

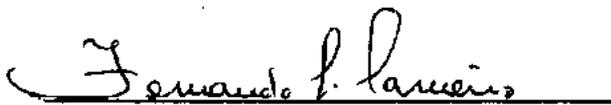
ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS MIXTOS

PARA FLEXIÓN DE PLACAS

*Pablo Gaston Bignon*

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M.Sc.).

Aprovada por:



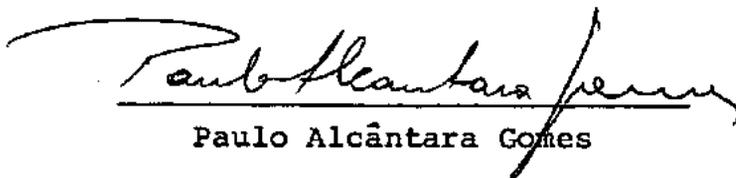
Fernando L. Lôbo B. Carneiro  
Presidente



Fernando Venâncio-Filho



Luiz Bevilacqua



Paulo Alcântara Gomes

RIO DE JANEIRO  
ESTADO DA GUANABARA - BRASIL  
DEZEMBRO DE 1972

Para mi esposa Susana,  
mi madre y mi hija.

## AGRADECIMIENTOS

A las Autoridades de la Facultad de Ciencias e Ingeniería de Rosario, por el apoyo que hizo posible mis estudios de Pos-Graduación.

Al Profesor ADALBERTO A. BLODORN, por el impulso inicial que me condujo a este trabajo.

A los Directores y Profesores de COPPE, Universidad Federal de Río de Janeiro, por las atenciones dispensadas, en especial al Profesor FERNANDO L. LÔBO CARNEIRO, por su cordial recibimiento y constante apoyo durante toda mi permanencia en esta nación hermana.

### SYNOPSIS

Tomando como base el conocido modelo mixto para flexión de placas con desplazamiento transversal y momentos continuos, se desarrollan elementos isoparamétricos para placas homogéneas, según la teoría de Reissner.

Son analizados casos particulares de carga variable de superficie, carga linealmente distribuida y cargas concentradas; placas de contornos curvos, moderadamente gruesas y espesor variable.

Un tratamiento especial se reserva para placas "sandwich" y también son presentados, sobre dicha teoría, dos nuevos modelos y sus respectivas matrices elementales.

ABSTRACT

Isoparametric finite elements are developed from the well known mixed model for plate bending with continuous transversal displacements and moments, according to the theory of Reissner.

Special cases of variable surface load, linear distributed load and concentrated loads are analysed. Studies are performed for plates of curved boundaries and for plates with moderately variable finite thickness.

A special procedure is reserved for the sandwich plate. Two new models and respective element matrices are presented concerning this problem and the general plate bending problem.

## Í N D I C E

Capítulos:	Páginas:
I	INTRODUCCIÓN ..... 1
1.1	El Método de los Elementos Finitos. 1
II	TEORÍA DE LA ELASTICIDAD CON DEFORMACIONES INFINITESIMALES ..... 7
2.1	Ecuaciones fundamentales ..... 7
2.2	El principio de los trabajos virtua <u>l</u> les ..... 13
2.3	El principio de la mínima energía po <u>t</u> encial ..... 20
2.4	Generalización del principio de la mínima energía potencial ..... 25
2.5	El funcional de Hellinger-Reissner. 30
III	ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS PARA FLEXIÓN DE PLACAS ..... 34
3.1	Teoría de Reissner ..... 34
3.2	Modelo mixto con $w$ , $M_{ij}$ como varia <u>l</u> bles independientes ..... 43

Capítulos:

Páginas:

3.3	Forma discretizada del principio va riacional. Elementos finitos iso paramétricos .....	44
3.4	Evaluación de la matriz del elemen to y montaje del sistema global ...	61
IV	EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MODELO CON $w$ , $M_{ij}$ CONTINUOS .....	74
4.1	Placa rectangular con carga uniforme	74
4.2	Estudio comparativo de convergencia	79
4.3	Placa circular empotrada con carga uniforme .....	80
4.4	Influencia del número de puntos de integración .....	81
4.5	Carga linealmente distribuída .....	82
4.6	Espesor variable .....	84
4.7	Carga hidrostática .....	85
4.8	Cargas concentradas .....	86
4.9	Placa empotrada elíptica .....	88
4.10	Condiciones de contorno exactas so bre un borde simplemente apoyado ..	88
4.11	Análisis de la influencia del es fuerzo de corte .....	89

Capítulos:	Páginas:
4.12 Otros ejemplos .....	91
4.13 Placas "sandwich" .....	92
V OTROS MODELOS MIXTOS SOBRE LA TEORÍA DE REISSNER .....	96
5.1 Modelo mixto con $w, M_{ij}, Q_j$ , conti <u>n</u> nuos .....	96
5.2 Modelo mixto con $w, M_{ij}, \gamma_j$ , conti <u>n</u> nuos .....	101
5.3 Estudio comparativo de los tres mo <u>d</u> delos mixtos .....	104
CONCLUSIONES .....	106
REFERENCIAS .....	108
NOTACIONES .....	111
APÉNDICE I .....	112
APÉNDICE II .....	114
APÉNDICE III .....	116
APÉNDICE IV .....	117
APÉNDICE V .....	119
APÉNDICE VI .....	120

## CAPITULO I

### INTRODUCCIÓN

#### 1.1 - EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Los problemas de Mecánica Aplicada que se encuentran con mayor frecuencia en Ingeniería pueden, generalmente, ser especificados según dos caminos. En el primero, se establece un sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el comportamiento en una región típica infinitesimal, juntamente con ciertas condiciones de contorno que aseguran la unicidad de la solución. En el segundo, se postula un principio variacional válido sobre toda la región y la correcta solución se obtiene hallando un valor estacionario a un cierto funcional, definido por integración adecuada, de funciones de las variables incógnitas efectuada sobre todo el dominio. Si las ecuaciones de Euler y las condiciones de contorno asociadas al funcional son idénticas a las del primer caso, ambos caminos son matemáticamente equivalentes y la solución exacta de uno es también la del otro.

Las diferencias aparecen cuando se adoptan técnicas aproximadas de solución, tales como el método de diferencias finitas, donde las ecuaciones diferenciales son aproximadas en forma discreta, o bien en el método de Rayleigh-Ritz o su variante, el método de los elementos finitos, que prefieren hallar un valor estacionario del funcional evaluado a través de una aproximación.

Un principio variacional suele ser acompañado por dos clases de condiciones de contorno: las llamadas esenciales, que deben ser satisfechas por las funciones de comparación entre las cuales se busca la extremal y las denominadas naturales, que surgen como consecuencia del proceso de la búsqueda del extremo.

Para describir el procedimiento de elementos finitos, supongamos que la formulación física de un problema requiere el valor estacionario de un funcional  $\chi$  bajo prescriptas condiciones esenciales de contorno. Sea que  $\chi$  está definido por la adición de una integral sobre el dominio  $V$  con otra efectuada sobre parte de su contorno, en las cuales aparece una función incógnita  $Z(x_1, x_2, x_3)$  y sus derivadas con respecto a las coordenadas del espacio.

$$\chi = \int_V f(z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots) dV + \int_A g(z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \dots) dA$$

Seguidamente, dividimos la región en pequeñas subregiones denominadas elementos y representamos la función incógnita  $z$ , en el interior de cada elemento, con adecuadas funciones de interpolación  $\phi$ , continuas y derivables en la forma:

$$z = \phi \underline{z}^n$$

en la cual  $\underline{z}^n$  es el vector de los valores de la incógnita en puntos particulares del contorno del elemento, denominados nodos.

Para hallar el valor estacionario del funcional  $\chi$  respecto al número total de parámetros  $\underline{z}^*$  asociados con todo el dominio, debemos introducir las condiciones esenciales por valores nodales y efectuar la variación. Si es lícito admitir que el funcional sobre toda la región se puede obtener como suma de las contribuciones elementales, escribimos:

$$\chi = \sum \chi^e \quad (1.1)$$

y por lo tanto:

$$\delta\chi = \sum \delta\chi^e = 0 \quad (1.2)$$

En el caso especial que  $\chi$  es un funcional cuadrático en  $Z$  y sus derivadas, es siempre posible establecer, para un elemento:

$$\delta\chi^e = \delta\underline{z}^{n,T} (\underline{h} \underline{z}^n + \underline{p})$$

en donde  $\underline{h}$  y  $\underline{p}$  contienen constantes que dependen del problema. Aplicando (1.2):

$$\delta\chi = \delta\underline{z}^{*,T} (\underline{H} \underline{z}^* + \underline{P}) = 0$$

La matriz  $\underline{H}$  y el vector  $\underline{P}$  se obtienen por sumatoria, sobre todos los elementos, de las matrices  $\underline{h}$  y de los vectores  $\underline{p}$  respectivamente. Como  $\delta\underline{z}^*$  es arbitrario:

$$\underline{H} \underline{z}^* + \underline{P} = 0 \quad (1.3)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales (1.3) se despejan los valores nodales  $\underline{z}^*$  que definen, juntamente con las funciones de interpolación, el valor de la función

incógnita en todo el dominio en cuestión.

Para garantizar la validez de la ecuación fundamental (1.1) es necesario que las funciones de interpolación establezcan un cierto grado de continuidad en las variables incógnitas, de modo que al evaluar  $\chi$  por una integral definida en sentido generalizado, no aparezcan términos adicionales en correspondencia con las fronteras interelemento. Aún puede emplearse el método en los casos en que dichos términos sean finitos, pues el funcional se mantendrá definido. Si surgieran cantidades que tienden a infinito asociadas a la zona interelemento, la integral no tiene sentido y el proceso es impracticable (ref. 5).

Las primeras aplicaciones de esta técnica en el campo de la Mecánica Estructural, se efectuaron sobre la base del principio de la Mínima Energía Potencial, que da origen a los modelos de desplazamientos y aún constituye la base de la mayoría de los trabajos sobre el tema. Mucho menos frecuentes son las investigaciones con modelos de equilibrio, sobre el principio de la Mínima Energía Complementaria y utilizando tensiones como variables incógnitas.

En forma reciente, se han intensificado los trabajos

jos con funcionales mixtos que operan con desplazamientos y resultantes de tensiones como incógnitas. Sobre esta línea, han sido implementados elementos finitos para el análisis de flexión de placas (refs. 5-9), estudio de cáscaras rebajadas (ref. 14), análisis lineal y no lineal de flexión de barras (ref. 12), inestabilidad de columnas (ref. 11) y otros numerosos ejemplos.

Entre las diversas clases de elementos utilizados desde el advenimiento del método, ocupan un lugar destacado los denominados elementos isoparamétricos (ref.4), empleados principalmente en modelos de desplazamientos para problemas de elasticidad plana y espacial, sólidos de revolución y otros similares, donde el funcional contiene derivadas primeras de las variables incógnitas. Dificultades en el cumplimiento de las condiciones de convergencia han limitado su aplicación, en modelos de desplazamientos, cuando se ha tratado de problemas basados en las teorías de flexión de barras, placas y cáscaras.

En los próximos capítulos se desarrollarán elementos isoparamétricos sobre modelos mixtos derivados de la teoría de Reissner para flexión de placas.

## CAPÍTULO II

### TEORÍA DE LA ELASTICIDAD CON DEFORMACIONES INFINITESIMALES

#### 2.1 - ECUACIONES FUNDAMENTALES

En el comienzo de este capítulo, vamos a presentar una breve reseña de las ecuaciones fundamentales de la Teoría de la Elasticidad aplicada a los casos de deformaciones infinitesimales.

Como sistema de referencia utilizaremos una terna de coordenadas cartesianas ortogonales  $O - x_1, x_2, x_3$  dándose por entendido que, salvo indicación particular, las expresiones analíticas serán escritas en notación indicial y considerándose válido el convenio de la sumatoria sobre los subíndices repetidos.

Supongamos tener ahora, referido a dicho sistema, un cuerpo elástico vinculado sobre una parte de su contorno externo y en equilibrio bajo la acción de un conjunto de cargas de superficie y de volumen. Como es habitual en elasti

cidad infinitesimal, asumiremos que los desplazamientos  $u_i$  de un punto del cuerpo son suficientemente pequeños como para suponer al problema gobernado por el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

a) *Tensiones*. El estado de sollicitación interna en un punto del cuerpo está definido por las nueve componentes de tensiones

$$\tau_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

las cuales satisfacen las ecuaciones de equilibrio

$$\tau_{ji,j} + F_i = 0 \quad (2.1)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad (2.2)$$

en donde  $F_i$  son las componentes de las fuerzas de volumen.

Reemplazando (2.2) en (2.1) se obtiene

$$\tau_{ij,j} + F_i = 0 \quad (2.3)$$

b) *Deformaciones*. El estado de deformación en un punto del cuerpo queda caracterizado por las nueve cantidades:

$$e_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

de las cuales las componentes  $e_{11}$ ,  $e_{22}$ ,  $e_{33}$  representan los alargamientos específicos en las direcciones de los ejes  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  y los términos  $e_{12}$ ,  $e_{23}$ ,  $e_{31}$  valen un medio del ángulo de distorsión correspondiente al plano normal a los ejes  $x_3$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  respectivamente. Por otro lado, a partir de consideraciones geométricas, se verifica que el conjunto de las deformaciones es simétrico o sea

$$e_{ij} = e_{ji} \quad (2.4)$$

c) *Relaciones deformación-desplazamiento.* En la teoría de las pequeñas deformaciones, las relaciones deformación-desplazamiento están dadas por las expresiones siguientes

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.5)$$

De estas relaciones lineales se desprende que vale el principio de superposición para deformaciones y desplazamientos.

d) *Relaciones tensión-deformación.* Asumiremos para nuestra teoría un comportamiento elástico de los materiales en cuestión y a menos que se aclare lo contrario, las relaciones

nes tensión-deformación estarán dadas por la forma lineal homogénea

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad (2.6)$$

Los coeficientes de las ecuaciones (2.6) son denominados constantes elásticas y consideraciones físicas permiten afirmar que el conjunto  $C_{ijkl}$  es simétrico, como así también que existe una transformación inversa de la forma

$$e_{ij} = B_{ijkl} \tau_{kl} \quad (2.7)$$

donde  $B_{ijkl}$  es también un conjunto simétrico. El número de constantes elásticas independientes en el caso de un material localmente isótropo es dos. En tales condiciones se puede escribir

$$\tau_{ij} = \theta \lambda \delta_{ij} + \frac{1}{2} \mu e_{ij} \quad (2.8)$$

en la cual

$$\theta = e_{kk} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

$$\delta_{ij} = \text{delta de Kronecker } i, j = 1, 2, 3$$

$$\lambda, \mu = \text{constantes de Lamé}$$

La constante  $\mu$  es conocida también como módulo de

elasticidad transversal y designada con  $G$ . Para escribir la transformación inversa de (2.8) es más cómodo sustituir las constantes  $\lambda$ ,  $\mu$  por el módulo de elasticidad longitudinal  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ . Estas últimas están relacionadas con las primeras a través de las expresiones

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad E = \frac{(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

La transformación inversa de (2.8) se expresa de la siguiente manera:

$$e_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \tau_{ij} - \frac{\nu}{E} \theta \delta_{ij} \quad (2.9)$$

en donde  $\tau_{ii} = \theta$ . Si consideramos válidas para nuestro problema las formas lineales homogéneas (2.8) y (2.9) puede observarse que en tal caso también será válido el principio de superposición para fuerzas y tensiones.

e) *Condiciones de contorno.* Para analizar las condiciones de contorno, la superficie exterior  $A$  del cuerpo será dividida en dos partes: por una lado la superficie  $A_o$  en donde las condiciones están establecidas en función de fuerzas aplicadas y por otro lado la superficie  $A_u$  sobre la cual las

mismas están fijadas en términos de desplazamientos. Atendiendo a su naturaleza, generalmente se las designa como condiciones mecánicas y cinemáticas de contorno respectivamente. Desde luego

$$A = A_u \cup A_\sigma \quad (2.10)$$

Designando con  $\bar{T}_i$  las fuerzas externas prescriptas por unidad de superficie, las condiciones mecánicas están dadas por

$$T_i = \bar{T}_i \quad \text{sobre } A_\sigma \quad (2.11)$$

siendo, por conocida propiedad de las componentes de tensiones

$$T_i = \tau_{ij} v_j \quad (2.12)$$

con  $v_j = \cos(\vec{v}, x_j)$ , donde es  $\vec{v}$  el vector normal unitario exterior a la superficie.

Independientemente, llamando  $\bar{u}_i$  a las componentes de los desplazamientos prescriptos sobre  $A_u$ , las condiciones cinemáticas o geométricas están dadas por

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{sobre } A_u \quad (2.13)$$

De esta manera hemos establecido todas las ecuaciones que gobiernan un problema de elasticidad en la teoría de pequeñas deformaciones: las ecuaciones de equilibrio (2.3), las relaciones deformación-desplazamiento (2.5) y las relaciones tensión-deformación (2.8), junto con las condiciones cinemáticas (2.13) y mecánicas (2.11) de contorno sobre la superficie  $A$  del cuerpo. Este sistema tiene 15 incógnitas: 6 tensiones, 6 deformaciones y 3 desplazamientos con 15 ecuaciones (2.3), (2.5) y (2.8). Nuestro problema es resolver esas 15 ecuaciones bajo las condiciones de contorno (2.11) y (2.13).

Surge de inmediato como consecuencia de la forma lineal de las relaciones en consideración, que para nuestros problemas será válido el principio de superposición tanto para deformaciones y desplazamientos, como para fuerzas y tensiones. En el caso en que las relaciones tensión-deformación se asumieran no lineales, la superposición solo valdría para deformaciones y desplazamientos.

## 2.2 - EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES

Vamos a desarrollar aquí una expresión del principio de los trabajos virtuales que permita tratar, entre otros ca

sos, al problema definido en la sección anterior. Consideremos un cuerpo en equilibrio con deformaciones infinitesimales bajo prescriptas condiciones cinemáticas y mecánicas de contorno. Obviamente:

$$\begin{aligned} \tau_{ij,j} + F_i &= 0 && \text{en } V \\ u_i &= \bar{u}_i && \text{en } A_u \end{aligned} \quad (2.14)$$

Supongamos ahora que las fuerzas exteriores experimentan un incremento infinitesimal  $\delta F_i$ ,  $\delta T_i$ . Consecuentemente, se producirán cambios infinitesimales en  $e_{ij}$ ,  $\tau_{ij}$ ,  $u_i$  que denotaremos con  $\delta e_{ij}$ ,  $\delta \tau_{ij}$ ,  $\delta u_i$ .

