

ELEMENTOS COMPATIBLES DE ORDEN SUPERIOR PARA EL ANALISIS
DE FLEXIÓN DE PLACAS

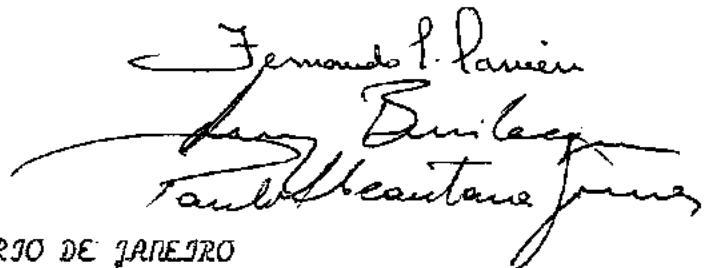
JACK LÓPEZ ACUÑA

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OB-
TENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.)

Aprovada por



Presidente



Fernando P. Lamién
José Durillo
Paulo Beantane Junior

RIO DE JANEIRO

ESTADO DA GUANABARA - BRASIL

ABRIL DE 1972

A mi esposa, Aurea
y a mi hija, Karen

A G R A D E C I M I E N T O S

Al Prof. Fernando L. Lôbo Carneiro, por hacer posible la realización de mis estudios en la COPPE.

Al Prof. Fernando Venâncio Filho, por la orientación al presente trabajo.

A la O.E.A. por la beca concedida para realizar mis estudios de Pós-Grado.

A la Universidad Nacional de Ingeniería, por permitir la realización del presente trabajo.

RESUMEN

El tema del presente trabajo es el estudio y la programación de las subrutinas para el cálculo de las propiedades estructurales de dos modelos compatibles para el análisis de placas por el método de los elementos finitos. El primer elemento es de forma rectangular con 16 grados de libertad (R-16) y el segundo de forma triangular con 18 grados de libertad (T-18).

Se señalan las diferentes alternativas para la deducción de las propiedades estructurales de elementos compatibles.

En el caso del elemento R-16, se presentan las propiedades estructurales para material con ortotropía, se amplía de esta forma el trabajo original en el que fué presentado dicho elemento.

Se muestran resultados numéricos y se señalan los requerimientos de precisión necesarios para la obtención de resultados satisfactorios.

RESUMO

O tema do presente trabalho é o estudo e a programação das subrotinas para o cálculo das propriedades estruturais de dois modelos compatíveis para a análise de placas pelo método dos elementos finitos. O primeiro elemento é de forma retangular com 16 graus de liberdade (R-16) e o segundo é de forma triangular com 18 graus de liberdade (T-18).

Assinalam-se as diferentes alternativas para a dedução das propriedades estruturais de elementos compatíveis.

No caso do elemento R-16, apresentam-se as propriedades estruturais para material com ortotropia, amplia-se desta forma o trabalho original no qual foi apresentado o dito elemento.

Mostram-se resultados numéricos e assinalam-se os requisitos de precisão necessários para a obtenção de resultados satisfatórios.

S U M M A R Y

The present work deals with the programming of subroutines to calculate the structural properties of compatible elements to the analyses of plates by the Finite Element Method. The first of these elements - R16 - has a rectangular shape and 16 degrees of freedom, and the second, with a triangular shape - T18 -, has 18 degrees of freedom.

Different alternatives to obtain the structural properties of these compatible elements are shown.

In the case of the R16 element; are presented the structural properties for orthotropic materials, extending in this manner the original work, in which such element was presented.

Numerical results are shown, besides the necessary requirements of accuracy to obtain satisfactory results are indicated.

I N D I C E

CAPÍTULO I - GENERALIDADES

1.1.- Reseña histórica	1
1.2.- Consideraciones generales	2
1.3.- Requisitos de la función de desplazamientos	2
1.4.- Construcción de la función de desplazamientos.....	4

CAPÍTULO II - RELACIONES FUERZA-DEFORMACIÓN

2.1 Análisis del elemento	5
2.2.- Análisis de la estructura	8

CAPÍTULO III - ELEMENTO RECTANGULAR COMPATIBLE R-16

3.1.- Función de desplazamientos	11
3.2.- Relación esfuerzo-deformación	15
3.3.- Matriz de rigidez del elemento	16
3.4.- Vector de carga consistente	20
3.5.- Matriz de esfuerzos	21
3.6.- Condiciones de borde	22

CAPÍTULO IV - ELEMENTO TRIANGULAR COMPATIBLE T-18

4.1.- Función de desplazamientos	25
4.2.- Matriz de rigidez del elemento	31
4.3.- Vector de carga consistente	35
4.4.- Condiciones de borde	37

CAPÍTULO V - PROGRAMACIÓN

5.1.- Programa principal	39
5.2.- Solución del sistema de ecuaciones	43
5.3.- Subrutinas del elemento R-16	43
5.4.- Subrutinas del elemento T-18	45
5.5.- Subrutinas adicionales	47
5.6.- Listado en lenguaje FORTRAN	48
CAPÍTULO VI - EJEMPLOS DE APLICACIÓN	71
CONCLUSIONES	78
REFERENCIAS	79

CAPÍTULO I

GENERALIDADES

1.1.-RESEÑA HISTÓRICA

Los primeros resultados de la aplicación del método de los elementos finitos al análisis de placas en flexión, fueron publicados por Papenfuss¹ en 1959 y posteriormente por Melosh² y Adini-Clough³ en 1961. En dichos trabajos se utilizaron elementos rectangulares, ninguno de los cuales satisfacía simultáneamente los requisitos de completitud y compatibilidad por entonces aún no establecidos perfectamente. Fue en 1965, en la 1ª Conferencia del AFIT (Air Force Institute of Technology)⁴⁻⁷ que se presentaron los primeros elementos con adecuadas funciones de desplazamiento y de formas más versátiles que el elemento rectangular original. Entre los modelos de desplazamiento, los de Clough⁴ y Bazeley⁵ fueron de forma triangular, los de Bogner⁶ rectangular y el de Fraeijs de Veubeke⁷ cuadrilateral. Dado el suceso del elemento rectangular de Bogner, a partir de entonces, el desarrollo de elementos más refinados se realizó casi exclusivamente en los de forma triangular y cuadrilateral. En 1968 Cowper⁸, Bell⁹, Argyris¹⁰ y Butlin publican con distintas formulaciones un elemento triangular que es considerado el más eficiente en el análisis de flexión de placas. Este mismo año, siguiendo una alternativa diferente, Clough¹² y Fraeijs de Veubeke¹³ presentaron dos elementos cuadrilaterales.

Además de los modelos de desplazamiento indicados, han sido presentados modelos de equilibrio, modelos mixtos y modelos híbridos; siendo

los pioneros de éstas formulaciones, Fraeijs de Veubeke^{7,14}, Herrmann^{15,16}, y Pian^{17,18} respectivamente.

1.2.- CONSIDERACIONES GENERALES

El desarrollo de los modelos de desplazamiento que tratamos en los capítulos 3 y 4, es realizado dentro de las aproximaciones que se introducen en la teoría clásica de "placas delgadas con pequeñas deformaciones"¹⁹. De acuerdo a ello, el estado de esfuerzos y deformaciones en una placa, puede ser expresado completamente en función del desplazamiento lateral w de la superficie media de la placa. La expresión de éste desplazamiento, que en la solución "exacta" satisface: a) una ecuación diferencial parcial lineal, y b) las condiciones de borde; en el método de los elementos finitos no satisface exactamente ninguna de las dos condiciones anteriores, y es construido generalmente por polinomios cuyos parámetros o coordenadas generalizadas se determinan por solución de un sistema de ecuaciones que resulta de la minimización de la energía potencial total del sistema. Los requisitos que debe cumplir la función de desplazamientos son indicados en la sección 1.3.

Debido a que la descripción y fundamentación del método de los elementos finitos está ampliamente mostrado en la literatura^{20,21}, en lo que sigue nos limitamos al procedimiento establecido en la formulación de los modelos de desplazamiento para flexión de placas.

1.3.- REQUISITOS DE LA FUNCIÓN DE DESPLAZAMIENTO

Ha sido demostrado²² que es conveniente la satisfacción de los

criterios de completitud y compatibilidad de la función de desplazamiento de un elemento finito. La satisfacción del primer criterio es necesario para la convergencia a la solución exacta a medida que se refina la malla, mientras que la satisfacción de la compatibilidad es necesario si se desea obtener un límite inferior de la energía de deformación. Estos requisitos para la función del desplazamiento $w(x, y)$ que se asume en un elemento de placa son:

- 1). -COMPLETUDAD.- Todos los estados de desplazamiento como cuerpo rígido y estados de deformación unitaria (curvatura) constante deben estar incluidos en la función. Es decir los términos $1, x, y, x^2, xy, y^2$ (o su equivalente en otro sistema de coordenadas) deben ser incluidos en la función del desplazamiento $w(x, y)$ del elemento.
- 2) COMPATIBILIDAD.- La función asumida y sus primeras derivadas deben ser continuas dentro del elemento; y a lo largo de un lado común a dos elementos la función w y su derivada normal w, n deben ser iguales para los dos elementos.

A elementos que no satisfacen la compatibilidad de la derivada normal se les conoce como elementos no-conformes, y entre las desventajas que poseen es que, la convergencia depende de la forma de la malla y que aún presentando convergencia de la energía de deformación, los momentos pueden no tener convergencia. En consecuencia, es conveniente satisfacer los dos requisitos simultáneamente, es en este sentido que a partir de 1965 se formularon los modelos de desplazamiento. Los procedimientos utilizados en la construcción de las funciones del desplazamiento w , se indican en la sección 1.4.

1.4.-CONSTRUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE DESPLAZAMIENTO $w(x,y)$

En la construcción de funciones de desplazamiento para modelos compatibles de forma poligonal, se tienen dos alternativas:

- 1) obtener funciones que tengan por parámetros solamente los 3 grados de libertad (w, w_x, w_y) por nodo, ó
- 2) obtener funciones que además tengan por parámetros, las segundas derivadas de w en los puntos nodales.

En la primera alternativa, debido a que es imposible²⁵ que con una sola función polinomial se obtenga compatibilidad de la derivada normal entre elementos por cuanto esta única función debería dar en general más de un único valor para la derivada w_{xy} en los vértices del elemento; es necesario asumir varias expansiones polinomiales dentro del elemento o adicionar adecuadamente a la función de desplazamiento original válida para todo el elemento funciones correctivas que introduzcan la singularidad para w_{xy} . Ejemplo de elementos desarrollados asumiendo subexpansiones polinomiales sobre regiones triangulares en que se divide el elemento, son los elementos triangular⁴ y cuadrilateral¹² propuestos por Clough y el rectangular propuesto por Deák²³. Los elementos propuestos por Bazeley⁵ de Veubeke^{7,13} y Irons²⁴ son ejemplos de la utilización de funciones correctivas.

Para obtener modelos compatibles por la segunda alternativa, un mínimo de 4 grados de libertad (w, w_x, w_y, w_{xy}) es necesario en cada vértice en ángulo recto, y, 6 grados de libertad $(w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy})$ en cada vértice en ángulo no-recto.

CAPÍTULO 99

RELACIONES FUERZA - DEFORMACIÓN

En el análisis de una estructura por el método de los elementos finitos, existen dos etapas:

- 1ª.- ANÁLISIS DEL ELEMENTO, en ésta primera etapa, se determinan las propiedades estructurales (matriz de rigidez, matriz de masa consistente y vector de carga consistente) de cada uno de los elementos en que se ha discretizado la estructura.
- 2ª.- ANÁLISIS DEL SISTEMA, en ésta segunda etapa, las propiedades de la estructura son determinadas por ensamble de las propiedades de los elementos, y luego se obtiene la respuesta del sistema estructural.

Existen varios métodos para la determinación de las propiedades estructurales de los elementos, y la elección de un método en particular, depende principalmente del tipo de elemento. En general sólo en forma aproximada pueden determinarse dichas propiedades. Efectuado el análisis a nivel de elemento, el análisis de la estructura no ofrece dificultad, salvo las limitaciones del sistema computacional.

2.1.- ANÁLISIS DEL ELEMENTO

Determinaremos las propiedades estructurales del elemento, utilizando el principio de los desplazamientos virtuales. Cuando se utiliza éste principio, el punto de partida es expresar el campo de desplazamientos en función de los "desplazamientos" nodales. En lo que sigue, para simplicidad de las expresiones no se tendrán en cuenta

el efecto de esfuerzos ni deformaciones iniciales.

Sea u el vector de desplazamientos internos

$$u = \Phi d \quad (2.1)$$

donde:

$$\begin{aligned} u &= \{ u \ v \ w \} \\ \Phi &= [\phi(x, y, z)] \\ d &= \{ d_1 \ d_2 \ \dots \ d_n \} = \text{vector de desplazamientos} \\ &\quad \text{nodales.} \end{aligned}$$

La expresion de las deformaciones unitarias, se obtiene derivando apropiadamente (2.1)

$$\epsilon = \Phi' d \quad (2.2)$$

donde:

$$\epsilon = \{ \epsilon_x \ \epsilon_y \ \dots \}$$

Los esfuerzos en el elemento estan dados por:

$$\sigma = E \epsilon \quad (2.3)$$

donde

$$\begin{aligned} \sigma &= \{ \sigma_x \ \sigma_y \ \dots \} \\ E &= \text{matriz que especifica las características del} \\ &\quad \text{material.} \end{aligned}$$

Con el objeto de determinar el trabajo virtual, se dan desplazamientos virtuales d^* en los nodos del elemento de tal forma que los desplazamientos internos sean

$$u^* = \underline{\Phi} d^* \quad (2.4)$$

donde, $\underline{\Phi}$ es cualquier función cinemáticamente admisible. Luego las deformaciones virtuales de acuerdo a (2.2) serán

$$\epsilon^* = \underline{\Phi}' d^* \quad (2.5)$$

Si en el elemento actúan fuerzas de volumen f_v , fuerzas de superficie f_s y fuerzas nodales f .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}_v &= \{ f_{v_x} \quad f_{v_y} \quad f_{v_z} \} \\
 \mathbf{f}_s &= \{ f_{s_x} \quad f_{s_y} \quad f_{s_z} \} \\
 \mathbf{f} &= \{ f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_n \}
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

El trabajo virtual interno es

$$\int_v \boldsymbol{\varepsilon}^{*t} \boldsymbol{\sigma} \, dv
 \tag{2.7}$$

el trabajo virtual externo

$$\mathbf{d}^{*t} \mathbf{f} + \int_v \mathbf{u}^{*t} \mathbf{f}_v \, dv + \int_s \mathbf{u}^{*t} \mathbf{f}_s \, ds
 \tag{2.8}$$

igualando (2.7) y (2.8) y teniendo en cuenta (2.3), (2.4) y (2.5)

$$\mathbf{d}^{*t} \left[\left(\int_v \boldsymbol{\Phi}^{*t} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\Phi} \, dv \right) \mathbf{d} - \mathbf{f} - \int_v \boldsymbol{\Phi}^{*t} \mathbf{f}_v \, dv - \int_s \boldsymbol{\Phi}^{*t} \mathbf{f}_s \, ds \right] = 0
 \tag{2.9}$$

como (2.9) debe verificarse para cualquier valor de \mathbf{d}^* , la expresión entre corchetes debe anularse, de donde

$$\mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{f} + \mathbf{q}
 \tag{2.10}$$

siendo

$$\mathbf{k} = \int_v \boldsymbol{\Phi}^{*t} \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\Phi} \, dv
 \tag{2.11}$$

$$\mathbf{q} = \int_v \boldsymbol{\Phi}^{*t} \mathbf{f}_v \, dv + \int_s \boldsymbol{\Phi}^{*t} \mathbf{f}_s \, ds
 \tag{2.12}$$

La matriz \mathbf{k} es la matriz de rigidez del elemento, para su determinación por la expresión (2.11) es necesario conocer la función $\boldsymbol{\Phi}$ de las deformaciones exactas en el elemento; la determinación de esta función, que en el análisis estático de estructuras de barras no presenta dificultad, en general es imposible ser determinada para elementos finitos de estructuras continuas. Una posible aproximación es asumir $\boldsymbol{\Phi}$ de tal manera que solamente satisfaga las ecuaciones de compatibilidad, es decir $\boldsymbol{\Phi} \approx \boldsymbol{\Phi}_I$, obteniéndose una aproximación de la

matriz de rigidez de elemento, luego

$$k = \int_V \Phi' \epsilon E \Phi' dv \quad (2.13)$$

Los criterios para una adecuada construcción de la función de desplazamientos en el caso de flexión de placas ($u = w = w$) fueron considerados en la sección 1.3.

2.2.- ANALISIS DEL SISTEMA

El análisis de la estructura sera efectuado utilizando el principio de mínima energía potencial.

