

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
OBSERVATÓRIO DO VALONGO

CONFERE COM O ORIGINAL
Ozilda S. da Costa
Chefe Sec. Ativ. Gerenciais - IGEO/CCMN
Matr. 6168753

ANÁLISE ESTATÍSTICA DA RELAÇÃO
MASSA-LUMINOSIDADE NA VIZINHANÇA SOLAR

Gustavo Frederico Porto de Mello

Orientador :

José Augusto Buarque de Nazareth

Dezembro 1986

ETERNAL LIGHT

It's strange that I look everywhere
and see the same unfathomable abyss
of time and space

And it's strange to think of the situation
of each tiny particle within the Cosmos
their unreachable solitude

Maybe there are not only "maybes"
I draw my attention to starlight
trying to unravel the ultimate foundation
of everything I see

I know it must be hidden somewhere
between day and night
and I just know
how it calls me
how it tunes at what I am
just like it spreads all around

And we feel separated
by these huge and quiet distances
we feel we just should not be here
as we should be floating free and between
these islands of something
we simply name
stars

(Gustavo F. P. de Mello , 1984)

A G R A D E C I M E N T O S

A todos aqueles que já se bateram por um sonho

Ao Prof. José Augusto, que a tudo tornou possível com amizade, paciência e bom humor que nunca falharam

A Jorge Ramiro , cujo apoio nunca faltou quando precisei

A Jorge Albuquerque, responsável por tanto do que sou hoje

A todos os meus colegas do Observatório do Valongo e da Ilha do Fundão, com quem convivi por estes quatro anos , principalmente aos meus colegas de turma , e mais principalmente ainda a André Grinsztejn , cuja presença constante como pessoa sempre me impulsionou , e a Gil , a cujas críticas ferozes sobrevivi , sendo por elas feito mais forte e mais gente

A todos aqueles que porventura tenham feito algo que julgassem importante, em todas as eras e todos os lugares

Gustavo

Í N D I C E

Índice	1
Resumo	2
I - Introdução	3
II - A Amostra	
II-1 Critérios de Seleção	5
II-2 Análise dos Erros	11
II-2-1 Erro na Magnitude Absoluta Bolométrica	14
II-2-2 Erro em T_{eff} e nos índices (Fe/H)	14
II-2-3 Determinações de Massa	15
III - As Relações Massa-Luminosidade Empíricas	
III-1 Expectativas Teóricas	17
III-2 Análise por Mínimos Quadrados	20
III-3 Testes de Homogeneidade	31
III-4 Teste das Médias de Aspin-Welch	32
III-5 A Influência Explícita da Metalicidade	34
III-6 O Teste de Qui-Quadrado	35
III-7 Cálculo dos Testes de Aspin-Welch	39
III-8 Uma Crítica sobre a Amostra	40
III-9 Um Teste Não-Paramétrico	41
III-10 Conclusões	45
Apêndice	46
Referências	49
Errata	50

R E S U M O

Através de uma amostra selecionada de alta qualidade, representando a vizinhança solar, e contendo somente objetos de paralaxes precisas e correções bolométricas bem determinadas, realizamos uma análise estatística da estrutura fina da relação massa-luminosidade empírica (RM-LE, de agora em diante), inicialmente propondo o parâmetro de metalicidade (Fe/H), taxa relativa de abundância do ferro e hidrogênio em relação ao valor solar, como critério de estratificação da amostra. A amostra utilizada foi selecionada de um trabalho de Perrin et al (38), que investigaram aspectos detalhados do diagrama HR na vizinhança solar. Neste artigo, modelos evolutivos teóricos foram comparados com o diagrama HR observacional, e a cada estrela foi atribuída a massa do modelo que melhor ajustava sua posição no diagrama, levando em conta o conteúdo metálico.

Selecionamos deste trabalho os objectos identificados como pertencentes à classificação MK V. A amostra total foi escalonada em grupos de acordo com o índice metálico (Fe/H). Calculamos regressões lineares no plano (M_{bol} , $\log m/m_{\odot}$) para cada um dos grupos de metalicidade, e para a amostra como um todo. Os resultados para cada grupo foram comparados ao ajuste sobre a amostra total. Apresentamos também uma comparação com uma expressão geral obtida por Cester et al (6), em um estudo envolvendo um grande número de estrelas.

Após testes de homogeneidade e comparações estatísticas, concluímos que a amostra em questão não é suficiente para estabelecer de forma conclusiva a metalicidade (Fe/H) como critério de estratificação da RM-LE.

Obtivemos uma regressão bilinear ($M_{bol} \times (\log m/m_{\odot}, (Fe/H))$), que foi comparada de maneira ilustrativa a dois modelos teóricos da relação massa-luminosidade na Sequência Principal de Idade Zero (SPIZ, de agora em diante), de Caputo (3), e um trabalho clássico de Copeland et al (9).

PALAVRAS-CHAVE : Relação Massa-Luminosidade, Magnitudes Absolutas
Massas Estelares, Modelos Estelares

I - INTRODUÇÃO

A RMLE tem sido investigada através deste século do modo exaustivo, e por tal número de autores a ponto de julgarmos ser aparentemente estéril qualquer estudo adicional do assunto. Investigações da RMLE para componentes de sistemas estelares binários foram publicadas por Kuiper (30), Petrie (39), van de Kamp (41), Strand e Hall (40), Eggen (13), (15), (16), Harris et al (19), Cester (5), McCluskey e Kondo (31), Cester et al (6), entre outros. A expressão derivada por McCluskey e Kondo foi utilizada com sucesso na década passada, e foi obtida em um trabalho detalhado, envolvendo uma amostra grande e investigando a possibilidade de aplicação do método de mínimos quadrados capaz de utilizar sistemas binários para os quais a soma das massas é conhecida mas a razão das massas mal determinada ou desconhecida. A mais recente investigação da RMLE corresponde a Cester et al (6), que levou em consideração progressos recentes no conhecimento de sistemas binários.

Os sólidos pilares teóricos estabelecidos por Eddington acerca da teoria de interiores estelares, em seu clássico de 1926 "The Internal Constitution of the Stars" (41), receberam seu primeiro apoio de peso com a descoberta do relacionamento experimental entre a massa e a luminosidade das estrelas, que também proveu a primeira objeção grave contra a então largamente aceita hipótese de evolução estelar de gigantes para anãs.

Uma vez que a pressão, e portanto a taxa de geração de energia, crescem rapidamente com o aumento da massa, o relacionamento entre massa e luminosidade é uma consequência dos gradientes de pressão e temperatura nos interiores estelares, e sua validade se estende a todas as estrelas de interior quimicamente homogêneo.

Heintz (23) fornece uma discussão detalhada sobre os aspectos globais da relação. Com as formulações usuais sobre o peso molecular médio, a opacidade, etc., uma relação na forma

$$L = M^a R^b \mu^c \quad (1)$$

sempre pode ser derivada. O expoente da massa M é cerca de 4, o do raio R somente $-1/2$. Embora o peso molecular médio contribua com o expoente elevado de $c \sim 15/2$, ele não predomina sobre a dependência da massa, sendo porém suficiente para prevenir uma relação na forma

$$L \sim M^a \quad (2)$$

(função exclusiva da massa) com um único valor de a . Resumimos esta noção da seguinte maneira: parâmetros de composição devem ter efeito sensível sobre a RMLE.

Ao passo que temos verificado sensíveis melhoras na qualidade dos elementos orbitais de estrelas binárias, únicos objetos capazes de se-

rem confiavelmente utilizados na RMLE, o fato é que a qualidade dos dados disponíveis está longe de ser satisfatória. Sendo ainda o único modo confiável e prático de se inferir distâncias, a paralaxe astrométrica é a principal fonte de erro em determinações quer de massas, quer de magnitudes absolutas. Cester et al (6) conclui brevemente que todo esforço deve ser feito para que se prossiga o inestimável trabalho astrométrico, encorajando-se observadores a se dedicarem a este campo.

Por si só, este fato já nos reduz a uma certa condição de impotência, que é ainda mais agravada pelo caráter unicamente estatístico da RMLE. Devemos ter em mente que a RMLE é simplesmente uma correlação média entre dois parâmetros importantes, mas baseados em estrelas diferentes e estágios evolucionários diferentes. Isto torna a RMLE, no mínimo, cronologicamente inhomogênea, sem falar nas conhecidas indeterminações das correções bolométricas na parte fria do diagrama HR. Uma discussão sobre as estrelas de baixa massa, objetos sempre problemáticos nas RMLE, pode ser encontrada em McCluskey e Kondo (31).

Em resumo, a RMLE não se propõe a fornecer o valor da massa para uma dada estrela, mas é útil para estudos estatísticos onde quer que as massas sejam desconhecidas.

Neste trabalho, nos propomos a analisar a RMLE sob um ponto de vista estatístico, e usando uma amostra escolhida com grande cuidado, buscamos evidenciar a influência da metalicidade na estrutura fina da RMLE na vizinhança solar.

II-1 Critérios de Seleção

Uma vez que estamos interessados em uma análise detalhada da natureza da RMLE na vizinhança solar, tomamos um cuidado extremo na escolha da amostra. Uma busca na literatura revelou que, tanto quanto sabemos, nenhum autor examinou a estrutura da RMLE levando em conta efeitos de abundância, ou mesmo tentando justificar estatisticamente a validade de expressá-la em função de parâmetros de metalicidade.

Tentando justificar a precisão almejada na nossa proposta, restringimos nossa amostra de modo a deixar claro que qualquer aplicação posterior das relações obtidas deve ser mantida dentro dos critérios em que a amostra foi escolhida, i.e, paralaxes precisas e correções bolométricas bem determinadas.

Todos os dados utilizados foram retirados de Perrin et al (38) e compilados pelos mesmos. Referimos o leitor a este artigo para referências quanto aos dados e respectivas fontes bibliográficas. Expomos aqui em linhas gerais os critérios de seleção.

As estrelas escolhidas deveriam possuir:

- Índice metálico (Fe/H) preciso
- Magnitude absoluta bolométrica confiável

As estrelas compiladas por Perrin et al (38) foram retiradas do catálogo de Lausanne (Morel et al (33)). Deste catálogo somente um grupo seletivo de estrelas poderia ser aproveitado. Foram escolhidas estrelas contidas nos catálogos de Gliese (18) e Woolley et al (43). As estrelas com paralaxe $\pi < 0.040''$ foram omitidas para que pudessemos obter boas magnitudes absolutas. Contudo, em alguns casos específicos, estrelas com paralaxes inferiores a este valor foram mantidas, como no caso de estrelas da População II extrema, devida à importância dessas estrelas para a história química da nossa galáxia, bem como na definição da parte deficiente em metais da nossa RMLE.

Estrelas com tipos espectrais anteriores a F e posteriores a K no catálogo de Lausanne foram omitidas, uma vez que suas magnitudes bolométricas e índices (Fe/H) não tem precisão suficiente.

Mais ainda, foram escolhidas somente estrelas não evoluídas ou pouco evoluídas, uma vez que os diagramas HR teóricos de Hejlesen (24) que foram utilizados para a obtenção de massas das estrelas utilizadas não acompanham a evolução dos modelos estelares além do ramo de subgigantes. De qualquer modo, o catálogo de Lausanne contém poucas estrelas G e K evoluídas com boas paralaxes. Assim sendo, a amostra recolhida por Perrin et al (38) reunia 138 estrelas. Nossa restrição adicional provém do fato de termos nos retido à classificação MK V, ou seja, nossa RMLE se reduz à sequência principal.

O resultado final dos critérios de seleção é uma amostra de 106 objetos, incluindo o Sol, com tipos espectrais F, G e K e classe de luminosidade V .

A tabela 1 lista os dados compilados divididos em quatro grupos de conteúdo metálico decrescente . O trabalho de Perrin et al (38) separava as estrelas mais deficientes em metal em dois grupos : $-0,90 \leq (Fe/H) < -0,60$ e $-2,00 \leq (Fe/H) < -0,90$. Fomos obrigados a fundir estes grupos em um só, pelo risco de perder significância estatística devido ao número reduzido de objetos que manteríamos em cada grupo, naquela estratificação .

O cabeçalho da tabela 1 se segue :

- Coluna 1 - o número HD ;
- Coluna 2 - o tipo espectral revisado por Jaschek (25) ;
- Coluna 3 - a paralaxe trigonométrica segundo Woolley et al (43) para $\pi > 0,040''$, e Jenkins (26)(27) para $\pi < 0,040''$;
- Coluna 4 - o erro médio $\overline{\sigma}_{bol}$ na magnitude absoluta bolométrica ;
- Coluna 5 - a magnitude absoluta bolométrica ;
- Coluna 6 - a massa da estrela segundo Perrin et al (38), obtida a partir dos modelos evolucionários de Hejlesen (24), atribuindo-se à estrela a massa do modelo que se conforma com sua posição no diagrama HR, levando-se em conta a metalicidade ;
- Coluna 7 - a diferença logarítmica de abundância em relação ao valor solar, a partir de informações elaboradas do catálogo de Lausanne , Perrin (35)(36)(37) e Hearnshaw (21)(22) ;
- Coluna 8 - O logaritmo da temperatura efetiva, oriunda das fontes expostas acima ;
- Coluna 9 - as componentes da velocidade espacial U , V e W (em Kms¹), U na direção do centro galáctico , V na direção da rotação galáctica e W na direção do pólo norte galáctico, segundo Woolley et al (43) para estrelas com $\pi > 0,040''$ e Eggen (12)(14) para as estrelas com $\pi < 0,040''$;
- Coluna 10 - A excentricidade da órbita galáctica, computada com a fórmula dada por Woolley (42) e adotando os componentes da velocidade solar $(U,V,W)_{\odot} = (+9,+12,+7)$ (Delhaye(10))

Notas à tabela 1 :

- HD 128620 e HD 128621 : média adotada $(Fe/H) = +0,17$;
- HD 186408 e HD 186427 : média adotada $(Fe/H) = +0,16$;
- símbolo " : " ao final do valor de $\log m/m_{\odot}$; massa mal determinada pelas seguintes razões :
 - massa de estrelas situadas 2 mags acima da SPIZ, estrelas situadas 0,2 mag abaixo da SPIZ, e estrelas situadas 0,2 mag acima da trajetória evolucionária da menor massa considerada

Para estrelas situadas abaixo da SPIZ, a massa dada é a determinação mais provável levando em conta as barras de erro em M_{bol} e T_{eff} . Para as estrelas situadas acima da trajetória evolucionária da menor massa

TABELA I

HD	T.S.	π	$\sigma_{M_{bol}}$	M_{bol}	$\log m/m_{\odot}$	(Fe/H)	$\log T_{eff}$	U	V	W	e
GRUPO 1		: +0,15	< (Fe/H) <		+0,50						
30652	F6V	0,132	0,13	3,77	+0,10	+0,17	3,805	-26	-14	+4	0,05
34411	G0V	0,067	0,29	3,77	+0,05	+0,22	3,768	-77	-44	+5	0,23
75732	G8V	0,074	0,31	5,16	-0,07	+0,23	3,716	-38	-19	-10	0,09
102870	F8V	0,100	0,17	3,57	+0,09	+0,27	3,783	+37	+3	+7	0,16
114710	G0V	0,120	0,17	4,61	+0,05	+0,16	3,778	-45	+10	+8	0,16
120136	F7V	0,057	0,52	3,29	+0,14	+0,28	3,810	-36	-23	-6	0,09
128620	G2V	0,743	0,03	4,26	+0,025	+0,22	3,763	-29	+2	+14	0,09
128621	K0V	0,743	0,03	5,50	-0,025	+0,12	3,729	-	-	-	-
145675	K0V	0,063	0,36	5,54	-0,025	+0,22	3,716	+23	-7	-9	0,10
160691	G5V	0,076	0,47	4,40	-0,01	+0,41	3,748	-15	-7	-3	0,03
186408	G3V	0,036	0,45	3,63	+0,06	+0,21	3,763	+13	-29	-1	0,10
186427	G5V	0,036	0,45	3,92	+0,04	+0,10	3,763	-	-	-	-
GRUPO 2		: -0,15	< (Fe/H) <		+0,15						
3651	K0V	0,100	0,19	5,71	-0,08	-0,06	3,725	+38	-20	+11	0,14
3765	K2V	0,072	0,32	6,39	-0,19	-0,06	3,707	+21	-76	-17	0,26
5015	F8V	0,064	0,56	3,75	-0,01	+0,08	3,773	-7	+21	+12	0,16
10307	G2V	0,087	0,22	4,59	-0,06	+0,12	3,763	-36	-27	0	0,10
19373	G0V	0,086	0,23	3,69	0,00	+0,05	3,773	-80	-20	+24	0,21
20630	G5V	0,107	0,18	4,88	-0,075	+0,08	3,753	-22	-4	-5	0,05
32147	K3V	0,109	0,12	6,09	-0,15	+0,02	3,677	+1	-58	-13	0,19
32537	F0V	0,049	0,90	3,42	+0,12	+0,10	3,857	-5	-11	-12	0,01
39587	G0V	0,101	0,19	4,36	-0,03	+0,05	3,778	+14	+3	-9	0,10
48682	G0V	0,068	0,34	4,35	-0,04	+0,15	3,773	+25	+7	-3	0,14
84737	G2V	0,066	0,29	4,12	-0,04	-0,04	3,768	+9	-5	-15	0,06
86728	G4V	0,054	0,61	3,92	-0,03	-0,08	3,758	-61	-53	+15	0,22
95128	G0V	0,074	0,31	4,33	-0,05	-0,02	3,768	-24	-3	+2	0,06
98230	G0V	0,127	0,44	5,23	-0,03	-0,12	3,763	-1	-25	-20	0,06
98231	G0V	0,127	0,44	4,82	0,00	-0,01	3,783	-1	-25	-19	0,06
101501	G8V	0,110	0,24	5,44	-0,06	-0,14	3,739	+8	-16	-4	0,05
109358	G0V	0,109	0,18	4,39	-0,05	-0,04	3,768	-33	-4	+2	0,08
115043	G1V	0,050	0,88	5,23	-0,02	-0,10	3,773	+12	0	-7	0,09

115383	GOV	0,077	0,26	4,60	-0,03	+0,10	3,773	-29	+2	-19	0,09
117176	G5V	0,041	0,48	2,85	+0,13	-0,11	3,739	+17	-70	-8	0,24
131977	K5V	0,180	0,15	6,63	-0,15	+0,01	3,665	+41	-19	-34	0,15
141004	GOV	0,094	0,17	4,23	-0,04	+0,03	3,773	-49	-23	-41	0,12
142860	F6V	0,081	0,32	3,39	+0,03	-0,09	3,789	+63	-38	-28	0,23
146233	G1V	0,061	0,27	4,35	-0,05	+0,02	3,768	+29	-18	-28	0,12
149661	KOV	0,090	0,36	5,35	-0,11	+0,01	3,729	+1	-1	-33	0,06
155885	K1V	0,189	0,16	6,25	-0,18	-0,01	3,707	0	-30	-7	0,08
155886	KOV	0,189	0,16	6,25	-0,18	+0,09	3,707	-1	-30	-6	0,08
156026	K5V	0,178	0,15	7,01	-0,25	-0,04	3,657	-1	-32	-7	0,09
165341	KOV	0,195	0,08	5,51	-0,10	+0,02	3,725	+7	-20	-19	0,06
166620	K2V	0,093	0,18	5,92	-0,15	-0,14	3,698	+17	-30	0	0,11
185395	F4V	0,056	0,52	3,21	+0,08	+0,04	3,810	-9	-25	+10	0,05
191408	K3V	0,177	0,15	6,23	-0,125	-0,07	3,690	-119	-49	+49	0,33
192310	KOV	0,120	0,27	5,88	-0,15	-0,03	3,698	-71	-11	-16	0,19
193664	G3V	0,067	0,24	5,03	-0,02	+0,06	3,778	-34	-6	-18	0,08
201091	K5V	0,296	0,04	6,92	-0,18	0,00	3,642	-90	-54	-8	0,28
210027	F5V	0,075	0,22	3,12	+0,05	-0,10	3,775	-16	-6	-8	0,03
215648	F7V	0,048	0,47	2,53	+0,15	-0,05	3,768	+6	-39	-37	0,12
217014	G4V	0,073	0,27	4,74	-0,07	+0,12	3,758	-13	-28	+15	0,07
219134	K3V	0,147	0,09	6,00	-0,15	+0,04	3,681	-55	-40	-15	0,18
219623	F8V	0,036	0,45	3,34	+0,03	-0,10	3,783	+7	-28	-27	0,08