El trabajo ejecutado por las fuerzas exteriores a lo largo del cambio infinitesimal de configuración es:

$$\delta W^{(e)} = \int_V F_i \delta u_i dV + \int_A T_i \delta u_i dA + \text{términos de orden superior}$$

Los términos de orden superior incluyen  $\frac{1}{2} \int \delta F_i \delta u_i dA$  y  $\frac{1}{2} \int \delta T_i \delta u_i dA$  que pueden ser despreciados, ya que consideraremos sólo infinitésimos de primer orden. Por lo tanto:

$$\delta W^{(e)} = \int_V F_i \delta u_i dV + \int_A T_i \delta u_i dA \quad (2.15)$$

Notemos que la expresión anterior no considera establecida ninguna ley específica de fuerza-desplazamiento. El trabajo interno realizado por las tensiones a lo largo del cambio de configuración se puede expresar:

$$\delta W^{(i)} = \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV + \text{términos de orden superior}$$

Los términos de orden superior como  $\frac{1}{2} \int \delta \tau_{ij} \delta e_{ij} dA$  serán despreciados por sólo tomar en cuenta infinitésimos de primer orden. Entonces escribimos

$$\delta W^{(i)} = \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (2.16)$$

Vamos a demostrar la equivalencia formal de (2.15) y (2.16). Para ello, tomamos las condiciones de equilibrio (2.3), las multiplicamos por  $\delta u_i$  y sumamos sobre el índice común:

$$\tau_{ij,j} \delta u_i + F_i \delta u_i = 0$$

Integrando sobre todo el volumen

$$\int_V (\tau_{ij,j} \delta u_i + F_i \delta u_i) dV = 0$$

Pero:

$$\tau_{ij,j} \delta u_i = (\tau_{ij} \delta u_i)_{,j} - \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j}$$

Reemplazando:

$$\int_V (\tau_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \int_V \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV + \int_V F_i \delta u_i dV = 0$$

Aplicando el teorema de la divergencia en la primera integral

$$\int_V F_i \delta u_i dV + \int_A \tau_{ij} u_j \delta u_i dA = \int_V \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV \quad (2.17)$$

donde  $\vec{u}$  es el vector normal unitario exterior a la superficie y  $\cos(\vec{u}, x_j) = u_j$ .

Ahora bien, ya que suponemos la configuración inicial como de equilibrio compatible, se verifican las relaciones (2.5) y al pasar a una posición compatible infinitamente próxima tendremos

$$\delta e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \quad (2.18)$$

mientras que en el contorno donde están especificadas las condiciones cinemáticas se mantendrá

$$\delta u_i = 0 \quad \text{sobre } A_u \quad (2.19)$$

El segundo miembro de (2.17) se transforma como si que:

$$\begin{aligned} \int_V \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} dV &= \frac{1}{2} \int_V \{ \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} + \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} \} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \{ \tau_{ij} (\delta u_i)_{,j} + \tau_{ij} (\delta u_j)_{,i} \} dV = \\ &= \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV \end{aligned}$$

en la cual se ha tenido en cuenta (2.18), aprovechando tam bién la simetría de las componentes de tensiones. Finalmente, reemplazando en (2.17) y teniendo presentes (2.12) y (2.19):

$$\int_V F_i \delta u_i dV + \int_{A_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dA = \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (2.20)$$

La ecuación (2.20) es la expresión analítica del principio de los trabajos virtuales para el problema de un sólido en equilibrio compatible con pequeñas deformaciones. Es importante observar que el incremento de primer orden del trabajo externo e interno puede ser calculado como si las fuerzas y tensiones *hubiesen permanecido constantes* durante un desplazamiento infinitesimal compatible. Esto es una consecuencia de haber despreciado, lícitamente, los términos de

orden superior que contenían los incrementos de cargas y tensiones.

Consideraremos como desplazamientos virtuales admisibles aquellos desplazamientos infinitesimales compatibles que tienen un contacto de primer orden con la configuración de equilibrio y satisfacen las condiciones cinemáticas de contorno. Denominaremos trabajo virtual al realizado a lo largo de un desplazamiento virtual admisible y calculado con las expresiones (2.15), (2.16). Podemos entonces decir:

"El trabajo virtual realizado por las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo en estado de equilibrio compatible es igual al trabajo virtual interno realizado por las tensiones a lo largo de un desplazamiento virtual admisible".

Pasamos ahora a analizar qué clase de relaciones obtenemos si exigimos el cumplimiento del principio de los trabajos virtuales (2.20) para cualquiera de todos los desplazamientos virtuales admisibles. Recorriendo la demostración anterior en sentido inverso, observamos que, si las funciones desplazamiento cumplen con las condiciones (2.5) y (2.13), la única forma en que se puede satisfacer la ecuación (2.20) para  $\delta u_i$  arbitrario, es a través de la condición:

$$\int_V (\tau_{ij,j} + F_i) \delta u_i \, dV = 0$$

lo cual requiere que

$$T_i = \tau_{ij} u_j \quad \text{en el contorno}$$

y

$$\tau_{ij,j} + F_i = 0 \quad \text{en el interior.}$$

Tenemos ahora otro enunciado:

"De la introducción de las relaciones desplazamiento-deformación y de las condiciones geométricas de contorno en el principio de los trabajos virtuales se obtienen las ecuaciones de equilibrio y las condiciones mecánicas de contorno".

Consecuentemente puede verse que, una vez establecidas las relaciones deformación-desplazamiento para un problema dado, es posible obtener las condiciones de equilibrio correspondientes solamente por aplicación del principio de los trabajos virtuales. Es importante notar que este principio es independiente de la forma de las relaciones tensión-deformación.

### 2.3 - EL PRINCIPIO DE LA MÍNIMA ENERGÍA POTENCIAL

La aplicación del principio de los trabajos virtuales a problemas en donde son conocidas las propiedades mecánicas del material conduce a numerosos teoremas variacionales, entre los cuales, uno de los más utilizados es el denominado principio de la mínima energía potencial. Para comprender su significado, retornamos a las consideraciones del párrafo anterior y recordemos que, para un pequeño desplazamiento virtual se tiene, a menos de términos de orden superior

$$\delta W^{(i)} = \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV \quad (2.21)$$

Supondremos ahora que el cuerpo llega, desde su estado natural descargado (0) hasta un estado final bajo carga total (I), a través de una serie de desplazamientos infinitesimales sucesivos que mueven al sistema sobre configuraciones de equilibrio, a medida que se van produciendo incrementos infinitesimales de carga. El trabajo interno total, desde el estado inicial (0) hasta el final (I) será (ref. 1):

$$\begin{aligned} W^{(i)} &= \int_0^I \left\{ \int_V \tau_{ij} \delta e_{ij} dV \right\} = \int_V \left\{ \int_0^I \tau_{ij} \delta e_{ij} \right\} dV = \\ &= \int_V \left\{ \int_0^I \delta W \right\} dV = \int_V W dV \end{aligned}$$

en donde

$$W = \int_0^I \delta W = \int_0^I \tau_{ij} \delta e_{ij} \quad (2.22)$$

Definimos  $W$  como trabajo interno por unidad de volumen y notamos que, en general, el trabajo ejecutado para alcanzar el estado (I) desde un estado (0) depende del camino elegido a lo largo de la deformación.

En adelante supondremos al cuerpo totalmente *elástico* y localmente *isótropo*. Además, asumiremos que las propiedades elásticas son independientes de la "historia" previa de la deformación, ya que el error que esto presupone es realmente despreciable. De este modo, (2.22) se convierte en

$$U = \int_0^I \tau_{ij} \delta e_{ij} \quad (2.23)$$

$$\delta U = \tau_{ij} \delta e_{ij}$$

La cantidad  $U$  es una función uniforme de los estados instantáneos de deformación elástica. En un ciclo cerrado es  $\delta U = 0$  y en general  $\delta U = dU$  es un diferencial total de los estados instantáneos de deformación. La función  $U$  es comunmente llamada *energía de deformación por unidad de volumen*. Entonces:

$$\delta U = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} \quad (2.24)$$

Comparando (2.24) con (2.23) se obtiene:

$$\tau_{ij} = \frac{\partial U}{\partial e_{ij}} \quad (2.25)$$

Esta expresión es válida para una ley de elasticidad definida únicamente por la forma de la función  $U$  y constituye una generalización del teorema de Castigliano para elasticidad no lineal.

La ley tensión-deformación es unívocamente determinada por la función energía de deformación y viceversa. Integrando sobre todo el volumen, obtenemos la energía de deformación total  $U^{(i)}$ :

$$U^{(i)} = \int_V U \, dV = \int_V \left\{ \int_0^I \tau_{ij} \, \delta e_{ij} \right\} dV \quad (2.26)$$

En elasticidad lineal, para cuerpos isótropos tenemos:

$$U(e_{ij}) = \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} (e_{11} + e_{22} + e_{33})^2 + G(e_{11}^2 + e_{22}^2 + e_{33}^2) + 2G(e_{12}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2) \quad (2.27)$$

En caso de ser necesario, a través de las relaciones (2.5), podemos expresar  $U$  solamente en términos de desplazamientos. Por ejemplo, a partir de (2.27) es

$$\begin{aligned}
 U(u_i) = & \frac{E\nu}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right]^2 + \\
 & + G \left[ \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right]^2 \right] + \\
 & + \frac{G}{2} \left[ \left[ \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right]^2 + \left[ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right]^2 + \right. \\
 & \left. + \left[ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right]^2 \right] \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

Cuando la existencia de la función energía de deformación está asegurada, el principio de los trabajos virtuales se puede transformar en

$$\int_V \delta U(u_i) dV - \int_V F_i \delta u_i dV - \int_{A_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dA = 0 \quad (2.29)$$

Seguidamente asumimos que las fuerzas de superficie y de volumen se pueden derivar de potenciales  $\phi$  y  $\psi$  en la forma:

$$F_i = - \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \qquad \bar{T}_i = - \frac{\partial \psi}{\partial u_i}$$

Por lo tanto:

$$\delta \phi = \frac{\partial \phi}{\partial u_i} \delta u_i = - F_i \delta u_i$$

$$\delta \psi = \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \delta u_i = - \bar{T}_i \delta u_i$$

La expresión (2.29) se convierte en:

$$\delta \Pi = 0 \qquad (2.30)$$

donde

$$\Pi = \int_V U(u_i) dV + \int_V \phi(u_i) dV + \int_{A_\sigma} \psi(u_i) dA \qquad (2.31)$$

es la *energía potencial total* del cuerpo. El principio (2.30) establece (ref. 2):

"Entre todos los desplazamientos admisibles  $u_i$  que satisfacen las condiciones geométricas de contorno, los desplazamientos reales del cuerpo en equilibrio hacen tomar a la energía potencial total un valor estacionario".

Consideraciones físicas permiten asumir que la energía de deformación es una función definida positiva de las componentes instantáneas de deformación. Además, si sólo consideramos los casos en que las fuerzas de superficie y de volumen pueden derivarse de funciones potenciales

$$- \phi(u_i) = F_i u_i \quad ; \quad - \psi(u_i) = \bar{T}_i u_i$$

con las propiedades establecidas para la formulación de (2.31), puede demostrarse que:

"Entre todas las funciones desplazamiento admisibles, los desplazamientos de equilibrio son los que hacen tomar a la energía potencial total un mínimo absoluto".

#### 2.4 - GENERALIZACIÓN DEL PRINCIPIO DE LA MÍNIMA ENERGÍA POTENCIAL

A fin de generalizar el principio de la mínima energía potencial comenzaremos por resumir las principales etapas que nos condujeron al mismo. Hemos supuesto:

- a) Existe una función de estado definida positiva  $U(e_{ij})$  en términos de las componentes instantáneas de deformación.

- b) Los desplazamientos  $u_i$  cumplen con las condiciones geométricas de contorno  $u_i = \bar{u}_i$  sobre  $A_u$ .
- c) Las deformaciones satisfacen  $e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$ .
- d) Las fuerzas de superficie y de volumen pueden derivarse de un potencial.

En principio de la mínima energía potencial asegura que en tales condiciones los verdaderos desplazamientos de equilibrio hacen tomar a la energía potencial un mínimo absoluto. Vamos ahora a demostrar que las condiciones subsidarias b) y c) pueden incluirse en la estructura de una expresión variacional por la introducción de multiplicadores de Lagrange y de esta forma el principio puede ser generalizado. Incorporando, por lo tanto, las condiciones b) y c) por medio de los multiplicadores  $\lambda_{ij}, \bar{\lambda}_i$ , el problema anterior se reduce a hallar las funciones  $u_i, \lambda_{ij}, \bar{\lambda}_i$ , tales que hagan tomar al funcional

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \int_V \{U(e_{ij}) - F_i u_i\} dV - \int_{A_\sigma} \bar{T}_i u_i dA - \int_{A_u} \bar{\lambda}_i (u_i - \\ & - \bar{u}_i) dA - \int_V \lambda_{ij} \{e_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})\} dV \end{aligned}$$

un valor estacionario, sin condiciones adicionales. Efectuan

do la variación:

$$\begin{aligned}
 \Pi_G &= \int_V \frac{\partial U(\mathbf{e}_{ij})}{\partial \mathbf{e}_{ij}} \delta \mathbf{e}_{ij} \, dV - \int_V \mathbf{F}_i \delta u_i \, dV - \int_{A_\sigma} \bar{\mathbf{T}}_i \delta u_i \, dA - \\
 &- \int_{A_u} \bar{\lambda}_i \delta u_i \, dA - \int_{A_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta \bar{\lambda}_i \, dA - \int_V \{ \mathbf{e}_{ij} - \\
 &- \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \} \delta \lambda_{ij} \, dV - \int_V \lambda_{ij} \delta \mathbf{e}_{ij} \, dV + \\
 &+ \frac{1}{2} \int_V \lambda_{ij} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \, dV.
 \end{aligned}$$

Suponemos que el conjunto  $\lambda_{ij}$  es simétrico o sea:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}.$$

En tal caso se tiene:

$$\frac{1}{2} \int_V \lambda_{ij} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \, dV = \int_V \{ (\lambda_{ij} \delta u_i)_{,j} - \lambda_{ij,j} \} \delta u_i \, dV.$$

Reemplazando en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_G = & \int_V \left[ \left[ \frac{\partial U(e_{ij})}{\partial e_{ij}} - \lambda_{ij} \right] \delta e_{ij} - \left\{ e_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + \right. \right. \\
& \left. \left. + u_{j,i}) \right\} \delta \lambda_{ij} \right] dV - \int_V F_i \delta u_i dV + \int_V (\lambda_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \\
& - \int_V \lambda_{ij,j} \delta u_i dV - \int_{A_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dA - \int_{A_\sigma} \bar{\lambda}_i \delta u_i dA - \\
& - \int_{A_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta \lambda_i dA.
\end{aligned}$$

Integrando por partes y reagrupando:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_G = & \int_V \left[ \frac{\partial U(e_{ij})}{\partial e_{ij}} - \lambda_{ij} \right] \delta e_{ij} dV - \int_V \left\{ e_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + \right. \\
& \left. + u_{j,i}) \delta \lambda_{ij} dV - \int_V (\lambda_{ij,j} + F_i) \delta u_i dV + \int_{A_\sigma} (\lambda_{ij} u_j - \right. \\
& \left. - \bar{T}_i) \delta u_i dA + \int_{A_u} (\lambda_{ij} u_j - \bar{\lambda}_i) \delta u_i dA - \right. \\
& \left. - \int_{A_u} (u_i - \bar{u}_i) \delta \lambda_i dA. \right.
\end{aligned}$$

Ya que las variaciones  $\delta e_{ij}$ ,  $\delta \lambda_{ij}$ ,  $\delta u_i$ ,  $\delta \bar{\lambda}_i$ , son arbitrarias, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\lambda_{ij} = \frac{\partial U(e_{ij})}{\partial e_{ij}} = \tau_{ij}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

$$\tau_{ij,j} + F_i = 0$$

en el interior del cuerpo, mientras que sobre la superficie externa:

$$\lambda_{ij} u_j = \bar{T}_i \quad \text{en } A_\sigma$$

$$\lambda_{ij} u_j = \bar{\lambda}_i \quad \text{en } A_u$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en } A_u$$

Teniendo en cuenta (2.11), (2.12) y (2.25) los multiplicadores de Lagrange toman un sencillo significado físico:

$$\lambda_{ij} = \tau_{ij} \quad ; \quad \bar{\lambda}_i = T_i$$

Reemplazando en el funcional  $\Pi_C$  tenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \Pi_G = & \int_V \{U(e_{ij}) - u_i F_i - \tau_{ij} \{e_{ij} - \frac{1}{2} (u_{i,j} + \\ & + u_{j,i})\}\} dV - \int_{A_\sigma} \bar{T}_i u_i dA - \int_{A_u} (u_i - \bar{u}_i) T_i dA \end{aligned} \quad (2.34)$$

Las cantidades sujetas a variación en el funcional (2.34) son  $e_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $\tau_{ij}$ ,  $T_i$  sin condiciones subsidiarias. Queda probado que el problema establecido por (2.30) y (2.31) con las condiciones (2.5) y (2.13) puede sustituirse por uno en el cual se busca un valor estacionario al funcional (2.34).

Este es el punto de partida para desarrollar numerosos teoremas variacionales con aplicación en mecánica estructural, entre los cuales se cuenta el funcional de Hellinger-Reissner (ref.2).

## 2.5 - EL FUNCIONAL DE HELLINGER-REISSNER

Derivaremos este funcional como caso particular del funcional generalizado (2.34). En la expresión (2.33) de la variación  $\delta\Pi_G$ , ahora requerimos que se anulen los coeficientes de las variaciones  $\delta e_{ij}$ , o sea aceptamos que se cumplen en forma idéntica las relaciones:

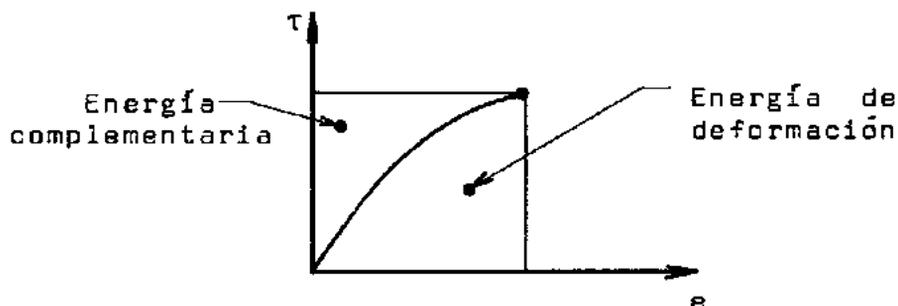
$$\frac{\partial U(e_{ij})}{\partial e_{ij}} = \tau_{ij}$$

Esto significa que las componentes de deformación  $e_{ij}$  no serán ya cantidades independientes, sino que podrán calcularse a través de relaciones tensión-deformación, conocidas por separado del principio variacional. En elasticidad lineal, con pequeñas deformaciones, se acepta la validez de la ley de Hooke generalizada (2.6), o bien, para materiales isotrópicos, las relaciones (2.8) y (2.9).

A fin de simplificar las deducciones siguientes, introducimos aquí la energía complementaria por unidad de volumen  $\Omega$ , a través de la definición

$$\Omega = \tau_{ij} e_{ij} - U(e_{ij}) \quad (2.35)$$

Fig.1



Con las relaciones tensión-deformación es posible expresar la energía complementaria por unidad de volumen exclusivamente en términos de tensiones. En cuerpos isótropos, aplicando (2.8) en (2.35) se tiene:

$$\begin{aligned} \Omega(\tau_{ij}) = & \frac{1}{2E} \{ (\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33})^2 + 2(1+\nu) (\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \\ & + \tau_{31}^2 - \tau_{11} \tau_{22} - \tau_{22} \tau_{33} - \tau_{33} \tau_{11}) \} \quad (2.36) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.2), (2.35) y (2.36), las componentes de deformación se eliminan del funcional (2.34), para dar el funcional de Hellinger-Reissner en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \int_V \{ \tau_{ij} u_{i,j} - F_i u_i - \Omega(\tau_{ij}) \} dV - \int_{A_\sigma} \bar{T}_i u_i dA - \\ & - \int_{A_u} (u_i - \bar{u}_i) T_i dA \quad (2.37) \end{aligned}$$

La energía complementaria por unidad de volumen  $\Omega(\tau_{ij})$  está expresada en términos de tensiones y las cantidades libres de variar en el funcional (2.37) son  $\tau_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $T_i$  sin condiciones subsidiarias.