La energía potencial para un elemento genérico i del sistema linealmente elástico es

$$\pi_i = \frac{1}{2} d_i^t k_i d_i - d_i^t f_i - d_i^t q_i$$

La energía potencial de la estructura es la suma de la energía potencial de los m elementos

$$\pi = \frac{1}{2} \sum_1^m d_i^t k_i d_i - \sum_1^m d_i^t f_i - \sum_1^m d_i^t q_i$$

o en forma matricial

$$\pi = \frac{1}{2} d_T^t K_d d - d_T^t f_T - d_T^t q_T \quad (2.16)$$

donde:

$$d_T = \{ d_1 \quad d_2 \quad \dots \quad d_m \}$$

$$K_d = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_m \end{bmatrix}$$

$$f_T = \{ f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_m \}$$

$$q_T = \{ q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_m \}$$

Los desplazamientos nodales de los elementos d_r pueden ser expresados en términos de los desplazamientos de los nodos de la estructura D por la ecuación

$$d_r = A D \quad (2.17)$$

reemplazando (2.17) en (2.16)

$$\Pi = \frac{1}{2} D^t A^t K_d A D - D^t (A^t F_r + A^t Q_r) \quad (2.18)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} D^t K D - D^t (P + Q) \quad (2.19)$$

donde

$$K = A^t K_d A \quad (2.20)$$

$$P = A^t F_{r,f} \quad (2.21)$$

$$Q = A^t Q_r \quad (2.22)$$

Por el principio de mínima energía potencial

$$\delta \Pi = 0$$

luego

$$K D - (P+Q) = 0$$

$$K D = P + Q \quad (2.23)$$

El cálculo de la matriz de la estructura K que es presentado en la teoría general de acuerdo a la expresión (2.20) en la práctica es efectuado ubicando en forma directa la contribución de la rigidez de un elemento en la matriz de rigidez de la estructura. El vector P (2.21) está constituido por las acciones externas concentradas en los nodos de la estructura. El vector de carga consistente Q , también es calculado por contribución directa de las cargas consistentes en cada elemento y no por la expresión (2.22).

La introducción de las condiciones de apoyo en el sistema de ecuaciones (2.23), hace posible la solución de dicho sistema y en consecuencia la determinación de esfuerzos y deformaciones en los elementos de la estructura.

CAPÍTULO 333

ELEMENTO RECTANGULAR COMPATIBLE R-16

Las propiedades estructurales de un elemento rectangular compatible para análisis de flexión de placas son determinadas en forma explícita en el presente capítulo.

3.1.- FUNCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS :

La función de desplazamientos será determinada de acuerdo a la segunda alternativa indicada en la sección 1.4, es decir, considerando los siguientes cuatro grados de libertad en cada nodo

$$w, \quad \Theta_x = w_{,y}, \quad \Theta_y = -w_{,x}, \quad \Theta_{xy} = w_{,xy}$$

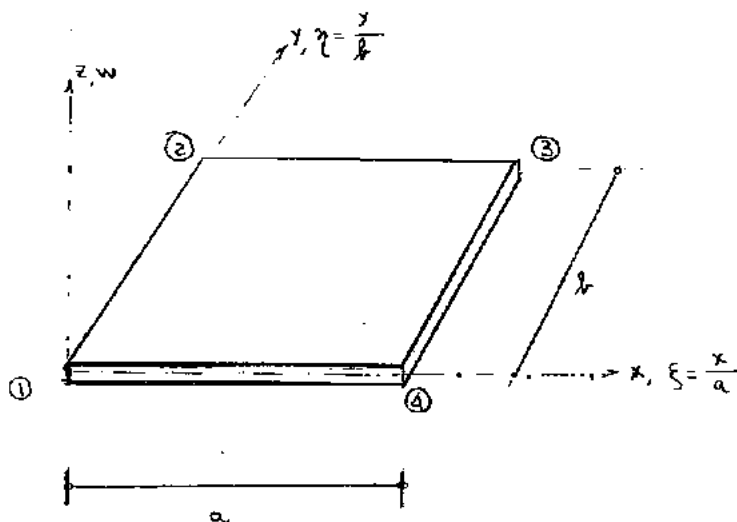


fig. 3.1

en consecuencia, el número total de parámetros nodales n es 16.

Luego :

$$d = \{ w_1 \quad w_{y_1} \quad w_{x_1} \quad w_{xy_1} \quad w_2 \quad \dots \quad w_{xy_4} \} \quad (3.2)$$

Dado el número de desplazamientos nodales que estamos considerando, la satisfacción de los requisitos de la sección 1.3 exige :

- 1) para la **COMPLETIDAD**, que la expansión polinomial contenga todos los términos de un polinomio completo de segundo grado, es decir que la función w pueda tener la forma

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \dots$$

(éste requisito es general para todos los elementos de placas en flexión, independiente del número de parámetros nodales)

- 2) para la **COMPATIBILIDAD**, que la expansión polinomial de w , de variación cúbica a lo largo de los lados del elemento tanto para el desplazamiento (w) como para la derivada normal al lado (w_x ó w_y).

De acuerdo a (2.4), es necesario que el desplazamiento w , pueda ser expresado en términos de los "desplazamientos" nodales; esto podría obtenerse construyendo en primer lugar una expansión que satisfaga los dos requisitos anteriores en función de ciertos parámetros α_i , es decir

$$w = c d \quad (3.3)$$

donde:

$$c = (c(x, y))$$

$$d = \{ \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{16} \}$$

Esta función debe dar los desplazamientos d al remplazar en c las coordenadas de los puntos nodales, o sea

$$(3.4)$$

$$(3.5)$$

$$d = C_0^{-1} \alpha \quad (3.4)$$

de donde

$$\alpha = C_0^{-1} d \quad (3.5)$$

reemplazando (3.5) en (3.3)

$$w = c C_0^{-1} d$$

y como

$$w = \underline{\phi} d$$

$$\underline{\phi} = c C_0^{-1} \quad (3.6)$$

La dificultad que puede presentarse al seguir este procedimiento es que, la inversa de C_0 no exista, obligando ello a asumir otra forma para c tornando el procedimiento demasiado tedioso. Las fórmulas de interpolación nos permiten salvar esta dificultad. Las fórmulas de interpolación de Lagrange pueden ser utilizadas cuando se desea obtener un polinomio en términos del valor de la función en determinados puntos, mientras que las fórmulas de Hermite deben ser utilizadas cuando además de la función se consideran las derivadas. Ejemplo de elementos formulados con esta técnica son los de la familia LUMINA²⁴ (Lagrange) y HERMES²⁴ (Hermite).

Dado el número de parámetros nodales que estamos considerando debemos utilizar los polinomios de interpolación de Hermite de primer orden, que para los puntos del elemento de la fig. 3.1 son:

En la dirección 1 - 4

$$h_1(\xi) = (1+2\xi)(1-\xi)^2$$

$$h_4(\xi) = (3-2\xi)\xi^2$$

En la dirección 1 - 2

$$h_1(\eta) = (1+2\eta)(1-\eta)^2$$

$$h_2(\eta) = (3-2\eta)\eta^2$$

$$\begin{aligned} \bar{h}_7(\xi) &= a \xi (1-\xi)^2 & \bar{h}_7(\eta) &= b \eta (1-\eta)^2 \\ \bar{h}_4(\xi) &= -a(1-\xi) \xi^2 & \bar{h}_2(\eta) &= -b(1-\eta) \eta^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

La apropiada multiplicación de estos polinomios, nos permiten determinar la función del desplazamiento Φ que asegura compatibilidad total.

$$\Phi^t = \begin{array}{|l} (1+2\xi) (1-\xi)^2 (1+2\eta) (1-\eta)^2 \\ (1+\xi) (1-\xi)^2 \eta (1-\eta)^2 \quad b \\ -(1-\xi)^2 (1+2\eta) (1-\eta)^2 \quad a \\ \xi (1-\xi)^2 \eta (1-\eta)^2 \quad ab \\ \hline (1+2\xi) (1-\xi)^2 (3-2\eta) \eta^2 \\ -(1+2\xi) (1-\xi)^2 (1-\eta) \eta^2 \quad b \\ -\xi (1-\xi)^2 (3-2\eta) \eta^2 \quad a \\ -\xi (1-\xi)^2 (1-\eta) \eta^2 \quad ab \\ (3-2\xi) \xi^2 (3-2\eta) \eta^2 \\ -(3-2\xi) \xi^2 (1-\eta) \eta^2 \quad b \\ (1-\xi) \xi^2 (3-2\eta) \eta^2 \quad a \\ (1-\xi) \xi^2 (1-\eta) \eta^2 \quad ab \\ (3-2\xi) \xi^2 (1+2\eta) (1-\eta)^2 \\ (3-2\xi) \xi^2 \eta (1-\eta)^2 \quad b \\ (1-\xi) \xi^2 (1+2\eta) (1-\eta)^2 \quad a \\ (1-\xi) \xi^2 \eta (1-\eta)^2 \quad ab \end{array} \quad (3.8)$$

3.2.- RELACIÓN ESTUERZO-DEFORMACIÓN

Los desplazamientos en el interior del elemento en el caso de flexión de placas delgadas con pequeñas deformaciones¹⁹, están relacionados por:

$$\begin{aligned} u &= -z w_x \\ v &= -z w_y \end{aligned} \quad (3.9)$$

de donde las deformaciones unitarias resultan ser

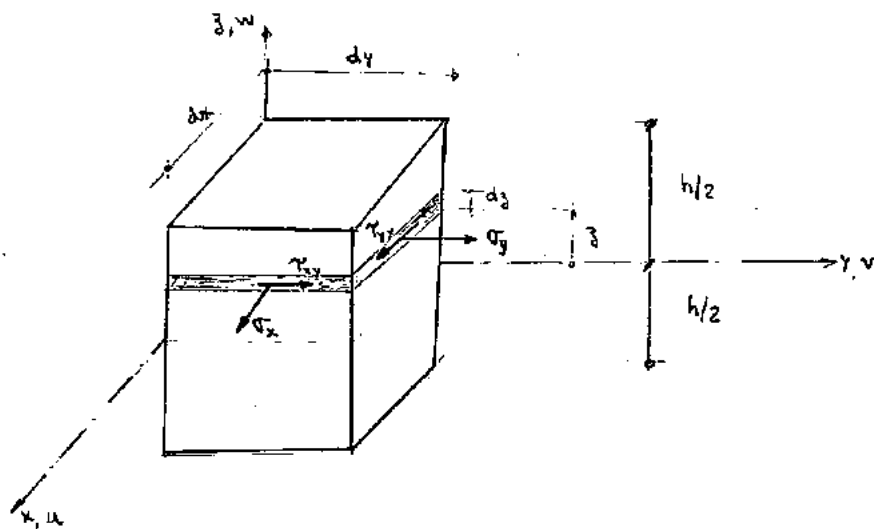
$$\epsilon_x = -z w_{xx}$$

$$\epsilon_y = -z w_{yy}$$

$$\epsilon_{xy} = -2z w_{xy}$$

entonces,

$$\epsilon = z \left\{ -w_{xx} \quad -w_{yy} \quad -2w_{xy} \right\} \quad (3.10)$$



debe notarse que no se está considerando el efecto de los esfuerzos σ_z , τ_{xz} , τ_{yz} . Las relaciones entre esfuerzos y deformaciones para el caso de ortotropía están dados por

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E'_x \epsilon_x + E'' \epsilon_y \\ \sigma_y &= E'_y \epsilon_y + E'' \epsilon_x \\ \tau_{xy} &= G \epsilon_{xy}\end{aligned}\tag{3.11}$$

luego, de acuerdo a (2.3)

$$E = \begin{bmatrix} E'_x & E'' & 0 \\ E'' & E'_y & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}\tag{3.12}$$

3.3.- MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO

La matriz de rigidez del elemento de acuerdo a lo visto en el capítulo 19, está dado por

$$k = \int \phi'^t E \phi' \, dv\tag{3.13}$$

donde

$$\epsilon = \phi' d\tag{2.2}$$

luego, derivando ϕ (3.8) de acuerdo a (3.10) y (2.2) obtenemos la matriz ϕ' que se muestra en (3.14).

$\Phi^2 = 3$

$\frac{6}{a^2} (1-2\xi)(1+2\eta)(1-\eta)^2$	$\frac{6}{b^2} (1+2\xi)(1-\xi)^2(1-2\eta)$	$-\frac{72}{ab} \xi(1-\xi)\eta(1-\eta)$
$\frac{6b}{a^2} (1-2\xi)\eta(1-\eta)^2$	$\frac{2}{b} (1+2\xi)(1-\xi)^2(2-3\eta)$	$\frac{12}{a} \xi(1-\xi)(1-\eta)(1-3\eta)$
$-\frac{2}{a} (2-3\xi)(1+2\eta)(1-\eta)^2$	$-\frac{6a}{b^2} \xi(1-\xi)^2(1-2\eta)$	$-\frac{12}{b} (1-\xi)(1-3\xi)(1-\eta)$
$\frac{2b}{a} (2-3\xi)\eta(1-\eta)^2$	$\frac{2a}{b} \xi(1-\xi)^2(2-3\eta)$	$-2(1-\xi)(1-3\xi)(1-\eta)(1-3\eta)$
$\frac{6}{a^2} (1-2\xi)(3-2\eta)\eta^2$	$-\frac{6}{b^2} (1+2\xi)(1-\xi)^2(1-2\eta)$	$\frac{72}{ab} \xi(1-\xi)\eta(1-\eta)$
$-\frac{6b}{a^2} (1-2\xi)(1-\eta)\eta^2$	$\frac{2}{b} (1+2\xi)(1-\xi)^2(1-3\eta)$	$-\frac{12}{a} \xi(1-\xi)\eta(2-3\eta)$
$-\frac{2}{a} (2-3\xi)(3-2\eta)\eta^2$	$\frac{6a}{b^2} \xi(1-\xi)^2(1-2\eta)$	$\frac{12}{b} (1-\xi)(1-3\xi)\eta(1-\eta)$
$-\frac{2b}{a} (2-3\xi)(1-\eta)\eta^2$	$\frac{2a}{b} \xi(1-\xi)^2(1-3\eta)$	$2(1-\xi)(1-3\xi)\eta(2-3\eta)$
$-\frac{6}{a^2} (1-2\xi)(2-3\eta)\eta^2$	$-\frac{6}{b^2} (3-2\xi)\xi^2(1-2\eta)$	$-\frac{72}{ab} \xi(1-\xi)\eta(1-\eta)$
$\frac{6b}{a^2} (1-2\xi)(1-\eta)\eta^2$	$\frac{2}{b} (3-2\xi)\xi^2(1-3\eta)$	$\frac{12}{a} \xi(1-\xi)\eta(2-3\eta)$
$\frac{2}{a} (1-3\xi)(3-2\eta)\eta^2$	$-\frac{6a}{b^2} (1-\xi)\xi^2(1-2\eta)$	$-\frac{12}{b} \xi(2-3\xi)\eta(1-\eta)$
$-\frac{2b}{a} (1-3\xi)(1-\eta)\eta^2$	$-\frac{2a}{b} (1-\xi)\xi^2(1-3\eta)$	$-2\xi(2-3\xi)\eta(2-3\eta)$
$-\frac{6}{a^2} (1-2\xi)(1+2\eta)(1-\eta)^2$	$\frac{6}{b^2} (3-2\xi)\xi^2(1-2\eta)$	$\frac{72}{ab} \xi(1-\xi)\eta(1-\eta)$
$-\frac{6b}{a^2} (1-2\xi)\eta(1-\eta)^2$	$\frac{2}{b} (3-2\xi)\xi^2(2-3\eta)$	$-\frac{12}{a} \xi(1-\xi)(1-\eta)(1-3\eta)$
$-\frac{2}{a} (1-3\xi)(1+2\eta)(1-\eta)^2$	$\frac{6a}{b^2} (1-\xi)\xi^2(1-2\eta)$	$\frac{12}{b} \xi(2-3\xi)\eta(1-\eta)$
$\frac{2b}{a} (1-3\xi)\eta(1-\eta)^2$	$-\frac{2a}{b} (1-\xi)\xi^2(2-3\eta)$	$2\xi(2-3\xi)(1-\eta)(1-3\eta)$

(3.14)

