



Avaliação de Modelos de Turbulência em Cavidades Térmicas

Matheus Rocha Marques de Almeida

Monografia em Engenharia Química

Orientadora

Prof. Tânia Suaiden Klein, Ph.D.

Março 2022

AVALIAÇÃO DE MODELOS DE TURBULÊNCIA EM CAVIDADES TÉRMICAS

Matheus Rocha Marques de Almeida

Monografia em Engenharia Química submetida ao Corpo Docente da Escola de Química,
como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Engenheiro Químico.

Aprovado por:

Prof. Carla Luciane Manske Camargo, D. Sc.

Prof. Sílvio Aparecido Verdério Júnior, M. Sc.

Orientado por:

Prof. Tânia Suaiden Klein, Ph.D.

Rio de Janeiro, RJ – Brasil

Março 2022

de Almeida, Matheus Rocha Marques.

Avaliação de modelos de turbulência em cavidades térmicas/

Matheus Rocha Marques de Almeida.

Rio de Janeiro: UFRJ/EQ, 2022.

XV, 100 p.; il.

Monografia – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola de Química, 2021.

Orientador: Tânia Suaiden Klein

1. Modelos de Turbulência.
2. Convecção natural.
3. Transferência de calor.
4. Monografia. (Graduação – UFRJ/EQ).
5. Tânia Suaiden Klein. I. .

Dedico esta monografia ao meu pai Milton Marques de Almeida (in memoriam) e minha mãe Vitalina Maria Rocha Marques que sempre estiveram ao meu lado, assim como também a dedico ao meu avô Agenor Telles de Almeida (in memoriam).

Os céus declaram a glória de Deus, o
firmamento proclama a obra das Suas mãos.
Salmos 19:1

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus por ter me sustentado até aqui através de fé, resiliência e saúde. Além disso por sempre estar comigo nos momentos mais difíceis da minha vida e nunca me abandonar.

Ao meu pai Milton Marques (in memoriam) que sempre foi meu maior incentivador ao campo da pesquisa e por ter gerado em mim a certeza de que a única forma de mudança nas nossas vidas é através dos estudos. Espero me tornar um pai, marido e amigo tão maravilhoso e exemplar quanto você foi para mim e nossa família. Minha mãe Vitalina Marques por todas as conversas e conselhos que me deu durante os momentos de tensão da graduação e por todo amor que sempre teve por nossa família. Amo vocês para sempre.

A minha noiva Júlia Moraes por sempre me mostrar que “as coisas vão dar certo”, mesmo em momentos de dor e sofrimento. Sua forma amorosa e empática de enxergar as coisas me fizeram ter forças para prosseguir em muitos momentos. Seu companheirismo, parceria e cumplicidade são coisas que não há palavras que possam descrever. Assim como meu pai, você foi a primeira a me apoiar quando decidi seguir carreira acadêmica e me mostrou que, apesar dos apesares dessa trajetória, “nós conseguiríamos”. E conseguimos. Hoje, a convicção e certeza de querer ser professor universitário e pesquisador teve como papel fundamental sua presença, companheirismo e apoio. Te amo.

Agradeço ao meu avô Agenor Almeida (in memoriam) que sempre me apoiou também aos estudos e nunca mediu esforços para isso e hoje, se fisicamente presente, estaria vibrando por ter “um neto engenheiro” como ele sempre dizia que eu seria.

E por último, porém não menos importante, agradeço imensamente a minha orientadora. Professora Tânia Klein, obrigado por toda paciência e força durante a produção deste trabalho e anos trabalhando como monitor de sua disciplina e aluno de IC. A senhora também faz parte fundamental do meu desejo de se tornar professor universitário. Espero um dia me tornar pelo menos 10% da pessoa e profissional és.

Toda minha formação, seja pessoal ou profissional, é fruto do apoio dessas pessoas. Minha eterna gratidão a vocês.

Resumo da Monografia apresentada à Escola de Química como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Engenheiro Químico.

AVALIAÇÃO DE MODELOS DE TURBULÊNCIA EM CAVIDADES TÉRMICAS

Matheus Rocha Marques de Almeida

Fevereiro, 2022

Orientadora: Prof. Tânia Suaiden Klein, Ph.D.

A convecção natural em cavidades térmicas fechadas vem ganhando destaque por ser comumente encontrada em projetos de painéis solares, chips de equipamentos eletrônicos e conforto térmico. Esse mecanismo é modelado através de um conjunto de equações diferenciais parciais que, sem simplificações, não possuem solução analítica direta. Por conta da não linearidade dessas equações, ferramentas computacionais tais como CFD (*Computational Fluid Dynamic*) podem então ser utilizadas para fornecer soluções numéricas que permitam quantificar grandezas importantes para problemas de engenharia, como taxas e fluxos.

Nesse trabalho foi investigado através da Fluidodinâmica Computacional o fenômeno da convecção natural dentro de uma cavidade térmica fechada para $Ra_L = 10^7$, com duas faces adjacentes mantidas a uma temperatura maior que as duas faces adjacentes opostas e, as faces laterais adiabáticas. O programa de código aberto OpenFOAM foi utilizado e dois *solvers* foram inicialmente testados: o *buoyantBoussinesqPimpleFoam* e *buoyantPimpleFoam*. O primeiro mostrou-se mais adequado e diferentes modelos de turbulência foram então avaliados: o modelo de uma equação Spalart-Allmaras, os modelos LRN de viscosidade turbulenta linear SST $k - \omega$, $k - \varepsilon$ de Launder e Sharma e v^2f , o modelo LRN de viscosidade turbulenta não linear (cúbico) de Lien *et al* (1996) e os modelos dos Tensores de Reynolds LRR e SSG. Os resultados foram comparados com dados de DNS. O modelo v^2f foi o que apresentou

perfis de temperatura mais próximos ao de DNS, seguido dos modelos Launder e Sharma, Lien cúbico, LRR e SSG. Perfis de velocidade também foram discutidos e mostrou-se que há um fraco acoplamento entre as equações do movimento e energia, tal que o empuxo é predominantemente responsável pela movimentação do fluido. De modo geral, as simulações CFD subestimaram o coeficiente de transferência de calor em torno de 12%, o que pode ser considerado razoável dado o menor custo computacional e demais simplificações envolvidas.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.2. Objetivo	3
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1. Convecção natural	5
2.2. Fluidodinâmica Computacional	7
2.3. Equações de conservação e modelos matemáticos	9
2.3.1. Equações de conservação básicas.....	10
2.3.2. Modelos de Turbulência.....	11
2.3.3. Modelos de baixo número de Reynolds.....	17
2.3.4. Aproximação de Boussinesq.....	25
2.4. Métodos dos volumes finitos	26
2.4.1. Termo difusivo	28
2.4.2. Termo advectivo.....	30
2.4.3. Termo fonte	31
2.4.4. Termo temporal.....	32
2.4.5. Acoplamento pressão-velocidade	33
2.5. Simulações Numéricas de Convecção Natural Turbulenta.....	35
3. METODOLOGIA	42
3.1. <i>buoyantBoussinesqPimpleFoam</i> e <i>buoyantPimpleFoam</i>	43
3.2. Estudo de domínio e malha.....	45
3.3. Condições iniciais e de contorno.....	49
4. RESULTADOS	55
4.1. Convergência de malha.....	55
4.2. Comparação entre modelos de turbulência.....	59
4.3. Análise do coeficiente de transferência de calor	68
5. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS	72
6. REFERÊNCIAS	74
7. APÊNDICE 1	78

8. APÉNDICE 2.....82

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Evolução temporal do número de publicações com OpenFOAM.	8
Figura 2: Volume de controle diferencial com propriedade ϕ sendo transportada (Adaptado de VERSTEEG, H. K., 2007).	9
Figura 3: Comportamento típico do campo de velocidade em regime turbulento medido por um sensor pontual.....	Erro! Indicador não definido.
Figura 4: Discretização para um domínio 1D (Adaptado de VERSTEEG, H. K., 2007).	27
Figura 5: Discretização para domínio 3D (Adaptado de VERSTEEG, H. K., 2007).	28
Figura 6: Problema advectivo 1D (Adaptado de VERSTEEG, H. K., 2007).	31
Figura 7: Fluxograma dos algoritmos de acoplamento pressão-velocidade SIMPLE e PISO.....	35
Figura 8: Esquema do problema de transferência de calor por convecção natural em cavidade fechada por Markatos e Pericleous (1984).	37
Figura 9: Esquema do problema de transferência de calor por convecção natural em cavidade fechada por Ibrahim et al. (1994).	39
Figura 10: Esquema do problema de transferência de calor por convecção natural em cavidade fechada por Fabregat e Pallarès. (2020).....	40
Figura 11: Vista frontal da cavidade térmica	42
Figura 12: Geometria e nomenclatura do domínio gerado a partir do blockMesh.	46
Figura 13: Discretização do domínio da malha M1.	47
Figura 14: Refino de malha.	48
Figura 15: Análise 1D para $Co < 1$	53
Figura 16: Análise 1D para $Co > 1$	53
Figura 17: Corte nas direções normais aos planos x, y e z.	55
Figura 18: Convergência de malha com solver buoyantPimpleFoam e modelo $SST k - \omega$	56
Figura 19: Comparação dos dados DNS de Fabregat e Pallarès (2020) com atual trabalho utilizando modelo de turbulência $SST k - \omega$ e solver buoyantBoussinesqPimpleFoam.	57

Figura 20: Comparação do campo de temperatura adimensional entre os dados DNS, buoyantBoussinesqPimpleFoam e buoyantPimpleFoam com modelo $SST k - \omega$ no plano xy em $z = 0$	58
Figura 21: Comparação entre os perfis de temperatura adimensionais entre os modelos de turbulência utilizando o solver buoyantBoussinesqPimpleFoam no plano XY (em $z = 0$).	59
Figura 22: Perfis de temperatura obtidos com os modelos RSM e não linear (cúbico) no solver buoyantBoussinesqPimpleFoam.	60
Figura 23: Perfis de temperatura obtidos com os modelos RSM e não linear (cúbico) no solver buoyantBoussinesqPimpleFoam.	61
Figura 24: Comparação entre os dados DNS do campo theta com diferentes modelos de turbulência com o solver buoyantBoussinesqPimpleFoam	62
Figura 26: Vetores da velocidade obtido com os modelos de turbulência testados com o solver buoyantBoussinesqPimpleFoam	63
Figura 25: Campos de velocidade obtido com os modelos de turbulência testados utilizando o solver buoyantBoussinesqPimpleFoam.	63
Figura 27: Linhas de corrente do escoamento com modelo $v2f$ com solver buoyantBoussinesqPimpleFoam.....	65
Figura 28: Comparação da componente u da velocidade para diferentes modelos de turbulência com solver buoyantBoussinesqPimpleFoam	66
Figura 29: Componente v da velocidade para diferentes modelos de turbulência com solver buoyantBoussinesqPimpleFoam	66
Figura 30: Avanço temporal do campo θ e velocidade com solver buoyantBoussinesqPimpleFoam para o modelo de turbulência $v2f$	67
Figura 31: Modelo de ControlDict no OpenFOAM.....	78

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1: Constantes do modelo $k-\varepsilon$	14
Tabela 2: Constantes do modelo $k-\omega$	16
Tabela 3: Constantes do modelo de Launder e Sharma (1974)	18
Tabela 4: Constantes do modelo $v2f$	20
Tabela 5: Constantes do modelo cúbico de Lien para LRN	22
Tabela 6: Constantes do modelo LRR	24
Tabela 7: Constantes do modelo SSG	25
Tabela 8: Coeficientes de discretização associado às Equações 2.51 e 2.52.	29
Tabela 9: Propriedades do ar (Fabregat e Pallarès, 2020).	43
Tabela 10: Número de elementos de cada malha	46
Tabela 11: Condições de contorno	51
Tabela 12: Condições iniciais	52
Tabela 13: Tabela de recomendações (Adaptado do manual Wolf Dynamics).	54
Tabela 14: Esquemas numéricos dos operadores da equação de transporte.	54
Tabela 15: Valores de Nu e coeficiente convectivo para $RaL = 107$ para os diferentes tipos de modelos de turbulência com solver buoyantBoussinesqPimpleFoam	69
Tabela 16: Erro relativo aos modelos de turbulência com o solver buoyantBoussinesqPimpleFoam.	70
Tabela 17: Comportamento do vetor normal à superfície para o termo laplaciano.	84

NOMENCLATURA

LETRAS LATINAS

Símbolo	Descrição	Dimensão
U	Vetor velocidade média	LT^{-1}
u	Vetor velocidade	LT^{-1}
\dot{Q}	Taxa de transferência de calor	[W]
\bar{h}	Coeficiente de transferência de calor por convecção [W/m ² K]	
g	Aceleração da gravidade	LT^{-2}
i	Energia interna específica [J/kg]	
p	Pressão	
S	Termo fonte	
S_{ij}	Tensor de deformação	
T	Temperatura	K
u	Componente da velocidade na direção x	LT^{-1}
v	Componente da velocidade na direção y	LT^{-1}
w	Componente da velocidade na direção z	LT^{-1}
x	Coordenada x	L
y	Coordenada y	L
z	Coordenada z	L
A	Área	L^2
k_f	Condutividade térmica do fluido W/m.K	
q''	Fluxo de calor [W/m ²]	
y^+	Distância adimensional da parede	
L	Comprimento	L

LETRAS GREGAS

Símbolo	Descrição	Dimensão
α	Difusividade térmica	L^2T^{-1}
β	Coeficiente de expansão térmica	K^{-1}
Δ	Varição	
δ	Distância	L
ν	Viscosidade cinemática	L^2T^{-1}
β	Coeficiente de expansão térmica	K^{-1}
μ	Viscosidade dinâmica	$ML^{-1}T^{-2}$
k	Energia cinética turbulenta	L^2T^{-1}
ω	Frequência de turbulência	$1/s$
ϕ	Propriedade transportada genérica	
ρ	Massa específica	ML^{-3}
$\bar{\rho}$	Massa específica média	ML^{-3}
τ	Tensão	Pa
ε	Taxa de dissipação da energia cinética turbulenta	L^2T^{-1}
ψ	Termo de dissipação de energia [W]	
Γ	Difusividade	L^2T^{-2}

SOBRESCRITO

Símbolo	Descrição
'	Flutuação da média
''	Variável corrigida
*	Correção do algoritmo SIMPLE
0	Referência da iteração anterior
—	Média temporal

SUBSCRITO

Símbolo	Descrição
∞	Ambiente
ϕ	Propriedade ϕ
L_c	Comprimento característico
0	Referência
c	Característico
E	Ponto leste
e	Face leste
s	Superfície
t	Turbulenta
W	Ponto oeste
w	Face oeste
i	Energia
M	Momento
h	Horizontal
v	Vertical

GRUPOS ADIMENSIONAIS

Símbolo	Descrição
$Re = \frac{\rho UD}{\mu}$	Número de Reynolds
$Gr = \frac{\beta g (T_s - T_\infty) L_c^3}{\nu^2}$	Número de Grashof
$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$	Número de Prandtl
$Ra = Gr \times Pr$	Número de Rayleigh
$\overline{Nu} = \frac{\bar{h} L_c}{k_f}$	Número de Nusselt médio
Co	Número de Courant

1. INTRODUÇÃO

No dia-a-dia de um engenheiro projetista ou de simulação, a mecânica dos fluidos e a transferência de calor e massa são fenômenos corriqueiramente encontrados que precisam ser compreendidos e explorados.

Para todos esses fenômenos de transporte o gradiente de uma determinada propriedade deve existir para que haja um fluxo da mesma em uma dada direção e sentido.

Na mecânica dos fluidos, os gradientes de velocidade, causados muitas vezes por conta de condições de não deslizamento nas fronteiras estáticas do escoamento, são os responsáveis pela transferência de quantidade de momento linear.

Na transferência de massa, a diferença de potencial químico é o gradiente que induzirá o transporte de espécies. Para misturas binárias ideais, a força motriz se reduz às diferenças de concentração, de forma que as espécies migram de uma região mais concentrada para uma com menor concentração.

Já na transferência de calor, um gradiente de temperatura deve existir para que haja um fluxo de energia migrando sempre do ponto de maior temperatura para o de menor temperatura. Existem 3 formas pelas quais o calor pode ser transferido: condução, convecção e radiação.

Na condução, a transferência é feita pelo processo difusivo das partículas mais energéticas para as com menor grau de energia devido a interação molecular entre elas. Esse mecanismo de transferência de calor segue a lei de Fourier.

Por sua vez, a radiação é a energia térmica emitida por qualquer matéria que se encontra a uma temperatura finita. Diferentemente das outras duas formas de transferência de calor, esta é a única que não precisa de um meio para se propagar.

Na convecção, o movimento macroscópico de um fluido em contato com uma superfície tem impacto direto na forma como a troca energética será dada. Somando então a interação microscópica das partículas juntamente com o movimento macroscópico do fluido, se tem o transporte convectivo. Sua quantificação é dada pela lei de resfriamento de Newton.

O mecanismo da convecção pode ser forçado ou natural. No primeiro, o movimento do fluido se deve à uma força externa, como uma bomba ou um ventilador. Na convecção natural, forças de empuxo, resultante dos gradientes de massa específica, gerados pelas diferenças de temperatura, são responsáveis pela movimentação macroscópica do fluido. A convecção natural é relevante para estudos de coletores solares, painéis fotovoltaicos, conforto térmico, reatores e secadores de grãos, dentre outros.

Para o caso da convecção natural dois adimensionais são importantes: o número de Rayleigh e o número de Nusselt. O primeiro está associado à intensidade das forças de empuxo com relação às forças viscosas e é utilizado como parâmetro para determinação do regime de escoamento, se laminar ou turbulento. A intensidade de transferência de calor é caracterizada, por sua vez, pelo número de Nusselt, que relativiza o coeficiente de transferência de calor por convecção, com relação ao comprimento característico do problema e a natureza condutiva do fluido, que, em última instância, está relacionado ao fluxo de calor adimensional da superfície.

O coeficiente de transferência de calor é um parâmetro que engloba todas as incertezas associadas à camada limite térmica, que só pode ser devidamente caracterizada por soluções numéricas na maior parte dos casos. Dessa forma, a fluidodinâmica computacional (CFD) pode ser utilizada para determinação deste parâmetro, podendo, por exemplo, estender resultados provenientes de experimentos, que impõem limitações às condições estudadas.

Uma questão crítica associada à simulação numérica de escoamentos turbulentos é como tratar o fenômeno da turbulência, que por si só é complexo. Escoamentos turbulentos são caracterizados pela presença de vórtices, que são responsáveis pelas altas taxas de mistura e difusão associadas a esse regime de escoamento. Porém, quanto mais turbulento é um escoamento, maiores são os maiores vórtices e menores são os menores vórtices, tal que resolver todas as escalas da turbulência em escoamentos moderadamente turbulentos é uma tarefa praticamente impeditiva para os recursos computacionais atuais.

De forma muito sucinta, pode-se elencar três abordagens para tratar a turbulência: Simulações Numéricas Diretas (DNS, do inglês Direct Numerical Simulations), que

resolvem todas as escalas da turbulência, Simulações das Grandes Escalas (LES, do inglês Large Eddy Simulations), que, como o próprio nome já diz, resolvem apenas as grandes escalas e modelam as menores escalas, e as simulações RANS, do inglês Reynolds-Averaged-Navier-Stokes, que não resolvem nenhuma escala da turbulência, mas trabalham apenas com propriedades médias das quantidades turbulentas. Há ainda modelos híbridos LES-RANS que trabalham justamente em estreitar a faixa de escalas da turbulência a ser resolvida. Em termos de custo computacional, DNS é a mais custosa e RANS a menos custosa. LES e híbridos LES-RANS demandam menor esforço computacional que DNS, mas ainda assim, são muito mais custosos que simulações RANS, especialmente em escoamentos muito turbulentos e com superfícies, onde a resolução da camada limite se faz necessária. Por outro lado, a precisão e acurácia de DNS, LES e híbridos LES-RANS são muito maiores que simulações RANS. Porém, para interesses práticos de engenharia, as simulações RANS retornam resultados razoáveis dada sua razão custo/benefício, tal que é a mais representativa quando se fala em simulações CFD.

Quando a abordagem RANS é utilizada, precisa-se de modelos de turbulência. Porém, há uma grande variedade de modelos de turbulência na literatura e sua utilização de forma apropriada e consciente é imprescindível para resultados coerentes e confiáveis. Dessa forma, o presente trabalho busca investigar, através de CFD, a influência de diferentes modelos de turbulência na predição da transferência de calor em uma cavidade fechada com escoamento por convecção natural turbulenta.

1.2. Objetivo

O objetivo geral do presente trabalho é reproduzir um trabalho de simulação numérica direta (DNS) sobre convecção natural numa cavidade térmica fechada. Esta consiste em um cubo, em que duas faces adjacentes são mantidas a uma temperatura maior que as duas faces adjacentes opostas e, as faces laterais são adiabáticas. As simulações foram conduzidas com a abordagem RANS para a turbulência e diferentes modelos de turbulência foram avaliados.

A depender da diferença de temperatura entre as faces do cubo, o escoamento gerado pela convecção natural pode ser laminar ou turbulento. De acordo com Fabregat & Pallarès (2020), o número de Rayleigh crítico para esse problema é 10^5 . O caso de transferência de calor natural selecionado para ser reproduzido tem número de Rayleigh 10^7 , garantindo escoamento turbulento. A comparação dos resultados obtidos com correlações estudadas durante a disciplina de transferência de calor do curso de graduação também foi incluída no trabalho.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Neste capítulo, serão discutidos a convecção natural como fenômeno, a fluidodinâmica computacional, a modelagem utilizada no presente trabalho e uma revisão bibliográfica acerca do caso que será estudado.

2.1. Convecção natural

A transferência de calor por convecção natural em cavidades retangulares é um campo de intensos estudos devido a sua alta aplicação no campo de engenharia. Exemplos como construção de isolamento para prédios, acessórios de resfriamento para instrumentos eletrônicos, coletores de energia solar, reatores nucleares, entre outros, mostram a vasta aplicação e importância de se melhor compreender a convecção natural.

A convecção natural ocorre quando uma força de corpo atua no fluido no qual existem gradientes de massa específica, causados comumente por um gradiente de temperatura. Como resultado líquido, uma força de empuxo surge, causando as correntes de convecção natural (INCROPERA, 1994).