GRUPO 3 : $-0,60 < (Fe/H) \leq -0,15$

3443	G5V	0,074	0,31	5,52	-0,17	-0,16	3,734	-75	-45	-21	0,23
4614	GOV	0,172	0,08	4,53	-0,14	-0,17	3,753	-30	-9	-16	0,07
9826	F8V	0,062	0,26	3,03	+0,02	-0,16	3,778	+31	-22	-19	0,13
10700	G8Vp	0,277	0,06	5,54	-0,18	-0,31	3,729	+18	+29	+13	0,22
11007	F6V	0,036	0,55	3,50	-0,04	-0,24	3,778	+27	+15	+39	0,19
13974	GOV	0,097	0,24	4,69	-0,14	-0,40	3,758	-33	-46	+11	0,16
16234	F5V	0,033	0,50	3,20	0,00	-0,49	3,773	-23	-27	+2	0,08
16895	F7V	0,079	0,20	3,57	-0,04	-0,26	3,783	-33	0	0	0,09
20794	G5V	0,161	0,16	5,13	-0,20	-0,34	3,729	-81	-94	-27	0,36
22049	K2V	0,302	0,03	5,84	-0,20	-0,31	3,707	-3	+8	-20	0,10

22484	F9V	0,061	0,27	3,14	+0,01	-0,16	3,773	+6	-18	-46	0,05
22879	F9V	0,047	0,42	4,91	-0,15	-0,57	3,753	-103	-77	-45	0,35
26965	KOV	0,205	0,06	5,74	-0,18	-0,19	3,720	+95	-12	-39	0,31
30649	G1V	0,041	0,73	4,91	-0,10	-0,26	3,773	-52	-64	-7	0,24
32923	G4V	0,059	0,28	4,41	-0,125	-0,20	3,758	-26	-26	+31	0,07
49933	F2V	0,028	0,84	3,01	+0,03	-0,35	3,816	+27	-15	-10	0,11
52711	G4V	0,058	0,39	4,74	-0,12	-0,15	3,768	-16	-70	-8	0,23
55575	GOV	0,037	0,53	3,35	-0,02	-0,44	3,763	-	-	-	-
69897	F6V	0,063	0,31	4,11	-0,07	-0,52	3,789	-24	-35	+8	0,11
72905	GOV	0,064	0,30	4,60	-0,125	-0,27	3,763	+10	+1	-9	0,08
88218	F8V	0,048	0,48	4,37	-0,14	-0,42	3,743	-35	-46	-13	0,16
89125	F8V	0,060	0,27	4,69	-0,10	-0,19	3,778	-42	-25	+12	0,11
90508	G1V	0,052	0,31	4,94	-0,125	-0,23	3,763	+18	-78	+18	0,26
90839	F8V	0,081	0,24	4,35	-0,08	-0,23	3,783	-14	-2	+3	0,05
102365	G5V	0,098	0,27	4,78	-0,18	-0,48	3,734	-67	-40	+4	0,20
106516	F6V	0,028	0,71	3,33	-0,02	-0,40	3,783	+86	-114	-100	0,38
110379	FOV	0,099	0,23	3,50	+0,06	-0,57	3,851	-28	-6	-18	0,06
110897	GOV	0,065	0,35	4,98	-0,125	-0,30	3,763	-38	+8	-76	0,18
128167	F2V	0,063	0,69	3,53	+0,03	-0,50	3,833	+2	+16	-5	0,14
131156	G8V	0,148	0,13	5,42	-0,12	-0,20	3,748	+7	+1	+1	0,08
136352	G2V	0,065	0,35	4,54	-0,16	-0,50	3,739	-123	-52	+38	0,35
142373	F9V	0,056	0,29	3,29	-0,01	-0,35	3,763	-45	+17	-70	0,21
143761	G2V	0,042	0,63	3,43	-0,03	-0,17	3,763	+72	-52	+24	0,27
152792	GOV	0,032	0,62	4,27	-0,125	-0,38	3,748	+59	-2	-13	0,21
157089	F9V	0,036	0,55	4,74	-0,15	-0,53	3,758	-153	-51	-54	0,43
157214	GOV	0,073	0,22	4,62	-0,15	-0,43	3,748	+23	-80	-63	0,25
165908	F7-9V	0,061	0,21	3,96	-0,08	-0,40	3,773	-3	-1	+9	0,06
170153A	F7V	0,129	0,13	4,28	-0,07	-0,33	3,789	+3	+40	-2	0,26
170153B	K1V	0,129	0,13	5,94	-0,20:	-0,33	3,694	-	-	-	-
185144	KOV	0,176	0,07	5,75	-0,20	-0,23	3,716	+31	+43	-18	0,31
189567	G2V	0,052	0,44	4,63	-0,14	-0,28	3,758	-77	-34	-53	0,21
190404	K1V	0,051	0,72	5,55	-0,20:	-0,16	3,702	+108	-58	+34	0,36
222368	F7V	0,071	0,23	3,32	-0,02	-0,51	3,778	-8	-27	-26	0,06

GRUPO 4 : $-1,40 \leq (\text{Fe}/\text{H}) \leq -0,60$

6582	G5Vp	0,127	0,08	5,51	-0,15	-0,90	3,725	-47	-160	-37	0,47
25329	K1V	0,052	0,25	6,75	-0,25	-1,30	3,690	-40	-198	+23	0,53
33256	F5V	0,048	0,62	3,47	-0,075	-0,60	3,789	-9	-5	0	0,03
63077	GOV	0,063	0,36	4,29	-0,19	-0,80	3,750	-149	-57	+35	0,42
65583	G8V	0,058	0,28	5,65	-0,20	-0,62	3,725	-11	-91	-31	0,30
91324	F6V	0,049	0,68	3,27	-0,06	-0,60	3,783	-39	-29	-3	0,11
103095	G9V	0,110	0,21	6,43	-0,25	-1,32	3,711	+277	-157	-14	0,78
160693	GOV	0,032	1,22	5,80	-0,14	-0,69	3,743	-	-	-	-
203608	F6V	0,116	0,22	4,49	-0,20	-0,68	3,758	-13	+42	+6	0,27
224930	G2V	0,084	0,16	5,20	-0,15	-0,90	3,725	-9	-74	-33	0,24

OBS : $(M_{\text{bol}})_{\odot} = 4,75$; $(\log T_{\text{eff}})_{\odot} = 3,761$ (Allen (1))

considerada, a massa dada é a desta trajetória .

Como pode ser visto pelos dados cinemáticos da última coluna, os três primeiros grupos, $+0,15 < (Fe/H) \leq +0,50$, $-0,15 < (Fe/H) \leq +0,15$ e $-0,60 < (Fe/H) \leq -0,15$, são compostos exclusivamente da população do disco. O quarto grupo , $-1,40 \leq (Fe/H) \leq -0,60$, possuiu uma população mista com uma predominância de estrelas de alta velocidade .

Com as informações sobre $\log T_{\text{eff}}$ e M_{bol} , podemos construir o diagrama HR observacional de toda a amostra . É fato conhecido que inogeneidades cronológicas e de composição química são os responsáveis pelo espalhamento observado . Perrin et al (38) , levando em conta erros em T_{eff} e M_{bol} , mostraram que o espalhamento, para temperaturas inferiores a $T_{\text{eff}} = 5500$ eK , pode ser atribuído a diferenças de conteúdo metálico, enquanto efeitos evolutivos tornam-se predominantes para temperaturas maiores que $T_{\text{eff}} = 6000$ eK .

Esses mesmos autores trabalharam com uma amostra de 138 estrelas contendo alguns objetos classificados como subanãs e subgigantes pelo critério MK (obviamente ambos os casos omitidos em nossa determinação da RMLE) . Utilizando o diagrama HR para a amostra completa de 138 estrelas, os autores fizeram um exame crítico da classificação MK, chegando à conclusão que a capacidade deste critério de distinguir entre estrelas não evoluídas (sequência principal) e moderadamente evoluídas (subgigantes) é bastante pobre, uma vez que os dois grupos estão largamente misturados no diagrama .

O diagrama HR observacional para as 138 estrelas utilizadas por Perrin et al (38) está na figura 1, onde podem ser observados os efeitos descritos . O diagrama HR observacional para as 106 estrelas retidas para a RMLE está na figura 2 .

Ao passo que a nossa amostra só contém objetos identificados como pertencentes à classe MK V, algumas estrelas de temperatura efetiva mais elevada ultrapassam os limites expostos acima, e talvez nesses objetos far-se-iam notar efeitos evolutivos perceptíveis de uma trajetória inicial para o ramo de subgigantes . Levando em conta a baixa precisão da classificação MK, não julgamos ser necessário restringir ainda mais nossa amostra . Um exame da posição dessas estrelas em cada respectivo grupo de metalicidade não revelou discrepâncias sistemáticas em relação à tendência geral de cada grupo . Mantivemos, assim, as 106 estrelas identificadas como pertencentes à classe MK V . No entanto, voltaremos a discutir este assunto, ao analisarmos em detalhes a estrutura das RMLEs .

II-2

Análise dos Erros

Uma vez que os efeitos que estamos discutindo não se colocam muito acima dos erros inevitáveis em se posicionar objetos individualmente no diagrama HR ou na RMLE, é de importância primordial discutirmos os

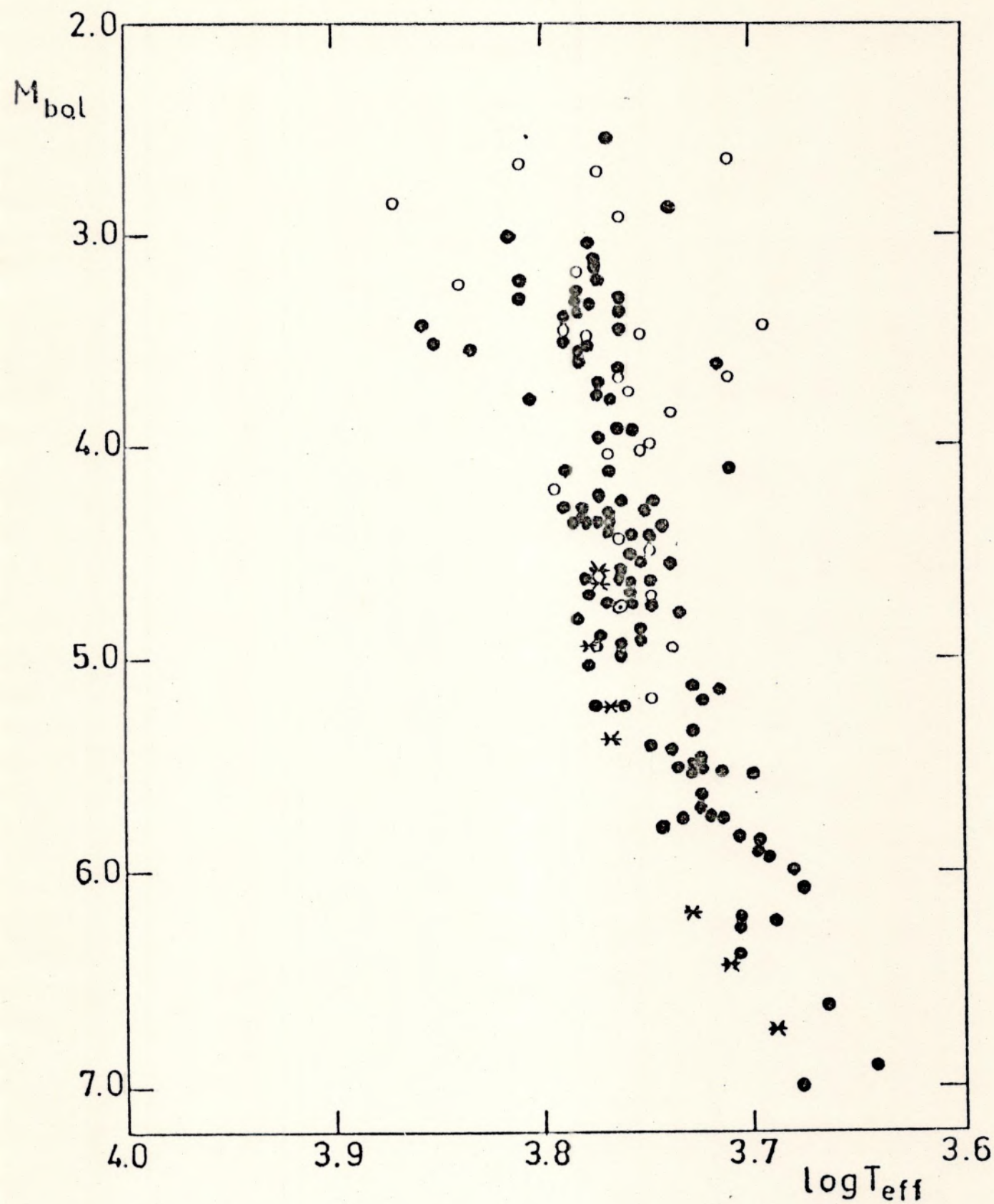


Fig. 1 - Diagrama HR observacional para as 138 estrelas da amostra original usada no trabalho de Perrin et al (38) . Os círculos preenchidos representam as estrelas classificadas como anãs, os círculos abertos as como subgigantes, e os asteriscos as como subanãs na classificação MK . O círculo pontilhado representa o Sol .

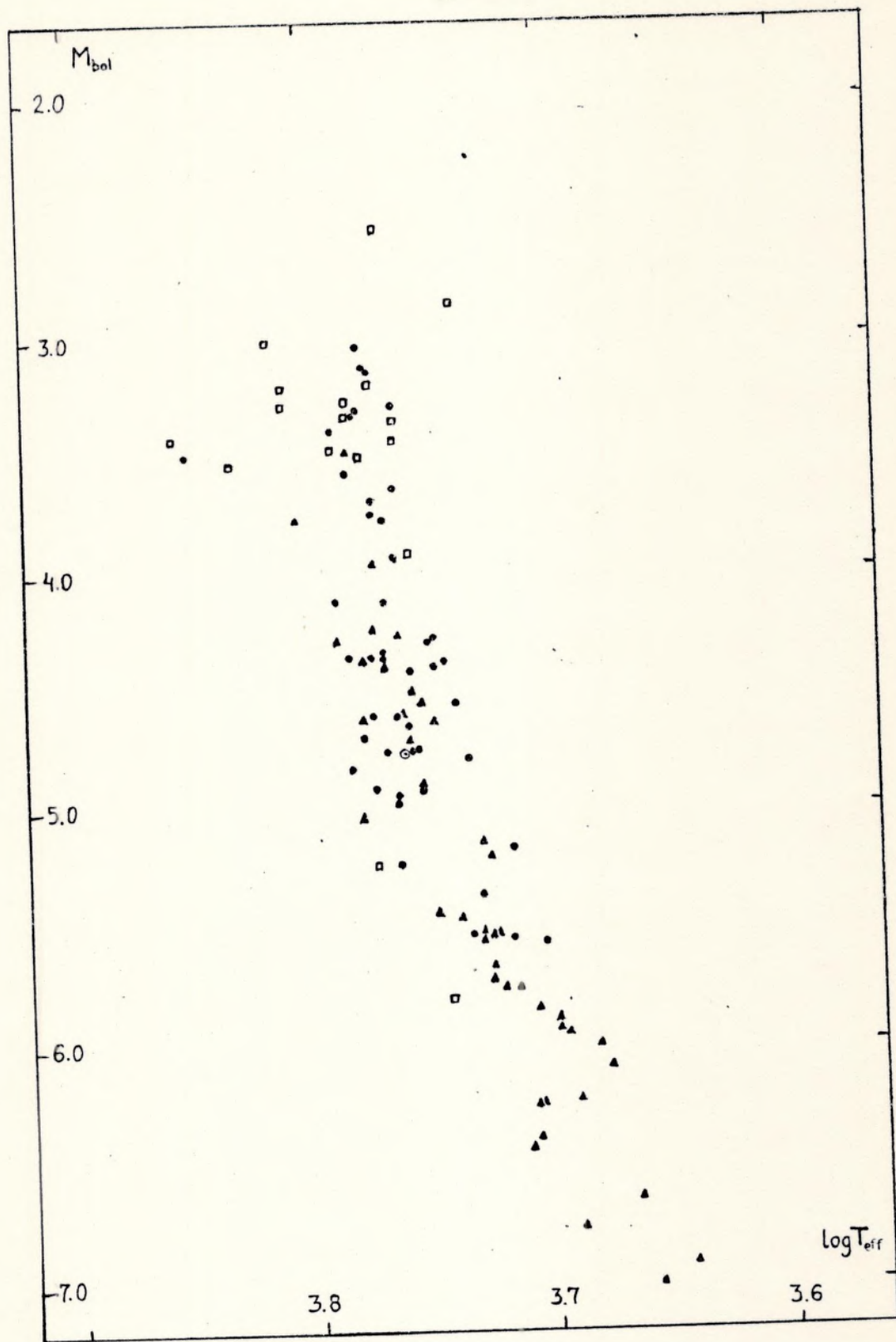


Fig. 2 - Diagrama HR observacional da amostra selecionada de 106 estrelas. O código dos símbolos que representam as estrelas está na tabela 2.

erros em detalhes . A seguir discutimos como foram determinadas as barras de erro para M_{bol} , $\log T_{eff}$ e a diferença logarítmica (Fe/H) em nossa amostra

II-2.1 Erro na Magnitude Absoluta Bolométrica

Escolhendo estrelas com correções bolométricas pequenas, vemos na equação

$$M_{bol} = M_V + BC = m_V + 5 \log \pi'' / 0,10 + BC \quad (3)$$

que o erro em M_{bol} provém principalmente dos erros nas paralaxes . Os erros prováveis \mathcal{E} das paralaxes foram tomados de Woolley et al (46) e Jenkins (26)(27) , respectivamente, para estrelas com π maior e menor que $0,040''$. Para uma estrela com dados π e \mathcal{E} o erro é simétrico na paralaxe , mas não o é em M_V . Na tabela 1 está listado o valor médio quadrático $\overline{\sigma}_{M_{bol}}$ dos dois erros assimétricos em M_{bol} . Estando de posse dos valores de M_{bol} com seus respectivos erros, separamos as estrelas da amostra em três grupos .

TABELA II

grupos	nº de estrelas	símbolo
$\overline{\sigma}_{M_{bol}}/M_{bol} \leq 0,05$	43	▲
$0,05 < \overline{\sigma}_{M_{bol}}/M_{bol} \leq 0,15$	45	●
$\overline{\sigma}_{M_{bol}}/M_{bol} > 0,15$	17	□

Este código é utilizado em todos os diagramas com exceção da fig.1 .

