



EVOLUÇÃO ESTELAR E EQUAÇÃO DE ESTADO DE OBJETOS DENSOS

Luís Gustavo de Almeida

**Projeto Final de Conclusão do Curso de
Graduação em Astronomia
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Observatório do Valongo**

**Orientador: Sérgio José Barbosa Duarte
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas – MCT**

A meus filhos.

Agradecimentos

Agradeço aos familiares que sempre estiveram presentes ao meu lado me apoiando, em especial os meus pais: Dona Lucia e Seu Flávio.

Agradeço ao meu orientador, Sérgio José Barbosa Duarte, por seu apoio, incentivo e (principalmente) paciência constantes para comigo durante as épocas de dificuldades — quando soube me ouvir mesmo quando os problemas iam além do projeto.

Ao Professor Hilário Antônio Rodrigues Gonçalves do CEFET cuja participação essencial e especial tornou possível este projeto.

Agradeço em especial à minha orientadora durante a graduação em Astronomia, a qual teve um papel decisivo em minha carreira acadêmica: Professora Sueli Aparecida Guillens. Seu apoio como orientadora e como amiga durante a graduação me rendeu ensinamentos de Astronomia (e de Vida) que me são úteis até hoje.

Agradeço também ao amigo das horas certas e incertas, Henrique Monteiro Felício, que sempre me apoiou.

Aos meus amigos e colegas do Valongo e do Alojamento Estudantil da UFRJ que tiveram que me aturar, em especial Daniel Mello, Rodrigo dos Santos, Viviane Morcele de Almeida, Leonardo Cirto e Marcos Gonçalves.

Ao falecido amigo Luciano Nascimento dos Santos.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma breve revisão da teoria básica de evolução estelar. O ciclo de vida de uma estrela, da ordem de bilhões de anos para as estrelas mais antigas, pode ser dividido em estágios distintos. Revisamos tais estágios de forma resumida. Também apresentamos uma revisão das equações fundamentais de estrutura estelar. Visamos o estudo específico da formação e evolução de objetos densos assim como os diferentes regimes de densidade da matéria estelar que compõe tais objetos. Analisamos desde os regimes subnucleares (antes e após o ponto de gotejamento de nêutrons), passando pelo regime hadrônico e indo até a fase de quarks. Este estudo visa o desenvolvimento de um tratamento amplo e consistente de sistemas que podem apresentar tais regimes de densidades, como é o caso das estrelas de nêutron. Este estudo permite construir um modelo apropriado à descrição de propriedades estáticas e dinâmicas das estrelas de nêutron. Para o regime de densidades subnucleares sem nêutrons livres, consideramos a equação de estado apresentada por Baym Pethick e Sutherland em 1971 (ver Ref. [24]). Já no regime de densidades subnucleares com nêutrons livres, enfocamos a equação de estado apresentada no mesmo ano por Baym, Bethe e Pethick (ver Ref. [25]). Para o regime hadrônico de densidades apresentamos uma generalização do modelo descrito por Walecka em 1974 (ver Ref [33]), que foi desenvolvido para a descrição da matéria nuclear densa. A fase de plasma de quark-glúon é discutida através do modelo de sacola do M.I.T. modificado.

Palavras-chave: evolução estelar — estrutura estelar — equação de estado — estrela de nêutron

Abstract

In this work we presented a brief review of basic theory of stellar evolution. The life cycle of a star, from the order of billions of years for the oldest stars, may be divided in distinct stages. We revised such stages in a resumed way. We also presented a review of the fundamental equations of stellar structure. We aimed specifically the study of formation and evolution of dense objects and the different density regimes of stellar matter which constitutes those objects. We analyze from the subnuclear regimes (before and after the neutron dropping point), passing the hadronic regime until the quark phase. This study aims the development of a complete and consistent treatment of systems with such density regimes, as the neutron stars case. This study enable us to construct an appropriate model to describe the static and dynamical properties of the neutron stars. For the subnuclear density regime without free neutrons, we consider the equation of state presented in 1971 by Baym, Pethick and Sutherland (see Ref. [24]). In the subnuclear density regime with free neutrons, we focus the equation of state presented in the same year by Baym, Bethe e Pethick (ver Ref. [25]). For the hadronic density regime we presented a generalization of the model described by Walecka in 1974 (see Ref [33]), developed to describe the dense nuclear matter. The quark-gluon plasma phase is discussed by mean of the modified M.I.T. bag model.