Según el caso, a veces interesa dar a (2.37) una for

ma diferente. Para ello, observamos que

$$\int_V \tau_{ij} u_{i,j} dV = \int_A \tau_{ij} v_j u_i dA - \int_V \tau_{ij,j} u_i dA \quad (2.38)$$

Sustituyendo (2.38) en (2.37) tenemos:

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \int_V \{-\Omega(\tau_{ij}) - (\tau_{ij,j} + F_i)u_i\} dV - \int_{A_\sigma} (\bar{T}_i - \\ & - T_i)u_i dA + \int_{A_u} \bar{u}_i T_i dA \end{aligned} \quad (2.39)$$

donde las cantidades libres de variar son las mismas que en (2.37).

En el próximo capítulo particularizaremos el funcional de Hellinger-Reissner para el problema de flexión de placas, obteniéndose algunos modelos que servirán de base para la implementación de elementos finitos isoparamétricos mixtos.

### CAPÍTULO III

#### ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS PARA FLEXIÓN DE PLACAS

##### 3.1 - TEORÍA DE REISSNER

Es sabido que la teoría elemental de flexión de placas delgadas con deformaciones pequeñas conduce a una ecuación diferencial de cuarto orden, sobre un dominio bidimensional, en la cual la función incógnita es el desplazamiento transversal de los puntos del plano medio de la placa (ref. .3).

De acuerdo con esto, ocho condiciones de contorno pueden ser satisfechas en total, o bien, sobre placas rectangulares, dos por cada lado. La razón formal de no poder satisfacer más condiciones es el orden de la ecuación básica, y desde el punto de vista físico, ello se debe al hecho de haber despreciado las deformaciones debidas al esfuerzo de corte, lo cual equivale a sustituir el material real por otro cuyo módulo de elasticidad transversal en correspondencia con la dirección normal a la placa sea infinito.

Sin embargo, atribuyendo propiedades hipotéticas al material, no puede esperarse una concordancia completa entre la distribución teórica de tensiones y al comportamiento real del sistema. Además de estar restringida a espesores delgados, la inexactitud de la teoría elemental se hace notar sobre los bordes de la placa y en torno a orificios pequeños.

Para una placa de espesor finito, aparece más natural el requerimiento de cumplir tres condiciones de contorno por lado, en lugar de dos y la generalización de la teoría elemental, que contempla este aspecto por inclusión del efecto de las deformaciones por corte, es debida sustancialmente a E. Reissner (ref. 7).

En forma similar a la teoría elemental y restringiéndonos a pequeñas deformaciones en la placa, comenzamos definiendo las siguientes resultantes de tensiones:

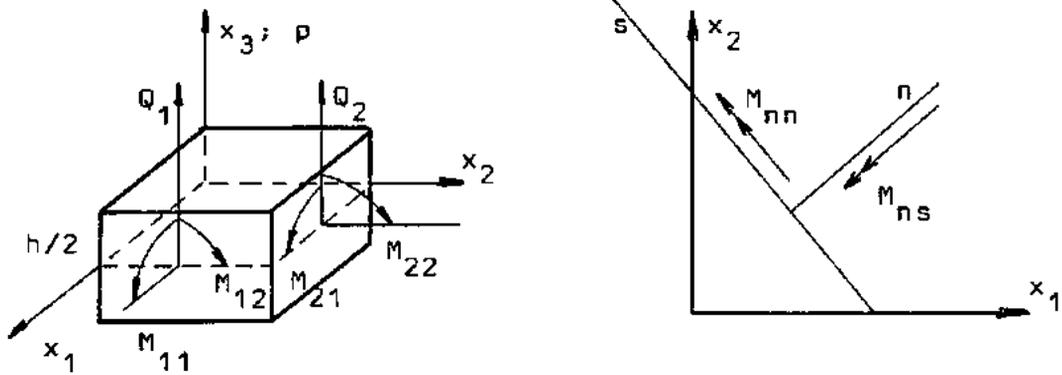
$$M_{ij} = \int \tau_{ij} x_3 dx_3 \quad ; \quad Q_j = \int \tau_{j3} dx_3$$

$$i, j = 1, 2 \quad (3.1)$$

$$M_{nn} = \int \tau_{nn} x_3 dx_3 \quad ; \quad M_{ns} = \int \tau_{ns} x_3 dx_3$$

$$Q_n = \int \tau_{n3} dx_3 \quad (3.2)$$

Fig.2



Designando con  $p$  la carga transversal por unidad de superficie, para materiales isótopos es posible elegir la siguiente distribución de tensiones (refs. 2-7):

$$\tau_{13} = \tau_{23} = 0 \quad \tau_{33} = p \quad \text{en } x_3 = \frac{h}{2}$$

$$\tau_{13} = \tau_{23} = \tau_{33} = 0 \quad \text{en } x_3 = -\frac{h}{2}$$

$$\tau_{ij} = M_{ij} \left( 12 \frac{x_3}{h^3} \right) \quad i, j = 1, 2$$

$$\tau_{j3} = Q_j \left\{ 1 - \left( \frac{x_3}{h/2} \right)^2 \right\} / \left( \frac{2h}{3} \right) \quad j = 1, 2$$

$$\tau_{33} = \left( \frac{3}{4} \right) p \left\{ \frac{x_3}{(h/2)} - \left( \frac{x_3}{h/2} \right)^3 / 3 + \frac{2}{3} \right\} \quad (3.3)$$

Puede observarse que esa distribución cumple con las condiciones de equilibrio (2.3) en el interior y con la condición (2.11) sobre la superficie superior e inferior de la placa. Además, se suponen nulas las fuerzas de volumen.

Sustituyendo (3.3) en el funcional generalizado (2.38) e introduciendo las siguientes deformaciones generalizadas:

$$\begin{aligned}\phi_j &= \left(\frac{12}{h^3}\right) \int u_j x_3 dx_3, & j &= 1, 2 \\ w &= \left(\frac{3}{2h}\right) \int u_3 \left\{1 - \left(\frac{x_3}{h/2}\right)^2\right\} dx_3 \\ \phi_n &= u_{nj} \phi_j & u_{nj} &= \cos(x_j, \bar{n}) \\ \phi_s &= u_{sj} \phi_j & u_{sj} &= \cos(x_j, \bar{s})\end{aligned}\tag{3.4}$$

se obtiene (refs. 2-6):

$$\begin{aligned}\Pi_R &= \int_V \{(-Q_{j,j} - p)w - (M_{ij,i} - Q_j)\phi_j - \bar{\Omega}\} dA + \\ &+ \int_{S_u} (M_{nn} \bar{\phi} + M_{ns} \bar{\phi}_s + \bar{w} Q_n) dS - \int_{S_\sigma} \{(\bar{M}_{nn} - \\ &- M_{nn})\phi_n + (\bar{M}_{ns} - M_{ns})\phi_s + (\bar{Q}_n - Q_n)w\} dS\end{aligned}\tag{3.5}$$

en la cual las magnitudes con trazo son valores prescriptos y la energía complementaria  $\Omega = \Omega_B + \Omega_{ST}$  tiene en cuenta las contribuciones debidas a flexión y esfuerzo de corte en la siguiente manera:

a) Momentos flectores y torsores con influencia del esfuerzo normal:

$$\Omega_B = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{D(1-\nu^2)} \{ M_{11}^2 + M_{22}^2 + 2(1+\nu)M_{12}^2 - 2\nu M_{11} M_{22} \} - \frac{\nu}{5D(1-\nu^2)} h^2 p (M_{11} + M_{22}) \right] \quad (3.6)$$

b) Esfuerzo de corte:

$$\Omega_{ST} = \frac{1}{2} \frac{1}{Gkh} (Q_1^2 + Q_2^2)$$

en las cuales es

$$D = E h^3 / 12(1-\nu^2) \quad k = \frac{5}{6}$$

G = módulo de elasticidad transversal

p = carga transversal por unidad de superficie.

Puede observarse que las magnitudes  $\phi_1, \phi_2$  son las rotaciones promedio de las secciones  $x_1 = \text{cte}$  y  $x_2 = \text{cte}$ , mientras que  $w$  es el desplazamiento vertical promedio de un segmento normal a la placa. Las cantidades libres de variar en el funcional (3.5) son  $M_{ij}, w, Q_j, \phi_j$  sin condiciones subsidiarias.

Efectuando la variación se tiene:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_R = & \int_A \{ - (Q_{j,j} + p) \delta w - (M_{ij,i} - Q_j) \delta \phi_j - \{ \phi_{1,1} + \\ & + \frac{1}{D(1-\nu^2)} (M_{11} - \nu M_{22} - \frac{\nu}{10} h^2 p) \} \delta M_{11} - \{ \phi_{2,2} + \\ & + \frac{1}{D(1-\nu^2)} (M_{22} - \nu M_{11} - \frac{\nu}{10} h^2 p) \} \delta M_{22} - \\ & - \{ \frac{1}{D(1-\nu^2)} \{ 2(1+\nu) M_{12} \} + \phi_{1,2} + \phi_{2,1} \} \delta M_{12} + \\ & + \{ w_{,j} + \phi_j - \frac{1}{Gkh} Q_j \} \delta Q_j \} dA + \int_{S_u} \{ (\bar{\phi}_n - \phi_n) \delta M_{nn} + \\ & + (\bar{\phi}_s - \phi_s) \delta M_{ns} + (\bar{w} - w) \delta Q_n \} dS - \int_{S_\sigma} \{ (\bar{M}_{nn} - \\ & - M_{nn}) \delta \phi_n + (\bar{M}_{ns} - M_{ns}) \delta \phi_s + (\bar{Q}_n - Q_n) \delta w \} dS = 0. \end{aligned}$$

Ya que las cantidades  $M_{ij}$ ,  $Q_j$ ,  $w$ ,  $\phi_j$  son libres de variar, en donde no están prescriptas, luego de efectuar alguna elaboración para despejar los momentos en términos de las derivadas de las rotaciones promedio, se llega al siguiente sistema de ecuaciones para gobernar al problema de flexión de placas con deformaciones pequeñas:

Condiciones de equilibrio en el interior:

$$Q_{j,j} + p = 0 \quad (a)$$

$$M_{ij,i} = Q_j \quad (b)$$

Relaciones fuerza-desplazamiento:

$$M_{11} = D(\phi_{1,1} + \nu\phi_{2,2}) + \frac{\nu h^2 p}{10(1-\nu)}$$

$$M_{22} = D(\phi_{2,2} + \nu\phi_{1,1}) + \frac{\nu h^2 p}{10(1-\nu)} \quad (c)$$

$$M_{12} = \frac{Gh^3}{12} (\phi_{1,2} + \phi_{2,1})$$

$$Q_1 = Gkh(w_{,1} + \phi_1)$$

$$Q_2 = Gkh(w_{,2} + \phi_2) \quad (d)$$

En el contorno  $S_u$  (3.7)

$$w = \bar{w} \quad (e)$$

$$\phi_n = \bar{\phi}_n$$

$$\phi_s = \bar{\phi}_s \quad (f)$$

En el contorno  $S_\sigma$

$$M_{nn} = \bar{M}_{nn}$$

$$M_{ns} = \bar{M}_{ns} \quad (g)$$

$$Q_n = \bar{Q}_n \quad (h)$$

El sistema de ocho ecuaciones diferenciales lineales de primer orden constituido por las ecuaciones de equilibrio (a), (b) y las relaciones fuerza-desplazamiento (c), (d) admite doce condiciones de contorno en total, distribuidas de la siguiente forma: seis condiciones asociadas al sistema (a), (b), cuatro condiciones para el sistema (c) y dos condiciones en correspondencia al sistema (d).

Eliminando variables por sustitución es posible disminuir el número de incógnitas, pero aumentando el orden del

sistema remanente, de tal forma que el número de condiciones de contorno permanece inalterado.

Con esta teoría, se presenta entonces la posibilidad de cumplir en forma más ajustada los requerimientos de contorno que surgen en los casos habitualmente comunes de la práctica. Para placas cuadrangulares, en los casos más frecuentes es válido tomar:

Borde libre:

$$M_{nn} = 0 \quad M_{ns} = 0 \quad Q_n = 0$$

Borde simplemente apoyado:

$$a) \quad w = 0 \quad M_{nn} = 0 \quad \phi_s = 0$$

$$b) \quad w = 0 \quad M_{nn} = 0 \quad M_{ns} = 0$$

Borde empotrado:

$$w = 0 \quad \phi_n = 0 \quad \phi_s = 0$$

Eje de simetría:

$$Q_n = 0 \quad M_{ns} = 0 \quad \phi_n = 0$$

El funcional mixto (3.5) dará origen a los tres modelos de base cuyos resultados se describen a lo largo de los desarrollos siguientes.

### 3.2 - MODELO MIXTO CON $w, M_{ij}$ COMO VARIABLES INDEPENDIENTES

Una forma de obtener la reducción del número de variables independientes en el funcional (3.5) es asumiendo que algunas de las ecuaciones diferenciales del sistema (3.7) se cumplen idénticamente.

Por ejemplo, si admitimos que se satisfacen idénticamente las ecuaciones de equilibrio

$$M_{ij,i} = Q_j$$

en el interior y sobre el contorno hacemos

$$M_{nn} = \bar{M}_{nn} \quad M_{ns} = \bar{M}_{ns} \quad w = \bar{w} \quad (3.8)$$

luego de integrar por partes, el funcional queda:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \int_A \{ M_{ij,i} w_{,j} - p w - \Omega(M_{ij}) \} dA + \\ & + \int_{S_u} (M_{nn} \bar{\phi}_n + M_{ns} \bar{\phi}_s) dS - \int_{S_o} \bar{Q}_n w dS \quad (3.9) \end{aligned}$$

habiéndose expresado  $\Omega(M_{ij})$  exclusivamente en función de los momentos al reemplazar (3.7) (b) en (3.6) (b). Las cantidades libres de variar en (3.9) son ahora  $M_{ij}$ ,  $w$  con las condiciones subsidiarias (3.8).

Este modelo ya ha sido utilizado para elementos finitos mixtos: fue propuesto primitivamente por L.R.Herrmann (ref. 9) y también se cuenta entre los ejemplos ofrecidos por J. Connor (ref. 5).

### 3.3 - FORMA DISCRETIZADA DEL PRINCIPIO VARIACIONAL. ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS.

En líneas generales, la aplicación del método de los elementos finitos utilizando funcionales mixtos tales como el que nos ocupa, consta de las siguientes etapas:

a) Discretización del medio continuo por subregiones ele

mentales interconectadas por fronteras, sobre las cuales están definidos un número preestablecido de nodos o puntos particulares.

- b) Definición de las funciones incógnitas en términos de los valores nodales de las mismas en todo el dominio del elemento, a través de adecuadas funciones de interpolación. En el caso que tratamos, las incógnitas nodales que operan como parámetros son el desplazamiento transversal medio  $w$  y los momentos  $M_{11}$ ,  $M_{12}$ ,  $M_{22}$ . Por otro lado, las funciones de interpolación deberán cumplir ciertas condiciones, a fin de asegurar la convergencia a la solución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales cuando el número de elementos crece progresivamente y su tamaño disminuye.
- c) Evaluación del funcional en cada elemento en términos de los valores nodales, y sobre el recinto total por suma de las contribuciones elementales. Hay que tener presente que debido a las discontinuidades en la representación de las funciones buscadas, en ciertos casos aparecerán términos adicionales asociados a las fronteras interelemento.
- d) Aplicación de las condiciones de contorno viables de ser

satisfechas a través de adecuados valores nodales.

- e) Imposición de la condición de valor estacionario sobre el funcional así evaluado y obtención, como consecuencia, de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales en términos de los parámetros incógnitas.
- f) Solución del sistema de ecuaciones resultante y obtención de las funciones incógnitas con los parámetros calculados y las funciones de interpolación.

Para facilitar la presentación de esta secuencia adoptamos, de aquí en más, la notación matricial y efectuamos las siguientes definiciones:

$\underline{W}^n$  = vector de los desplazamientos nodales del elemento.

$\underline{M}^n$  = matriz de los momentos nodales del elemento.

$\underline{p}^n$  = vector de las ordenadas nodales de la carga de superficie.

$\underline{H}^n$  = vector de las inversas de los espesores nodales.

Explícitamente:

$$\begin{aligned}
 \underline{W}^n &= \{W_{n1}, W_{n2}, \dots\}^T \\
 \underline{M}^n &= \{M_{-11}^n, M_{-12}^n, M_{-22}^n\}^T \\
 \underline{M}_{ij}^n &= \{M_{ij(n1)}, M_{ij(n2)}, \dots\}^T \\
 \underline{H}^n &= \left\{ \frac{1}{h_{n1}}, \frac{1}{h_{n2}}, \dots \right\}^T
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

A continuación representamos las funciones incógnitas en el interior del elemento

$$w = \phi_w \underline{W}^n \quad M_{ij} = \phi_m \underline{M}_{ij}^n \tag{3.11}$$

en donde  $\phi_w$ ,  $\phi_m$ , son las funciones de interpolación para desplazamientos y momentos respectivamente.

Observando que el funcional (3.9) contiene sólo derivadas primeras de las funciones incógnitas y por razones que surgirán de inmediato, se presentan condiciones ventajosas para la implementación de elementos isoparamétricos, los cuales describen la geometría del elemento en función de las coordenadas nodales con las mismas funciones de interpolación con que se representan la funciones incógnitas en términos

de los valores nodales. Por lo tanto hacemos:

$$\underline{\phi}_w = \underline{\phi}_m = \underline{\phi} = \{\phi_1, \phi_2, \dots\}$$

y además

$$\begin{aligned} x_1 &= \underline{\phi} \underline{\chi}_1^n \\ x_2 &= \underline{\phi} \underline{\chi}_2^n \end{aligned} \quad (3.12)$$

en las cuales  $\underline{\chi}_1^n, \underline{\chi}_2^n$  son los vectores de las coordenadas nodales del elemento. También es favorable la representación de la carga distribuida sobre la superficie y de las inversas de los espesores con las mismas funciones de interpolación:

$$\begin{aligned} p &= \underline{\phi} \underline{p}^n \\ \frac{1}{h} &= \underline{\phi} \underline{h}^n \end{aligned} \quad (3.13)$$

Solamente nos limitaremos a presentar las propiedades particulares de los elementos isoparamétricos que nos resultarán útiles en la discusión de la convergencia, ya que las características generales de los mismos, están ampliamente detalladas en (ref. 4).

Para el método de elementos finitos, con funcio  
nales generalizados, consideraremos como válidos los siguien  
tes criterios de convergencia (ref. 4):

*Criterio I:*

Las funciones de interpolación deben establecer con  
tinuidad de las funciones incógnitas y sus derivadas hasta  
de un orden inferior a las presentes en el funcional, a lo  
largo de todas las fronteras interelemento.

*Criterio II:*

Las funciones de interpolación deben ser tales que,  
en el límite, cuando el tamaño de los elementos se hace muy  
pequeño, puedan representar los estados constantes de todas  
las funciones incógnitas y sus derivadas hasta las de mayor  
orden presentes en el funcional.

Aplicadas estas condiciones al funcional (3.9) obte  
nemos:

- I)  $w, M_{ij}$  deben ser continuos en las fronteras interele  
mento.

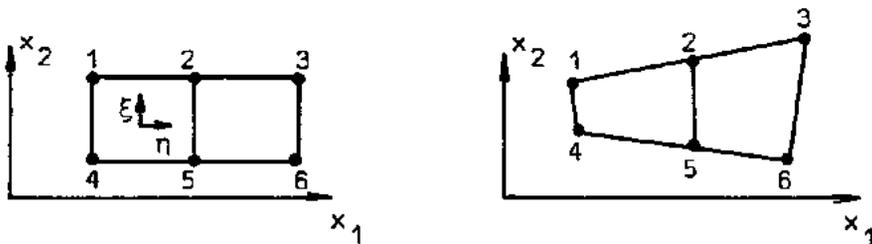
II) Tienen que poderse representar los estados constantes de  $w$ ,  $M_{ij}$  y sus derivadas primeras.

