivalente.

Além disso, buscou-se também casos com maiores gradientes de pressão, que estão atrelados à altas velocidades. Deste modo, o caso com  $R_0 = 1 \mu m$  e  $Re = 1$  se mostrou o mais adequado para preencher este requisito.

Com relação à configuração dos fluidos, visto que o trabalho aborda dois extremos de fluido *power-law* que possuem comportamentos distintos: pseudo-plástico e dilatante, escolheu-se recorrer ao teste de malha para ambos os fluidos, de modo a se obter maior segurança nos seus resultados. A configuração utilizada nos testes se encontra na Tabela 3.6 abaixo:

Tabela 3.6: Configuração das propriedades para o estudo de teste de malha.

$\delta$	0.8	
$R_0 (\mu m)$	1	
$Re$	1	
Fluido ( $n$ )	0.5	1.2
$u (m/s)$	$4.773 \times 10^{-3}$	21.689

Como variável de controle, escolheu-se a força total aplicada pelo fluido na parede do poro e seu comportamento ao longo das iterações, visto que a mesma já seria o objetivo de avaliação final do trabalho, garantindo a convergência desta variável há de se ter a segurança de que as outras simulações também irão convergir.

O teste foi feito de modo sequencial, ou seja, primeiro foi feita a análise da discretização radial da malha e posteriormente a axial. Para isso, fixou-se um

valor de discretização na direção axial e variou-se o número de células apenas na região radial. Este procedimento é padrão para testes de convergência de malha. Ao finalizar a avaliação radial, fixa-se o valor otimizado encontrado para então variar o número de células na direção axial.

Partiu-se portanto de uma malha com 174 elementos axiais fixos, variando a quantidade de elementos radiais de 30 a 70 elementos, para ambos os fluidos, sendo metade destes elementos distribuídos pelo raio da restrição (*cellConst*) e a outra metade completando a dimensão dos raios de entrada/saída (*cellRad*). A Figura 3.6 ilustra melhor a distribuição radial de elementos.

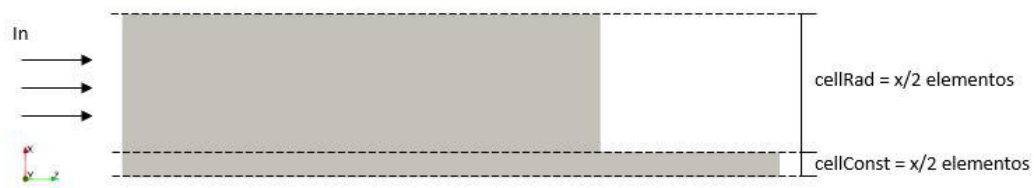


Figura 3.6: Ilustração do modelo de discretização para o teste de malha na direção radial.

Os resultados do teste de malha radial são apresentados na Figura 3.7 abaixo.

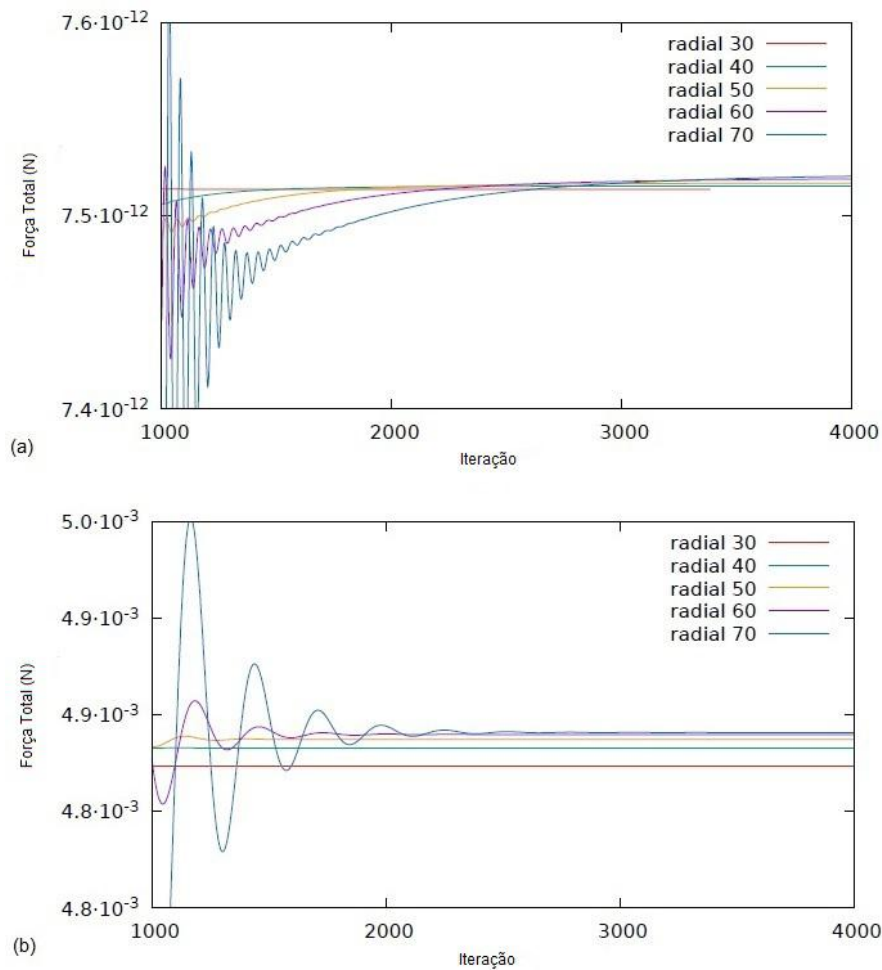


Figura 3.7: Perfis das forças aplicadas pelo fluido na parede do poro no estudo de convergência de malha com discretização radial variável, sendo (a) para fluido pseudo-plástico e (b) para fluido dilatante.

Ao se observar os perfis nota-se uma certa tendência de convergência do perfil de força conforme a discretização radial aumenta. Tendo em vista este comportamento, percebe-se pouca variação de força entre as malhas de 60 e 70 elementos, mostrando que há proximidade de convergência. Desta forma, é possível escolher a malha com 60 elementos, por apresentar uma discretização

menor, o que gera menor custo computacional para a simulação.

Em seguida foi feito o teste para a direção axial. Deste modo, a discretização de 60 elementos determinada anteriormente foi fixada na direção radial e variou-se a direção axial de 116 a 348 elementos. Os resultados podem ser observados na Figura 3.8 abaixo.

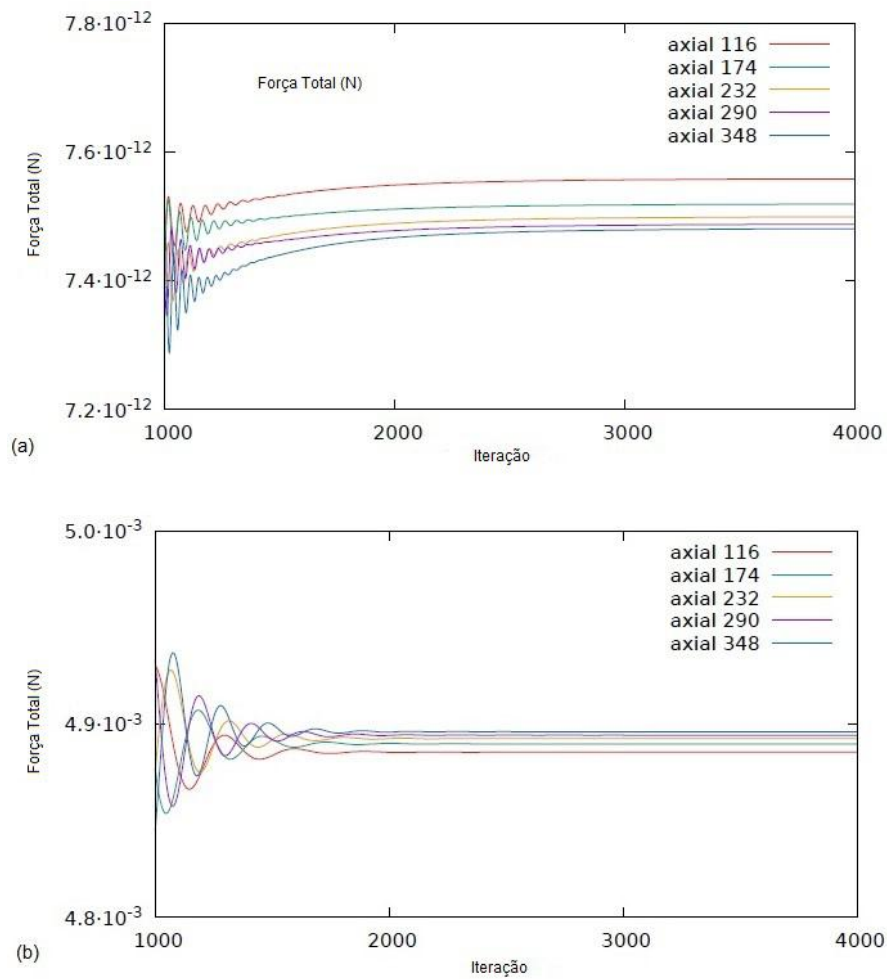


Figura 3.8: Perfis das forças aplicadas pelo fluido na parede do poro no estudo de convergência de malha com discretização axial variável, sendo (a) para fluido pseudo-plástico e (b) para fluido dilatante.

Novamente é possível observar uma certa tendência de convergência conforme a discretização aumenta. Dentro desta tendência escolheu-se a malha de 232 elementos, pois ela provou possuir a melhor combinação de resultados acurados e custos computacionais entre as discretizações avaliadas.

Desta forma foi definido para os casos com  $\delta = 0.8$  a malha com discretização de 60 elementos na direção radial e 232 na axial. Tendo como base esta malha, como a proporção entre as regiões de entrada e saída da geometria e da discretização mudam de acordo com a constrição, para definir as malhas para os outros casos foi feita uma distribuição radial proporcional, de modo a manter uma certa coerência na relação de elementos *cellConst* por *cellRad*. A Tabela 3.7 mostra a distribuição radial de cada geometria e a Figura 3.9 ilustra as malhas implementadas para os casos.

Tabela 3.7: Discretização radial distribuída entre as diferentes geometrias constritivas do estudo.