Keywords: stellar evolution — stellar structure — equation of state — neutron star

Sumário

Introdução	xi
1 Classificação das Estrelas e suas Características	1
1.1 Magnitude, Cor e Luminosidade	1
1.2 Classe Espectral e Cor	3
1.3 O Diagrama Hertzsprung-Russell	5
2 Nascimento e Morte de uma Estrela	10
2.1 O Nascimento	10
2.1.1 A Proto-Estrela	11
2.1.2 Nasce a Estrela	12
2.1.3 Processo- s e Processo- r	15
2.1.4 O Teorema de Russel-Vogt	16
2.2 A Morte	17
2.2.1 Gigante Vermelha	18
2.2.2 Anã Branca	19
2.2.3 Supernova	21
2.2.4 Estrela de Nêutron	27
2.2.5 Buraco Negro	30
3 A Estrutura Estelar	31
3.1 As Equações de Estrutura Estelar na Sequência Principal	31
3.2 Polítropos	35
3.2.1 A Equação de Lane-Emden	35
3.2.2 Soluções Analíticas	37
3.2.3 Soluções Não-Analíticas	37
3.3 As Equações de Estrutura Estelar para Objetos Compactos	40
3.4 A Equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff	41
3.5 Formulação de Campos para Descrição Microscópica do Meio Estelar	43

4	Equação de Estado de Meios Estelares Densos Degenerados	49
4.1	Equação de Estado na Aproximação para $T \sim 0$	50
4.2	A Equação de Estado no Regime Subnuclear	52
4.2.1	A Correção Eletrostática	53
4.2.2	Regime Subnuclear sem Nêutrons Livres	54
4.2.3	Regime Subnuclear com Nêutrons Livres	56
4.2.4	A Constituição Bariônica do Meio	62
4.3	A Equação de Estado no Regime Hadrônico	64
4.3.1	O Modelo QHD – I	65
4.3.2	Aproximação de Campo Médio	68
4.3.3	Modelo de Walecka Não-Linear	73
4.3.4	Hadrodinâmica Quântica – II	74
4.4	O Modelo de Sacola do M.I.T.	79
4.4.1	A Equação de Estado no Regime de Quarks	81
5	Considerações Finais e Perspectivas Futuras	84
5.1	O Ciclo de Vida de uma Estrela	84
5.2	A Aproximação de Estrela Fria ($T \sim 0$)	85
5.3	O Regime Subnuclear	85
5.4	O Regime Hadrônico	85
5.5	O Regime de Quarks	85
5.6	Perspectivas Futuras	86
	Referências Bibliográficas	88

Lista de Figuras

1.1	Exemplo de Diagrama HR. Como vemos, as estrelas se apresentam em grupos diversos, entre os quais o que mais se sobressai é o que chamamos de seqüência principal. Tal nome é uma escolha óbvia quando analisamos o fato de que cerca de 90% das estrelas passam 90% de sua vida nesse grupo. As definições das variáveis utilizadas nos eixos serão definidas neste capítulo. Figura extraída do endereço eletrônico: www.astrogea.org/variable/cephei~1.htm	6
1.2	O primeiro Diagrama HR, feito por Russel a partir de medidas diretas de paralaxe. Os tamanhos dos pontos e dos círculos indicam diferentes estimativas de erro provável. É nítida a aglomeração de estrelas que seria posteriormente batizada de Seqüência Principal. Figura extraída da Ref. [2].	7
1.3	Nas figuras (a) e (b), podemos ver dois exemplos de diagramas HR teóricos com trajetórias evolutivas computadas para estrelas de diferentes massas iniciais (as linhas contínuas). Na figura (a) as estrelas possuem metalicidade inicial $Z = 0.001$ e abundância inicial de hélio $Y = 0.243$, já na figura (b) a metalicidade inicial é $Z = 0.020$ e a abundância de hélio $Y = 0.300$. Este exemplo ilustra como a evolução da estrela é determinada univocamente pela sua massa e composição iniciais (conferir o Teorema de Russel-Vogt no Capítulo 2). Figura extraída da Ref. [3].	8
2.1	As camadas do caroço se formam concentricamente formando uma estrutura semelhante à de uma cebola. Figura extraída do endereço eletrônico: http://www.answers.com/topic/supernova	16
2.2	Comparação de Curvas de Luz de supernovas de Tipo I e Tipo II. Figura extraída do endereço eletrônico: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Astro/snovcn.html	23
2.3	Comparação de Curvas de Luz de supernovas Tipos II-L e II-P. Figura extraída do endereço eletrônico: http://www.answers.com/topic/supernova	25