As correções bolométricas foram obtidas da relação (T_{eff}, BC) de Johnson (28) . Contudo , Johnson arbitrariamente tomou a correção bolométrica do Sol como zero, ao invés de usar a convenção usual de tomar uma correção bolométrica sempre negativa e se anulando próximo ao tipo espectral F5 . Portanto, o valor 0,07 foi subtraído dos valores de Johnson de modo a permanecermos no sistema usual ($BC_{\odot} = -0,07$)

Para as estrelas muito deficientes em metal (cujas correções bolométricas não estão disponíveis na referência citada acima) foi usada a mesma relação (T_{eff}, BC) . Perrin et al (38) verificaram que a hipótese é satisfatória, comparando as correções bolométricas obtidas por Johnson et al (29) para subanãs individuais com valores derivados da relação estabelecida para as estrelas de conteúdo metálico normal . Não se encontrou diferença entre as duas curvas na faixa 4500 K - 6000 K .

II-2.2 Erros em T_{eff} e nos índices (Fe/H)

Todas as temperaturas efetivas e índices metálicos das estrelas da amostra foram obtidas a partir de análises espectroscópicas de alta dispersão baseadas em métodos de curvas de crescimento .

A atribuição de temperaturas efetivas finais e índices metálicos , quando mais de um resultado era disponível, foi feita através de uma

média ponderada das diferentes determinações .

Quase todas as análises prévias a 1963 são baseadas em métodos de pouca precisão ; aquelas subsequentes a 1963 foram baseadas em análises de modelos atmosféricos . Referimos o leitor a Perrin et al (38) para uma análise completa dos métodos empregados .

Muitas estrelas possuíam determinações tanto aproximadas quanto detalhadas . Foi possível neste caso buscar uma diferença sistemática entre as duas abordagens, desde que se assumam as seguintes relações entre temperatura efetiva, temperatura de ionização e temperatura de excitação:

$$\Theta_{\text{eff}} = \Theta_{\text{ion}} - 0,03, \text{ e } \Theta_{\text{eff}} = \Theta_{\text{exc}} - 0,13 \quad (\text{Pagel (34)}).$$

Discrepâncias entre abundâncias obtidas por análises aproximadas e análises de modelos atmosféricos já foram investigadas para estrelas tipo G avançado por Cayrel e Cayrel (4), com a conclusão de que elas não são significativas . As diferenças entre os resultados obtidos pelos dois métodos são usualmente inferiores às diferenças obtidas pelo mesmo método por dois autores diferentes . Isso é explicável, já que a ionização em uma atmosfera estelar varia lentamente com a altura, a queda de temperatura sendo parcialmente compensada pela diminuição simultânea da pressão eletrônica .

Para k estrelas com mais de uma determinação de T_{eff} e (Fe/H) , usamos, para n_i determinações (três ou mais)

$$\sigma = \left(\frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) s_i^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} \right)^{1/2} \quad (4)$$

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (x_{ij} - \bar{x})^2}{n_i - 1} \quad (5)$$

onde x_i é o valor de T_{eff} ou (Fe/H) e s_i^2 é a variância para cada estrela . Encontrou-se $\sigma_{T_{\text{eff}}} = 160 \text{ } ^\circ\text{K}$, ou $\sigma_{\log T_{\text{eff}}} = 0,014$ em $T_{\text{eff}} = 5000 \text{ } ^\circ\text{K}$ e $\sigma_{(\text{Fe}/\text{H})} = 0,15$.

II-2.3 Determinações de Massa

Em seu trabalho, Perrin et al (38), utilizando massas obtidas a partir de trajetórias evolucionárias, consideraram interessante atacar o problema de determinações de massa através de uma comparação direta com as massas obtidas de sistemas estelares binários .

As determinações de massa para uma dada estrela foram feitas com as trajetórias evolucionárias teóricas correspondendo mais proximamente ao conteúdo metálico da estrela . É preciso enfatizar que todos os valores de $\log m/m_\odot$ listados na tabela 1 foram estimados em trajetórias evolucionárias teóricas em que somente o parâmetro Z foi variado . Existem contudo seis exceções : HD 3765, as estrelas pertencentes ao sistema triplo 36 Oph (HD 155885, HD 155886 e HD 156026) e as estrelas

85 Peg (HD 224930) e μ Cas (HD 6582) , cujas massas foram estimadas em trajetórias evolucionárias em que o parâmetro Y também variou . Acrescentamos a título de nota que HD 224930 e HD 6582 são ambas binárias espectroscópicas e sob suspeita de variabilidade .

Não se atribuíram barras de erro a essas determinações, mas é claro que as massas melhor determinadas são aquelas das estrelas com menor valor de \overline{GM}_{bol} , mantendo-se constante o erro em T_{eff} .

Para doze estrelas não evoluídas as massas obtidas com as trajetórias evolutivas foram comparadas com as massas derivadas de uma relação massa versus (R-I) de Eggen (16) Perrin (36) para a SPIZ . A relação é baseada no conhecimento detalhado de 21 sistemas binários, incluindo : razão a^3/P^2 determinada com precisão, índices (R-I)_{Kron} (Eggen (16)) , relação M_V versus (R-I)_{Kron} (Eggen e Greenstein (17)) para estrelas da sequência principal com grandes paralaxes ($\pi'' > 0,125$) , massas e distâncias a partir do módulo de distância ($m_V - M_V$) deduzido das relações acima .

As massas derivadas da relação (m/m_{\odot} , (R-I)) podem ser chamadas de "semi-astrométricas" . A tabela 3 mostra que as massas "evolucionárias" não diferem das massas "semi-astrométricas" por mais que 10 % , as diferenças sendo essencialmente aleatórias e não sistemáticas . É interessante comparar as três determinações de massa das componentes iguais , A e B , do sistema triplo 36 Oph (Perrin(35)(36)) . A comparação nos dá : m/m_{\odot} (astrométrica) = 0,73 ; m/m_{\odot} ("semi-astrométrica") = 0,74 ; m/m_{\odot} ("evolucionária") = 0,66 .

Novamente, citamos as referências e fontes bibliográficas exaustivas podem ser encontradas em Perrin et al (38) .

TABELA III

Estrela	semi astrométrica	evolucionária
32147	0,71	0,71
75732	0,80	0,85
145675	0,80	0,94
155885	0,74	0,66
155886	0,74	0,66
156026	0,65	0,56
165341	0,75	0,79
166620	0,71	0,71
190404	0,72	0,63
191408	0,71	0,75
192310	0,72	0,71
219134	0,69	0,71

III - AS RELAÇÕES MASSA - LUMINOSIDADE EMPÍRICAS

III-1 Expectativas Teóricas

Os modelos computados por Hejlesen (24) podem ser observados nas figuras 3 e 4. Alguns detalhes sobre as construções dos modelos podem ser encontradas em Perrin et al (38). A fig. 3 apresenta as SPIZ computadas para seis valores de Z , para $X = 0,70$ e o valor do parâmetro de convecção, a razão do comprimento de mistura para a altura de escala de pressão, $(l / H_p) = 2,0$. É interessante observar que as diferenças em magnitude absoluta bolométrica para uma dada temperatura efetiva, e as diferenças em temperatura efetiva para uma dada magnitude absoluta bolométrica, são quase constantes no intervalo considerado, uma vez que as SPIZ são praticamente paralelas neste mesmo intervalo. As diferenças em M_{bol} e T_{eff} entre a SPIZ mais rica em metais e a mais pobre em metais são, respectivamente, de 1 magnitude e de 650 °K.

Observando os modelos computados, aferimos as seguintes tendências fundamentais para as estrelas da sequência principal: para uma dada temperatura efetiva, a massa e a luminosidade de um modelo deficiente em metais são muito menores que a massa e a luminosidade de um modelo rico em metais; para uma dada luminosidade, a massa é menor e a temperatura efetiva é maior para um modelo pobre em metais do que para um modelo rico em metais.

Estes resultados podem ser entendidos de modo qualitativo simples considerando o efeito que o conteúdo metálico exerce nos interiores estelares. Para uma dada temperatura efetiva, uma estrela deficiente em metais aquece sua superfície com mais eficiência, através do transporte de radiação, para isto necessitando de menos massa e acarretando em luminosidade menor. Pelo mesmo motivo, para uma dada luminosidade, a estrela deficiente em metais, através do transporte de radiação mais eficiente, necessita de menos massa e atinge uma temperatura efetiva maior.

A fig. 4 representa as SPIZ ricas em hélio, normais em hélio e pobres em hélio, para um mesmo valor de $Z = 0,02$ e $(l/H_p) = 2,0$. Notamos que há uma diferença sensível entre as SPIZ pobres e ricas em hélio. No que se concerne às massas, vemos o seguinte: a massa e a luminosidade de um modelo rico em hélio são menores que as de um modelo pobre em hélio, para uma dada temperatura efetiva. Para uma dada luminosidade, a massa é menor e a temperatura efetiva é maior para um modelo rico em hélio do que para um modelo pobre em hélio.

Reduzindo as relações expostas entre massa, temperatura efetiva e luminosidade, relacionadas ao conteúdo metálico, para o plano observacional da RME, esperamos que, para uma dada massa, a luminosidade de uma estrela deficiente em metais será maior que a de uma estrela rica em metais. Ao passo que alguns autores (Perrin et al (38), Audouze e Tinsley (2), Caputo (3)) investigaram uma variação concomitante do

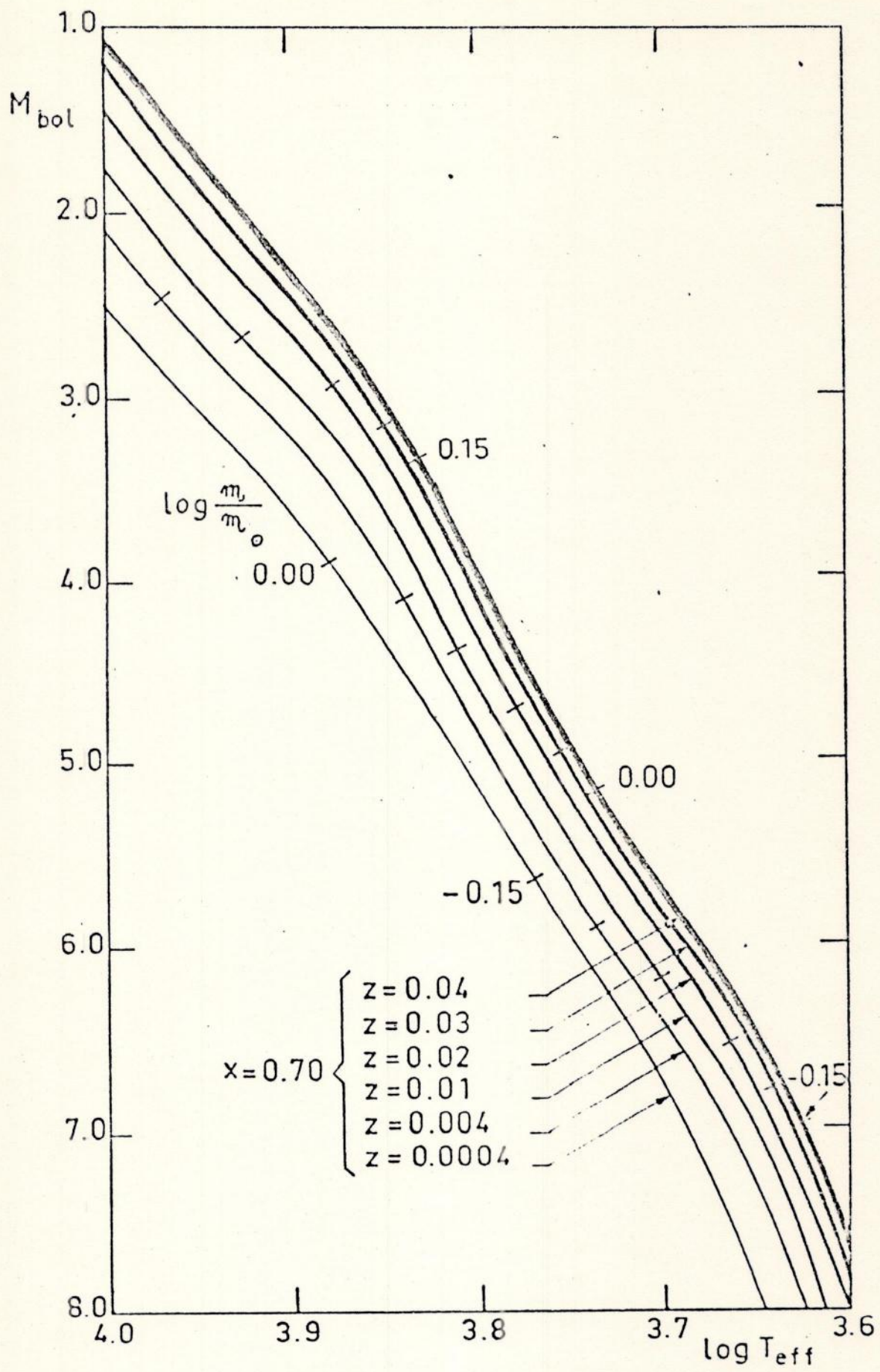


Fig.3 - As diferentes SPIZ computadas com $X = 0,70$ constante e Z variável, e $1/H_p = 2,0$, segundo Hejlesen (24). A espessura das curvas é proporcional ao valor de Z . Os valores de $\log m/m_\odot$ estão indicados em cada curva.

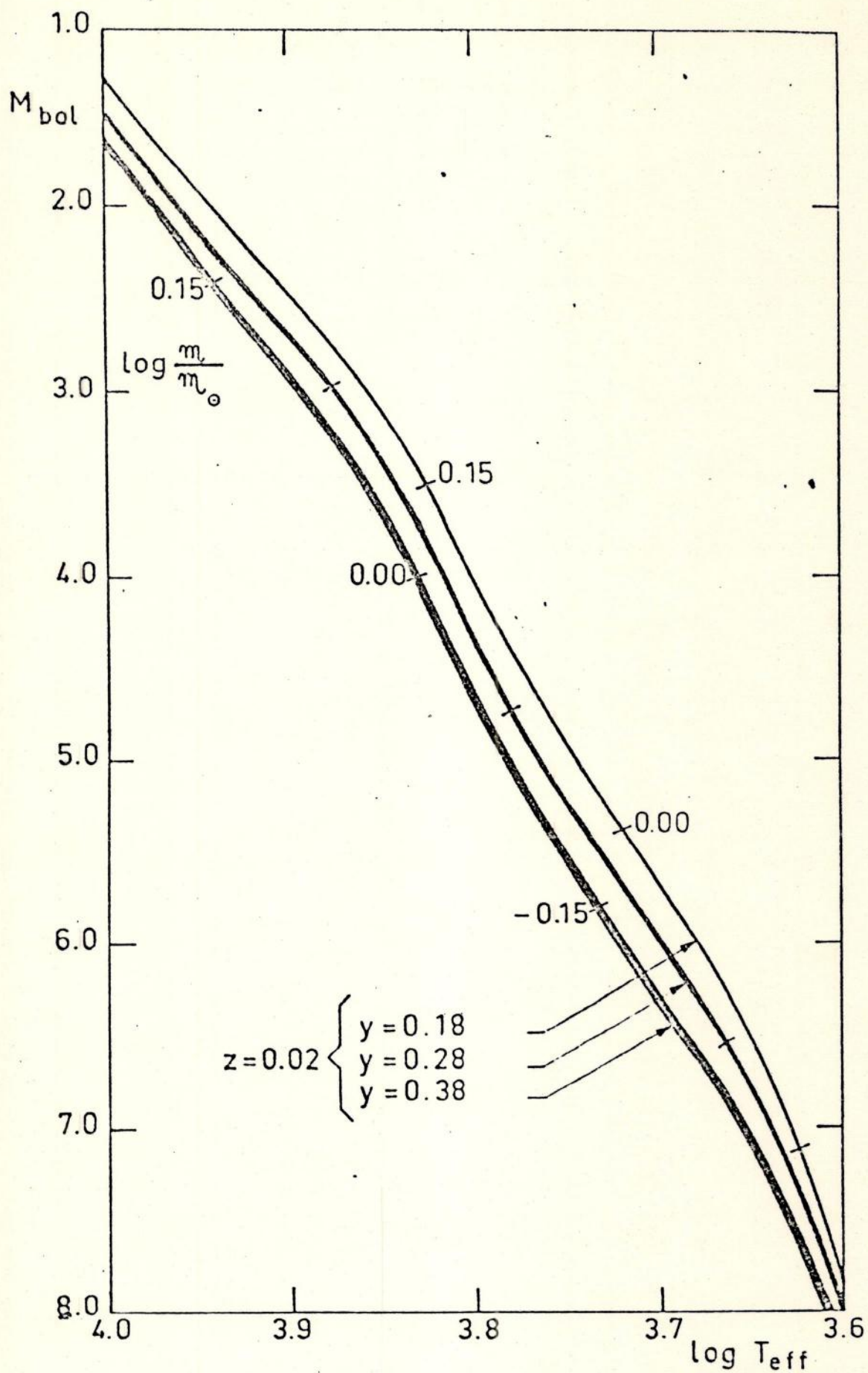


Fig.4 - As diferentes SPIZ computadas com $Z = 0,02$ constante e Y variável. e $1/H_p = 2,0$, segundo Hejlesen (24). A espessura das curvas é proporcional ao valor de Y . Os valores de $\log m/m_{\odot}$ estão indicados em cada curva.

conteúdo de hélio e o conteúdo metálico, essa questão foge aos objetivos deste trabalho .

Em resumo, dentro de um grupo de metalicidade, esperamos que o relacionamento linear direto entre M_{bol} e $\log m/m_{\odot}$ seja definido com precisão .

Acautelamo-nos porém contra a noção simplificadora que estabelece a luminosidade como função única da massa e da metalicidade . O índice metálico (Fe/H) é apenas uma quantidade obtida espectroscopicamente e estando relacionada ao parâmetro Z e o peso molecular médio μ , sendo porém insuficiente para defini-los univocamente, ou mesmo preponderar em sua definição . De fato, uma vez que estamos utilizando determinações de massa baseadas em SPIZ teóricas, a proposta deste trabalho pode ser descrita como uma determinação do poder de estratificação do índice (Fe/H) nas RMLE, comparativamente com o poder de estratificação do parâmetro Z observado nas SPIZ teóricas .

Outro problema a ser enfrentado é que, ao avaliarmos as barras de erro nos índices (Fe/H) , vemos em cada grupo de metalicidade que existem provavelmente estrelas mal classificadas como pertencentes a tal . Em se tratando de uma amostra pequena, tais imprecisões podem assumir dimensões sensíveis, sendo de natureza a princípio incontrollável .

Levando em conta estes fatores, propomos o índice metálico como critério de estratificação da RMLE para as 106 estrelas da amostra .

III-2

Análise por Mínimos Quadrados

Calculamos quatro regressões lineares (M_{bol} , $\log m/m_{\odot}$), uma para cada um dos grupos, e uma quinta regressão para a amostra como um todo . Os gráficos correspondentes às regressões em cada grupo podem ser observados nas figuras 5, 6, 7 e 8 , em ordem de metalicidade decrescente . A regressão obtida para a amostra total, indexada como grupo 5 em prol da simplicidade, é mostrada na figura 9 . Em cada figura, representamos a reta de regressão para a amostra total e a reta de regressão da RMLE conforme computada por Cester et al (6) , utilizando uma amostragem de 45 sistemas estelares binários visuais e 40 sistemas binários espectrofotométricos resolvíveis . A relação derivada por Cester et al (6) , assim como a amostragem, podem ser observadas na fig. 10 .