Elementos					
Constrição	80%	60%	40%	20%	0%
<i>cellRad</i>	30	24	18	12	0
<i>cellConst</i>	30	36	42	48	60

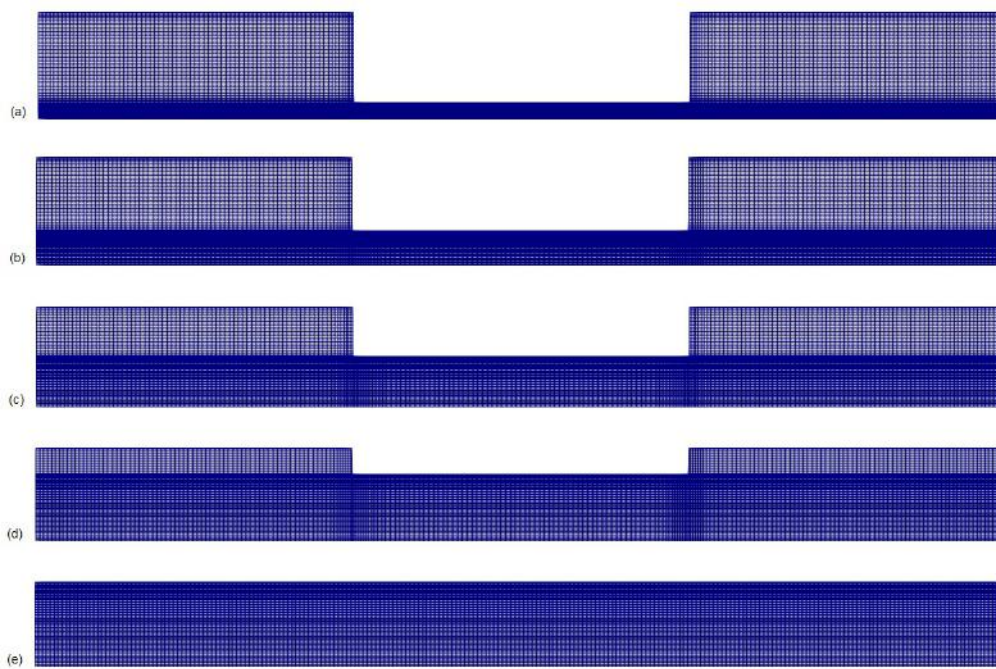


Figura 3.9: (a)  $\delta = 0.8$  (b)  $\delta = 0.6$  (c)  $\delta = 0.4$  (d)  $\delta = 0.2$  (e)  $\delta = 0$  ou cilindro equivalente.

# Capítulo 4

## Resultados

### 4.1 Validação dos resultados com base nos valores analíticos para poros cilíndricos

De modo a validar as simulações numéricas, os resultados obtidos com estas para a força aplicada pelo fluido na parede do poro foi comparado com os valores analíticos esperados pelas Equações 2.26 e 2.29 para fluidos newtonianos e *power-law*, respectivamente em um cilindro, ou seja, para o caso de poro cilíndrico. Para cada fluido, estes valores são distribuídos de acordo com o número de Reynolds do escoamento.

É importante citar que a força na parede realizada pelo fluido possui essencialmente duas componentes: força de pressão e força viscosa. No entanto, o objetivo desta Seção e das próximas é estudar o efeito da força total para obter-se o comportamento do termo fonte por completo. Sendo assim, a abordagem inicial será sem a divisão de contribuição de forças. Mais a

frente, na Seção 4.3, a influência destas forças será abordada mais a fundo.

Como as simulações foram realizadas em uma sessão axissimétrica da geometria, os valores numéricos das simulações são multiplicados em 72 vezes para se obter o valor de força correspondente à geometria completa. Os resultados são apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2.

Tabela 4.1: Valores analítico e numérico de força para escoamento em poro cilíndrico do Fluido newtoniano.

Fluido Newtoniano			
$R_0$ ( $\mu m$ )	$Re$	Analítico	Numérico
1	1	$1.934 \times 10^{-7}$	$1.935 \times 10^{-7}$
	0.01	$1.934 \times 10^{-9}$	$1.935 \times 10^{-9}$
	0.0001	$1.934 \times 10^{-11}$	$1.935 \times 10^{-11}$
10	1	$1.934 \times 10^{-7}$	$1.935 \times 10^{-7}$
	0.01	$1.934 \times 10^{-9}$	$1.935 \times 10^{-9}$
	0.0001	$1.934 \times 10^{-11}$	$1.935 \times 10^{-11}$
100	1	$1.934 \times 10^{-7}$	$1.935 \times 10^{-7}$
	0.01	$1.934 \times 10^{-9}$	$1.935 \times 10^{-9}$
	0.0001	$1.934 \times 10^{-11}$	$1.935 \times 10^{-11}$



Tabela 4.2: Valores analítico e numérico de força para escoamento em poro cilíndrico dos fluidos *power-law*.

		Pseudo-plástico		Dilatante	
$R_0(\mu m)$	$Re$	Analítico	Numérico	Analítico	Numérico
1	1	$1.267 \times 10^{-11}$	$1.278 \times 10^{-11}$	$2.615 \times 10^{-4}$	$2.617 \times 10^{-4}$
	0.01	$2.729 \times 10^{-12}$	$2.729 \times 10^{-12}$	$2.615 \times 10^{-7}$	$2.617 \times 10^{-7}$
	0.0001	$5.878 \times 10^{-13}$	$5.878 \times 10^{-13}$	$2.615 \times 10^{-10}$	$2.617 \times 10^{-10}$
10	1	$2.729 \times 10^{-10}$	$2.729 \times 10^{-10}$	$2.615 \times 10^{-5}$	$2.617 \times 10^{-5}$
	0.01	$5.878 \times 10^{-11}$	$5.878 \times 10^{-11}$	$2.615 \times 10^{-8}$	$2.617 \times 10^{-8}$
	0.0001	$1.266 \times 10^{-11}$	$1.247 \times 10^{-11}$	$2.615 \times 10^{-11}$	$2.618 \times 10^{-11}$
100	1	$5.878 \times 10^{-9}$	$5.878 \times 10^{-9}$	$2.615 \times 10^{-6}$	$2.617 \times 10^{-6}$
	0.01	$1.267 \times 10^{-9}$	$1.248 \times 10^{-9}$	$2.615 \times 10^{-9}$	$2.618 \times 10^{-9}$
	0.0001	$2.729 \times 10^{-10}$	$7.268 \times 10^{-11}$	$2.615 \times 10^{-12}$	$7.116 \times 10^{-12}$

Nota-se que, com exceção dos casos de fluidos *power-law*, com  $R_0 = 100\mu m$  e  $Re = 0.0001$ , os valores numéricos encontrados são muito próximos aos valores analíticos, o que valida as simulações e atesta novamente a qualidade da malha escolhida na Seção 3.4.1. Estes casos de exceção serão abordados mais a frente.

Estes valores são convertidos e adimensionalizados pelas Equações 2.31 e 2.33 para os casos com fluidos newtonianos e *power-law*, respectivamente, para obter-se os valores para o termo fonte.

Tabela 4.3: Valores analítico e numérico do termo fonte para os fluidos estudados escoando em poro cilíndrico.

$R_0(\mu m)$	$Re$	Newtoniano	Pseudo-plástico	Dilatante	Analítico
1	1	16.007	16.144	16.010	16
	0.01	1600.701	1600.016	1600.984	1600
	0.0001	160070.069	159998.314	160097.937	160000
10	1	16.007	16.000	16.010	16
	0.01	1600.701	1599.983	1600.979	1600
	0.0001	160070.069	157599.209	160192.513	160000
100	1	16.007	15.999	16.010	16
	0.01	1600.701	1575.992	1601.925	1600
	0.0001	160070.069	42620.011	435341.381	160000

Com os valores da tabela acima foi plotado um gráfico para os casos com raio igual a  $1\mu m$  e  $10\mu m$ , variando com o inverso do número de Reynolds, sendo este  $Re = 0.0001$ , para ficar mais evidente o padrão de comportamento do termo fonte. O gráfico resultante se encontra na Figura 4.1.

Para os casos com raio igual a  $100\mu m$ , foi plotado outro gráfico nos mesmos moldes para se analisar mais a fundo os valores com desvio. Este gráfico se encontra na Figura 4.2.

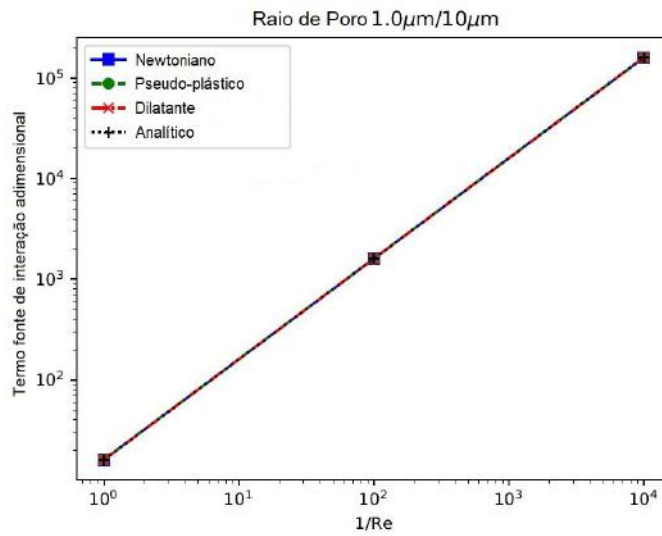


Figura 4.1: Perfil do termo fonte adimensional pelo inverso do número de Reynolds para cilindro equivalente de raios  $1\mu m$  e  $10\mu m$  com  $Re = 0.0001$ .

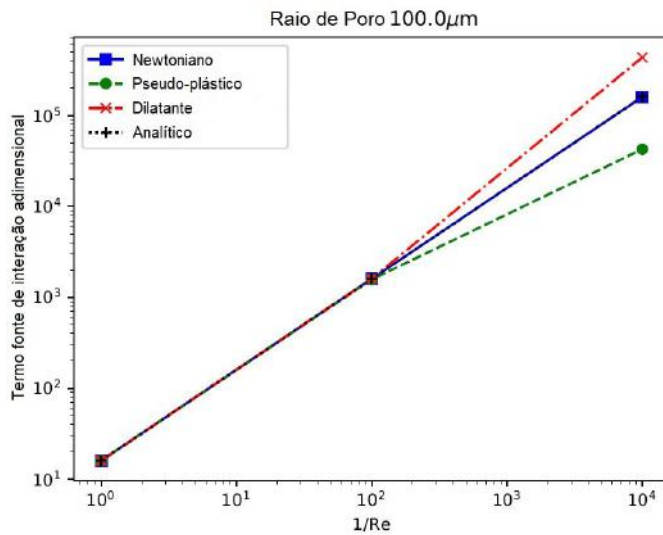


Figura 4.2: Perfil do termo fonte para o poro cilíndrico com raio  $100\mu m$  com  $Re = 0.0001$ .

A proximidade dos valores numéricos e analíticos é comprovado na Figura 4.1, onde se observa que, tanto as linhas numéricas de cada fluido quanto a analítica coincidem.

Além disso, verifica-se que, mesmo com as forças na parede diferentes caso a caso, o termo fonte segue um padrão de comportamento muito similar, com valores praticamente iguais, para os três tipos de fluidos, variando com o Reynolds. Isto pode ser devido ao fato de que para cada caso a velocidade, como é dependente tanto do Reynolds quanto do tipo de fluido, age de modo a padronizar o comportamento do termo fonte.

Observa-se também que este comportamento é independente do diâmetro do poro, o que leva a crer que o mesmo não influencia no valor do termo fonte.