A convecção natural é caracterizada pelo número de Rayleigh, apresentado na Equação 2.1, em que g é a aceleração da gravidade, L_c o comprimento característico da geometria do problema, T_s é a temperatura da superfície que está trocando calor com um fluido adjacente à temperatura T_∞ , cujo coeficiente de expansão térmica é β , ν é a viscosidade cinemática e α , sua difusividade térmica. É a partir desse adimensional que se determina o regime de escoamento, se laminar ou turbulento.

$$Ra_{L_c} = \frac{\beta g (T_s - T_\infty) L_c^3}{\nu \alpha} \quad (2.1)$$

O número de Rayleigh pode ser interpretado como a composição de outros dois grupos adimensionais. O número de Grashof e o número de Prandtl, conforme a Equação 2.2, em que o primeiro (Gr_{L_c}) representa a intensidade das forças de empuxo sobre as forças viscosas para um escoamento e é dado pela Equação 2.3. Por sua vez, o número de Prandtl representa a intensidade da difusividade de momento com relação à

difusividade térmica do escoamento (BERGMAN & LAVINE, 2014) e é dado pela Equação 2.4.

$$Ra_{L_c} = Gr_{L_c} Pr \quad (2.2)$$

$$Gr_{L_c} = \frac{\beta g (T_s - T_\infty) L_c^3}{\nu^2} \quad (2.3)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (2.4)$$

A transferência de calor por convecção como um todo costuma ser quantificada pela lei do resfriamento de Newton, Equação 2.5, que expressa o fluxo de calor (q'') de forma diretamente proporcional à diferença de temperatura máxima que o fluido experimenta. O coeficiente de proporcionalidade recebe o nome de coeficiente de transferência de calor por convecção e engloba todos os fenômenos que ocorrem dentro da camada limite dinâmica e térmica. Este coeficiente pode ser expresso de forma adimensional pelo número de Nusselt, que, em última instância, representa o gradiente adimensional de temperatura na parede.

$$q''_{convecção} = \bar{h} (T_s - T_\infty) \quad (2.5)$$

O número de Nusselt médio é representado pela Equação 2.6, em que \bar{h} representa o coeficiente de transferência de calor médio por convecção e k_f é a condutividade térmica do fluido. Por ser um parâmetro que caracteriza a intensidade da transferência de calor, e, pela transferência de calor ser um fenômeno de superfície, a resolução correta das regiões próximas às paredes de um domínio é de extrema importância para cálculo correto do coeficiente de transferência de calor. Posteriormente, \bar{h} pode ser utilizado para quantificar a taxa de calor transferido com a Equação 2.5.

$$\overline{Nu}_{L_c} = \frac{\bar{h} L_c}{k_f} \quad (2.6)$$

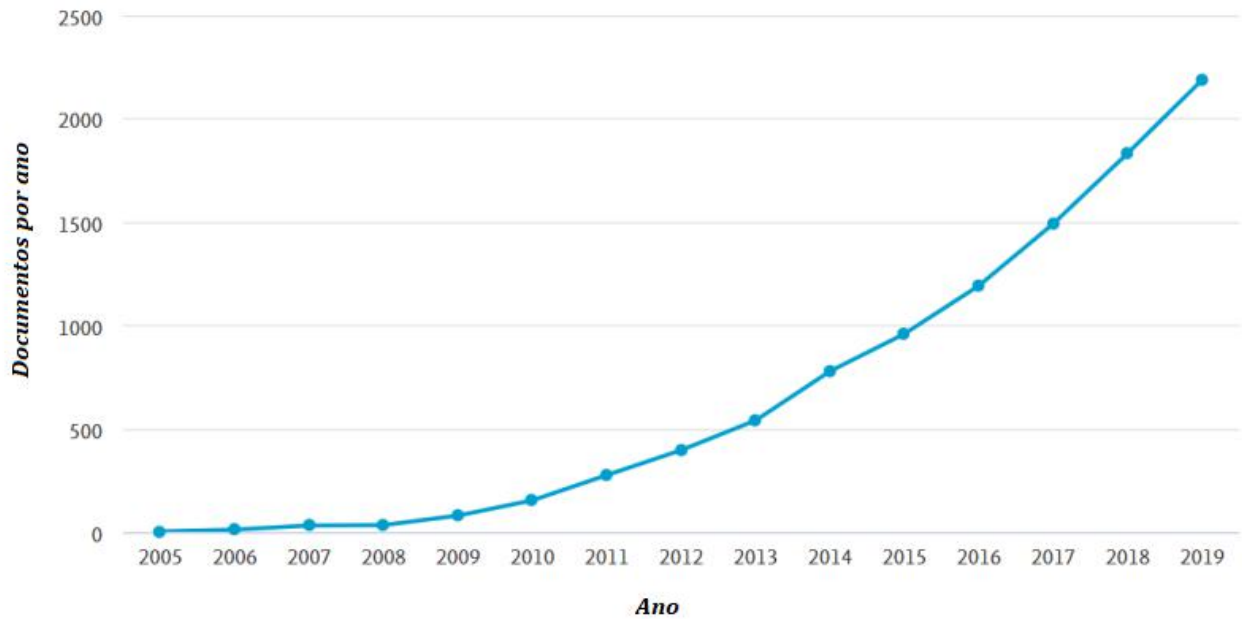
Nesse contexto, a fluidodinâmica computacional tem papel importante para se solucionar as equações governantes que regem problemas de engenharia envolvendo a transferência de calor e outros fenômenos de transporte, tal qual a turbulência.

2.2. Fluidodinâmica Computacional

O conjunto de ferramentas numéricas e computacionais utilizadas para resolver numericamente o sistema de equações diferenciais parciais que regem o escoamento de fluidos é conhecido por Fluidodinâmica Computacional, CFD, do inglês, *Computational Fluid Dynamics*. Há diversos códigos de CFD disponíveis, tanto comerciais, como abertos. A vantagem dos primeiros reside em terem uma interface amigável e terem recursos numéricos e computacionais que conferem maior estabilidade e convergência. Sua desvantagem, porém, está em não ser possível saber exatamente o que está codificado, impossibilitando a depuração do código quando erros acontecem. A vantagem dos programas de código aberto é justamente ter acesso ao mesmo e pleno conhecimento do que está codificado.

O *software* de CFD (*Computational Fluid Dynamic*) de código aberto OpenFOAM, criado por Henry Weller na Inglaterra em 1980 e lançado oficialmente em 2004, vem se tornando cada vez mais comum no campo acadêmico e atualmente mais ainda no meio industrial. Diferente de softwares comerciais, tal ferramenta não precisa de um custo financeiro ligado a algum tipo de licença para sua utilização. A Figura 1 mostra que há uma curva exponencial em ascendência no seu uso, comprovando a importância e relevância que o mesmo tem tomado.

Figura 1: Evolução temporal do número de publicações com OpenFOAM.



O processo de uma análise numérica em CFD pode ser dividido em cinco etapas principais:

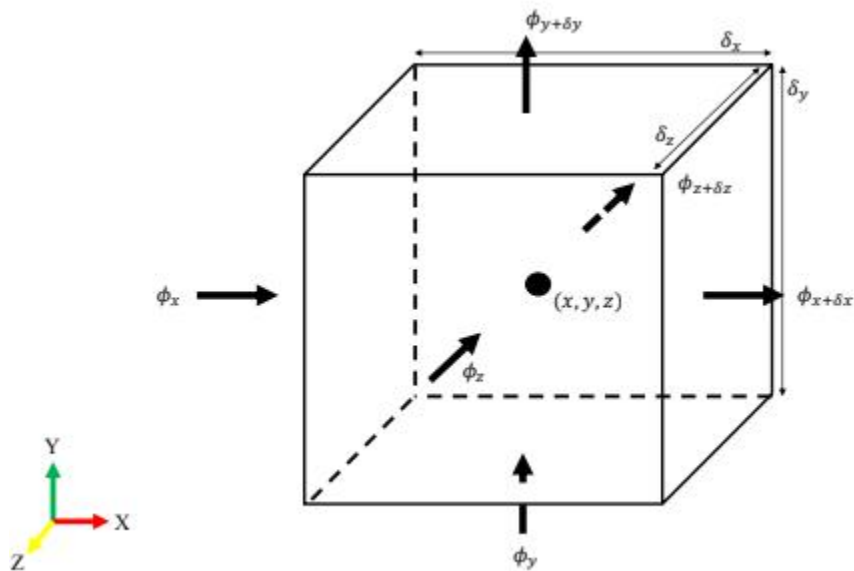
1. Criação da geometria do problema, ou seja, a representação física do domínio que será estudado.
2. Geração da malha computacional, ou também conhecida como etapa de discretização do domínio, na qual divide-se esse domínio físico em pequenos volumes onde as equações de conservação devem ser aplicadas e resolvidas.
3. Definição da modelagem do problema, que envolve a seleção das equações de conservação e constitutivas relevantes, bem como a especificação das condições de contorno e dos métodos numéricos.
4. A solução numérica em si, que envolve a solução do sistema de equações lineares resultante da aplicação de um método numérico sobre o domínio discretizado.
5. Análise de pós processamento onde os campos de temperatura, velocidade, concentração, taxas, fluxos e outras variáveis devem ser avaliados.

2.3. Equações de conservação e modelos matemáticos

Todas as equações de conservação que envolvem transporte de propriedades podem ser derivadas a partir de um estudo considerando um volume de controle diferencial como base para isto. A definição de volume de controle é dada como uma região do espaço a ser estudada na qual sua fronteira com a vizinhança é denominada como superfície de controle (CENGEL e YUNUS, 2017).

Juntamente a isto, uma outra definição importante para a derivação das equações de conservação está relacionada ao conceito de sistema, que é uma quantidade fixa de massa que se deseja estudar (CENGEL e YUNUS, 2017). A Figura 2 mostra um volume de controle diferencial onde a conservação da massa, energia e quantidade de momento linear podem ser derivadas.

Figura 2: Volume de controle diferencial com propriedade ϕ sendo transportada (Adaptado de VERSTEEG, H. K., 2007).



2.3.1. Equações de conservação básicas

As equações de conservação consideram que uma propriedade ϕ pode entrar e sair pelas faces do volume de controle através de um fluxo ou acumular dentro do mesmo. Aplicando-se a primeira lei de Newton e a primeira lei da termodinâmica pode-se deduzir as equações de conservação de massa, quantidade de momento linear e energia.

A equação de conservação da massa, quantidade de momento linear e por fim, a equação da energia é apresentada, respectivamente, nas Equações, 2.7 a 2.11. Essas equações são válidas para fluidos incompressíveis e newtonianos, em que \mathbf{u} representa o vetor velocidade, que por sua vez possui componentes u , v e w , p a pressão, ν a viscosidade cinemática do fluido, i a entalpia, T a temperatura, ρ a densidade do fluido e $S_{M_x}, S_{M_y}, S_{M_z}$ os termos fontes da equação de transporte das componentes da velocidade, S_i e ψ representam também termos associados a fontes externas à modelagem, porém associadas à equação de transporte de entalpia. As Equações 2.7 a 2.11 podem ser reescritas de forma genérica para uma variável ϕ , conforme a Equação 2.12, em que Γ representa uma propriedade difusiva e S_ϕ o termo fonte

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (u\mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nabla \cdot (\nu \nabla u) + S_{M_x} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial(v)}{\partial t} + \nabla \cdot (v\mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nabla \cdot (\nu \nabla v) + S_{M_y} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial(w)}{\partial t} + \nabla \cdot (w\mathbf{u}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \nabla \cdot (\nu \nabla w) + S_{M_z} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial(i)}{\partial t} + \nabla \cdot (i\mathbf{u}) = -p\nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (k\nabla T) + \psi + S_i \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\Gamma\nabla\phi) + S_\phi \quad (2.12)$$

Cada termo da Equação 2.12 tem um significado físico que pode ser expresso da seguinte maneira: acúmulo + transporte convectivo = transporte difusivo + termo fonte. A não linearidade dos termos convectivos traz uma dificuldade em encontrar uma solução analítica para o sistema de EDP's apresentado, e, portanto, algumas ferramentas computacionais podem ser usadas para se encontrar soluções numéricas através de aproximações, as quais transformam um sistema de equações diferenciais parciais não lineares em um sistema de equações algébricas lineares. Além disso, no dia-a-dia do engenheiro, os escoamentos são majoritariamente turbulentos, implicando em um aumento do grau de complexibilidade das equações de transporte, necessitando de solução computacional.

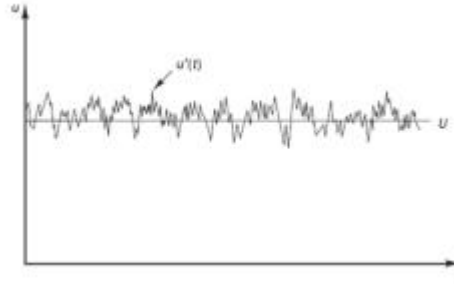
2.3.2. Modelos de Turbulência

No cotidiano da engenharia, os escoamentos são majoritariamente turbulentos, ou seja, acima de um determinado valor de número de Reynolds ou Rayleigh o escoamento se torna instável.

Em um regime turbulento, os campos de pressão, velocidade e temperatura se encontram em constante mudança com o passar do tempo, o que gera uma característica de um fenômeno transitório e aleatório. As equações apresentadas na seção anterior podem ser aplicadas diretamente a escoamento laminares. Porém, quando se deseja ter uma caracterização média do escoamento turbulento, um tratamento deve ser dado às equações de modo que estas apresentem uma melhor aproximação do fenômeno físico observado. Para captar essas características médias do regime turbulento, alguns modelos foram criados para superar tal desafio.

A Figura 3 apresenta a característica aleatória do escoamento turbulento junto com valores médios dessas flutuações. De forma geral, através da decomposição de Reynolds diz-se que uma propriedade ao longo do tempo, por exemplo, o campo de velocidade $u(t)$, pode ser decomposto em duas parcelas, uma parte média (U) e uma parte que contabiliza a flutuação deste campo $u'(t)$. Utilizando tal procedimento matemático, uma propriedade ϕ pode ser descrita conforme as Equação 2.13.

Figura 3: Comportamento típico do campo de velocidade em regime turbulento medido por um sensor pontual (Adaptado de VERSTEEG, H. K., 2007).



$$\phi = \Phi + \phi' \quad (2.13)$$

Uma das formas de se resolver problemas que envolvam escoamentos turbulentos é a substituição direta das propriedades instantâneas pelas propriedades após o procedimento de decomposição de Reynolds e posterior aplicação do operador média temporal. Como resultado, são obtidas as equações RANS (*Reynolds Averaged Navier Stokes*), ou equações de Navier-Stokes com média de Reynolds.

Entretanto, nesse procedimento surgem variáveis novas associadas à média temporal do produto de flutuações turbulentas conforme Equações 2.14 a 2.18, gerando um sistema indeterminado, que precisa de um fechamento. Assim, os modelos de turbulência foram criados para solução do sistema de equações RANS.

Uma vez utilizada a decomposição de Reynolds e aplicação do procedimento estatístico de média temporal nas propriedades de interesse, as equações de conservação de massa, quantidade de momento e uma grandeza escalar ϕ qualquer, podem ser descritas pelas equações 2.14 a 2.18.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}) = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (UU) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nabla \cdot (\nu \nabla U) + \left[-\frac{\partial(\overline{u'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{u'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial z} \right] + S_{M_x} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot (V\mathbf{U}) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nabla \cdot (v\nabla V) + \left[-\frac{\partial(\overline{v'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{v'w'})}{\partial z} \right] + S_{M_y} \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot (W\mathbf{U}) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \nabla \cdot (v\nabla W) + \left[-\frac{\partial(\overline{w'u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{w'v'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'w'})}{\partial z} \right] + S_{M_z} \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi\mathbf{U}) = \nabla \cdot (\Gamma_\phi \nabla \phi) + \left[-\frac{\partial(\overline{u'\phi'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{v'\phi'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{w'\phi'})}{\partial z} \right] + S_\phi \quad (2.18)$$

Os termos de média temporal do produto das flutuações turbulentas nas Equações 2.15 a 2.17 são conhecidos como tensões de Reynolds.

Boussinesq (1877) propôs que tais tensões pudessem ser proporcionais às taxas médias de deformação ou cisalhamento em analogia à lei da viscosidade de Newton, como apresentado pela equação 2.19, em que τ_{ij} são as tensões de Reynolds, μ_t é a viscosidade turbulenta, k é a energia cinética turbulenta, δ_{ij} o delta de Kronecker ($\delta_{ij} = 1$ se $i = j$ e $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$) e T_{ij} está associado a termos não lineares, que, para a aproximação de Boussinesq, terá valor nulo.

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} + T_{ij} \quad (2.19)$$

A energia cinética turbulenta (k) é um parâmetro de importância durante o estudo de turbulência, e, pode ser definida como metade do traço da matriz do tensor de Reynolds, como apresenta a Equação 2.20.

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) \quad (2.20)$$

Note que a proposta de Boussinesq trouxe por si outro parâmetro o qual necessitará ser modelado e acoplado ao sistema de equações. Tal parâmetro é chamado de viscosidade turbulenta, μ_t .

Modelos de duas equações pertencem a classe dos modelos de viscosidade turbulenta linear, e são os mais conhecidos e utilizados no cotidiano da engenharia. Estes consistem em mais duas equações de transporte que serão adicionadas ao conjunto de equações para resolver o escoamento e permitir o cálculo da viscosidade turbulenta.

Nessa classe de modelos, os mais conhecidos são o $k - \varepsilon$ (LAUNDER e SPALDING, 1974), $k - \omega$ (WILCOX, 1988) e $k - \omega SST$ (MENTER, 1994). Há, porém, na literatura inúmeras variações desses modelos.

O modelo $k - \varepsilon$ define a viscosidade turbulenta como apresentado na Equação 2.21, em que C_μ é uma constante empírica e ε é a taxa de dissipação viscosa da energia cinética turbulenta, parâmetro associado à escala de comprimento da turbulência.

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.21)$$

Tal modelo consiste na adição de uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta (k), Equação 2.22, e outra para sua taxa de dissipação viscosa (ε), Equação 2.23. Suas constantes são dadas na tabela 1.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{U}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + 2\mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - \rho \varepsilon \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial(\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \varepsilon \mathbf{U}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t S_{ij} \cdot S_{ij} - C_{2\varepsilon} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2.23)$$

Tabela 1: Constantes do modelo k-ε.

Constante	Valor
C_μ	0.09
σ_k	1.00
σ_ε	1.30
$C_{1\varepsilon}$	1.44
$C_{2\varepsilon}$	1.92

Os modelos da família $k - \varepsilon$ são considerados modelos para altos números de Reynolds (HRN, do inglês *High Reynolds Number*), isso porque não resolvem a região da parede, onde os números de Reynolds locais são baixos. Na formulação padrão, como a apresentada nas Equações 2.22 e 2.23. A presença de k no denominador do último termo à direita da Equação 2.23 já indica que se o modelo fosse aplicado até a parede, haveria uma indeterminação, pois, pela condição de não deslizamento na parede, k é nulo na mesma. Além disso, coeficientes constantes, conforme apresentados na Tabela 1 não permitem a correta previsão dos componentes do tensor de Reynolds na região próxima à parede. Dessa forma, os modelos HRN, como os da família $k - \varepsilon$, são aplicados juntamente com as chamadas funções de parede. As funções de parede nada mais são que expressões algébricas que determinam o valor da velocidade e outras variáveis de interesse no primeiro nó da malha adjacente à parede, que deve garantidamente estar a uma distância à parede tal que já se encontre na região turbulenta da camada limite. Isso é caracterizado por uma distância adimensional à parede, y^+ , maior que 30 no primeiro nó adjacente à parede. Dessa forma, modelos HRN não capturam com precisão fenômenos nas sub-regiões laminar e de transição da camada limite. Quanto mais turbulento é o escoamento, mais achatada é a camada limite e menor é esse problema.

Resolvendo-se as Equações 2.22 e 2.23, obtém-se os valores das variáveis necessárias para calcular a viscosidade turbulenta na Equação 2.21 e, por consequência, calcular o tensor de Reynolds pela Equação 2.19, fechando o sistema formado pelas Equações 2.15 a 2.17. Os termos associados à média temporal do produto da velocidade flutuante e outra propriedade ϕ , conforme Equação 2.18, também são modelados em função da viscosidade turbulenta, Equação 2.21, fechando o sistema completo das Equações de Conservação RANS.

Sabendo das limitações do modelo $k - \varepsilon$ nas regiões de parede e de modo geral em camadas limite com gradiente de pressão adverso, Menter (1994) propôs um modelo novo chamado de *SST* $k - \omega$, no qual se baseia tanto no modelo $k - \omega$ de Wilcox (1988) quanto no modelo $k - \varepsilon$ previamente discutido. Sua ideia primordial foi alterar o modelo $k - \varepsilon$ para se comportar como $k - \omega$ em regiões próximas às paredes, e em regiões mais distantes, como modelo $k - \varepsilon$ padrão.

As Equações 2.24 e 2.25 representam as duas equações de transporte para o modelo SST $k - \omega$, sendo ω a frequência de turbulência ou taxa específica (por unidade de k) de dissipação viscosa de energia cinética turbulenta, em que o termo de produção P_k de energia cinética turbulenta, modelado conforme a Equação 2.26. As constantes do modelo são apresentadas na tabela 2.

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho k \mathbf{U}) = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - \beta^* \rho k \omega \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho \omega)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \omega \mathbf{U}) = & \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \nabla \omega \right] + \gamma_2 \left(2\rho S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho \omega \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \\ & - \beta_2 \rho \omega^2 + 2(1 - F_C) \frac{\rho \sigma_{\omega,2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$P_k = \left(2\mu S_{ij} \cdot S_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \delta_{ij} \right) \quad (2.26)$$

Tabela 2: Constantes do modelo k- ω .

Constante	Valor
σ_k	1.0
$\sigma_{\omega,1}$	2.0
$\sigma_{\omega,2}$	1.17
γ_2	0.44
β_2	0.083
β^*	0.09

Vale lembrar que a função F_C é uma função que apresenta valores entre 0 e 1 e depende da distância da célula até a parede mais próxima a ela. A função permite a transição entre os modelos $k - \varepsilon$ e $k - \omega$, quando assume valor 0, o modelo se torna totalmente $k - \varepsilon$, e, quando assume valor 1, totalmente $k - \omega$.

Sendo um modelo que pode se comportar em dualidade, as constantes desse modelo também devem ser adaptadas conforme a Equação 2.27. Isso é feito para

que haja uma coerência entre modelo escolhido e constantes, em que C_ω e C_ε são as constantes do modelo $k - \omega$ e $k - \varepsilon$, respectivamente, dadas pelas Tabelas 2 e 1. A viscosidade dinâmica turbulenta no modelo $k - \omega SST$ é calculada de acordo com a Equação 2.28.

$$C = F_C C_\omega + (1 - F_C) C_\varepsilon \quad (2.27)$$

$$\mu_t = \frac{a_1 \rho k}{\text{máx}(a_1 \omega, S F_2)} \quad (2.28)$$

Sendo a_1 uma constante e F_2 uma função limitadora para a viscosidade turbulenta que está atrelada diretamente com a distância da célula até a parede mais próxima. Uma vez tendo-se os valores de k e ω , pode-se calcular a viscosidade turbulenta, que por sua vez permite calcular as tensões de Reynolds de acordo com a hipótese de Boussinesq e por fim resolver as equações RANS.

2.3.3. Modelos de baixo número de Reynolds

Os modelos de baixo número de Reynolds (LRN – *Low Reynolds Number*) precisam ser entendidos de uma forma bem explícita, pois o nome em si pode trazer confusão ao leitor. Ao se falar de turbulência, espera-se altos valores de Reynolds ou de Rayleigh, porém o termo “baixo número” não está direcionado à escala global do escoamento, mas sim à região próxima à parede, onde forças viscosas são predominantes e os números de Reynolds locais são baixos.

Um LRN pode reproduzir de forma correta o comportamento do escoamento nas subcamadas laminar (ou viscosa) e de transição (ou mista). Dessa forma, toda a camada limite pode ser devidamente resolvida. Porém, a desvantagem desses modelos é a necessidade de refino intenso nas regiões de parede, tal que a distância adimensional às mesmas, y^+ , tenha um valor menor que 1, no primeiro nó adjacente às superfícies. Dessa forma, deve-se avaliar a real necessidade de resolver de forma precisa a região da parede. Em casos de transferência de calor, isso normalmente é relevante, pois os gradientes de temperatura na parede são fundamentais para correta predição dos fluxos de calor.

Os modelos baseados em ω são normalmente assumidos como LRN, pois não precisam de ajustes para resolverem regiões próximas às paredes. Já os modelos HRN podem ser transformados em LRN se as chamadas funções de amortecimento (do inglês, *damping functions*) forem acopladas a alguns dos coeficientes do modelo original.

Um dos modelos $k - \varepsilon$ LRN mais conhecidos é o modelo de Launder e Sharma (1974). Esse modelo, além das funções de amortecimento, introduziu o conceito de taxa de dissipação viscosa homogênea (ou isotrópica) da energia cinética turbulenta, $\tilde{\varepsilon}$, que se reduz ao próprio ε longe da parede. Muitos modelos LRN adotam esse conceito, porém nem todos. Esse modelo foi utilizado no presente trabalho e sua modelagem e constantes estão apresentada nas Equações 2.29 a 2.32 e na Tabela 3, respectivamente, em que

$$Re_t \equiv \frac{k^2}{\nu \tilde{\varepsilon}}, y^+ \equiv \frac{u^* y}{\nu} \text{ e } k_{parede} = 0.$$

Tabela 3: Constantes do modelo de Launder e Sharma (1974).