A RMLE é escrita na forma

$$M_{bol} = b + a \log m/m_{\odot} \quad (6)$$

Os resultados estão expostos na tabela 4 , onde :

- a = coeficiente angular na equação (6) ;
 b = coeficiente linear na equação (6) ;
 σ_p = desvio-padrão do ajuste particular do grupo ;
 σ_t = desvio-padrão do ajuste global sobre o grupo ;
 $\sigma_{m_{bol}}$ = erro médio em M_{bol} das estrelas do grupo ;
 r = coeficiente de correlação entre $(M_{bol}, \log m/m_{\odot})$, no grupo ;
 n = número de estrelas no grupo ;

TABELA IV

grupo	-a	b	σ_p	σ_t	$\sigma_{m_{bol}}$	r	n
1	$11,16 \pm 2,00$	$4,68 \pm 0,13$	0,38	0,74	0,28	-0,87	12
2	$12,02 \pm 0,77$	$4,19 \pm 0,08$	0,43	0,65	0,30	-0,93	41
3	$10,64 \pm 0,71$	$3,35 \pm 0,09$	0,34	0,58	0,34	-0,92	43
4	$14,45 \pm 3,91$	$2,68 \pm 0,69$	0,72	0,89	0,41	-0,79	10
5	$8,65 \pm 0,69$	$3,99 \pm 0,08$	-	0,65	0,33	-0,78	106
Cester et al	$11,29 \pm 0,35$	$4,739 \pm 0,045$	-	-	-	-	-

A última linha da tabela refere-se ao trabalho de Cester et al (6). Antes de iniciarmos nossa análise dos resultados, porém, aplicamos um critério estatístico de eliminação de observações duvidosas, procurando eliminar pontos que apresentassem resíduos maiores que o valor especificado pelo método conhecido como Critério de Peirce (7). Obtivemos então, analisando os resíduos ponto a ponto, que nenhuma observação deveria ser descartada.

À primeira vista, verificamos que os pontos-zero (valor de M_{bol} correspondente a $\log m/m_{\odot} = 0$) deslocam-se para maiores luminosidades à medida que avançamos para os grupos de menor metalicidade. Este resultado concorda inteiramente com nossa previsão, conforme exposta na subseção III-1. A seguir faremos alguns comentários acerca do comportamento da RMLE em cada grupo.

O grupo 1, que corresponde a $+0,15 < (Fe/H) \leq +0,50$, contém as estrelas mais ricas em metais. Apesar do pequeno número de objetos, a relação linear está muito bem definida. O grupo 2, $-0,15 < (Fe/H) \leq +0,15$, possui um grande número de estrelas, e a correlação linear entre os dois parâmetros se apresenta excelente. O grupo 3, que cobre a faixa $-0,60 < (Fe/H) \leq -0,15$, também possui um número grande de objetos e um relacionamento linear definido de forma precisa. Notamos que o grupo 2 apresenta um espalhamento bastante homogêneo em relação à reta de ajuste. Definindo a parte quente da RMLE no grupo 3, no entanto, encontramos dois objetos: HD 128167 (σ Boo) e HD 110379 (δ Vir = Porrima), que parecem se situar um tanto destacados dos demais objetos que definem a parte quente da relação. Ao passo que este

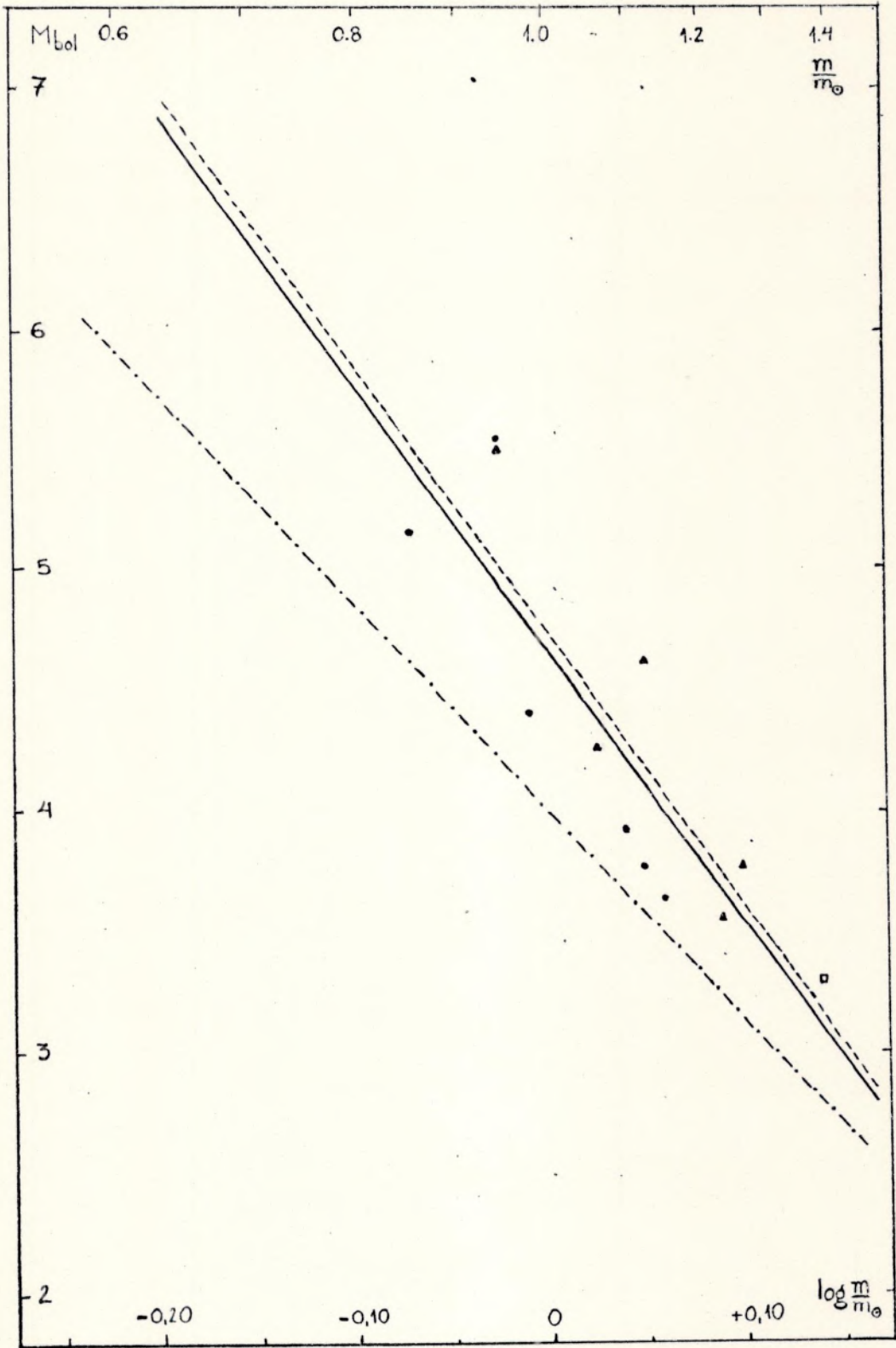


Fig.5 - RMLEs para o grupo 1 , $+0,15 < (Fe/H) \leq +0,50$. A reta cheia representa a regressão linear para o grupo em questão, a reta com traços e pontos representa a regressão linear para toda a amostra, a reta de traços curtos representa a RMLE obtida por Cester et al (6) .

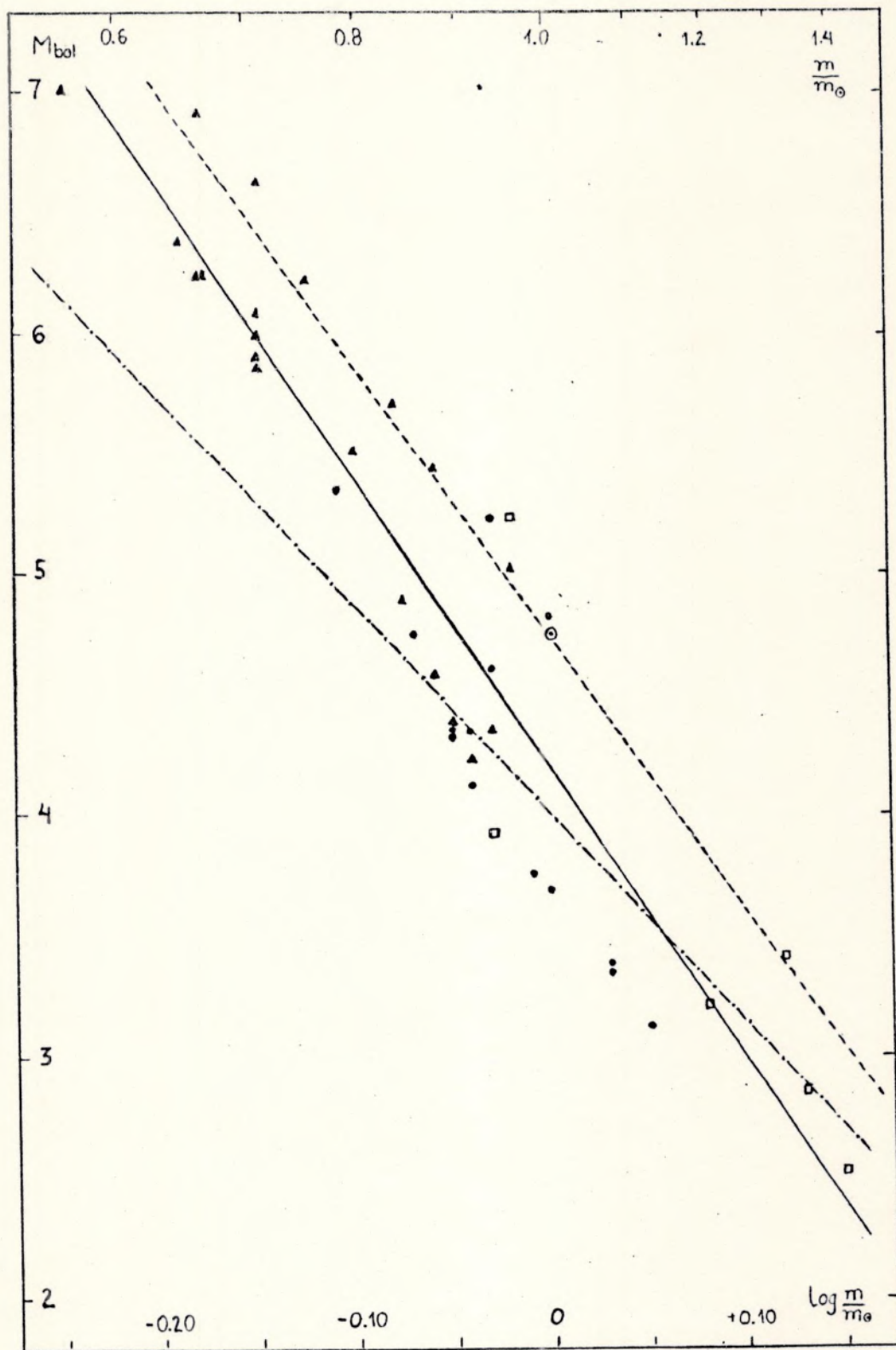


Fig.6 - RMLEs para o grupo 2 , $-0,15 < (Fe/H) \leq +0,15$. A reta cheia representa a regressão linear para o grupo em questão , a reta com traços e pontos representa a regressão linear para toda a amostra, a reta de traços curtos representa a RMLE obtida por Cester et al (6) .

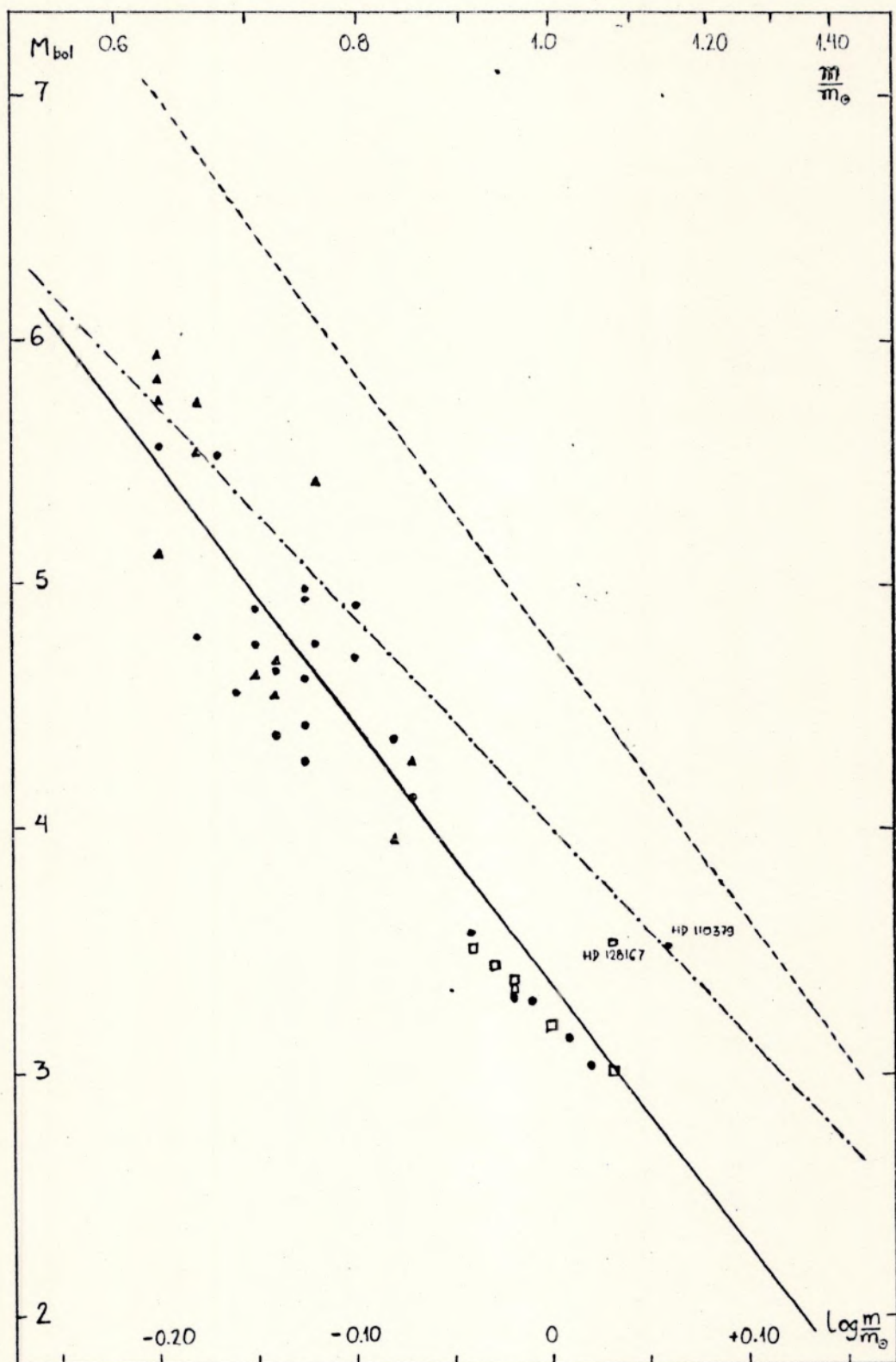


Fig.7 - RMLEs para o grupo 3 , $-0,60 < (Fe/H) \leq -0,15$. A reta cheia representa a regressão linear para o grupo em questão, a reta com traços e pontos representa a regressão linear para toda a amostra, a reta de traços curtos representa a RMLE obtida por Cester et al (6) . Os objetos assinalados estão discutidos no texto .

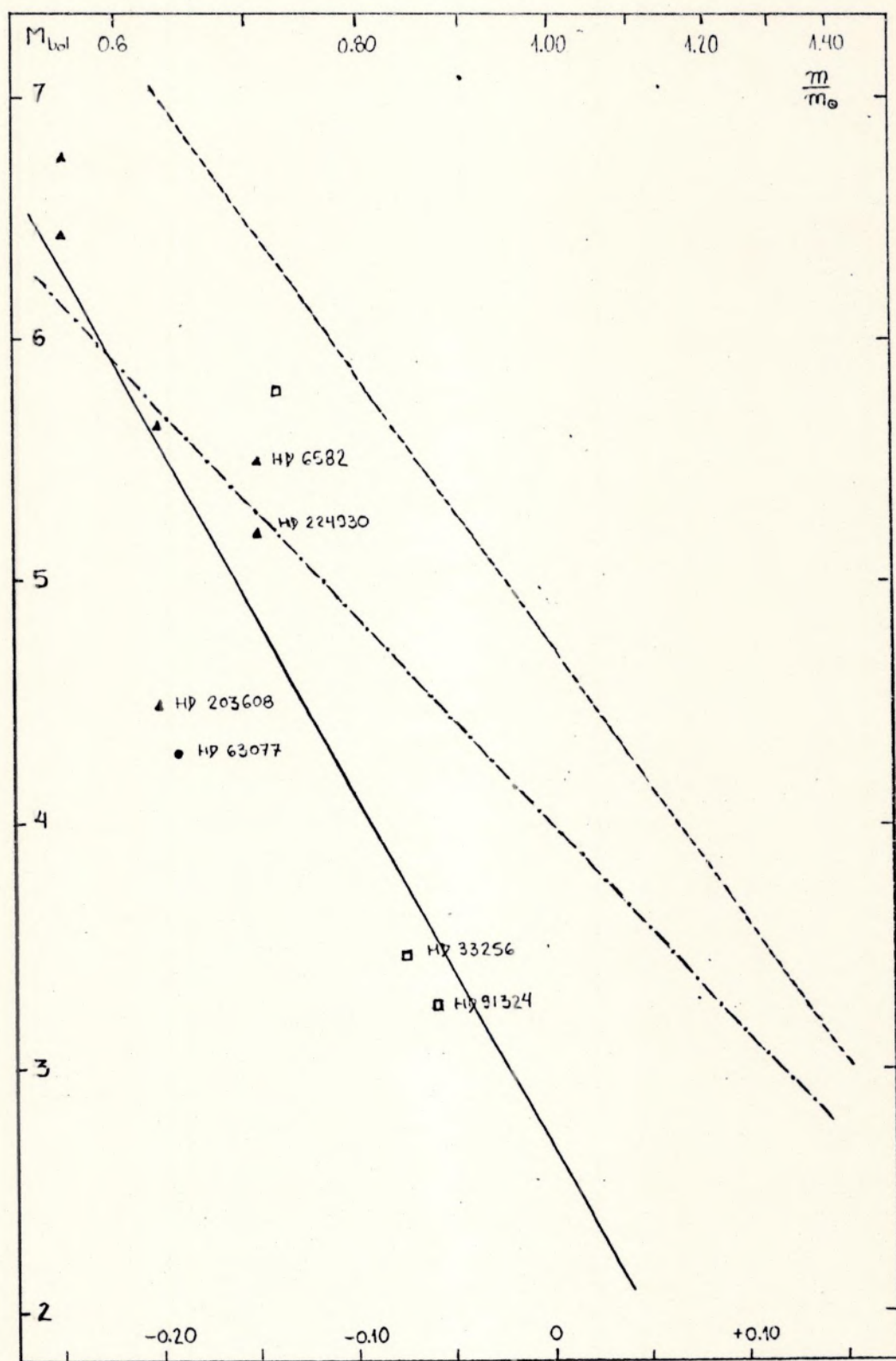


Fig. 8 - RMLEs para o grupo 4 , $-1,40 \leq (Fe/H) \leq -0,60$. A reta cheia representa a regressão linear para o grupo em questão, a reta com traços e pontos representa a regressão linear para toda a amostra, a reta de traços curtos representa a RMLE obtida por Cester et al (6) . Os objetos assinalados estão discutidos no texto .