Nota-se também que os valores numéricos seguem o comportamento esperado pelas equações analíticas, mostrando que o valor adimensional do termo fonte é inversamente proporcional ao número de Reynolds do escoamento.

Contudo, analisando a Figura 4.2, nota-se o desvio ilustrado na Tabela 4.3 para os casos com  $R_0 = 100\mu m$  e  $Re = 0.0001$ . Tais desvios possivelmente estão relacionados ao número de Reynolds na solução numérica.

No *set up* da simulação com fluidos não-newtonianos, são definidos limites de variação da viscosidade aparente, de acordo com a faixa de validade do modelo *power-law* aplicado a cada fluido. Caso contrário, a viscosidade pode vir a tender a infinito ou zero, gerando divergência na simulação e levando a valores incorretos.

No caso, as baixas velocidades, na ordem de  $10^{-6}$  e  $10^{-7}$ , para os fluidos pseudo-plástico e dilatante, respectivamente, aliadas aos seus comportamen-

tos reológicos, podem ter gerado taxas de cisalhamento também de ordem muito pequenas, fazendo a viscosidade atingir os limites impostos. Neste caso, a viscosidade teria assumido valores constantes, de modo que o número de Reynolds não seria mais calculado de acordo com a Equação 2.34. Isso poderia explicar o perfil não-linear (em escala log-log) encontrado na Figura 4.2.

Diversas tentativas de correções foram aplicadas, como mudanças no fator de relaxação da solução, aumento do refino da malha, alterações nos limites de viscosidade aparente, entre outros, sendo nenhum deles bem sucedido.

Deste modo, uma pequena investigação foi feita, aumentando o valor do índice de consistência  $k$  em 100 vezes, apenas para os casos com raio  $R_0 = 100\mu m$ , de  $1.305 \times 10^{-3} Pa \cdot s$  para  $1.305 \times 10^{-1} Pa \cdot s$ , o que aumentou a velocidade de  $2.215 \times 10^{-6} m/s$  para  $4.773 \times 10^{-5} m/s$  para o caso com fluido pseudo-plástico e de  $2.169 \times 10^{-7} m/s$  para  $6.860 \times 10^{-5} m/s$  para o caso com fluido dilatante.

Desta forma, foi feita outra simulação com os novos valores. Os resultados são apresentados na Tabela 4.4 e na Figura 4.3 abaixo.

Tabela 4.4: Valores analíticos e numéricos para o termo fonte com índice de consistência 100 vezes maior no caso com poro cilíndrico de raio  $R_0 = 100\mu m$ .

$R_0(\mu m)$	$Re$	Newtoniano	Pseudo-plástico	Dilatante	Analítico
100	1	16.007	16.001	16.013	16
	0.01	1600.701	1600.060	1601.351	1600
	0.001	160070.069	157599.209	160192.513	160000

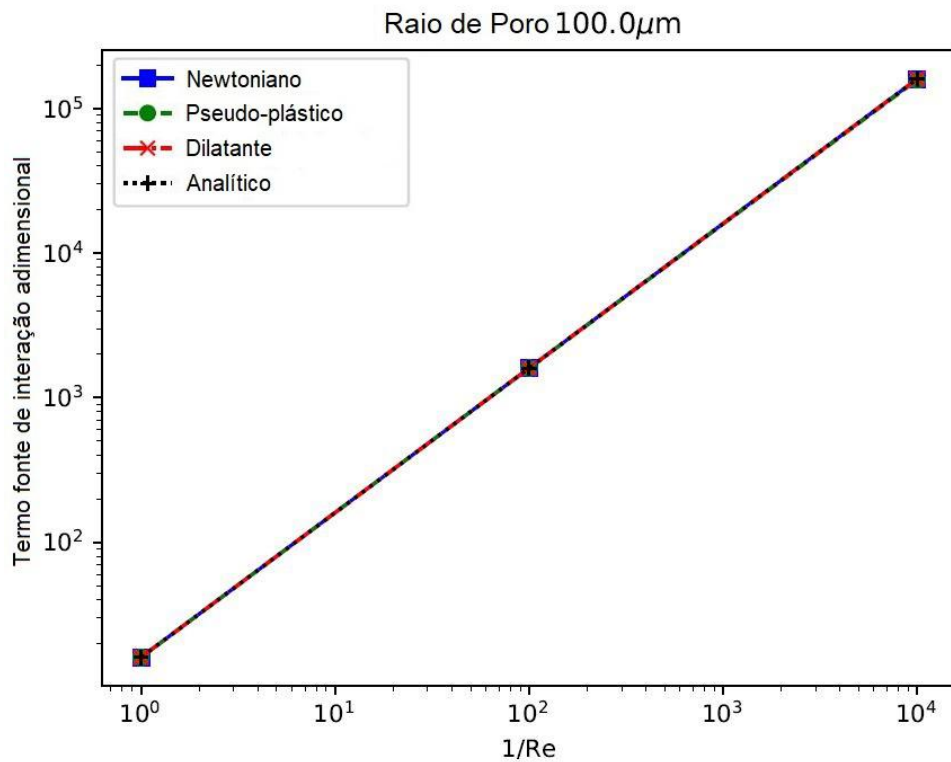


Figura 4.3: Perfil do termo fonte para o cilindro equivalente com raio  $R_0 = 100\mu m$ , com índice de consistência 100 vezes maior para prevenção de instabilidade numérica.

Note que, com a adequação do índice de consistência, atingiu-se o comportamento esperado e seguido pelas simulações feitas nos casos com os outros raios de poro, mostrando que, de fato, as baixas velocidades tem papel importante nesses desvios.

Há de se ressaltar que os dois casos que fogem ao comportamento padrão não influenciam na análise geral. Isso porque, conforme foi constatado anteriormente, como os valores para a força aplicada na parede e, consequentemente, para o termo fonte, independem de  $R_0$ , é possível estimar os valores

corretos baseado no padrão observado em casos com outros valores de  $R_0$  e mesmo valor de  $Re$ .

É de se notar também como as características dos fluidos podem ter influenciado nos deslocamentos: o fluido pseudo-plástico possui desvio negativo e o dilatante desvio positivo, o que corrobora com o comportamento reológico esperado por eles.

## 4.2 Simulações com poros constritivos

Faz-se agora uma análise separada de cada fluido e o padrão de comportamento do termo fonte com base na variação constritiva de poro baseadas no poro cilíndrico que, como definido na Seção 3.2.2, possui quatro variações a partir do poro cilíndrico, e do número de Reynolds do escoamento.

Seguiu-se o mesmo procedimento da Seção 4.1 para o cálculo do termo fonte numérico em cada caso. Desta forma, nas próximas Seções serão encontradas as Tabelas 4.5, 4.6 e 4.7 com os valores do termo fonte para cada fluido, poro e número de Reynolds utilizado nas simulações.

### 4.2.1 Simulações com fluido Newtoniano

Tabela 4.5: Valores numéricos para o termo fonte nas diferentes geometrias constritivas para fluido newtoniano.

Poros cilíndrico com $R_0 = 1\mu m$					
$Re$	$\delta = 0.8$	$\delta = 0.6$	$\delta = 0.4$	$\delta = 0.2$	$\delta = 0$
1	$7.548 \times 10^3$	$4.698 \times 10^2$	90.838	29.569	16.007
0.01	$7.548 \times 10^5$	$4.698 \times 10^4$	$9.076 \times 10^3$	$2.956 \times 10^3$	1600.701
0.0001	$7.548 \times 10^7$	$4.698 \times 10^6$	$9.076 \times 10^5$	$2.956 \times 10^5$	160070.069
Poros cilíndrico com $R_0 = 10\mu m$					
1	$7.548 \times 10^3$	$4.698 \times 10^2$	90.838	29.569	16.007
0.01	$7.548 \times 10^5$	$4.698 \times 10^4$	$9.076 \times 10^3$	$2.956 \times 10^3$	1600.701
0.0001	$7.548 \times 10^7$	$4.698 \times 10^6$	$9.076 \times 10^5$	$2.956 \times 10^5$	160070.069
Poros cilíndrico com $R_0 = 100\mu m$					
1	$7.548 \times 10^3$	$4.698 \times 10^2$	90.838	29.569	16.007
0.01	$7.548 \times 10^5$	$4.698 \times 10^4$	$9.076 \times 10^3$	$2.956 \times 10^3$	1600.701
0.0001	$7.548 \times 10^7$	$4.698 \times 10^6$	$9.076 \times 10^5$	$2.956 \times 10^5$	160070.069

Com os valores da Tabela 4.5 foi plotado um gráfico do termo fonte pelo inverso do número de Reynolds, a exemplo da Figura 4.1, que permite fazer uma análise dos resultados de forma mais clara.



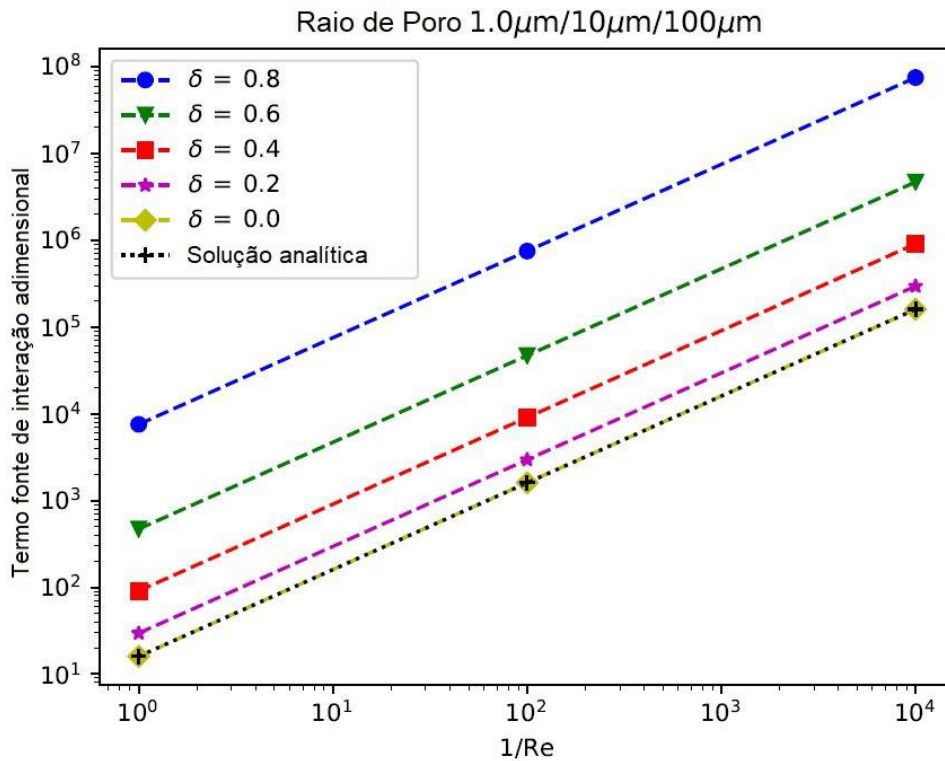


Figura 4.4: Perfil do termo de interação pelo inverso do número de Reynolds para as cinco variações geométricas constritivas de poro, considerando fluido newtoniano e para os três valores de  $R_0$ .