Veamos como los elementos isoparamétricos mantienen las condiciones de continuidad interelemento, o sea cumplen el criterio I de convergencia, para lo cual enunciaremos el siguiente.

*Teorema 1:*

"Si dos elementos adyacentes se obtienen a partir de elementos generadores en los cuales las funciones de interpolación establecen continuidad interelemento, entonces los elementos distorsionados serán contiguos".

Fig.3



a) Elementos generadores

b) Elementos distorsionados

Consideremos las dos configuraciones de Fig. 3. Suponemos que las funciones  $\underline{\phi}$  están definidas en coordenadas locales  $\xi, \eta$  a partir de los valores nodales de las mismas. Si en ambos casos obtenemos las coordenadas globales a través de la transformación  $x_i = \underline{\phi} X_i^n$  y las funciones  $x_i$  tienen valores únicos sobre las fronteras interelemento de (a), al poseer (b) el mismo conjunto de coordenadas nodales, evidentemente la continuidad en (b) está implícita y en la geometría no se producirán grietas ni penetraciones.

Veamos ahora qué acontece en los elementos distorsionados cuando tenemos una función interpolada en forma continua en la configuración original. Sea  $V$  una variable cualquiera que se representa en (a) con

$$V = \underline{\phi} \underline{v}^n$$

en donde  $\underline{v}^n$  son los valores nodales de la función y  $\underline{\phi}$  son las funciones de interpolación que establecen continuidad interelemento. Entonces podemos enunciar el:

*Teorema 2:*

"Si se representa  $V$  sobre los elementos distorsionados con  $V = \underline{\phi} \underline{v}^n$ , dicha función será continua en (b)."

La prueba de este teorema se efectúa siguiendo la misma línea que en el teorema anterior. Obsérvese que las funciones de interpolación  $\phi$  para la transformación de coordenadas pueden ser distintas que las que se emplean para representar las funciones incógnitas. Denominaremos elementos subparamétricos aquellos en los cuales estas últimas son de mayor orden que las primeras y de superparamétricos en caso contrario. En los elementos isoparamétricos son idénticas, lo cual simplifica la satisfacción del criterio II de convergencia como se ve con el siguiente:

*Teorema 3:*

"En funcionales que contienen sólo derivadas primeras de las funciones incógnitas, el criterio II de convergencia para elementos isoparamétricos se cumple si  $\sum \phi_i = 1$ ."

Para demostrar este teorema recordemos que, con este tipo de funcionales, dicho criterio requiere que se puedan representar los estados constantes de las variables y sus derivadas primeras. Por ejemplo, en un dominio bidimensional esto se obtiene si es válido:

$$V = \phi \underline{V}^n = \sum \phi_i V_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 \quad (3.14)$$

para cualquier valor que tomen las constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ , y adecuados  $\phi$ . En un nodo genérico (i) se verifica:

$$V_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_{1i} + \alpha_3 X_{2i}$$

de modo que la relación (3.14) ahora se expresa:

$$\begin{aligned} \phi V_i^n &= \alpha_1 \int \phi + \alpha_2 \int \phi X_{1i} + \alpha_3 \int \phi X_{2i} = \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 x_2 \end{aligned}$$

Esto se satisface para valores arbitrarios de  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  si:

$$\int \phi_i = 1 \quad x_1 = \int \phi X_{1i}^n \quad x_2 = \int \phi X_{2i}^n$$

Observamos que las dos últimas condiciones se cumplen por definición de elemento isoparamétrico y sólo nos resta la primera de las relaciones como condición adicional, quedando demostrado el teorema.

Al inspeccionar la definición:

$$V = \sum_{i=1}^n \phi_i V_i = \phi_1 V_1 + \phi_2 V_2 \dots$$

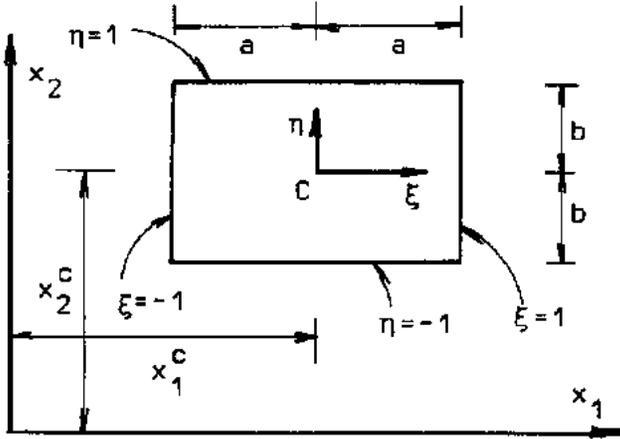
observamos que, en un nodo particular (i) la correspondiente  $\phi_i$  debe tomar allí un valor unitario, mientras que todas las otras funciones  $\phi$  se anulan en dicho nodo. Esta propiedad fundamental, junto con lo requerido por el teorema 3, son las condiciones que gobiernan la elección de las funciones de interpolación para elementos isoparamétricos.

Varias son las familias de funciones admisibles para nuestro propósito y que originan secuencias de elementos isoparamétricos. Para todos los modelos desarrollados más adelante se ha adoptado la designada "Serendipity" por O. Zienkiewicz pues son conocidos los excelentes resultados de su aplicación a otros tipos de problemas.

Los elementos bidimensionales generadores de dicha familia se presentan en la Fig. 4.

Resulta útil expresar las funciones de interpolación empleando las coordenadas normalizadas  $\xi, \eta$  y según el orden de aquellas son necesarios cuatro, ocho o doce nodos periféricos para los elementos que designaremos lineal, cuadrático y cúbico, respectivamente, como se ve en Fig. 5.

Fig.4

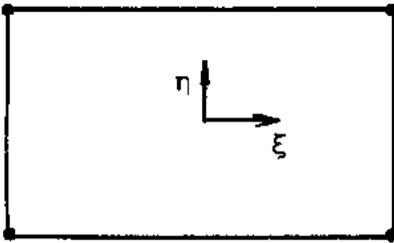


$$\xi = (x_1 - x_1^c) / a$$

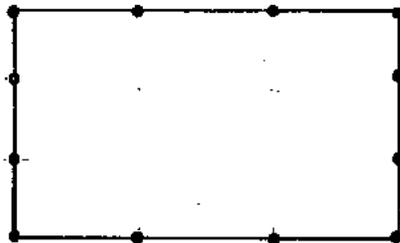
$$\eta = (x_2 - x_2^c) / b$$

Fig.5

Lineal



Cuadrático



Cúbico

Introduciendo las nuevas variables:

$$\xi_0 = \xi \xi_i$$

$$\eta_0 = \eta \eta_i$$

las funciones de interpolación para los tres elementos men  
cionados son:

*Lineal:*

$$\phi_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0)$$

*Cuadrático:*

Nodos de esquina:  $\phi_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (\xi_0 + \eta_0 - 1)$

Nodos intermedios:  $\xi_i = 0 : \phi_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_0)$

$\eta_i = 0 : \phi_i = \frac{1}{2} (1 + \xi_0) (1 - \eta^2)$

*Cúbico:*

Nodos de esquina:  $\phi_i = \frac{1}{32} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (-10 + 9(\xi^2 + \eta^2))$

Nodos intermedios:  $\xi_i = \pm 1 \quad \eta_i = \pm \frac{1}{3}$

$$\phi_i = \frac{9}{32} (1 + \xi_0) (1 - \eta^2) (1 + 9\eta_0)$$

y los restantes se obtienen en forma similar.

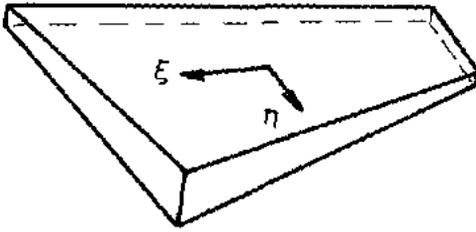
Puede verificarse que las funciones cumplen con los requerimientos para satisfacer el criterio II de convergencia. Los elementos superiores al cúbico no presentan ventajas que contrabalanceen la creciente complicación de las funciones y la aparición de nodos internos. En el uso de estos elementos hemos podido comprobar que el cuadrático suele aparecer como el más equilibrado, cosa que también acontece en el problema de flexión de placas y que podrá constatarse a través de los resultados ofrecidos en el capítulo siguiente.

Una vez efectuada la transformación de coordenadas  $x_i = \phi \underline{x}_i^n$ , los tres elementos en estudio para flexión de placas con espesor variable, asumen la forma de Fig. 6.

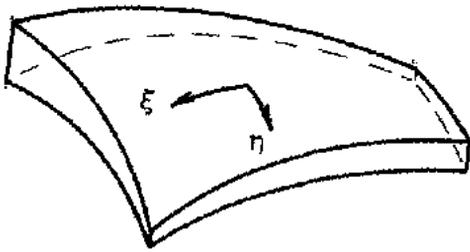
Obsérvese que la carga de superficie, que no ha sido representada en los dibujos, puede tomar también variación lineal, cuadrática o cúbica según sea el elemento. Surge de inmediato en evidencia que la flexibilidad de las funciones de interpolación de orden superior (cuadrático y cúbico) permiten atacar problemas de gran generalidad en cuanto a carga y geometría.

Fig.6

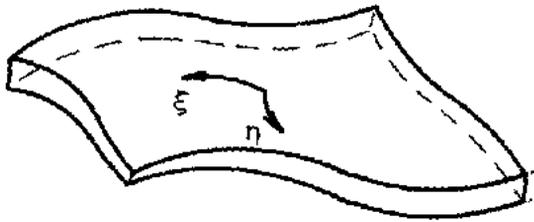
Lineal



Cuadrático



Cúbico



Quedan aún por aclarar dos aspectos importantes en el mecanismo de aplicación de los elementos isoparamétricos. El primero de ellos, se refiere a la obtención de las derivadas con respecto a las coordenadas globales de las funciones de interpolación. Aplicando la regla de derivación en cadena, se demuestra que:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \\ \\ \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

siendo  $\phi_i$  la función en correspondencia con el nodo (i) y  $\underline{J}^{-1}$  la inversa de la matriz jacobiana:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \eta} & \frac{\partial x_2}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

Con miras a una mejor sistematización computacional conviene hacer:

$$\begin{aligned}
 |J| &= \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \phi\right) X_{-1}^n & \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \phi\right) X_{-2}^n \\ \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \phi\right) X_{-1}^n & \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \phi\right) X_{-2}^n \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} & , & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} & , & \dots \\ \frac{\partial \phi_1}{\partial \eta} & , & \frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} & , & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} \\ X_{12} & X_{22} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

En las expresiones anteriores  $X_{-1}^n$ ,  $X_{-2}^n$  son las coordenadas de los puntos nodales del elemento (n).

El otro aspecto que merece ser puesto en evidencia es que, a fin de poder efectuar la integración entre los extremos  $\xi = \pm 1$ ;  $\eta = \pm 1$  debe hacerse la siguiente sustitución:

$$dx_1 dx_2 = |J| d\xi d\eta$$

donde  $|J|$  es el determinante jacobiano de la transformación. El cálculo de una integral de la forma

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta$$

ha sido realizado numéricamente, en todos los ejemplos, por la formula de la cuadratura de Gauss-Legendre:

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n H_i H_j f(\xi_i, \eta_j)$$

Con esta técnica se efectúa una doble sumatoria de la función integrando evaluada en  $n \times n$  puntos de integración, cuyas coordenadas están prefijadas y multiplicadas por los factores de peso  $H_i, H_j$ , igualmente conocidas. Este procedimiento integra exactamente un polinomio de grado  $(2n-1)$  y, en forma aproximada, funciones de grado superior.

#### 3.4 - EVALUACIÓN DE LA MATRIZ DEL ELEMENTO Y MONTAJE DEL SISTEMA GLOBAL.

Ya que el funcional (3.9) contiene sólo derivadas primeras de las funciones interpoladas  $w, M_{ij}$ , que a la vez

serán continuas en las fronteras interelemento, no aparecen términos adicionales asociados a las líneas internas de contacto y es lícito escribir:

$$\Pi_1 = \sum_{n_e} \Pi_1^e$$

Entonces:

$$\delta \Pi_1 = \delta \left( \sum_{n_e} \Pi_1^e \right) = \sum_{n_e} \delta \Pi_1^e = 0 \quad (3.15)$$

siendo  $\Pi_1^e$  el funcional evaluado a nivel de elemento. Ahora vamos a expresar en forma matricial la contribución de cada término al funcional calculado sobre el área  $A$  de un elemento genérico  $(n)$ . Comenzamos por

$$\begin{aligned} \int_{A_n} Q_j w_{,j} dx_1 dx_2 &= \underline{M}_{11}^{n,T} \underline{a} \underline{W}^n + \underline{M}_{12}^{n,T} (\underline{b} + \underline{b}^T) \underline{W}^n + \\ &+ \underline{M}_{22}^{n,T} \underline{c} \underline{W}^n = \{ \underline{M}_{11}^{n,T}, \underline{M}_{12}^{n,T}, \underline{M}_{22}^{n,T} \} \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} + \underline{b}^T \\ \underline{c} \end{bmatrix} \underline{W}^n = \\ &= \underline{M}^{n,T} \underline{g} \underline{W}^n \end{aligned} \quad (3.16)$$

en la cual:

$$\begin{aligned}
 \underline{a} &= \int_{A_n} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{\phi} \right)^T \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{\phi} \right) |J| d\xi d\eta \\
 \underline{b} &= \int_{A_n} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{\phi} \right)^T \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{\phi} \right) |J| d\xi d\eta \\
 \underline{c} &= \int_{A_n} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{\phi} \right)^T \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{\phi} \right) |J| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

y se ha convenido en llamar

$$\underline{M}^{n,T} = \{ \underline{M}_{11}^{n,T}, \underline{M}_{12}^{n,T}, \underline{M}_{22}^{n,T} \}$$

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} \underline{a} \\ \underline{b} + \underline{b}^T \\ \underline{c} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Veamos seguidamente el término de carga

$$\int_{A_n} p w dx_1 dx_2 = \underline{W}^{n,T} \underline{a} p^n = \underline{W}^{n,T} \underline{f} \tag{3.19}$$

donde

$$\underline{e} = \int_{A_n} \underline{\phi} \underline{\phi} |J| d\xi d\eta \quad ; \quad \underline{e} p^n = \underline{f}$$

Pasamos a continuación a representar la energía complementaria. Por simplicidad hacemos:

$$D_1 = \frac{1}{D(1-\nu^2)} = \frac{12}{Eh^3} \quad ; \quad k = \frac{5}{6}$$

Para materiales isótropos, homogéneos y de espesor constante en el elemento se tiene:

$$\int_{A_n} \Omega \, dx_1 \, dx_2 = \frac{1}{2} \underline{\underline{M}}^{n,T} \underline{\underline{s}} \underline{\underline{M}}^n - \underline{\underline{M}}^{n,T} \underline{\underline{d}} \quad (3.20)$$

siendo:

$$\underline{\underline{s}} = \begin{bmatrix} D_1 \underline{\underline{e}} + \frac{1}{Gkh} \underline{\underline{a}} & \frac{1}{Gkh} \underline{\underline{b}} & -\nu D_1 \underline{\underline{e}} \\ & 2(1+\nu)D_1 \underline{\underline{e}} + \frac{1}{Gkh} (\underline{\underline{a}}+\underline{\underline{c}}) & \frac{1}{Gkh} \underline{\underline{b}} \\ \text{simétrica} & & D_1 \underline{\underline{e}} + \frac{1}{Gkh} \underline{\underline{c}} \end{bmatrix}$$

y:

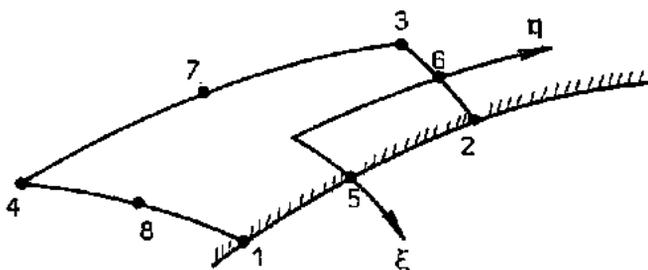
$$\underline{d} = \begin{bmatrix} \frac{D_1 \nu h^2}{10} \underline{e} \\ 0 \\ \frac{D_1 \nu h^2}{10} \underline{e} \end{bmatrix} \underline{p}^n$$

Un párrafo especial merece la ejecución de las integrales de línea y empezaremos por

$$\int_{S_{n,0}} \bar{Q}_n w \, dS.$$

Los elementos en cuestión son cuadriláteros curvilíneos y primeramente consideraremos que sólo un lado pertenece al contorno en la forma que se ve en la Fig. 7.

Fig.7



Supongamos trabajar con el elemento cuadrático y queremos entonces calcular la integral de línea sobre el lado 1 - 5 - 2. Observamos que la función bidimensional de interpolación sobre el lado  $\xi = \text{cte} = 1$  se convierte en una función de interpolación unidimensional en  $\eta$ , del mismo orden que la primitiva.

En dicho lado, el desplazamiento  $w$  está dado por:

$$w(\xi = 1) = \{\phi_1, \phi_5, \phi_2\}(\xi = 1) \begin{bmatrix} W_1 \\ W_5 \\ W_2 \end{bmatrix} = \underline{\psi} \underline{W}^n(\xi = 1)$$

con

$$\underline{\psi} = \left\{ -\frac{1}{2}(1-\eta)\eta, (1-\eta^2), \frac{1}{2}(1+\eta)\eta \right\}$$

Asumimos que la carga de borde se interpola con la misma ley

$$\bar{Q}_n(\xi = 1) = \underline{\psi} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_5 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \underline{\psi} \underline{Q}^n(\xi = 1)$$

Ahora se puede efectuar una integración unidimensional, pero tomando cuidado de determinar la longitud de arco

$dS$  en el espacio transformado. A partir de la teoría general de las transformaciones de coordenadas (ref. 15) tomamos la expresión

$$(dS)^2 = g_{ij} d\theta^i d\theta^j$$

en la cual  $\theta^i$  son las coordenadas curvilíneas en el nuevo sistema y

$$g_{ij} = \frac{\partial x^m}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^m}{\partial \theta^j}$$

son las componentes covariantes del tensor métrico.

Para el problema que nos ocupa necesitamos solamente la longitud de arco en los casos de  $\xi = \text{cte}$  y  $\eta = \text{cte}$ . Efectuando la sustitución  $\theta^1 = \xi$ ,  $\theta^2 = \eta$  se ve que:

$$\xi = \text{cte} \rightarrow dS = \sqrt{g_{22}} d\eta$$

$$\eta = \text{cte} \rightarrow dS = \sqrt{g_{11}} d\xi$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \xi = \text{cte} \rightarrow g_{22} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \eta}\right)^2 = \\
 &= \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right) X_1^n \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta}\right) X_2^n \right\}^2 \\
 \eta = \text{cte} \rightarrow g_{11} &= \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi}\right)^2 = \\
 &= \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right) X_1^n \right\}^2 + \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right) X_2^n \right\}^2
 \end{aligned}$$

Retornando al caso particular, se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 \bar{Q}_n w \, dS &= \underline{W}^{n,T}(\xi = 1) \left\{ \int_{-1}^1 \underline{\psi}^T \underline{\psi} (\sqrt{g_{22}})(\xi = 1) \, d\eta \right\} \underline{Q}^n(\xi = 1) = \\
 &= \underline{W}^{n,T}(\xi = 1) \underline{f}_1
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

En caso de ser necesaria la integral sobre todo el contorno del elemento simplemente se repite cuatro veces esta operación, manteniendo la función de interpolación unidimensional que será la misma, pero mudando el factor adicional que depende de las componentes del tensor métrico según se trate de lados con  $\xi = \text{cte}$  o  $\eta = \text{cte}$ .