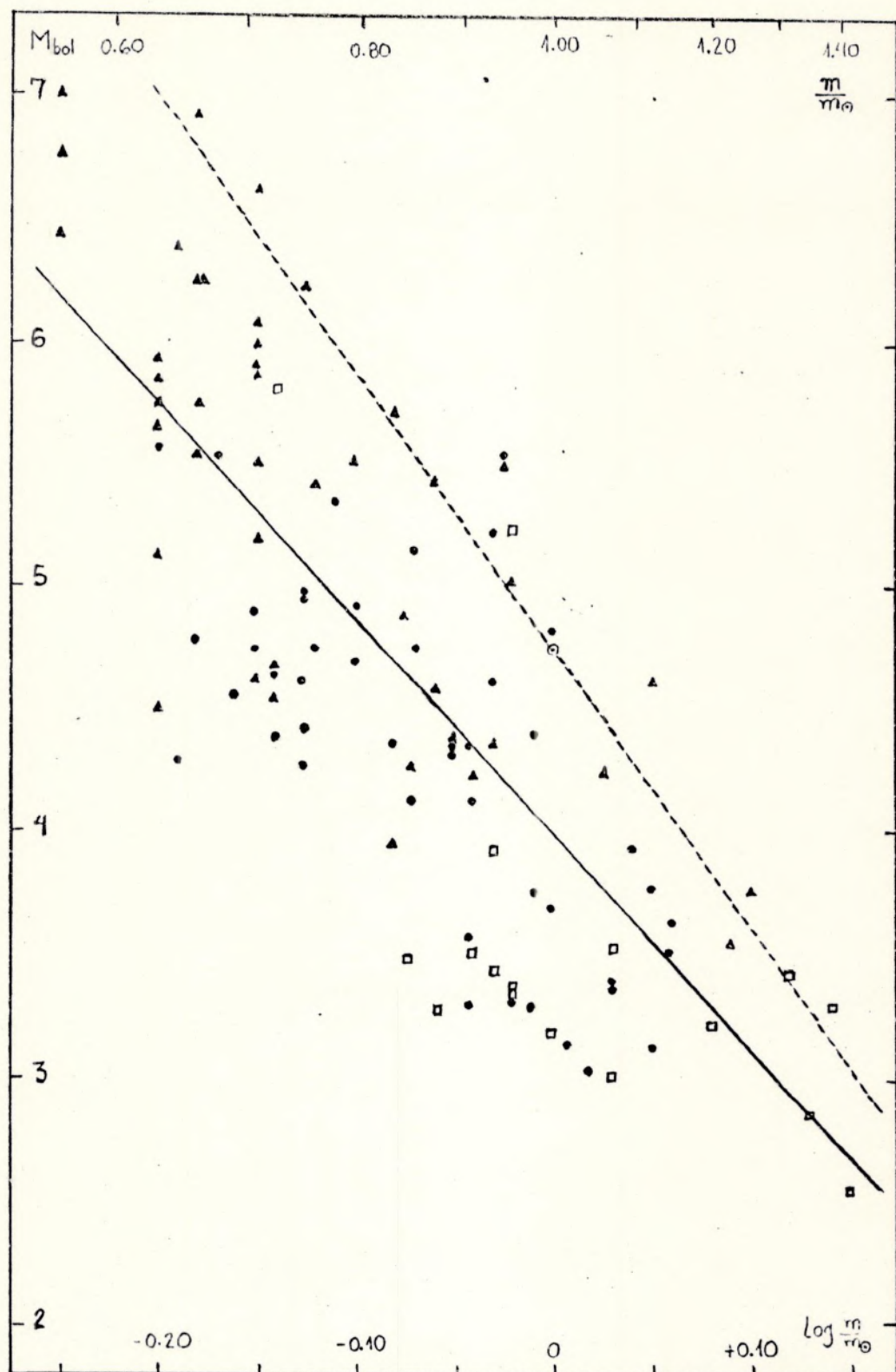


Fig.9 - RMLEs para a amostra total . A reta cheia representa a regressão linear para a amostra total, a reta tracejada representa a RMLE obtida por Coster et al (6) .

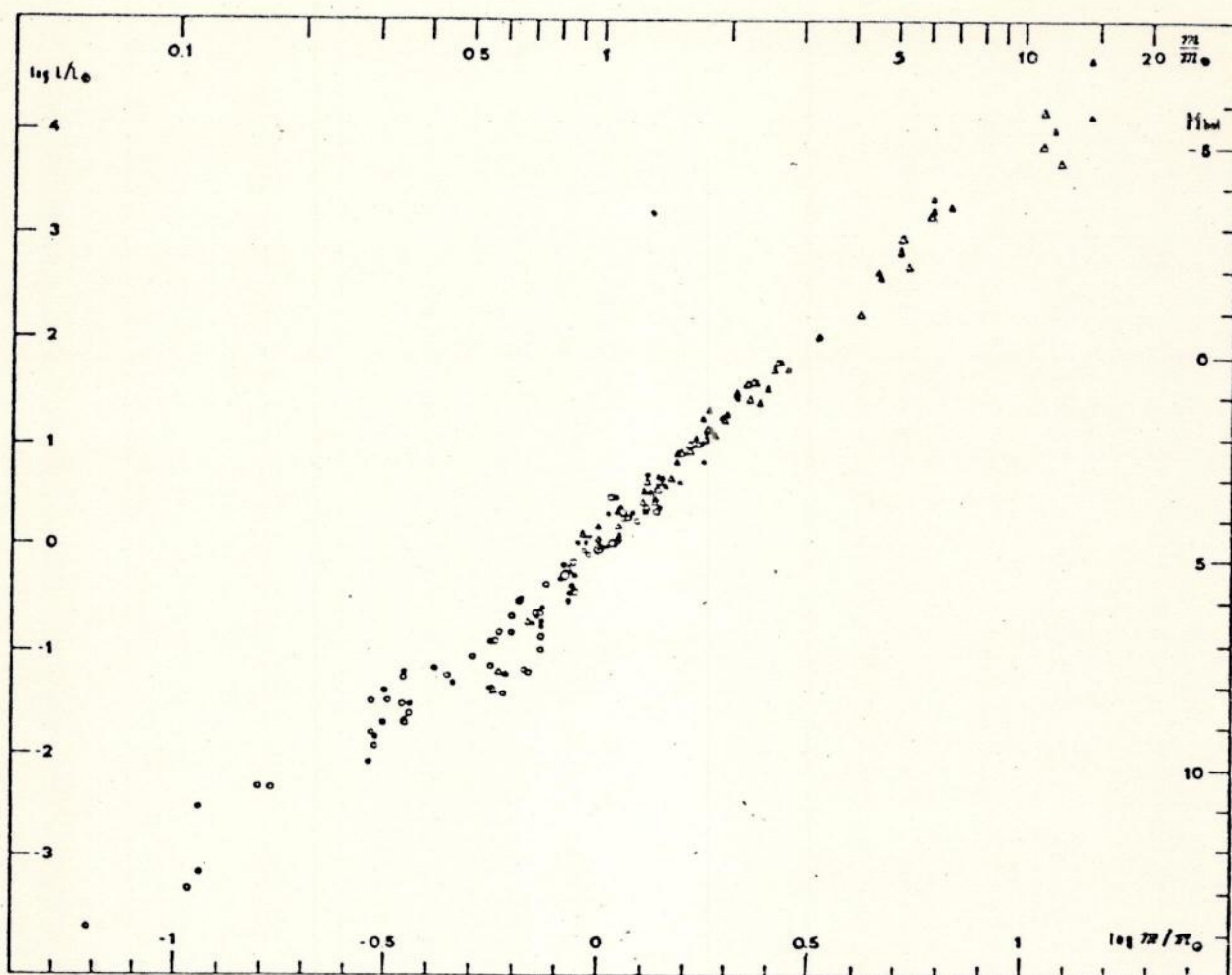


Fig.10 - A RGE de Cester et al (6) .

aspecto não pode ser separado de tendenciosidades intrínsecas na amostragem disponível, as elevadas temperaturas efetivas destas duas estrelas poderiam sugerir um estado incipiente de evolução em direção ao ramo de subgigantes . Perrin et al (38) não encontraram idade elevada para HD 128167 , e não obtiveram idade para HD 110379 . Em seu trabalho, estes autores só empreenderam comparações da posição da estrela no diagrama HR com isócronas teóricas no caso de estrelas sensivelmente destacadas da sequência principal . Não podemos portanto afirmar nada de absoluto em relação a uma possível situação discrepante destes objetos em relação aos demais . Acrescentamos, a título de nota, que as duas estrelas em questão estão sob suspeita de variabilidade .

O grupo 4, que corresponde a $-1,40 \leq (Fe/H) \leq -0,60$, é o mais incerto de todos ; contém apenas 10 estrelas, é o que cobre a faixa de massas mais estreita ($-0,25 \leq \log m/m_{\odot} \leq -0,06$) , e possui as estrelas altamente deficientes em metais . A parte fria da RGE contém objetos com parâmetros bem determinados . A parte quente contém somente dois objetos : HD 33256 e HD 91324 . São estrelas isoladas e sem características incomuns . Apesar dos erros elevados em M_{bol} , podemos considerar a parte quente da relação bem definida . Há no entanto duas estrelas na parte intermediária da RGE que surgem um tanto destacadas

das demais . Estes objetos são HD 203608 e HD 63077 . São estrelas iso-
ladas e sem maiores complicações (a título de nota, HD 203608 está
sob suspeita de variabilidade) . Perrin et al (41) encontraram para
estes objetos idades algo elevadas . Contudo, em relação ao reduzido
número de objetos do grupo, nada de conclusivo pode ser deduzido do com-
portamento na relação apenas .

Observamos na tabela 4 que os coeficientes angulares das RMLE tendem
em geral a aumentar à medida que caminhamos para os grupos de menor me-
talicidade . Somente o grupo 3 escapa a esta tendência . Levando em
conta, porém, os erros envolvidos, não podemos atribuir muito peso a
esta tendência . Sabemos que os coeficientes angulares das regressões
lineares são muito sensíveis ao espalhamento dos dados e à posição re-
lativa dos pontos experimentais .

A única conclusão razoável que surge de modo evidente é o desloca-
mento dos pontos-zero para maiores luminosidades à medida que a metali-
cidade decresce, o que pode ser verificado a menos das barras de erro .

Já discutimos que os modelos computados por Hejlesen (24) e utiliza-
dos por Perrin et al (38) para determinações de massa na nossa amostra
, apresentam as SPIZ praticamente paralelas nos intervalos considera-
dos de M_{bol} e T_{eff} . Isso significa que o efeito físico da metali-
cidade pode ser muito bem aproximado por um simples deslocamento da
SPIZ para uma outra posição .

Este fato pode ser verificado na figura 3 . Para o grau de incerte-
za que a RMLE implica, esta simplificação deveria se refletir de for-
ma bem mais poderosa . Ao passo que não podemos ignorar os valores in-
dividuais do coeficiente angular para cada grupo, nenhum peso pode ser
atribuído às diferenças observadas levando em consideração as barras
de erro .

Tentando consubstanciar nossa argumentação, notamos que Copeland et
al (9) e Caputo (3) encontraram, na faixa de massas e magnitudes abso-
lutas bolométricas em que estamos interessados, que as relações massa-
-luminosidade (teóricas, neste caso) correm de forma praticamente
paralela , conforme pode ser observado, respectivamente, nas figuras 11
e 12 . Notamos que os complexos modelos utilizados por Copeland et al
(9) evidenciam uma mudança radical no comportamento da relação para va-
lores de $\log m/m_{\odot} \lesssim -0,25$, o que termina por alterar o paralelismo
que se observa . Isto corresponde a $M_{bol} \sim 7,5$, que se aproxima da
parte fria da nossa RMLE, porém não de modo suficiente para alterar os
resultados expostos . Uma discussão completa sobre o efeito físico ci-
tado, que foge ao escopo deste trabalho, pode ser encontrada no artigo
em questão (9) .

Encontramos uma evidência em nossas RMLE para supor a significância
estatística de relações separadas nos diferentes nos diferentes grupos.

Finalmente, a título de comentário, verificamos que, com exceção do
grupo 4, a relação derivada por Cester et al (6) é quase paralela aos
ajustes particulares de cada grupo . Nos grupos 1 e 2, foi encontrada
uma boa concordância entre os dois ajustes, que não se verificou no

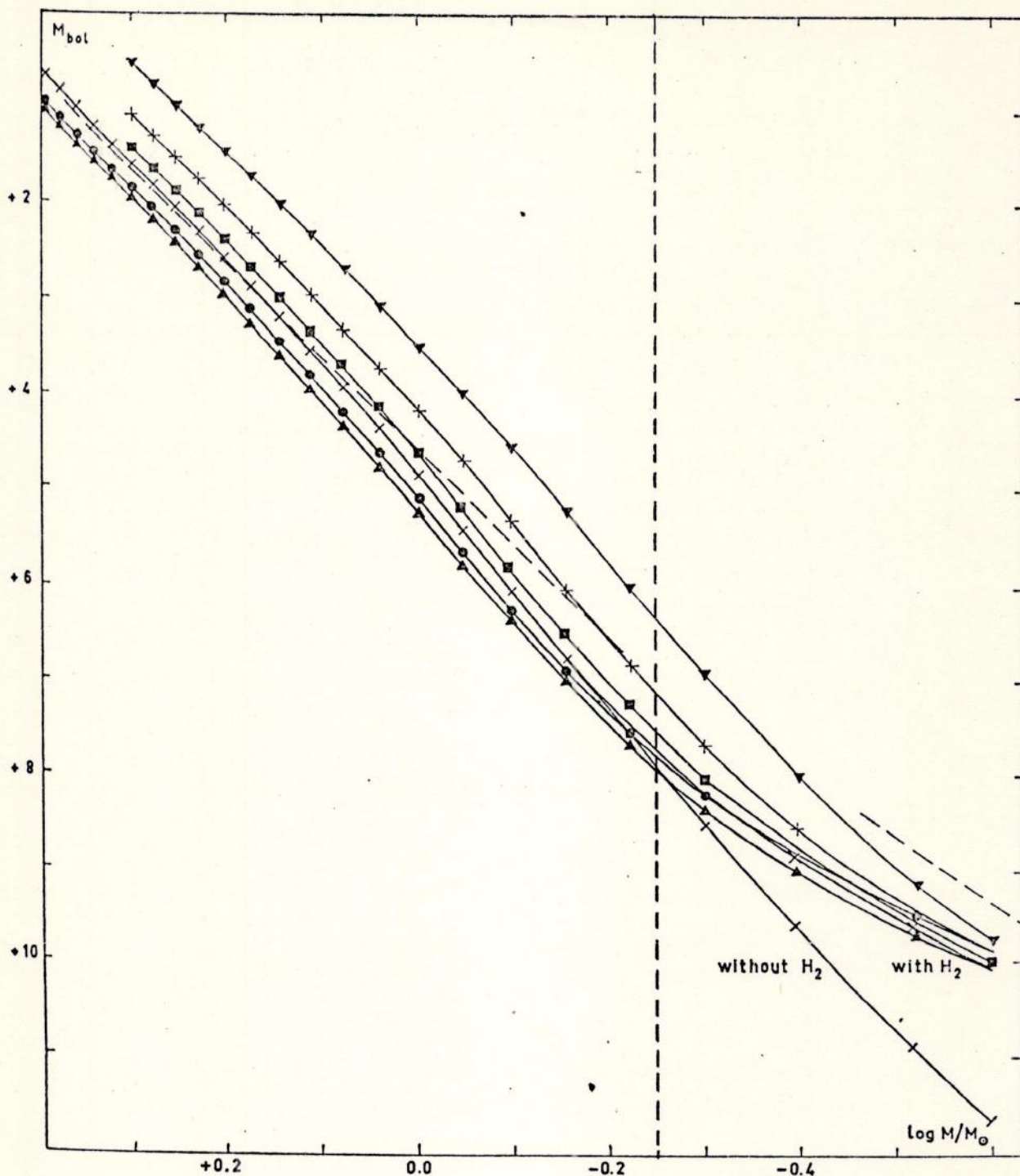


Fig. 11 - As Relações Massa-Luminosidade teóricas deduzidas por Cope-
land et al (9) para seis composições químicas : $(X, Y, Z) = (0,60/0,37/0,03) = +$; $(0,70/0,27/0,03) = x$; $(0,70/0,28/0,02) = \blacksquare$; $(0,60/0,395/0,005) = \blacktriangledown$; $(0,90/0,095/0,005) = \blacktriangle$; $(0,90/0,099/0,001) = \bullet$; e $1/H_p = 1,5$. A linha tracejada diagonal é a RMLE segundo Ha-
rris et al (19) . A linha tracejada vertical delimita nossa região de
interesse $\log m/m_\odot \gg -0,25$. A curva inferior destacada das demais re-
presenta uma particularidade física dos modelos empregados e não inte-
ressa aos objetivos deste trabalho .

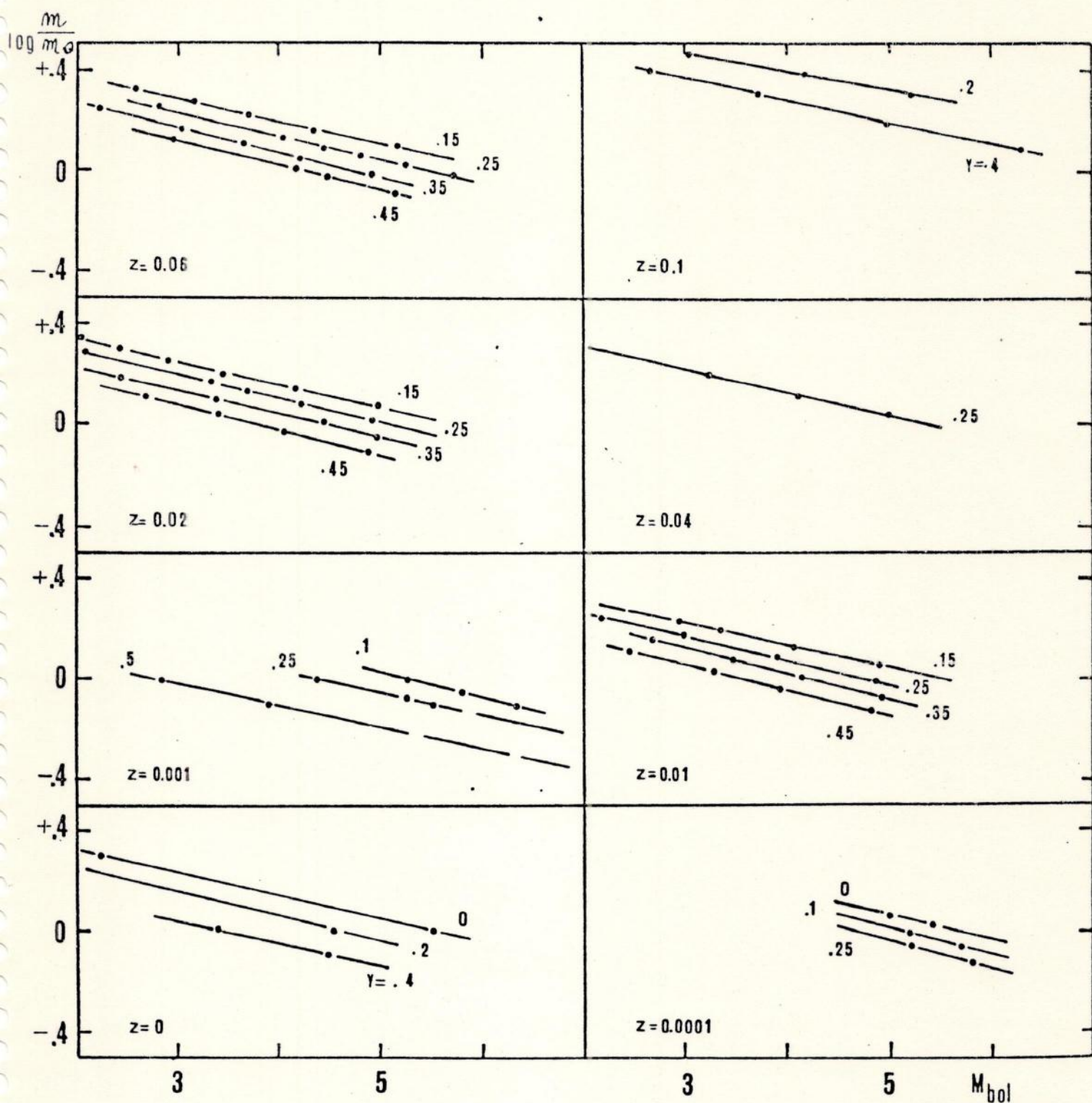


Fig. 12 - As Relações Massa-Luminosidade Teóricas segundo Caputo (3), para diferentes composições químicas, e $1/H_p = 1,0$.

grupo 3 . Isto poderia possivelmente sugerir uma carência de estrelas deficientes em metais na amostragem de Cester et al (6) .