Desta forma, analisando a Tabela 4.5 e o gráfico na Figura 4.4 acima nota-se que, em termos de variação da constrição, o termo fonte tende a aumentar sua contribuição quanto mais estreito for o canal construtivo. Este é um comportamento esperado, visto que o termo é proporcional à força na parede e, quanto mais significativa for a deformação da geometria, maior será a velocidade do fluido no canal, devido ao gradiente de pressão imposto, o que leva a uma maior força sendo aplicada pelo fluido na parede do canal construtivo.

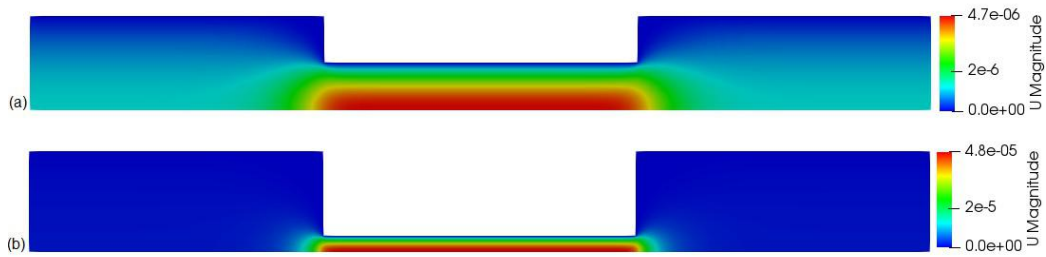


Figura 4.5: Resultados para a velocidade nos casos de fluido newtoniano com  $R_0 = 100\mu m$  e  $Re = 0.0001$ . (a)  $\delta = 0.4$  (b)  $\delta = 0.8$ .

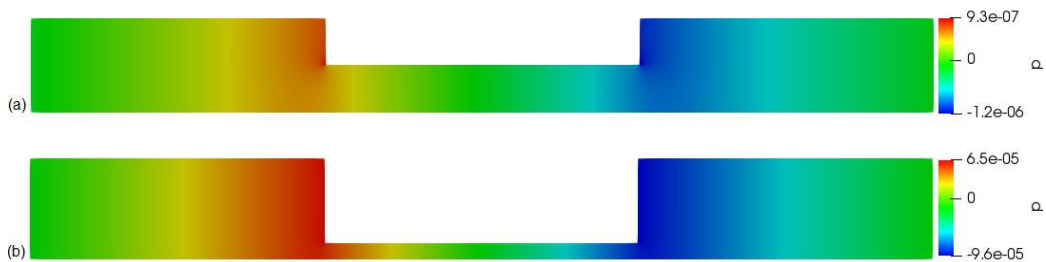


Figura 4.6: Resultados para a pressão ao longo do poro para os casos de fluido newtoniano com  $R_0 = 100\mu m$  e  $Re = 0.0001$ . (a)  $\delta = 0.4$  (b)  $\delta = 0.8$ .

Note na Figura 4.5 que, apesar de a velocidade de entrada para ambos os casos serem iguais, como determinado pela Tabela 3.5, a magnitude da velocidade de escoamento do fluido no canal constritivo atinge um valor máximo maior no canal com  $\delta = 0.8$  que no canal com  $\delta = 0.4$ . Isto se deve à maior constrição, que diminui a área da seção transversal. Como reflexo, o gradiente de pressão provocado na geometria com  $\delta = 0.8$ , mostrado na Figura 4.6, também é maior.

Tal análise poder ser feita também ao se analisar os resultados na mesma

escala, como mostra as Figuras 4.7 e 4.8 abaixo.

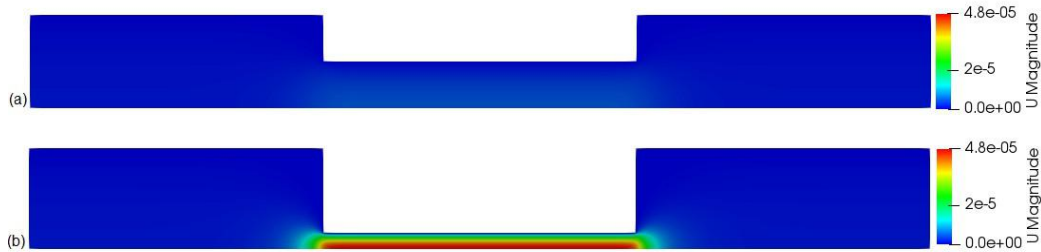


Figura 4.7: Resultados para a velocidade nos casos de fluido newtoniano com  $R_0 = 100\mu m$  e  $Re = 0.0001$  na mesma escala de velocidade (a)  $\delta = 0.4$  (b)  $\delta = 0.8$ .

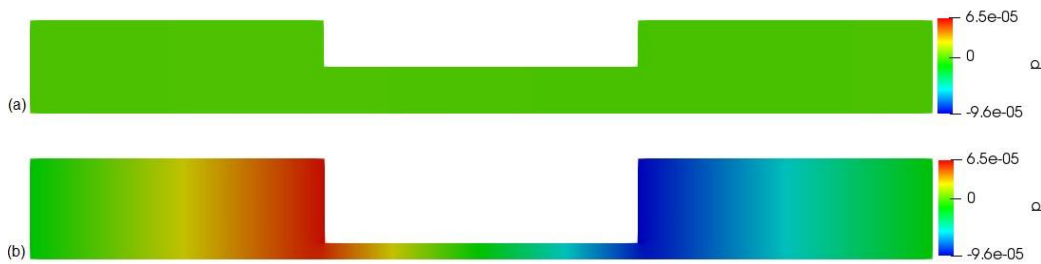


Figura 4.8: Resultados para a pressão ao longo do poro para os casos de fluido newtoniano com  $R_0 = 100\mu m$  e  $Re = 0.0001$  na mesma escala de pressão (a)  $\delta = 0.4$  (b)  $\delta = 0.8$ .

Note que na mesma escala, para o caso com  $\delta = 0.4$ , não há variação visível nem de velocidade, nem de pressão. Isso ocorre pois os gradientes do caso construtivo com  $\delta = 0.8$ , usados como base de comparação entre os casos, são maiores que no caso construtivo com  $\delta = 0.4$ .

Além disso, é possível também notar que, quanto menor o número de

Reynolds maior a contribuição do termo fonte, seguindo a lógica das equações analíticas, que determinam que o termo fonte é inversamente proporcional ao número de Reynolds, e o comportamento observado na Seção 4.1, ao se validar as simulações com base nos cálculos analíticos.

Nota-se também pela Tabela 4.5 e pela Figura 4.4 que a força aplicada pelo fluido na parede e, por consequência, o termo fonte, independem da ordem de grandeza do raio de poro cilíndrico  $R_0$ . Isso vale tanto no que diz respeito ao padrão de comportamento do termo fonte, tendo o gráfico o mesmo perfil para os três valores de  $R_0$ , quanto aos valores em si, sendo todos eles similares.

Este comportamento é o mesmo encontrado nos casos estudados em poros cilíndricos, na Seção 4.1 anterior, o que mostra que é um padrão válido também para poros com deformações geométricas.

## 4.2.2 Simulações com fluido Pseudo-plástico

Tabela 4.6: Valores numéricos para o termo fonte nas diferentes geometrias constritivas para fluido pseudo-plástico.

Poro cilíndrico com $R_0 = 1\mu m$					
$Re$	$\delta = 0.8$	$\delta = 0.6$	$\delta = 0.4$	$\delta = 0.2$	$\delta = 0$
1	$6.822 \times 10^2$	$1.081 \times 10^2$	41.491	22.297	16.144
0.01	$5.549 \times 10^4$	$1.062 \times 10^4$	$4.141 \times 10^3$	$2.229 \times 10^3$	$1.600 \times 10^3$
0.0001	$5.549 \times 10^6$	$1.062 \times 10^6$	$4.141 \times 10^5$	$2.229 \times 10^5$	$1.600 \times 10^5$
Poro cilíndrico com $R_0 = 10\mu m$					
1	$6.822 \times 10^2$	$1.081 \times 10^2$	41.491	22.297	16.000
0.01	$5.549 \times 10^4$	$1.062 \times 10^4$	$4.141 \times 10^3$	$2.229 \times 10^3$	$1.600 \times 10^3$
0.0001	$5.547 \times 10^6$	$1.061 \times 10^6$	$4.127 \times 10^5$	$2.214 \times 10^5$	$1.576 \times 10^5$
Poro cilíndrico com $R_0 = 100\mu m$					
1	$6.822 \times 10^2$	$1.081 \times 10^2$	41.491	22.297	16.000
0.01	$5.547 \times 10^4$	$1.061 \times 10^4$	$4.127 \times 10^3$	$2.214 \times 10^3$	$1.576 \times 10^3$
0.0001	$5.468 \times 10^6$	$1.028 \times 10^6$	$3.980 \times 10^5$	$1.970 \times 10^5$	$1.269 \times 10^5$

Seguindo os valores apresentados na Tabela 4.6, foram plotados dois gráficos, seguindo os mesmos moldes da Figura 4.4, ou seja, plotando o termo fonte pelo inverso do número de Reynolds: um referente a  $R_0 = 1\mu m$  e  $R_0 = 10\mu m$ , pois terão comportamentos semelhantes, e outro para  $R_0 = 100\mu m$ .

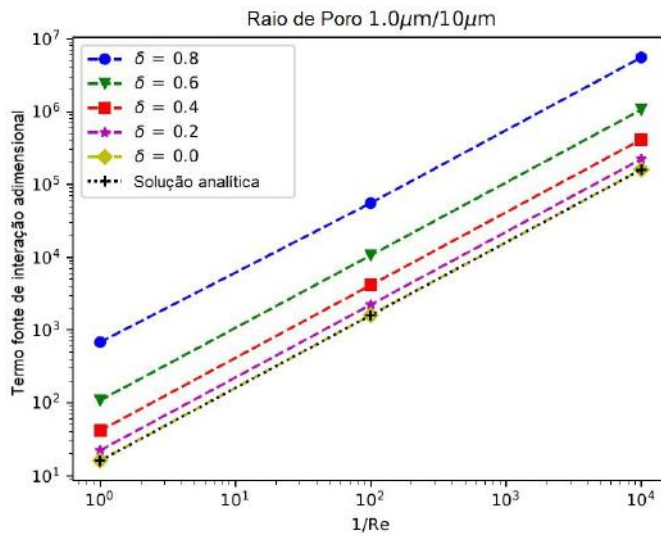


Figura 4.9: Perfil do termo de interação pelo inverso do número de Reynolds para as cinco variações geométricas de poro. Casos com  $R_0 = 1\mu m$ ,  $10\mu m$  e fluido pseudo-plástico.