2.4	A frente de recombinação se expande até as camadas mais internas reduzindo a opacidade dessas camadas, permitindo que as mesmas possam ser observadas.	26
2.5	Um pulsar é uma estrela de nêutron cujo eixo de rotação não coincide com seu eixo magnético. A rotação da estrela em alta velocidade somada a esse desalinhamento dos eixos faz com que o sinal recebido seja intermitente, semelhante a um farol piscando, porém em altíssimas velocidades.	28
2.6	Quando uma estrela de nêutron recebe matéria de um disco de acreção, eventualmente atinge-se a temperatura necessária para a ocorrência de reações termonucleares. Durante tais explosões são liberadas grandes quantidades de raios X. Figura extraída do endereço eletrônico: http://www.oulu.fi/astrophysics/pr/head.html	29
3.1	Estrelas massivas, que povoam a região superior da Seqüência Principal, alcançam o ciclo CNO que é mais eficiente na liberação de energia. Os núcleos de tais estrelas são envolvidos por uma camada convectiva, pois o campo de radiação não dá conta de repassar para as camadas mais externas a energia produzida no núcleo. Analogamente, estrelas pouco massivas, que povoam a região inferior da Seqüência Principal, apresentam uma camada convectiva externa, pois no núcleo a queima de hidrogênio ocorre através das cadeias <i>pp</i> que possuem menor eficiência do que o ciclo CNO.	33
4.1	Equação de estado para diversos regimes de densidade. Na Região I temos a presença de núcleos imersos num gás de elétrons. Na Região II núcleos imersos num gás de elétrons e nêutrons; aqui podemos divisar duas equações de estado diferentes, a linha pontilhada representa a equação de estado com neutrinos confinados enquanto a linha contínua representa a equação sem os neutrinos confinados. Na Região III temos a presença de matéria nuclear. Na Região IV temos a fase com quarks desconfinados.	81

Lista de Tabelas

4.1	Octeto bariônico: \vec{J}_S é o spin, $\vec{\tau}$ o isospin, τ_3 a terceira componente do isospin e S a estranheza.	63
4.2	Divisões da QHD	65
4.3	Campos da QHD	65
4.4	Problemas com QHD-I	73
4.5	Equações de estado que utilizamos nos três regimes de densidade	80

Introdução

Para uma compreensão da formação das estrelas de nêutron, nosso objeto alvo de pesquisas futuras, é necessário inicialmente ter uma visão da *Teoria de Evolução Estelar*. Apresentamos uma compilação dos fundamentos básicos desta teoria. Revemos as etapas básica do ciclo de vida de uma estrela. Apresentamos o Teorema de Russel-Vogt que fundamenta a tese de que a evolução da estrela é determinada unicamente por sua massa e composição iniciais.

Apresentamos as equações básicas que regem o interior estelar, ou seja, as Equações de Estrutura Estelar. Analisamos tanto modelos para estrelas ainda presentes na Sequência Principal assim como o modelo para estrelas relativísticas (considerando simetria esférica).

Para traduzir as diferentes composições do meio ao longo da estrutura de uma estrela de nêutron, quatro equações de estado obtidas para diferentes regimes de densidade são apresentadas em nosso trabalho. Para objetos compactos utilizamos neste trabalho a aproximação de $T \cong 0$ (estrela “fria”), o que é razoável, pois a energia de Fermi de uma estrela de nêutron é muito maior do que sua temperatura efetiva, permitindo-nos o uso de tal aproximação.

Para o regime de densidades subnucleares sem nêutrons livres, apresentamos a equação de estado apresentada na Ref. [24]. Neste regime de densidades os elétrons dão a principal contribuição à pressão do sistema, permitindo inclusive que se despreze as contribuições das outras partículas. O gás de elétrons é tratado, em primeira aproximação, como um gás de Fermi degenerado. Esta equação de estado não contempla nêutrons livres, portanto foi aplicada ao regime de densidades menores que a densidade limiar de gotejamento de nêutrons. Já no regime de densidades subnucleares com nêutrons livres e sem neutrinos aprisionados no meio, apresentamos a equação de estado apresentada na Ref. [25], que considera os núcleos distribuídos numa rede cristalina imersa em um gás degenerado de elétrons relativísticos e num gás degenerado de nêutrons livres não-relativísticos. Neste regime de densidades os nêutrons, que interagem fortemente, reduzem a tensão superficial dos núcleos promovendo sua dissociação. À medida que a densidade vai aumentando nesse regime, a contribuição dos nêutrons