III - 3

Testes de Homogeneidade

De posse dos valores calculados para as regressões lineares nos diferentes grupos, como procederíamos para determinar se as diferenças observadas são realmente significativas, a ponto de nos levar a aceitar a estratificação da amostra pelo índice metálico (Fe/H) ? Ao passo que chegamos à conclusão de que nada se pode afirmar quanto às diferenças nos coeficientes angulares diante dos elevados erros, ficou bastante clara uma tendência de deslocamento dos pontos-zero de M_{bol} com a metalicidade decrescente .

Uma hipótese prática, ainda que aproximada, de testarmos a validade da estratificação é buscarmos em nossa amostra total uma inhomogeneidade nos valores de M_{bol} , levando-nos a desconfiar da existência de subamostras que justificassem a atitude de estratificar a amostra total .

Uma maneira bem conhecida de se testar uma amostra quanto à homogeneidade é o teste do excesso . Utilizamos o momento de 4^a ordem em torno da média para avaliarmos o coeficiente de curtose

$$E = (\mu_4 / \sigma^4) - 3 \quad (7)$$

onde

$$\mu_4 = \frac{1}{N} \sum_i (M_{b_i} - \bar{M}_b)^4 \quad (8)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1} \sum_i (M_{b_i} - \bar{M}_b)^2 \quad (9)$$

onde \bar{M}_b é a magnitude absoluta bolométrica média para a amostra total e M_{b_i} é o valor da magnitude absoluta bolométrica da i-ésima estrela. Em nosso caso, temos que ::

$$N = 106 \quad \text{e} \quad \bar{M}_b = 4,629811321$$

onde tomamos todas as casas decimais para efeito de cálculo .

Obtivemos :

$$E = - 0,773$$

$$\sigma = 1,035$$

Calculamos também, a partir do momento de 3^a ordem em torno da média , o coeficiente de assimetria

$$A = -\mu_3 / \sigma^3 \quad (10)$$

onde

$$\mu_3 = \frac{1}{N} \sum_i (M_{b_i} - \bar{M}_b)^3 \quad (11)$$

e obtivemos :

$$A = -0,205$$

O coeficiente de assimetria negativo nos indica simplesmente que nossa amostra é concentrada em valores baixos de massa .

O coeficiente de excesso positivo nos indicaria uma inhomogeneidade na amostra, mas no entanto o valor negativo computado de forma alguma nos assegura que a amostra é homogênea . O resultado é portanto inconclusivo , e somos obrigados a utilizar critérios mais poderosos para aferir a nossa tentativa de estratificação .

III - 4

O Teste das Médias de Aspin-Welch

De espírito semelhante ao teste de homogeneidade, o que propomos agora é buscar uma diferença significativa entre os valores de magnitude absoluta bolométrica observados dentro dos grupos . Em termos práticos isso se traduz como uma comparação entre valores médios .

Dessa forma, nosso problema pode ser equacionado inicialmente da seguinte maneira : devemos testar a hipótese de que a média de M_{bol} em um dado grupo é significativamente diferente da média de um outro grupo, e devemos também testar a média de cada grupo contra a amostra total, a fim de determinar se faz sentido tomar cada grupo separadamente contra a amostra mais geral representada por todos os grupos reunidos . Em termos da teoria de teste de hipóteses estatísticas, o problema é assim descrito :

$$H_0 : \bar{M}_{b_i} = \bar{M}_{b_j} \quad ; \quad H_1 : \bar{M}_{b_i} \neq \bar{M}_{b_j} \quad (12)$$

Os parâmetros do teste :

$$v = \frac{s_i^2}{n_i} + \frac{s_j^2}{n_j} \quad (13)$$

$$t = \frac{\bar{M}_{b_i} - \bar{M}_{b_j}}{v^{1/2}} \quad (14)$$

$$f = v^2 \cdot \left[\frac{(s_i^2/n_i^2)^2}{n_i-1} + \frac{(s_j^2/n_j^2)^2}{n_j-1} \right]^{-1} \quad (15)$$

Nas equações de (12) a (15), \bar{M}_b^i representa a magnitude absoluta bolométrica média do i-ésimo grupo, \bar{M}_b^j aquela do j-ésimo grupo, H_0 é a hipótese de igualdade das médias do i-ésimo e do j-ésimo grupo, H_1 é a hipótese da diferença entre estas duas médias, s_i^2 é a variância do i-ésimo grupo, s_j^2 é a variância do j-ésimo grupo, n_i e n_j são os números de estrelas do i-ésimo e do j-ésimo grupo, respectivamente, e v é uma variável intermediária auxiliar.

De acordo com a teoria de teste de hipóteses, a variável t da equação (14) possui uma distribuição de probabilidade t de Student com aproximadamente f graus de liberdade, o valor de f sendo definido pela eq. (15) e devendo ser aproximado para um número inteiro. Este tipo de teste é conhecido pelo nome genérico de Teste de Aspin-Welch, no nosso caso sendo caracterizado um teste das médias. Uma discussão sobre este tipo de testes pode ser encontrada em Choi (8).

Os valores dos parâmetros principais para cada um dos grupos, a amostra total novamente sendo indexada por grupo 5, podem ser observados na tabela 5.

TABELA V

grupo	\bar{M}_b	s	n
1	4,29	0,770	12
2	4,85	1,170	41
3	4,41	0,862	43
4	5,09	1,178	10
5	4,63	1,035	106

Antes, porém, de emprendermos os testes, precisamos nos assegurar de que a amostra possui uma distribuição de magnitudes absolutas bolométricas aproximadamente normal, dentro do intervalo de massas que estamos especificando, uma vez que os testes de Aspin-Welch só estão definidos para distribuições normais de probabilidade.

Inicialmente, dividimos a amostra, seguindo o procedimento de estratificação por índice de metalicidade, em quatro grupos, mostrados na tabela VI, e indexados por algarismos romenos.

TABELA VI

grupo	intervalo	n	\bar{M}_b
I	$-0,25 \leq \log m/m_{\odot} \leq -0,15$	30	5,68
II	$-0,15 < \log m/m_{\odot} \leq -0,05$	32	4,72
III	$-0,05 < \log m/m_{\odot} \leq +0,05$	35	3,99
IV	$+0,05 < \log m/m_{\odot} \leq +0,15$	9	3,31

Antes de aferir a validade de uma distribuição normal para M_{bol} , no entanto, podemos a partir da estratificação da tabela 6 realizar uma interessante experiência acerca da influência direta do conteúdo metálico nas luminosidades estelares.

III - 5

A Influência Explícita da Metalicidade

Um resultado colateral de nossa nova estratificação por massa é a possibilidade de examinar o efeito direto do conteúdo metálico como parâmetro em relação à magnitude absoluta bolométrica. Argumentamos anteriormente que na eq. (1)

$$L = M^a R^b \mu^c$$

embora o expoente $c \sim 15/2$ tenha um valor elevado, a dependência do peso molecular médio não predominava sobre a dependência da massa, sendo apenas suficiente para prevenir uma dependência funcional exclusiva da massa. A faixa de variação, em termos práticos, do peso molecular médio μ é muito estrita se comparada a faixa de variação da massa M , e isto por si só é suficiente para garantir a preponderância forte da massa, quando consideramos os expoentes em questão.

Uma vez, porém, tendo dividido a amostra em intervalos de massa, podemos fazer uma verificação empírica da influência do parâmetro de metalicidade. A relação não é direta, uma vez que o peso molecular médio, definido como

$$\mu = \left(2X + 3/4 Y + 1/2 Z \right)^{-1} \quad (16)$$

expressão que é válida para os interiores estelares (supondo ionização completa), tem dependência apenas implícita no índice (Fe/H) , enquanto o parâmetro geral de abundância percentual de elementos pesados Z possui dependência explícita neste mesmo índice. Caputo (3) derivou uma relação entre $\log Z$ e (Fe/H) , válida para estrelas de composição semelhante à solar. Esta relação será discutida mais tarde.

Plotamos as estrelas contidas em cada grupo no plano $(M_{bol}, (Fe/H))$.

Os resultados podem ser observados, por exemplo, na figura 13, correspondente ao grupo I (ver tabela 6) e ao intervalo de massas $-0,25 \leq \log m/m_{\odot} \leq -0,15$, e portanto às estrelas menos massivas. O aspecto do gráfico é decepcionante, uma vez que não é possível caracterizar uma relação linear entre M_{bol} e (Fe/H) , sequer de maneira aproximada. Observamos que a partir de um fluxo central de 25 estrelas, relativamente bem definido, 5 objetos apresentam um enorme desvio. Estes objetos estão assinalados na fig.13, e são HD 25329, HD 103095 (identificada como variável), HD 65583, HD 6582 e HD 224930. Enquanto que as duas últimas estrelas já foram identificadas previamente como sendo algo problemáticas, os demais objetos não apresentam características estranhas, e portanto não há como tentar justificar este comportamento. O caráter fraco do índice de metalicidade de direcionar uma relação linear com M_{bol} , ao realizarmos uma estratificação por massa, fica ainda mais evidenciado se fizermos uma comparação com as regressões obtidas para a estratificação por metalicidade das figs. 5, 6, 7 e 8.

III - 6

O Teste de Qui-Quadrado

Tomamos então a amostra total, e experimentamos dois tipos de histogramas, que podem ser vistos nas tabelas 7 e 8.

TABELA VII

intervalo	frequência absoluta
$-0,25 \leq \log m/m_{\odot} \leq -0,225$	3
$-0,225 < \log m/m_{\odot} \leq -0,20$	7
$-0,20 < \log m/m_{\odot} \leq -0,175$	8
$-0,175 < \log m/m_{\odot} \leq -0,15$	12
$-0,15 < \log m/m_{\odot} \leq -0,125$	11
$-0,125 < \log m/m_{\odot} \leq -0,10$	6
$-0,10 < \log m/m_{\odot} \leq -0,075$	5
$-0,075 < \log m/m_{\odot} \leq -0,05$	10
$-0,05 < \log m/m_{\odot} \leq -0,025$	12
$-0,025 < \log m/m_{\odot} \leq 0,00$	12
$0,00 < \log m/m_{\odot} \leq +0,025$	3
$+0,025 < \log m/m_{\odot} \leq +0,05$	8
$+0,05 < \log m/m_{\odot} \leq +0,075$	2
$+0,075 < \log m/m_{\odot} \leq +0,10$	3
$+0,10 < \log m/m_{\odot} \leq +0,125$	1
$+0,125 < \log m/m_{\odot} \leq +0,15$	3

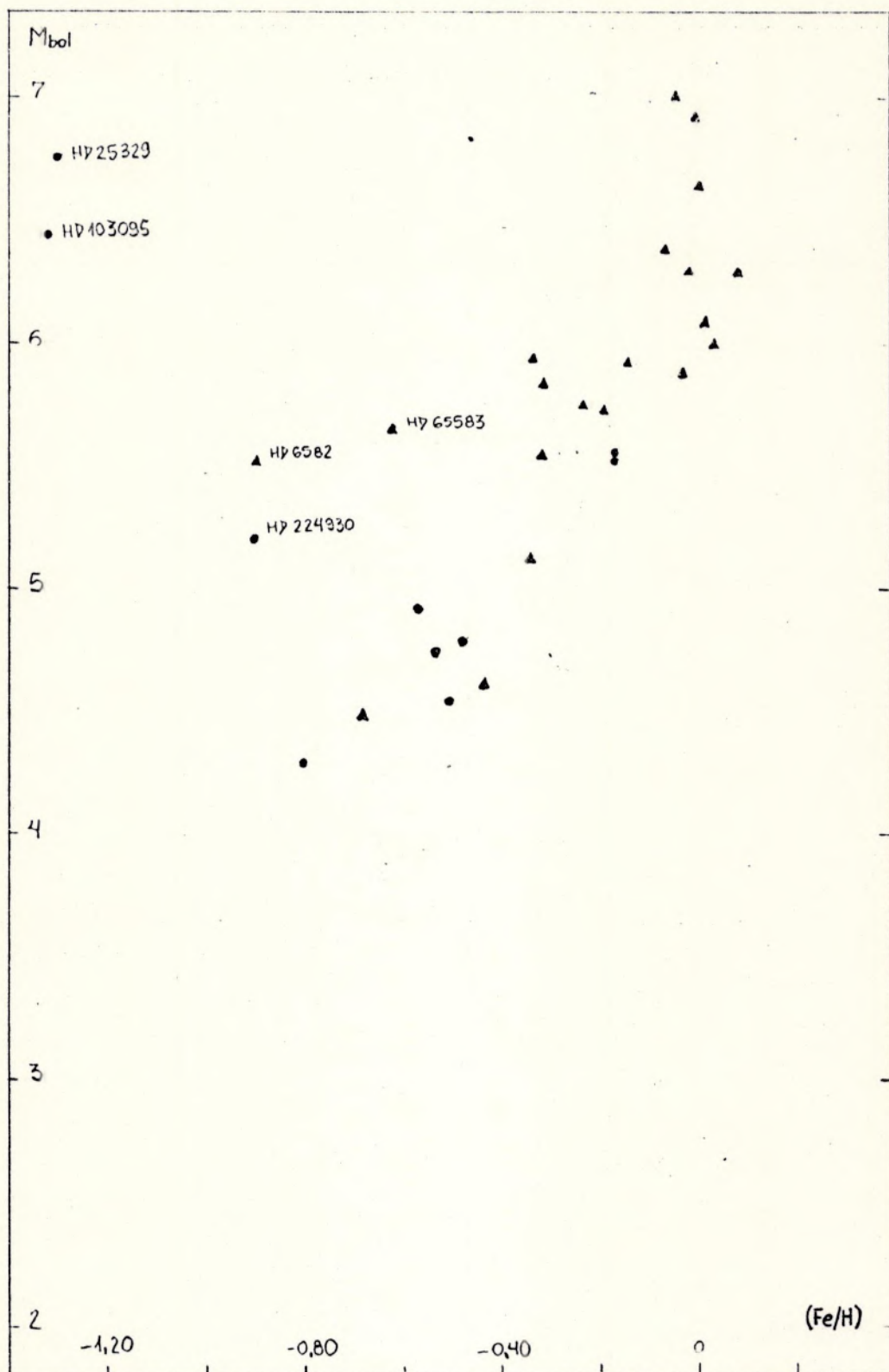


Fig. 13 - Plotagem no plano (M_{bol} , $[Fe/H]$) das estrelas na faixa $-0,25 \leq \log m/m_{\odot} \leq -0,15$. Os objetos assinalados estão discutidos no texto.

TABELA VIII

intervalo	frequência absoluta
$-0,25 \leq \log m/m_{\odot} \leq -0,20$	10
$-0,20 < \log m/m_{\odot} \leq -0,15$	20
$-0,15 < \log m/m_{\odot} \leq -0,10$	17
$-0,10 < \log m/m_{\odot} \leq -0,05$	15
$-0,05 < \log m/m_{\odot} \leq 0,00$	24
$0,00 < \log m/m_{\odot} \leq +0,05$	11
$+0,05 < \log m/m_{\odot} \leq +0,10$	5
$+0,10 < \log m/m_{\odot} \leq +0,15$	4

O teste de qui-quadrado para a qualidade de ajuste é realizado supondo-se que uma distribuição normal de média \bar{x} e desvio-padrão σ pode representar o histograma observacional, onde \bar{x} e σ correspondem à média e a variância da amostragem. No caso, $\bar{x} = \overline{\log m/m_{\odot}}$, o valor médio do logaritmo da massa relativa, e σ o seu respectivo desvio-padrão. O correspondente teorema pode ser encontrado em Choi (8).

A equação da normal ajustante é

$$E_i = \frac{N \delta x}{\sigma \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)^2 \right] \quad (17)$$

onde

x_i = valor de $\log m/m_{\odot}$ no centro do i -ésimo intervalo ;

N = número total de estrelas ;

δx = extensão do intervalo ;

E_i = frequência absoluta esperada no i -ésimo intervalo ;