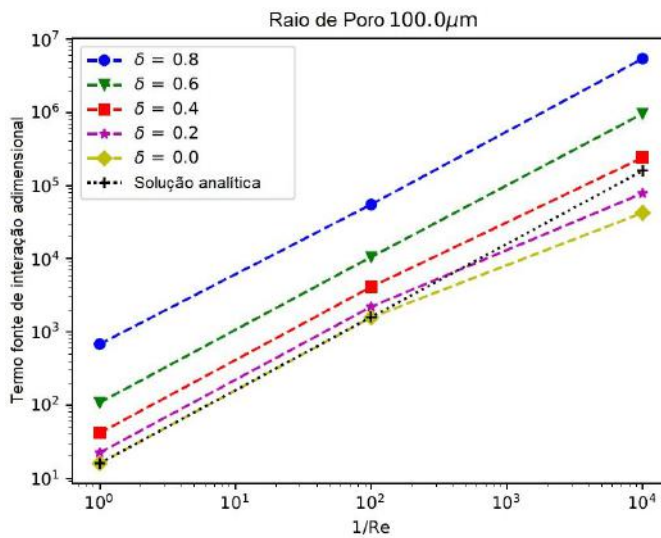


Figura 4.10: Perfil do termo de interação pelo inverso do número de Reynolds para as cinco variações geométricas de poro. Casos com  $R_0 = 100\mu m$  e fluido pseudo-plástico.

Os gráficos acima mais uma vez confirmam o comportamento esperado para o termo fonte adimensional com relação ao número de Reynolds de que, os dois devem ser inversamente proporcionais entre si, portanto quanto menor o número de Reynolds maior deve ser o valor do termo fonte, seguindo a lógica das equações analíticas, comportamento observado também para as simulações com fluidos newtonianos.

Além disso, esperava-se que, em termos de variação da constrição, a contribuição do termo fonte aumentasse quanto menor fosse o diâmetro do canal construtivo, assim como ocorreu com as simulações com fluidos newtonianos, e de fato, ao fazer a análise da Tabela 4.6 e das Figuras 4.9 e 4.10, é este o comportamento encontrado.

As Figuras 4.11 e 4.12 abaixo deixam evidente o fato de que a velocidade e o gradiente de pressão no canal construtivo mais estreito são maiores que no canal menos estreito, resultando em valores mais elevados para o termo fonte nestes casos.

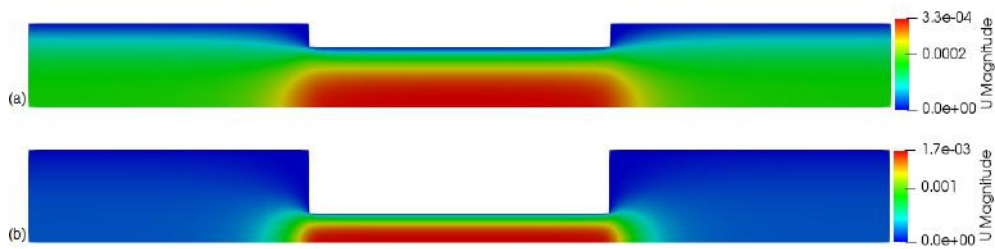


Figura 4.11: Resultados de velocidade nos casos com fluido pseudo-plástico,  $R_0 = 10\mu m$  e  $Re = 0.01$ . (a)  $\delta = 0.2$  (b)  $\delta = 0.6$ .



Figura 4.12: Resultados para a pressão ao longo do poro nos casos com fluido pseudo-plástico,  $R_0 = 10\mu m$  e  $Re = 0.01$ . (a)  $\delta = 0.2$  (b)  $\delta = 0.6$ .

Novamente esta análise também pode ser feita analisando os resultados na mesma escala, como mostra as Figuras 4.13 e 4.14.

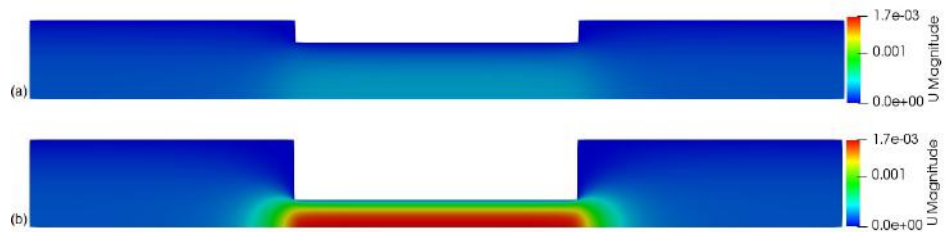


Figura 4.13: Resultados de velocidade nos casos com fluido pseudo-plástico,  $R_0 = 10\mu m$  e  $Re = 0.01$  na mesma escala de velocidade. (a)  $\delta = 0.2$  (b)  $\delta = 0.6$ .

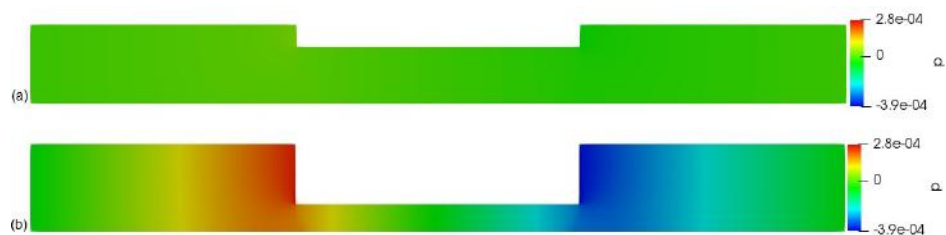


Figura 4.14: Resultados para a pressão ao longo do poro nos casos com fluido pseudo-plástico, sendo  $R_0 = 10\mu m$  e  $Re = 0.01$  na mesma escala de pressão. (a)  $\delta = 0.2$  (b)  $\delta = 0.6$ .



Note como que, na mesma escala, o caso com  $\delta = 0.2$  não possui variação visível ao se utilizar a escala do caso com  $\delta = 0.6$  como base. Novamente, porque o segundo possui escala de variação maior que o primeiro, tanto para velocidade quanto para pressão.

Nota-se pelos valores da Tabela 4.6 que, mais uma vez, a ordem de grandeza do diâmetro de poro não possui influência nos valores do termo fonte calculados, assim como nas simulações para fluido newtoniano.

Singelas variações podem ser observadas para os casos com  $R_0 = 100\mu m$ , nos casos com  $Re = 0.0001$ , especialmente nos poros cilíndricos e no poro com  $\delta = 0.2$ . Este comportamento foi também observado na comparação com os casos analíticos na Seção 4.1 e, conforme foi constatado, tais valores não possuem influência na análise, pois é possível estimar os valores corretos baseados nos comportamentos dos outros casos.

### 4.2.3 Simulações com fluido Dilatante

Tabela 4.7: Valores numéricos para o termo fonte nas diferentes geometrias constritivas para fluido dilatante.

Poros cilíndrico com $R_0 = 1\mu m$					
$Re$	$\delta = 0.8$	$\delta = 0.6$	$\delta = 0.4$	$\delta = 0.2$	$\delta = 0$
1	$2.155 \times 10^4$	$8.693 \times 10^2$	$1.275 \times 10^2$	33.543	16.010
0.01	$2.153 \times 10^6$	$8.685 \times 10^4$	$1.274 \times 10^4$	$3.354 \times 10^3$	$1.601 \times 10^3$
0.0001	$2.153 \times 10^8$	$8.685 \times 10^6$	$1.274 \times 10^6$	$3.354 \times 10^5$	$1.601 \times 10^5$
Poros cilíndrico com $R_0 = 10\mu m$					
1	$2.155 \times 10^4$	$8.693 \times 10^2$	$1.275 \times 10^2$	33.543	16.010
0.01	$2.153 \times 10^6$	$8.685 \times 10^4$	$1.274 \times 10^4$	$3.354 \times 10^3$	$1.601 \times 10^3$
0.0001	$2.153 \times 10^8$	$8.685 \times 10^6$	$1.274 \times 10^6$	$3.354 \times 10^5$	$1.601 \times 10^5$
Poros cilíndrico com $R_0 = 100\mu m$					
1	$2.155 \times 10^4$	$8.693 \times 10^2$	$1.275 \times 10^2$	33.543	16.010
0.01	$2.153 \times 10^6$	$8.685 \times 10^4$	$1.274 \times 10^4$	$3.354 \times 10^3$	$1.602 \times 10^3$
0.0001	$2.177 \times 10^8$	$1.274 \times 10^7$	$2.468 \times 10^6$	$8.040 \times 10^5$	$4.353 \times 10^5$

Seguindo os mesmos passos dos fluidos já analisados foram plotados dois gráficos, a partir dos valores da Tabela 4.7, do termo fonte pelo valor inverso do número de Reynolds: um referente a  $R_0 = 1\mu m$  e  $R_0 = 10\mu m$ , pois terão comportamentos semelhantes, e outro para o caso com  $R_0 = 100\mu m$ , que

possui discrepâncias em alguns valores.

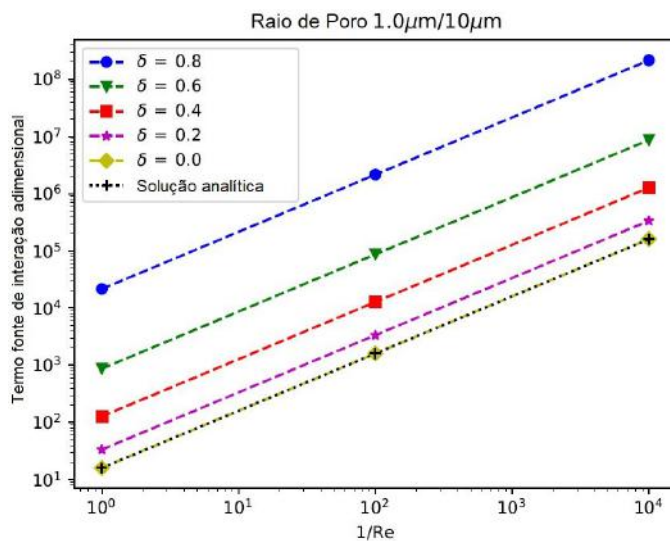


Figura 4.15: Perfil do termo de interação pelo inverso do número de Reynolds para as cinco variações geométricas de poro. Casos com  $R_0 = 1\mu m$ ,  $10\mu m$  e fluido dilatante.