livres para a pressão do sistema vai se tornando cada vez mais relevante, não podendo mais ser desprezada em comparação com a contribuição do gás de elétrons. Para o estudo da faixa hadrônica de densidades apresentamos uma generalização do modelo de Walecka [33], que foi desenvolvido para a descrição da matéria nuclear densa, conhecido como *Hadrodinâmica Quântica* (ou QHD do inglês *Quantum Hadrodynamics*), um modelo quântico relativístico aplicado a um sistema de muitos corpos. Tal modelo é aplicado à matéria nuclear e a partir dele obtemos a equação de estado. Neste modelo, a interação nuclear entre prótons e nêutrons, ou bárions mais pesados, deve-se à troca de mésons, conhecidos como σ , ω e ρ . Para a fase de plasma de quark-glúon apresentamos o modelo de sacola do M.I.T. modificado com a incorporação dos efeitos dos neutrinos aprisionados, (vide também Refs. [40,41]).

Este trabalho está estruturado da seguinte forma:

No Capítulo 1 introduzimos o diagrama H-R e o sistema de classificação espectral das estrelas. O diagrama H-R é muito utilizado no estudo das estrelas correlacionando-as de acordo com suas respectivas classes espectrais e temperaturas.

A fim de situarmos a formação das estrelas de nêutron dentro da evolução estelar, no Capítulo 2 discorremos resumidamente a teoria de *Evolução Estelar*. Descrevendo o processo de formação estelar, assim como as fases pós-sequência principal, nos detendo um pouco mais no ítem sobre supernovas e sobre estrelas de nêutron.

No Capítulo 3 revisamos os conceitos básicos envolvidos na construção das equações de estrutura estelar. Iniciamos com as equações de estrutura para estrelas que ainda se encontram na Sequência Principal. Revisitamos brevemente o modelo de fluidos politrópicos, que é um modelo muito utilizado em astrofísica para descrever os interiores estelares. Também apresentamos as equações de Einstein, abrindo caminho para a dedução da equação de estrutura de objetos compactos relativísticos dentro de uma métrica esférica, a Equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff. E por fim, apresentamos a análise das variáveis microscópicas do meio estelar dentro do formalismo da teoria de campos.

No Capítulo 4 apresentamos as equações de estado citadas acima para descrever diversos regimes de densidade do interior estelar.

No Capítulo 5 fazemos um apanhado geral com breves comentários sobre a compilação dos conceitos apresentados nos capítulos anteriores. Ainda neste capítulo também apresentamos nossas perspectivas para trabalhos futuros.

Capítulo 1

Classificação das Estrelas e suas Características

Neste capítulo apresentaremos as grandezas que caracterizam os objetos estelares e falaremos brevemente sobre o Diagrama Hertzsprung-Russell, um instrumento de pesquisa muito poderoso que serve de elo entre as teorias de evolução estelar e de estrutura estelar. Ele permite o estudo das estrelas pela análise de suas características fundamentais como temperatura efetiva e luminosidade.

1.1 Magnitude, Cor e Luminosidade

Os conceitos de magnitude, cor e luminosidade estelar estão relacionados ao brilho da estrela. *Brilho aparente* é um termo utilizado para determinar o quão brilhante uma estrela parece ser para um observador da Terra. O brilho de uma estrela é geralmente medido utilizando-se a *escala de magnitudes*. Quando observamos uma estrela, o fluxo obtido depende da sensibilidade espectral do equipamento, ou seja, do conjunto telescópio + filtro + detector. Se chamarmos de $\Phi(\lambda)$ a eficiência espectral do equipamento, normalizada, teremos a seguinte definição para o fluxo observado:

$$F_{OBS} = \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) F(\lambda) d\lambda \simeq F(\lambda_0) \int_0^{\infty} \Phi(\lambda) d\lambda, \quad (1.1)$$

onde $F(\lambda_0)$ é o fluxo no comprimento de onda efetivo do filtro. Um sistema de magnitudes é definido por seu filtro e por uma constante (m_C) da integração acima — ver equação (1.2). Um exemplo de sistema muito usado é o sistema *UBV*, desenvolvido por Harold Lester Johnson (1921-1980) e William Wilson Morgan (1906-1994) em 1951, que define magnitudes em três bandas espectrais: *U* de ultraviolet (ultravioleta), *B* de blue (azul), e *V* de visual (equivalente ao espectro amarelo). Essas magnitudes estão defi-

nidas com seus filtros centrados em comprimentos de onda efetivos em 3600Å, 4200Å e 5500Å respectivamente. Assim, a magnitude aparente na banda V , por exemplo, é:

$$m_V = -2.5 \log F_V + m_C. \quad (1.2)$$

Para determinar a constante (m_C) do sistema, utilizam-se estrelas padrões, ou seja, estrelas que têm magnitudes bem determinadas.