Constante	Valor
C_μ	0,09
σ_k	1
σ_ε	1,3
D	$2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2$
E	$2\nu v_t \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2$
ε_{parede}	0
C_{ε_1}	1,44
C_{ε_2}	1,92
f_μ	$\exp \left(- \frac{3,4}{\left(1 + \frac{Re_t}{50} \right)^2} \right)$
f_1	1
f_2	$1 - 0,3 \exp(-Re_t^2)$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho k u_j - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = P - \rho \varepsilon - \rho D \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho \varepsilon u_j - \left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] = (C_{\varepsilon_1} f_1 P - C_{\varepsilon_2} f_2 \rho \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} + \rho E \quad (2.30)$$

$$\mu_t = C_\mu f_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (2.31)$$

$$P = \tau_{ij}^{turb} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.32)$$

Ainda dentro da classe de modelos $k - \varepsilon$ LRN, podemos citar o modelo $v^2 f$ de Durbin (1991), o qual foi utilizado neste trabalho, que apesar de trazer conceitos bastante distintos, promete melhorias nas predições da região próxima à parede. Esse modelo é, na verdade, um modelo de três equações, pois resolve uma equação de transporte para $\overline{v^2}$, o componente normal do tensor de Reynolds associado à flutuação da velocidade na direção perpendicular à parede. Uma equação elíptica é ainda necessária para calcular o termo de pressão-velocidade dessa equação. Para cálculo da viscosidade turbulenta, o modelo utiliza $\overline{v^2}$ ao invés de k como escala de velocidade da turbulência e limita a escala de tempo da turbulência de modo que não possa retornar valores menores que a escala de Kolmogorov. Devido a sua possível capacidade de melhor previsão de escoamentos próximos à parede, foi selecionado para ser testado no presente trabalho. Sua modelagem e constantes são apresentadas nas equações 2.33 a 2.37 e na Tabela 4, respectivamente.

$$v_t = C_\mu \overline{v^2} T \quad (2.33)$$

$$\frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} + U_j \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x_j} = kf - \frac{\overline{v^2}}{k} \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{v_t}{\sigma} \right) \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial x_j} \right] \quad (2.34)$$

$$L^2 \nabla^2 f - f = \frac{C_1 - 1}{T} \left(\frac{\overline{v^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) - C_2 \frac{P_k}{\varepsilon} \quad (2.35)$$

$$L = C_L \text{máx} \left[\frac{k^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon}, C_\eta \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}} \right] \quad (2.36)$$

$$T = \text{máx} \left[\frac{k}{\varepsilon}, C_T \left(\frac{v}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2.37)$$

Tabela 4: Constantes do modelo $v^2 f$.

Constante	Valor
C_μ	0,22
σ	1
C_1	1,4
C_2	0,45
C_T	6
C_L	0,25
C_η	85

Outra classe de modelo utilizada no presente trabalho, é a de modelos não lineares. Essa classe de modelos surgiu para mitigar as deficiências dos modelos de viscosidade turbulenta linear, mas manter apenas duas equações extras a serem resolvidas, por exemplo, uma para k e outra para ε . Dessa forma, o tensor de Reynolds permanece sendo modelado por uma equação algébrica, dependente de uma viscosidade turbulenta, mas agora há termos quadráticos e/ou cúbicos (podendo chegar a quinta ordem) no que tange aos tensores de deformação (S_{ij}) e vorticidade (ξ), ambos integrantes do tensor gradiente de velocidade. Apenas com termos quadráticos já se elimina a previsão de isotropia dos componentes normais do tensor de Reynolds em escoamentos cisalhantes. Termos cúbicos são normalmente associados a melhorar a previsão de escoamentos com rotação, e, por consequência do tensor da taxa de rotação

(Ω_{ij}). Modelos de viscosidade turbulenta não linear podem ser HRN (e serem usados com funções de parede) ou LRN (e resolverem a parede com refino significativo nas paredes). No presente trabalho, utilizou-se o modelo cúbico LRN de viscosidade turbulenta não linear de Lien *et al* (1996).

Modelos não lineares para viscosidade turbulenta usam equações de transporte similares com a do modelo $k - \varepsilon$ padrão e suas variações, mas com C_μ costumeiramente sendo uma função da tensão de cisalhamento adimensional, ao contrário do modelo $k - \varepsilon$ padrão, em que C_μ é uma constante. O tensor de Reynolds, para o modelo cúbico de Lien, é calculado de tal forma que $T_{ij} \neq 0$ e modelado de acordo com a Equação 2.38 e suas constantes são apresentadas na Tabela 5.

$$\begin{aligned}
 T_{ij} = & C_1 k \frac{\nu_t}{\varepsilon} \left[4S_{ik}S_{kj} - \frac{4}{3} \delta_{ij}S_{kl}S_{kl} \right] + C_2 k \frac{\nu_t}{\varepsilon} \left[4\Omega_{ik}S_{kj} + 4\Omega_{jk}S_{ki} \right] \\
 & + C_3 k \frac{\nu_t}{\varepsilon} \left[4\Omega_{ik}\Omega_{kj} - \frac{4}{3} \delta_{ij}\Omega_{kl}\Omega_{kl} \right] \\
 & + C_4 \frac{\nu_t k^2}{\varepsilon^2} (4S_{ki}\Omega_{lj} + 4S_{kj}\Omega_{li})2S_{kl} \\
 & + C_5 \frac{\nu_t k^2}{\varepsilon^2} (4S_{kl}S_{kl} + 4\Omega_{kl}\Omega_{kl})2S_{ij}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Tabela 5: Constantes do modelo cúbico de Lien para LRN.

Constante	Valor
C_μ	$\frac{0,667}{A_1 + \eta + 0,9 \left(\frac{k}{\varepsilon}\right) \Omega}$
C_1	$\left(\frac{3/4}{1000 + (\sqrt{2S_{ij}S_{ij}})^3} \right)$
C_2	$\left(\frac{15/4}{1000 + (\sqrt{2S_{ij}S_{ij}})^3} \right)$
C_3	$\left(\frac{19/4}{1000 + (\sqrt{2S_{ij}S_{ij}})^3} \right)$
C_4	$-10C_\mu^2$
C_5	$-2C_\mu^2$
S_{ij}	$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$
Ω_{ij}	$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$

Outros modelos ainda podem ser utilizados para modelar o fenômeno da turbulência, tal qual os modelos dos tensores de Reynolds (RSM, *do inglês Reynolds Stress Models*). Estes modelos são considerados os mais complexos dentro da formulação RANS. Isso porque resolvem uma equação de transporte extra para cada componente do tensor de Reynolds, e mais uma associada a uma escala de comprimento da turbulência, como ε ou ω . Dessa forma, sete equações de transporte extra são resolvidas, tornando as simulações numéricas mais custosas computacionalmente e menos robustas. Por outro lado, a física do problema é melhor tratada, uma vez que os componentes do tensor de Reynolds não são mais calculados por equações algébricas, mas equações de transporte. A forma geral da equação de transporte do tensor de

Reynolds é dada pela Equação 2.39, em que P_{ij} é o termo de produção, ϕ_{ij} é o termo de redistribuição de energia, ε_{ij} é o termo de dissipação viscosa e d_{ij} é o termo difusivo.

$$\frac{D}{Dt}(\overline{u'_i u'_j}) = P_{ij} + \phi_{ij} + \varepsilon_{ij} + d_{ij} \quad (2.39)$$

A maior parte dos modelos RSM diferem essencialmente na modelagem do termo de redistribuição de energia ϕ_{ij} , o qual costuma ser subdividido em linear e quadráticos com relação aos componentes do tensor de Reynolds (dos Anjos *et al.*, 2021). Um dos modelos RSM lineares mais utilizados é o de Launder, Reece e Rodi (1975), conhecido por LRR.

O termo ϕ_{ij} necessita de modelagem e é separado em três parcelas para o modelo LRR ϕ_{ij_1} , o qual é apenas afetado por escalas turbulentas, ϕ_{ij_2} que é afetado pelo escoamento médio e interações turbulentas, e por fim, ϕ_{ij_w} , usado para melhorar a predição da região logarítmica próxima às paredes (dos Anjos *et al.*, 2021). Essas três parcelas, ϕ_{ij_1} , ϕ_{ij_2} e ϕ_{ij_w} são modelados de acordo com as Equações 2.40, 2.41, 2.42, respectivamente.

O modelo SSG diferencia-se dos outros modelos RSM por causa do uso de uma correlação quadrática para tensão de pressão (do inglês, *pressure strain*) que aparecerá nas equações RANS no tensor de Reynolds. O termo de redistribuição de energia é modelado de acordo com a Equação 2.43, em que a_{ij} é o tensor anisotrópico dado pela Equação 2.44.

$$\phi_{ij_1LRR} = -c_1 \frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (2.40)$$

$$\phi_{ij_2LRR} = -c_2 \frac{k}{\varepsilon} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P \right) \quad (2.41)$$

$$\phi_{ij_wLRR} = \left[0,125 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) + 0,0115 (P_{ij} - D_{ij}) \right] \frac{k^{1,5}}{\varepsilon y} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \phi_{ijSSG} = & -\varepsilon \left[C_{s1} a_{ij} + C_{s2} \left(a_{ik} a_{kj} - \frac{1}{3} a_{mn} a_{mn} \delta_{ij} \right) \right] - C_{r1} P a_{ij} \\ & + C_{r2} \rho k S_{ij} - C_{r3} \rho k S_{ij} \sqrt{a_{mn} a_{mn}} \\ & + C_{r4} \rho k \left(a_{ik} S_{jk} + a_{ij} S_{ik} - \frac{2}{3} a_{mn} S_{mn} \delta_{ij} \right) \end{aligned} \quad (2.43)$$

$$\begin{aligned} & + C_{r5} \rho k (a_{ik} \Omega_{jk} + a_{jk} \Omega_{ik}) \\ & a_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Apesar de suas diferenças, ambos são modelos que resolvem uma equação extra para ε , genericamente apresentada na Equação 2.45. As constantes dos modelos LRR e SSG encontram-se na Tabela 6 e 7, respectivamente.

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = C_{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon_2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu \sigma_{lk} + C_{\varepsilon} \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_l} \right] \quad (2.45)$$

Tabela 6: Constantes do modelo LRR.

Constante	Valor
C_1	1,5
C_2	0,6
C_{ε}	0,15
C_s	0,11
C_{ε_1}	1,44
α_R	1,22
C_{ε_2}	1,92

Tabela 7: Constantes do modelo SSG.

Constante	Valor
C_{μ}	0,1
C_{ε_1}	1,45
C_{ε_2}	1,83
σ_{ε}	1,36
C_s	0,22
C_{s_1}	1,7
C_{s_2}	-1,05
C_{r_1}	0,9
C_{r_2}	0,8
C_{r_3}	0,65
C_{r_4}	0,625
C_{r_5}	0,2

Vale notar que esses modelos são originalmente HRN, sendo utilizados com funções de parede. Funções de amortecimento genéricas podem, porém, ser acopladas de modo que os mesmos resolvam a região da parede. O *software* OpenFOAM v1812, no qual todas as simulações deste trabalho foram feitas, possui essa funcionalidade e a mesma foi ativada na realização desse trabalho, dada a importância da resolução das camadas limites dinâmicas e térmicas na transferência de calor. Modelos HRN sem funções de amortecimento, como $k - \varepsilon$, quando não ativadas as funções de parede, geram erros de código, interrompendo a simulação já nos instantes iniciais quando utilizada a versão 1812 do *software* OpenFOAM.

2.3.4. Aproximação de Boussinesq

Quando a velocidade do escoamento na convecção natural é muito menor que a velocidade do som no meio, o que ocorre na maior parte das vezes, seu número de Mach é muito menor que 0,3 e o escoamento pode ser dito incompressível (CENGEL e YUNUS

A., 2007). Porém, em escoamentos compressíveis a densidade é assumida como constante e é justamente a diferença de densidades que promove a movimentação do fluido na convecção natural.

$$\rho \approx \rho_0[1 - \beta(T - T_0)] \quad (2.46)$$

Dessa forma, de modo a poder tratar um escoamento de convecção natural como incompressível e ainda assim levar em conta as diferenças de densidade como função da temperatura, de modo que a força de empuxo possa promover a movimentação do fluido, utiliza-se a aproximação de Boussinesq, em que a massa específica será função da temperatura de acordo com a Equação 2.46. Usar tal aproximação traz como vantagem principal a diminuição do custo computacional, por poder tratar o fluido como incompressível.

2.4. Métodos dos volumes finitos

Como discutido anteriormente, as equações que descrevem um problema de transferência de calor e escoamento são majoritariamente EDPs. A forma plena dessas equações não possui solução analítica, e, portanto, métodos numéricos devem ser empregados para se conseguir obter os campos de interesse, como por exemplo pressão, velocidade e temperatura e, ao final, as quantidades de interesse para engenharia, como taxas e fluxos.

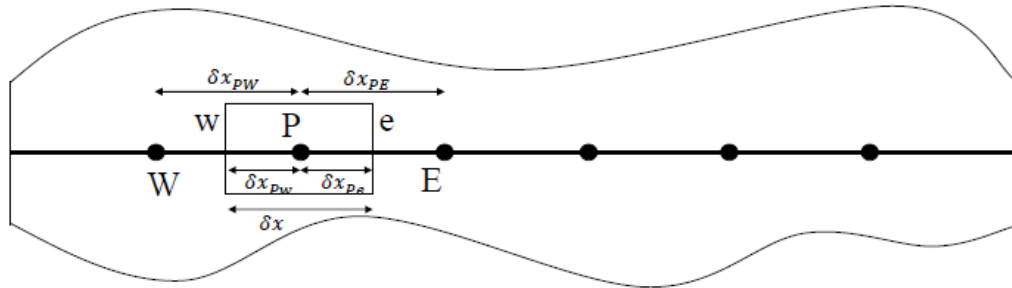
Um dos métodos mais usadas para resolver equações de transporte é conhecido como Método dos Volumes Finitos (MVF). Esse é o método utilizado no programa OpenFOAM e, portanto, será brevemente descrito aqui. No MVF, um domínio é subdividido em outros pequenos volumes ou também chamado de células, onde as equações de conservação são aplicadas e posteriormente integradas (VERSTEEG, H. K., 2007).

O MVF tem por finalidade transformar as equações de conservação em um sistema de equações algébricas lineares do tipo $AX = B$, a ser resolvido. A Equação 2.12 apresenta uma equação de transporte genérica, onde ao se realizar a integração obtém-se a Equação 2.47

$$\frac{d}{dt} \left(\int_V \rho \phi dV \right) + \int_A \mathbf{n} \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dA = \int_A \mathbf{n} \cdot (\Gamma \nabla \phi) dA + \int_V S_\phi dV \quad (2.47)$$

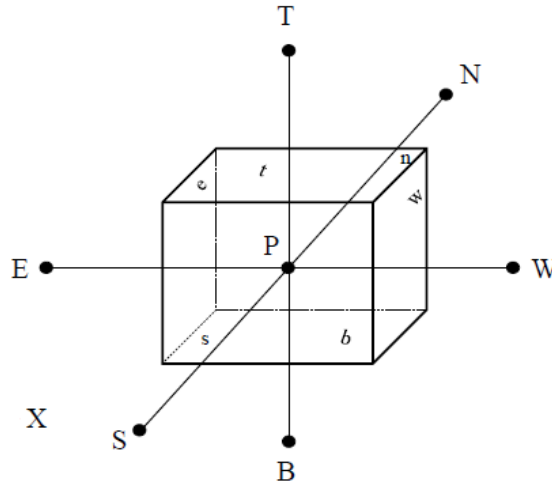
O primeiro passo é a discretização do domínio em uma quantidade finita de células, chamada de etapa de geração de malha. Para uma discretização 1D, uma nomenclatura muito utilizada é mostrada na Figura 4.

Figura 4: Discretização para um domínio 1D (Adaptado de VERSTEEG, H. K., 2007).



O ponto P é indicado como o centroide do volume com faces “w” e “e” que representam oeste e leste, respectivamente. Os pontos vizinhos são W e E seguindo a mesma nomenclatura utilizada nas faces. As distâncias entre pontos são representadas pela letra δ , onde o subscrito indica a distância entre os pontos, por exemplo, δx_{PW} simboliza a distância entre o ponto P e W. Contudo, em problemas tridimensionais, há mais de dois pontos e duas faces para uma célula. Em uma célula com geometria de um cubo, por exemplo, haverá além dos pontos vizinhos E e W, também os pontos “N”, “S”, “T” e “B” como mostrado na Figura 5.

Figura 5: Discretização para domínio 3D (Adaptado de VERSTEEG, H. K., 2007).



2.4.1. Termo difusivo

Considerando a integral no volume do termo difusivo da Equação 2.12 num problema unidimensional em x , temos que uma aproximação de segunda fornece a Equação 2.48, em que A é a área da seção transversal a x . No caso de um problema unidimensional, ela pode ser assumida como a unidade. Os subíndices e e w indicam a quantidade nos parênteses avaliadas nas respectivas faces (VERSTEEG, H. K., 2007).

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right) = \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (2.48)$$

Note que surge um problema na igualdade apresentada pela equação 2.48, pois precisa-se avaliar os termos Γ_e e Γ_w além dos gradientes de $\frac{d\phi}{dx}$ nas faces leste e oeste, respectivamente. Uma das formas de se avaliar esses termos é através de uma média aritmética dos valores dos mesmos em pontos vizinhos. Por exemplo, deseja-se avaliar Γ_w de tal forma que seu valor deve ser a média aritmética dos valores dos pontos vizinhos, ou seja, E e P, sendo então computado como na Equação 2.49

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_w + \Gamma_P}{2} \quad (2.49)$$

Os gradientes $\frac{d\phi}{dx}$ costumam ser discretizados pelo esquema das diferenças centrais, resultando na Equação 2.50. Tal aproximação linear tem erro de segunda ordem. Portanto a discretização do termo difusivo pode ser aproximada como mostrado na equação 2.51.

$$\left(\Gamma A \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e A \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right) \quad (2.50)$$

$$\int_{\Delta V} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right) \quad (2.51)$$

O lado direito da Equação 2.51 pode agrupar os coeficientes de ϕ_P , ϕ_E e ϕ_W , resultando na Equação 2.52, em que os coeficientes a_P , a_W e a_E são apresentados na Tabela 8. Note que ao se escrever a discretização na forma apresentada pela equação 2.52 tem-se o formato matricial \mathbf{AX} , onde os coeficientes representam a matriz \mathbf{A} e ϕ as incógnitas do problema, ou seja, \mathbf{X} .

$$a_P \phi_P - a_W \phi_W - a_E \phi_E \quad (2.52)$$

Muitos outros métodos de discretização podem ser utilizados para aproximar os termos da equação de transporte genérica, porém para malhas estruturadas, ou seja, uniformes e regulares, a aproximação por diferenças centrais possui um desempenho muito bem avaliado.

Tabela 8: Coeficientes de discretização associado às Equações 2.51 e 2.52.

a_P	a_W	a_E
$a_W + a_E$	$\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w$	$\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$

2.4.2. Termo advectivo

A difusão afeta a distribuição da propriedade ϕ em todas as direções de acordo com seus gradientes, todavia a advecção é predominante na direção onde o fluxo acontece, o que faz com que o esquema de diferenças centrais não consiga modelar o fenômeno tão bem. Além disso, o termo advectivo da Equação 2.47 precisa ter a propriedade ϕ avaliada nas faces do volume, para contabilização do balanço dessa propriedade que entra e sai do volume com o fluxo (VERSTEEG, H. K., 2007).

As equações 2.53 e 2.54 mostram o termo da advecção de uma propriedade ϕ e a equação da continuidade integrada para um problema 1D genérico. Para facilitar a nomenclatura, pode-se definir uma variável $F = \rho u$ para que as equações acima possam ser descritas como nas Equações 2.55 e 2.56.

$$\int_A \mathbf{n} (\rho\phi u) dA = (\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w \quad (2.53)$$

$$\int_{\Delta V} \frac{d(\rho u)}{dx} = (\rho u A)_e - (\rho u A)_w \quad (2.54)$$

$$(\rho u A \phi)_e - (\rho u A \phi)_w = F_e A_e \phi_e - F_w A_w \phi_w \quad (2.55)$$

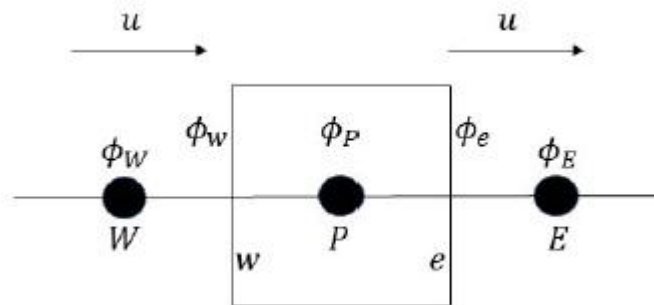
$$(\rho u A)_e - (\rho u A)_w = F_e A_e - F_w A_w \quad (2.56)$$

O problema agora se encontra na metodologia necessária para se aproximar os valores de ϕ para as faces leste e oeste em função dos valores dos pontos. Novamente, uma das metodologias é a mesma utilizada na discretização do termo difusivo, ou seja, diferenças centrais.

Porém, algumas divergências podem ocorrer de acordo com a intensidade do escoamento onde a advecção é mais intensa e arrasta de forma rápida a propriedade ϕ através do domínio. Por prática, uma alternativa é avaliar a relação entre intensidade do escoamento e difusividade, e, caso a razão seja baixa, tem-se o método das diferenças centrais como uma boa alternativa para avaliação de ϕ nas faces do volume.

O método mais simples, de primeira ordem, porém robusto, é o chamado upwind, onde a direção do fluxo é levada em consideração como mostrado na Figura 6. Problemas onde a advecção é intensa, a tendência é que a propriedade ϕ na face seja fortemente influenciada pelo valor de ϕ no ponto anterior a esta face, sempre levando em conta o sentido do escoamento.

Figura 6: Problema advectivo 1D (Adaptado de VERSTEEG, H. K., 2007).



Considerando uma face genérica f , a verificação do sentido do fluxo será dada por $F_f = \rho_f A_f (\mathbf{U}_f \cdot \mathbf{n})$, onde se F_f for menor que zero, o fluxo está entrando no volume e, portanto, ϕ_f deve assumir o valor de ϕ do ponto anterior. Por exemplo, suponha que ao se avaliar a F na face w , ou seja, F_w , obteve-se um valor negativo. Isso implicará que $\phi_w = \phi_W$. O mesmo pode ser avaliado para ϕ_e , uma vez $F_e < 0$, tem-se que $\phi_e = \phi_E$. E vice-versa caso o fluxo F estivesse no sentido contrário.

Uma infinidade de outros métodos podem ser utilizadas para avaliação do termo advectivo das equações de transporte. Os coeficientes de ϕ_P , ϕ_E e ϕ_W provenientes da discretização do termo convectivo são incorporados naqueles apresentados na Tabela 8, tal que se mantenha a estrutura matricial \mathbf{AX} .