Operaciones similares se realizan para calcular la integral

$$\int_{S_{n,u}} (\bar{\phi}_n M_{nn} + \bar{\phi}_s M_{ns}) dS = \underline{M}^{n,T} \underline{d}_1 \quad (3.22)$$

El funcional (3.9) discretizado y evaluado a nivel de elemento, queda finalmente:

$$\begin{aligned} \Pi_1^e &= \underline{M}^{n,T} \underline{g} \underline{W}^n - \underline{W}^{n,T} (\underline{f} + \underline{f}_1) - \frac{1}{2} \underline{M}^{n,T} \underline{s} \underline{M}^n + \\ &+ \underline{M}^{n,T} (\underline{d} + \underline{d}_1) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Efectuando la variación

$$\begin{aligned} \delta \Pi_1^e &= \delta \underline{M}^{n,T} \underline{g} \underline{W}^n + \delta \underline{W}^{n,T} \underline{g}^T \underline{M}^n - \delta \underline{W}^{n,T} (\underline{f} + \underline{f}_1) - \\ &- \delta \underline{M}^{n,T} \underline{s} \underline{M}^n + \delta \underline{M}^{n,T} (\underline{d} + \underline{d}_1) \end{aligned}$$

En forma matricial:

$$\delta \Pi_1^e = \{ \delta \underline{W}^{n,T}, \delta \underline{M}^{n,T} \} \left( \begin{bmatrix} 0 & \underline{g}^T \\ \underline{g} & -\underline{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{W}^n \\ \underline{M}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(\underline{f} + \underline{f}_1) \\ (\underline{d} + \underline{d}_1) \end{bmatrix} \right)$$

Aplicando ahora (3.15), o sea, ensamblando sobre toda la estructura

$$\delta \Pi_1 = \{ \delta \underline{W}^{*,T}, \delta \underline{M}^{*,T} \} \left( \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{G}^T \\ \underline{G} & -\underline{S} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{W}^* \\ \underline{M}^* \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\underline{F} \\ \underline{D} \end{bmatrix} \right) = 0$$

donde  $\underline{W}^*$ ,  $\underline{M}^*$  son los vectores de incógnitas nodales totales y  $\underline{G}$ ,  $\underline{S}$ ,  $\underline{F}$ ,  $\underline{D}$  son las matrices y vectores obtenidas por su perposición, para toda la estructura, de las matrices elementales  $\underline{g}$ ,  $\underline{s}$  y de los vectores  $(\underline{f} + \underline{f}_1)$ ,  $(\underline{d} + \underline{d}_1)$  respectivamente.

Ya que las variaciones  $\delta \underline{W}^*$ ,  $\delta \underline{M}^*$  son arbitrarias, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\underline{G}^T \underline{M}^* = \underline{F}$$

$$\underline{G} \underline{W}^* - \underline{S} \underline{M}^* = -\underline{D} \quad (3.24)$$

La matriz  $\underline{S}$  proveniente de la energía complementaria, es positiva definida. Además,  $\underline{G}^T$  contiene los tér

minos de movimiento como cuerpo rígido que serán suprimidos cuando se introduzcan las condiciones geométricas de contorno (ref. 5).

En lugar de listar desplazamientos y momentos separadamente, es mejor combinarlos, agrupándolos por incógnitas nodales.

Si hacemos:

$\underline{q}_i = \{w_i, M_i\}^T$  = vector que contiene las variables del nodo (i).

$\underline{q}^n$  = vector de todas las variables del elemento.

$\underline{q} = \{\underline{q}^1, \underline{q}^2 \dots \underline{q}\}^T$  vector total de incógnitas.

$\underline{e}^n$  = vector de términos independientes a nivel de elemento.

$\underline{E}$  = ensamble de los vectores  $\underline{e}^n$ .

$\underline{h}^n$  = matriz del elemento con incógnitas ordenadas por nodo.

$\underline{H}$  = ensamble de las matrices  $\underline{h}^n$ .

se tiene:

$$\delta \Pi_1 = \sum \delta \underline{q}^n, T (\underline{h}^n \underline{q}^n - \underline{e}^n) = \delta \underline{q}^T (\underline{H} \underline{q} - \underline{E}) = 0$$

y como  $\delta \underline{q}^T$  es arbitrario:

$$\underline{H} \underline{q} = \underline{E} \quad (3.25)$$

La matriz  $\underline{H}$  de este sistema conserva muchas características de la matriz global de los modelos de desplazamientos, principalmente que es simétrica y en banda.

La principal diferencia, desde el punto de vista computacional, es que la matriz global  $\underline{H}$  no es positiva definida y los ceros presentes en la diagonal principal pueden obligar a una permutación de filas, a fin de posibilitar la resolución del sistema de ecuaciones lineales.

Gran parte de los ejemplos que se presentan en el siguiente capítulo, han sido calculados empleando un programa de partición tridiagonal con una técnica de inversión de matrices que prevee la posibilidad de términos nulos en la diagonal principal. Sin embargo, el uso de ese programa no resultó efectivo para la mayoría de los casos de utilidad práctica y finalmente optamos por emplear el método de eliminación directa de Gauss para matrices simétricas en banda.

Con programas de este tipo, caracterizados por la velocidad en resolver los casos de un solo estado de carga, la precaución que se debe tomar al usarlos con modelos mixtos, es la de no permitir que la primera fila tenga término diagonal nulo. El algoritmo que opera sobre las filas subsiguientes hace desaparecer los ceros en la diagonal principal y el proceso global puede efectuarse sin inconvenientes. Por ejemplo, en este primer caso, se puede trabajar sin dificultades con sólo ordenar las incógnitas de nodo en la forma  $M_{11}, M_{12}, M_{22}, w$ .

La matriz elemental de este modelo para material homogéneo e isótropo, de espesor constante, en ausencia de cargas de borde y de rotaciones prescritas, está detallada en el Apéndice I, como así también el respectivo vector de carga.

En el Apéndice II, está la matriz para el mismo modelo, pero para el caso de espesor variable. Aquí deben ser datos los espesores nodales o sus inversas, que se interpolan en el interior del elemento con las mismas funciones de aproximación que las usadas para incógnitas y geometría.

## CAPÍTULO IV

### EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MODELO CON $w, M_{ij}$ CONTINUOS

#### 4.1 - PLACA RECTANGULAR CON CARGA UNIFORME

Este primer ejemplo está definido en Fig. 8 y ha sido utilizado en varias oportunidades para verificar resultados de elementos finitos mixtos (refs. 5, 9, 14). La placa es delgada y la influencia de la deformación por corte será despreciable, salvo en una zona del orden del espesor de la misma, cercana a los bordes libre y apoyado.

A fin de colocarnos en igualdad de condiciones con las referencias mencionadas, sobre el contorno se ha asumido

$$\text{Borde libre} \quad \left[ \begin{array}{l} M_{22} = M_{nn} = 0 \quad ; \quad M_{12} = M_{ns} = 0 \\ w \neq 0 \quad \rightarrow \quad Q_n = 0 \quad (\text{natural}) \end{array} \right.$$

$$\text{Borde apoyado} \quad \left[ \begin{array}{l} M_{11} = M_{nn} = 0 \quad ; \quad w = 0 \\ M_{12} = M_{ns} \neq 0 \quad \rightarrow \quad \phi_s = 0 \quad (\text{natural}) \end{array} \right.$$

$$\text{Borde empotrado} \left[ \begin{array}{l} w = 0 \\ M_{22} = M_{nn} \neq 0 \rightarrow \phi_n = 0 \quad (\text{natural}) \\ M_{12} = M_{ns} \neq 0 \rightarrow \phi_s = 0 \quad (\text{natural}) \end{array} \right.$$

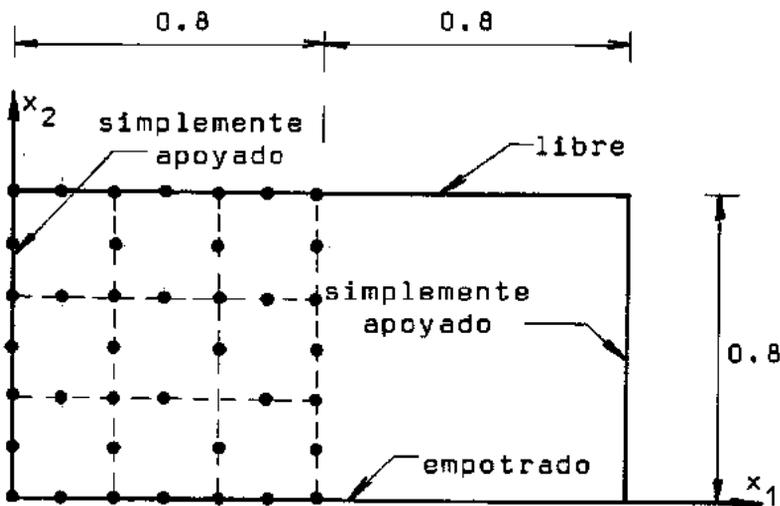
$$\text{Eje de simetría} \left[ \begin{array}{l} M_{12} = M_{ns} = 0 \\ M_{22} = M_{nn} \neq 0 \rightarrow \phi_n = 0 \quad (\text{natural}) \\ w \neq 0 \rightarrow Q_n = 0 \quad (\text{natural}) \end{array} \right.$$

En la proximidad del borde libre, se produce una brusca caída del momento tordente en una zona del orden del espesor de la placa. A ello se debe la perturbación que se observa en los resultados y que podría atenuarse densificando la malla, tal como hemos efectuado en el ejemplo (4.10). Sin embargo, la condición exacta  $M_{12} = M_{ns} = 0$  es allí obligatoria para evitar la aparición de  $\phi_s = 0$  como condición natural.

Una situación similar acontece en el borde apoyado. La diferencia estriba en que, al omitir  $M_{12} = M_{ns} = 0$ , la condición  $\phi_s = 0$  puede aceptarse como aproximada para dicho borde. En estas circunstancias, la variación del momento tordente coincide con la que resulta de la teoría elemental.

Los valores obtenidos con el elemento isoparamétrico lineal son similares a los presentados por Connor (ref.5) para un triángulo lineal sobre el mismo modelo mixto. En Fig. 9 se ofrecen los resultados del isoparamétrico cuadrático con una malla de 3 x 3 elementos sobre la mitad de la placa.

Fig.8



$$\begin{aligned}
 p &= 1. \\
 E &= 0.3 \times 10^6 \\
 \nu &= 0.3 \\
 h &= 0.01
 \end{aligned}$$

Fig.9

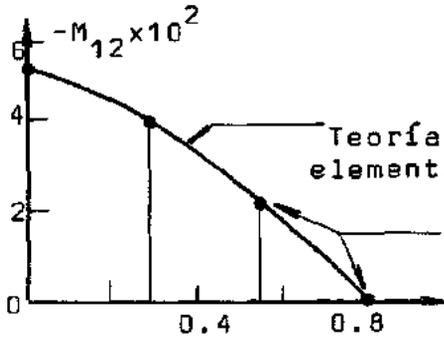
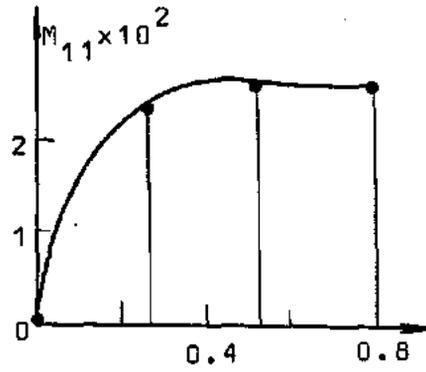
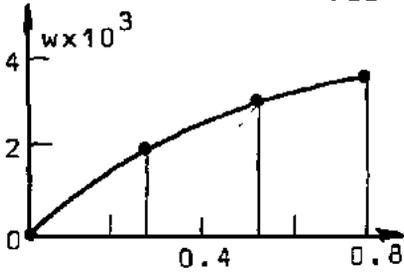
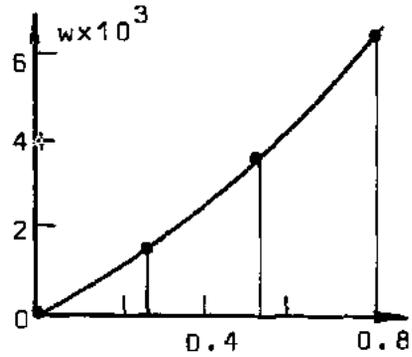
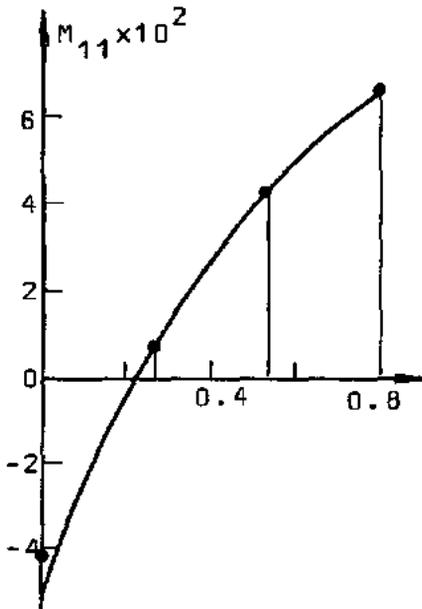
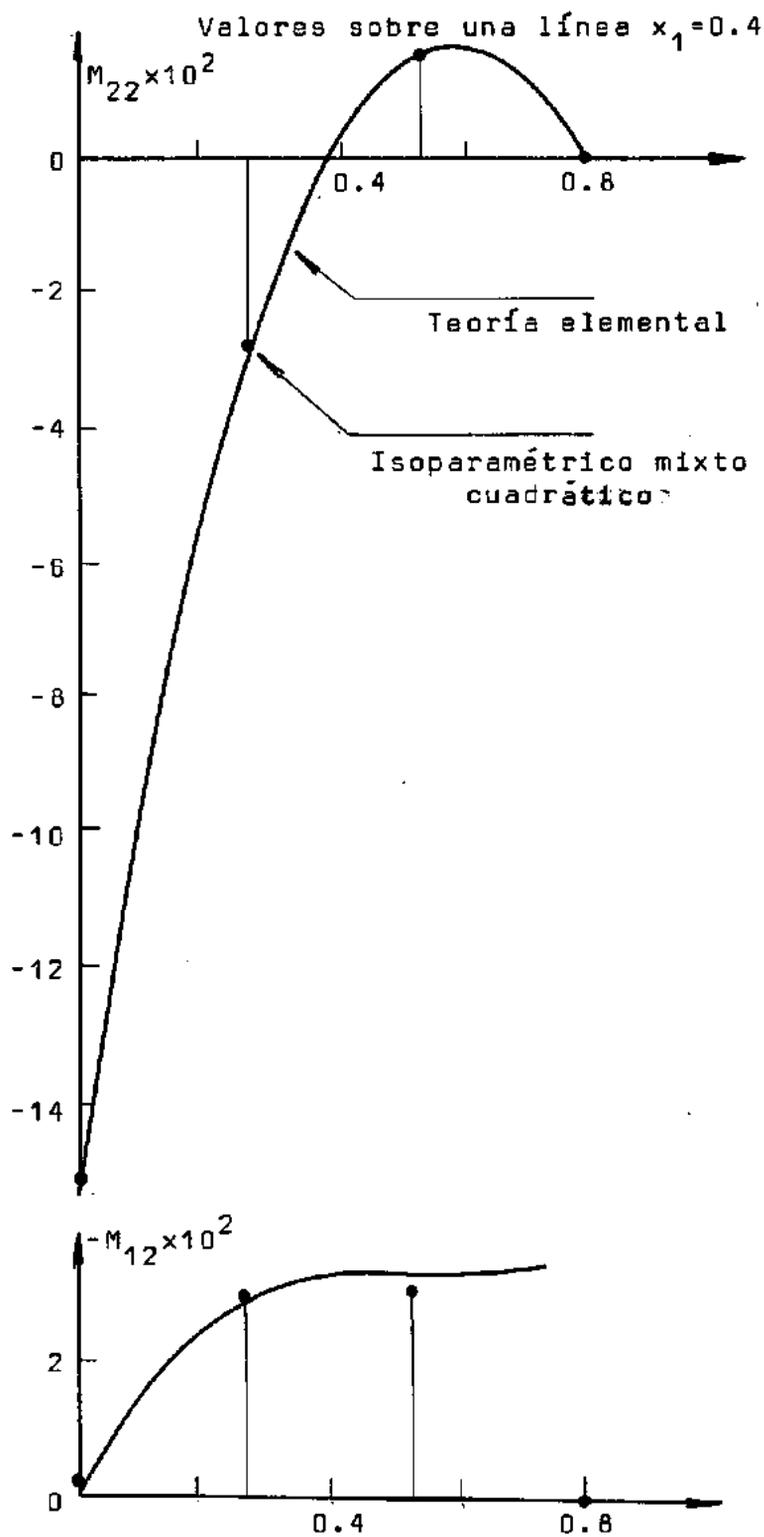
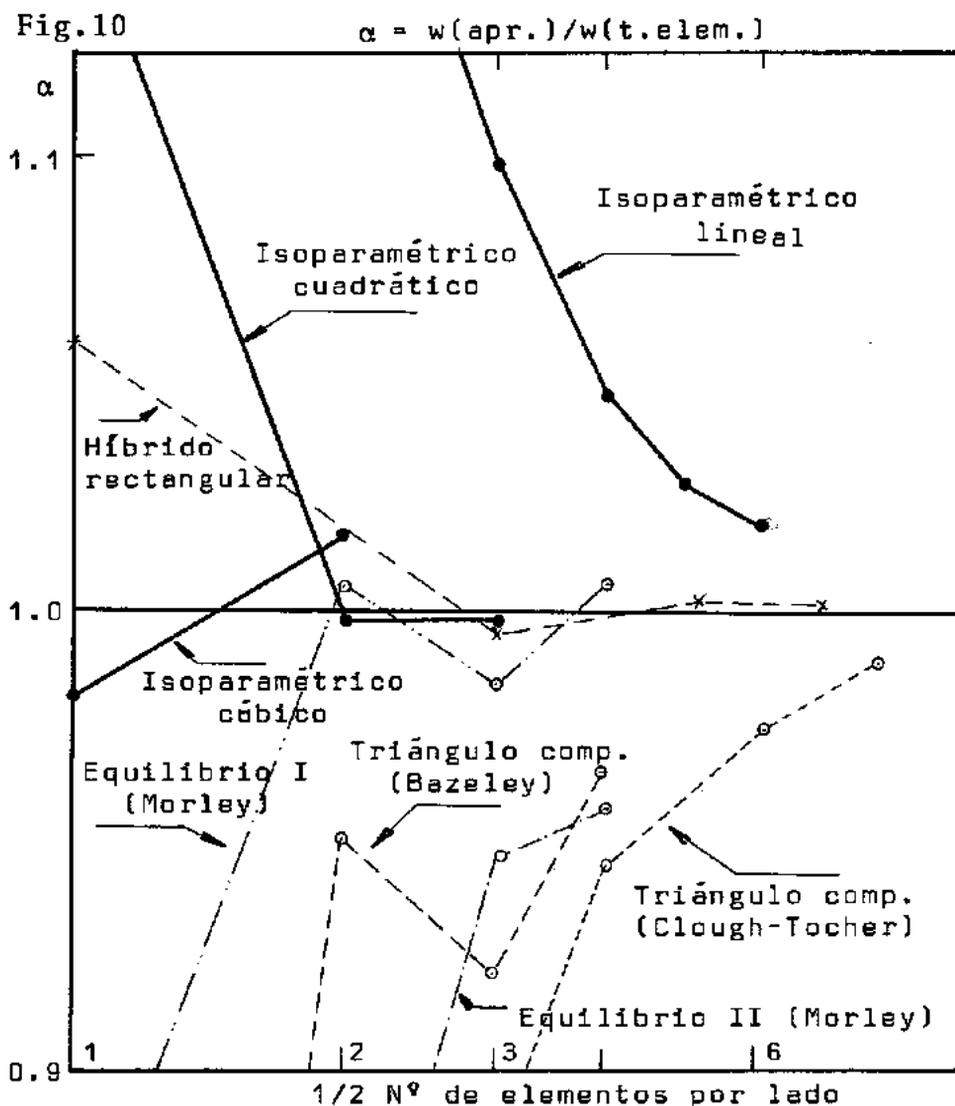
Valores sobre una línea  $x_2=0.4$ Valores sobre una línea  $x_1=0.4$ 

Fig.9  
(cont.)