$$m = M + 5 \log \left(\frac{d}{10} \right). \quad (1.3)$$

Definimos como *magnitude absoluta* a magnitude aparente que uma estrela teria a uma distância de 10pc. A relação entre magnitude absoluta M , magnitude aparente m e a distância d , em parsecs, é dada por:

$$d = 10^{(m-M+5)/5}. \quad (1.4)$$

Esta equação pode ser invertida para obter a distância em *parsecs*, supondo-se que a magnitude absoluta e a aparente sejam conhecidas.

Ao falarmos de escalas de magnitudes, é necessário definir também o que vem a ser *índice de cor*. Em qualquer sistema de magnitudes multicolor define-se o índice de cor como a razão entre os fluxos em duas bandas diferentes, ou equivalentemente, como a diferença entre duas magnitudes do sistema. Por exemplo, subtraindo a magnitude V da magnitude B temos o índice de cor $B - V$, subtraindo a magnitude B da magnitude U temos o índice de cor $U - B$, e assim por diante. Os índices de cor são importantes para determinar a temperatura das estrelas. Os índices de cor têm valores típicos de décimos ou centésimos de magnitudes.

A *luminosidade* de uma estrela é a potência emitida pela superfície da estrela em todos os comprimentos de onda. Ela pode ser representada pela integral

$$L(R) = 4\pi R^2 \int_0^{\infty} F_\nu d\nu, \quad (1.5)$$

onde F_ν é o fluxo de energia emitida pela superfície da estrela num comprimento de onda ν . Uma primeira aproximação é supor que a estrela emita como um corpo negro com uma temperatura efetiva superficial T_{eff} . Nessa aproximação, podemos utilizar a Lei de Stefan-Boltzmann para obter a relação

$$L(R) = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4. \quad (1.6)$$

Portanto, a luminosidade aumenta com o tamanho e a temperatura efetiva da estrela.

Aqui devemos tomar cuidado com a interpretação física da temperatura efetiva. Até onde sabemos, podemos considerar uma aproximação razoável tratar as estrelas como corpos-negros, **mas elas não são!** Uma estrela pode ser dividida em várias camadas concêntricas com diferentes temperaturas associadas a essas camadas. Em geral, as camadas mais externas são as mais frias pois são as que irradiam a energia luminosa que deixa as estrelas. Entretanto, como tais camadas possuem temperaturas diferentes, as emissões de radiação associadas a cada camada serão diferentes. Mesmo considerando que cada camada irradie como um corpo negro, a curva de emissão de uma camada será diferente da de outra camada devido à diferença de temperatura entre estas camadas. Desta forma, a curva de emissão que recebemos de uma estrela não é uma planckiana¹, mas sim uma superposição de planckianas associadas a camadas independentes com temperaturas diferentes. Sendo assim, surge a questão: como interpretar a temperatura efetiva da estrela se o que recebemos não é a emissão de um corpo-negro? Na realidade, interpretamos a temperatura efetiva como a temperatura associada a um corpo negro que tivesse uma emissão total igual à da estrela. Ou seja, a temperatura efetiva está associada à emissão total da estrela, independente do formato da curva de radiação recebida.

1.2 Classe Espectral e Cor

A função mais importante de um sistema de classificação é fornecer um painel geral de referência no qual os objetos estudados possam ser encaixados. Uma estatística baseada num esquema de classificação pode fornecer pistas que nos permitam compreender a natureza intrínseca dos objetos em estudo. O sistema de classificação mais utilizado associa a temperatura superficial com letras na seqüência *O B A F G K M (S R N)*², onde as estrelas da classe *O* são as mais quentes e as da classe *N* são as mais frias. Cada classe se subdivide em 10 grupos, por exemplo, a classe *B* se divide nas 10 subclasses *B0, B1, B2, B3, ..., B9*, em ordem decrescente de temperatura. Uma correlação aproximada da temperatura superficial de cada tipo espectral com as linhas de absorção proeminentes que aparecem no espectro das estrelas é dada da seguinte forma (ver Ref. [1]):

¹Por “planckiana” definimos a curva de emissão de radiação de um corpo que tem uma temperatura uniforme T que está em equilíbrio termodinâmico com seu próprio campo de radiação, (corpo-negro), e é dada pela Lei de Planck.