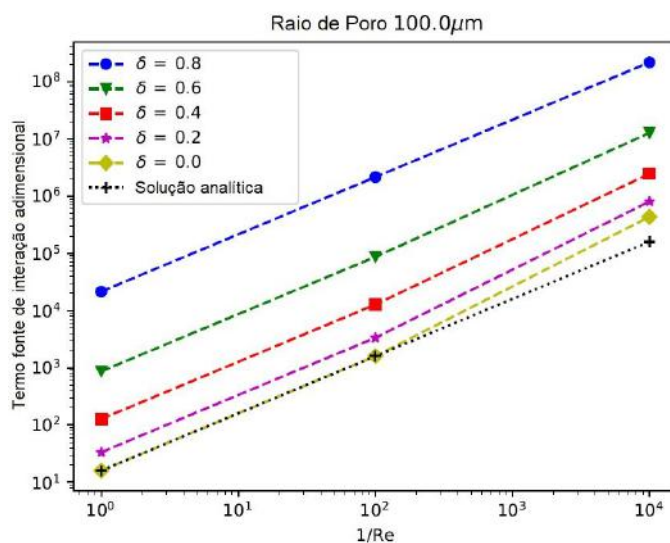


Figura 4.16: Perfil do termo de interação pelo inverso do número de Reynolds para as cinco variações geométricas de poro. Casos com  $R_0 = 100\mu\text{m}$  e fluido dilatante.

Como era de se esperar, os gráficos confirmam o comportamento inversamente proporcional do termo fonte adimensional com relação ao número de Reynolds, assim como foi confirmado nas simulações com fluidos newtoniano e pseudo-plástico.

Também é novamente notável que a ordem de grandeza do diâmetro do poro não possui influência nos valores do termo fonte calculados, mostrando ser uma característica comum a todos os casos. A exceção fica, principalmente, com os casos com  $\delta = 0$  e  $\delta = 0.2$ , assim como ocorreu com o fluido pseudo-plástico, que possuem desvios em relação ao comportamento padrão esperado. É possível notar também pela Tabela 4.7 e pela Figura 4.16 que, embora mais sutil, o desvio do comportamento padrão começa a se acentuar a partir do poro com  $\delta = 0.6$ .

A justificativa para que já seja possível observar o desvio a partir de um poro com uma constrição mais acentuada se dá ao fato de que o fluido dilatante foi o que originou menores velocidades de entrada, como se observa na Tabela 3.5 da Seção 3.3, o aumento da sensibilidade da instabilidade numérica.

Nota-se, no entanto, que quanto mais acentuada a constrição menor o desvio, pois maior é a velocidade nessa região, gerando menos instabilidades numéricas, conforme discutido na Seção 4.1.

Além disso, assim como nos casos com os outros dois fluidos, a contribuição do termo fonte também aumenta conforme o diâmetro do canal constritivo se torna mais estreito. Este efeito também era esperado para as simulações com fluido dilatante, pois a constrição, da mesma forma que nos outros casos, gera maiores velocidades nesta região, resultando em maiores gradientes de pressão.

As Figuras 4.17 e 4.18, ilustram a análise acima, mostrando que para o caso mais construtivo as velocidades no canal são maiores comparadas ao caso menos construtivo e, conseqüentemente, maior é o gradiente de pressão.

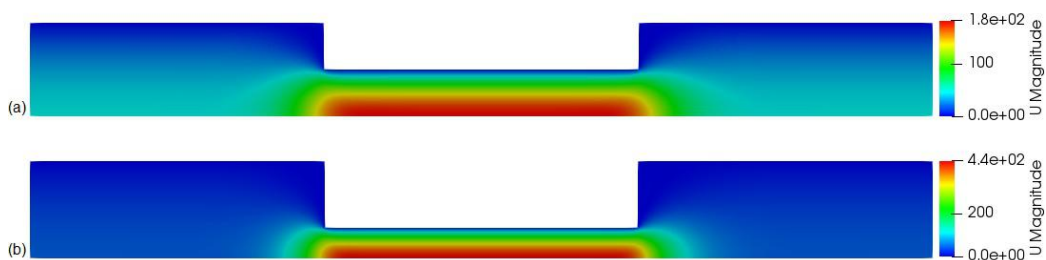


Figura 4.17: Resultados para a velocidade nos casos com fluido dilatante,  $R_0 = 1\mu m$  e  $Re = 1$ . (a)  $\delta = 0.4$  (b)  $\delta = 0.6$ .

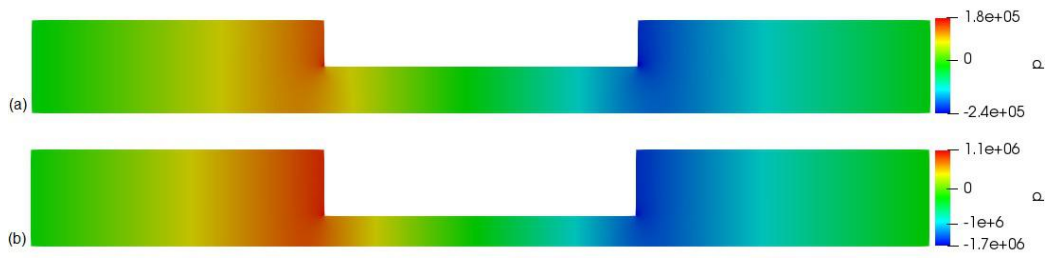


Figura 4.18: Resultados para a pressão ao longo do poro nos casos com fluido dilatante,  $R_0 = 1\mu m$  e  $Re = 1$ . (a)  $\delta = 0.4$  (b)  $\delta = 0.6$ .

A análise seguinte, feita na mesma escala entre os casos, ilustra de modo mais claro visivelmente as observações anteriores.

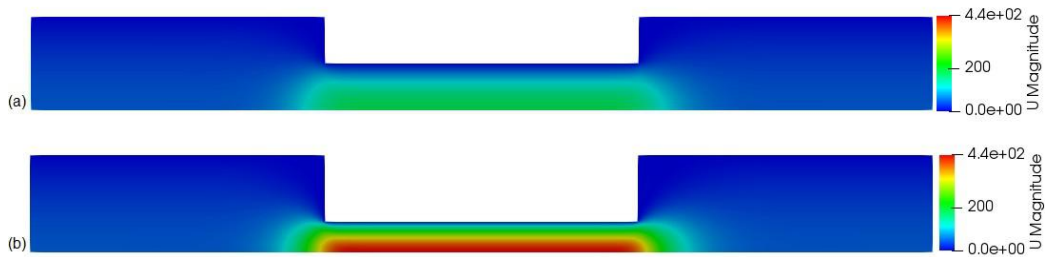


Figura 4.19: Resultados para a velocidade nos casos com fluido dilatante,  $R_0 = 1\mu m$  e  $Re = 1$  na mesma escala de velocidade. (a)  $\delta = 0.4$  (b)  $\delta = 0.6$ .

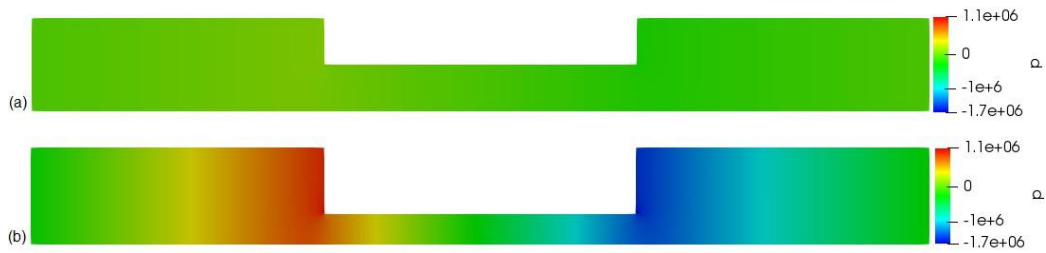


Figura 4.20: Resultados para a pressão ao longo do poro nos casos com fluido dilatante,  $R_0 = 1\mu m$  e  $Re = 1$  na mesma escala de pressão. (a)  $\delta = 0.4$  (b)  $\delta = 0.6$ .

Note como que, utilizando a escala do caso com  $\delta = 0.6$  como base, o caso com  $\delta = 0.4$  possui pouca variação visível de velocidade. Já em relação à pressão, não há variação visível aparente, corroborando o fato de que os gradientes de velocidade e de pressão do caso mais construtivo são maiores.

### 4.3 Comparação entre os resultados

Nesta Seção são feitas comparações entre os resultados obtidos para observar a influência do número de Reynolds no escoamento de modo mais geral. Para tal, a exemplo do que foi feito na Seção 4.1, foram plotados gráficos que mostram a variação do termo fonte com o número de Reynolds em escoamentos com os três diferentes tipos de fluidos estudados, abordando as quatro variações construtivas de poro.

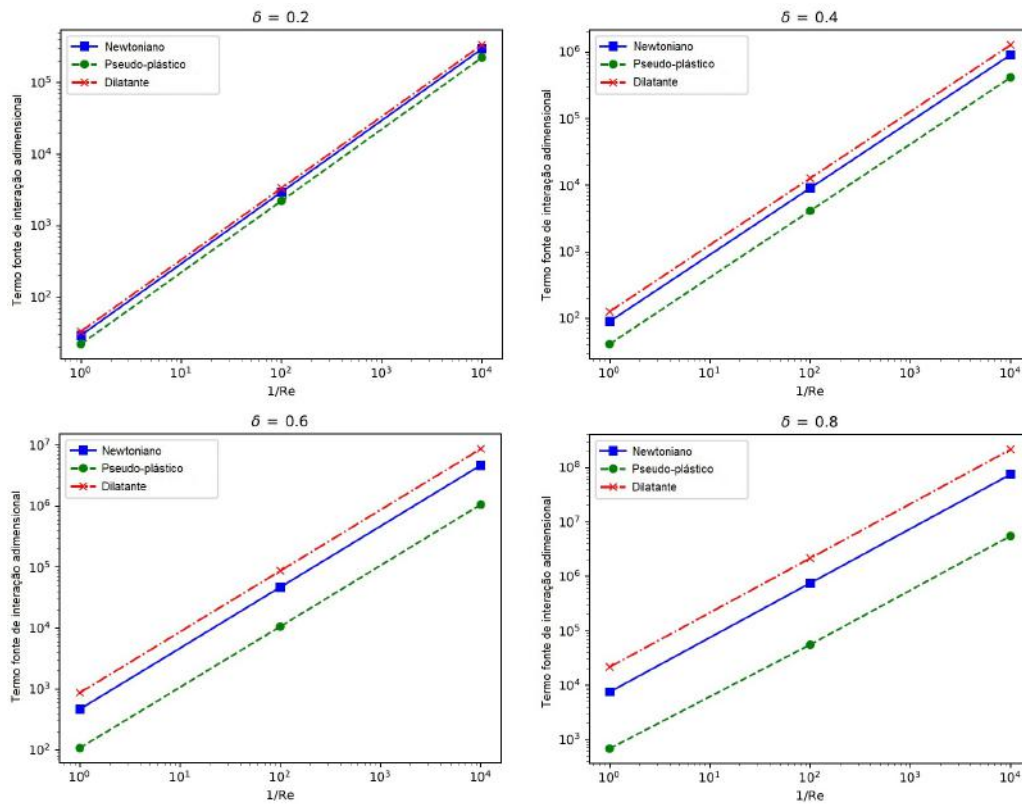


Figura 4.21: Variação do termo fonte no escoamento com  $R_0 = 1\mu m$  e  $Re = 10$  para três fluidos estudados (newtoniano, dilatante e pseudo-plástico) em cada geometria implementada. (a)  $\delta = 0.2$  (b)  $\delta = 0.4$  (c)  $\delta = 0.6$  (d)  $\delta = 0.8$ .