2.4.3. Termo fonte

Considere um problema onde a geração ou dissipação é independente da propriedade ϕ , ou seja, $S_\phi \neq S_\phi(\phi)$. Logo, a integração será puramente dependente do tamanho do volume da discretização, como mostrado na Equação 2.57, em que S_ϕ é um valor constante de geração ou dissipação de ϕ por unidade de volume. Por ser constante,

ao se avaliar a forma matricial $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$, o termo fonte representará o vetor \mathbf{B} (VERSTEEG, H. K., 2007).

$$\int_V S_\phi dV = S_\phi \Delta V \quad (2.57)$$

Porém quando o termo fonte é dependente da propriedade ϕ , é comum decompor o mesmo em dois termos, um que depende de $\phi(S_A)$ e outro que independe (S_B), como na Equação 2.58. Dessa forma, o termo S_A é incorporado no coeficiente a_p da Tabela 8, integrando a matriz dos coeficientes A, e S_B compõe o vetor B do sistema $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

$$S_\phi = S_A \phi + S_B \quad (2.58)$$

2.4.4. Termo temporal

Assim como todos os outros termos, o tempo também deve ser dividido em intervalos finitos. E sua integração pode ser expressa em função de um parâmetro θ fazendo com que a integração temporal tome a seguinte forma apresentada na Equação 2.59 (VERSTEEG, H. K., 2007).

$$I_\phi = \int_t^{t+\Delta t} \phi_p dt = [\theta \phi_p + (1 - \theta) \phi_p^t] \Delta t \quad (2.59)$$

Os termos que apresentam sobrescrito “t” são aqueles que correspondem ao tempo t e são conhecidas em cada passo de tempo. Uma das vantagens desse esquema de discretização é que há três possibilidades: a discretização poderá ser totalmente explícita, implícita ou uma mistura de implícita com explícita.

Quando $\theta = 0$, tem-se $I_\phi = \phi_p^0 \Delta t$, ou seja, as propriedades serão sempre avaliadas no tempo t que é conhecido para determinar a propriedade no tempo $t + \Delta t$. Em outras palavras, se tem uma solução direta ou explícita. Se $\theta = 1$, tem-se $I_\phi = \phi_p \Delta t$, note que agora há uma dependência de ϕ_p que tem valor ainda desconhecido, e uma solução de sistemas de equações é necessário para cada passo de tempo, e, portanto, uma solução implícita. Quando se tem $0 < \theta < 1$, há uma combinação dos dois casos

extremos, e por possuir uma parte implícita, novamente precisa-se solucionar um sistema de equações para cada novo passo de tempo.

2.4.5. Acoplamento pressão-velocidade

Pode-se observar que o sistema formado pelas equações da continuidade e Navier-Stokes, apresenta uma ligação fraca entre a pressão e a velocidade, dado que a equação da continuidade para escoamentos incompressíveis se resume ao divergente da velocidade ser nulo. Esse desacoplamento dificulta a convergência do sistema de equações lineares. Para mitigar esse problema, há os esquemas de correção de pressão, também conhecidos por algoritmos de acoplamento pressão-velocidade.

Esses algoritmos tem todos como princípio utilizar um valor inicial de pressão para obter um campo de velocidade a partir das equações de quantidade de movimento, onde essas velocidades devem satisfazer a equação da continuidade.

De acordo com Versteeg (2007), um dos primeiros passos encontrados em CFD é escrever a equação de quantidade de movimento na sua forma matricial como mostrada em 2.60, em que \mathcal{M} é a matriz de coeficientes que são calculados pela discretização dos termos da equação, e tais termos são conhecidos. Em seguida, separa-se essa matriz em duas parcelas, uma matriz contendo os coeficientes diagonais (A) e outra contendo os termos restantes (H) como pode ser visto na Equação 2.61.

$$\mathcal{M}\mathbf{U} = -\nabla p \quad (2.60)$$

$$A\mathbf{U} - H = -\nabla p \quad (2.61)$$

Igualando as duas equações e com uma simples manipulação algébrica, chega-se à equação explícita 2.62 para se calcular os coeficientes não diagonais. Essa equação será de extrema importância como será visto posteriormente.

$$H = A\mathbf{U} - \mathcal{M}\mathbf{U} \quad (2.62)$$

Retornando-se à equação 2.62, pode-se isolar \mathbf{U} em função dos demais termos, chega-se na Equação 2.63. Lembrando que, para um fluido incompressível e regime

permanente, o divergente do campo de velocidade deve ser igual a zero, chega-se à equação 2.64 que é conhecida como equação de Poisson para pressão.

$$\mathbf{U} = H\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\nabla p \quad (2.63)$$

$$\nabla(\mathbf{A}^{-1}\nabla p) = \nabla(\mathbf{A}^{-1}H) \quad (2.64)$$

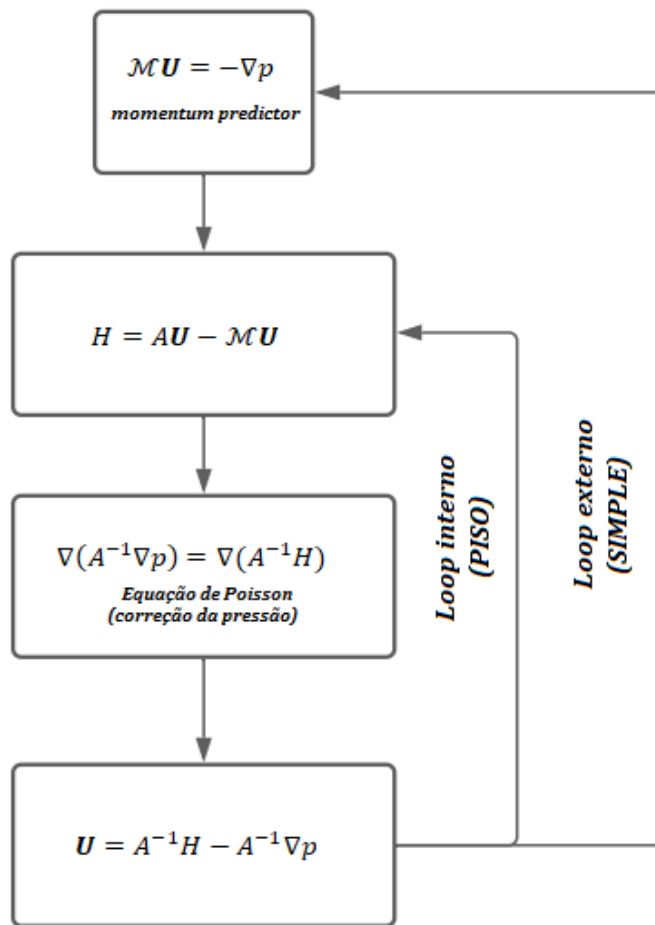
A partir deste equacionamento se tem o acoplamento pressão-velocidade e há o fechamento de número de variáveis iguais ao número de equações. O algoritmo apresentado refere-se ao *Semi Implicit Method for Pressure Linked Equations* (SIMPLE), de Patankar e Spalding (1972). Os passos dessa metodologia seguem a seguinte lógica:

- (1) Estimar um campo de pressão e resolver $\mathcal{M}\mathbf{U} = -\nabla p$ (*momentum predictor*)
- (2) Calcular $H = A\mathbf{U} - \mathcal{M}\mathbf{U}$
- (3) Resolver a equação de Poisson $\nabla(\mathbf{A}^{-1}\nabla p) = \nabla(\mathbf{A}^{-1}H)$ (*pressure-corrector stage*)
- (4) Usar o campo de pressão obtido no passo (3) e corrigir o campo de velocidade de tal forma que satisfaça a equação da continuidade, ou seja, $\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}H - \mathbf{A}^{-1}\nabla p$
- (5) Caso esse campo de velocidade satisfaça também a equação de quantidade de momento linear, o algoritmo finda. Caso contrário, voltar ao passo (1).

Outro método usado é o conhecido PISO (*Pressure – Implicit with Splitting of Operators*), proposto inicialmente por Issa (1986). Esse método é usado principalmente em sistemas transiente, e, sua maior diferença para o método de acoplamento SIMPLE, é em qual posição o loop acontece, pois, agora, após a correção do campo de velocidade, atualiza-se o valor da matriz dos coeficientes não diagonais H.

Por fim, o método PIMPLE (SIMPLE+PISO) é aquele que consegue juntar as vantagens de se usar os dois algoritmos. O método PIMPLE é basicamente o método PISO quando se deseja resolver o *momentum predictor* mais de uma vez. A Figura 7 mostra um fluxograma com os loops internos e externos que pertencem aos algoritmos PISO e SIMPLE, respectivamente.

Figura 7: Fluxograma dos algoritmos de acoplamento pressão-velocidade SIMPLE e PISO.



Há muitos trabalhos na literatura abordando esse tema, e uma seleção de trabalhos envolvendo simulações numéricas será apresentada abaixo. Dessa forma, pretende-se caracterizar um problema ainda não explorado e que este trabalho visa estudar.

2.5. Simulações Numéricas de Convecção Natural Turbulenta

Nesta seção, uma seleção de trabalhos envolvendo simulação numérica de transferência de calor por convecção em cavidades fechadas será apresentada. Dessa forma, pretende-se caracterizar um problema ainda não explorado e que este trabalho visa estudar.

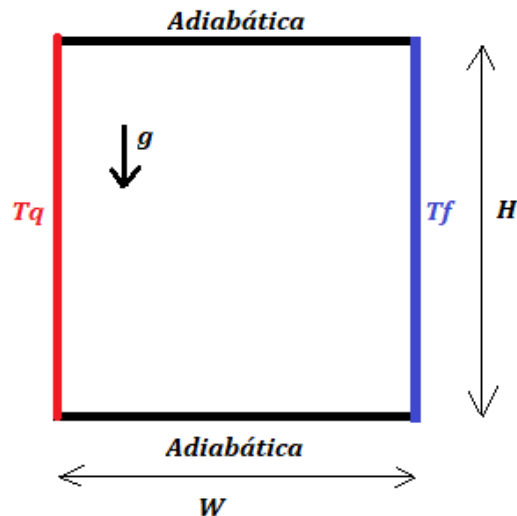
Markatos e Pericleous (1984) investigaram o escoamento laminar e turbulento 2D dentro de uma cavidade térmica com paredes mantidas a temperaturas diferentes utilizando o modelo $k - \varepsilon$ para o regime turbulento como mostra a Figura 8. Eles mostraram que apesar da deficiência deste modelo em regiões próximas às paredes, há uma predição razoável no que se diz respeito à estrutura global do escoamento.

Henkes *et al.* (1991) estudaram escoamento por convecção natural tanto em regime laminar quanto turbulento em uma cavidade quadrada bidimensional usando diferentes modelos de turbulência, tais como $k - \varepsilon$ com função de parede e os modelos de baixo número de Reynolds de Chien (CHIEN, 1982) e Jones & Launder (1972), em que a geometria pode ser representada pela Figura 8. A conclusão deste trabalho mostra que diferenças entre os modelos de turbulência são maiores para as quantidades que são determinadas na camada limite na posição vertical, como por exemplo, o fluxo térmico e a tensão de cisalhamento nessa região.

Simulações numéricas com convecção natural tendo ar como fluido confinado na cavidade térmica, foram investigadas por Kuyper *et al.* (1993), utilizando modelo $k - \varepsilon$ para o escoamento turbulento formado em $Ra = 10^8$. A geometria se assemelha com a Figura 8, porém, a cavidade era quadrada e teve o ângulo de inclinação variando de 0° até 180° , de tal forma que foi observado que número de Nusselt médio é uma função inversa do ângulo de inclinação.

Barakos & Mitsoulis, *et al.* (1994) estudaram transferência de calor 2D com duas paredes opostas mantidas a temperaturas diferentes e constantes, e, todas as outras foram mantidas como adiabáticas conforme mostra a Figura 8. Uma série de valores de Ra , ultrapassando valores de 10^{10} , indicou que a transição laminar para regime turbulento ocorria quando $Ra \approx 10^8$. Para modelar a turbulência, o modelo $k - \varepsilon$ foi utilizado nas simulações com e sem funções de parede. Seus estudos também ressaltaram o comportamento do número de Nusselt médio, que aumentava ao longo da parede aquecida quanto mais o escoamento se aproximava do regime turbulento.

Figura 8: Esquema do problema de transferência de calor por convecção natural em cavidade fechada por Markatos e Pericleous (1984).



Henkes e Hoogendoorn (1995) compararam resultados de simulações numéricas 2D obtidas por 10 diferentes grupos para convecção natural turbulenta utilizando o modelo $k - \varepsilon$. Eles observaram que as soluções superestimavam os valores médio de fluxo de calor nas paredes quando comparados com os dados experimentais, mas que a velocidade nas paredes verticais obteve uma concordância significativa com os experimentos para uma faixa de $10^6 \leq Ra \leq 10^{10}$.

Dol e Hanjalić (2001) simularam um escoamento natural 2D e 3D com $Ra = 4,9 \times 10^9$ para melhor entendimento do escoamento nas regiões dos vértices da cavidade, onde as paredes horizontais tiveram duas condições térmicas impostas: isotérmica e adiabática. Por sua vez as paredes verticais tiveram condições ora adiabática ora fluxo constante. Modelo $k - \varepsilon$ e um modelo dos tensores de Reynolds, do inglês, *Reynold Stress Model*, foram utilizados, onde este último mostrou melhor captura dos efeitos térmicos tridimensionais e das linhas de corrente que se formavam nos vértices da cavidade. Todavia, mostraram que o modelo $k - \varepsilon$, apesar de suas limitações, mais uma vez se mostrou razoável para representação do escoamento como um todo.

Sharif e Liu (2003) estudaram um escoamento turbulento causado por convecção natural 2D em uma cavidade quadrada com duas faces mantidas a diferentes temperaturas com variações no ângulo de inclinação da geometria, porém para um valor

de $Ra = 10^9$. Eles encontraram que o valor de Nusselt médio na parede quente decrescia com o aumento da inclinação do ângulo, enquanto a força de convecção aumentava.

Sharma *et al.* (2008) usaram modelos $k - \varepsilon$ para o escoamento turbulento devido a convecção natural para faixa de $10^8 < Ra < 10^{12}$. A geometria 2D teve seu ângulo de inclinação variando entre 0° e 90° , e os efeitos térmicos da radiação nas paredes isotérmicas mostraram que a radiação das superfícies alterava a distribuição do número de Nusselt significativamente dentro da cavidade térmica quadrada, embora isso não afete o valor médio.

Ben-Nakhi e Mahmoud (2008) utilizaram a metodologia TDMA, do inglês, *tri-diagonal matrix algorithm*, para solucionar as equações governantes do escoamento dentro da cavidade térmica com Rayleigh variando de 10^7 até 10^{10} . Eles observaram que a razão de aspecto da cavidade e a composição do material da parede tem efeito significativo na temperatura, nas linhas de corrente dentro da cavidade e no fluxo térmico liberado através das paredes da cavidade térmica. Diferente dos demais trabalhos previamente descritos, aqui foi usado o modelo $k - \omega SST$

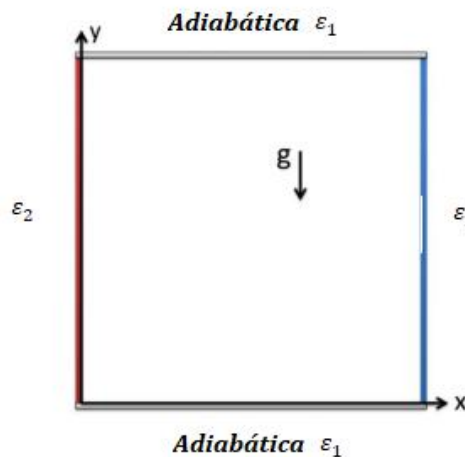
Shati *et al.* (2013) usaram o modelo RNG $k - \varepsilon$ em seus estudos. Duas paredes verticais eram mantidas a temperaturas diferentes e incluíram os efeitos de radiação através do Modelo de Radiação de Transferência Discreta, DTRM, do inglês, *Discrete Transfer Radiation Model*, para uma cavidade térmica 2D. Uma gama de razões de aspecto da cavidade foi estudada, incluindo, por exemplo, uma geometria com dimensões de 40 cm de largura e 240 cm de altura. O *software* FLUENT foi utilizado e os resultados mostraram que a razão entre a transferência de calor por convecção e radiação era aumentada com o aumento da razão entre as temperaturas das paredes quando esta se tornava maior que 1,2, algo que até então não tinha sido demonstrado por nenhum trabalho anterior. Uma correlação para um novo grupo adimensional representando a razão entre convecção natural e radiação como uma função de Nusselt, Grashof, número de Prandtl e razão das temperaturas foi proposta, assim como uma correlação para Nusselt médio descontando os efeitos de radiação.

Wu & Lei (2015) usaram diferentes modelos de turbulência para avaliar a convecção natural dentro de uma cavidade quadrada 2D e 3D, preenchida por ar, com duas paredes opostas mantidas a temperaturas diferentes, considerando todas as outras

adiabáticas, com e sem consideração dos efeitos de radiação térmica para $Ra = 1,5 \times 10^9$. Os modelos empregados foram $k - \varepsilon$ padrão, RGN $k - \varepsilon$, $k - \varepsilon$ realizável, $k - \omega$ e $SST k - \omega$ e mostraram capacidade para capturar as características principais do escoamento e as quantidades de propriedades de interesse, apesar de nem todos os modelos poderem resolver com acurácia os detalhes do escoamento.

Ibrahim *et al.* (2013) através de simulações LES com $Ra = 1,5 \times 10^9$ consideraram uma cavidade quadrada onde paredes opostas eram mantidas em temperaturas diferentes e os efeitos de radiação também são levados em conta. Porém, diferentemente do estudo de Shati *et al.* (2013), além da abordagem LES, as paredes superior e inferior além de adiabáticas também possuíam emissividades como mostra a Figura 9. Esse estudo mostrou que a radiação proveniente das paredes adiabática modificava a estrutura do escoamento, principalmente no vértice superior da parede quente e no vértice base da parede fria.

Figura 9: Esquema do problema de transferência de calor por convecção natural em cavidade fechada por Ibrahim *et al.* (1994).



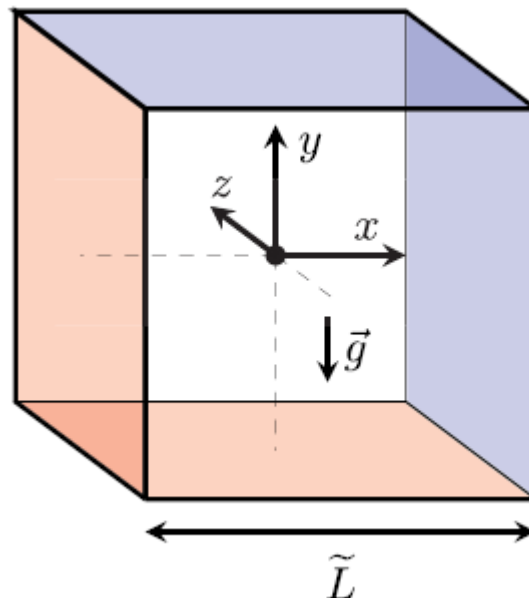
Mao & Zhang (2013) realizaram simulações LES (*Large Eddy Simulation*) e RANS usando OpenFOAM para valores de Rayleigh de $2,03 \times 10^{10}$ e $3,37 \times 10^{10}$. Os resultados mostraram que os perfis médios e as flutuações de velocidade estão de acordo com os dados experimentais e numéricos existentes na literatura ao se utilizar o modelo $k - \varepsilon$, ou seja, abordagem RANS. Por sua vez, as simulações LES obtiveram maior acurácia

aos dados experimentais da literatura quando se trata de perfis de temperatura e número de Nusselt.

Valencia *et al.* (2007) utilizaram da abordagem DNS (*Direct Navier-Stokes*) para investigar a convecção natural em cavidades térmicas para uma faixa de $10^7 \leq Ra \leq 10^8$. Além disso, a aproximação de Boussinesq foi levada em consideração durante as simulações. Comprovaram através deste estudo que a predição numérica da convecção em uma cavidade cúbica em números intermediários de Rayleigh é um excelente *benchmark* para estudos de transição de escoamento.

Mais recentemente, Fabregat e Pallarès (2020) fizeram uma revisão de trabalhos relacionados a convecção natural em cavidades térmicas para diversos valores de Ra_{L_c} . Foi observado por eles que havia uma lacuna de informação sobre o escoamento em uma cavidade cúbica onde duas paredes estão aquecidas, enquanto outras duas estão a temperaturas mais baixas como mostra a Figura 10 na faixa de $10^6 < Ra \leq 4 \times 10^9$.

Figura 10: Esquema do problema de transferência de calor por convecção natural em cavidade fechada por Fabregat e Pallarès. (2020).



Os valores de Ra_{L_c} variaram na faixa entre 10^5 até $5,4 \times 10^8$ para o ar confinado dentro da cavidade, assumindo propriedades termofísicas constantes. Esse trabalho utilizou da abordagem DNS e obteve como resultado a elaboração de um novo modelo

semi-analítico para a transferência de calor nas paredes de cavidades fechadas. Além disso, aspectos relacionados ao escoamento como as componentes de velocidade também foram verificados mostrando um escoamento circulatório no sentido horário. Todas as análises foram feitas usando a metodologia SEM (*Spectral Element Method*) com o *solver* Nek5000.

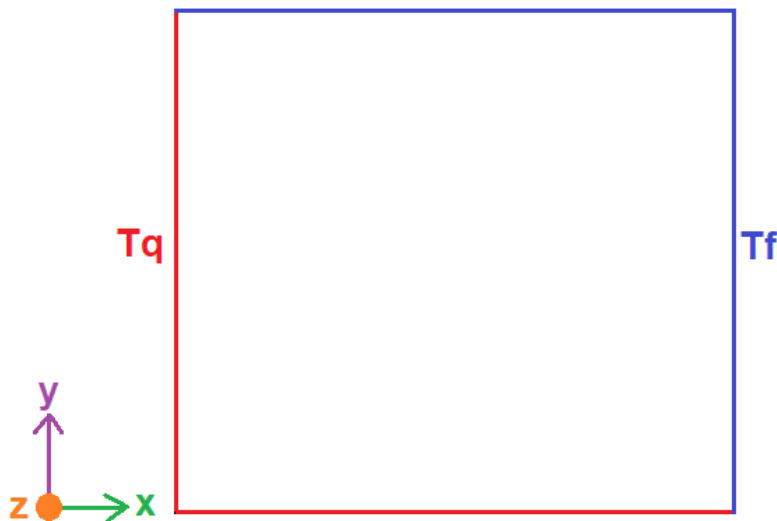
Observando-se que essa mesma lacuna é vista na literatura ao se utilizar um *software* de pacote aberto como OpenFOAM, o mesmo experimento numérico foi estudado no presente trabalho, porém usando a abordagem RANS e bidimensional para análise do escoamento e do comportamento térmico relacionado ao mesmo. Complementarmente, uma análise da influência dos diferentes modelos de turbulência com resolução das regiões próximas às paredes é feita.

3. METODOLOGIA

Fabregat e Pallarès (2020) apresentam simulações numéricas diretas (DNS) para caracterizar a transferência de calor por convecção em uma cavidade fechada, tal qual a apresentada na Figura 4. Neste estudo uma faixa de valores de Ra_L foram simulados para casos tridimensionais. Para este estudo, escolheu-se o valor de $Ra_L = 10^7$, que, de acordo com Fabregat e Pallarès (2020), o escoamento torna-se turbulento.

Por uma questão de simplificação, optou-se por explorar a condição de simetria do problema e rodar o caso de forma bidimensional, de acordo com a geometria apresentada na Figura 11. O OpenFOAM, por padrão, aceita apenas geometrias tridimensionais, porém, usa-se do recurso “vazio” (do inglês, *empty*) nas faces frontal e traseira. De acordo com a documentação do OpenFOAM, essa condição reduz a dimensão do caso e deve ser aplicada às faces cuja normal está alinhada com a direção geométrica que não fará parte da solução do problema.

Figura 11: Vista frontal da cavidade térmica.



Fonte: Elaborada pelo autor

A geometria apresentada na Figura 11 representa um domínio cúbico com lado igual a $0,34\text{ m}$, onde as paredes em vermelho estão a $301,5\text{ K}$, e por sua vez, as paredes em azul encontram-se a $298,5\text{ K}$ possibilitando um $\Delta T = 3\text{ K}$ durante toda a simulação. A

cavidade está preenchida por ar inicialmente a 300 K com suas propriedades dadas pela Tabela 9.

Tabela 9: Propriedades do ar (Fabregat e Pallarès, 2020).