²Há vários mnemônicos utilizados para se memorizar a seqüência, mas o mais comum (em inglês) é: ‘*Oh, Be A Fine Girl, Kiss Me Sweetly Right Now*’

- **Classe O:** Temperaturas iguais ou superiores a 25.000K. Linhas de hélio ionizado são proeminentes. De acordo com a equação de Saha, tais linhas de hélio ionizado só aparecem em gases extremamente quentes. Outros átomos em altos graus de ionização também são observados.
- **Classe B:** Temperaturas entre 25.000 e 11.000K. Linhas de hidrogênio e hélio neutro são aparentes na classe B0. Oxigênio e carbono ionizados são intensos na classe B3. Linhas de hélio neutro são mais intensas na classe B5. As linhas de hidrogênio³ se tornam progressivamente mais intensas nas subdivisões de maior número desta classe. A intensidade de tais linhas será proporcional à fração de átomos de hidrogênio existentes em seu primeiro estado excitado quando o hidrogênio está em equilíbrio térmico.
- **Classe A:** De 11.000 a 7.500K. Na classe A0 as linhas de hidrogênio e magnésio ionizado são mais fortes, entretanto, as linhas de hélio e oxigênio ionizado desaparecem. As linhas de hidrogênio se enfraquecem continuamente nas subdivisões superiores desta classe, embora as linhas de metais ionizados (Fe, Ti, Ca, etc.) se fortaleçam. Esse enfraquecimento das linhas de hidrogênio das estrelas mais frias se deve ao fato de que, quanto menor for a temperatura, menor será a fração de átomos de hidrogênio no primeiro estado excitado. Por outro lado, as linhas de metais ionizados são progressivamente mais fortes pois o número relativo de metais em baixos graus de ionização aumenta. Nas estrelas mais quentes, o alto grau de ionização dos metais produz linhas de ressonância que se concentram no ultravioleta. As linhas de ressonância dos metais levemente ionizados, entretanto, ocorrem no visível e são mais fortes nas estrelas mais frias.
- **Classe F:** De 7.500 a 6.000K. A classe F0 é rica em metais ionizados, as mais fortes sendo as linhas H e K do cálcio ionizado. Linhas metálicas, particularmente ferro, se fortalecem e linhas de hidrogênio se enfraquecem nas subdivisões de maior número desta classe.
- **Classe G:** De 6.000 a 5.000K. As linhas de metais neutros se tornam mais fortes, enquanto as linhas do hidrogênio continuam a enfraquecer. Linhas de cálcio ionizado são muito fortes. Surgem bandas moleculares de CN e CH. O Sol pertence à classe G2.
- **Classe K:** De 5.000 a 3.500K. Em geral, bandas moleculares e linhas de metais neutros se tornam mais fortes, enquanto as linhas de hidrogênio e metais ionizados continuam a enfraquecer. Em K5 as linhas de TiO são fracamente visíveis.

³As linhas de hidrogênio a que nos referimos são as linhas de absorção da série de Balmer do hidrogênio.

- **Classe M:** De 3.500 a 2.200K. A principal característica dessa classe é o aparecimento de bandas moleculares de óxidos complexos, dentre os quais, as bandas de TiO são as mais fortes.

A maioria das estrelas se enquadra em alguma das classes acima definidas, entretanto há exceções. Algumas estrelas com temperaturas em paralelo com as de algumas classes apresentam linhas espectrais estritamente diferentes das linha características de tais classes. Desta forma, para atender a necessidade de classificar tais estrelas, classes espectrais adicionais foram estabelecidas em paralelo às temperaturas de algumas das classes acima.

- **Classe S:** Uma classe de baixas temperaturas paralela à classe *M*. Caracteriza-se pela presença de bandas moleculares de óxidos, dentre as quais as mais proeminentes são as bandas de ZrO. Os elementos Zr, Y, Ba, La, e Sr apresentam fortes linhas atômicas e bandas de óxidos. Também são usuais as linhas de tecnécio neutro.
- **Classes R e N (ou Classe C):** Paralelas em temperatura às classes *K* e *M*. O espectro é caracterizado não por bandas de óxidos, mas por bandas de carbonetos moleculares, tais como CN, C₂, e CH.
- **Classe W:** Objetos de tipo *O* extremamente quentes, também chamados de “*estrelas de Wolf-Rayet*”, com brilho, linhas de emissão amplas de hélio ionizado e carbono, oxigênio e nitrogênio altamente ionizados. Há duas seqüências:
 - a) Estrelas *WC*, apresentam fortes linhas de carbono e linhas de nitrogênio fracas.
 - b) Estrelas *WN*, apresentam fortes linhas de nitrogênio e linhas de carbono fracas.