Os resultados apresentados na Figura 4.21, que resume todas as simulações do presente trabalho, mostram que o termo fonte adimensionalizado varia de forma linear com o número de Reynolds, em escala log-log; que o coeficiente angular é o mesmo em todos os casos e que o coeficiente linear varia com a reologia do fluido e o grau de constrição do poro. Isso é consistente com as Equações 2.31 e 2.33, onde percebe-se que, se linearizadas pela aplicação do logaritmo em ambos os lados, resultam em uma relação linear com mesmo coeficiente angular.



Pode-se notar ainda na Figura 4.21, que quanto maior o grau de constrição, maior é o distanciamento entre as retas para fluido pseudo-plástico e dilatante e as retas para fluido newtoniano. E ainda que, para uma mesma constrição, o termo fonte do fluido dilatante aumenta menos que o termo fonte do pseudo-plástico diminui. Isso se deve ao fato de a tensão cisalhante aumentar conforme a constrição aumenta, mas a viscosidade do fluido dilatante aumenta, enquanto a do pseudo-plástico diminui.

A força aplicada pelo fluido na parede, como citado na Seção 4.1, é dividida em duas contribuições: forças de pressão, quando a direção de aplicação é normal à parede e forças viscosas, quando a força possui direção paralela. Dependendo do formato de geometria do poro, uma força terá maior contribuição que a outra.

Sendo assim, é de se esperar que em poros cilíndricos, a contribuição da força de pressão seja praticamente nula, pois o fluido possui direção de escoamento tangencial à parede, fazendo com que as forças cisalhantes sejam predominantes, e não há deformidades que resultem na alteração da direção do fluxo do fluido para que haja contribuição da força de pressão.

No entanto, em poros constritivos, há deformações suficientes para alterar a direção do fluxo de escoamento, resultando no aumento da contribuição da força de pressão.

O OpenFOAM® calcula não apenas a força total aplicada na parede, mas também suas componentes viscosa e de pressão. Deste modo, é possível pegar como exemplo um caso com fluido dilatante,  $Re = 1$  e  $R_0 = 1\mu m$  e se estudar os valores das componentes, para cada geometria de poro envolvida. Estes valores estão listados na Tabela 4.8, e é possível notar que no poro cilíndrico não há contribuição da força de pressão, enquanto a partir do primeiro poro

com deformação, ou seja, o poro construtivo com  $\delta = 0.2$  já é possível notar a contribuição da força de pressão.

Tabela 4.8: Valores de força para o caso de fluido dilatante com  $Re = 1$  e  $R_0 = 1\mu m$ .

$\delta$	Força Viscosa	Força de Pressão	Força total
0	$2.617 \times 10^{-4}$	0	$2.617 \times 10^{-4}$
0.2	$3.845 \times 10^{-4}$	$1.638 \times 10^{-4}$	$5.483 \times 10^{-4}$
0.4	$7.490 \times 10^{-4}$	$1.335 \times 10^{-3}$	$2.084 \times 10^{-3}$
0.6	$2.120 \times 10^{-3}$	$1.209 \times 10^{-2}$	$1.421 \times 10^{-2}$
0.8	$1.346 \times 10^{-2}$	$3.388 \times 10^{-1}$	$3.523 \times 10^{-1}$

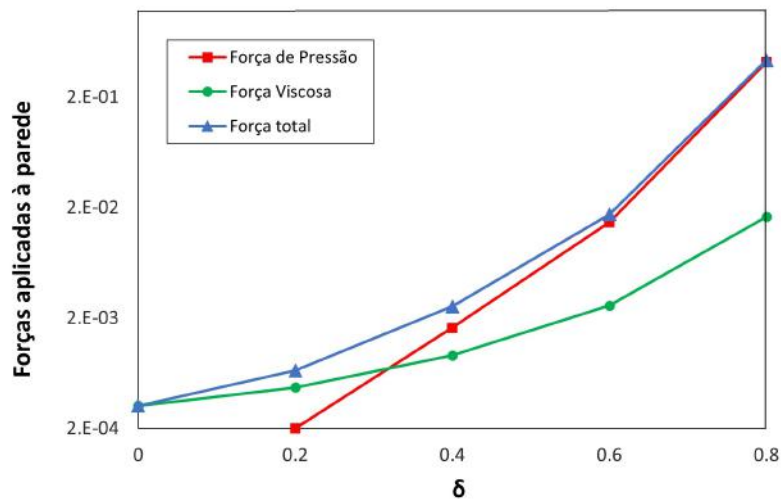


Figura 4.22: Perfil de forças para um caso com fluido dilatante,  $Re = 1$  e  $R_0 = 1\mu m$ .

As Figuras 4.23 e 4.24 ilustram os casos do poro cilíndrico e construtivo com  $\delta = 0.4$ , mostrando o vetor de velocidade em ambos casos e como a

constricção provoca mudanças na direção no caso constritivo, com destaque para os vetores normais à parede da constricção.

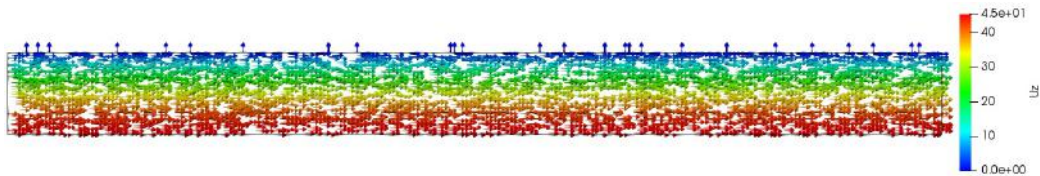


Figura 4.23: Vetores de velocidade no escoamento em poro cilíndrico para fluido dilatante.

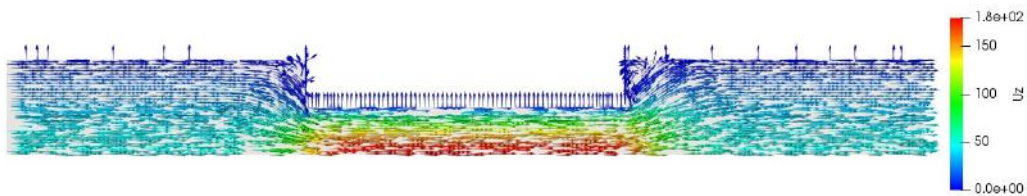


Figura 4.24: Vetores de velocidade no escoamento em poro constritivo com  $\delta = 0.4$  para fluido dilatante.

Note que as contribuições de pressão aumentam conforme o diâmetro de constricção diminui, isso porque o gradiente de pressão aumenta junto, provocando, a cada estreitamento, maior instabilidade do escoamento nesta região.

No entanto, para o fluido dilatante, mesmo que a força viscosa possua menor contribuição na força total, ela aumenta seu valor conforme há o estreitamento do canal.

Já para fluidos pseudo-plásticos é esperado mesmo comportamento no que diz respeito à força de pressão, porém diferente em termos de força viscosa,

devido a característica reológica do fluido.

Fazendo então a mesma análise para fluido pseudo-plástico, utilizando um caso com as mesmas configurações, obtém-se os valores referentes às forças, que se encontram na Tabela 4.9.

Tabela 4.9: Valores de força para o caso de fluido pseudo-plástico com  $Re = 1$  e  $R_0 = 1\mu m$ .

$\delta$	Força Viscosa	Força de Pressão	Força total
0	$1.278 \times 10^{-11}$	0	$1.278 \times 10^{-11}$
0.2	$1.341 \times 10^{-11}$	$4.238 \times 10^{-12}$	$1.766 \times 10^{-11}$
0.4	$1.467 \times 10^{-11}$	$1.817 \times 10^{-11}$	$3.284 \times 10^{-11}$
0.6	$1.657 \times 10^{-11}$	$6.899 \times 10^{-11}$	$8.556 \times 10^{-11}$
0.8	$1.497 \times 10^{-11}$	$5.250 \times 10^{-10}$	$5.400 \times 10^{-10}$

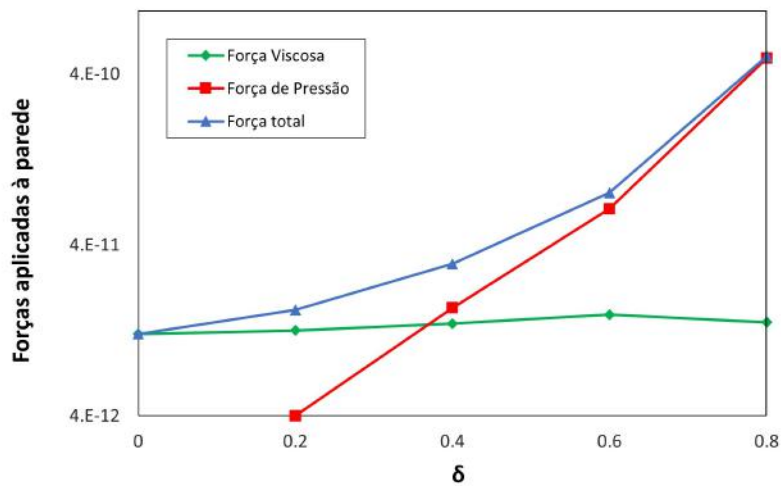


Figura 4.25: Perfil de forças para um caso com fluido pseudo-plástico,  $Re = 1$  e  $R_0 = 1\mu m$ .

Como esperado, observa-se novamente um aumento nas contribuições de pressão conforme o diâmetro de restrição diminui. Mais uma vez, o aumento do gradiente de pressão devido a maior instabilidade do escoamento nas regiões restritivas contribuem para esse efeito.

No entanto, é possível notar algumas diferenças para a evolução da força viscosa no caso de fluidos pseudo-plásticos em comparação com os fluidos dilatantes. O crescente aumento de valor da força viscosa com o aumento da restrição não segue o mesmo padrão, diminuindo seu valor de  $\delta = 0,6$  para  $\delta = 0,8$ .

A característica reológica do fluido pseudo-plástico pode explicar esse comportamento, visto que a viscosidade do fluido diminui com o aumento da força cisalhante. Desta forma, é possível que a diminuição da viscosidade estivesse menos acentuada nas outras restrições em relação à taxa de deformação do fluido e no poro com  $\delta = 0,8$  ela tenha sido mais relevante, diminuindo a força viscosa.

As Figuras 4.26 e 4.27 mostram a viscosidade aparente nos poros cilíndricos e restritivos com  $\delta = 0,6$  para cada tipo de fluido. Note que nas regiões de maior força viscosa, que são as regiões próximas a parede do poro, tirando as zonas de baixa pressão na Figura 4.27, acima da entrada e saída das restrições, a viscosidade aparente do fluido pseudo-plástico atinge valores mínimos e a do fluido dilatante atinge valores máximos.