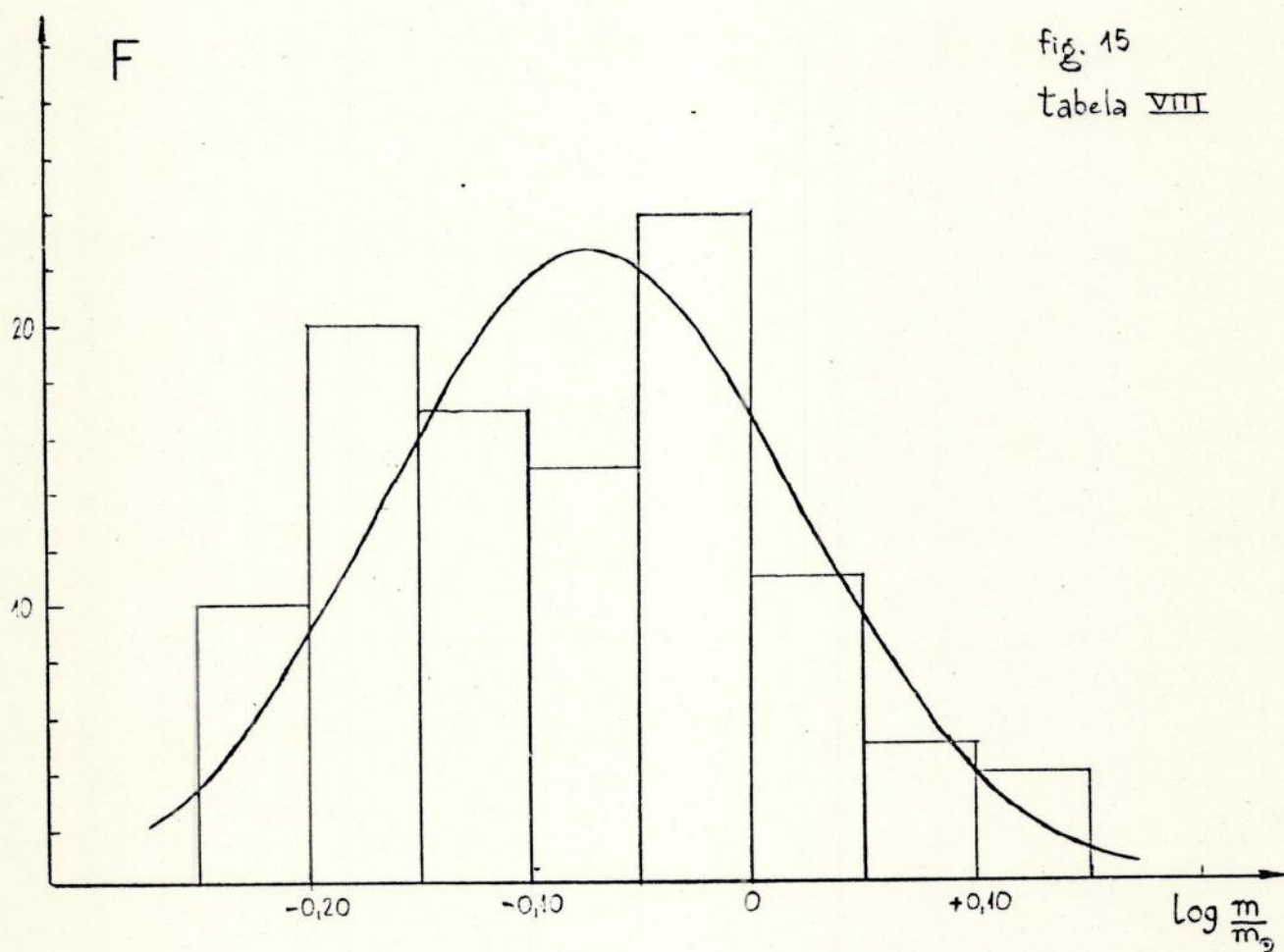
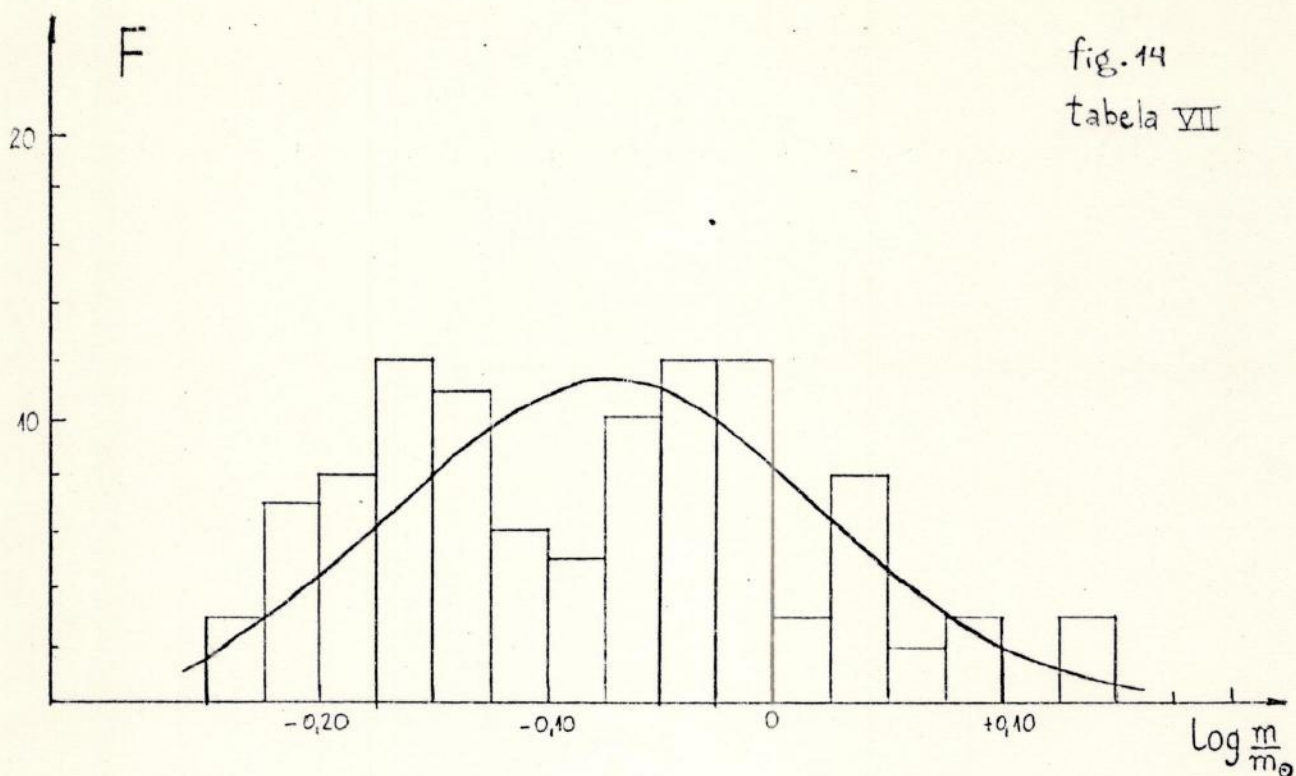
Para a amostragem total, temos que

$$\overline{\log m/m_{\odot}} = -0,07334905660$$

$$\sigma = 0,09305840894$$

Os histogramas e as respectivas normais ajustantes, correspondentes às tabelas 7 e 8, podem ser vistos, respectivamente, nas figuras 14 e 15.

O teste de qui-quadrado afirma que a variável



Figs. 14 e 15 - Distribuição de frequência dos valores de M_{bol} para toda a amostra nos intervalos de $\log m/m_{\odot}$. De baixo para cima, os histogramas e as normais ajustantes correspondentes, respectivamente, às tabelas 7 e 8. A ordenada é F , frequência absoluta.

$$X = \sum_{i=1}^K \left(\frac{f_i - E_i}{E_i} \right)^2 \quad (18)$$

onde k é o número de intervalos considerados, f_i é a frequência absoluta observada e E_i é calculado de acordo com a eq.(17), possui uma distribuição de probabilidade Qui-Quadrado com $k-1$ graus de liberdade. Aceitamos a hipótese de que a distribuição pode ser representada como uma curva normal se, para o número de graus de liberdade em questão, o valor de X calculado pela eq.(18) estiver no interior do intervalo de confiança considerado.

Calculado o valor de X , e verificada a probabilidade, chegamos à conclusão de que, ao nível de confiança de 95%, a hipótese da distribuição normal é aceita para ambos os histogramas. Podemos então entender os testes de Aspin-Welch dentro dos limites de sua validade.

III - 7

Cálculo dos Testes de Aspin-Welch

Os resultados obtidos para os testes são reunidos na tabela 9. A intersecção das legendas expressa o teste realizado entre os grupos em questão. Novamente a amostra total é indexada por grupo 5.

TABELA IX

GRUPOS	2	3	4	5
1	f = 27 t = 1,959 H ₀ aceita	f = 19 t = 0,490 H ₀ aceita	f = 15 t = 1,846 H ₀ aceita	f = 16 t = 1,413 H ₀ aceita
2	—	f = 73 t = 1,945 H ₀ aceita	f = 14 t = 0,572 H ₀ aceita	f = 66 t = 1,050 H ₀ aceita
3	—	—	f = 11 t = 1,708 H ₀ aceita	f = 93 t = 1,322 H ₀ aceita
4	—	—	—	f = 10 t = 1,182 H ₀ aceita

Onde vemos então que, contrariamente ao que concluímos a partir do comportamento das regressões, não há diferenças significativas nos valores de M_{bol} assumidos dentro de cada grupo.

Ao passo que, a nível teórico, as SPIZ podem ser prontamente estratificadas em termos do parâmetro Z (vide fig. 3), chegamos ao resultado de que, em nossa amostragem, a estratificação por índice metálico (Fe/H), não é suficiente para caracterizar, a nível de significância estatística, RMLEs separadas para cada grupo.

Podemos ter um sentimento mais forte em relação ao porque disto observando algumas características mais específicas de cada grupo apresentadas na tabela 10.

TABELA X.

grupo	intervalo de massas	$\log m/m_{\odot}$	intervalo de M_{bol}	\bar{M}_{bol}
1	$-0,07 \leq \log m/m_{\odot} \leq +0,14$	+0,035	$3,29 \leq M_{bol} \leq 5,54$	4,29
2	$-0,25 \leq \log m/m_{\odot} \leq +0,15$	-0,055	$2,53 \leq M_{bol} \leq 7,01$	4,85
3	$-0,20 \leq \log m/m_{\odot} \leq +0,06$	-0,10	$3,01 \leq M_{bol} \leq 5,94$	4,41
4	$-0,25 \leq \log m/m_{\odot} \leq -0,06$	-0,17	$3,27 \leq M_{bol} \leq 6,75$	5,09

Enquanto é nossa expectativa que houvesse um deslocamento progressivo dos valores de M_{bol} para luminosidades maiores à medida que a metalicidade decrescesse, o que verificamos na verdade é que o valor médio de M_{bol} se desloca para luminosidades menores quando caminhamos do grupo 1 para o grupo 4.

No entanto, as RMLEs computadas evidenciaram o deslocamento dos pontos-zero de M_{bol} no sentido previsto, ou seja, para cada grupo, o comportamento médio dos parâmetros M_{bol} e $\log m/m_{\odot}$ foi suficiente para definir a tendência de deslocamento dos pontos-zero de forma conclusiva.

Embora os intervalos de M_{bol} cobertos por cada grupo não difiram muito, vemos na tabela 10 que os intervalos de massa cobertos por cada grupo se estreitam, e de um modo geral se concentram em valores mais baixos, quando a metalicidade decresce. Isto se verifica particularmente nos dois últimos grupos, contendo as estrelas mais deficientes em metais. Os valores médios de $\log m/m_{\odot}$ para cada grupo mostram uma tendência nítida de deslocamento sistemático para menores valores de massa enquanto a metalicidade decresce.

Podemos, no entanto, analisar o comportamento fino de cada grupo da seguinte maneira: associamos, em cada grupo, o valor mais alto de $\log m/m_{\odot}$ com o maior valor de luminosidade. Ao passo que isto talvez não reflita o comportamento real ponto a ponto, deste modo torna-se bem mais revelador o comportamento real médio dos objetos que cada gru-

po contém . Associando os valores extremos dos intervalos da maneira descrita, e analisando os dois últimos grupos, observamos uma tendência real dos valores de M_{bol} de se deslocarem para luminosidades maiores com a metalicidade decrescente, uma vez que uma faixa de massas concentrada em baixos valores não causou uma igual concentração de M_{bol} em valores de baixa luminosidade . Este efeito é particularmente verificado no grupo 4, que cobre o menor intervalo de massas entre os quatro grupos .

Ao realizarmos portanto o teste das médias de Aspin-Welch, não estamos testando as características dos grupos que revelariam o comportamento esperado . O caráter médio dos valores dos parâmetros em termos de sua distribuição no plano (M_{bol} , $\log m/m_{\odot}$) é o que define a RMLE dentro de cada grupo, e a natureza extremamente aproximativa do teste de Aspin-Welch torna-o fraco ao nos propomos a analisar tendências gerais de regressões lineares que, embora definidas para os mesmos parâmetros, são calculadas em subamostras visivelmente discrepantes entre si, em relação do comportamento das estrelas que contém .

Somos, no entanto, obrigados a aceitar a natureza tendenciosa do teste de Aspin-Welch neste caso . Podemos, contudo, empregar algumas técnicas mais poderosas para a solução do problema .

III - 9

Um Teste Não-Paramétrico

O nosso objetivo, nos termos mais gerais possíveis, é testar se pode ser atribuída alguma significância estatística à separação da amostra em diferentes grupos de acordo com o índice metálico, e o cálculo separado das RMLEs .

Até o presente momento, temos procurado evidenciar, a nível de amostragem, alguma diferença entre os grupos que justificasse a estratificação proposta . Neste tipo de análise, a tendenciosidade intrínseca das subamostras mascarou o fato de que o comportamento médio de cada subamostra é suficiente para evidenciar uma diferença significativa nas RMLEs .

Podemos nos aproveitar deste fato para propor uma nova análise, bastando para isso equacionar o problema de outra forma .

Observamos na tabela IV que, para todos os grupos, o desvio-padrão do ajuste particular é sempre sensivelmente menor que o desvio-padrão do ajuste global de toda a amostra tomado somente dentro do grupo em questão .

Este fato é imediatamente verificado nas figs. 5, 6, 7 e 8 . Enquanto que, por definição do método dos mínimos quadrados, o desvio-padrão mínimo sempre será dado pelo ajuste particular, caso não houvesse uma diferença sensível entre os desvios-padrão, seria um motivo para supor que um ajuste particular, estratificado por índice metálico, não acres

centa nenhuma informação, de modo que o ajuste global é suficientemente representativo por si só .

Dessa forma, devemos ser capazes de testar quantitativamente a significância estatística da diferença entre os dois ajustes, que não são influenciados pelas tendenciosidades amostrais intrínsecas descritas .

Para realizar este teste, inicialmente selecionamos dentre os quatro grupos o de número 2 , contendo estrelas de metalicidade solar média, na faixa de $-0,15 < (Fe/H) \leq +0,15$, uma vez que é o que apresenta mais alto coeficiente de correlação e a relação linear mais bem definida , além de ser o que cobre o maior intervalo de valores, tanto em $\log m/m_{\odot}$ quanto em M_{bol} .

A proposta é analisar os resíduos ponto a ponto, e determinar se os resíduos deixados pelo ajuste particular do grupo são significativamente menores que os resíduos deixados pelo ajuste geral .

A distribuição dos resíduos (ao quadrado) , em frequência absoluta por intervalo de resíduos, dos ajustes particular e geral para os quatro grupos, podem ser observados , respectivamente, nas figs. 16 e 17 .

Fica evidente destes histogramas que, a princípio, não podemos assumir para estas distribuições de frequência uma distribuição particular . Temos portanto que recorrer a um teste não-paramétrico a fim de aferir uma diferença significativa entre as duas distribuições .

Os testes não-paramétricos são em geral bem menos poderosos do que os testes realizados sob a hipótese de uma determinada distribuição de probabilidade . Choi (8) provê uma interessante discussão sobre a aplicabilidade dos testes não-paramétricos, e argumenta que estes testes controlam melhor a probabilidade de rejeitar falsamente a hipótese quando a população não é normal .

O teste de ordenação que discutiremos agora é quase tão eficiente quanto o conhecido teste t de Student (um caso particular dos testes de Aspin-Welch quando as variâncias das amostragens são iguais) quando as distribuições são normais, requerindo de 5 % a 10 % mais observações para ser igualmente poderoso . O fato motivador em nossa situação é que o teste de ordenação pode ser muito mais poderoso que o teste t de Student para algumas distribuições não-normais .

O teste que empregaremos é o teste de ordenação para o caso de amostras relacionadas , conhecido como teste de ordenação com sinal para pares acoplados de Wilcoxon (Choi (8)) . Para o caso de uma amostra X e outra Y , onde temos pares associados (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , ... (X_n, Y_n) , cada amostra com uma distribuição de probabilidade $f_1(X)$ e $f_2(Y)$, a hipótese a ser testada é a de que as duas amostras têm distribuições idênticas :

$$H_0 : f_1(X) = f_2(Y) \quad (19)$$

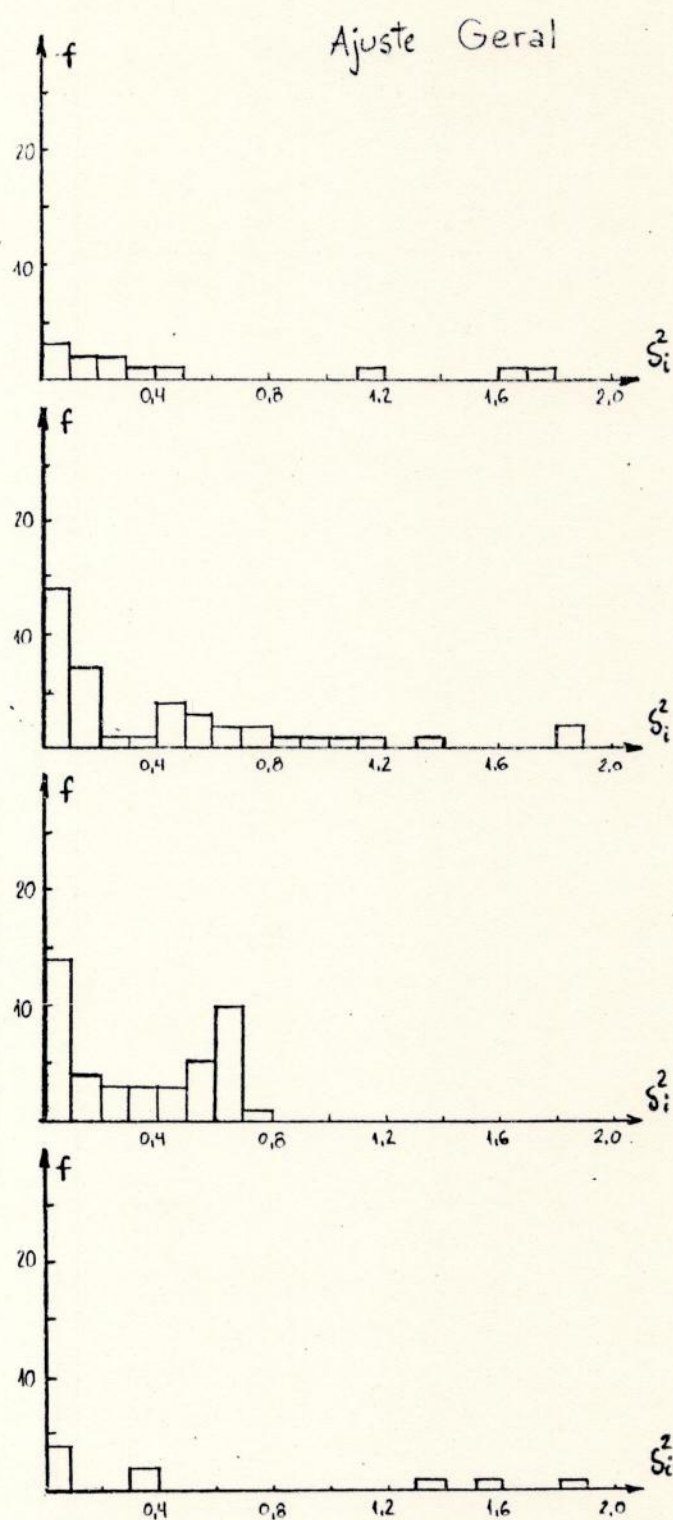
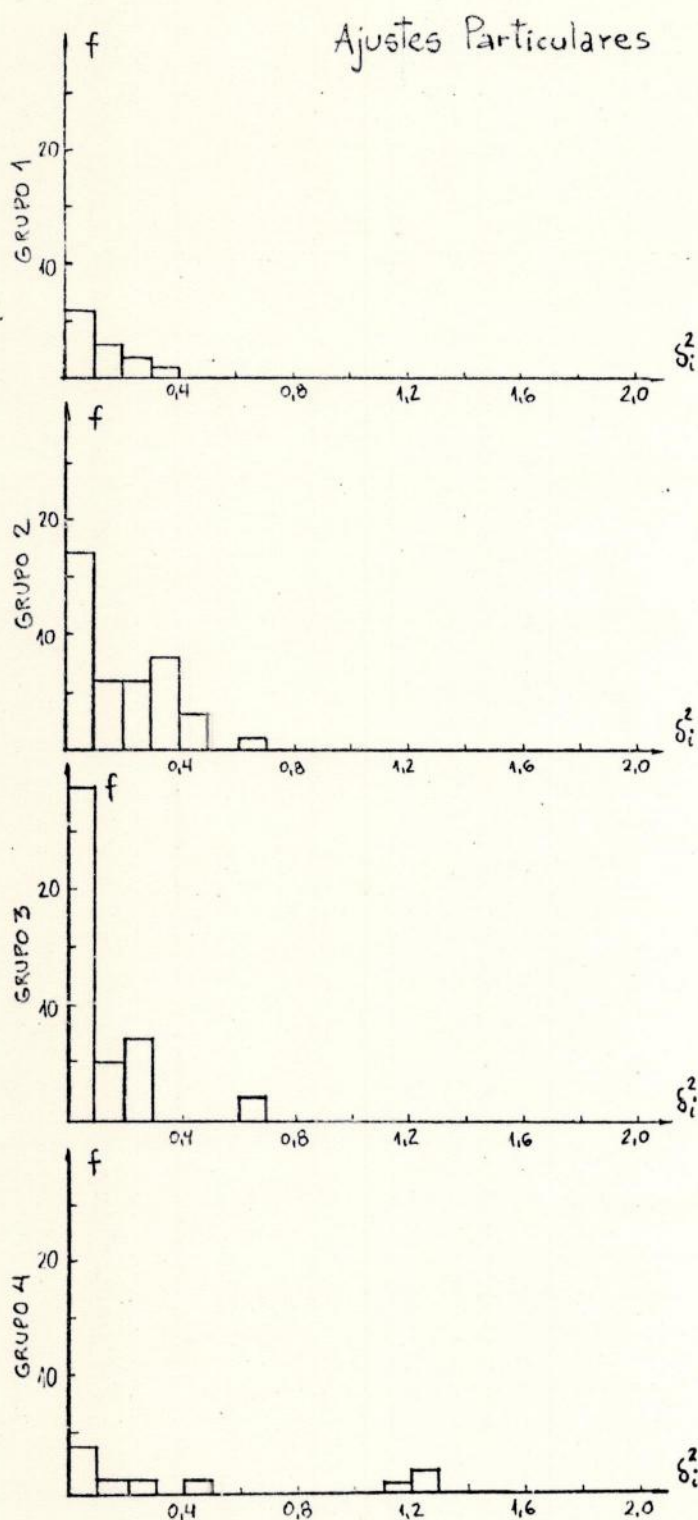


FIG. 16

FIG. 17

Figs. 16 e 17 - Distribuições dos resíduos ao quadrado dos ajustes particular (fig.16) e geral (fig.17) para os quatro grupos , de acordo com os intervalos de S_i^2 , desvio ao quadrado do i -ésimo objeto . A ordenada é frequência absoluta .

contra a alternativa de que as medianas são diferentes, uma vez que em termos práticos podemos tomar a igualdade das medianas como a igualdade das distribuições. A amostra X representa os resíduos do ajuste particular, a amostra Y os do ajuste geral.