Variável	Símbolo	Valor
Densidade	ρ_o	$1,3 \text{ kg m}^{-3}$
Viscosidade cinemática	ν	$1,57 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Difusividade térmica	α	$2,24 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$
Coefficiente de expansão térmica	β	$3,33 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$

As hipóteses assumidas para esta simulação foram:

- Modelo 2D
- Regime transiente
- Ar é o fluido de operação com propriedades constantes
- Ar é incompressível
- Desconsiderando a radiação
- Aproximação de Boussinesq válida
- Aceleração da gravidade atua na direção -y
- Acoplamento PIMPLE de pressão-velocidade
- As simulações foram conduzidas utilizando o modelo de turbulência $k - \omega SST$ para resultados preliminares

3.1. *buoyantBoussinesqPimpleFoam* e *buoyantPimpleFoam*

Os solvers *buoyantBoussinesqPimpleFoam* e *buoyantPimpleFoam* são padrões no OpenFOAM e contemplam escoamentos dados por convecção natural, em regime turbulento, transiente, para fluido incompressível e compressível, respectivamente, onde a diferença de um solver para o outro é que o primeiro utiliza a aproximação de Boussinesq como método de ligação entre os parâmetros temperatura e massa específica, enquanto por sua vez o segundo utilizará uma equação de estado.

As equações da continuidade, quantidade de momento linear e temperatura são apresentadas nas Equações 3.1, 3.2 e 3.3, respectivamente e descrevem o *solver buoyantPimpleFoam*, em que k_{eff} é a condutividade térmica efetiva que pode ser dada pela equação 3.4, onde o subscrito t representa a propriedade turbulenta.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \rho \nabla \cdot (\mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla(\mu \nabla \mu) + \rho \mathbf{g} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \nabla \cdot (T \mathbf{u}) = k_{eff} \nabla^2 T \quad (3.3)$$

$$k_{eff} = k + k_t = \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \quad (3.4)$$

Para o *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam*, como o próprio nome sugere, tem a aproximação de Boussinesq válida, de tal forma que a equação de quantidade de momento linear toma a forma da Equação 3.5, em que ρ_k é a densidade cinemática efetiva e é dada por $\rho_k = 1 - \beta(T - T_0)$. Alguns modelos de turbulência foram testados para avaliar o impacto dos mesmos na transferência de calor ao se utilizar a hipótese de Boussinesq em escoamentos confinados.

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nu_{eff} \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_k \mathbf{g} \quad (3.5)$$

Diferentes classes de modelos foram testadas: o modelo de uma equação de Spalart-Allmaras (1994), os modelos LRN de viscosidade turbulenta linear $SST k - \omega$ de Menter (1994), $k - \varepsilon$ de Launder e Sharma (1972) e $v^2 f$ de Durbin (1991), o modelo LRN de viscosidade turbulenta não linear (cúbico) de Lien *et al.* (1996) e os modelos dos Tensores de Reynolds LRR (1975) e SSG (1991). Dos modelos citados, apenas o de Spalart e Allmaras (1994) não foi apresentado na seção de modelos de turbulência. Isso porque não se espera uma previsão precisa desse modelo no presente caso, uma vez

que foi calibrado para escoamentos externos sobre superfícies curvas, como as encontradas em aplicações aeroespaciais. Como foi um dos primeiros modelos testados por sua simplicidade de convergência, seus resultados serão aqui apresentados também. O modelo resolve uma única equação de transporte extra para a viscosidade turbulenta.

3.2. Estudo de domínio e malha

Fabregat & Pallarès (2020) fizeram diversas simulações com diferentes valores de Ra_{L_c} para uma cavidade térmica cúbica, onde os valores de $Ra_{L_c} \geq 10^7$ apresentaram escoamento completamente turbulento. O tamanho L da aresta do cubo é determinada a partir da Equação 3.6.

$$L = \sqrt[3]{\frac{Ra_{L_c} \nu \alpha}{\beta g (T_s - T_\infty)}} \quad (3.6)$$

Para o caso de $Ra_{L_c} = 10^7$ obtém-se um valor de $L = 0,34 \text{ m}$, gerando-se uma geometria cúbica pelo utilitário *blockMesh*, onde tanto geometria como discretização do domínio podem ser feitos. A Figura 12 representa a geometria com suas cotas e eixos exibidos, além de mostrar o nome das faces do cubo, onde a indicação *hot* significa onde as paredes terão maior temperatura, e, por sua vez, a nomenclatura *cold* indicará os locais com menor temperatura. A Figura 13 apresenta a discretização do domínio a partir de uma vista frontal da malha M1.

Todas as malhas foram feitas de tal forma que o valor de $y^+ \approx 0,31$. Isto é feito para que os modelos de turbulência pudessem desempenhar de forma coerente na resolução das regiões próximas às paredes. O tamanho do primeiro elemento também foi mantido em aproximadamente 0,0016 m, assim como a razão de crescimento em torno de 1,2. A Tabela 10 mostra o número de elementos de cada malha utilizada durante o teste de malha com o modelo de turbulência *SST k - ω* .

Tabela 10: Número de elementos de cada malha.

Malha	Elementos
M1	78300
M2	160284
M3	324864
M4	637200
M5	1299600
M6	2162700

Figura 12: Geometria e nomenclatura do domínio gerado a partir do blockMesh.

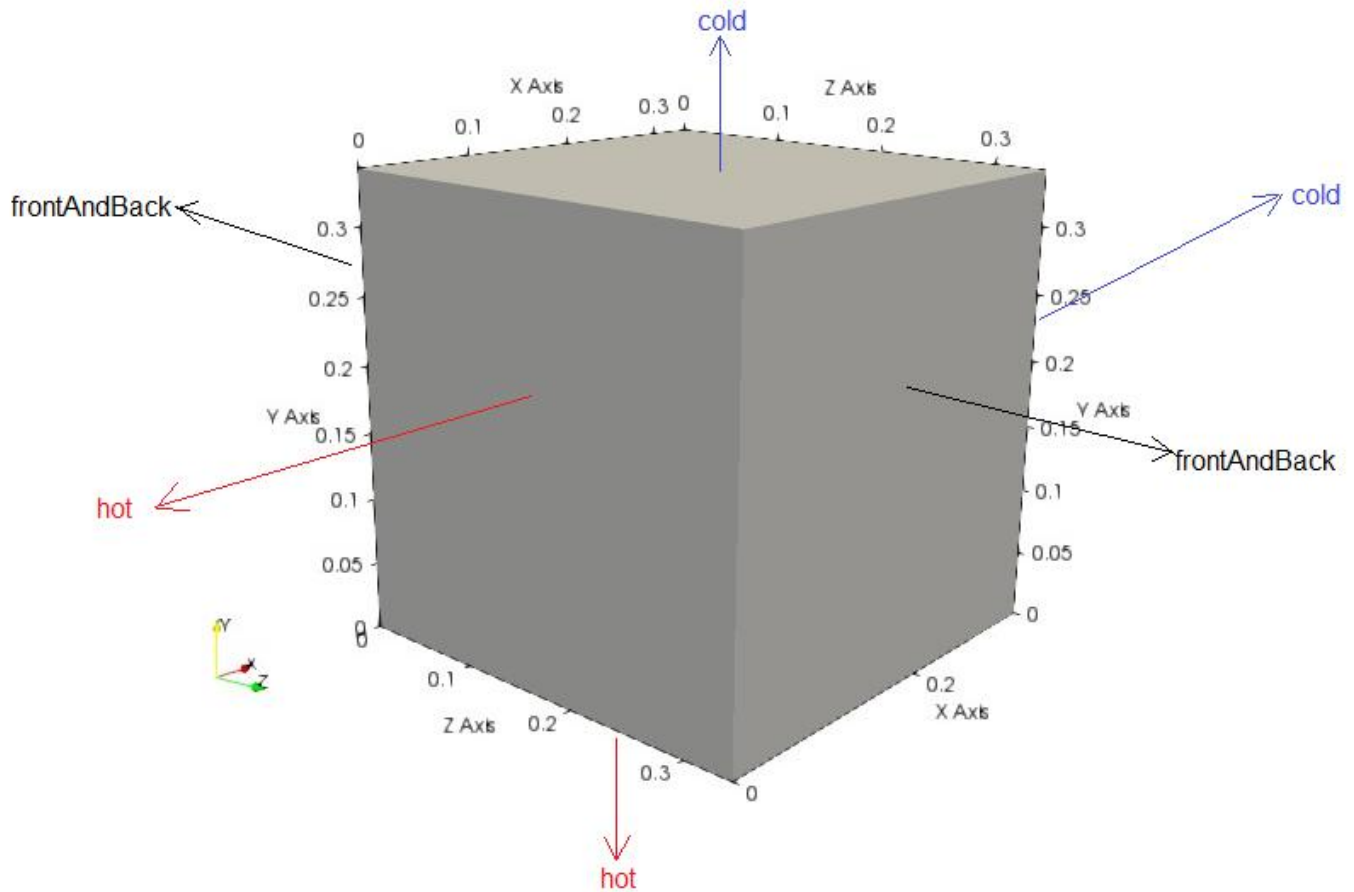
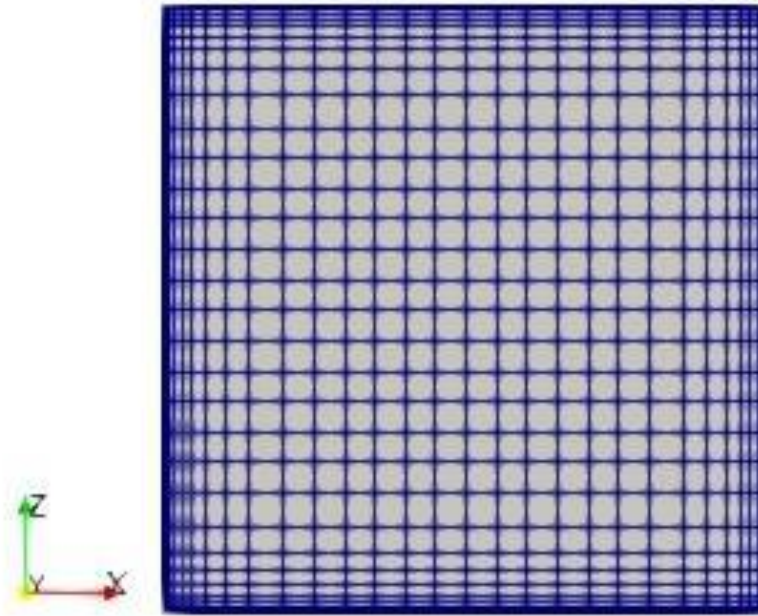


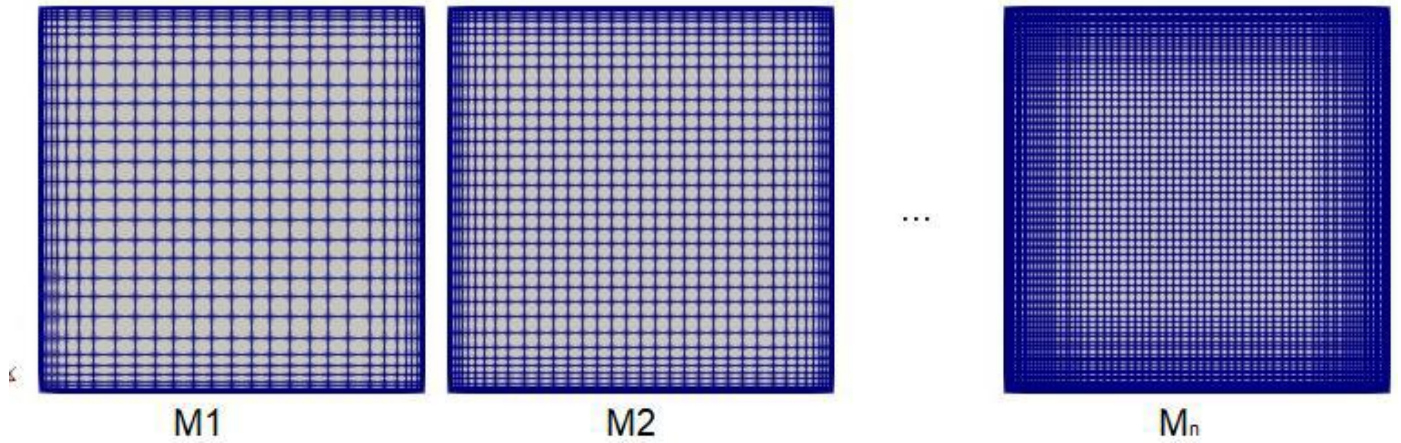
Figura 13: Discretização do domínio da malha M1.



Quanto maior a quantidade de elementos, melhor será sua aproximação da realidade, uma vez que as células se tornam cada vez menores podendo captar assim com maior acurácia os detalhes do fenômeno em questão. Por outro lado, quanto maior essa quantidade de células, maior será o custo computacional associado. Frente a este impasse, é usualmente comum se fazer um estudo de convergência de malha, isto é, encontrar uma quantidade de células, que, a partir desta quantidade não haverá mais mudanças significativas nos resultados obtidos. A Figura 14 representa o processo de refinamento de malha, onde M1 representa a malha menos refinada e M_n a n ésima malha, onde esta será a malha mais refinada para todos os testes.

Para se ter parâmetros estatísticos que indiquem em qual malha haverá a convergência de malha, vários métodos podem ser usados. Para este estudo decidiu-se seguir o método GCI (*Grid Convergence Index*) ou Índice de Convergência de Malha, o qual foi desenvolvido pela Associação Americana de Engenheiros Mecânicos, ASME (*American Society of Mechanical Engineers*).

Figura 14: Refino de malha.



Esse método consiste basicamente em uma comparação entre o resultado obtido em uma das simulações com o resultado que se é esperado em uma malha extrapolada a partir de um método de segunda ordem. No mínimo três malhas com diferentes níveis de refino devem ser criadas, ϕ_i , e números de elementos N_i , de tal modo que $N_1 > N_2 > N_3$. Em seguida calcula-se as razões de refino entre as malhas dada pela equação 3.7.

$$r_{ij} = \left(\frac{N_i}{N_j} \right)^{\frac{1}{D_n}} \quad (3.7)$$

Onde i e j representam diferentes níveis de refinamento de forma que $i = j + 1$. Em outras palavras, tem-se uma razão entre uma malha menos refinada com a mais refinada. D_n deve ser igual a dimensão da malha gerada. É recomendado que esta razão de refino seja maior que 1,3. Outros parâmetros devem ser calculados de modo a se obter inicialmente a ordem aparente, ou de precisão, chamada de p_{ap} , que é dada pela Equação 3.8, sendo $\varepsilon_{ij} = \phi_i - \phi_j$ e $q_{p_{ap}}$ definido como na Equação 3.9, na qual um novo parâmetro denominado s é dado por $s = 1 \cdot \text{sgn}(\varepsilon_{32}/\varepsilon_{21})$. Vale lembrar que para r_{ij} constante, $q_{p_{ap}} = 0$.

$$p_{ap} = \frac{1}{\ln(r_{21})} \left| \ln \left| \frac{\varepsilon_{32}}{\varepsilon_{21}} \right| + q_{p_{ap}} \right| \quad (3.8)$$

$$q_{p_{ap}} = \ln \left(\frac{r_{21}^{p_{ap}} - s}{r_{32}^{p_{ap}} - s} \right) \quad (3.9)$$

Finalmente o índice de convergência da malha refinada será dado com um fator de 25% de segurança como demonstrado na Equação 3.10. O erro relativo aproximado e_{21} é calculado pela Equação 3.11.

$$GCI_1 = \frac{(1,25e_{21}^a)}{r_{21}^{p_{ap}} - 1} \quad (3.10)$$

$$e_{ij}^a = \left| \frac{\phi_j - \phi_i}{\phi_j} \right| \quad (3.11)$$

De forma geral, o método GCI para uma malha bidimensional implica em ter o dobro de células aproximadamente para cada novo refino, ou seja, supondo que M_1 tenha 500 células, M_2 deve ter aproximadamente 1000 células. De forma geral, $N_{n+1} \approx 2N_n$.

3.3. Condições iniciais e de contorno

Na nomenclatura de simulação, as fronteiras físicas do domínio com a vizinhança são chamadas de *patch*. As condições de temperatura especificada ou também chamada de condição de primeira espécie foram atribuídas de tal modo que a diferença de temperatura entre as paredes mais quentes e frias são mantidas em 3K. Para esta análise, as paredes quentes e frias são mantidas a 301,5 K e 298,5 K, respectivamente. Além disso, o ar dentro da cavidade encontra-se inicialmente a 300 K, assim como no trabalho de Fabregat & Pallarès (2020).

Para a velocidade, a condição de não deslizamento é empregada nas fronteiras do domínio, chamada de condição *noSlip*, com exceção das faces *frontAndBack* que por serem *empty*, a condição de contorno necessariamente também precisa ser *empty*.

A condição de valor calculado é dada para a pressão, no OpenFOAM, também conhecida como *calculated*. O cálculo é apresentado na Equação 3.12, em que p é a pressão que deve ser calculada, ρ a massa específica, g a gravidade e h a altura relacionada a carga hidrostática.

$$p = p_{rgh} + \rho gh \quad (3.12)$$

Para a parcela p_{rgh} a condição de *fixedFluxPressure* é aplicada onde o gradiente de pressão na superfície é ajustado de acordo com as forças atuantes nela. A unidade de pressão para o solver que utiliza a aproximação de Boussinesq é $kg/(s^2m)$, pois como o fluido é incompressível, a equação da conservação da quantidade de movimento é resolvida em termos de p/ρ , também conhecida como pressão cinemática. Para o *buoyantPimpleFoam* a pressão é tratada na unidade usual de Pa.

Para as variáveis turbulentas, afim de se resolver as regiões próximas às paredes, utiliza-se a condição de valor fixo (do inglês, *fixed Value*). Apesar do domínio ser tridimensional, as paredes frontal e lateral (*frontAndBack*) possuem a condição *empty*, por sua vez, as outras paredes são do tipo “paredes”, disponibilizada no OpenFOAM como *walls*, condicionando, como dito anteriormente, uma análise bidimensional.

As condições de contorno e iniciais das variáveis são mostradas na Tabela 11 e 12, respectivamente. Como o ar se encontrava inicialmente quiescente no ambiente confinado, seus valores de inicialização de domínio devem ser muito baixas para as propriedades turbulentas, como a difusividade turbulenta α_t (alphanut), energia cinética turbulenta k e viscosidade turbulenta ν_t (nut).

Tabela 11: Condições de contorno.

patch	Variáveis							
	T	U	alphan	k	nut	omega	p	p_rgh
cold	298,5	noSlip	10^{-8}	10^{-8}	10^{-8}	fixedValue	calculated	fixedFluxPressure
hot	301,5	noSlip	10^{-8}	10^{-8}	10^{-8}	fixedValue	calculated	fixedFluxPressure
frontAndback	empty	empty	empty	empty	empty	empty	empty	empty

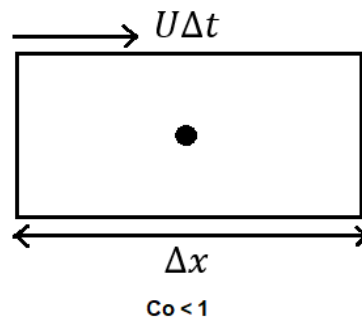
Tabela 12: Condições iniciais.

Variável [dimensão]	Condição inicial
T [K]	298
U [m/s]	(0 0 0)
alphat [kg/m.s]	$3,75 \times 10^{-4}$
k [m/s ²]	10^{-8}
nut [m ² /s]	10^{-8}
omega [1/s]	0,12
p [kg/m s ²] ou [Pa]	101325
p_rgh [kg/m s ²] ou [Pa]	101325

Todas as simulações foram feitas para um tempo de 150 segundos, pois de acordo com o estudo de Fabregat e Pallarès (2020), o estado estacionário era atingido em suas simulações após 140 segundos. Posteriormente, na seção de resultados também será observado que o estado estacionário é atingido em torno de 135 segundos. O passo de tempo inicial foi de 0,5 segundo e, no decorrer da simulação, o valor de passo de tempo é alterado de acordo com o valor de Courant máximo, um parâmetro adimensional de extrema importância para estabilidade numérica de problemas (VERSTEEG, H. K., 2007).

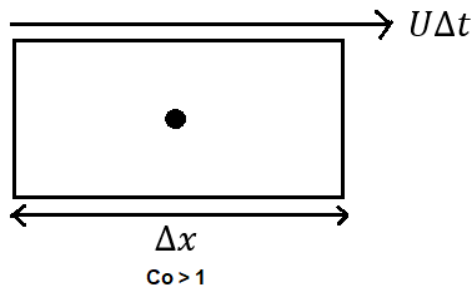
Esse número adimensional depende da velocidade, tamanho da célula e passo de tempo e é tipicamente calculado para cada célula do domínio. Uma explicação física para simulações CFD é que se o valor de Co é menor que 1, isso indica que uma partícula fluida se move de uma célula a outra com no mínimo um passo de tempo, como mostra a Figura 15 (VERSTEEG, H. K., 2007).

Figura 15: Análise 1D para $Co < 1$.



Porém, se Co é maior que 1, a partícula fluida transita entre duas ou mais células em cada passo de tempo e isso pode afetar a convergência negativamente. A Figura 16 mostra uma partícula que transita em mais de uma célula para um determinado passo de tempo Δt .

Figura 16: Análise 1D para $Co > 1$.



Alguns *solvers* e parâmetros de controle foram desenvolvidos no OpenFOAM de tal modo que, mesmo com valores de Co maiores que 1, as soluções são estáveis e tendem a convergir. O número de Courant é dado pela expressão na Equação 6.13, em que U , Δt , Δx representam a velocidade da partícula fluida, o passo de tempo e a distância da célula, respectivamente.

$$Co = \frac{\text{distância que a partícula fluida percorre}}{\text{distância da célula}} = \frac{U\Delta t}{\Delta x} \quad (6.13)$$

Elementos muito pequenos (Δx pequenos) proporcionarão um aumento no número de Courant, e, portanto, para contornar tal situação será necessário diminuir o passo de tempo (Δt), uma vez que a velocidade U já está pré-estabelecida pela natureza do

escoamento. A Tabela 13 mostra as recomendações para alguns, porém, de forma geral, recomenda-se que o valor máximo de Courant seja abaixo de 1.

Tabela 13: Tabela de recomendações (Adaptado do manual *Wolf Dynamics*).

Tipo de simulação	Co
LES	0,5 – 1
Escoamentos com alto fluxo	< 1
Escoamento compressível	(depende da velocidade do som)
Turbo máquinas	< 80
Esquema explícito no termo temporal	< 1

Todas as informações sobre controle de simulação podem ser especificadas no arquivo *controlDict* do OpenFOAM, cuja descrição encontra-se no Apêndice 1.

Os termos temporal, convectivo, difusivo e fonte são discretizados conforme o esquema numérico escolhido pelo usuário durante as simulações. A Tabela 14 mostra as escolhas feitas para este trabalho, em que, de forma geral, os esquemas escolhidos foram todos de primeira ordem. O Apêndice 2 traz maiores informações das descrições e especificações dos esquemas numéricos,

Tabela 14: Esquemas numéricos dos operadores da equação de transporte.