T A B L A 2

①	①	②		③			④								
	K ₁₁														
	K ₂₁	K ₂₂													
	K ₃₁	K ₃₂	K ₃₃												
	K ₄₁	K ₄₂	K ₄₃	K ₄₄											
	K ₅₁	K ₅₂	K ₅₃	K ₅₄	K ₁₁										
	K ₆₁	K ₆₂	K ₆₃	K ₆₄	-K ₂₁	K ₂₂									
	K ₇₁	K ₇₂	K ₇₃	K ₇₄	K ₃₁	-K ₃₂	K ₃₃								
	K ₈₁	K ₈₂	K ₈₃	K ₈₄	-K ₄₁	K ₄₂	-K ₄₃	K ₄₄							
	K ₉₁	K ₉₂	K ₉₃	K ₉₄	K ₅₁	-K ₅₂	K ₅₃	-K ₅₄	K ₁₁						
	K _{10,1}	K _{10,2}	K _{10,3}	K _{10,4}	-K _{6,1}	K _{6,2}	-K _{6,3}	K _{6,4}	-K ₂₁	K ₂₂					
	K _{11,1}	K _{11,2}	K _{11,3}	K _{11,4}	K _{15,1}	-K _{15,2}	K _{15,3}	-K _{15,4}	-K ₈₁	K ₈₂	K ₈₃				
	K _{12,1}	K _{12,2}	K _{12,3}	K _{12,4}	-K _{6,1}	K _{6,2}	-K _{6,3}	K _{6,4}	K _{4,1}	-K _{4,2}	-K _{4,3}	K _{4,4}			
	K _{13,1}	K _{13,2}	K _{13,3}	K _{13,4}	K _{9,1}	-K _{9,2}	K _{9,3}	-K _{9,4}	K _{5,1}	-K _{5,2}	-K _{5,3}	K _{5,4}	K ₁₁		
	K _{14,1}	K _{14,2}	K _{14,3}	K _{14,4}	-K _{10,1}	K _{10,2}	-K _{10,3}	K _{10,4}	-K _{6,1}	K _{6,2}	K _{6,3}	-K _{6,4}	K ₂₁	K ₂₂	
	K _{15,1}	K _{15,2}	K _{15,3}	K _{15,4}	K _{11,1}	-K _{11,2}	K _{11,3}	-K _{11,4}	-K _{7,1}	K _{7,2}	K _{7,3}	-K _{7,4}	-K ₈₁	-K ₈₂	K ₈₃
K _{16,1}	K _{16,2}	K _{16,3}	K _{16,4}	-K _{12,1}	K _{12,2}	-K _{12,3}	K _{12,4}	K _{8,1}	-K _{8,2}	-K _{8,3}	K _{8,4}	-K _{4,1}	-K _{4,2}	K _{4,3}	K _{4,4}

Matriz de Rigidez del elemento R-16

reemplazando (3.72) y (3.14) en (3.13) y efectuando la integración, se obtiene la matriz de rigidez del elemento. En la tabla 1 se muestran las primeras cuatro columnas de la parte triangular inferior de la matriz, y en la tabla 2, la forma de obtener la matriz en función de sus primeras cuatro columnas. La notación adoptada en la tabla 1

$$D_x = \frac{E_x h^3}{12} \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12} \quad D_1 = \frac{E'' h^3}{12} \quad D_{xy} = \frac{G h^3}{12} \quad (3.15)$$

que para el caso de isotropía se tiene

$$E_x = E_y = \frac{E}{1-\nu^2} \quad E'' = \frac{\nu E}{1-\nu^2} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

3.4.- VECTOR DE CARGA CONSISTENTE

De acuerdo a la expresión (2.12), el vector de carga consistente en el elemento se determina por la expresión

$$q = \int_V \Phi^t f_V dv + \int_S \Phi^t f_S ds$$

que para el caso de carga distribuida uniforme q_0 se tiene

$$q = q_0 ab \int_0^1 \int_0^1 \Phi^t d\xi d\eta \quad (3.16)$$

reemplazando (3.8) en (3.16) e integrando

$$q = q_0 \left\{ \begin{array}{cccccccc} \frac{1}{4} ab & \frac{1}{24} ab^2 & -\frac{1}{24} b^2 a & \frac{1}{144} a^2 b^2 & \frac{1}{4} ab & -\frac{1}{24} ab^2 & -\frac{1}{24} a^2 b & -\frac{1}{144} a^2 b^2 \\ \frac{1}{4} ab & -\frac{1}{24} ab^2 & \frac{1}{24} a^2 b & \frac{1}{144} a^2 b^2 & \frac{1}{4} ab & \frac{1}{24} ab^2 & \frac{1}{24} a^2 b & -\frac{1}{144} a^2 b^2 \end{array} \right\}$$

3.5.- MATRIZ DE ESFUERZOS

Los esfuerzos en un punto $P(x, y, z)$, del elemento, pueden ser calculados por la expresión

$$\sigma = E \epsilon \quad (2.3)$$

sin embargo, en el análisis de flexión de placas es de interés la resultante de esfuerzos por unidad de longitud. En las direcciones X e Y , las resultantes son:

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_x dz \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \sigma_y dz \quad (3.17)$$

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z \tau_{xy} dz$$

y que con (3.11), (3.10) y (3.15) se obtiene

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & D_1 & 0 \\ D_1 & D_y & 0 \\ 0 & 0 & D_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{xx} \\ -w_{yy} \\ -2w_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

ó, teniendo en cuenta (3.18)

$$M = H \frac{1}{z} \epsilon$$

y reemplazando (2.2)

$$M = \frac{1}{z} H \phi' d$$

haciendo

$$M = \frac{1}{z} H \phi' \quad (3.19)$$

se tiene

$$M = M d \quad (3.20)$$

es decir, conocido los desplazamientos nodales d , los momentos en cualquier punto del elemento son calculados por (3.20).

3.6.- CONDICIONES DE BORDE

Cuando se utilizan modelos compatibles en el análisis de una estructura, es necesario satisfacer solamente las condiciones geométricas de borde. Esto es una consecuencia directa del principio de mínima energía potencial.

En los ejemplos del capítulo 19 se ha seguido estrictamente éste principio.

Para el elemento R-16 las condiciones de borde son:

a) borde simplemente apoyado

Por ejemplo, si el borde 1 - 4 del elemento de la fig. 3.1 está simplemente apoyado, la condición geométrica en dicho borde es:

$$(w)_{\eta=0} = 0 \quad 3.21$$

como $w(\xi, \eta) = \phi d \quad (3.22)$

se obtiene de (3.8) y teniendo en cuenta las propiedades de los polinomios de Hermite (3.7) que (3.22) para $\eta = 0$ se reduce a

$$w(\xi, 0) = h_1(\xi)w_1 - \bar{h}_1(\xi)\theta_{y1} + h_4(\xi)w_4 - \bar{h}_4(\xi)\theta_{y4} \quad (3.23)$$

Para que (3.23) sea sea cero para cualquier valor de ξ , es necesario que:

$$w_1 = \theta_{y1} = w_4 = \theta_{y4} = 0$$

o, de acuerdo a (3.1)

$$w_1 = w_{x1} = w_4 = w_{x4} = 0 \quad (3.24)$$

es decir, las cuatro condiciones expresadas en (3.24) equivalen a la condición (3.21).

En general, para un borde simplemente apoyado del elemento entre dos puntos nodales i y j , y cuando dicho borde es paralelo al eje x , la condición geométrica (3.21) para el borde, equivale a las siguientes condiciones en los odos

nodo i	nodo j
$w_i = 0$	$w_j = 0$
$w_{xi} = 0$	$w_{xj} = 0$

(3.26)

b) Borde empotrado

si el borde 1 - 4 está empotrado, las condiciones geométricas de borde son :

$$\left(w \right)_{\eta=0} = 0 \qquad \left(w_{\psi} \right)_{\eta=0} = 0 \qquad (3.27)$$

La primera condición es idéntica al caso de borde simplemente apoyado. Para la segunda condición por una forma similar al caso anterior se obtiene

$$h_1(\xi) \theta x_1 + \bar{h}_1(\xi) \theta x_{y1} + h_4(\xi) \theta x_4 + \bar{h}_4(\xi) \theta x_{y4} = 0 \qquad (3.28)$$

para que (3.28) sea cero en todo el borde es necesario que:

$$\theta x_1 = \theta x_{y1} = \theta x_4 = \theta x_{y4} = 0$$

o, de acuerdo a (3.1)

$$w_{y1} = w_{xy1} = w_{y4} = w_{xy4} = 0$$

En general, para un borde empotrado del elemento entre dos puntos nodales \underline{i} , \underline{j} , y cuando dicho borde es paralelo al eje x , las dos condiciones (3.27) para el borde, equivalen a las siguientes condiciones en los odos

nodo i	nodo j
$w_i = 0$	$w_j = 0$
$w_{xi} = 0$	$w_{xj} = 0$
$w_{yi} = 0$	$w_{yj} = 0$
$w_{xyi} = 0$	$w_{xyj} = 0$

(3.29)

c) Borde libre

No existe condición geométrica.

Cuando el borde sea paralelo al eje y , basta intercambiar x e y en (3.26) y (3.28)

CAPÍTULO IV

ELEMENTO TRIANGULAR COMPATIBLE T-18

En éste capítulo se obtienen las expresiones para el cálculo de las propiedades estructurales de un elemento triangular compatible siguiendo la segunda alternativa de la sección 1.4, es decir considerando seis grados de libertad ($w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{xy}, w_{yy}$) en cada uno de los vértices del elemento.

4.1.- FUNCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS

Dado el número de desplazamientos nodales en los vértices del elemento, para satisfacer la COMPATIBILIDAD entre elementos se requiere :

- a) que la variación del desplazamiento w a lo largo de un lado cualquiera del elemento, esté dado por un polinomio de 5º grado. Esto, en el caso de que no existan puntos nodales en los lados del elemento que tengan desplazamientos que puedan influir en la variación de w .
- b) que la variación de la derivada normal w_n a lo largo de un lado cualquiera del elemento, esté dado por un polinomio de 3º grado. Esto también, solamente en el caso de no existir puntos nodales con desplazamientos de nodo que puedan influir en la variación de w_n .

Por las consideraciones anteriores, la función del desplazamiento w a asumir, debe ser un polinomio de 5º grado.

Debido a que un polinomio completo de 5º grado contiene 21 términos y de variación de 4º grado para la derivada normal w_n , existen dos alternativas para obtener el modelo compatible. La primera es adicionar tres desplazamientos nodales ($18+3=21$) que nos permitan determinar las 21 constantes del polinomio y que además definan una única variación de 4º grado de la derivada normal en el lado común a dos elementos; ésta alternativa fué adoptada por varios autores, entre ellos Argyris (TUBA 6) y Bell (T-21) que adicionaron puntos nodales en el centro de los lados del elemento con la derivada normal como único desplazamiento de nodo. La segunda alternativa es imponer condiciones para que la derivada normal varíe de acuerdo a un polinomio de 3º grado, de ésta manera, con solamente los tres puntos nodales de los vértices del elemento se obtiene un modelo compatible con 18 grados de libertad, variación de 5º grado para el desplazamiento w y de 3º grado para la derivada normal w_n . Este elemento es considerado el más eficiente en el análisis de flexión de placas después de haber sido comparado con elementos más refinados (T-21, TUBA 6, TUBA 13, TUBA 15) debido a que en éstos últimos, el mayor refinamiento en la función de desplazamiento no compensa el inconveniente computacional que presentan los nodos adicionales.

4.1.1 FUNCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS DEL ELEMENTO T-18

Sea el elemento mostrado en la fig. 4.1

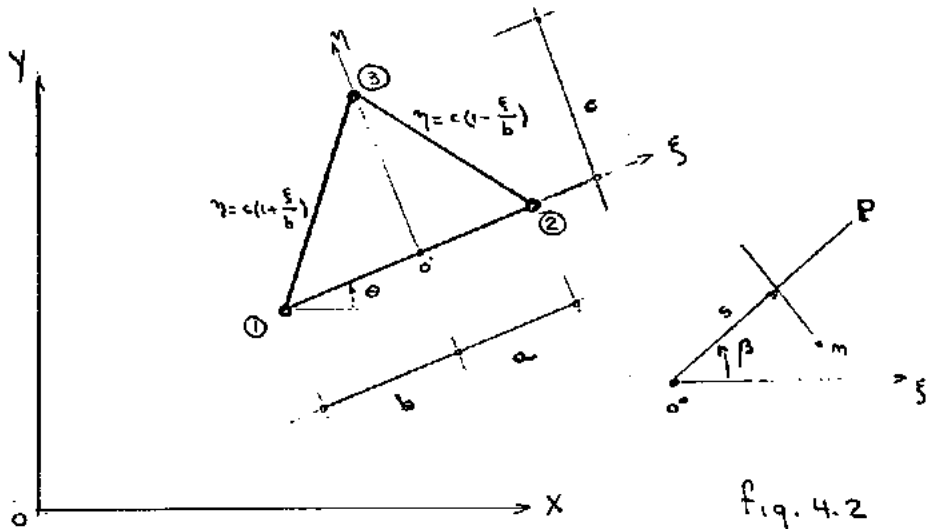


Fig. 4.1

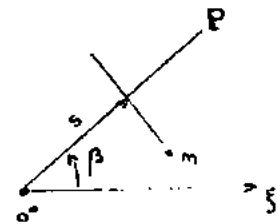


Fig. 4.2

La función de desplazamientos que se asume es

$$\begin{aligned}
 w = & \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 \\
 & + \alpha_{11} \xi^4 + \alpha_{12} \xi^3 \eta + \alpha_{13} \xi^2 \eta^2 + \alpha_{14} \xi \eta^3 + \alpha_{15} \eta^4 + \alpha_{16} \xi^5 + \alpha_{17} \xi^4 \eta + \alpha_{18} \xi^3 \eta^2 + \\
 & + \alpha_{19} \xi^2 \eta^3 + \alpha_{20} \eta^4
 \end{aligned}$$

el término $\xi^4 \eta$ ha sido eliminado de la expresión (4.1) por la condición (1ª) de que la derivada normal a lo largo del lado 1-2 ($\eta=0$) debe ser una función de tercer grado en ξ . Las otras dos condiciones de variación cúbica de la derivada normal a lo largo de los lados 1-3 y 2-3 son deducidas a continuación. La derivada normal a una recta $O'P$ que hace un ángulo β con el eje ξ es (fig 4.2)

$$w_n = w_\xi \operatorname{sen} \beta - w_\eta \operatorname{cos} \beta \quad (4.2)$$

de (4.1) en (4.2)

$$\begin{aligned} \omega_n = & (5 \alpha_{16} \xi^4 + 3 \alpha_{17} \xi^2 \eta^2 + 2 \alpha_{18} \xi \eta^3 + \alpha_{19} \eta^4) \operatorname{sen} \beta - (2 \alpha_{17} \xi^3 \eta \\ & + 3 \alpha_{18} \xi^2 \eta^2 + 4 \alpha_{19} \xi \eta^3 + 5 \alpha_{20} \eta^4) \operatorname{cos} \beta + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Los puntos suspensivos indican términos de grado menor al cuarto.