1.3 O Diagrama Hertzsprung-Russell

No início do século XX o trabalho de dois astrônomos *Ejnar Hertzsprung* e *Henry Norris Russell* levou à construção do que hoje chamamos de *Diagrama Hertzsprung-Russell* (ou simplesmente *diagrama H-R*). Podemos citar aqui dois tipos de diagramas H-R: o *observacional*, no qual monta-se um gráfico da magnitude absoluta (ou a aparente) de um conjunto de estrelas contra suas classes espectrais (ou índices de cor); e o diagrama *teórico* que utiliza a luminosidade em função da temperatura efetiva (ou da temperatura superficial).

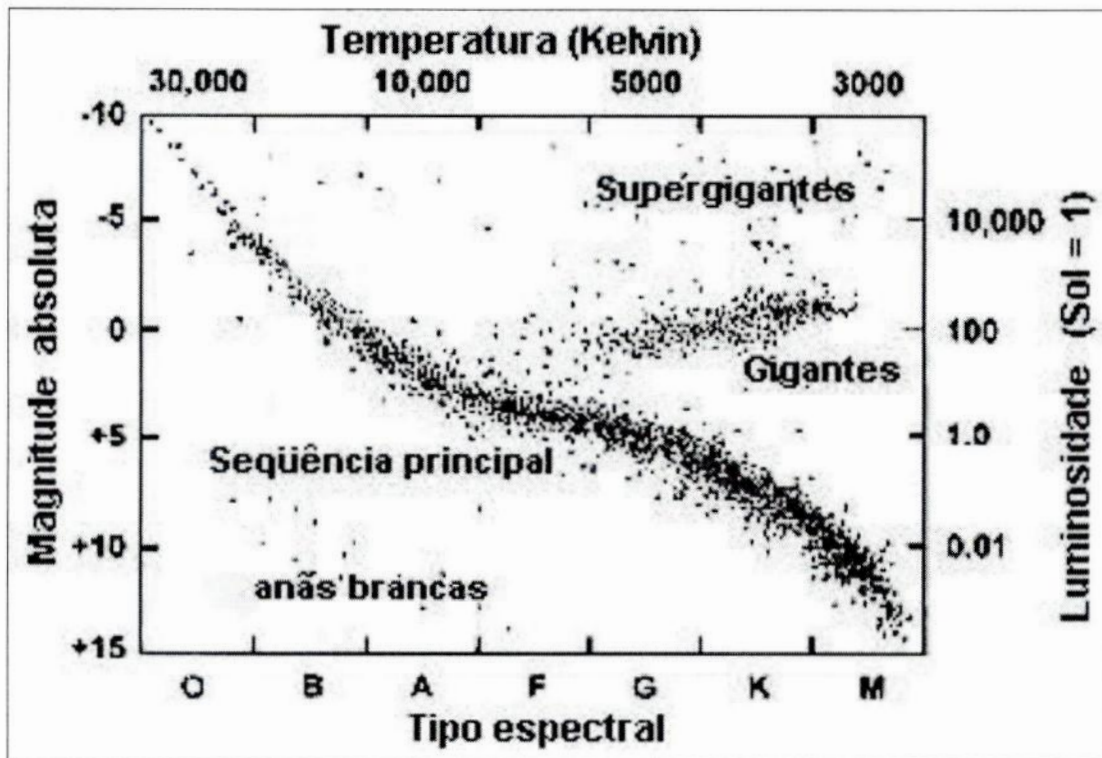


Figura 1.1: Exemplo de Diagrama HR. Como vemos, as estrelas se apresentam em grupos diversos, entre os quais o que mais se sobressai é o que chamamos de sequência principal. Tal nome é uma escolha óbvia quando analisamos o fato de que cerca de 90% das estrelas passam 90% de sua vida nesse grupo. As definições das variáveis utilizadas nos eixos serão definidas neste capítulo. Figura extraída do endereço eletrônico: www.astrogea.org/variable/cephei~1.htm

Quando os primeiros diagramas H-R foram feitos a grande surpresa foi que os pontos do gráfico não só se distribuíam de maneira não homogênea, como também os pontos representativos das estrelas, em sua grande maioria, se concentravam ao longo de uma faixa larga numa das contra diagonais dos gráficos (conferir na Figura 1.2). Também foi notada a presença de grupos menores, porém destacadamente colocados em relação à grande faixa. A essa grande faixa deu-se o nome de *Sequência Principal*. A interpretação dada dentro da teoria de evolução estelar é que as estrelas passam em torno de 90% de sua vida na Sequência Principal.