Operador	Esquema numérico
Temporal	Euler
Divergente (U)	Gauss upwind
Divergente ($k, \omega, \varepsilon, f, v^2, R, T$)	Gauss upwind
Laplaciano	Gauss linear corrected

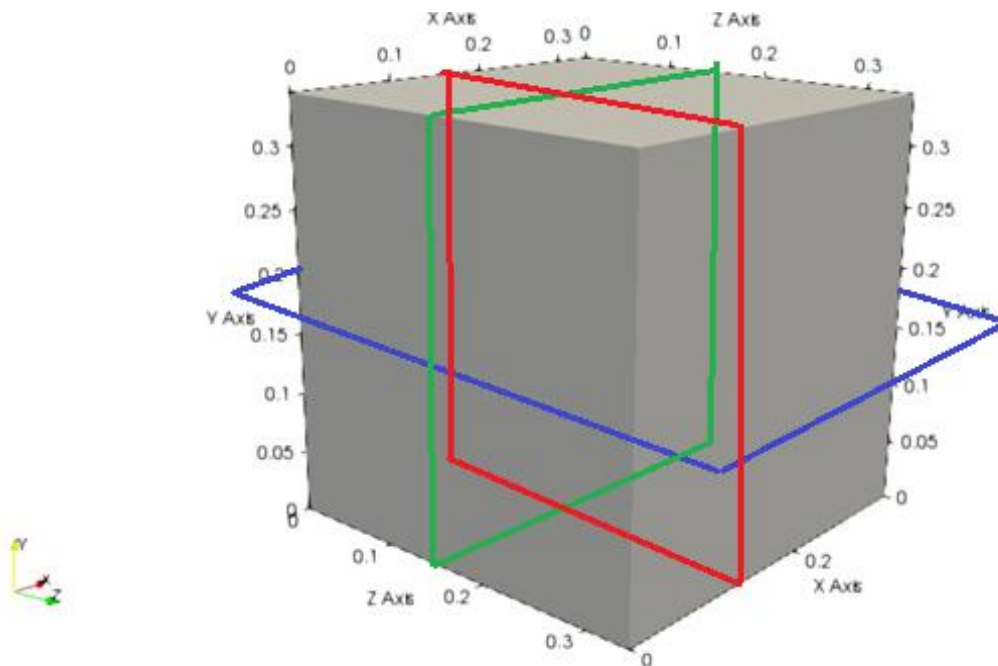
4. RESULTADOS

4.1. Convergência de malha

Para essa verificação, o perfil de temperatura adimensional versus a distância adimensional foi o principal parâmetro quantitativo utilizado. O perfil de temperatura adimensional é dado pela Equação 4.1, em que T é a temperatura medida em cada nó, T_{ref} vale 300K, pois é a temperatura de referência utilizada para obtenção das propriedades termofísicas do ar e $\Delta T = T_q - T_f = 3K$, ou seja, a diferença de temperatura entre as paredes quente e fria mantidas isotermicamente durante toda a simulação. As comparações foram feitas desta maneira para se reproduzir de forma igual ao mesmo feito pelo artigo base para este estudo.

$$\theta = \frac{T - T_{ref}}{\Delta T} \quad (4.1)$$

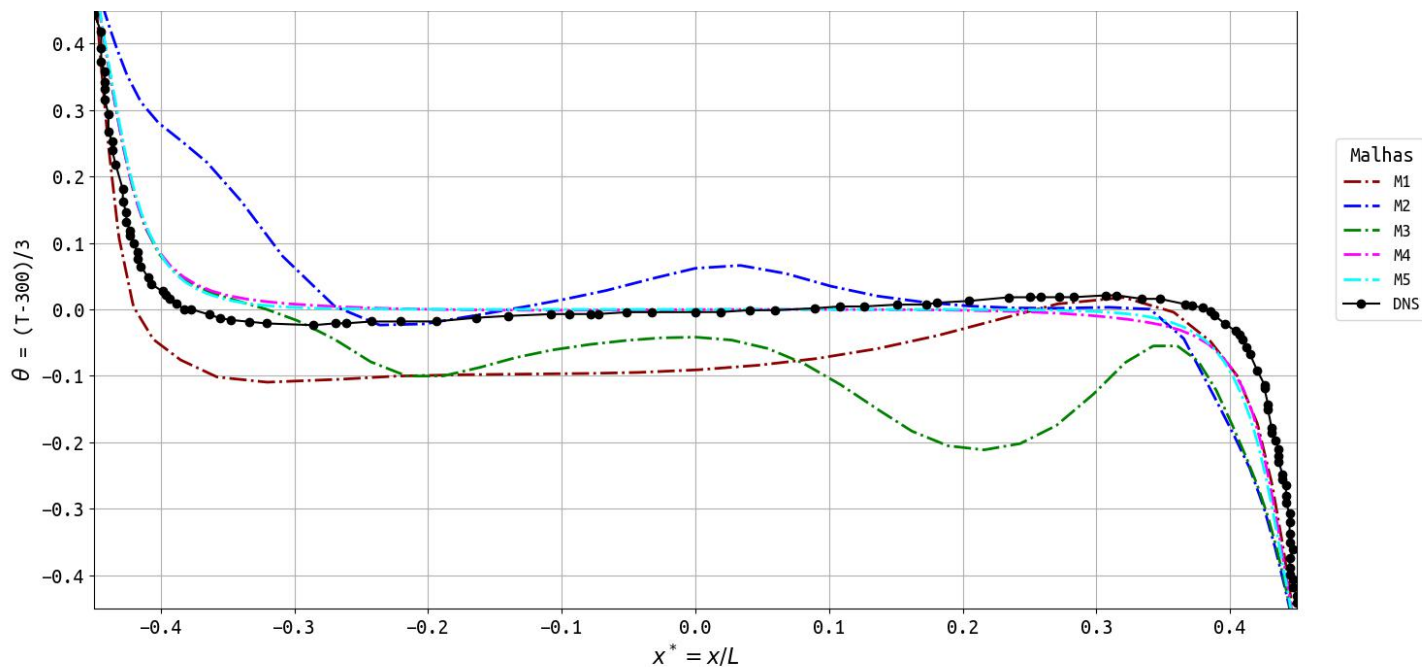
Figura 17: Corte nas direções normais aos planos x, y e z.



A Figura 17 mostra os cortes nas direções normais aos planos x, y, z nas cores vermelha, azul e verde, respectivamente. Os dados de perfil de temperatura adimensional na direção vertical e horizontal foram todos obtidos no plano xy, em $z = 0$ (corte em verde na Figura 17).

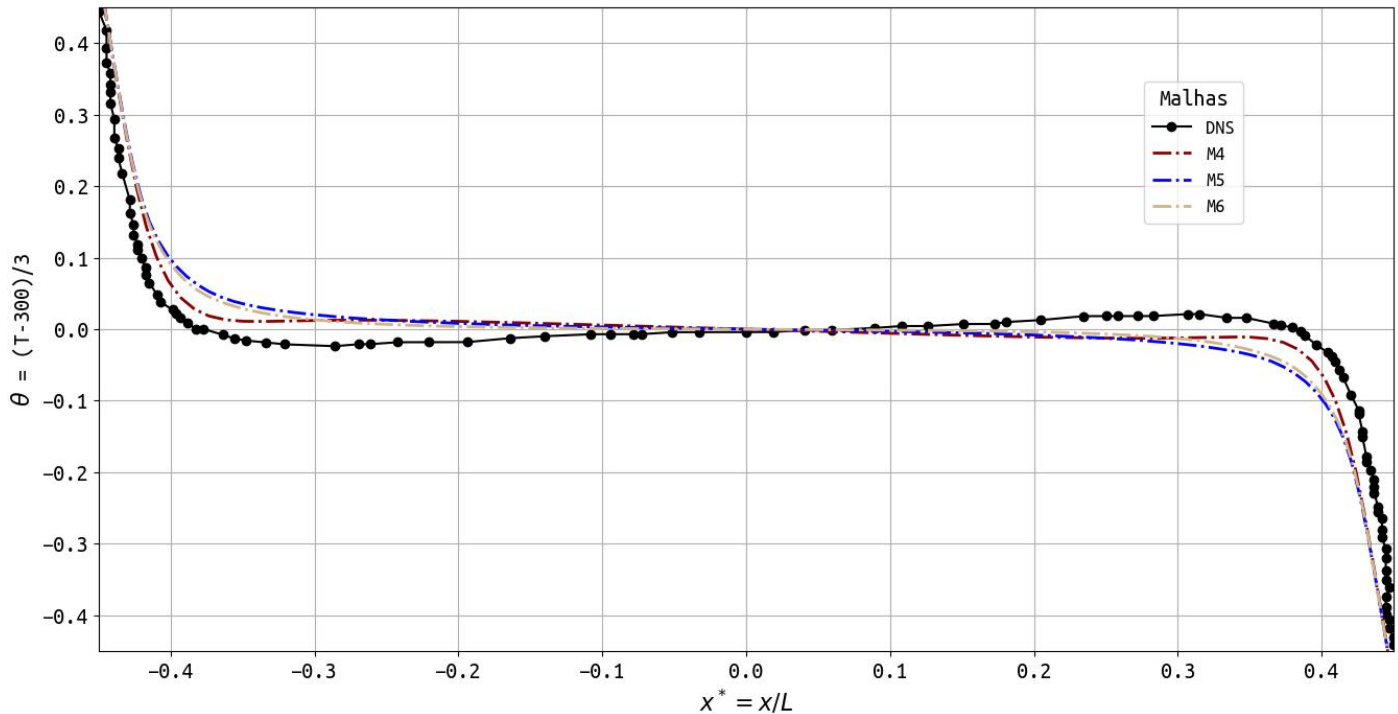
Na Figura 18 se observa o perfil de θ versus a distância adimensional na direção horizontal, obtido com simulações utilizando-se o *solver buoyantPimpleFoam*, no qual o ar é tratado sem a hipótese de Boussinesq, mas sim como um fluido compressível, tendo uma equação de estado (gás ideal) descrevendo a densidade em função da temperatura. O resultado da Figura 19 por sua vez, mostra o perfil de temperatura adimensional versus a distância adimensional na direção horizontal, porém, utilizando o *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam*. Através dos gráficos observa-se que para ambos os casos, verificam-se ligeiras diferenças entre os dados observados nas regiões mais próximas às paredes ($x^* \rightarrow \pm 0,5$).

Figura 18: Convergência de malha com *solver buoyantPimpleFoam* e modelo *SST k - ω* .



Para o *solver* compressível *buoyantPimpleFoam*, no qual utiliza uma equação de estado para interligar densidade e temperatura do fluido, houve convergência na malha M4. Quando utilizado o *solver* *buoyantBoussinesqPimpleFoam*, essa convergência só ocorreu na malha M5.

Figura 19: Comparação dos dados DNS de Fabregat e Pallarès (2020) com atual trabalho utilizando modelo de turbulência *SST k - ω* e *solver* *buoyantBoussinesqPimpleFoam*.

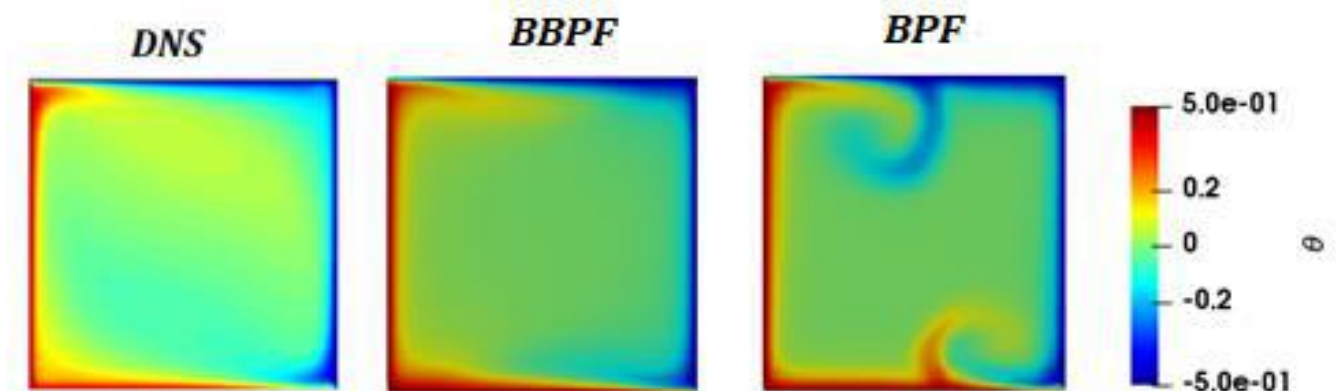


É possível observar na Figura 19 que, com o modelo *k - ω SST*, quando comparado aos valores de DNS na direção horizontal, os resultados seguem um perfil próximo ao observado na literatura, porém, também apresenta desvios em regiões próximas às paredes. Uma possível justificativa para tal comportamento nessas regiões de desvio, pode estar atrelada às simplificações feitas ao problema em relação ao simulado por Fabregat e Pallarès (2020).

Na Figura 20 há uma comparação dos perfis de temperatura no plano central XY em $z = 0$, obtidos pelos dois *solvers*, (*buoyantBoussinesqPimpleFoam*, BBPF e *buoyantPimpleFoam*, BPF) testados e os dados de DNS. Pode-se observar que o perfil

de temperatura como um todo difere significativamente quando não utilizada a hipótese de Boussinesq, ou seja, o *solver* compressível (*buoyantPimpleFoam*) prevê regiões com maior e menor temperatura que se "despreendem" da camada limite, que, originalmente não foram previstas pelos dados de DNS. Em tese, o *solver* compressível seria o mais fisicamente correto, uma vez que não tem a aproximação de Boussinesq que, como o próprio nome indica, é uma simplificação. Mais estudos são necessários para compreender esse resultado, podendo até ser uma sensibilidade maior ao modelo de turbulência. De qualquer modo, por esse comportamento não esperado, seguiu-se o trabalho com o *solver* *buoyantBoussinesqPimpleFoam* para avaliação dos modelos de turbulência, até porque isso é coerente com a própria modelagem DNS utilizada para validação dos resultados.

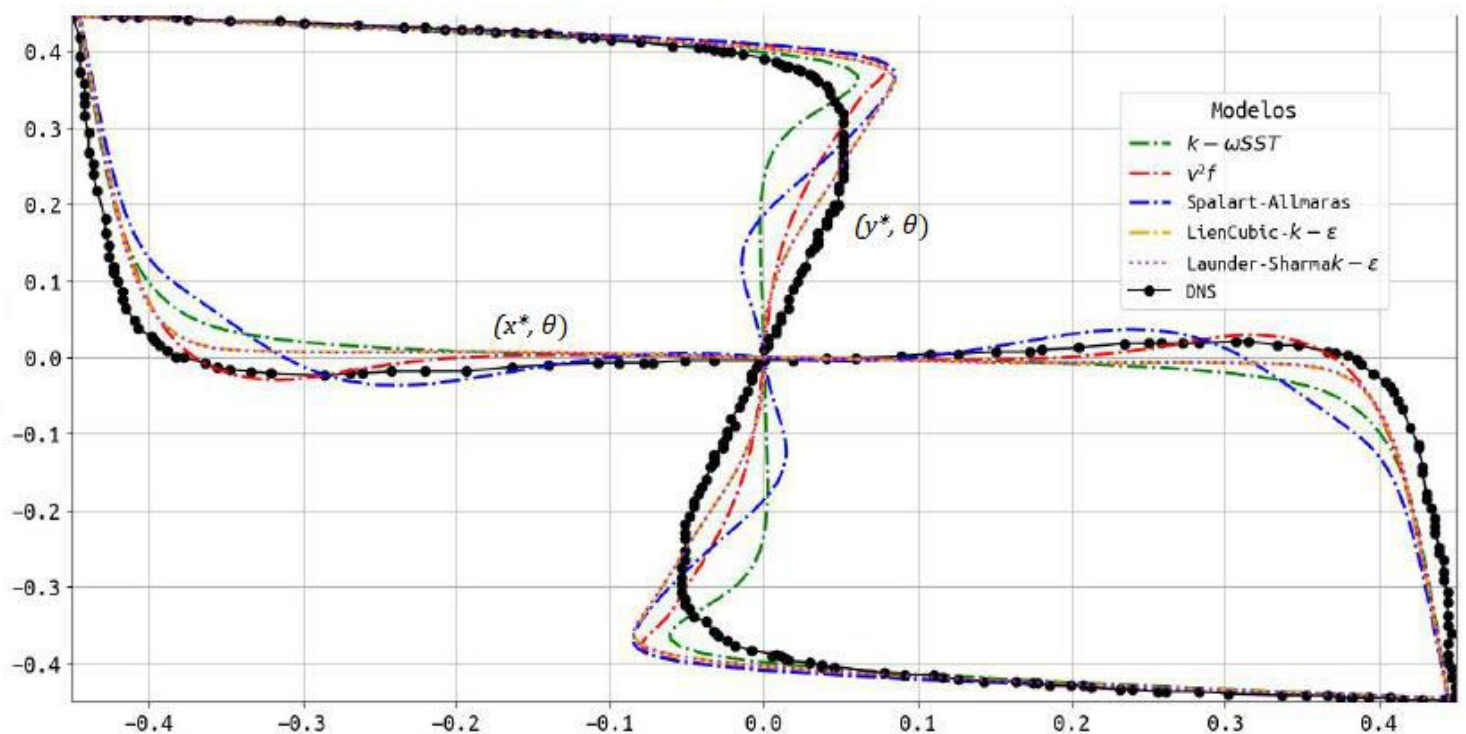
Figura 20: Comparação do campo de temperatura adimensional entre os dados DNS, *buoyantBoussinesqPimpleFoam* e *buoyantPimpleFoam* com modelo *SST k - ω* no plano *xy* em $z = 0$.



4.2. Comparação entre modelos de turbulência

A influência dos diferentes tipos de modelos de turbulência testados foi então realizada com o *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam* com a malha M5. A Figura 21 mostra os resultados obtidos com os modelos de viscosidade turbulenta (uma e duas equações, linear e não lineares) para os perfis de temperatura adimensional com as

Figura 21: Comparação entre os perfis de temperatura adimensionais entre os modelos de turbulência utilizando o *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam* no plano XY (em $z = 0$).



distâncias adimensionais tanto para a posição horizontal como a para a posição vertical. Vale ressaltar mais uma vez que todos os dados foram obtidos no plano verde da Figura 17.

Como pode ser visto, o modelo de Spalart-Allmaras (1994) apresentou o maior desvio em relação aos dados DNS. Esse comportamento era esperado uma vez que este foi um modelo condicionado para simulações aeroespaciais, e, além de tudo, é um modelo de apenas uma equação.

Por sua vez, o modelo $v^2 f$ foi o que apresentou melhor concordância com o perfil de θ obtido nas simulações DNS. Como esse modelo se propõe a capturar de forma mais

acurada a região da parede, por ser um modelo de três equações, com uma escala de velocidade e tempo, em tese, mais apropriadas, esse resultado indica a importância da correta resolução da região da parede na previsão da transferência de calor.

Pode-se ainda observar na Figura 21 que os modelos de viscosidade linear de Launder e Sharma (1974) e cúbico de Lien *et al.* (1996) se desempenharam melhor que o modelo *SST k - ω* e fornecem perfis concordantes, sobrepostos. Isso indica que, nesse problema, os componentes normais do tensor de Reynolds não desempenham papel relevante na previsão dos campos médios de temperatura. As Figuras 22 e 23 mostram a comparação entre os resultados dos modelos cúbico de Lien *et al.* (1996) e os dois RSM testados (LRR e SSG), onde os perfis de temperatura adimensionais obtidos correspondem ao plano em verde na Figura 17.

Figura 22: Perfis de temperatura obtidos com os modelos RSM e não linear (cúbico) no *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam*.

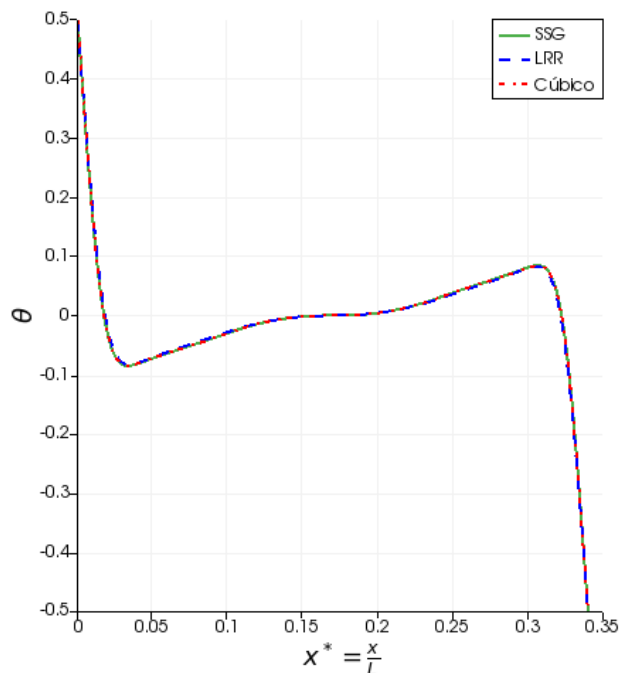
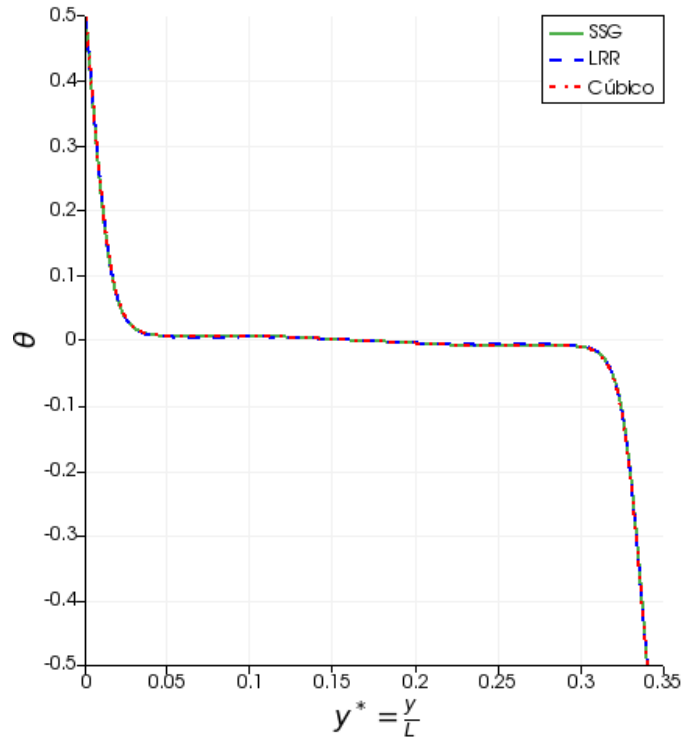


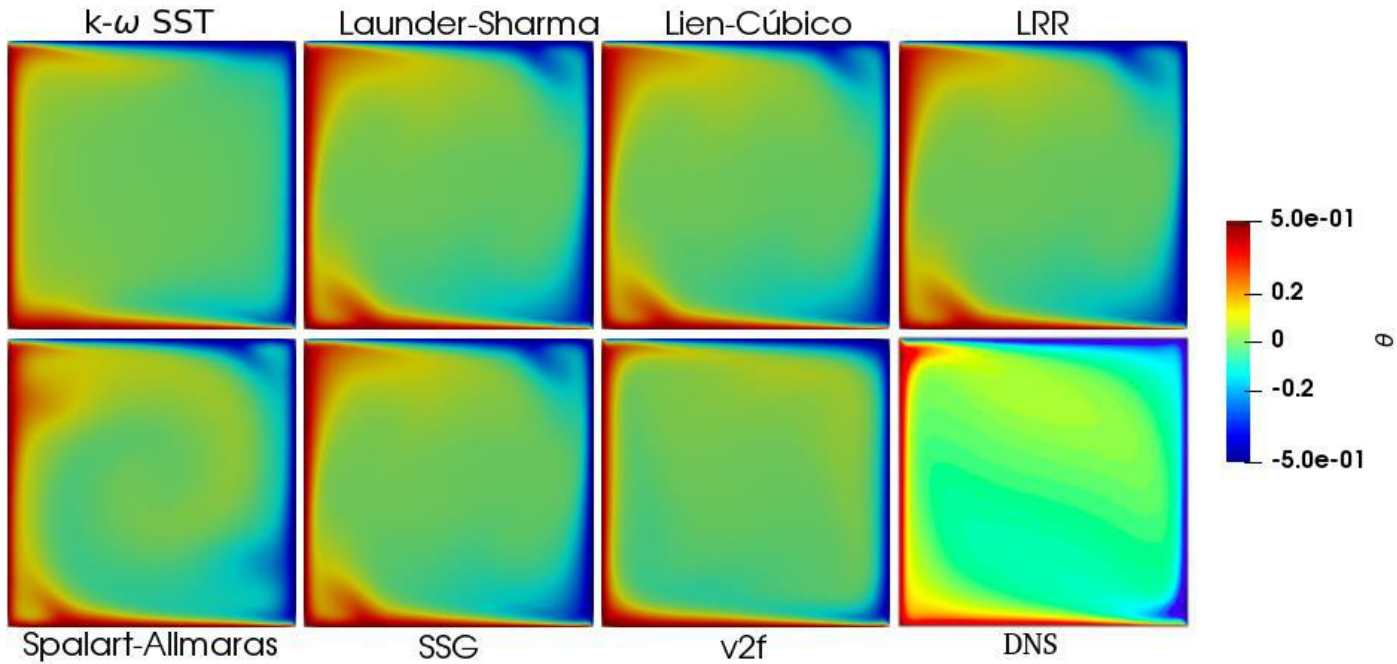
Figura 23: Perfis de temperatura obtidos com os modelos RSM e não linear (cúbico) no *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam*.