Para que w_n sea un polinomio de tercer grado a lo largo de los lados 1-3 y 2-3 es necesario que los términos de cuarto grado en (4.3) se anulen para valores de ξ y η en dichos lados. En los lados se tiene,

$$\begin{aligned} \xi &= s \operatorname{cos} \beta \pm l \quad (\text{con, } l=a \text{ ó } l=b) \\ \eta &= s \operatorname{sen} \beta \end{aligned} \quad (4.4)$$

reemplazando (4.4) en (4.3) y por la consideración de que los términos de cuarto grado deben anularse, se obtiene

$$\begin{aligned} s^4 [& 5 \alpha_{16} \operatorname{cos}^4 \beta \operatorname{sen} \beta + \alpha_{17} (3 \operatorname{cos}^2 \beta \operatorname{sen}^3 \beta - 2 \operatorname{cos}^4 \beta \operatorname{sen} \beta) + \\ & \alpha_{18} (2 \operatorname{cos} \beta \operatorname{sen}^4 \beta - 3 \operatorname{cos}^3 \beta \operatorname{sen}^2 \beta) + \alpha_{19} (\operatorname{sen}^5 \beta - 4 \operatorname{cos}^2 \beta \operatorname{sen}^3 \beta) - \\ & 5 \alpha_{20} \operatorname{cos} \beta \operatorname{sen}^4 \beta] = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

En el lado 1-3

$$\operatorname{cos} \beta = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad (4.6)$$

reemplazando (4.6) en (4.5)

$$5b^4c \alpha_{16} + (3b^2c^3 - 2b^4c) \alpha_{17} + (2b^2c^4 - 3b^3c^2) \alpha_{18} + (c^5 - 4b^2c^3) \alpha_{19} - 5b^4c^4 \alpha_{20} = 0 \quad (4.7)$$

En el lado 2-3 se tiene

$$\cos \beta = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} \quad \text{sen } \beta = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} \quad (4.8)$$

reemplazando (4.8) en (4.5)

$$5 a^2 c d_{16} + (3 a^2 c^3 - 2 a^4 c) d_{17} + (-2 a c^4 + 3 a^3 c^2) d_{18} + (c^5 - 4 a^2 c^3) d_{19} + 5 a c^4 d_{20} = 0 \quad (4.9)$$

La función de desplazamientos (4.1) puede ser puesto en la forma

$$w = (1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \quad \xi^3 \dots \eta^5) \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{20} \end{Bmatrix}$$

$$\text{o} \quad w = c \alpha \quad (4.10)$$

el vector de desplazamientos nodales es

$$d = \left\{ w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_{23} \quad w_{32} \quad w_{11} \quad w_{22} \quad \dots \quad w_3 \quad \dots \quad w_{11} \quad w_{22} \right\} \quad (4.11)$$

de (4.10) y (4.11)

$$d = C_0 \alpha \quad (4.12)$$

las 18 ecuaciones de (4.12) más las ecuaciones (4.7) y (4.9) dan un sistema de 20 ecuaciones que permiten determinar los 20 coeficientes d_i . Este sistema de ecuaciones puede ser escrito en la forma

$$\begin{Bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

donde la matriz T está dada en la tabla 4.1

T =

1	-b	b ³	-b ³	b ⁴	-b ⁵										
1	-2b	3b ²	-4b ³	5b ⁴											
1	-b	b ²	-b ³												
2	-6b	12b ²	-20b ³												
1	-2b	3b ²													
2	-2b	2b ²													
1	a	a ²	a ³	a ⁴	a ⁵										
1	2a	3a ²	4a ³	5a ⁴											
1	a	a ²	a ³												
2	6a	12a ²	20a ³												
1	2a	3a ²													
2	2a	2a ²	2a ³												
1	c	c ²	c ³	c ⁴											
1	c	c ²	c ³												
1	2c	3c ²	4c ³												
2	2c	2c ²	2c ³												
1	2c	3c ²													
2	6c	12c ²													

TABLA 4.1.

de (4.13)
$$\alpha = T^{-1} \begin{Bmatrix} d \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ó
$$\alpha = [T_1 \ T_2] \begin{Bmatrix} d \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\alpha = T_1 d \quad (4.14)$$

donde T_1 es submatriz constituida por las 18 primeras columnas de T^{-1} . Luego la función de desplazamiento se determina reemplazando (4.14) en (4.10)

$$w = c T_1 d \quad (4.15)$$

de donde
$$\underline{\phi} = c T_1 \quad (4.16)$$

4.2.- MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO

De acuerdo a la sección 2.1, la matriz de rigidez del elemento esta dada por la ecuación

$$k = \int \phi'^t E \phi' dv \quad (4.17)$$

siendo

$$\epsilon = \underline{\phi}' d \quad (2.2)$$

de (2.2) y (4.16)

$$\underline{\phi}' = C' T_1 \quad (4.18)$$

donde C' es una matriz de 3×20 obtenida por derivación apropiada del vector c de acuerdo a (3.10),

(4.18) en (4.17)

$$k = T_1^t k_d T_1 \quad (4.19)$$

donde

$$k_d = \int C'^t E C' dv \quad (4.20)$$

la expresión (4.19) da la matriz de rigidez del elemento para el vector de desplazamientos nodales referido al sistema local de coordenadas $\xi-\eta$. Con el objeto de obtener una expresión que permita calcular en el computador la matriz k_α conocida como matriz de rigidez en coordenadas generalizadas, en lo que sigue se deduce la matriz de rigidez del elemento a partir de la expresión de la energía de deformación para elementos de placa en flexión. Para el caso el caso de un elemento isótropo y de espesor uniforme, la expresión de la energía de deformación es

$$U = \frac{1}{2} D \iint \left[w_{\xi\xi}^2 + w_{\eta\eta}^2 + 2\nu w_{\xi\xi} w_{\eta\eta} + 2(1-\nu) w_{\xi\eta}^2 \right] d\xi d\eta \quad (4.21)$$

donde

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}$$

E es módulo de elasticidad del material, h el espesor del elemento y ν el coeficiente de Poisson.

Se sabe, que la matriz de deformación en términos de la matriz de rigidez k y de los desplazamientos nodales está dado por

$$U = \frac{1}{2} d^t k d \quad (4.22)$$

La expresión (4.1) puede ser escrita en la forma

$$w = \sum_{i=1}^{20} \alpha_i \xi^{m_i} \eta^{n_i} \quad (4.23)$$

entonces, por ejemplo

$$w_{\xi\xi} = \sum \alpha_i m_i (m_i - 1) \xi^{m_i - 2} \eta^{n_i}$$

$$w_{\xi\xi}^2 = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j m_i m_j (m_i - 1) (m_j - 1) \xi^{m_i + m_j - 4} \eta^{n_i + n_j}$$

y la integral del primer término de (4.21) es

$$\iint \omega_{\xi\xi}^2 d\xi d\eta = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j m_i m_j (m_i - 1)(m_j - 1) \iint \xi^{m_i + m_j - 2} \eta^{m_i + m_j} d\xi d\eta$$

notándose la necesidad de una fórmula para la integral

$$F(m, n) = \iint \xi^m \eta^n d\xi d\eta \quad (4.24)$$

que de acuerdo a la fig. 4.1 se tiene

$$F(m, n) = \int_0^a \int_0^{c(1-\frac{\xi}{a})} \xi^m \eta^n d\xi d\eta + \int_0^b \int_0^{c(1-\frac{\xi}{b})} \xi^m \eta^n d\xi d\eta$$

efectuando los cambios de variable apropiados y teniendo presente que

$$\int_0^1 u^m (1-u)^{n+1} du = \frac{m! (n+1)!}{(m+n+2)!}$$

se obtiene la siguiente fórmula

$$F(m, n) = c^{n+1} \left[a^{m+1} - (-b)^{n+1} \right] \frac{m! + n!}{(m+n+2)!} \quad (4.25)$$

luego, (4.25) en (4.26)

$$\iint \omega_{\xi\xi}^2 d\xi d\eta = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j m_i m_j (m_i - 1)(m_j - 1) F(m_i + m_j - 2, n_i + n_j)$$

de un modo similar se obtienen los otros términos de (4.21). debe notarse que la expresión resultante de la energía de deformación es un forma cuadrática en α_i y por lo tanto, puede ser expresada matricialmente por:

$$U = \frac{1}{2} \alpha^t k_\alpha \alpha \quad (4.27)$$

donde, un término genérico de la matriz k_α teniendo en cuenta

el requisito de simetría y la expresión (4.26) y similares resulta

ser

$$k_{\alpha ij} = D \left\{ m_i m_j (m_i - 1)(m_j - 1) F_1 + n_i n_j (n_i - 1)(n_j - 1) F_2 + \right. \\ \left. [v m_i n_j (m_i - 1)(n_j - 1) + v m_j n_i (m_j - 1)(n_i - 1) + 2(1-v) m_i m_j n_i n_j] F_3 \right\} \quad (4.28)$$

siendo:

$$F_1 = F(m_i + m_j - 4, n_i + n_j)$$

$$F_2 = F(m_i + m_j, n_i + n_j - 4)$$

$$F_3 = F(m_i + m_j - 2, n_i + n_j - 2)$$

reemplazando (4.14) en (4.27)

$$u = \frac{1}{2} d^t T_7^t k_{\alpha} T_7 d \quad (4.29)$$

y de acuerdo a (4.22), la matriz de rigidez del elemento es

$$k = T_7^t k_{\alpha} T_7 \quad (4.30)$$

Debe observarse que de acuerdo a (4.28), la matriz k puede ser generada directamente en el computador y en consecuencia no se tiene la necesidad de utilizar la expresión (4.20).

Lo que resta es transformar la matriz de rigidez k para el sistema global de coordenadas $x-y$ con el objeto de poder efectuar el ensamble de la matriz de rigidez de la estructura en forma directa de acuerdo a lo indicado en la sección 2.2.

El vector de desplazamientos nodales en el sistema global es

$$\bar{d} = \left\{ w_1 \ w_{x1} \ w_{y1} \ w_{xx1} \ w_{xy1} \ w_{yy1} \ w_2 \ \dots \ w_3 \ \dots \ w_{y3} \right\} \quad (4.31)$$

y su relación con los desplazamientos nodales referidos al sistema local está dado por

$$\begin{aligned}
 w &= w \\
 w_{\xi} &= w_x \cos \theta + w_y \sin \theta \\
 w_{\eta} &= -w_x \sin \theta + w_y \cos \theta \\
 w_{\xi\xi} &= w_{xx} \cos^2 \theta + w_{xy} 2 \sin \theta \cos \theta + w_{yy} \sin^2 \theta \\
 w_{\xi\eta} &= -w_{xx} \sin \theta \cos \theta + w_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + w_{yy} \sin \theta \cos \theta \\
 w_{\eta\eta} &= w_{xx} \sin^2 \theta - w_{xy} 2 \sin \theta \cos \theta + w_{yy} \cos^2 \theta
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

en consecuencia, para los tres puntos nodales tendremos

$$d = R \bar{d} \tag{4.33}$$

donde

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_1 \end{bmatrix} \tag{4.34}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 & 2sc & s^2 \\ 0 & 0 & 0 & -sc & c^2 - s^2 & sc \\ 0 & 0 & 0 & s^2 & -2sc & c^2 \end{bmatrix}$$

$$s = \sin \theta \quad c = \cos \theta$$

reemplazando (4.33) en (4.29)

$$u = \frac{1}{2} \bar{d}^t R^t T_1^t k_\alpha T_1 R \bar{d}^t = \bar{d}^t k \bar{d}$$

luego,

$$k = R^t T_1^t k_\alpha T_1 R \quad (4.35)$$

es la matriz de rigidez del elemento referido al sistema de coordenadas de la estructura.

4.3.- VECTOR DE CARGA CONSISTENTE

De acuerdo a la sección 2.1, el vector de carga consistente del elemento está dado por

$$q = \int_V \Phi^t f_v dv + \int_s \Phi^t f_s ds$$

que para el caso de carga distribuida por unidad de área y teniendo en cuenta (4.16) y (4.23) resulta

$$q = T_1^t p$$

donde

$$p_i = \int \int f_0 \xi^{m_i} \eta^{n_i} d\xi d\eta$$

que para carga distribuida uniforme q_0 se obtiene

$$p_i = q_0 \int \int \xi^{m_i} \eta^{n_i} d\xi d\eta$$

$$p_i = q_0 F(m_i, n_i) \quad (i=1, 20)$$

El vector de carga consistente del elemento referido al sistema global resulta ser para el caso de carga distribuida uniforme

$$q = R^t T_1^t p$$

4.4.- CONDICIONES DE BORDE

a) Borde simplemente apoyado

Supongamos que el borde 1 - 2 del elemento de la fig. 4.1 está simplemente apoyado y es paralelo al eje x (este caso particular no afecta la generalidad de la condición de borde). La condición geométrica para el borde es

$$(w)_{\eta=0} = 0 \quad (4.37)$$

Por el número de parámetros nodales que se tiene en el elemento T-18, la deflexión w en el lado 1-2 depende del valor de w, w_x y w_{xx} en los nodos 1 y 2. Por un razonamiento similar a lo visto en la sección 3.6, para que se cumpla (4.37), es decir para que w sea cero en todo el borde 1-2, es necesario que en los nodos se imponga las siguientes condiciones

nodo 1	nodo 2
$w_1 = 0$	$w_2 = 0$
$w_{x1} = 0$	$w_{x2} = 0$
$w_{xx1} = 0$	$w_{xx2} = 0$

(4.38)

Las condiciones (4.38) han sido utilizadas en la solución de los ejemplos del capítulo V. Algunos autores consideran además de (4.38) que $w_{yy} = 0$ en los puntos nodales de un borde simplemente apoyado. Debe notarse que ésta condición que hace que el momento sea nulo en los puntos nodales, no garantiza momentos nulos a lo largo de todo el borde.

b) Borde empotrado

si el borde 1-2 esta empotrado, las condiciones geométricas en el borde son:

$$(w)_{\eta=0} = 0 \quad (4.39)$$

$$(w_{\psi})_{\eta=0} = 0$$

que de acuerdo a (4.38) y lo visto en (3.6), las condiciones equivalentes en los nodos resultan ser

nodo 1	nodo 2
$w_1 = 0$	$w_2 = 0$
$w_{x1} = 0$	$w_{x2} = 0$
$w_{\psi 1} = 0$	$w_{y2} = 0$
$w_{xx1} = 0$	$w_{xx2} = 0$
$w_{xy1} = 0$	$w_{xy2} = 0$

(4.40)

Cuando el borde hace un ángulo α con el eje x , una alternativa para introducir las condiciones de borde es efectuar una transformación a nivel de elemento, de forma tal que los desplazamientos nodales en los nodos de borde estén referidos a un sistema de ejes que permita la introducción directa de las condiciones de borde. Así, para un borde simplemente apoyado, tomando un sistema de ejes S - N , donde S es paralelo al borde y N perpendicular, de acuerdo a (4.38) las condiciones de borde en cada nodo serán

$$w = w_s = w_{ss} = 0$$

para el borde simplemente apoyado sobre el eje S .

CAPÍTULO V

PROGRAMACIÓN

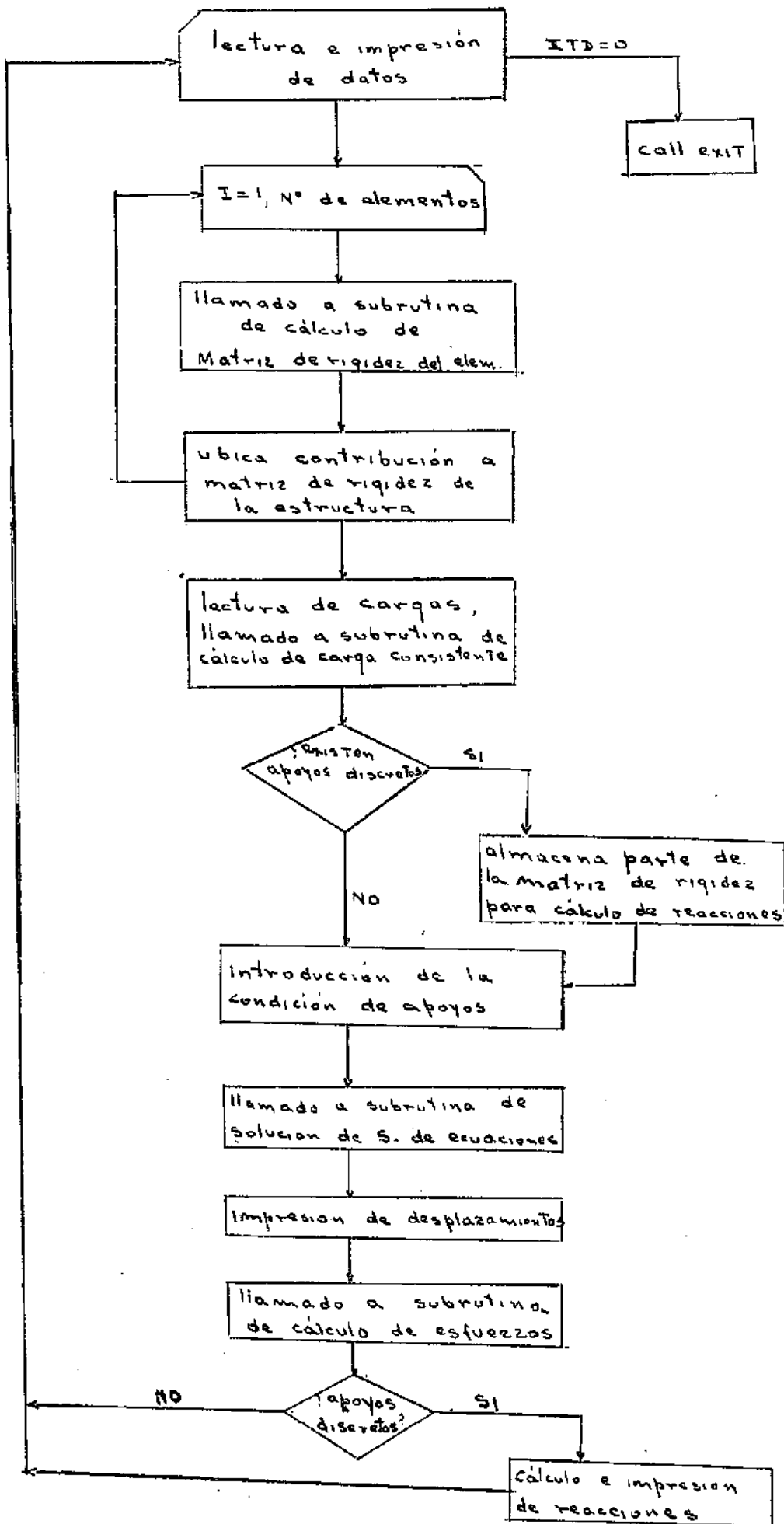
5.1.- PROGRAMA PRINCIPAL

El programa principal que presentamos, fué escrito con la finalidad de disponer de un programa que permita efectuar de manera rápida y eficiente la verificación de las subrutinas de los elementos desarrollados en capítulos anteriores, es decir, está orientado para el análisis de pequeñas estructuras. Dentro del sistema computacional que se disponía, dichos objetivos fueron alcanzados aprovechando la característica de banda de la matriz de rigidez de la estructura y utilizando unicamente la memoria directa del computador.