## 4.2 - ESTUDIO COMPARATIVO DE CONVERGENCIA

En la Fig. 10 se muestran los resultados de los elementos isoparamétricos para la deflexión central de una placa cuadrada empotrada, de pequeño espesor y bajo carga uniforme. La solución analítica de la teoría elemental se ha tomado de ref. 13 y los valores de los otros elementos, según ref. 5.



#### 4.3 - PLACA CIRCULAR EMPOTRADA CON CARGA UNIFORME

Una de las características más importantes de los elementos isoparamétricos, es su capacidad para aproximar geometrías curvas. A fin de valorar este aspecto, se analiza a continuación una placa circular empotrada, cuyos datos son:

$$R = \text{radio} = 6 \quad ; \quad E = 0.2 \times 10^6 \quad ; \quad h = 0.2 \quad ;$$

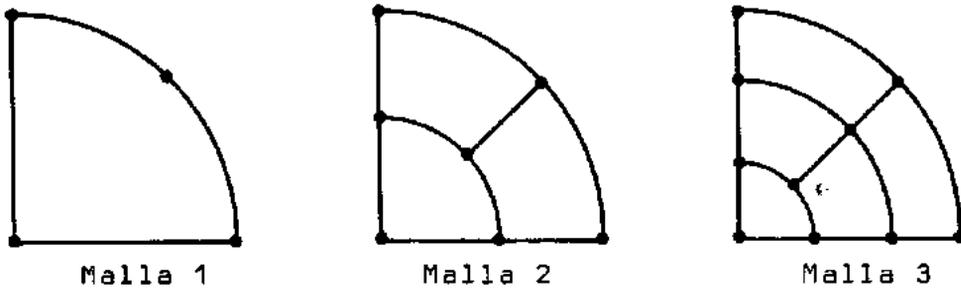
$$\nu = 0.18 \quad ; \quad p = 1.$$

En Fig. 11 y Tabla 1 se muestran las mallas utilizadas y los resultados obtenidos:

TABLA 1

Elemento	Malla	w(centro)	$M_r$ (centro)	$M_r$ (borde)
I. Cuadrático	1	0.1396	5.006	- 2.432
I. Cuadrático	2	0.1459	2.633	- 4.613
I. Cuadrático	3	0.1463	2.583	- 4.543
I. Cúbico	1	0.1430	3.339	- 5.794
I. Cúbico	2	0.1421	2.490	- 4.293
Teoría elemental (Ref. 3)		0.1469	2.655	- 4.500

Fig.11



#### 4.4 - INFLUENCIA DEL NÚMERO DE PUNTOS DE INTEGRACIÓN

La técnica numérica utilizada para evaluar aproximadamente las integrales que corresponden a la matriz del elemento y vector de términos independientes, ofrece la posibilidad de aumentar la exactitud a medida que se toma un mayor número de puntos de Gauss de integración. Sin embargo, es conveniente establecer algunos criterios generales, a fin de no perjudicar la aproximación de la solución ni recargar excesivamente el trabajo computacional.

El análisis efectuado sobre los resultados del elemento lineal indica que bastan para él 2 x 2 puntos de integración, ya que no se observa diferencia sensible al tomar un mayor número.

Para el elemento cuadrático es necesario, al mínimo, 3 x 3 puntos de integración y para los casos complicados 4 x 4.

El elemento cúbico también da buenos resultados con 3 x 3 puntos en ejemplos sencillos, aunque es recomendable elevar ese número en la mayoría de las aplicaciones.

En Tabla 2 se presenta una de las pruebas efectuadas, tomando como base el ejemplo del artículo (4.3), con el elemento cuadrático y la Malla 2.

TABLA 2

Elemento	Malla	Nº p.i.	w (centro)	$M_r$ (borde)
I. Cuadrático	2	2 x 2	0.1345	- 7.718
I. Cuadrático	2	3 x 3	0.1459	- 4.607
I. Cuadrático	2	4 x 4	0.1459	- 4.613
I. Cuadrático	2	5 x 5	0.1459	- 4.613
Teoría elemental (Ref. 3)			0.1469	- 4.500

#### 4.5 - CARGA LINEALMENTE DISTRIBUIDA

Otra de las capacidades interesantes que ofrece el

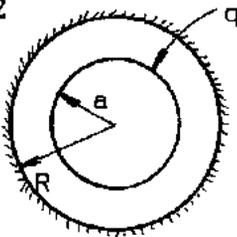
presente método, es la posibilidad de tener en cuenta en forma consistente, las cargas linealmente distribuidas, sea sobre el contorno exterior o en el interior de la placa. La integral  $\int_S \bar{Q}_n w \, dS$  es evaluada con la técnica expuesta en (3.4), obteniéndose un vector de cargas de nodos equivalente que debe ensamblarse al vector global de términos independientes con el procedimiento habitual.

El problema elegido es el de una placa circular empujada de radio  $R$  con carga anular uniformemente distribuida sobre una circunferencia interna de radio  $a$ . Los demás datos se adjuntan con Fig. 12 y los resultados de la Tabla 3 corresponden al elemento cuadrático con la Malla 3 del artículo (4.3).

TABLA 3

Elemento	Malla	w(centro)	$M_r$ (centro)
I. Cuadrático	3	0.0263	0.245
Teoría elemental (Ref. 13)		0.0264	0.254

Fig.12



$$\begin{aligned}
 R &= 6. & a &= 4. \\
 q &= 1. & h &= 0.2. \\
 \nu &= 0. & E &= 0.2 \times 10^6.
 \end{aligned}$$

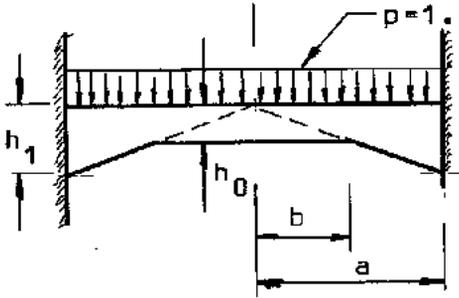
4.6 - ESPESOR VARIABLE

A fin de verificar las posibilidades de los elementos isoparamétricos en los problemas de espesor variable, hemos tomado una placa circular empotrada, acartelada, con carga uniforme, cuyos datos acompañan a la Fig. 13. Los valores numéricos de Tabla 4 corresponden al elemento cuadrático con Malla 2 y Malla 3 del artículo (4.3) y la solución analítica es según la teoría elemental (Ref. 3).

TABLA 4

Incógnita		Cuadrático Malla 2	Cuadrático Malla 3	Sol. Anal.
$\alpha = w_{\max} Eh_0^3/pa^4$		0.0935	0.0932	0.094
$\beta = \frac{M_r}{pa^2}$	$r = 0$	0.0520	0.0528	0.0543
	$r = b$	- 0.0197	- 0.0200	- 0.0188
	$r = a$	- 0.142	- 0.144	- 0.149
$\gamma = \frac{M_c}{pa^2}$	$r = 0$	0.0520	0.0528	0.0543
	$r = b$	0.0135	0.0147	0.0149
	$r = a$	- 0.0405	- 0.0329	- 0.037

Fig.13



$$a = 6.6667$$

$$b = 4.$$

$$h_1 = 0.1$$

$$h_0 = 0.06$$

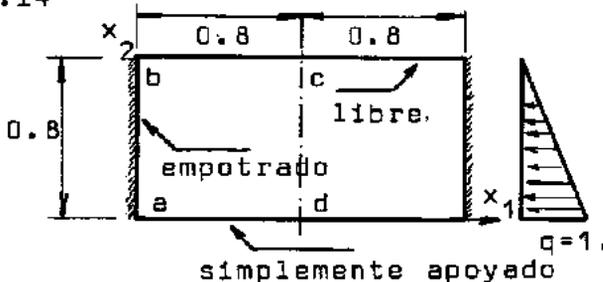
$$E = 0.2 \times 10^6$$

$$\nu = 0.25$$

#### 4.7 - CARGA HIDROSTÁTICA

En este caso, la carga de superficie es variable sobre el elemento y el ejemplo que se analiza es una placa rectangular sometida a empuje hidrostático y cuyos demás datos están en la Fig. 14. En Tabla 5 se comparan los resultados del isoparamétrico cuadrático con el triángulo de 18 grados de libertad, modelo de desplazamientos (Ref. 16). Debe notarse que, en los puntos del contorno, es de esperar alguna discrepancia de la teoría elemental con respecto a la que sirve de base al presente trabajo.

Fig.14



$$E = 0.3 \times 10^6$$

$$h = 0.01$$

$$\nu = 0.2$$

TABLA 5

Elemento	Malla 1/2 de placa	w (punto c)	M <sub>11</sub> (punto c)	M <sub>11</sub> (punto b)
T-18	1 × 1	753.5	110.4	191.0
T-18	2 × 2	761.1	116.2	251.5
T-18	4 × 4	760.7	115.3	240.5
I.Cuadrāt.	2 × 2	780.	137.	228.
I.Cuadrāt.	3 × 3	771.	115.	221.
Teoría elemental (Ref.16)		761.	115.	229.
Multiplicador		$10^{-6} p \ell^4 / D$	$10^{-4} p \ell^2$	$-10^{-4} p \ell^2$

#### 4.8 - CARGAS CONCENTRADAS

Si bien no se ha establecido explícitamente, en la teoría del capítulo 3, la forma en que se tomarán en cuenta estas cargas, no obstante ellas pueden ser incorporadas al conjunto de capacidades en la hipótesis que dependen de un potencial de la forma

$$\psi = - P w_p$$

en donde P es una carga concentrada y  $w_p$  el desplazamiento promedio correspondiente a su punto de aplicación. Esta con

tribución debe ser añadida al funcional del conjunto y por simplicidad asumimos que las cargas están aplicadas directamente sobre los nodos. Se obtiene entonces

$$\Pi_1^* = \left( \sum \Pi_1^e \right) - \left( \sum P_i w_{pi} \right)$$

Al efectuar la variación

$$\delta \Pi_1^* = \sum (\delta \Pi_1^e) - \left( \sum P_i \delta w_{pi} \right) = 0 \quad (4.1)$$

lo cual significa que bastará adicionar el valor de la carga, con su signo, al vector global de los términos independientes en la posición que corresponde al desplazamiento  $w$  del nodo en el cual está aplicada.

Los resultados de Tabla 6 corresponden a una placa empotrada circular con una carga central unitaria, cuyos otros datos son:  $E = 0.2 \times 10^6$ ;  $h = 0.2$ ;  $\nu = 0.18$ ;  $R = 6$ .

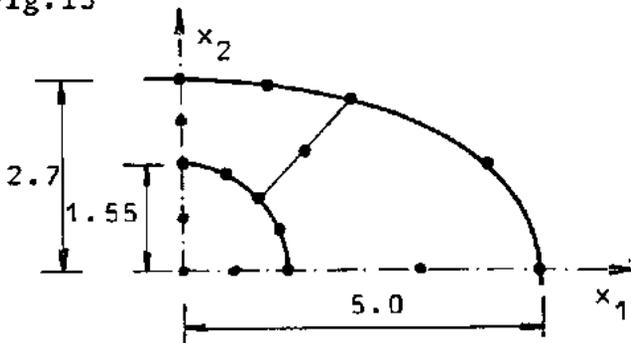
TABLA 6

Elemento	Malla	w(centro)	$M_r$ (borde)
I. Cuadrático	2	0.0213	- 0.326
I. Cuadrático	3	0.0209	- 0.324
I. Cúbico	2	0.0201	- 0.282
Teoría elemental (Ref.3)		0.0208	- 0.318

#### 4.9 - PLACA EMPOTRADA ELÍPTICA

El problema se muestra en Fig. 15 y los valores numéricos figuran en Tabla 7. La solución analítica es de la teoría elemental (Ref. 13).

Fig.15



$$E = 0.8 \times 10^8$$

$$h = 0.01$$

$$\nu = 0.3$$

$$p = 1. = \text{cte.}$$

TABLA 7

Elemento	w(centro)	$M_{22}$ (centro)	$M_{22}$ ( $x_1 = 0, x_2 = b$ )
I. Cuadrático	0.942	0.981	- 1.83
T. Elemental	0.947	1.04	- 1.91

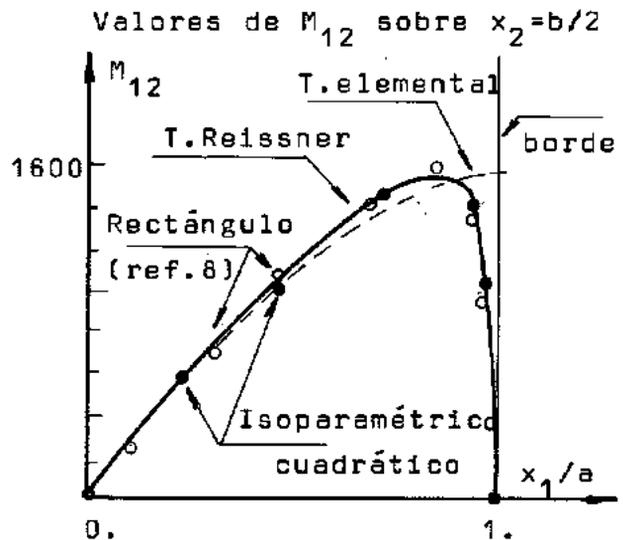
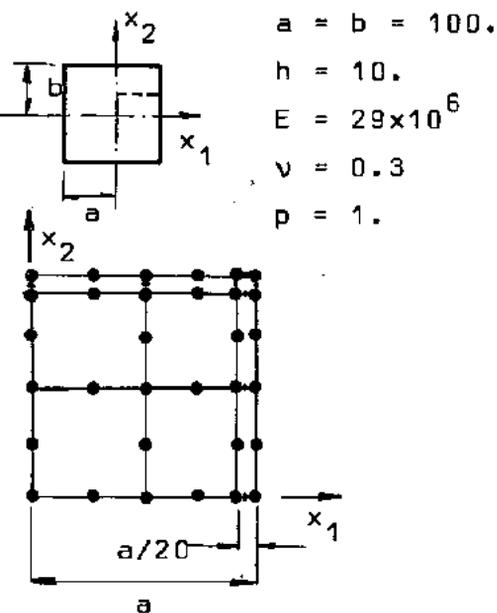
#### 4.10 - CONDICIONES DE CONTORNO EXACTAS SOBRE UN BORDE SIMPLEMENTE APOYADO

Tal como ha sido mencionado, el presente modelo ofrece la posibilidad de aplicar la condición exacta  $M_{ns} = 0$  sobre un borde simplemente apoyado. Sin embargo, la caída brusca del momento tordente, en la proximidad del borde, obli

ga a modificar la malla de modo que esa variación localizada sea representada adecuadamente. El ejemplo que sigue es una placa cuadrada, simplemente apoyada y con carga uniformemente distribuida. Las condiciones de contorno establecidas por valores nodales son:  $w = 0$ ,  $M_{nn} = 0$ ,  $M_{ns} = 0$  sobre el contorno apoyado y  $M_{ns} = 0$  en el eje de simetría.

En Fig. 16 se muestran los restantes datos, la malla y un gráfico donde también constan los resultados de un elemento rectangular de 20 grados de libertad, modelo de desplazamientos, implementado por C. Pryor y ad. según la teoría de Reissner (ref. 8).

Fig.16



#### 4.11 - ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DEL ESFUERZO DE CORTE

Uno de los aspectos salientes del método en estudio,

es la capacidad de resolver problemas en los cuales el espesor deja de ser pequeño en comparación con las dimensiones restantes, tomando, por consiguiente, un papel importante las deformaciones por corte que son despreciadas por la teoría elemental.

Para verificar el grado de aproximación de los elementos isoparamétricos mixtos al tratar estas situaciones, hemos elegido una placa cuadrada, simplemente apoyada y con carga uniforme. Las condiciones de contorno utilizadas son las mismas que las asumidas en la solución analítica:  $w=0$ ,  $M_{nn}=0$ , ( $\phi_s=0$ ). En Tabla 8 es  $\nu=0.3$ ,  $a$  = lado del cuadrado, la malla indicada corresponde a un cuarto de placa y se comparan los resultados con el rectángulo de 20 grados de libertad (ref. 8).

TABLA 8

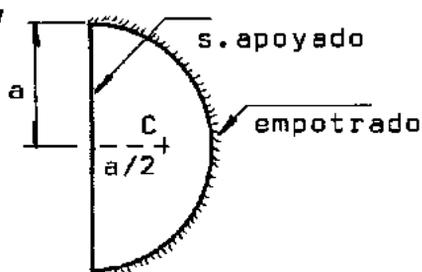
Relación $\frac{h}{a}$	$\alpha = \frac{w_{\max} E h^3}{p a^4}$			
	T.Elemental (ref. 8)	T.Reissner (ref. 8)	Isop. mixto Cuadrático Malla 3 x 3	Rectángulo (ref. 8) Malla 6 x 6
0.01	0.04437	0.04439	0.04435	0.04423
0.05	0.04437	0.04486	0.04482	0.04469
0.15	0.04437	0.04876	0.04874	0.04852
0.25	0.04437	0.05656	0.05656	0.05617
Nº total de grados de libertad			160	245

4.12 - OTROS EJEMPLOS

a) Placa semicircular con carga uniforme.

Los datos se adjuntan con Fig. 17 y algunos resultados del elemento isoparamétrico cúbico constan en Tabla 9.

Fig.17



$$\text{Radio} = a = 6.$$

$$\nu = 0.3$$

$$E = 0.2 \times 10^8$$

$$h = 0.01$$

$$p = 1.$$

Borde curvo: empotrado

Borde recto: simplemente apoyado.

TABLA 9

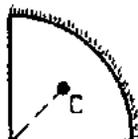
Elemento	Malla (inciso 4.3)	$\alpha = \frac{D w_c}{p a^4}$	$\beta = \frac{M_r(c)}{p a^2}$
I. Cúbico	2	0.0321	0.0446
Teoría elemental (Ref. 3)		0.0327	0.0447

b) Placa con forma de un cuarto de círculo.

El problema se indica en Fig. 18 y los resultados

del elemento cuadrático están en Tabla 10. Los datos restantes son iguales a los del caso a), Fig. 17.

Fig.18



Borde curvo: empotrado

Bordes rectos: simplemente apoyados.