Procedemos como se segue: para cada (X_i, Y_i) , avaliamos a variável $D_i = (X_i, Y_i)$, e arranjamos os valores em módulo, ignorando o sinal de D_i . Ordenamos tais valores atribuindo-lhes números de acordo com os valores crescentes dos módulos. Afixamos a cada número de ordenação o sinal original de D_i , e determinamos a estatística S , o valor menor entre as duas diferentes somas: a dos números de ordenação positivos e a dos números de ordenação negativos. Intuitivamente, esperaríamos que as somas dos números de ordenação com o mesmo sinal fossem aproximadamente iguais quando H_0 for verdadeira.

Para amostras grandes, como é o caso, a distribuição da estatística S pode ser satisfatoriamente aproximada por uma distribuição normal com a média e a variância dadas, respectivamente, por

$$E(S) = \frac{N(N+1)}{4} \quad (20)$$

$$\sigma_S^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{24} \quad (21)$$

onde N é o número de estrelas do grupo. Usamos a estatística de teste

$$Z = \frac{S - E(S)}{\sigma_S} \quad (22)$$

cujo valor de probabilidade pode ser aferido em uma tabela da distribuição normal.

Realizamos o teste para o grupo 2, e ao nível de confiança usual de 95%, obtivemos a negação de H_0 , ou seja, as distribuições diferem significativamente, de modo que no grupo 2 o ajuste particular é sensivelmente superior ao ajuste global.

Em termos práticos do cálculo de uma RMLE, isto equivale a dizer que a separação do grupo 2 da amostra geral, usando como critério o índice metálico, produziu um ajuste mais preciso da RMLE dentro deste grupo.

Aplicando o teste no grupo 3, que se equipara ao grupo 2 em termos do número de estrelas e da boa definição do relacionamento linear da RMLE, obtivemos o mesmo resultado.

Buscando um pouco mais de rigor no teste, verificamos que para ambos os grupos a hipótese H_0 é negada ao nível de significância de 99%.

Embora estes resultados nos deveriam levar à aplicação do teste nos grupos 1 e 4, cremos ser mais prudente excluir os extremos de metalicidade do teste. Uma vez que estamos realizando uma comparação entre du

-as regressões lineares, é desejável uma excelente definição quanto ao comportamento médio dos dados observacionais . Portanto, embora tenhamos argumentado a favor da boa definição da RMLE nos grupos 1 e 4, o reduzido número de objetos que estes grupos contém nos leva a excluí-los do teste .

Citamos porém, sem pretensões de utilizar o fato nas conclusões, que a aplicação do teste no grupo 1 negou a hipótese H_0 ao nível de 95 % porém aceitou-a ao nível de 99 % . Para o grupo 4, a hipótese H_0 foi aceita em ambos os níveis . Estes resultados são considerados inteiramente inconclusivos .

III - 10

Conclusões

Os dois procedimentos adotados para aferir a qualidade das RMLEs computadas nos levam a duas conclusões opostas . Dentro das restrições quanto à metodologia dos testes, cada qual merece um tipo diferente de crítica .

Em relação ao teste das médias de Aspin-Welch, apontamos a sua incapacidade de distinguir de forma quantitativa o que um rápido exame qualitativo evidenciou sem grandes dificuldades, o que nos levou a concluir erroneamente que não havia uma diferença significativa do comportamento das magnitudes absolutas bolométricas entre os grupos .

Podemos então afirmar que para levar a cabo com sucesso um estudo semelhante ao proposto, necessitamos de uma amostragem de estrelas com parâmetros bem determinados na região quente do diagrama HR . Em outras palavras, nossa RMLE tem carência de estrelas massivas .

Em relação ao teste de ordenação com sinal para pares acoplados de Wilcoxon, o que temos a observar quanto a uma possível interpretação falha leva em consideração o fato de estarmos testando distribuições de resíduos ao quadrado . Uma vez que buscamos evidenciar diferenças entre os dois ajustes, os efeitos a serem avaliados podem ser mascarados pela forte dependência dos resíduos em relação à posição individual de cada objeto na regressão linear . Dentro dos elevados erros observacionais, seria necessária uma amostra muito maior do que a disponível para definir com suficiente precisão as diferenças pesquisadas .

Como conclusão final, achamos que dentro da amostra disponível há uma significância perceptível no cálculo das RMLEs estratificados por índice metálico . As ferramentas utilizadas, no entanto, não nos permitem sermos absolutamente conclusivos quanto a esta interessante questão .

A P Ê N D I C E

O objetivo deste anexo é realizar uma comparação entre as relações massa-luminosidade teóricas obtidas por Copeland et al (9) e Caputo (3), correspondentes às figs. 11 e 12, respectivamente. Essas relações compreendem a dependência funcional da magnitude absoluta bolométrica em massa e parâmetros de composição.

As relações massa-luminosidade teóricas são, segundo Copeland et al (9)

$$M_{bol} = 11,37 + 9,61 \log(X-0,061) + 3,96 \log(Z+0,039) - 11,77 \log m/m_{\odot} \quad (23)$$

válida para $3,70 \leq M_{bol} \leq 7,10$, e, segundo Caputo (3)

$$M_{bol} = 8,39 - 6,09 Y + 0,92 \log(Z + 0,001) - 11,49 \log m/m_{\odot} \quad (24)$$

válida para $2 \leq M_{bol} \leq 7$.

Caputo (3) derivou duas relações válidas para estrelas de composição solar média, $Y = 0,25 / 0,28$, e $Z = 0,015 / 0,020$, que são

$$Y - Y_{\odot} = (0,30 \pm 0,01) (Fe/H) \quad (25)$$

$$\log Z/Z_{\odot} = (0,80 \pm 0,02) (Fe/H) \quad (26)$$

As suposições dos modelos utilizados para determinações de massa incluíam $X = 0,70$, com Z variável.

Introduzindo (25), (26) em (23), (24), e tomando os valores médios dos intervalos expostos, $Y_{\odot} = 0,265$, $Z_{\odot} = 0,0175$, obtemos, segundo Copeland et al (9)

$$M_{bol} = 9,501 + 3,96 \log(0,0175 \cdot 10^{0,80(Fe/H)} + 0,039) - 11,77 \log m/m_{\odot} \quad (27)$$

e, segundo Caputo (3)

$$M_{bol} = 6,563 + 0,92 \log(0,0175 \cdot 10^{0,80(Fe/H)} + 0,001) - 11,49 \log m/m_{\odot} \quad (28)$$

dentro dos limites de validade citados anteriormente.

Essas relações podem ser comparadas com os pontos observados para o grupo 2, de metalicidade solar média, correspondendo à $-0,15 < (Fe/H) \leq +0,15$.

Para efeitos de comparação empírica, calculamos uma regressão bilinear M_{bol} versus $(\log m/m_{\odot}, (Fe/H))$ para a amostra total, e obtemos

$$M_{bol} = 4,085 + 1,25 (Fe/H) - 10,657 \log m/m_{\odot} \quad (29)$$

válida para $2,5 \leq M_{\text{bol}} \leq 7$, com um desvio-padrão de $\sigma = 0,55$, em comparação com o erro observacional médio $\sigma_{M_{\text{bol}}} = 0,33$. Não foram calculados erros para os coeficientes.

A proposta é escalonar os três conjuntos de relações mass-luminosidade por índice metálico e plotar as regressões lineares resultantes no plano $(M_{\text{bol}}, \log m/m_{\odot})$, para o grupo 2. O intervalo $-0,15 < (\text{Fe}/\text{H}) \leq +0,15$ foi dividido em cinco valores de (Fe/H) . A seguir, expomos as relações obtidas para cada valor de (Fe/H) , na seguinte ordem: a relação de Copeland et al (9), a de Caputo (3) e a obtida a partir da eq. (29).

Para $(\text{Fe}/\text{H}) = +0,15$,

$$M_{\text{bol}} = 4,721 - 11,77 \log m/m_{\odot}$$

$$M_{\text{bol}} = 5,074 - 11,49 \log m/m_{\odot}$$

$$M_{\text{bol}} = 4,273 - 10,66 \log m/m_{\odot}$$

Para $(\text{Fe}/\text{H}) = +0,08$,

$$M_{\text{bol}} = 4,642 - 11,77 \log m/m_{\odot}$$

$$M_{\text{bol}} = 5,025 - 11,49 \log m/m_{\odot}$$

$$M_{\text{bol}} = 4,185 - 10,66 \log m/m_{\odot}$$

Para $(\text{Fe}/\text{H}) = 0,00$,

$$M_{\text{bol}} = 4,559 - 11,77 \log m/m_{\odot}$$

$$M_{\text{bol}} = 4,969 - 11,49 \log m/m_{\odot}$$

$$M_{\text{bol}} = 4,085 - 10,66 \log m/m_{\odot}$$

Para $(\text{Fe}/\text{H}) = -0,08$,

$$M_{\text{bol}} = 4,485 - 11,77 \log m/m_{\odot}$$

$$M_{\text{bol}} = 4,913 - 11,49 \log m/m_{\odot}$$

$$M_{\text{bol}} = 3,985 - 10,66 \log m/m_{\odot}$$

Para $(\text{Fe}/\text{H}) = -0,15$,

$$M_{\text{bol}} = 4,425 - 11,77 \log m/m_{\odot}$$

$$M_{\text{bol}} = 4,865 - 11,49 \log m/m_{\odot}$$

$$M_{\text{bol}} = 3,898 - 10,66 \log m/m_{\odot}$$

As relações podem ser observadas na fig.18. A relação (27) de Copeland et al (9) se ajustou muito bem aos dados observacionais, assim como a relação bilinear obtida neste trabalho.

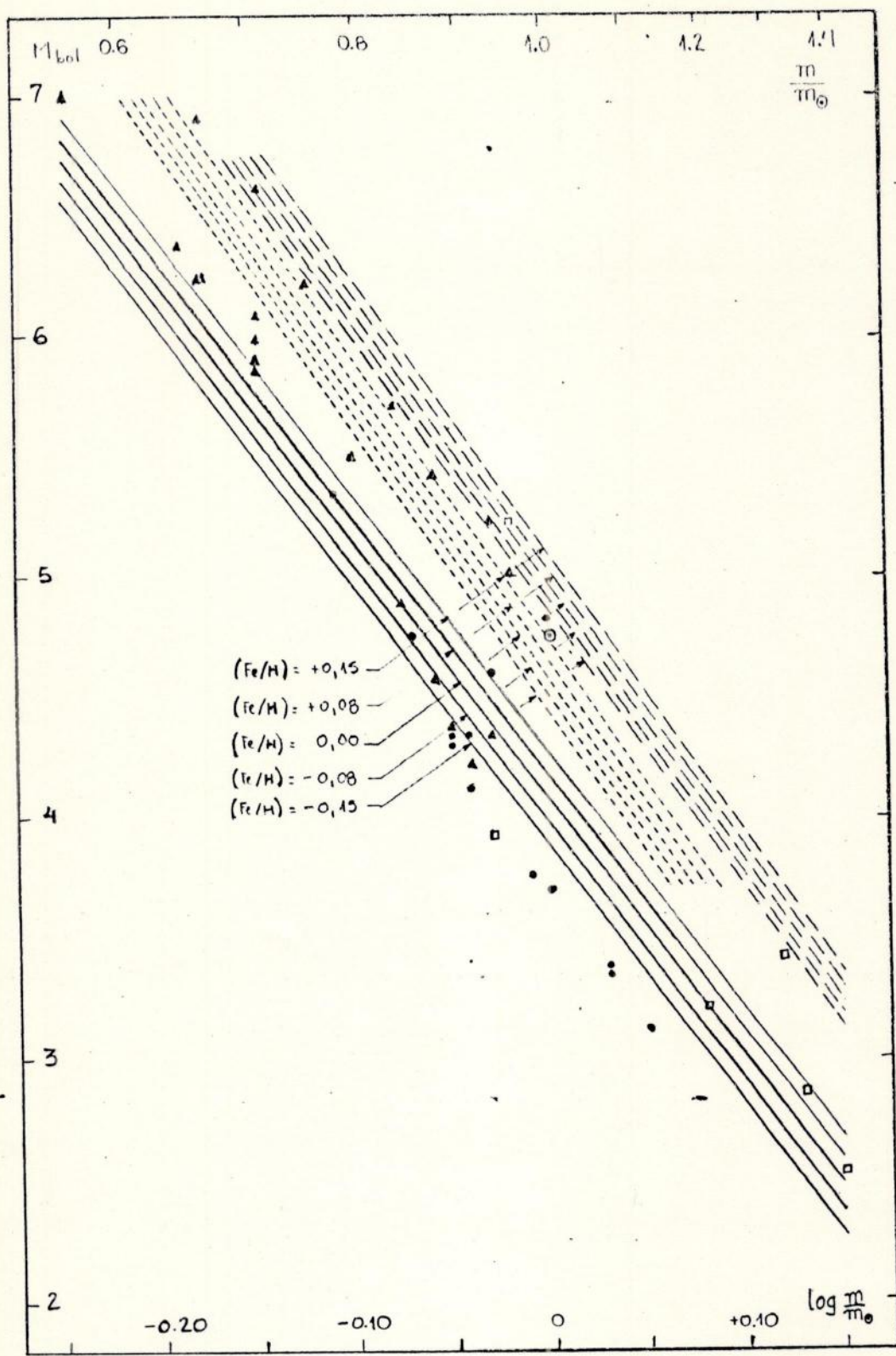


Fig. 18 - Comparação entre as relações massa-luminosidade teóricas de Caputo (3) (traços longos) e Copeland et al (9) (traços curtos) e as RMEs obtidas com a regressão bilinear da eq. (29) (retas cheias) , para os diferentes índices metálicos assinalados .

REFERÊNCIAS

- (1) Allen, C. W. ; Astrophysical Quantities (1973)
- (2) Audouze, J. , Tinsley, B., Ann. Rev. Astron. Astrophys., 14 (1976)
- (3) Caputo, F. , Astrophys. Space Sci. , 49 , 113-122 (1977)
- (4) Cayrel, R., Cayrel, G. , Astrophys. J. , 137, 431, (1963)
- (5) Cester, B., Mem. Soc. Astron. Ital. , 36 , 215 (1965)
- (6) Cester, B., Ferluga, S., Boehm, C. , Astrophys. Space Sci. , 96, 1 (1983)
- (7) Chauvenet, W. , A Manual of Spherical and Practical Astronomy ,
J. B. Lippincott Co. (1906)
- (8) Choi, S. C. , Applied Statistics in Science, Prentice-Hall Inc.
(1978)
- (9) Copeland, H., Jensen, J. O., Jørgensen, H. E. , Astron. Astrophys.
5 , 12 (1970)
- (10) Delhaye, J. , Stars and Stellar Systems, vol. 5, p. 61 (1965)
- (11) Eddington
- (12) Eggen, O. J., Roy. Obs. Bull. , 51 (1962)
- (13) Eggen, O. J. , Astrophys. J. Suppl. , 8 , 125 (1963)
- (14) Eggen, O. J., Roy. Obs. Bull. , 84 (1964)
- (15) Eggen, O. J. , Astron. J. , 70 , 19 (1965)
- (16) Eggen, O. J. , Ann. Rev. Astron. Astrophys. , 5 , 105 (1967)
- (17) Eggen, O. J., Greenstein, J. L. , Astrophys. J., 141, 83 (1965)
- (18) Gliese, W. , Veröff, Astron. Recheninst, Heidelberg, 22 (1969)
- (19) Harris, P. L., III, Strand, K. Aa. e Worley, C. E., Basic Astronomical
Data, Chicago, University of Chicago Press, p. 273 (1963)
- (20) Hoffleit, D., The Bright Star Catalogue, 4th Revised Edition ,
New Haven, Connecticut, USA, Yale University Observatory (1982)
- (21) Hearnshaw, B., Astron. Astrophys. , 51, 71 (1976)
- (22) Hearnshaw, B., Astron. Astrophys. , 51, 85 (1976)
- (23) Heintz, W. D., Double Stars, D. Reidel Publ. Co., Dordrecht
Holland, p. 59 (1978)
- (24) Hejlesen, P. M., comunicação privada (1975)
- (25) Jaschek, M. , comunicação privada (1976)
- (26) Jenkins, L. F., General Catalogue of Trigonometric Parallaxes
Yale University Obs. (1952)
- (27) Jenkins, L. F., Suppl. to the General Catalogue of Trigonometric
Parallaxes , Yale University Obs. (1963)
- (28) Johnson, H. L., Ann. Rev. Astron. Astrophys. , 5, 571 (1967)
- (29) Johnson, H. L., MacArthur, J. W., Mitchell, R. I., Astrophys. J.
152 , 465
- (30) Kuiper, G. P., Astrophys. J., 88, 472 (1938)
- (31) McCluskey, G. E., Jr., Kondo, Y., Astrophys. Space Sci. , 17,
134-149 (1972)
- (32) Menzel, Donald H., Bhatnagar, P. L., Sen, H. K. , Stellar Interiors,
Chapman Hall , London (1963)

- (33) Morel, M., Bentolila, C., Cayrel de Strobel, G., Hauck, B.
Abundance Effects in Classification, IAU Symp. 72, eds. B. Hauck,
P. C. Keenan, D. Reidel, Dordrecht, Holland (1975)
- (34) Pagel, B. E. J., Roy, Obs. Bull., 87 (1964)
- (35) Perrin, M. N., Astron. Astrophys., 44, 9 (1975)
- (36) Perrin, M. N., Abundance Effects in Classification, IAU Symp. 72
(1975)
- (37) Perrin, M. N., Tese de Doutorado, Obs. Paris-Meudon (1975)
- (38) Perrin, M. N., Hejlesen, P. M., G. Cayrel de Strobel e R. Cayrel
Astron. Astrophys., 54, 779-795 (1977)
- (39) Petrie, R. M., Publ. Dominion, Astrophys. Obs. Victoria, 8, 341
(1950)
- (40) Strand, K. Aa., Hall, R. G., Astrophys. J., 120, 322 (1954)
- (41) van de Kamp, P., Astron. J., 59, 447 (1954)
- (42) Woolley, R., Galactic Astronomy, vol. 1, p. 95, eds. H. Y. Chiu
e A. Muriel (1970)
- (43) Woolley, R., Epps, E. A., Pensten, M. J., Pocock, S. B.
Roy. Obs. Ann., 5 (1970)

ERRATA

A referência de nº 20 está na posição alfabética errada !