La capacidad alcanzada dentro de éstas limitaciones, fué suficiente para la solución de los problemas del capítulo VII.

El ensamble de la matriz de rigidez y del vector de cargas de la estructura es realizado por sumación directa de la contribución de cada uno de los elementos en que se ha discretizado la estructura, y de manera tal, que solamente se almacena la media banda superior de la matriz de rigidez.

El diagrama de bloeos del programa principal se muestra en la fig. 5.1. Los nombres de las variables y su significado se indican a continuación.



NN	número de nodos de la estructura
NE	número de elementos de la estructura
$NNDP$	número de nodos con desplazamientos nulos (apoyos)
$NGLN$	número de grados de libertad por nodo
$NNPE$	número de nodos por elemento
JTD	variable que indica: si $JTD > 0$ las coordenadas y definición de elementos son generados por una subrutina (GDATO) $JTD < 0$ el valor de las coordenadas y la definición de los elementos son leídos directamente $JTD = 0$ termina la ejecución del programa.
$NNAD$	número de nodos con apoyo discreto
$X(i), Y(i)$	coordenadas del nodo i de la estructura ($i=1, NN$)
$REL(i, j)$	arreglo que contiene los números de los nodos que definen el elemento i , ($i=1, NE$). El orden debe ser consistente con la deducción de la matriz de rigidez del elemento.
$NA(i)$	número de nodo correspondiente al apoyo i
$JA(i, j)$	variable que indica el tipo de apoyo, si: $JA(i, j) > 0$, no existe restricción en el despla- zamiento j del apoyo i

$IA(i, j) = 0$, el desplazamiento del apoyo i en la "dirección" j es nulo

$IA(i, j) < 0$, el desplazamiento del apoyo i en la dirección j es nulo y además corresponde a un apoyo discreto: (se calculará la reacción en dicho apoyo)

$DX, DY, D1, Dxy$ constantes. (ecuación 3.15)

coeficiente de Poisson

P vector de cargas de la estructura.

SE matriz de rigidez del elemento

S matriz de rigidez de la estructura.

LB número máximo de columnas que puede tener la media-banda de la matriz de rigidez de la estructura.

$JBMAX$ número de columnas que tiene la media-banda de la matriz de rigidez de la estructura.

$XE(i), YE(i)$ coordenadas del nodo i del elemento ($i = 1, NNPE$)

NRC número de nodos con acciones concentradas en la estructura.

NNE número de elementos cargados.

$PT(L)$ acciones concentradas en el nodo k de la estructura.
($k = 1, NRC$; $L = 1, NGLR$)

Q carga distribuida uniforme en la estructura.

SA parte de la matriz de rigidez para el cálculo de reacciones en los apoyos discretos.

R vector de reacciones

D vector de desplazamientos nodales del elemento.

5.2.- SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

La solución del sistema de ecuaciones es efectuado por método directo (GAUSS), teniendo en cuenta las características de banda y simetría de la matriz de coeficientes (matriz de rigidez). En el listado del programa la subrutina de solución del sistema de ecuaciones aparece con el nombre

SUBROUTINE (A,B,N,M)

Argumentos:

- A .. matriz de coeficientes almacenado en forma rectangular (matriz de rigidez de la estructura)
- B .. vector constante (vector de cargas de la estructura) en éste mismo vector se obtienen las incógnitas (desplazamientos)
- N .. número de ecuaciones
- M .. número de columnas de la matriz A.

5:3:= ELEMENTO R-16

Debido a que las matrices de rigidez, esfuerzos y carga consistente fueron explicitadas en el capítulo 333, su programación no presentó ninguna dificultad. Los nombres con que aparecen las subrutinas en el listado y sus argumentos correspondientes se indican a continuación.

5.3.1.- SUBROUTINE R16 (X,Y,DX,DY,D1,DXU,U,S)

Objetivo.- calcular la matriz de rigidez del elemento R-16

Argumentos:

- X, Y .. vectores con las coordenadas de los 4 nodos del elemento. (en orden de acuerdo a la fig. 3.1)
- DX, DY, DT, DXY .. constantes de acuerdo a (3.15)
- V .. coeficiente de Poisson
- S ... matriz de rigidez del elemento

5.3.2

5.3.2.- SUBROUTINE CCR16 (X, Y, NEL, P, M, Q)

Objetivo.- Calcular el vector de carga consistente del elemento y simultaneamente ubicar su contribución en el vector de cargas de la estructura.

Argumentos:

- X, Y .. vectores con las coordenadas de los 4 nodos del elemento (en orden de acuerdo a fig. 3.1)
- $NEL(i, j)$ arreglo que contiene los números de los 4 nodos que definen el elemento i ($j = 1, 4$)
- P vector de carga consistente de la estructura.
- M número del elemento
- Q intensidad de la carga distribuida uniforme que actúa sobre el elemento M .

5.3.3.- SUBROUTINE (X, Y, DX, DY, DT, DXY, V, D, M, NEL)

Objetivo.- Calcular los esfuerzos (M_x, M_y, M_{xy}) en los 4 puntos nodales del elemento M .

Argumentos:

- X, Y vectores que contienen las coordenadas de los 4 puntos nodales del elemento.
- DX, DY, DZ, DXY constantes del elemento (3.15)
- ν coeficiente de Poisson
- D vector de desplazamientos del elemento (3.2)
- NEC arreglo que contiene los números de los 4 nodos que definen el elemento.

5.4.- ELEMENTO ET-18

De acuerdo a la formulación del capítulo IV, la matriz de rigidez y el vector de carga consistente del elemento pueden ser generados directamente dentro del computador. Por tener a las segundas derivadas de w como desplazamientos nodales, los esfuerzos en los vértices del elemento pueden ser calculados directamente en el programa principal y por lo tanto a diferencia de lo que se presenta en el elemento R-16, no es necesario una subrutina para el cálculo de esfuerzos. Para no tener que duplicar cálculos, la matriz de rigidez y el vector de carga consistente son obtenidos en una sola subrutina que aparece en el listado con el nombre T18. La subrutina FF que es llamada por T18 efectúa el cálculo de la función expresada en (4.25). Lo único de especial que se presentó en la programación de la subrutina T18 fué la necesidad de tener en consideración que la matriz T es mal condicionada. Es por ésta particularidad que presentamos el listado de la subrutina T182 que se utilizó para invertir T .

5.4.1.- SUBROUTINE T18 (X, Y, E, U, H, S, Q, KJ, NEL, P)

Objetivos:

- a) Calcular la matriz de rigidez del elemento
- b) Calcular el vector de carga consistente
- c) Ubicar la contribución en el vector de carga de la estructura.

Argumentos:

- X, Y coordenadas de los 3 puntos nodales del elemento
 (en sentido anti-horario de acuerdo a la fig. 4.1)
- E módulo de elasticidad del elemento
- U coeficiente de Poisson
- H espesor del elemento
- S matriz de rigidez del elemento
- Q intensidad de la carga distribuida uniforme en el elemento.
- KJ número del elemento
- P vector de cargas de la estructura.

5.4.2.- SUBROUTINE FF (A, B, C, M, N, F)

Objetivo.- Calcular la función dada en (4.25)

Argumentos:

- A, B, C dimensiones del elemento (de acuerdo a fig. 4.1)
- M, N exponentes de acuerdo a (4.25)
- FF función que se calcula

5.4.3.- SUBROUTINE INW2 (A, N)

Objetivo.- calcular la inversa de la matriz A . (T)

Argumentos:

A matriz que se desea invertir. Es remplazada por su inversa

N orden de la matriz

método.- Procedimiento de GAUSS, utilizando la técnica de pivot máximo.

5.5.- SUBROUTINAS ADICIONALES

Con el objeto de simplificar la entrada de datos, es conveniente disponer de subrutinas para generar automáticamente dentro del computador las coordenadas e incidencias de los elementos para determinados tipos de mallas. Un ejemplo bastante simple es la subrutina GDATA que fué escrita para el caso de mallas con elementos rectangulares de los ejemplos del capítulo VII.

SUBROUTINE GDATA (NN, NE, X, Y, NEL)

Objetivo.- Generar las coordenadas e incidencias de una placa rectangular discretizada en $N \times M$ elementos rectangulares de acuerdo a la fig. 5.2

Argumentos:

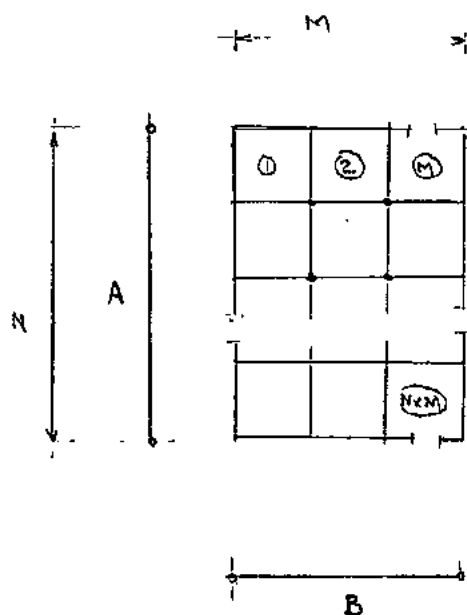
NN número de nodos de la estructura

NE número de elementos de la estructura

X, Y coordenadas de los nodos de la estructura

NEL arreglo que contiene los números de los nodos que definen los elementos de la estructura.

Datos.- Esta subrutina lee el valor de las variables N, M, A, B que se definen en la fig. 1.1.




```
// JOB T OOFF IOFF OEC3
```

```
JACK
```

```
8004,711706
```

```
// FOR
```

```
*LIST SOURCE PROGRAM
```

```
*ONE WORD INTEGERS
```

```
C
```

```
C.....SUBROUTINA PARA CALCULO DE MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO R-16
```

```
C
```

```
C..... JACK LOPEZ A.
```

```
COPPE/UFRJ
```

```
C
```

```
C
```

```
SUBROUTINE R16(X,Y,DX,DY,D1,DXY,V,S)
```

```
C
```

```
DIMENSION S(16,16),X(4),Y(4)
```

```
A=X(4)-X(1)
```

```
B=Y(2)-Y(1)
```

```
AB=A*B
```

```
P=DX*(B/A)**2
```

```
Q=DY*(A/B)**2
```

```
S(1,1)=(156.*(P+Q)/35.+72.*D1/25.+144.*DXY/25.)/AB
```

```
S(2,1)=(22.*P/35.+78.*Q/35.+36.*D1/25.+12.*DXY/25.)/A
```

```
S(2,2)=(4.*P/35.+52.*Q/35.+8.*D1/25.+16.*DXY/25.)*B/A
```

```
S(3,1)=(-78.*P/35.-22.*Q/35.-36.*D1/25.-12.*DXY/25.)/B
```

```
S(3,2)=(-11.*P/35.-11.*Q/35.-61.*D1/50.-DXY/25.)
```

```
S(4,1)= 11.*P/35.+11.*Q/35.+11.*D1/50.+DXY/25.
```

```
S(4,2)=(-2.*P/35.+22.*Q/105+12.*D1/75.+4.*DXY/75.)*B
```

```
S(5,1)=(54.*P/35.-156.*Q/35.-72.*D1/25.-144.*DXY/25.)/AB
```

```
S(5,2)=(13.*P/35.-78.*Q/35.-6.*D1/25.-12.*DXY/25.)/A
```

```
S(6,1)=(-13.*P/35.+78.*Q/35.+6.*D1/25.+12.*DXY/25.)/A
```

```
S(6,2)=(-3.*P/35.+26.*Q/35.-2.*D1/25.-4.*DXY/25.)*B/A
```

```
S(7,1)=(-27.*P/35.+22.*Q/35.+36.*D1/25.+12.*DXY/25.)/B
```

```
S(7,2)=(-13.*P/70.+11.*Q/35.+6.*D1/50.+DXY/25.)
```

```
S(8,1)=(-13.*P/70.+11.*Q/35.+6.*D1/50.+DXY/25.)
```

```
S(8,2)=(-3.*P/70.+11.*Q/105-2.*D1/50.-DXY/75.)*B
```

```
S(9,1)=(-54.*P/35.-54.*Q/35.+72.*D1/25.+144.*DXY/25.)/AB
```

```
S(9,2)=(-13.*P/35.-27.*Q/35.+6.*D1/25.+12.*DXY/25.)/A
```

```
S(10,1)=(13.*P/35.+27.*Q/35.-6.*D1/25.-12.*DXY/25.)/A
```

```
S(10,2)=(3.*P/35.+9.*Q/35.+2.*D1/25.+4.*DXY/25.)*B/A
```

```
S(11,1)=(-27.*P/35.-13.*Q/35.+6.*D1/25.+12.*DXY/25.)/B
```

```
S(11,2)=(-13.*P/70.-13.*Q/70.+D1/50.+DXY/25.)
```

```
S(12,1)=(-13.*P/70.-13.*Q/70.+D1/50.+DXY/25.)
```

```
S(12,2)=(-3.*P/70.-13.*Q/210.-D1/150.-DXY/75.)*B
```

```
S(13,1)=(-156.*P/35.+54.*Q/35.-72.*D1/25.-144.*DXY/25.)/AB
```

```
S(13,2)=(-22.*P/35.+27.*Q/35.-36.*D1/25.-12.*DXY/25.)/A
```

```
S(14,1)=(-22.*P/35.+27.*Q/35.-36.*D1/25.-12.*DXY/25.)/A
```

```
S(14,2)=(-4.*P/35.+18.*Q/35.-8.*D1/25.-16.*DXY/25.)*B/A
```

```
S(15,1)=(-78.*P/35.+13.*Q/35.-6.*D1/25.-12.*DXY/25.)/B
```

```
S(15,2)= -11.*P/35.+13.*Q/70.-6.*D1/50.-DXY/25.
```

```
S(16,1)= 11.*P/35.-13.*Q/70.+6.*D1/50.+DXY/25.
```

```
S(16,2)=(2.*P/35.-13.*Q/105+2.*D1/75.+4.*DXY/75.)*B
```

```
S(3,3)=(52.*P/35.+4.*Q/35.+8.*D1/25.+16.*DXY/25.)*A/B
```

$S(4,3) = (-22 * P/105 - 2 * Q/35 - 12 * D1/75 - 4 * DXY/75) * A$
 $S(4,4) = (4 * P/105 + 4 * Q/105 + 8 * D1/225 + 16 * DXY/225) * AB$
 $S(5,3) = (-27 * P/35 + 22 * Q/35 + 36 * D1/25 + 12 * DXY/25) / B$
 $S(5,4) = (13 * P/70 - 11 * Q/35 - 6 * D1/50 - DXY/25)$
 $S(6,3) = 13 * P/70 - 11 * Q/35 - 6 * D1/50 - DXY/25$
 $S(6,4) = (-3 * P/70 + 11 * Q/105 - 2 * D1/50 - DXY/75) * B$
 $S(7,3) = (18 * P/35 - 4 * Q/35 - 8 * D1/25 - 16 * DXY/25) * A/B$
 $S(7,4) = (-13 * P/105 + 2 * Q/35 + 2 * D1/75 + 4 * DXY/75) * A$
 $S(8,3) = (13 * P/105 - 2 * Q/35 - 2 * D1/75 - 4 * DXY/75) * A$
 $S(8,4) = (-P/35 + 2 * Q/105 - 2 * D1/225 - 4 * DXY/225) * AB$
 $S(9,3) = (27 * P/35 + 13 * Q/35 - 6 * D1/25 - 12 * DXY/25) / B$
 $S(9,4) = (-13 * P/70 - 13 * Q/70 + D1/50 + DXY/25)$
 $S(10,3) = -13 * P/70 - 13 * Q/70 + D1/50 + DXY/25$
 $S(10,4) = (3 * P/70 + 13 * Q/210 + D1/150 + DXY/75) * B$
 $S(11,3) = (9 * P/35 + 3 * Q/35 + 2 * D1/25 + 4 * DXY/25) * A/B$
 $S(11,4) = (-13 * P/210 - 3 * Q/70 - D1/150 - DXY/75) * A$
 $S(12,3) = (13 * P/210 + 3 * Q/70 + D1/150 + DXY/75) * A$
 $S(12,4) = (-P/70 - Q/70 + D1/450 + DXY/225) * AB$
 $S(13,3) = (78 * P/35 - 13 * Q/35 + 6 * D1/25 + 12 * DXY/25) / B$
 $S(13,4) = (-11 * P/35 + 13 * Q/70 - 6 * D1/50 - DXY/25)$
 $S(14,3) = (11 * P/35 - 13 * Q/70 + 6 * D1/50 + DXY/25)$
 $S(14,4) = (-2 * P/35 + 13 * Q/105 - 2 * D1/75 - 4 * DXY/75) * B$
 $S(15,3) = (26 * P/35 - 3 * Q/35 - 2 * D1/25 - 4 * DXY/25) * A/B$
 $S(15,4) = (-11 * P/105 + 3 * Q/70 + 2 * D1/50 + DXY/75) * A$
 $S(16,3) = (-11 * P/105 + 3 * Q/70 + 2 * D1/50 + DXY/75) * A$
 $S(16,4) = (2 * P/105 - Q/35 - 2 * D1/225 - 4 * DXY/225) * AB$
 $S(5,5) = S(1,1)$
 $S(6,5) = -S(2,1)$
 $S(6,6) = S(2,2)$
 $S(7,5) = S(3,1)$
 $S(7,6) = -S(3,2)$
 $S(7,7) = S(3,3)$
 $S(8,5) = -S(4,1)$
 $S(8,6) = S(4,2)$
 $S(8,7) = -S(4,3)$
 $S(8,8) = S(4,4)$
 $S(9,5) = S(13,1)$
 $S(9,6) = -S(13,2)$
 $S(9,7) = S(13,3)$
 $S(9,8) = -S(13,4)$
 $S(9,9) = S(1,1)$
 $S(10,5) = -S(14,1)$
 $S(10,6) = S(14,2)$
 $S(10,7) = -S(14,3)$
 $S(10,8) = S(14,4)$
 $S(10,9) = -S(2,1)$
 $S(10,10) = S(2,2)$
 $S(11,5) = S(15,1)$
 $S(11,6) = -S(15,2)$
 $S(11,7) = S(15,3)$