Como pode ser visto nas Figuras 22 e 23, ambos modelos RSM coincidiram também com o modelo cúbico, e, por consequência, com o modelo de Launder-Sharma.

Os perfis de temperatura adimensional θ também podem ser visualizados no plano XY (em $Z = 0$), conforme Figura 24. Fica notória a melhor predição pelo modelo v^2f e a similaridade dos perfis fornecidos pelos modelos Launder e Sharma, cúbico de Lien, LRR e SSG.

Figura 24: Comparação entre os dados DNS do campo theta com diferentes modelos de turbulência com o solver buoyantBoussinesqPimpleFoam.



A Figura 25 apresenta o perfil de velocidade no plano XY e $z = 0$ (em verde na Figura 17) previsto por cada um dos modelos testados. A Figura 26 apresenta os vetores de velocidade no mesmo plano também para todos os modelos testados.

Figura 26: Campos de velocidade obtido com os modelos de turbulência testados utilizando o solver *buoyantBoussinesqPimpleFoam*.

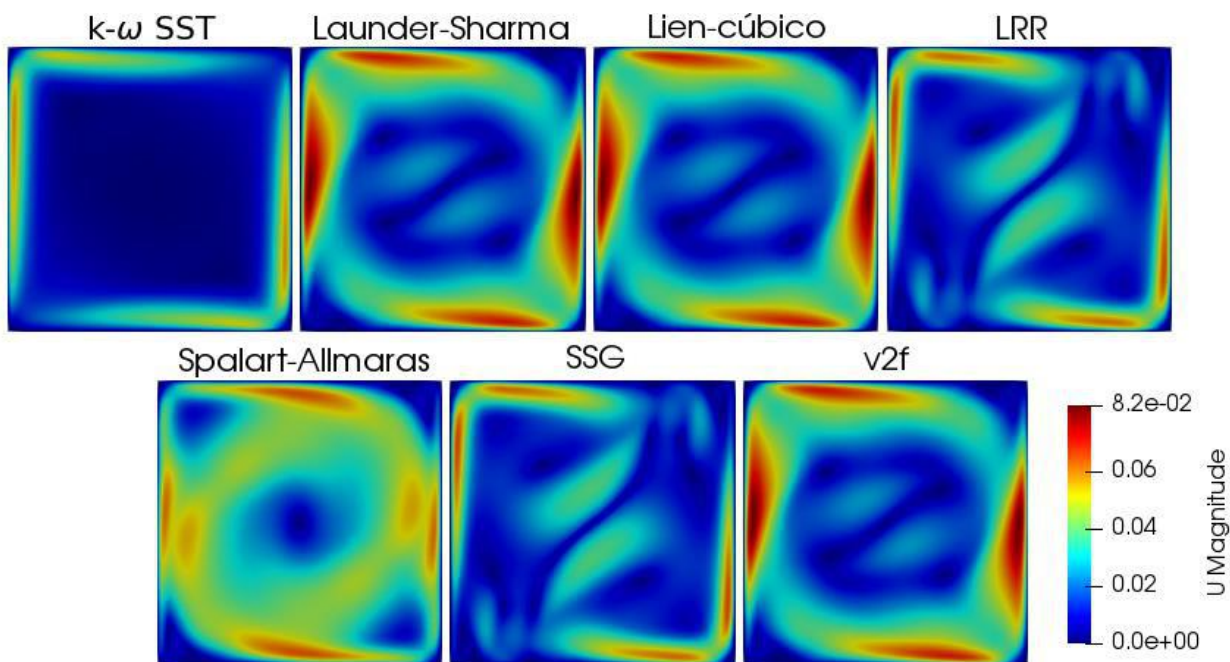
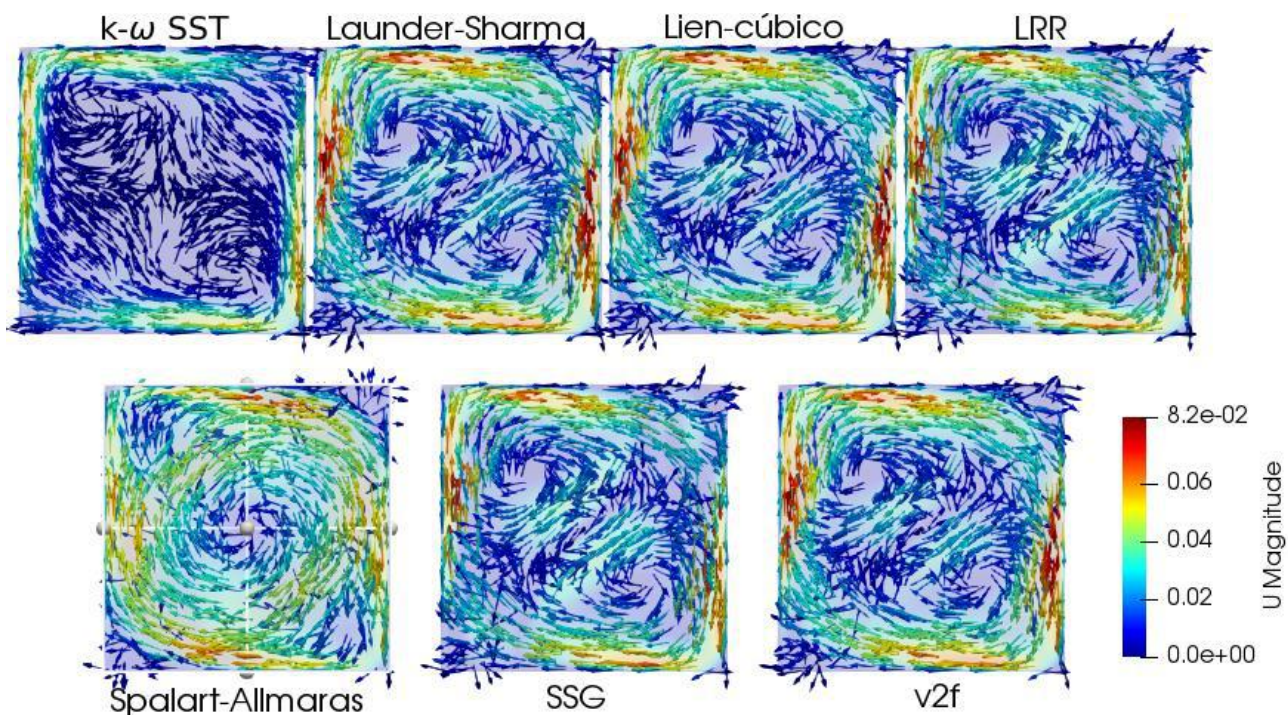


Figura 25: Vetores da velocidade obtido com os modelos de turbulência testados com o solver *buoyantBoussinesqPimpleFoam*.



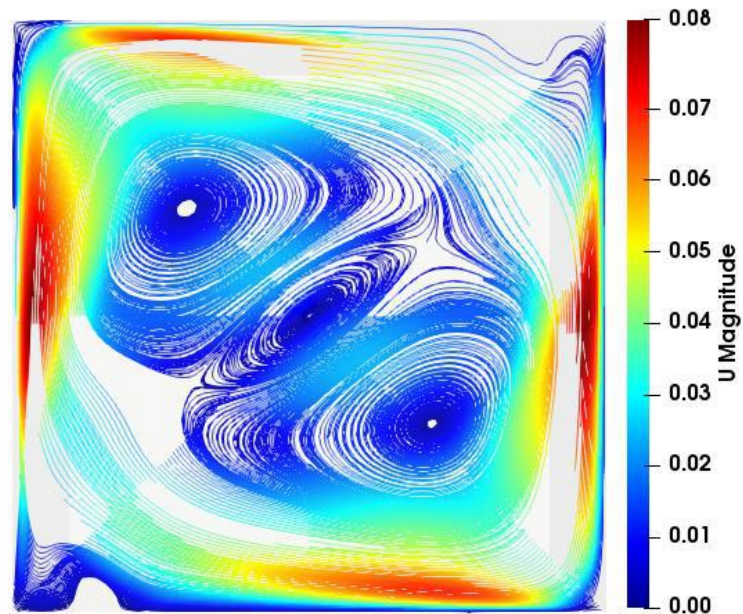
Observando as Figuras 25 e 26, verifica-se campos de velocidade muito semelhantes entre os modelos RSM, ou seja, SSG e LRR, e entre os modelos de LRN $k - \varepsilon$ de Launder e Sharma, cúbico de Lien e v^2f . Os modelos $SST k - \omega$ e de Spalart-Allmaras apresentaram perfis distintos entre si e dos demais. Uma vez que os modelos de Launder e Sharma, Lien cúbico, LRR e SSG retornaram perfis coincidentes de temperatura e distintos de velocidade, isso indica um acoplamento fraco entre as equações de movimento e energia. Ou seja, a advecção tem papel menos relevante que o empuxo, que depende, em última instância, do perfil de temperatura.

De qualquer forma, pelas Figuras 25 e 26, pode-se ver que todos os modelos preveem um movimento circular, no sentido horário, próximo às paredes, e zonas de recirculação na porção central da cavidade com velocidades muito baixas. Esse movimento é coerente com as paredes à esquerda serem aquecidas e às a direita, resfriadas, numa cavidade fechada. A Figura 27 mostra as linhas de corrente obtidas com o modelo v^2f , explicitando o perfil mencionado.

Em cavidades retangulares, como a utilizada neste trabalho, com ângulo de inclinação igual a 0° , e uma face quente e a outra oposta resfriada com as demais adiabáticas, o movimento do fluido é caracterizado por um escoamento circular ou celular, onde o fluido ascende ao longo da parede quente e desce ao longo da parede fria. Para baixos números de Ra_L , em torno de 10^3 , as forças de empuxo são fracas e, na ausência de radiação, a transferência de calor é primordialmente causada por condução pelo fluido. Porém, com o aumento de Rayleigh, o escoamento celular se intensifica e começa a se concentrar nas regiões estreitas das camadas-limite adjacentes às paredes. O escoamento no interior da cavidade fechada fica praticamente estagnado, embora escoamento celular adicionais possam se desenvolver nos cantos e as camadas-limites nas paredes laterais podem apresentar transição para a turbulência (INCROPERA, 1994).

Porém, para o caso estudado, há duas faces a mais no cubo com condições isotérmicas, fazendo com que o fluido no interior da cavidade térmica, apesar de apresentar condição aproximada de estagnação, há regiões de recirculação, como pode ser visto também pela Figura 27.

Figura 27: Linhas de corrente do escoamento com modelo v^2f com solver *buoyantBoussinesqPimpleFoam*.



O trabalho de Fabregat e Pallarès (2020) não mostra perfis de velocidade resultante média, como apresentados nas Figuras 25 e 26. Porém, ele apresenta os perfis das componentes médias nas direções x e y no plano XY central ($z = 0$). Dessa forma, as Figuras 28 e 29 comparam os perfis das componentes x e y da velocidade média, respectivamente, obtidos com cada um dos modelos aqui testado e o DNS de Fabregat e Pallarès (2020). A Figura 30 representa o avanço temporal dos campos de temperatura adimensional e velocidade para simulação considerando o modelo v^2f e solver *buoyantBoussinesqPimpleFoam*.

Figura 29: Comparação da componente u da velocidade para diferentes modelos de turbulência com *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam*.

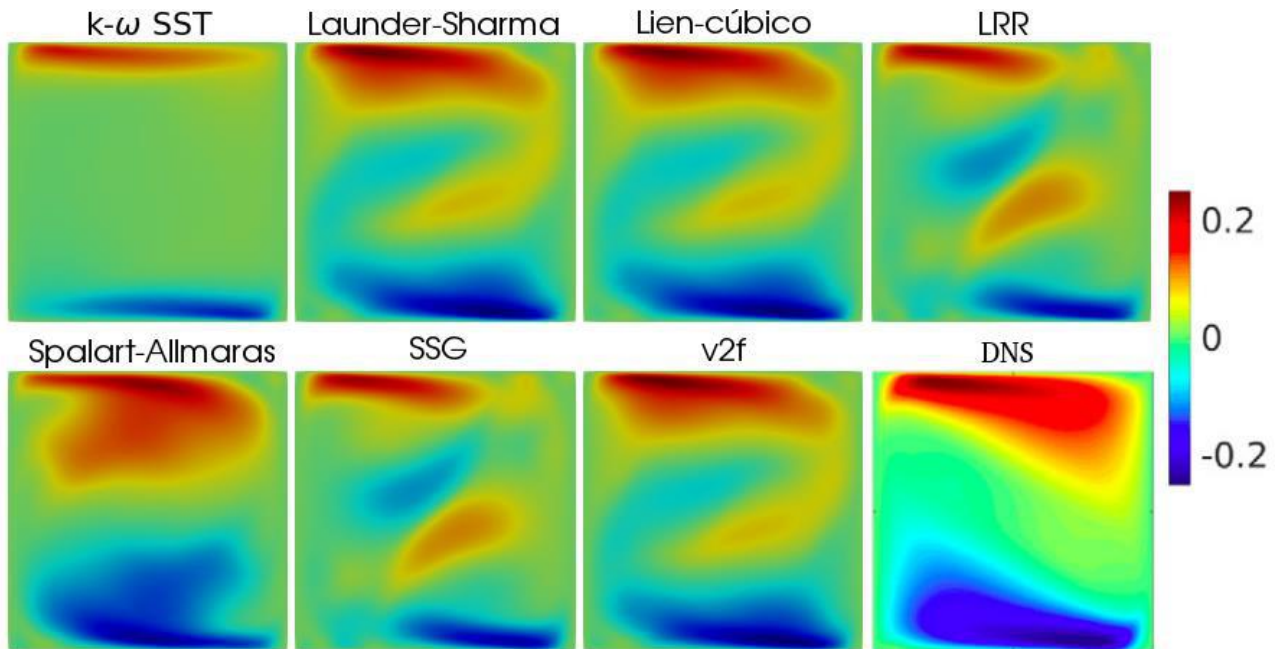


Figura 28: Componente v da velocidade para diferentes modelos de turbulência com *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam*.

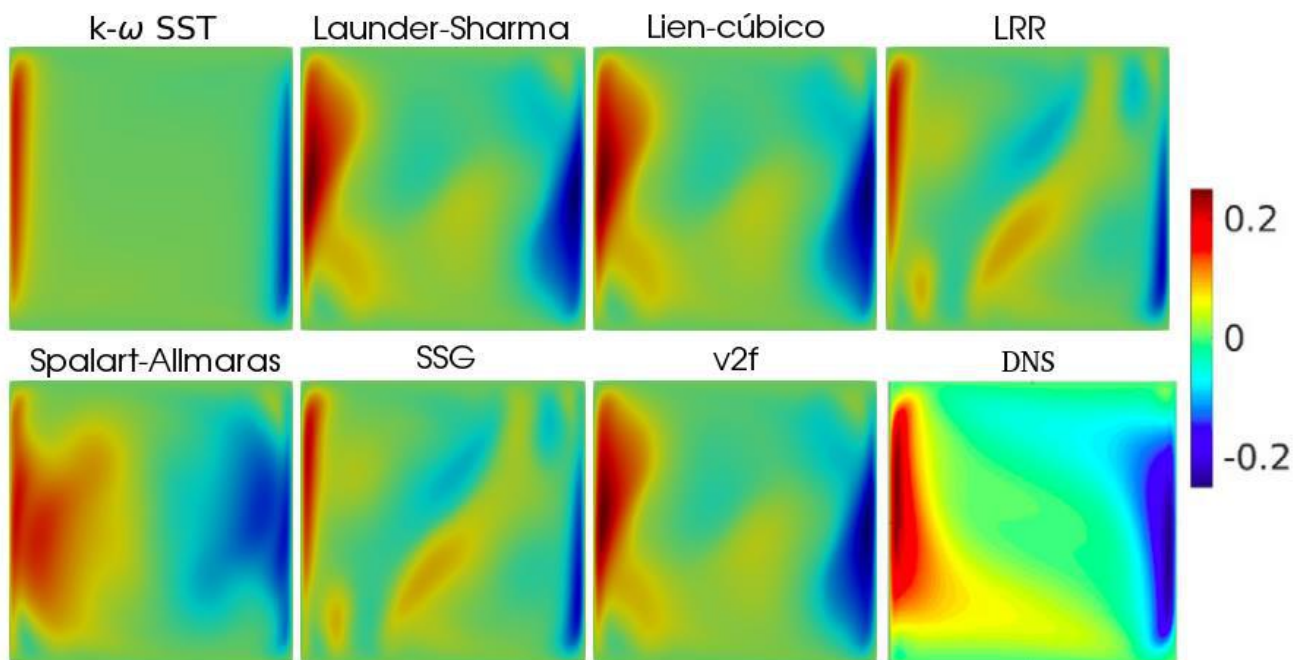
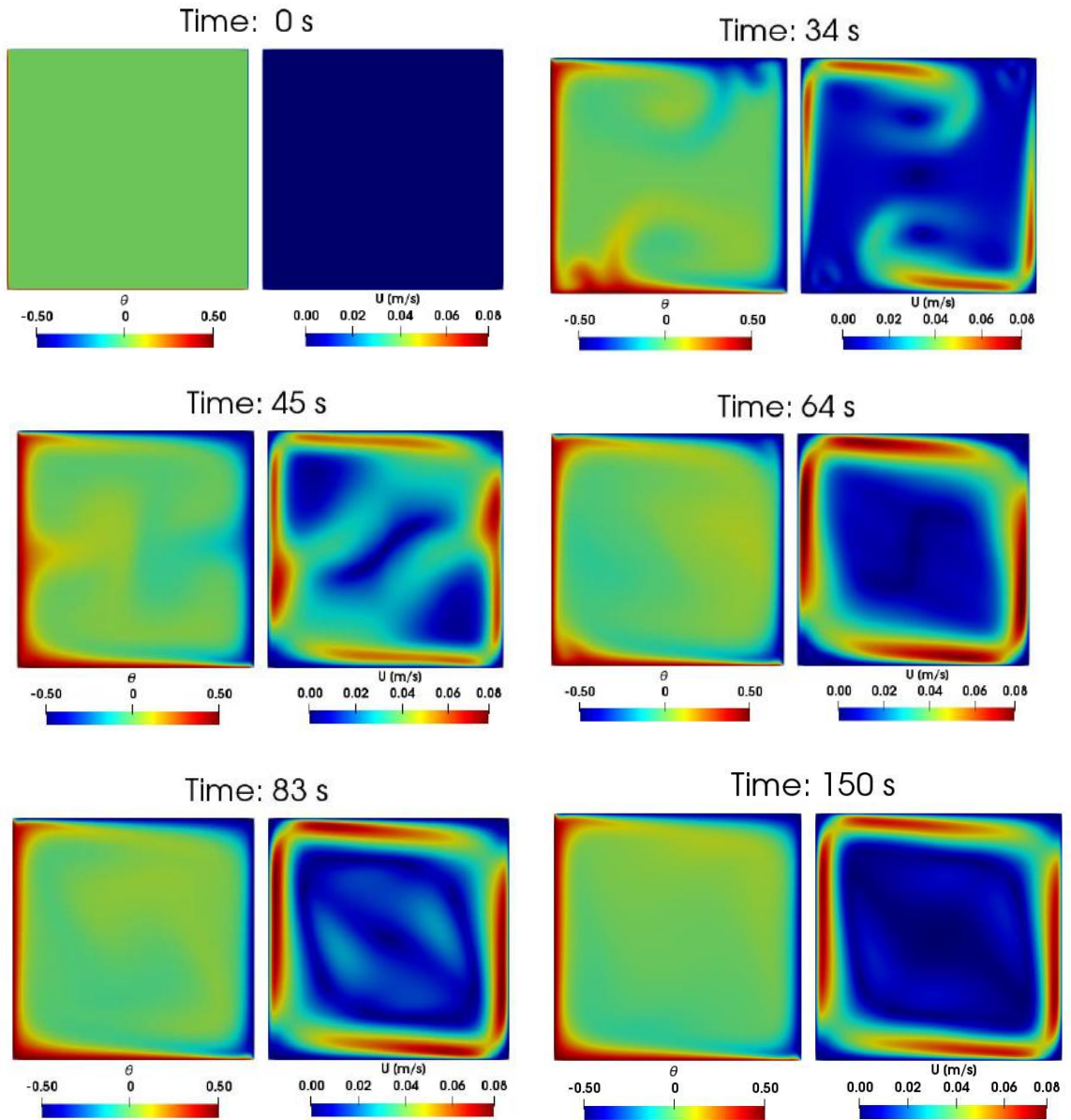


Figura 30: Avanço temporal do campo θ e velocidade com *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam* para o modelo de turbulência v^2f .



Coerentemente com as análises já feitas, pode-se ver que o escoamento segue um movimento circular onde o fluido ascende nas paredes mais quentes e desce ao longo das paredes mais frias. Esse comportamento também é previsto de acordo com Incropera (INCROPERA, 1994).

4.3. Análise do coeficiente de transferência de calor

No trabalho de Fabregat e Pallarès (2020), após obtenção dos dados DNS, correlações para o cálculo de Nusselt médio (Nu) nas placas verticais e horizontais foram propostas. Eles apresentaram as Equações 4.2 e 4.3, em que o subíndice h e v indicam horizontal e vertical, respectivamente.

$$Nu_h = 0,317Ra^{0,266} \quad (4.2)$$

$$Nu_v = 0,139Ra^{0,288} \quad (4.3)$$

Para $Ra = 10^7$, os valores para Nu_h e Nu_v foram respectivamente de 23,07 e 14,42 e, por consequência, valores de coeficiente de transferência de calor horizontal e vertical, h_h e h_v foram 1,780 W/m²K e 1,110 W/m²K, utilizando como comprimento característico o próprio lado da cavidade cúbica, conforme indicado por Fabregat e Pallarès (2020). A Tabela 14 traz a comparação entre os coeficientes de transferência de calor nas placas verticais e horizontais seguindo análise semelhante com o estudo base de DNS.

Para o cálculo do coeficiente convectivo, se utilizou o utilitário *wallHeatFluxIncompressible* disponível para OpenFOAM. Este calcula o fluxo de calor (q'') em cada uma das faces da cavidade térmica, com exceção das que são do tipo *empty*. Considerando a diferença de temperatura entre as superfícies isotérmicas e o fluido no interior da cavidade igual a 1,5 K, assim como no trabalho de Fabregat e Pallarès (2020), pode-se calcular o coeficiente de transferência de calor pela Equação 4.4 para as paredes verticais e horizontais.

$$h = \frac{q''}{\Delta T} \quad (4.4)$$

Na Tabela 15, pode ser visto que, com exceção do modelo de uma equação de Spalart-Allmaras, todos os outros modelos subestimaram os valores de Nusselt e dos coeficientes de transferência de calor. A Tabela 16 quantifica essa diferença, definindo como erro percentual o módulo da diferença entre valor RANS e valor DNS dividido pelo valor DNS.