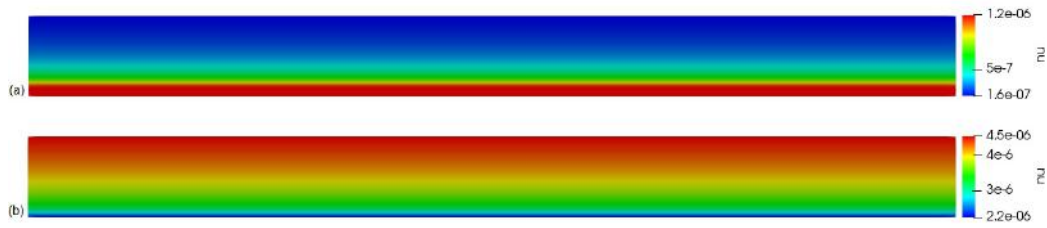


Figura 4.26: Resultados para a viscosidade cinemática aparente no caso com  $Re = 0.01$ ,  $R_0 = 10\mu m$  e  $\delta = 0$ . (a) Fluido pseudo-plástico. (b) Fluido dilatante.

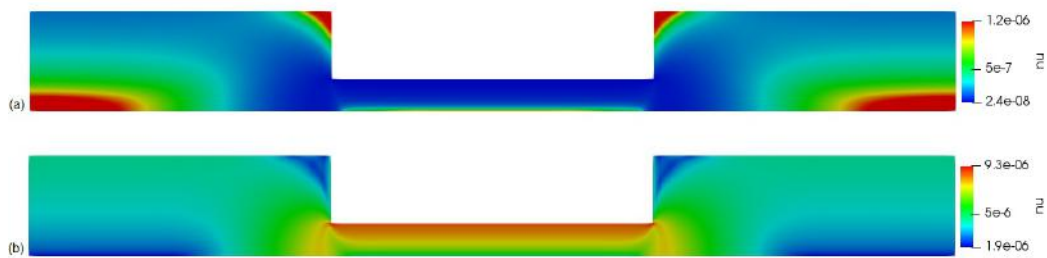


Figura 4.27: Resultados para a viscosidade cinemática aparente no caso com  $Re = 0.01$ ,  $R_0 = 10\mu m$  e  $\delta = 0.6$ . (a) Fluido pseudo-plástico. (b) Fluido dilatante.

Desta forma, leva-se a crer que a justificativa para o distanciamento dos perfis de termo fonte para cada fluido apresentados na Figura 4.21 está atrelada à uma maior influência da força aplicada na parede. Conforme a constrição aumenta, a tensão cisalhante também aumenta, porém a viscosidade do fluido dilatante e do pseudo-plástico se comportam de modos distintos, aumentando no primeiro caso e diminuindo no segundo, conforme explanado na Seção 2.4.

Com isso, quanto maior o valor da força, maior é o destaque do comportamento reológico do fluido. E quanto menor, menos influência no comportamento reológico ela possui e, maior é a aproximação do perfil de escoamento com fluido newtoniano, assim como foi mostrado nas Figuras 4.1 e 4.3 da Seção 4.1.

## Capítulo 5

# Conclusão e Sugestões para Trabalhos Futuros

Foi realizado no presente trabalho análises por meio de simulações numéricas acerca do escoamento ácido em poros constritivos. O objetivo foi de encontrar um padrão de comportamento do termo fonte de interação do fluido com o meio poroso em função do número de Reynolds do escoamento.

Os resultados obtidos com as simulações numéricas, de modo geral, mostraram uma aproximação satisfatória com os valores analíticos e os comportamentos esperados pela literatura. Dessa forma, pode-se dizer que as simulações conseguiram captar a física do escoamento ácido em poros constritivos com boa precisão. Uma exceção à essa regra foram as situações em que foram utilizadas velocidades muito baixas, que geraram instabilidades numéricas, levando à resultados discrepantes.

Uma observação pertinente pode ser feita a cerca dos perfis lineares encontrados nas análises realizadas para as variações do termo fonte com o



número de Reynolds. Tais perfis foram comuns em todos os cenários estudados. Isso possibilita estimar valores para tais termos de forma direta para diferentes números de Reynolds nas faixas estudadas.

Como continuação deste trabalho, a sugestão é ir mais a fundo na análise com modelos diferentes e mais complexos de fluidos já conhecidos, ou até mesmo com o desenvolvimento de outros modelos experimentais, que consigam captar com mais acurácia o comportamento ácido nas técnicas de acidificação, especialmente o comportamento viscoelástico.

Outra sugestão como continuação em trabalhos futuros seria o aumento da complexidade da geometria representativa de poro e estudar a influência do número de Reynolds nesta nova geometria. Uma representação mais fidedigna de uma matriz porosa é extremamente difícil e exigiria um custo computacional fora dos padrões. No entanto, aumentando cada vez mais a complexidade das geometrias do poro, há de se haver uma maior aproximação de um caso real e uma maior confiabilidade nos resultados das simulações.

Além disso, seria interessante também abordar outros intervalos para valores do número de Reynolds, e ver se, a partir de algum deles, há uma mudança no comportamento observado neste trabalho em relação ao termo fonte. Desta forma seria possível obter-se um intervalo de controle para aplicação do fluido a depender do objetivo desta aplicação.

# Bibliografia

- [1] Vaclav Smil. *Energy transitions: global and national perspectives*. ABC-CLIO, 2016.
- [2] Paulo Dore Fernandes. *Modelagem semi-analítica pseudo tridimensional de propagação e fechamento de fraturas induzidas em rochas*. Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, DEP/UNICAMP/-FEM, SP, Brasil, 1998.
- [3] Mohan K. R. Panga; Murtaza Ziauddin; Vemuri Balakotaiah. Two-scale continuum model for simulation of wormholes in carbonate acidization. *AIChE Journal*, 51(12):3231–3248, 2005.
- [4] Vítor Figueirôa Ventura. *Análise do Termo de Interação Entre o Fluido e o Meio Poroso Obtido em Teoria de Mistura Utilizando uma Idealização Não Viscométrica do Meio Poroso*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, PEM/COPPE, RJ, Brasil, 2018.
- [5] Enru Liu; Michael A. Payne; Shiyu Xu; Gregor Baechle; Christopher E. Harris. Carbonate rock physics issues. *IPTC 13850*, 2009.
- [6] Allan Barbosa Geoffroy Motta. *Formulação Teórico-Numérica de Acidificação de Meios Porosos de Reservatórios Petrolíferos com o Objetivo*

- do Aumento de sua permeabilidade*. Tese de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, PEM/COPPE, RJ, Brasil, 2018.
- [7] Roberson Saraiva Polli. *Estudo do processo de acidificação de rochas reservatório por meio de RMN e microtomografia de raios-X*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, IFSC/USP, SP, Brasil, 2016.
- [8] H.A. Al-Anazi; H.A. Nasr-El-Din; S.K. Mohamed. Stimulation of tight carbonate reservoirs using application. *SPE-39418-MS*, 1998.
- [9] Frank Chang; Qi Qu; Wayne Frenier. A novel self-diverting-acid developed for matrix stimulation of carbonate reservoirs. *SPE-65033-MS*, 2001.
- [10] Ram R. Ratnakar; Nitika Kalia; Vemuri Balakotaiiah. Modeling, analysis and simulation of wormhole formation in carbonate rocks with in-situ cross-linked acids. *Chemical Engineering Science*, 90:179–199, 2013.
- [11] Liu Naizhen; Liu Ming. Simulation and analysis of wormhole propagation by ves acid in carbonate acidizing. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 138:57–65, 2016.
- [12] Jacob Bear. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover Publications, 1988.
- [13] R. A. Hazen. Some physical properties of sand and gravels, with special reference to their use in filtration. *The Twenty-Fourth Annual Report of the State Board of Health in Massachusetts*, 1892.
- [14] G. Hauke. *An Introduction to Fluid Mechanics and Transport Phenomena (Fluid Mechanics and Its Applications)*. Springer, 10 2008.

- [15] R.B. Bird; W.E. Stewart; E.N. Lightfoot. *Transport Phenomena*. John Wiley and Sons Inc, 1960.
- [16] Magali I. Billen. Darcy's law - flow in a porous medium, 2021. Acesso em 15 de março de 2021.
- [17] Fridtjov Irgens. *Rheology and Non-Newtonian Fluids*. Springer, 1 edition, 2014.
- [18] Anderson Leocadio da Nova. *Estudo do Escoamento de Fluidos Não Newtonianos em Meios Porosos*. Monografia em Engenharia de Petróleo, Universidade Federal Fluminense, TEQ/UFF, RJ, Brasil, 2013.
- [19] USP. Apostila de reologia de fluidos - universidade de são paulo, 2005. Acesso em 22 de janeiro de 2021.
- [20] Robert W Fox; Philip J Pritchard; Alan T McDonald. *Fox and McDonald's introduction to fluid mechanics*. Wiley and Sons, 2011.
- [21] Robson Pereira Barboza Júnior. *Implementação de Metodologia Computacional para Escoamentos Bifásicos Compressíveis em Meios Porosos*. Projeto Final em Engenharia Química, Universidade Federal do Rio de Janeiro, EQ/UFRJ, RJ, Brasil, 2018.
- [22] Hrvoje Jasak. Openfoam: Open source cfd in research and industry. *International Journal of Naval Architecture and Ocean Engineering*, 1(2):89–94, 2009.
- [23] H. Versteeg; W. Malalasekera. *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method (2nd Edition)*. Pearson, 2 edition, 2007.

- [24] Joel H. Ferziger; Milovan Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 3 edition, 2013.
- [25] Luiz Fernando Lopes Rodrigues Silva. *Desenvolvimento de metodologias para simulação de escoamentos polidispersos usando código livre*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, PEQ/COPPE, RJ, Brasil, 2008.
- [26] Fernando Maciel Motta. *Análise do Acoplamento Pressão-Velocidade em Problemas de Convecção Natural*. Projeto Final em Engenharia Química, Universidade Federal do Rio de Janeiro, EQ/UFRJ, RJ, Brasil, 2017.
- [27] R. J. Atkin; R. E. Craine. Continuum theories of mixtures: Basic theory and historical development. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 29(2):209–244, 1976.
- [28] H. Costa Mattos; M. L. Martins Costa; R. Sampaio. A thermodynamically consistent constitutive theory for a rigid solid-stokesian fluid mixture. *Mechanics Research Communications*, 20(3):243–249, 1993.
- [29] Maria Laura Martins-Costa; Jesús Alfonso Puente Angulo; Heraldo S. da Costa Mattos. Modeling the connection between porosity and permeability: A mixture theory approach. *Journal of Porous Media*, 20(5):389–403, 2017.
- [30] Rogério Martins Saldanha da Gama; Rubens Sampaio. Relações constitutivas para escoamentos de fluidos não-newtonianos através de meios porosos saturados. *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, 7(3), 1985.