$S(11,8)=-S(15,4)$
 $S(11,9)=-S(3,1)$
 $S(11,10)=S(3,2)$
 $S(11,11)=S(3,3)$
 $S(12,5)=-S(16,1)$
 $S(12,6)=S(16,2)$
 $S(12,7)=-S(16,3)$
 $S(12,8)=S(16,4)$
 $S(12,9)=S(4,1)$
 $S(12,10)=-S(4,2)$
 $S(12,11)=-S(4,3)$
 $S(12,12)=S(4,4)$
 $S(13,5)=S(9,1)$
 $S(13,6)=-S(9,2)$
 $S(13,7)=S(9,3)$
 $S(13,8)=-S(9,4)$
 $S(13,9)=S(5,1)$
 $S(13,10)=-S(5,2)$
 $S(13,11)=-S(5,3)$
 $S(13,12)=S(5,4)$
 $S(13,13)=S(1,1)$
 $S(14,5)=-S(10,1)$
 $S(14,6)=S(10,2)$
 $S(14,7)=-S(10,3)$
 $S(14,8)=S(10,4)$
 $S(14,9)=-S(6,1)$
 $S(14,10)=S(6,2)$
 $S(14,11)=S(6,3)$
 $S(14,12)=-S(6,4)$
 $S(14,13)=S(2,1)$
 $S(14,14)=S(2,2)$
 $S(15,5)=S(11,1)$
 $S(15,6)=-S(11,2)$
 $S(15,7)=S(11,3)$
 $S(15,8)=-S(11,4)$
 $S(15,9)=-S(7,1)$
 $S(15,10)=S(7,2)$
 $S(15,11)=S(7,3)$
 $S(15,12)=-S(7,4)$
 $S(15,13)=-S(3,1)$
 $S(15,14)=-S(3,2)$
 $S(15,15)=S(3,3)$
 $S(16,5)=-S(12,1)$
 $S(16,6)=S(12,2)$
 $S(16,7)=-S(12,3)$
 $S(16,8)=S(12,4)$
 $S(16,9)=S(8,1)$
 $S(16,10)=-S(8,2)$
 $S(16,11)=-S(8,3)$
 $S(16,12)=S(8,4)$

```
S(16,13)=-S(4,1)
S(16,14)=-S(4,2)
S(16,15)=S(4,3)
S(16,16)=S(4,4)
DO 1 I=1,16
DO 1 J=1,16
1 S(I,J)=S(J,I)
RETURN
END
```

```
// DUP
```

```
*STORE      WS  UA  R16
```

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
C
C.....SUBROUTINA PARA CALCULO DE VECTOR DE CARGA CONSISTENTE R-16
C
C..... JACK LOPEZ A.                                COPPE/UFRJ
C
SUBROUTINE CCR16(X,Y,NEL,P,M,Q)
C
DIMENSION X(4),Y(4),P(200),NEL(100,4)
A=X(4)-X(1)
B=Y(2)-Y(1)
N1=4*NEL(M,1)
N2=4*NEL(M,2)
N3=4*NEL(M,3)
N4=4*NEL(M,4)
QAB=Q*A*B
P(N1-3)=P(N1-3)+.25*QAB
P(N1-2)=P(N1-2)+QAB*B/24.
P(N1-1)=P(N1-1)-QAB*A/24.
P(N1)=P(N1)+QAB*A*B/144.
P(N2-3)=P(N2-3)+.25*QAB
P(N2-2)=P(N2-2)-QAB*B/24.
P(N2-1)=P(N2-1)-QAB*A/24.
P(N2)=P(N2)-QAB*A*B/144.
P(N3-3)=P(N3-3)+.25*QAB
P(N3-2)=P(N3-2)-QAB*B/24.
P(N3-1)=P(N3-1)+QAB*A/24.
P(N3)=P(N3)+QAB*A*B/144.
P(N4-3)=P(N4-3)+.25*QAB
P(N4-2)=P(N4-2)+QAB*B/24.
P(N4-1)=P(N4-1)+QAB*A/24.
P(N4)=P(N4)-QAB*A*B/144.
RETURN
END
// DUP
*STORE      WS  UA  CCR16

```

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
C
C
C.....SUBROUTINA PARA RESOLVER UN SISTEMA DE N ECUACIONES
C.....  MATRIZ DE COEFICIENTES EN FORMA DE BANDA  NXM
C
C.....  JACK LOPEZ A.                COPPE/UFRJ
C
      SUBROUTINE SSEB2 (A,B,N,M)
C
      DIMENSION A(200,36),B(200)
      NMI=N-1
      DO 3 I=1,NMI
      DO 3 J=2,M
      II=I+J-1
      IF(II-N)1,1,3
1  F=-A(I,J)/A(I,1)
      B(II)=B(II)+F*B(I)
      MJ1=M-J+1
      DO 2 K=1,MJ1
      L=K+J-1
2  A(II,K)=A(II,K)+F*A(I,L)
3  CONTINUE -----
      B(N)=B(N)/A(N,1)
      DO 5 L=2,N
      I=N-L+1
      C=B(I)
      DO 4 K=2,M
      IK1=I+K-1
      IF(IK1-N)4,4,5
4  C=C-A(I,K)*B(IK1)
5  B(I)=C/A(I,1)
      RETURN
      END
// DUP
*STORE      WS  UA  SSEB2

```

```

// FOR
#LIST SOURCE PROGRAM
#ONE WORD INTEGERS
C
C.....SUBROUTINA PARA CALCULO DE ESFUERZOS EN ELEMENTO R-16
C
C.....JACK LOPEZ A.                                COPPE/UFRJ
C
SUBROUTINE ESR16(X,Y,DX,DY,D1,DXY,V,D,M,NEL)
C
REAL N,N1
DIMENSION X(4),Y(4),D(16),S(3,16),ES(3),G(3,3),GS(3,16)
DIMENSION NEL(100,4)
A=X(4)-X(1)
B=Y(2)-Y(1)
AB=A*B
A2=A*A
B2=B*B
WRITE(5,19)M
19 FORMAT(//' ELEMENTO',I3/, ' NODO',6X,'MX',8X,'MY',8X,'MXY'//)
G(1,1)=DX
G(2,1)=D1
G(1,2)=D1
G(2,2)=DY
-----G(3,3)=DXY-----
G(3,1)=0.
G(3,2)=0.
G(1,3)=0.
G(2,3)=0.
DO 4 IN=1,4
F=(X(IN)-X(1))/A
N=(Y(IN)-Y(1))/B
N1=1.-N
F1=1.-F
S(1,1)=6.*(1.-2.*F)*(1.+2.*N)*N1*N1/A2
S(1,2)=6.*(1.-2.*F)*N*N1*N1*B/A2
S(1,3)=-2.*(2.-3.*F)*(1.+2.*N)*N1*N1/A
S(1,4)=2.*(2.-3.*F)*N*N1*N1*B/A
S(1,5)=6.*(1.-2.*F)*(3.-2.*N)*N*N/A2
S(1,6)=-6.*(1.-2.*F)*N1*N*N*B/A2
S(1,7)=-2.*(2.-3.*F)*(3.-2.*N)*N*N/A
S(1,8)=-2.*(2.-3.*F)*N1*N*N*B/A
S(1,9)=-6.*(1.-2.*F)*(3.-2.*N)*N*N/A2
S(1,10)=6.*(1.-2.*F)*N1*N*N*B/A2
S(1,11)=-2.*(1.-3.*F)*(3.-2.*N)*N*N/A
S(1,12)=-2.*(1.-3.*F)*N1*N*N*B/A
S(1,13)=-6.*(1.-2.*F)*(1.+2.*N)*N1*N1/A2
S(1,14)=-6.*(1.-2.*F)*N*N1*N1*B/A2
S(1,15)=-2.*(1.-3.*F)*(1.+2.*N)*N1*N1/A
S(1,16)=2.*(1.-3.*F)*N*N1*N1*B/A

```

```

S(2,1)=6.*(1.+2.*F)*F1*F1*(1.-2.*N)/B2
S(2,2)=2.*(1.+2.*F)*F1*F1*(2.-3.*N)/B
S(2,3)=-6.*F*F1*F1*(1.-2.*N)*A/B2
S(2,4)=2.*F*F1*F1*(2.-3.*N)*A/B
S(2,5)=-6.*(1.+2.*F)*F1*F1*(1.-2.*N)/B2
S(2,6)=2.*(1.+2.*F)*F1*F1*(1.-3.*N)/B
S(2,7)=6.*F*F1*F1*(1.-2.*N)*A/B2
S(2,8)=2.*F*F1*F1*(1.-3.*N)*A/B
S(2,9)=-6.*(3.-2.*F)*F*F*(1.-2.*N)/B2
S(2,10)=2.*(3.-2.*F)*F*F*(1.-3.*N)/B
S(2,11)=-6.*F1*F*F*(1.-2.*N)*A/B2
S(2,12)=-2.*F1*F*F*(1.-3.*N)*A/B
S(2,13)=6.*(3.-2.*F)*F*F*(1.-2.*N)/B2
S(2,14)=2.*(3.-2.*F)*F*F*(2.-3.*N)/B
S(2,15)=6.*F1*F*F*(1.-2.*N)*A/B2
S(2,16)=-2.*F1*F*F*(2.-3.*N)*A/B
S(3,1)=-72.*F*F1*N*N1/AB
S(3,2)=12.*F*F1*N1*(1.-3.*N)/A
S(3,3)=-12.*F1*(1.-3.*F)*N*N1/B
S(3,4)=-2.*F1*(1.-3.*F)*N1*(1.-3.*N)
S(3,5)=72.*F*F1*N*N1/AB
S(3,6)=-12.*F*F1*N*(2.-3.*N)/A
S(3,7)=12.*F1*(1.-3.*F)*N*N1/B
S(3,8)=2.*F1*(1.-3.*F)*N*(2.-3.*N)
S(3,9)=-72.*F*F1*N*N1/AB
S(3,10)=12.*F*F1*N*(2.-3.*N)/A
S(3,11)=-12.*F*(2.-3.*F)*N*N1/B
S(3,12)=-2.*F*(2.-3.*F)*N*(2.-3.*N)
S(3,13)=72.*F*F1*N*N1/AB
S(3,14)=-12.*F*F1*N1*(1.-3.*N)/A
S(3,15)=12.*F*(2.-3.*F)*N*N1/B
S(3,16)=2.*F*(2.-3.*F)*N1*(1.-3.*N)
DO 2 I=1,3
DO 2 J=1,16
GS(I,J)=0.
DO 1 K=1,3
1 GS(I,J)=GS(I,J)+G(I,K)*S(K,J)
2 CONTINUE
DO 3 I=1,3
ES(I)=0.
DO 3 K=1,16
3 ES(I)=ES(I)+GS(I,K)*D(K)
L=NEL(M,IN)
4 WRITE(5,20)L,ES(1),ES(2),ES(3)
20 FORMAT (I5,3F10.3)
RETURN
END

```

```
// DUP
*STORE
```

```
WS UA ESR16
```



```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
C
C.....SUBROUTINA PARA GENERACION DE DATOS..MALLA RECTANGULAR.....
C
C..... JACK LOPEZ A.                                COPPE/UFRJ
C
SUBROUTINE GDATO(NN,NE,X,Y,NEL)
C
DIMENSION X(100),Y(100),NEL(100,4)
READ(8,100) N,M,A,B
EN=N
EM=M
DX=A/EM
DY=B/EN
N1=N+1
M1=M+1
K=0
NN=N1*M1
WRITE(5,101)
DO 1 I=1,N1
FY=I-1
H=B-FY*DY
DO 1 J=1,M1-----
K=K+1
FX=J-1
X(K)=FX*DX
1 Y(K)=H
WRITE(5,102) (I,X(I),Y(I),I=1,NN)
K=0
DO 2 I=1,N
DO 2 J=1,M
K=K+1
NEL(K,1)=I*M1+J
NEL(K,2)=(I-1)*M1+J
NEL(K,3)=NEL(K,2)+1
2 NEL(K,4)=NEL(K,1)+1
NE=N*M
WRITE(5,103)
WRITE(5,104) (I,(NEL(I,J),J=1,4),I=1,NE)
100 FORMAT(2I5,2F10.2)
101 FORMAT(//' C O O R D E N A D A S   D E   N O D O S'//
1' NDDO',6X,'X',9X,'Y'//)
102 FORMAT(I5,2F10.2)
103 FORMAT(//' D E F I N I C I O N   D E   E L E M E N T O S'//,
1' M', ' 1', ' 2', ' 3', ' 4'//)
104 FORMAT(5I5)
RETURN
END

```

// DUP
#STORE

WS UA GDATA

```

// FOR
*LIST SOURCE PROGRAM
*ONE WORD INTEGERS
*IOCS(2501READER,1403PRINTER)
C
C.....PROGRAMA PRINCIPAL..METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....
C.....      ANALISIS DE PLACAS SOMETIDAS A FLEXION           .....
C.....      ELEMENTO RECTANGULAR COMPATIBLE .R-16.           .....
C
C.....JACK LOPEZ A.                                           COPPE/UFRJ.....
C
  DIMENSION X(100),Y(100),NEL(100,4),S(200,36),P(200),XE(4),YE(4),
  1 NA(30),R(12),SE(16,16),D(16),IA(30,4),P1(4),SA(12,72)
  LB=36
  L1=8
  L2=5
  WRITE(L2,130)
  WRITE(L2,131)
  3 WRITE(L2,130)
  READ(L1,132)
  WRITE(L2,132)
  WRITE(L2,130)
  READ(L1,100)  NN,NE,NNDP,NGLN,NNPE,ITD,NNAD
  WRITE(L2,100) NN,NE,NNDP,NGLN,NNPE,ITD,NNAD
  IF(ITD)4,3671,5-----
  5 CALL GDATA(NN,NE,X,Y,NEL)
  GO TO 8
  4 WRITE(L2,101)
  READ (L1,102) (I,X(I),Y(I),I=1,NN)
  WRITE(L2,103)
  WRITE(L2,102) (I,X(I),Y(I), I=1,NN)
  WRITE(L2,104)
  DO 9 K=1,NE
  READ(L1,105)  I,(NEL(I,J),J=1,4)
  9 WRITE(L2,105) I,(NEL(I,J),J=1,4)
  8 WRITE(L2,106)
  NCC=1
  DO 10 I=1,NNDP
  READ(L1,107)  NA(I),(IA(I,J),J=1,4)
  10 WRITE(L2,107) NA(I),(IA(I,J),J=1,4)
  WRITE(L2,110)
  READ (L1,121) DX,DY,D1,DXY,V
  WRITE(L2,121) DX,DY,D1,DXY,V
  NN2=NN*NGLN
  DO 16 I=1,NN2
  P(I)=0.
  DO 16 J=1,LB
  16 S(I,J)=0.
  JBMAX=0

```

C.....MATRIZ DE RIGIDEZ DE LA ESTRUCTURA

```

C
DO 27 KJ=1,NE
DO 18 I=1,NNPE
J=NEL(KJ,I)
XE(I)=X(J)
18 YE(I)=Y(J)
CALL R16(XE,YE,DX,DY,D1,DXY,V,SE)
DO 27 L=1,NNPE
DO 27 K=1,NNPE
DO 26 J=1,NGLN
J1=NGLN*(NEL(KJ,L)-1)+J
JE=NGLN*(L-1)+J
DO 26 I=1,NGLN
IB=NGLN*(NEL(KJ,K)-1)+I
IE=NGLN*(K-1)+I
JB=J1-IB+I
IF(JB)26,26,23
23 IF(JB-JBMAX)25,25,24
24 JBMAX=JB
IF(JBMAX-LB)25,25,60
25 S(IB,JB)=S(IB,JB)+SE(IE,JE)
26 CONTINUE
27 CONTINUE