Tabela 15: Valores de Nu e coeficiente convectivo para $Ra_L = 10^7$ para os diferentes tipos de modelos de turbulência com *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam*.

Modelo	Nu_h	Nu_v	$h_h \left(\frac{W}{m^2K} \right)$	$h_v \left(\frac{W}{m^2K} \right)$
DNS	23,07	14,42	1,780	1,110
$k - \omega SST$	19,803	12,319	1,532	0,953
Spalart-Allmaras	100,524	62,532	7,776	4,837
Cúbico	20,129	12,523	1,557	0,968
Launder-Sharma	20,115	12,513	1,556	0,967
$v^2 f$	20,129	12,523	1,557	0,968
LRR	20,495	12,749	1,585	0,986
SSG	20,129	12,513	1,556	0,968

Tabela 16: Erro relativo aos modelos de turbulência com o *solver buoyantBoussinesqPimpleFoam*.

Modelo	Erro relativo (%)			
	Nu_h	Nu_v	h_h	h_v
$k - \omega SST$	14,16	14,570	13,932	14,141
Spalart-Allmaras	335,73	333,647	336,853	335,761
Cúbico	12,748	13,155	12,528	12,792
Launder-Sharma	12,809	13,224	12,584	12,923
$v^2 f$	12,748	13,155	12,528	12,792
LRR	11,161	11,580	10,955	11,171
SSG	12,748	13,224	12,584	12,792

Ao se separar o valor de Nusselt médio em duas parcelas, uma para o escoamento vertical e outra horizontal, significa dizer que esses escoamentos podem ser aproximados a escoamentos independentes. Dessa forma, comparou-se os valores obtidos com aqueles indicados no Incropera para escoamentos livres (não confinados) em placas horizontais e placas verticais. A correlação para placas horizontais com superfície inferior aquecida é dada pela Equação 4.5 (INCROPERA, 1994).

$$Nu_h = 0,54Ra_L^{\frac{1}{4}} \quad (4.5)$$

Para o escoamento na vertical, a Equação 4.6 é utilizada (INCROPERA, 1994).

$$Nu_v = \left[0,825 + \frac{0,387Ra_L^{\frac{1}{6}}}{\left[1 + \left(\frac{0,492}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{27}}} \right]^2 \quad (4.6)$$

Os valores de Nu_h e Nu_v para essas equações, as quais são propostas para escoamento não confinado, foram respectivamente 30,36 e 23,48 para o valor de $Ra_L = 10^7$. Isso permite inferir que a transferência de calor em cavidades confinadas é menor que em superfícies abertas, em que as camadas limites são livres para se desenvolverem.

Fabregat e Pallarès (2020) não indicaram como utilizar as Equações 4.2 e 4.3 para estimar a taxa de transferência de calor na cavidade estudada. Estudos semelhantes citados pelos autores parecem seguir as mesmas abordagens. Identifica-se aqui, porém, que, possivelmente, utilizar um Nusselt global, e, por consequência, um coeficiente de transferência de calor global, seja uma melhor estratégia para avaliação da taxa de transferência de calor em projetos de cavidades térmicas.

5. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho reproduziu simulações RANS da transferência de calor em uma cavidade confinada, com duas paredes adjacentes aquecidas e duas opostas resfriadas, com simulações RANS, explorando a modelagem do empuxo e da turbulência.

A modelagem do empuxo nas simulações DNS de Fabregat e Pallarès (2020) seguiu a aproximação de Boussinesq. As presentes simulações RANS apresentaram resultados mais próximos dos dados de DNS com essa mesma metodologia.

Foram testadas diferentes classes de modelos de turbulência: o modelo de uma equação de Spalart-Allmaras (1994), os modelos LRN de viscosidade turbulenta linear $SST\ k - \omega$ de Menter (1994), $k - \varepsilon$ de Launder e Sharma (1972) e v^2f de Durbin (1991), o modelo LRN de viscosidade turbulenta não linear (cúbico) de Lien *et al.* (1996) e os modelos dos Tensores de Reynolds LRR (1975) e SSG (1991).

Diante do demonstrado, o modelo v^2f apresentou resultados semelhantes e mais próximos dos resultados DNS do que os demais modelos testados, quando se trata dos perfis de temperatura adimensional θ . Porém, o custo computacional do modelo v^2f , a exceção dos modelos RSM, foi relativamente maior, uma vez que precisa resolver uma equação de transporte extra.

Os modelos Launder e Sharma, Lien cúbico, LRR e SSG apresentaram perfis de temperatura semelhantes. Esse resultado, juntamente com o fato de v^2f ter apresentado os melhores resultados, indica a importância da correta predição da região da parede para a transferência de calor. Por outro lado, esses modelos apresentaram perfis de velocidade diferentes entre si, indicando um acoplamento fraco entre as equações de movimento e energia, sinalizando que o empuxo é o fenômeno dominante para a movimentação do fluido.

As simulações RANS subestimaram os coeficientes de transferência de calor nas superfícies horizontais e verticais, com a exceção do modelo de uma equação de Spalart-Allmaras. Comparações com correlações estudadas na disciplina de transferência de calor indicaram que a transferência de calor em cavidades confinadas é menor que em superfícies livres.

Mais investigações ainda precisam ser feitas para ratificar as conclusões aqui obtidas. Pode-se listar:

- Rodar as atuais simulações por mais que 150s e conferir que os resultados não mudam;
- Rodar as simulações com o solver compressível com outros modelos de turbulência e por mais tempo para ver se melhores resultados não são obtidos;
- Rodar simulações com Ra_L maiores e checar se as conclusões do presente trabalho se mantêm;
- Propor uma forma de calcular o fluxo de calor por um coeficiente global de transferência de calor por convecção natural nesse tipo de cavidade confinada, com base em mais pesquisas bibliográficas acerca de trabalhos que propuseram correlações para geometrias similares.

6. REFERÊNCIAS

BARAKOS, G., MITSOULIS, E., ASSIMACOPOULOS, D. "Natural convection flow in a square cavity revisited: Laminar and turbulent models with wall functions", **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 18, n. 7, p. 695–719, 1994. DOI: <https://doi.org/10.1002/flid.1650180705>. Disponível em:

<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/flid.1650180705>.

BEN-NAKHI, A., MAHMOUD, M. A. "Conjugate turbulent natural convection in the roof enclosure of a heavy construction building during winter", **Applied Thermal Engineering**, v. 28, n. 11, p. 1522–1535, 2008. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2007.08.011>. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359431107002906>.

CENGEL, YUNUS A., and J. M. C. **Fluid Mechanics: Fundamentals and Applications**. 4th. ed. Columbus, OH, [s.n.], 2017.

CHIEN, K.-Y. "Predictions of Channel and Boundary-Layer Flows with a Low-Reynolds-Number Turbulence Model", **AIAA Journal**, v. 20, n. 1, p. 33–38, jan. 1982. DOI: 10.2514/3.51043. Disponível em: <https://arc.aiaa.org/doi/10.2514/3.51043>.

DOL, H. S., HANJALIĆ, K. "Computational study of turbulent natural convection in a side-heated near-cubic enclosure at a high Rayleigh number", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 44, n. 12, p. 2323–2344, 2001. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0017-9310\(00\)00271-4](https://doi.org/10.1016/S0017-9310(00)00271-4). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931000002714>.

Elsevier. Scopus - Document search, 2018. URL <https://www.scopus.com/search/form.uri?display=basic>

DOS ANJOS, R.P., MEDRONHO, R.A., KLEIN, T.S. "Assessment of turbulence models for single phase CFD computations of a liquid-liquid hydrocyclone using OpenFOAM", **Journal of Turbulence**, v. 22, p. 79-113, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1080/14685248.2020.1846050>

FABREGAT, A., PALLARÈS, J. "Heat transfer and boundary layer analyses of laminar and turbulent natural convection in a cubical cavity with differently heated opposed walls", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 151, p. 119409, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.119409>. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S001793101935731X>.

HENKES, R. A. W. M., HOOGENDOORN, C. J. "COMPARISON EXERCISE FOR COMPUTATIONS OF TURBULENT NATURAL CONVECTION IN ENCLOSURES", **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, v. 28, n. 1, p. 59–78, 1995. DOI: 10.1080/10407799508928821. Disponible em:

<https://doi.org/10.1080/10407799508928821>.

HENKES, R. A. W. M., VAN DER VLUGT, F. F., HOOGENDOORN, C. J. "Natural-convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, cited By 195, v. 34, n. 2, p. 377–388, 1991. DOI: 10.1016/0017-9310(91)90258-G. Disponible em: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-29344474903&doi=10.1016%2F0017-9310%2891%2990258-G&partnerID=40&md5=167073ef6b64ec5f6229aa8f2d3bfc65>.

INCROPERA F. P.; Fundamentals of heat and mass transfer, J. Wiley & Sons, USA, 1994

IBRAHIM, A., SAURY, D., LEMONNIER, D. "Coupling of turbulent natural convection with radiation in an air-filled differentially-heated cavity at $Ra=1.5 \times 10^9$ ", **Computers & Fluids**, v. 88, p. 115–125, 2013. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2013.09.006>. Disponible em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045793013003423>.

JONES, W. P., LAUNDER, B. E. "The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 15, n. 2, p. 301–314, 1972. DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(72\)90076-2](https://doi.org/10.1016/0017-9310(72)90076-2). Disponible em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931072900762>.

KUYPER, R. A., VAN DER MEER, T. H., HOOGENDOORN, C. J., *et al.* "Numerical study of laminar and turbulent natural convection in an inclined square cavity", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 36, n. 11, p. 2899–2911, 1993. DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(93\)90109-J](https://doi.org/10.1016/0017-9310(93)90109-J). Disponible em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/001793109390109J>.

Launder, B. E., Reece, G. J., & Rodi, W. (1975). Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. *Journal of Fluid Mechanics*, 68(03), 537. Disponible em [doi:10.1017/s0022112075001814](https://doi.org/10.1017/s0022112075001814)

Lien, F. S., Chen, W. L., & Leschziner, M. A. (1996). Low-Reynolds-Number Eddy-Viscosity Modelling Based on Non-Linear Stress-Strain/Vorticity Relations. *Engineering Turbulence Modelling and Experiments*, 91–100. Disponível em doi:10.1016/b978-0-444-82463-9.50015-0

MAO, Y., ZHANG, Y. "Evaluation of Turbulent Models for Natural Convection of Compressible Air in a Tall Cavity", **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, v. 64, n. 5, p. 351–364, 2013. DOI: 10.1080/10407790.2013.806693. Disponível em: <https://doi.org/10.1080/10407790.2013.806693>.

MARKATOS, N. C., PERICLEOUS, K. A. "Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 27, n. 5, p. 755–772, 1984. DOI: [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(84\)90145-5](https://doi.org/10.1016/0017-9310(84)90145-5). Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0017931084901455>.

Notas em CFD, janeiro 2022. URL <http://notasemcfd.blogspot.com/>

6.2. Numerical Schemes, Janeiro 2022. URL: <https://www.openfoam.com/documentation/user-guide/6-solving/6.2-numerical-schemes>

SPALART, P., & ALLMARAS, S. (1992). A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. 30th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Disponível em doi:10.2514/6.1992-439

SHARIF, M. A. R., LIU, W. "Numerical study of turbulent natural convection in a side-heated square cavity at various angles of inclination", **Numerical Heat Transfer; Part A: Applications**, cited By 26, v. 43, n. 7, p. 693–716, 2003. DOI: 10.1080/10407780307342. Disponível em: <https://www.scopus.com/inward/record.uri?eid=2-s2.0-0242661000&doi=10.1080%2F10407780307342&partnerID=40&md5=fb34b5955d9c249181b6af6ec5940fa5>.

SHARMA, A. K., VELUSAMY, K., BALAJI, C. "Interaction of turbulent natural convection and surface thermal radiation in inclined square enclosures", **Heat and Mass Transfer**, v. 44, n. 10, p. 1153–1170, 2008. DOI: 10.1007/s00231-007-0353-5. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s00231-007-0353-5>.

SHATI, A. K. A., BLAKEY, S. G., BECK, S. B. M. "An empirical solution to turbulent natural convection and radiation heat transfer in square and rectangular enclosures", **Applied Thermal Engineering**, v. 51, n. 1–2, p. 364–370, 2013. DOI:

10.1016/j.applthermaleng.2012.09.022. Disponível em:

<http://dx.doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2012.09.022>.

VALENCIA, L., PALLARES, J., CUESTA, I., *et al.* "Turbulent Rayleigh–Bénard convection of water in cubical cavities: A numerical and experimental study", **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 50, n. 15, p. 3203–3215, 2007. DOI:

<https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2007.01.013>. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931007000804>.

VERSTEEG, H. K., and W. M. **No Title**. [S.l: s.n.], 2007.

WU, T., LEI, C. "On numerical modelling of conjugate turbulent natural convection and radiation in a differentially heated cavity", **International Journal of Heat and Mass Transfer**,

v. 91, p. 454–466, 2015. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.07.113>. Disponível em:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0017931015008315>.

Wolf Dynamics, acesso em 01 de janeiro de 2022 às 19:30, disponível em:

<http://www.wolfdynamics.com/training/introOF8/all.pdf>

Wikipédia. Openfoam, janeiro 2022. URL <https://pt.wikipedia.org/wiki/OpenFOAM>.

7. APÊNDICE 1

Esta seção tem como finalidade explicar ao leitor como o controle da simulação é feita dentro do OpenFOAM e teve como principal fonte de inspiração o blog “Notas em CFD” produzido pelo professor da UFRJ, Luiz Fernando.

O código a seguir faz parte do arquivo *controlDict* e é um arquivo de dicionário. Assim como o *fvScheme*, se inicia com um cabeçalho onde a versão, formato dos dados, classe e o nome do objeto devem ser determinados.

Figura 31: Modelo de ControlDict no OpenFOAM

```
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    object       controlDict;
}
// * * * * *

application    simpleFoam;
startFrom      startTime;
startTime      0;
stopAt         endTime;
endTime        1000;
deltaT         1;
writeControl   timeStep;
writeInterval  50;
purgeWrite     0;
writeFormat    ascii;
writePrecision 6;
writeCompression uncompressed;
timeFormat     general;
timePrecision  6;
runTimeModifiable yes;

// *****
```

A seguir haverá a explicação de cada uma das entradas necessárias para que haja inicialização dos parâmetros de controle da simulação.

- ***application***

Chama o nome do aplicativo ou mais popularmente chamado de *solver*

- ***startFrom***

Controla o instante de tempo que se terá como ponto de partida da simulação. Três opções são disponíveis, porém na prática costuma-se utilizar a entrada *latestTime*, que inicia a simulação a partir do último diretório de tempo que foi criado. Essa estratégia é muito útil quando por exemplo, a solução da simulação começa a divergir a partir de um determinado tempo. Na prática, pode-se apagar todos os tempos que foram gravados após a divergência e alguns um pouco antes, para que se reinicie a simulação com novos ajustes na tentativa de se eliminar a divergência numérica. Para este trabalho, se utilizou a entrada *startTime*.

- ***startTime***

Uma das entradas do *startFrom* é *startTime*, e, quando isso acontece, o valor desse tempo deve ser indicado nessa entrada. Com isso, o que se pode fazer é no início da simulação utilizar o código similar ao demonstrado como exemplo de *controlDict*. E caso houver divergência numérica, alterar o *startFrom* para *latestTime* e seguir o procedimento descrito no item anterior.

- ***stopAt***

Como o nome indica, aqui determina-se o instante em que a simulação deve encerrar onde a entrada mais comumente usada é *endTime*.

- ***endTime***

Aqui define-se o valor numérico onde a simulação deve terminar, por exemplo, se desejar simular um problema que na natureza dura 10 segundos, o valor de *endTime* deve ser 10.

- ***deltaT***

Passo de tempo da discretização numérica do termo temporal nas equações de transporte.

- ***writeControl***

Algumas opções de entrada são disponíveis aqui, porém uma das mais usuais é *timeStep* indicando que usará a quantidade de intervalos de tempo determina no *writeInterval* para escrever os arquivos.

- ***writeInterval***

Determina o período em que os resultados da simulação devem ser escritos, por exemplo no código apresentado deseja-se salvar a simulação a cada 50 passos de tempo. A escolha desse valor pode seguir a seguinte ideia: primeiro define-se de quanto em quanto tempo se deseja salvar os resultados da simulação, por exemplo a cada 1 segundo. Depois define-se o passo de tempo (*deltaT*), como 0,5 segundo. O valor que deve ser especificado no *writeInterval* é a divisão entre o tempo desejado para salvar os dados e o passo de tempo escolhido, ou seja, 2.

- ***purgeWrite***

Especifica quantos valores de resultados escritos sejam guardados. Para casos transientes é um parâmetro muito útil para poupar memória no CPU. Por exemplo, em uma simulação transiente com abordagem DNS no tratamento das equações. Suponha que a malha computacional tenha 14 milhões de elementos, e, além disso, imagine que se tenha um *endTime* igual a 10 segundos, *deltaT* de 0,5 e *writeInterval* igual 2. Isso fará com que se tenha salvo 10 arquivos com os resultados das simulações, acarretando uma quantidade significativa de alocação da memória em desktops e notebooks convencionais. Porém, se no *purgeWrite* tiver como entrada o valor 2, apenas os dois últimos resultados finais permanecerão escritos. Para ficar mais claro, a simulação salvará inicialmente os tempos 1 e 2. Quando se chegar ao tempo 3 segundos, o tempo 1 será apagado, restando apenas os dois últimos tempos, ou seja, 2 e 3. Assim, ao final se terá apenas os arquivos referentes ao tempo 9 e 10 segundos.

- ***writeFormat***

Indica o formato do arquivo, onde as opções são *ascii* e *binary*. Usualmente se utiliza *ascii* como padrão.

- ***writePrecision***

Indica a quantidade de algarismos significativos dos resultados quando a entrada do *writeFormat* é *ascii*.

- ***runTimeModifiable***

As opções de entrada são *true* ou *false*. Em termos diretos, essa é uma entrada onde permite ou não a modificação do *controlDict* durante a simulação. Recomenda-se usar como padrão *true*, pois durante uma simulação pode ser necessário a modificação de algum parâmetro, como por exemplo, *deltaT* ou número máximo de Courant, *maxCo*.

- ***adjustTimeStep***

As opções de entrada são *yes* or *no*. Permite ou não o ajuste do passo de tempo da simulação conforme a restrição do valor de *maxCo*.

- ***maxCo***

Determina o valor máximo do número de Courant, que mede a taxa na qual a propriedade ϕ é transportada pela influência do fluxo de um campo. Além disso é um fator limitante na performance dos esquemas numéricos temporais, especialmente quando são utilizados esquemas explícitos.

8. APÊNDICE 2

Esta seção tem como finalidade ceder ao leitor uma melhor compreensão da forma como o OpenFOAM trata os esquemas numéricos em suas simulações.

Cada um dos termos da equação de transporte deve ter um método específico ou esquema de discretização e interpolação determinado no arquivo *fvSchemes*.

De acordo com o site openfoam.com, o arquivo começa com o dicionário *foamFile* e posteriormente há a chamada de mais outros 7 dicionários: *ddtSchemes*, *gradSchemes*, *divSchemes*, *laplacianSchemes*, *interpolationSchemes*, *snGradSchemes* e *wallDist*

- ***ddtSchemes***

Discretiza o termo da derivada temporal dos modelos. Porém, vale lembrar que quando se trata de um problema em estado estacionário, deve ser usado o *steadyState* como opção. Porém, para casos transientes algumas opções são possíveis como por exemplo o método *Euler* que é explícito e de primeira ordem, o qual foi utilizado durante este trabalho, ou, o método *backward* que é de segunda ordem e implícito. Outro método também é o *crankNicolson* utilizado em problemas transientes e sendo este um esquema de 2ª ordem.

- ***gradSchemes***

São os esquemas escolhidos para o gradiente. De forma prática há basicamente três grandes grupos que são encontrados no OpenFOAM, sendo estes *Gauss*, *leastSquare* e *fourth*. Os dois primeiros são de segunda ordem e o último de quarta ordem. Vale salientar que dentro do método de Gauss ainda há uma subdivisão de mais dois métodos de interpolação, os quais são *linear* ou *upwind* sendo respectivamente suas ordem 1 e 2.

Em geral o padrão (*default*) usado como esquema de discretização para este termo é de segunda ordem, ou seja, *Gauss linear*.

- ***divSchemes***

São os esquemas associados aos divergentes. Esse costuma ser o termo onde se há uma maior quantidade de métodos de interpolação disponíveis, uma vez que se refere ao termo advectivo da equação de transporte que costuma ser um dos maiores desafios das simulações numéricas em CFD. No código, seus termos tem entradas $div(phi,\phi)$, onde ϕ é uma propriedade genérica qualquer transportada podendo ser velocidade (U), energia cinética turbulenta (k) e tantas outras. Por sua vez a entrada phi representa o fluxo volumétrico da velocidade nas faces das células para um escoamento incompressível e o fluxo mássico para escoamento compressível.

Todos os esquemas para o termo advectivo são baseados na integração de Gauss utilizando o fluxo phi e o campo advectado ϕ que foi interpolado a partir de um dos tipos de esquemas de interpolação selecionado, que podem ser *linear*, *linearUpwind* e etc.

Como dito anteriormente, existe uma gama de opções de métodos de interpolação, porém alguns merecem mais atenção por sua grande utilização.

De forma sucinta e direta, tais métodos podem ser descritos como a seguir:

- *linear*: segunda ordem e não limitado (*unbounded*)
- *linearUpwind*: segunda ordem e não limitado, porém é mais estável que o método *linear* e requer que o gradiente da propriedade ϕ seja especificado.
- *LUST*: Uma mistura entre o método *linear* e *linearUpwind* na proporção de 75% e 25%, respectivamente. Também é exigido a especificação do gradiente da propriedade transportada.
- *limitedLinear*: esse método requer um coeficiente que varia de 0 até 1. Onde 1 representará o método puro de primeira ordem *upwind* e 0 o método puro de segunda ordem *linear*.
- *Upwind*: primeira ordem, limitado (*bounded*) e por consequência totalmente estável, porém com baixa acurácia.

Para as simulações feitas durante este trabalho, optou-se pelo método *upwind*, pois apesar de ser um método de primeira ordem, é indicado pelo manual *wolfDynamics* a utilização do mesmo para casos RANS.

- ***laplacianSchemes***

São os esquemas associados aos termos laplacianos das equações de transporte. Por exemplo, na equação de quantidade de momento linear o termo típico laplaciano é $\nabla \cdot (\mu \nabla U)$. Esse termo representa o transporte por difusão de uma propriedade ϕ . A única escolha de esquema disponível é o método de Gauss, onde alguns incrementos podem ser adicionados relacionados ao modo como os vetores normais à superfície serão tratados. A típica entrada usada é *Gauss linear corrected*, que também foi a escolhida no trabalho, porém outras opções são disponíveis como mostrado na Tabela 16.

Tabela 17: Comportamento do vetor normal à superfície para o termo laplaciano.

Esquema	Comportamento numérico
<i>corrected</i>	Não limitado, segunda ordem, conservativo
<i>uncorrected</i>	Limitado, primeira ordem, não conservativo
<i>limited</i>	Mistura do esquema <i>corrected</i> e <i>uncorrected</i>
<i>bounded</i>	Primeira ordem para escalares limitados, por exemplo fração mássica
<i>fourth</i>	Não limitado, quarta ordem e conservativo

- ***interpolationSchemes***

Escolha do tipo de esquema de interpolação que será usado para calcular o fluxo ϕ nas faces. Existem diversos esquemas de interpolação no OpenFOAM, majoritariamente os tutoriais demonstram que existem uma tendência na utilização da interpolação linear, cuja utilização também foi feita durante este trabalho.

- ***wallDist***

Para problemas turbulentos é de extrema importância se calcular a distância do centroide da primeira célula mais próxima à parede, e, para isso, o dicionário *wallDist* deve ser inserido. O método mais utilizado é o chamado *meshWave*, pois é um método rápido para se calcular tal distância.