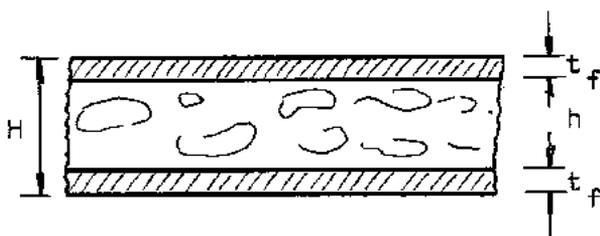
TABLA 10

Elemento	Malla (inciso 4.3)	$\alpha = \frac{D w_c}{p a^4}$	$\beta = \frac{M_r(c)}{p a^2}$
I. Cuadrático	3	0.00133	0.0260
Teoría elemental (Ref. 3)		0.00132	0.0272

#### 4.13 - PLACAS "SANDWICH"

Un caso importante de flexión de placas, en donde las deformaciones por corte toman carácter decisivo, es el de las llamadas placas "sandwich", constituidas por un núcleo de aglutinante que no absorbe solicitaciones axiales y cuya misión es la de unir dos chapas, comparativamente delgadas, que están destinadas a transmitir los momentos de flexión (Fig. 19).

Fig.19



Asumiéndose una variación lineal con la altura, de los desplazamientos en el plano de la placa y el esfuerzo de corte absorbido, con tensión constante, solamente por el relleno interior, el funcional (3.9) sólo es modificado en lo que respecta a la energía complementaria, la cual para este caso vale (ref. 10):

$$\Omega = \frac{1}{2} \left[ \frac{2}{E t_f h^2} \{ (M_{11} + M_{22})^2 + 2(1 + \nu) (M_{12}^2 - M_{11} M_{22}) + \frac{h^2 E t_f}{2 G_n h} (Q_1^2 + Q_2^2) \} \right] \quad (4.2)$$

en donde:  $E$  = módulo de elasticidad longitudinal de las chapas.

$G_n$  = módulo de elasticidad transversal del relleno.

$h$  = altura del relleno.

$t_f$  = espesor de una chapa.

$\nu$  = coeficiente de Poisson de las chapas.

Observando la expresión (4.2) se constata la ausencia de los términos correspondientes a la influencia del esfuerzo normal en la flexión, la cual se supone despreciable, y la matriz completa del elemento, junto con el vector de términos independientes, se detallan en el Apéndice III.

En Tabla 11 y Fig. 20 se analiza la convergencia del elemento isoparamétrico cuadrático, para una placa cuadrada, simplemente apoyada y con carga uniforme, cuyos datos son:

$$\begin{array}{lll}
 a = \text{lado} = 4 & t_f = 0.02 & E = 2100000 \\
 h = 0.2 & \nu = 0.3 & G_n = 4 \pi^2 D / (h a^2)
 \end{array}$$

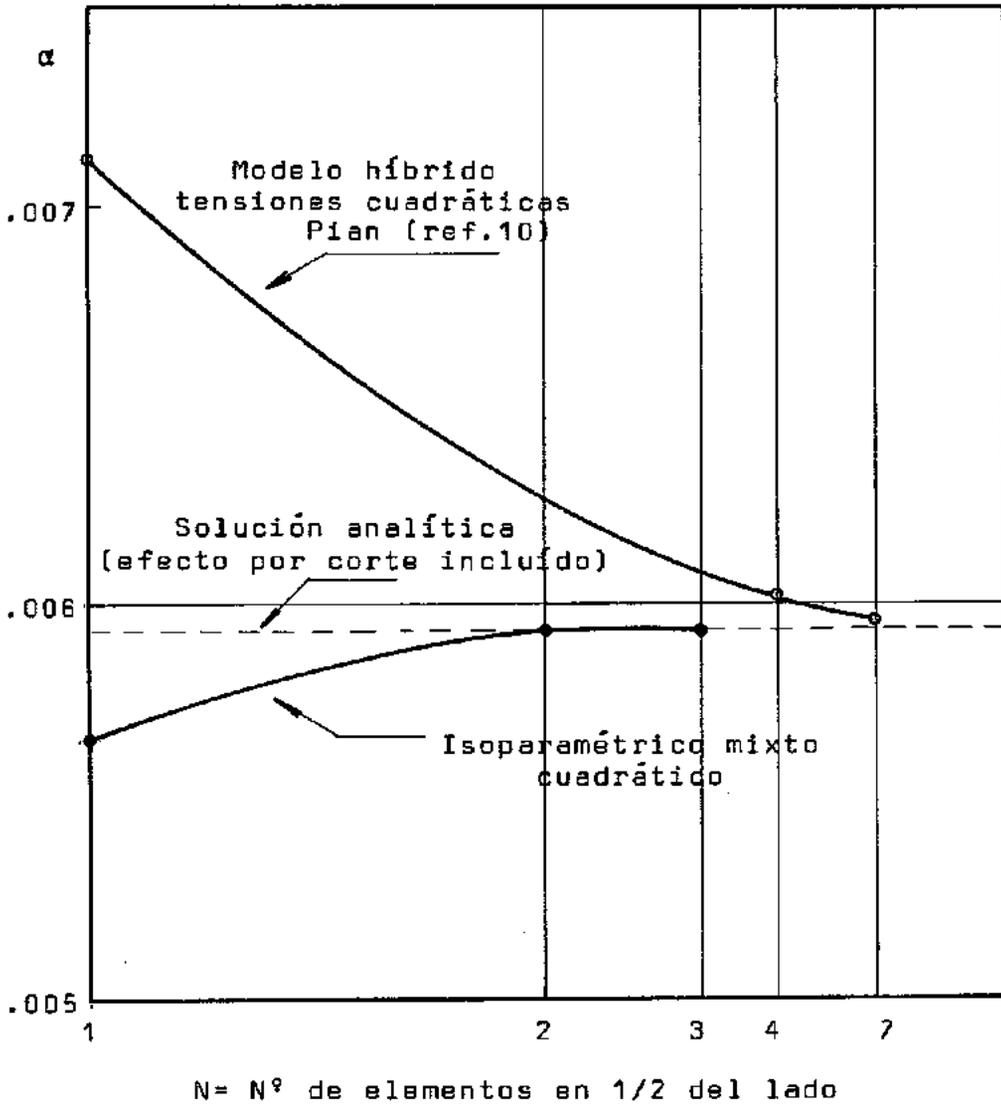
TABLA 11

Elemento	Malla (1/4 de placa)	$w_c$ (centro de placa)
I. mixto cuadrático	1 × 1	0.001566
I. mixto cuadrático	2 × 2	0.001642
I. mixto cuadrático	3 × 3	0.001644
Solución analítica (Ref. 10) (efecto por corte incluido)		0.001644

En el próximo capítulo se presentarán otros modelos mixtos, como base de elementos finitos isoparamétricos.

Fig.20

$$\alpha = w_c D / p a^4$$



CAPITULO V

OTROS MODELOS MIXTOS SOBRE LA TEORÍA DE REISSNER

5.1 - MODELO MIXTO CON  $w, M_{ij}, Q_j$ , CONTINUOS

Conocidas las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema, se ofrecen numerosas posibilidades para modificar el funcional (3.5) y de esta manera obtener diversos modelos mixtos para base de elementos finitos.

Tomando como punto de partida (3.5), asumimos ahora cumplirse idénticamente en el interior, las ecuaciones (3.7) (d):

$$Q_j = Gkh(w_{,j} + \phi_j)$$

y sobre el contorno:

$$M_{nn} = \bar{M}_{nn} \quad M_{ns} = \bar{M}_{ns} \quad Q_n = \bar{Q}_n \quad (5.1)$$

Considerando como variables independientes  $w, M_{ij},$

$Q_j$ , eliminando  $\phi_j$  a partir de (3.7)(d) y teniendo en cuenta (5.1), se obtiene un nuevo modelo con el funcional:

$$\begin{aligned} \Pi_2 = \int_A \{ (-Q_{j,j} - p)w - (M_{ij,i} - Q_j) \left( \frac{1}{Gkh} Q_j - w_{,j} \right) - \\ - \Omega \} dA + \int_{S_u} (M_{nn} \bar{\phi}_n + M_{ns} \bar{\phi}_s + Q_n \bar{w}) dS \quad (5.2) \end{aligned}$$

en la cual  $\Omega$  es la energía complementaria por flexión y corte expresada en términos de  $M_{ij}$ ,  $Q_j$ .

El problema de flexión de placas también es resuelto por la variación del funcional (5.2) con respecto a las variables  $w$ ,  $M_{ij}$ ,  $Q_j$ , con las condiciones subsidiarias (5.1).

Considerando que en el funcional  $\Pi_2$  solamente están presentes las derivadas primeras de las funciones incógnitas, resulta inmediata la implementación de elementos isoparamétricos con funciones de interpolación que cumplen  $\sum \phi_i = 1$ .

A tal efecto, representamos las incógnitas, la carga de superficie y la geometría con las mismas funciones de interpolación

$$\begin{aligned} w &= \underline{\phi} \underline{W}^n & ; & & M_{ij} &= \underline{\phi} \underline{M}_{ij}^n & ; & & Q_j &= \underline{\phi} \underline{Q}_j^n \\ p &= \underline{\phi} \underline{p}^n & ; & & x_1 &= \underline{\phi} \underline{x}_1^n & ; & & x_2 &= \underline{\phi} \underline{x}_2^n \end{aligned}$$

Reemplazando en (5.2) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \Pi_2^e &= \underline{Q}_1^{n,T} \underline{t} \underline{W}^n - \underline{Q}_2^{n,T} \underline{v} \underline{W}^n - \underline{W}^{n,T} \underline{e} \underline{p}^n - \underline{M}^{n,T} \underline{d} - \\
 &- \frac{1}{Gkh} (\underline{M}_{11}^{n,T} \underline{t} \underline{Q}_1^n + \underline{M}_{12}^{n,T} \underline{t} \underline{Q}_2^n + \underline{M}_{12}^{n,T} \underline{v} \underline{Q}_1^n + \\
 &+ \underline{M}_{22}^{n,T} \underline{v} \underline{Q}_2^n) + \frac{1}{2Gkh} (\underline{Q}_1^{n,T} \underline{e} \underline{Q}_1^n + \underline{Q}_2^{n,T} \underline{e} \underline{Q}_2^n) - \\
 &- \frac{1}{2} \underline{M}^{n,T} \underline{s}_1 \underline{M}^n + \underline{M}^{n,T} \underline{g} \underline{W}^n - \underline{W}^{n,T} \underline{t} \underline{Q}_1^n - \\
 &- \underline{W}^{n,T} \underline{v} \underline{Q}_2^n + \underline{M}^{n,T} \underline{d}_1 + \underline{Q}^{n,T} \underline{q} \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

En la expresión (5.3) las matrices  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$ ,  $\underline{g}$ ,  $\underline{e}$ ,  $\underline{d}$ ,  $\underline{d}$ , tienen el significado establecido en (3.17), (3.18), (3.19), (3.20) y (3.22), agregándose ahora las siguientes definiciones:

$$\underline{t} = \int_{\Lambda_n} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{\phi} \right)^T \underline{\phi} |J| d\xi d\eta$$

$$\underline{v} = \int_{\Lambda_n} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{\phi} \right)^T \underline{\phi} |J| d\xi d\eta$$

$$\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} D_1 \underline{e} & \underline{0} & -D_1 \underline{e} \\ \underline{0} & 2(1+\nu)D_1 \underline{e} & \underline{0} \\ -D_1 \underline{e} & \underline{0} & D_1 \underline{e} \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \frac{E h^3}{12} \quad (5.4)$$

$$\underline{Q}^P = \begin{bmatrix} \underline{Q}_1^P \\ \underline{Q}_2^P \end{bmatrix}$$

$$\underline{Q}^{n,T} = \int_{S_{n,u}} Q_n \bar{w} \, ds$$

Efectuando la variación se obtiene:

$$\delta \Pi_2^e = \{ \delta \underline{M}^{n,T}, \delta \underline{Q}^{n,T}, \delta \underline{W}^{n,T} \} \left[ \underline{A}_2^e \begin{bmatrix} \underline{M}^n \\ \underline{Q}^n \\ \underline{W}^n \end{bmatrix} + \underline{B}_2^e \right] \quad (5.5)$$

en la cual  $A_{-2}^e$ ,  $B_{-2}^e$  son las contribuciones elementales al sistema global, que se detallan en el Apéndice IV.

En este modelo, sobre los bordes apoyados y empotrados, la condición  $w = \bar{w} = 0$  se aproxima como condición natural, con sólo dejar variar libremente  $Q_n$  en el contorno. Sin embargo, también es posible forzar  $w = 0$  a través de valores nodales, consiguiéndose resultados muy similares con ambos procedimientos.

En la Tabla 12, se transcriben los valores correspondientes a una placa cuadrada empotrada, con carga uniforme, cuyos datos son:

$$E = 0.3 \times 10^8 \quad \nu = 0.3$$

$$h = 0.01 \quad a = \text{lado} = 1.6$$

La verificación fue efectuada sobre una malla de  $3 \times 3$  elementos isoparamétricos lineales en un cuarto de placa y en el primer caso se ha dejado libre de variar el desplazamiento  $w$  sobre el contorno, mientras que en el segundo, se impuso  $w = 0$  por valores nodales.

TABLA 12

Variable	Sobre borde empotrado	
	w(libre)	w = 0
w(centro de placa)	$0.3322913 \times 10^{-2}$	$0.3322912 \times 10^{-2}$
w(centro de lado)	$-0.87 \times 10^{-7}$	0.
$M_{11} = M_{22}$ (c.placa)	0.0668290	0.0668288
$M_n$ (centro de lado)	-0.128533	-0.128532

Otros resultados de este modelo se encuentran en la Tabla 13 y las subrutinas para la generación de la matriz y vector del elemento lineal se listan en el Apéndice VI.

## 5.2 - MODELO MIXTO CON $w, M_{ij}, Y_j$ , CONTINUOS

Para este modelo también asumimos que se cumplen idénticamente, en el interior, las relaciones

$$Q_j = Gkh(w_{,j} + \phi_j) \quad (5.6)$$

Denominamos distorsión asociada al esfuerzo de corte  $Q_j$ , a la magnitud  $\gamma_j$  definida por

$$\gamma_j = \phi_j + w_{,j} \quad (5.7)$$

A partir del funcional (3.5) y suponiendo cumplirse, sobre el contorno, las condiciones

$$w = \bar{w} \quad ; \quad M_{nn} = \bar{M}_{nn} \quad ; \quad M_{ns} = \bar{M}_{ns} \quad (5.8)$$

luego de eliminar  $Q_j$  y  $\phi_j$  por medio de (5.6) y (5.7), integrando se tiene:

$$\begin{aligned} \Pi_s = & \int_A \left[ \frac{1}{2} Gkh \gamma_j \gamma_j - p w - M_{ij,i} (\gamma_j - w_{,j}) - \right. \\ & \left. - \Omega_B \right] dA + \int_{S_u} (M_{nn} \bar{\phi}_n + M_{ns} \bar{\phi}_s) dS - \int_{S_\sigma} \bar{Q}_n w dS \end{aligned} \quad (5.9)$$

en donde  $\Omega_B$  es la energía complementaria por flexión en términos de los momentos  $M_{ij}$ .

Una solución del problema de flexión de placas se consigue por la variación del funcional (5.9) con respecto a las variables independientes  $w$ ,  $M_{ij}$ ,  $\gamma_j$ , con las condiciones subsidiarias (5.8).

Al igual que en los modelos anteriores, encontramos solamente en  $\Pi_3$  derivadas primeras de las funciones incógnitas, lo que permite de inmediato el empleo de elementos iso paramétricos mixtos.

Efectuando la representación de las variables y la geometría en la forma

$$\begin{aligned} w &= \underline{\phi} \underline{W}^n & ; & & M_{ij} &= \underline{\phi} \underline{M}_{ij}^n & ; & & \gamma_j &= \underline{\phi} \underline{\gamma}_j^n \\ p &= \underline{\phi} \underline{p}^n & ; & & x_1 &= \underline{\phi} \underline{x}_1^n & ; & & x_2 &= \underline{\phi} \underline{x}_2^n \end{aligned}$$

sólo resta reemplazar en el funcional (5.9) y hacer la varia ción:

$$\delta \Pi_3^e = \{ \delta \underline{M}^{n,T}, \delta \underline{\gamma}^{n,T}, \delta \underline{W}^{n,T} \} \left[ \underline{A}_3^e \begin{bmatrix} \underline{M}^n \\ \underline{\gamma}^n \\ \underline{W}^n \end{bmatrix} + \underline{B}_3^e \right] \quad (5.10)$$

$$\underline{\gamma}^n = \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_1^n \\ \underline{\gamma}_2^n \end{bmatrix}$$

En la expresión (5.10),  $\underline{A}_3^e$  y  $\underline{B}_3^e$  son las contribu

ciones elementales al sistema global que se detallan en el Apéndice V.

### 5.3 - ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS TRES MODELOS MIXTOS

El análisis ha sido realizado sobre una placa cuadrada empotrada, con carga uniforme, cuyas características son idénticas a las del ejemplo que figura en (5.1).

La malla indicada en la Tabla 13 corresponde a un cuarto de placa y para distinguir los tres casos, adoptamos la siguiente denominación:

Modelo 1:  $w, M_{ij}$  continuos

Modelo 2:  $w, M_{ij}, Q_j$  continuos

Modelo 3:  $w, M_{ij}, \gamma_j$  continuos

TABLA 13

Malla	$w \times 10^2$ (centro de placa)		
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
1 x 1	0.39730	0.39733	0.39730
2 x 2	0.36483	0.36483	0.36484
3 x 3	0.33229	0.33228	0.33229
4 x 4	0.31971	0.31971	0.31971

Malla	$M_{11} = M_{22}$ (centro de placa)		
	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3
1 x 1	0.13294	0.13296	0.13294
2 x 2	0.081038	0.081038	0.081038
3 x 3	0.066829	0.066827	0.066827
4 x 4	0.063448	0.063445	0.063448

De los resultados que se observan en la Tabla 13, se desprende que los tres modelos presentan la misma convergencia en función del número de elementos. Si tenemos en cuenta el número total de grados de libertad, no sucede lo mismo, ya que los modelos 2 y 3 tienen seis grados de libertad por nodo, en cuanto el modelo 1 posee sólo cuatro por nodo.

Finalmente podemos asegurar que no han sido agotadas las posibilidades en cuanto a nuevos modelos, a partir del funcional generalizado (3.5) sino, por el contrario, un amplio campo de investigación se abre con interesantes perspectivas.

### CONCLUSIONES

Los funcionales mixtos para flexión de placas son un adecuado punto de partida para el desarrollo de elementos finitos isoparamétricos. Estos elementos muestran sus excelentes propiedades para atacar problemas con condiciones muy generales de carga y geometría.

A través de la evaluación global de los resultados del presente trabajo, surge en evidencia que el elemento isoparamétrico cuadrático del modelo con  $w, M_{ij}$  continuos, es el más apto entre los que han sido estudiados, para una aplicación sistemática y se revela como una herramienta poderosa para el análisis de flexión de placas delgadas y moderadamente gruesas.

Dentro del mismo esquema, es posible adelantar que las capacidades expuestas pueden ser incrementadas con el análisis no lineal e inestabilidad del equilibrio, como así también con el estudio de vibraciones.

Concluimos entonces que, a más de ofrecer la posibilidad de abordar una gama amplia de problemas de estática de placas en flexión, los modelos analizados ofrecen un promisorio panorama para desarrollos más avanzados sobre el tema.