```

C
C.....CARGAS

```

C
READ (L1,100) NNC,NMC

```

C.....CARGAS CONCENTRADAS EN LA ESTRUCTURA

```

C
IF(NNC)41,41,40
40 WRITE(L2,113)
DO 17 I=1,NNC
READ(L1,116) K,(P1(L),L=1,NGLN)
WRITE(L2,116) K,(P1(L),L=1,NGLN)
DO 15 L=1,NGLN
IB=NGLN*(K-1)+L
15 P(IB)=P1(L)
17 CONTINUE

```

C.....CARGA EN LOS ELEMENTOS

```

C
41 IF(NMC)43,43,44
44 WRITE(L2,114)
READ (L1,117) Q
DO 45 M=1,NE
WRITE(L2,102) M,Q
DO 7 I=1,NNPE
J=NEL(M,I)

```

```

      XE(I)=X(J)
      7 YE(I)=Y(J)
      CALL CCR16(XE,YE,NEL,P,M,Q)
      45 CONTINUE
C
C.....MATRIZ PARA CALCULO DE REACCIONES
C
      43 IF(NNAD)47,47,39
      39 IR=0
      DO 30 I=1,12
      30 R(I)=0.
      DO 28 I=1,NNDP
      DO 28 J=1,NGLN
      IF(IA(I,J))31,28,28
      31 IB=NGLN*(NA(I)-1)+J
      IR=IR+1
      R(IR)=-P(IB)
      DO 46 KJ=2,JBMAX
      JK=JBMAX+KJ
      SA(IR,JK-1)=S(IB,KJ)
      JL=IB-KJ+1
      IF(JL)46,46,33
      33 JMK=JBMAX-KJ+1
      SA(IR,JMK)=S(JL,KJ)
      46 CONTINUE
      SA(IR,JBMAX)=S(IB,1)
      28 CONTINUE
C
C.....INTRODUCCION DE DESPLAZAMIENTOS NULOS
C
      47 DO 38 I=1,NNDP
      DO 38 J=1,NGLN
      IF(IA(I,J))32,32,38
      32 IB=NGLN*(NA(I)-1)+J
      DO 34 KJ=2,JBMAX
      S(IB,KJ)=0.
      JL=IB-KJ+1
      IF(JL)34,34,37
      37 S(JL,KJ)=0.
      34 CONTINUE
      S(IB,1)=1.
      P(IB)=0.
      38 CONTINUE
C
C.....SOLUCION DEL SISTEMA DE ECUACIONES
C
      CALL SSEB2(S,P,NN2,JBMAX)
C
C.....IMPRESION DE DESPLAZAMIENTOS
C

```

```

WRITE(L2,130)
WRITE(L2,118)
WRITE(L2,119) (N,P(4*N-3), P(4*N-2),P(4*N-1),P(4*N),N=1,NN)

```

```

C
C.....CALCULO DE ESFUERZOS

```

```

C
WRITE(L2,133)
DO 48 M=1,NE
DO 42 I=1,NNPE
J=NEL(M,I)
XE(I)=X(J)
YE(I)=Y(J)
D(4*I-3)=P(4*J-3)
D(4*I-2)=P(4*J-2)
D(4*I-1)=P(4*J-1)
42 D(4*I)=P(4*J)
CALL ESR16(XE,YE,DX,DY,D1,DXY,V,D,M,NEL)
48 CONTINUE

```

```

C
C.....CALCULO DE REACCION EN APOYOS DISCRETOS

```

```

C
IF(NNAD)3,3,49
49 WRITE(L2,134)
IR=1
IR=0 -----
DO 55 I=1,NNDP
IF(IA(I,1))58,55,55
58 DO 53 J=1,NGLN
IF(IA(I,J))50,57,57
50 IR=IR+1
IB=NGLN*(NA(I)-1)+J
JB2=2*JBMAX-1
DO 52 L=1,JB2
ID=IB-JBMAX+L
IF(ID)52,52,51
51 IF(ID-NN2)54,54,53
54 R(IR)=R(IR)+SA(IR,L)*P(ID)
52 CONTINUE
57 IF(J-NGLN)53,56,56
56 WRITE(L2,116) NA(I),(R(K),K=IR1,IR)
53 CONTINUE
IR1=IR+1
55 CONTINUE
GO TO 3
100 FORMAT(8I5)
101 FORMAT(8I5)
102 FORMAT(I5,2F10.2)
103 FORMAT(///' C O O R D E N A D A S D E L O S N O D O S'//,
1' NODO',6X,'X',9X,'Y'//)
104 FORMAT(///' D E F I N I C I O N D E E L E M E N T O S'//,

```


.....SUBROUTINA PARA CALCULO DE MATRIZ DE RIGIDEZ +
VECTOR DE CARGA CONSISTENTE DEL ELEMENTO T-18

..... JACK LOPEZ A.

COPPE/UFRJ

SUBROUTINE T18(X,Y,E,V,H,S ,Q,KJ,NEL,P)

IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)

REAL*8 MI,MJ,NI,NJ

DIMENSION X(3),Y(3),M(20),N(20),S(20,20),T(20,20),R(20,20)

DIMENSION NEL(100,3),P(126),PI(20),TPI(18)

DATA M/0,1,0,2,1,0,3,2,1,0,4,3,2,1,0,5,3,2,1,0/,N/0,0,1,0,1,2,0,1,
 1 2,3,0,1,2,3,4,0,2,3,4,5/

AB=((X(2)-X(1))**2+(Y(2)-Y(1))**2)**0.5

A=((X(2)-X(3))*(X(2)-X(1))+(Y(2)-Y(3))*(Y(2)-Y(1)))/AB

B=((X(3)-X(1))*(X(2)-X(1))+(Y(3)-Y(1))*(Y(2)-Y(1)))/AB

C=((X(2)-X(1))*(Y(3)-Y(1))-(X(3)-X(1))*(Y(2)-Y(1)))/AB

D=E*H**3/(12.*(1.-V*V))

L2=5

DO 1 I=1,20

IF(Q)18,19,18

18 MI=M(I)

NI=N(I)

CALL FF(A,B,C,MI,NI,F) -----

PI(I)=Q*F

19 DO 1 J=1,1

MI=M(I)+M(J)-4

NI=N(I)+N(J)

CALL FF(A,B,C,MI,NI,F1)

MI=M(I)+M(J)

NI=N(I)+N(J)-4

CALL FF(A,B,C,MI,NI,F2)

MI=M(I)+M(J)-2

NI=N(I)+N(J)-2

CALL FF(A,B,C,MI,NI,F3)

MI=M(I)

NI=N(I)

MJ=M(J)

NJ=N(J)

S(I,J)=D*MI*MJ*(MI-1.)*(MJ-1.)*F1+D*NI*NJ*(NI-1.)*(NJ-1.)*F2+

1 2.*D*(1.-V)*MI*MJ*NI*NJ*F3+V*D*MI*NJ*(MI-1.)*(NJ-1.)*F3+

2 V*D*MJ*NI*(MJ-1.)*(NI-1.)*F3

1 S(J,I)=S(I,J)

DO 2 J=1,20

DO 2 I=1,20

2 T(I,J)=0.

T(1,1)=1.

T(1,2)=-B

T(1,4)=B*B

T(1,7)=-B*B*B
 T(1,11)=B**4
 T(1,16)=-T(1,11)*B
 T(2,2)=1.
 T(2,4)=-2.*B
 T(2,7)=3.*B*B
 T(2,11)=-4.*B*B*B
 T(2,16)=5.*B**4
 T(3,3)=1.
 T(3,5)=-B
 T(3,8)=B*B
 T(3,12)=-B**3
 T(4,4)=2.
 T(4,7)=-6.*B
 T(4,11)=12.*B*B
 T(4,16)=-20.*B**3
 T(5,5)=1.
 T(5,8)=-2.*B
 T(5,12)= 3.*B*B
 T(6,6)=2.
 T(6,9)=-2.*B
 T(6,13)=2.*B*B
 T(6,17)=-2.*B**3
 T(7,1)=1.
 T(7,2)=A -----
 T(7,4)=A*A
 T(7,7)=A**3
 T(7,11)=A**4
 T(7,16)=T(7,11)*A
 T(8,2)=1.
 T(8,4)=2.*A
 T(8,7)=3.*A*A
 T(8,11)=4.*A**3
 T(8,16)=5.*A**4
 T(9,3)=1.
 T(9,5)=A
 T(9,8)=A*A
 T(9,12)=A*A*A
 T(10,4)=2.
 T(10,7)=6.*A
 T(10,11)=12.*A*A
 T(10,16)=20.*A*A*A
 T(11,5)=1.
 T(11,8)=2.*A
 T(11,12)=3.*A*A
 T(12,6)=2.
 T(12,9)=2.*A
 T(12,13)=T(12,9)*A
 T(12,17)=T(12,13)*A
 T(13,1)=1.

```

T(13,3)=C
T(13,6)=C*C
T(13,10)=T(13,6)*C
T(13,15)=T(13,10)*C
T(13,20)=T(13,15)*C
T(14,2)=1.
T(14,5)=C
T(14,9)=C*C
T(14,14)=T(13,10)
T(14,19)=T(13,15)
T(15,3)=1.
T(15,6)=2.*C
T(15,10)=3.*C*C
T(15,15)=4.*C**3
T(15,20)=5.*C**4
T(16,4)=2.
T(16,8)=2.*C
T(16,13)=T(16,8)*C
T(16,18)=T(16,13)*C
T(17,5)=1.
T(17,9)=2.*C
T(17,14)=3.*C*C
T(17,19)=4.*C**3
T(18,6)=2.
T(18,10)=6.*C-----
T(18,15)=12.*C*C
T(18,20)=20.*C**3
T(19,16)=5.*C*B**4
T(19,17)=3.*B*B*C**3-2.*C*B**4
T(19,18)=2.*B*C**4-3.*B**3*C*C
T(19,19)=C**5-4.*B*B*C*C*C
T(19,20)=-5.*B*C**4
T(20,16)=5.*C*A**4
T(20,17)=3.*A*A*C**3-2.*C*A**4
T(20,18)=-2.*A*C**4+3.*A**3*C*C
T(20,19)=C**5-4.*A*A*C**3
T(20,20)=5.*A*C**4
CALL INV2(T,20)
IF(Q)22,21,22
22 DO 20 I=1,18
   TPI(I)=0.
   DO 20 K=1,20
20   TPI(I)=TPI(I)+T(K,I)*PI(K)
21 DO 4 I=1,18
   DO 4 J=1,20
   R(I,J)=0.
   DO 3 K=1,20
3   R(I,J)=R(I,J)+T(K,I)*S(K,J)
4 CONTINUE
   DO 6 I=1,18

```

```

DO 6 J=1,18
S(I,J)=0.
DO 5 K=1,20
5 S(I,J)=S(I,J)+R(I,K)*T(K,J)
6 CONTINUE
C DEFINICION DE LA MATRIZ DE ROTACION R
C=(X(2)-X(1))/AB
Z=(Y(2)-Y(1))/AB
DO 7 I=1,18
DO 7 J=1,18
7 R(I,J)=0.
R(1,1)=1.
R(2,2)=C
R(2,3)=Z
R(3,2)=-Z
R(3,3)=C
R(4,4)=C*C
R(4,5)=2.*Z*C
R(4,6)=Z*Z
R(5,4)=-Z*C
R(5,5)=C*C-Z*Z
R(5,6)=Z*C
R(6,4)=Z*Z
R(6,5)=-2.*Z*C
R(6,6)=C*C
DO 8 I=7,12
DO 8 J=7,12
8 R(I,J)=R(I-6,J-6)
DO 9 I=13,18
DO 9 J=13,18
9 R(I,J)=R(I-12,J-12)
DO 10 I=1,18
DO 10 J=1,18
T(I,J)=0.
DO 10 K=1,18
10 T(I,J)=T(I,J)+R(K,I)*S(K,J)
DO 11 I=1,18
DO 11 J=1,18
S(I,J)=0.
DO 11 K=1,18
11 S(I,J)=S(I,J)+T(I,K)*R(K,J)
IF(Q)32,34,32
32 DO 30 I=1,18
PI(I)=0.
DO 30 K=1,18
30 PI(I)=PI(I)+R(K,I)*TPI(K)
DO 33 K=1,3
DO 33 I=1,6
IB=6*(NEL(KJ,K)-1)+I
IE=6*(K-1)+I

```

```
33 P(1B)=P(1B)+PI(1E)
34 RETURN
END
```

```
C
C.....SUBROUTINA FF
C
C..... JACK LOPEZ A.      COPPE/UFRJ
C
C
C      SUBROUTINE FF(A,B,C,M,N,F)
C
C      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
C      F=0.
C      FM=1.
C      FN=1.
C      FNM2=1.
C      NM2=N+M+2
C      IF(M)8,2,1
C 1 DO 5 I=1,M
C   R=I
C 5 FM=FM*R
C 2 IF(N)8,4,3
C 3 DO 6 I=1,N
C   R=I
C 6 FN=FN*R
C 4 DO 7 I=1,NM2
C   R=I
C 7 FNM2=R*FNM2 -----
C   R1=(M+1)/2
C   EM=M
C   R2=(EM+1.)/2.
C   IF(R1-R2)10,9,10
C 9 D=-B**(M+1)
C   GO TO 11
C10 D=B**(M+1)
C11 F=C**(N+1)*(A**(M+1)+D)*FM*FN/FNM2
C 8 RETURN
C   END
```

```

C
C.....SUBROUTINA PARA INVERSION DE MATRICES
C
C..... JACK LOPEZ A.          COPPE/UFRJ
C
      SUBROUTINE INV2(A,N)
C
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION A(20,20),IN(20,2)
      DO 1 I=1,N
1  IN(I,1)=0
      II=0
2  AMAX=-1.
      DO 7 I=1,N
      IF(IN(I,1))7,3,7
3  DO 6 J=1,N
      IF(IN(J,1))6,4,6
4  TEMP=DABS(A(I,J))
      IF(TEMP-AMAX)6,6,5
5  IF=I
      IC=J
      AMAX=TEMP
6  CONTINUE
7  CONTINUE
-----
8  IF(AMAX)18,20,8
      IN(IC,1)=IF
      IF(IF-IC)9,11,9
9  DO 10 J=1,N
      TEMP=A(IF,J)
      A(IF,J)=A(IC,J)
10 A(IC,J)=TEMP
      II=II+1
      IN(II,2)=IC
11 PIVOT=A(IC,IC)
      A(IC,IC)=1.
      PIVOT=1./PIVOT
      DO 12 J=1,N
12 A(IC,J)=A(IC,J)*PIVOT
      DO 15 I=1,N
      IF(I-IC)13,15,13
13 TEMP=A(I,IC)
      A(I,IC)=0.
      DO 14 J=1,N
14 A(I,J)=A(I,J)-A(IC,J)*TEMP
15 CONTINUE
      GO TO 2
16 IC=IN(II,2)
      IF=IN(IC,1)
      DO 17 I=1,N
      TEMP=A(I,IF)

```

```
A(I,IF)=A(I,IC)
17 A(I,IC)=TEMP
    II=II-1
18 IF(II)16,19,16
19 RETURN
20 WRITE(5,21)
21 FORMAT(' LA MATRIZ ES SINGULAR')
    RETURN
    END
```

CAPÍTULO V

EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Se muestran en las páginas siguientes los resultados obtenidos con el programa y subrutinas presentados en el capítulo V.

Las características para las placas analizadas además de lo indicado en los gráficos son:

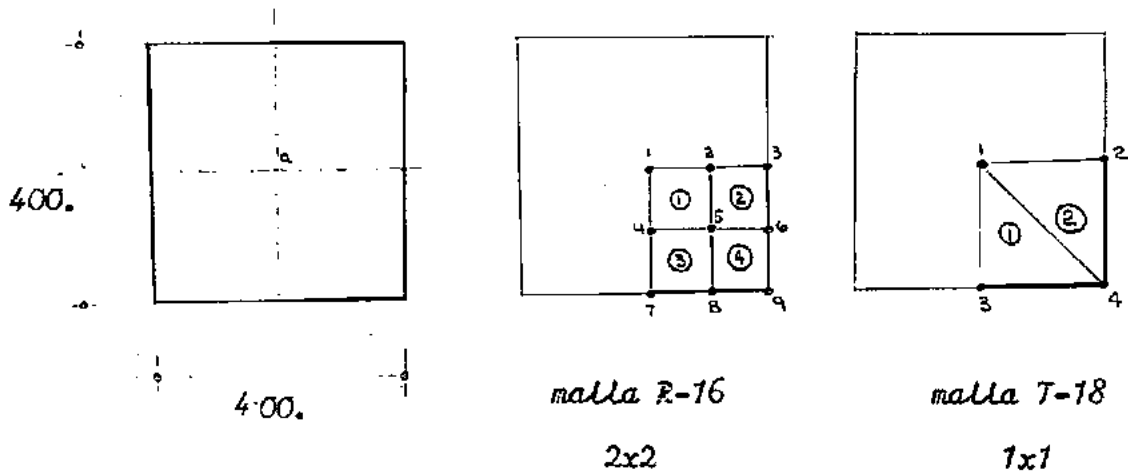
$$E = 2 \times 10^5 \text{ Kg./cm.}^2$$

$$\nu = 0.30$$

$$h = 10. \text{ cm.}$$

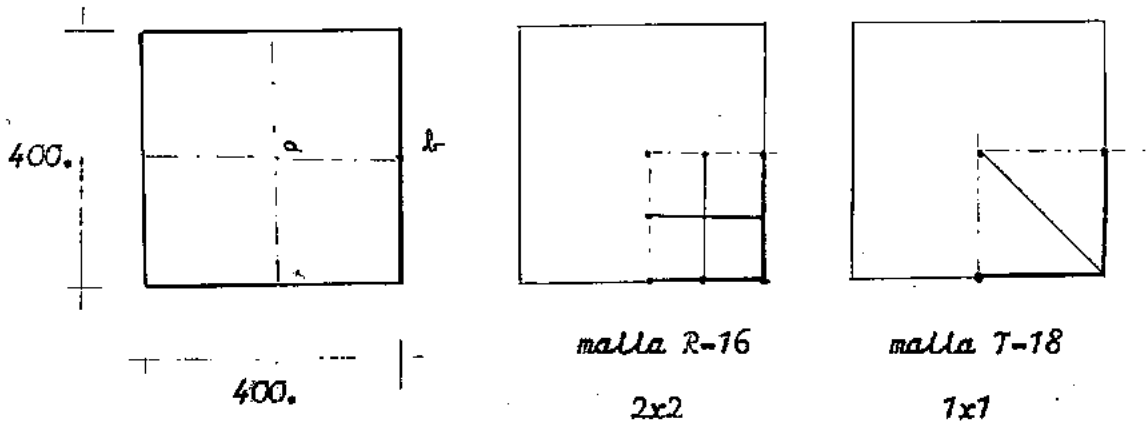
Los resultados obtenidos confirman la superioridad de los elementos R-16 y T-18 con relación a otros modelos de forma similar. Esto puede verificarse en los tres primeros ejemplos comparando los resultados que se presentan con los mostrados en el libro de O. C. Zienkiewicz²⁰. El ejemplo 5, es uno de los casos que nos permite señalar la necesidad de un estudio comparativo detallado de las condiciones en las cuales un elemento menos refinado (R-16) puede competir favorablemente con un elemento de mayor orden (T-18).

1).- Placa simplemente apoyada en los cuatro bordes



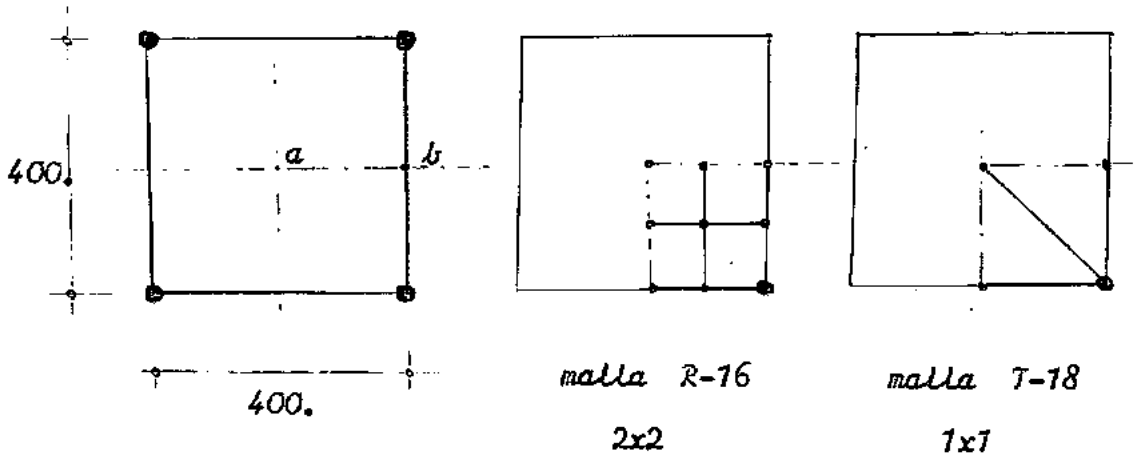
		c.u. $q = 0.1 \text{ Kg/cm}^2$		c.c. $P_a = 8000 \text{ Kg.}$	
		w_a cm.	Mx_a Kg-cm/cm.	w_a cm.	Mx_a kg-cm/cm.
R-16	1x1	0.57625	915.23	0.77421	1585.15
	2x2	0.56823	787.46	0.80171	2180.89
	3x3	0.56791	774.43	0.80678	2526.76
T-18	1x1	0.56762	752.42	0.80321	2352.30
	2x2	0.56782	765.22	0.80890	2927.68
<i>series</i>		0.567819	766.17	0.81070	-----

2).- Placa empotrada en los cuatro bordes



		c.u. $q = 0.1 \text{ Kg/cm}^2$			c.c. $P_a = 8000. \text{ Kg.}$		
		w_a	M_{x_a}	M_{x_b}	w_a	M_{x_a}	M_{x_b}
R-16	1x1	0.18517	661.33	-508.72	0.37034	1322.67	-1017.44
	2x2	0.17679	401.62	-695.50	0.38328	1765.07	- 920.15
	3x3	0.17682	379.76	-756.99	0.38819	2101.16	- 949.40
T-18	1x1	0.17630	454.22	-799.20	0.38680	2083.13	-969.88
	2x2	0.17672	354.97	-819.99	0.39014	2479.86	- 999.82
series		0.17612	369.60	-820.80	0.39172	-----	-1005.60

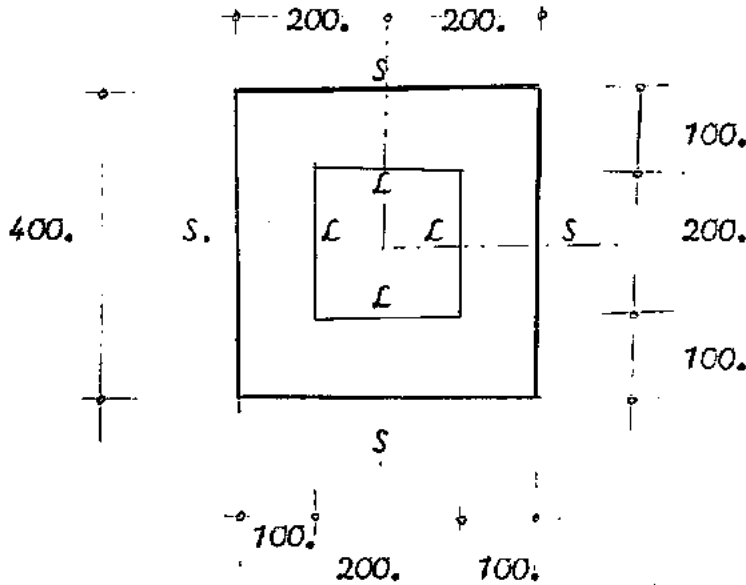
3).- Placa apoyada en cuatro puntos (en los cuatro vértices)



		c.u. $q = 0.1 \text{ Kg/cm}^2$			c.c. $P_a = 8000. \text{ Kg.}$		
		w_a	m_{x_a}	m_{y_b}	w_a	m_{x_a}	m_{y_b}
R-16	1x1	3.6861	2186.22	2936.25	2.8152	2381.51	1866.41
	2x2	3.6957	1887.74	2536.32	2.8424	2833.73	1728.88
	3x3	3.6971	1824.25	2477.31	2.8481	3131.99	1690.80
T-18	1x1	3.6960	1768.67	2431.69	2.8448	3011.81	1683.32
	2x2	3.6964	1774.68	2429.45	2.8497	3489.68	1651.56
series		3.7008	1774.40	2443.20	-----	-----	-----

$\nu = 0.25$

4).- Placa simplemente apoyada en los cuatro bordes con orificio en el centro de la placa.

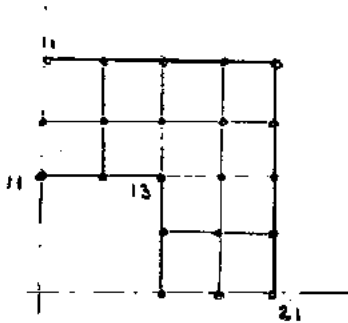


$$E = 2 \times 10^6 \text{ Kg/cm}^2$$

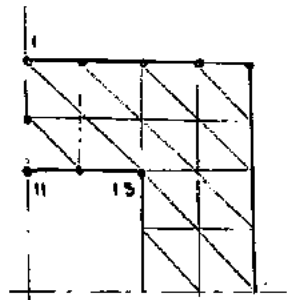
$$\nu = 0.30$$

$$h = 10.$$

$$q = 0.1 \text{ Kg/cm}^2$$



malla R-16

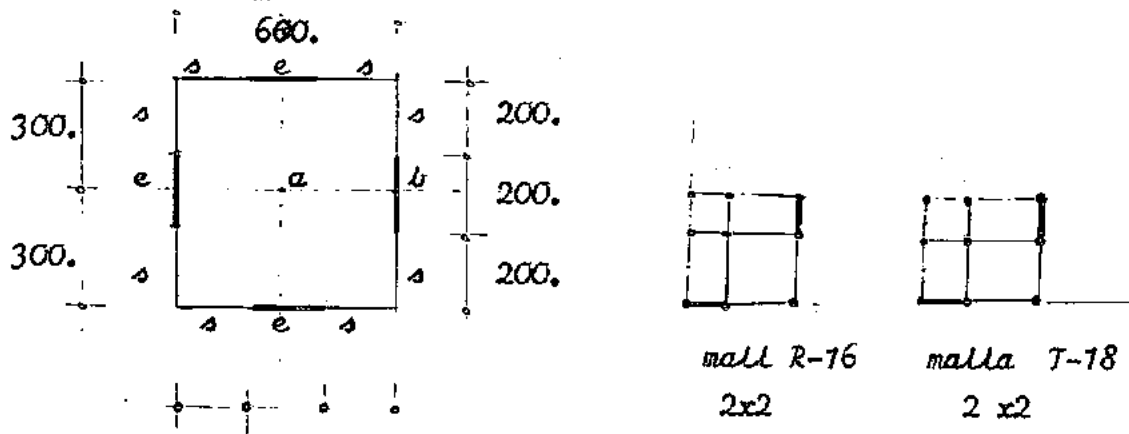


malla T-18

Deflecciones (cm.)

Punto	R-16	T-18	TUBA 6
11	0.44597	0.44350	0.4400
13	0.32027	0.31610	0.3149

5).- Placa simplemente apoyada en los cuatro bordes y además empotrada en el tramo central de cada borde de acuerdo a la fig.



s = simplemente apoyado

e = empotrado

		c.u. $q = 0.1 \text{ Kg./cm.}^2$		
		w_a	M_{x_a}	M_{x_b}
R-16	2x2	0.910738	848.37	-1447.12
	3x3	0.932725	864.31	-1829.90
T-18	2x2	0.90027	728.65	-1788.37
series ²⁶		1.00481	864.00	-2135.16

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos confirman la superioridad de los modelos compatibles R-16 y T-18 con relación a modelos de forma similar. El elemento R-16 con una malla simple, da resultados satisfactorios para desplazamientos y con mallas razonablemente refinadas los esfuerzos obtenidos también son satisfactorios. El elemento T-18 permite obtener con mallas bastante simples resultados satisfactorios tanto para desplazamientos como para esfuerzos.

En el aspecto computacional, con el elemento R-16 se obtuvieron resultados satisfactorios para mallas de hasta 10×10 (no se efectuaron pruebas para mallas más refinadas), utilizando precisión simple, mientras que con el elemento T-18 fue necesario trabajar en precisión doble aún para mallas de 2×2 . Esto nos lleva a señalar la necesidad de un estudio comparativo detallado que podría mostrar que para fines prácticos el elemento R-16 sería el indicado en el análisis de placas de forma rectangular (que puedan ser discretizadas en elementos rectangulares), mientras que el elemento T-18 sería el indicado en el análisis de placas de forma irregular.

Las subrutinas para el cálculo de las propiedades estructurales de los elementos R-16 y T-18 que se presentan en éste trabajo, permite efectuar dicho estudio en forma inmediata.

R E F E R E N C I A S

- 1.- PAPERFUSS, S.W., *Lateral plate deflection by stiffness methods with application to marque*. M.Sc. thesis, Department of civil Engineering, Univ. of Washington, Seattle, Wash., 1959.
- 2.- MELOSH, R. J., *A stiffness matrix for analysis of thin plates in bending*, *J. Aero. Sci.*, 28, 1961.
- 3.- ADINI, A. and CLOUGH, R.W., *Analysis of plate bending by finite element method*. Report to the Pac. Sci. Foundation, 1961.
- 4.- CLOUGH, R.W. and TOCHER, J.L., *Finite element stiffness matrices for the analysis of plate bending*. Proc. Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson AFB, Ohio 1965.
(AFJT-1965)
- 5.- BAZELEY, G. P., CHEUNG, Y. K., IRONS, B. M., ZIENKIEWICZ, O. C., *Triangular elements in plate bending-conforming and non-conforming solutions*. AFJT-1965.
- 6.- BOGNER, F. K., FOX, R. L., and SCHMIT, L. A., *The generation of interelement compatible stiffness and mass matrices by use of interpolation formulae*, AFJT-1965.
- 7.- FRAEJJS DE VEUBEKE, *Bending and stretching of plates*, AFJT-1965
- 8.- COOPER, G. R., KOSKO, E., LIMDBERG, G. M. and OLSON, M. D., *A high precision triangular plate-bending element*. Pac. Aer. Est., Ottawa, Dico, 1968.
- 9.- BELL, K. *Analysis of thin plates in bending using triangular finite elements*, Division of structural mechanics, The Technical University of Norway, Trondheim, 1968.

- 10.- ARGYRIS, J. H., FRIED, J., SHARPF, D. W. The TUBA family of elements for the matrix displacement method. *The Aeronautical Journal, R. Ae. S., Technical note, August 1968.*
- 11.- BUTLIN G. A., FORD, R., A compatible triangular plate bending finite element. *University of Leicester, 1968.*
- 12.- CLOUGH, R. W., FELIPA, C. A., A refined quadrilateral element for analysis of plate bending. *AFJT-1968.*
- 13.- FRAEIJIS DE VEUBEKE, B., A conforming finite element for plate bending. *Int. J. of Solids and structures, 1968.*
- 14.- FRAEIJIS DE VEUBEKE, B., An equilibrium model for plate bending. *Int. J. of solids and structures, 1968.*
- 15.- HERMAN, L. R. A bending analysis for plates. *AFJT-1965.*
- 16.- HERMAN, L. R. Finite element bending analysis of plates, *Proc. ASCE, EM-5, 1968.*
- 17.- PJAN, T. H., Element stiffness matrices for boundary compatibility and for prescribed boundary stress. *AFJT-1965.*
- 18.- PJAN, T. H. H., TONG, P., Rationalization in deriving element stiffness matrix by assumed stress approach. *AFJT-1968.*
- 19.- TIMOSHENKO, S. and WOJNIOUKY-KRIGER, *Theory of plates and shells, Mc. Graw-Hill, 2nd ed. 1957.*
- 20.- ZIENKIEWICZ, O. C., *The finite element method in engineering science, Mc. Graw-Hill, 1971.*
- 21.- PRZEMISENIECKI, J. S., *Theory of matrix structural analysis, Mc Graw Hill, 1968.*

- 22.- de Arantes e Oliveira, E.R., *Mathematical Foundation of the Finite Element Method*. LNEC., Lisboa, 1967.
- 23.- Deák, A.L., Pian, T.H.H., *Application of the Smooth-Surface Interpolation to the Finite Element Analysis*. AIAA J. January 1967.
- 24.- Argyris, J.H., Buck, K.E., Scharpf, D.W., Hilber, H.M., Marezek, G., *Some New Elements for the Matrix Displacement Method*. AFJT-1968
- 25.- Irons, B.M.R. *Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending*. AIAA J. 3, 961. May 1965.
- 26.- Kurata, M. *Bending of simply supported rectangular plates with clamped portions*. Ing. Archiv. 1960.