REFERENCIAS

1. ARGYRIS, J.H., "Energy Theorems and Structural Analysis" Aircraft Eng., Vol. 26, 1954.
2. WASHIZU, K., "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, 1968.
3. TIMOSHENKO, S.P. and WOINOWSKY-KRIEGER, "Theory of Plates and Shells", McGraw-Hill, 2a. ed. 1959.
4. ZIENKIEWICZ, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", McGraw-Hill, 1971.
5. CONNOR, J., "Mixed Models for Plates" de "Finite Element Techniques in Structural Mechanics", ed. por H.Tottenham and C. Brebbia, Proc. of a Seminar at the University of Southampton, 1970.
6. HANSTEEN, O.E., "Finite Element Methods as Applications of Variational Principles", de "Finite Elements Methods in Stress Analysis", ed. por I. Holand and K. Bell, Tapir, 1970.

7. REISSNER, E., "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates", Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, 1945.
8. PRYOR, CH. W., BARKER, R. and FREDERICK, D., "Finite Element Bending Analysis of Reissner Plates", Proc. of ASCE, Eng. Mech., December 1970.
9. HERRMANN, L., "A Bending Analysis for Plates", Wright-Patterson Air Force Base, A.F.F.D.L. TR80, 1965.
10. PIAN, TH. H.H. and TONG, P., "Rationalization in Deriving Element Stiffness Matrix by Assumed Stress Approach", Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.
11. ALTMAN, W. y VENANCIO FILHO, F., "Instabilidade de Colunas por um Método Misto", Anais das XV Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Vol. III, 1971.
12. BIGNON, P.G., "Elementos Mixtos para Análisis Lineal y no-lineal de Barras en Flexión", Anais das XV Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Vol. II, 1971.

13. KALMANOK, A.S., "Manual para Cálculo de Placas", Inter  
ciência, 1961.
14. PRATO, C., "Shell Finite Element Method via Reissner  
Principle", Int. J. Solids Structures, Vol. 5, 1969.
15. GREEN, A.E. and ZERNA, W., "Theoretical Elasticity, Ox-  
ford, 1954.
16. BELL, K., "Triangular Plate Bending Elements", de  
"Finite Element Methods in Stress Analysis", ed.  
por I. Holand and K. Bell, Tapir, 1970.

NOTACIONES

$\tau_{ij}$	Componentes de tensiones.
$e_{ij}$	Componentes de deformaciones.
$u_i$	Desplazamientos.
$U$	Energía de deformación por unidad de volumen.
$\Omega$	Energía complementaria por unidad de volumen.
$E$	Módulo de elasticidad longitudinal.
$G$	Módulo de elasticidad transversal.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$M_{ij}$	Momentos flectores y torsores.
$w$	Desplazamiento transversal medio.
$Q_j$	Esfuerzos de corte.
$\phi_j$	Rotaciones medias.
$\gamma_j$	Distorsiones.
$D$	Constante de rigidez de las placas.
$p$	Carga normal por unidad de superficie.

APENDICE I

CONTRIBUCIONES ELEMENTALES DEL MODELO 1. ESPESOR CONSTANTE

Orden de las incógnitas:  $\underline{W}^n, \underline{M}_{11}^n, \underline{M}_{12}^n, \underline{M}_{22}^n$

$$\underline{A}_{-1}^e = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{a} & \underline{b} + \underline{b}^T & \underline{c} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & -\left(\underline{D}_1 \underline{e} + \frac{1}{Gkh} \underline{a}\right) & -\frac{1}{Gkh} \underline{b} & \nu \underline{D}_1 \underline{e} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Simétrica} & \vdots & -\left\{2(1+\nu)\underline{D}_1 \underline{e} + \frac{1}{Gkh} (\underline{a} + \underline{c})\right\} & -\frac{1}{Gkh} \underline{b} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & -\left(\underline{D}_1 \underline{e} + \frac{1}{Gkh} \underline{c}\right) \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}_1 = \frac{12}{(E h^3)} \quad ; \quad k = \frac{5}{6}$$

$$\vec{B}_1^e = \begin{bmatrix} -e p_n \\ \frac{D_1 v h^2}{10} e p_n \\ 0 \\ \frac{D_1 v h^2}{10} e p_n \end{bmatrix}$$

NOTA: Las matrices  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$ ,  $\underline{e}$ , están definidas en el Ca  
pítulo III y el vector  $\vec{B}_1^e$  debe cambiarse de signo  
para ensamblarlo al vector global de términos inde  
pendientes. Este último recibirá aportes adicio  
nales en caso de existir cargas de línea distribu  
das, cargas concentradas o rotaciones prescriptas  
no nulas.

APENDICE IICONTRIBUCIONES ELEMENTALES DEL MODELO 1. ESPESOR VARIABLE

Orden de las incógnitas:  $\underline{W}^n, \underline{M}_{11}^n, \underline{M}_{12}^n, \underline{M}_{22}^n$

$$\underline{A}_{1,v}^e = \begin{bmatrix}
 \underline{0} & \underline{a} & \underline{b} + \underline{b}^T & \underline{c} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 - (D_{2-1} e + \frac{1}{Gk} a) & - \frac{1}{Gk} b_1 & & v D_{2-1} e \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \text{Simétrica} & & - \{ 2(1+v) D_{2-1} e + \frac{1}{Gk} (a + c) \} & - \frac{1}{Gk} b_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & - \{ D_{2-1} e + \frac{1}{Gk} c \}
 \end{bmatrix}$$

$$D_2 = \frac{12}{E} \quad ; \quad k = \frac{5}{6}$$

$$\underline{B}_{1,v}^e = \begin{bmatrix} -e_{1p}^n \\ \frac{D_2 v}{10} e_{2p}^n \\ 0 \\ \frac{D_2 v}{10} e_{2p}^n \end{bmatrix}$$

$$e_1 = \int_{A_n} (\underline{\phi} \underline{H}^n)^3 \underline{\phi}^T \underline{\phi} |J| d\xi d\eta$$

$$e_2 = \int_{A_n} (\underline{\phi} \underline{H}^n) \underline{\phi}^T \underline{\phi} |J| d\xi d\eta$$

$$a_1 = \int_{A_n} (\underline{\phi} \underline{H}^n) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \underline{\phi}\right)^T \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \underline{\phi}\right) |J| d\xi d\eta$$

$$b_1 = \int_{A_n} (\underline{\phi} \underline{H}^n) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \underline{\phi}\right)^T \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \underline{\phi}\right) |J| d\xi d\eta$$

$$c_1 = \int_{A_n} (\underline{\phi} \underline{H}^n) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \underline{\phi}\right)^T \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \underline{\phi}\right) |J| d\xi d\eta$$

$$\frac{1}{h} = \underline{\phi} \underline{H}^n = \left\{ \phi_1 \frac{1}{h_1} + \phi_2 \frac{1}{h_2} + \dots \right\}$$

Para la definición de las restantes matrices, ver Nota de Apéndice I.

APENDICE III

MATRICES PARA PLACAS "SANDWICH". ESPESOR CONSTANTE

Orden de las incógnitas:  $\underline{w}^n, \underline{M}_{-11}^n, \underline{M}_{-12}^n, \underline{M}_{-22}^n$

$$\underline{A}_s^e = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{a} & \underline{b} + \underline{b}^T & \underline{c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\{C_1 \underline{e} + C_2 \underline{a}\} & -C_2 \underline{b} & \dots & \nu C_1 \underline{e} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Simétrica} & \dots & -\{2(1+\nu)C_1 \underline{e} + C_2 (\underline{a} + \underline{c})\} & -C_2 \underline{b} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & -\{C_1 \underline{e} + C_2 \underline{c}\} \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_s^e = \{-\underline{e} \underline{p}^n, \underline{0}, \underline{0}, \underline{0}\}^T ; \quad C_1 = \frac{2}{E t_f h^2} ; \quad C_2 = \frac{1}{G_n h}$$

Para la definición de las restantes matrices, ver

Nota de Apéndice I.

APENDICE IVCONTRIBUCIONES ELEMENTALES DEL MODELO 2. ESPESOR CONSTANTE

Orden de las incógnitas:  $M_{-11}^n, M_{-12}^n, M_{-22}^n, Q_1^n, Q_2^n, W^n$

$$A_{-2}^e = \begin{bmatrix} -D_1 e & 0 & \nu D_1 e & -\frac{1}{Gkh} \underline{t} & 0 & \underline{a} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -D_3 e & 0 & -\frac{1}{Gkh} \underline{v} & -\frac{1}{Gkh} \underline{t} & \underline{b} + \underline{b}^T \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -D_1 e & 0 & -\frac{1}{Gkh} \underline{v} & \underline{c} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Simétrica} & \dots & -\frac{1}{Gkh} \underline{e} & 0 & -(\underline{t} + \underline{t}^T) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{Gkh} \underline{e} & -(\underline{v} + \underline{v}^T) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_3 = 2(1+\nu)D_1 \quad ; \quad D_1 = \frac{12}{(E h^3)} \quad ; \quad k = \frac{5}{6}$$

$$\underline{B}_2^e = \begin{bmatrix} \frac{D_1 v h^2}{10} e^{ip_n} \\ 0 \\ \frac{D_1 v h^2}{10} e^{ip_n} \\ 0 \\ 0 \\ -e^{ip_n} \end{bmatrix}$$

Las matrices  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$ ,  $\underline{c}$ ,  $\underline{e}$ , están definidas en el Capítulo III y  $\underline{t}$ ,  $\underline{v}$ , se especifican en el Capítulo V. El vector  $\underline{B}_2^e$  debe cambiarse de signo al ensamblarlo con el vector global de términos independientes, quien recibirá nuevos aportes en caso de existir cargas concentradas o rotaciones prescriptas no nulas.

APENDICE VCONTRIBUCIONES ELEMENTALES DEL MODELO 3. ESPESOR CONSTANTE

Orden de las incógnitas:  $\underline{M}_{11}^n, \underline{M}_{12}^n, \underline{M}_{22}^n, \underline{Y}_1^n, \underline{Y}_2^n, \underline{W}^n$

$$\underline{A}_3^e = \begin{bmatrix} -D_1^e & 0 & \nu D_1^e & -t & 0 & a \\ 0 & -D_3^e & 0 & -\nu & -t & \underline{b} + \underline{b}^T \\ & & -D_1^e & 0 & -\nu & c \\ \text{Simétrica} & & & Gkh e & 0 & 0 \\ & & & & Gkh e & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{B}_3^e = \underline{B}_2^e \quad ; \quad D_3 = 2(1+\nu)D_1$$

Para la definición de las matrices de base, ver Apéndice IV.

APENDICE VISUBROUTINAS TÍPICAS PARA ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS MIXTOS

A continuación se presenta el listado de las subrutinas PENTA y MIXED, escritas en idioma FORTRAN IV para el computador IMB-1130 (32K) de la U.F.R.J.

La subrutina PENTA genera las coordenadas y los factores de ponderación para integración numérica con  $5 \times 5$  puntos sobre un dominio bidimensional. Es conveniente que el programa principal disponga de subrutinas semejantes para  $3 \times 3$  y  $4 \times 4$  puntos de integración, que serán utilizadas según el caso.

La subrutina MIXED monta la matriz  $A_{-2}^e$  y el vector  $B_{-2}^e$  del elemento isoparamétrico lineal correspondiente al Modelo 2. Su llamado debe ser posterior al de PENTA y la secuencia de las operaciones que realiza es la siguiente:

- a) Definición de constantes y anulación previa de las matrices de base.

- b) Integración numérica de las matrices de base.
- c) Montaje de la matriz elemental y del vector asociado, según el esquema del Apéndice IV.
- d) Alteración de la posición de filas y columnas a fin de obtener una salida ordenada por incógnitas de nodo.

Siguiendo un camino similar, es relativamente sencillo escribir las subrutinas de los elementos cuadrático y cúbico, como así también todas aquellas necesarias para los modelos restantes.

```

// FOR
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
  SUBROUTINE PENTA(A,W)
C*****
C*
C*
C*      ESTA SUBROUTINA GENERA LAS COORDENADAS EN  A(2,25) Y
C*      LOS FACTORES DE PONDERACION EN W(25) PARA INTEGRACION
C*      NUMERICA CON 5X5 PUNTOS DE GAUSS SOBRE UN DOMINIO
C*      BIDIMENSIONAL
C*
C*
C*****
  DIMENSION A(2,25),W(25),C(5)
  Q1=-0.906179845938e
  Q2=-0.538469310105e
  C(1)=0.2369268850562
  C(2)=0.4786286770479
  C(3)=0.5688888888889
  C(4)=C(2)
  C(5)=C(1)
  DO 1 I=1,5
    A(1,I)=Q1
    A(1,I+5)=Q2
    A(1,I+10)=0.
    A(1,I+15)=-Q2
  1 A(1,I+20)=-Q1
    DO 2 I=1,5
      I1=5*(I-1)+1
      A(2,I1)=Q1
      I2=5*(I-1)+2
      A(2,I2)=Q2
      I3=5*(I-1)+3
      A(2,I3)=0.
      I4=5*(I-1)+4
      A(2,I4)=-A(2,I2)
      I5=5*(I-1)+5
  2 A(2,I5)=-A(2,I1)
    DO 3 I=1,5
      W(I)=C(1)*C(I)
      W(I+5)=C(2)*C(I)
      W(I+10)=C(3)*C(I)
      W(I+15)=C(4)*C(I)
  3 W(I+20)=C(5)*C(I)
  RETURN
  END

```

```

// FOR
*EXTENDED PRECISION
*LIST SOURCE PROGRAM
  SUBROUTINE MIXED(XE,EE,TU,TH,P,A,W,NPU,TT,S)
C*****
C*
C*
C*      ESTA SUBROUTINA CALCULA LA MATRIZ DEL ELEMENTO Y EL VECTOR
C*
C*      DE TERMINOS INDEPENDIENTES CORRESPONDIENTES AL MODELO 2
C*
C*
C*****
C*
C*      DATOS
C*
C*      XE(4,2)= COORDENADAS NODALES DEL CUADRILATERO LINEAL
C*      P(4)= VALORES NODALES DE LA CARGA DE SUPERFICIE
C*      EE= MODULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL
C*      TU= COEFICIENTE DE POISSON
C*      TH= ESPESOR
C*      A(2,25)= COORDENADAS DE LOS PUNTOS DE INTEGRACION
C*      W(25)= FACTORES DE PONDERACION PARA INTEGRACION NUMERICA
C*      NPU= NUMERO DE PUNTOS DE INTEGRACION EN CADA DIMENSION
C*
C*
C*      SALIDA
C*
C*      S(25,25)= MATRIZ DEL ELEMENTO ( 24X24 )
C*      TT(24)= VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES
C*
C*****
  DIMENSION F(5),FIN(2,5),T(2,2),T1(2,2),A(2,25),W(25),
  CAA(4,4),E(4,4),B(4,4),C(4,4),S(25,25),XE(4,2),P(4),
  CFIX(2,5),SI(25,25),TT(24),GE(4,4),FE(4,4)
  N1=5
  GG=EE/(2.*(1.+TU))
  CU=12./(EE*(TH**3))
  GAM=5./6.
  CAP=GG*GAM*TH
  DO 18 I=1,4
  DO 18 J=1,4
  GE(I,J)=0.
  FE(I,J)=0.
  E(I,J)=0.
  AA(I,J)=0.
  B(I,J)=0.

```

```

18 C(I,J)=0.
   NP=NPU*NPU
   DO 20 K=1, NP
     FI(1)=(1.+A(1,K))*(1.+A(2,K))/4.
     FI(2)=(1.-A(1,K))*(1.+A(2,K))/4.
     FI(3)=(1.-A(1,K))*(1.-A(2,K))/4.
     FI(4)=(1.+A(1,K))*(1.-A(2,K))/4.
     FIN(1,1)=(1.+A(2,K))/4.
     FIN(1,2)=- (1.+A(2,K))/4.
     FIN(1,3)=- (1.-A(2,K))/4.
     FIN(1,4)=(1.-A(2,K))/4.
     FIN(2,1)=(1.+A(1,K))/4.
     FIN(2,2)=(1.-A(1,K))/4.
     FIN(2,3)=- (1.-A(1,K))/4.
     FIN(2,4)=- (1.+A(1,K))/4.
   DO 22 I=1, 2
   DO 22 J=1, 2
     T(I,J)=0.
   DO 22 M=1, 4
22 T(I,J)=F(I,J)+FIN(I,M)*XE(M,J)
   DET=T(1,1)*T(2,2)-T(1,2)*T(2,1)
   T1(1,1)=T(2,2)/DET
   T1(1,2)=-T(1,2)/DET
   T1(2,1)=-T(2,1)/DET
   T1(2,2)=T(1,1)/DET
   DO 24 J=1, 4
   DO 24 I=1, 2
     FIX(I,J)=0.
   DO 24 M=1, 2
24 FIX(I,J)=FIX(I,J)+T1(I,M)*FIN(M,J)
   DET=DET*w(K)
   DO 26 I=1, 4
   DO 26 J=1, 4
     E(I,J)=E(I,J)+FI(I)*FI(J)*DET
     AA(I,J)=AA(I,J)+FIX(1,I)*FIX(1,J)*DET
     B(I,J)=B(I,J)+FIX(1,I)*FIX(2,J)*DET
     GE(I,J)=GE(I,J)+FIX(2,I)*FI(J)*DET
     FE(I,J)=FE(I,J)+FIX(1,I)*FI(J)*DET
26 C(I,J)=C(I,J)+FIX(2,1)*FIX(2,J)*DET
20 CONTINUE
   DO 40 I=1, 4
   DO 40 J=1, 4
     S(I,J)=-CD*E(I,J)
     S(I+4,J)=0.
     S(I+8,J)=TU*CD*E(I,J)
     S(I+12,J)=-FE(J,I)/CAP
     S(I+16,J)=0.
     S(I+20,J)=AA(I,J)
     S(I+4,J+4)=-2.*(1.+TU)*CD*E(I,J)
     S(I+8,J+4)=0.

```

```

S(I+12,J+4)=-GE(J,I)/CAP
S(I+16,J+4)=-FE(J,I)/CAP
S(I+20,J+4)=B(I,J)+B(J,I)
S(I+8,J+8)=-CD*E(I,J)
S(I+12,J+8)=0.
S(I+16,J+8)=-SE(J,I)/CAP
S(I+20,J+8)=C(I,J)
S(I+12,J+12)=E(I,J)/CAP
S(I+16,J+12)=0.
S(I+20,J+12)=- (FE(I,J)+FE(J,I))
S(I+16,J+16)=S(I+12,J+12)
S(I+20,J+16)=- (GE(I,J)+GE(J,I))
40 S(I+20,J+20)=0.
DO 47 I=1,24
47 S(25,I)=0.
DO 43 I=1,4
DO 42 J=1,4
S(25,I)=S(25,I)-0.1*CD*TU*(TH**2)*E(I,J)*P(J)
42 S(25,I+20)=S(25,I+20)+E(I,J)*P(J)
43 S(25,I+8)=S(25,I)
DO 667 I=1,24
DO 607 J=1,24
667 S(I,J)=S(J,I)
DO 48 J=1,24
DO 48 I=1,4
S(6*I-5,J)=S(I,J)
S(6*I-4,J)=S(I+4,J)
S(6*I-3,J)=S(I+8,J)
S(6*I-2,J)=S(I+12,J)
S(6*I-1,J)=S(I+16,J)
48 S(6*I,J)=S(I+20,J)
DO 41 J=1,4
DO 41 I=1,25
S(I,6*J-5)=S(I,J)
S(I,6*J-4)=S(I,J+4)
S(I,6*J-3)=S(I,J+8)
S(I,6*J-2)=S(I,J+12)
S(I,6*J-1)=S(I,J+16)
41 S(I,6*J)=S(I,J+20)
DO 864 I=1,24
864 TT(I)=S(25,I)
120 FORMAT(//2X,(6E18.8))
WRITE(NI,120)(S(25,I),I=1,24)
WRITE(NI,120)((S(I,J),J=1,24),I=1,24)
RETURN
END

```