Os grupos menores estão associados a outras fases da evolução da estrela que serão discutidas sucintamente⁴ neste trabalho. O diagrama H-R é de grande importância na ligação entre a teoria da evolução estelar e a estrutura estelar.

Durante o aquecimento, mesmo antes do início das reações termonucleares, o objeto

⁴ Pelo foco de nosso trabalho serem objetos densos como as estrelas de nêutron, os outros grupos de objetos serão comentados de maneira mais resumida.

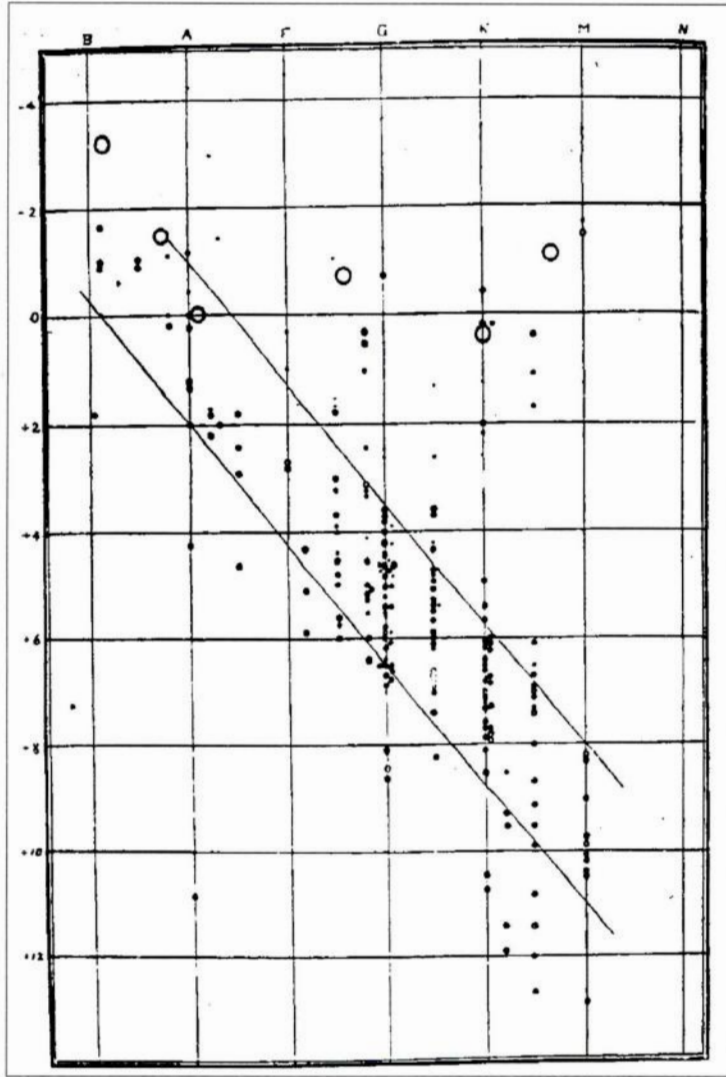


Figura 1.2: O primeiro Diagrama HR, feito por Russel a partir de medidas diretas de paralaxe. Os tamanhos dos pontos e dos círculos indicam diferentes estimativas de erro provável. É nítida a aglomeração de estrelas que seria posteriormente batizada de Sequência Principal. Figura extraída da Ref. [2].

já começa a emitir radiação térmica. No entanto, durante a fase de proto-estrela a densidade da região central aumenta muito e o caroço central que se forma vai se tornando cada vez mais opaco à radiação térmica. Como consequência, quase toda radiação proveniente da emissão térmica de uma estrela é proveniente de suas camadas mais externas. Ou seja, não é possível “ver” o interior de uma estrela, pois a radiação emitida pelas camadas mais internas é impedida de sair devido à opacidade das camadas internas. O que vemos é o resultado da emissão térmica das camadas mais externas que receberam essa energia das camadas mais internas.

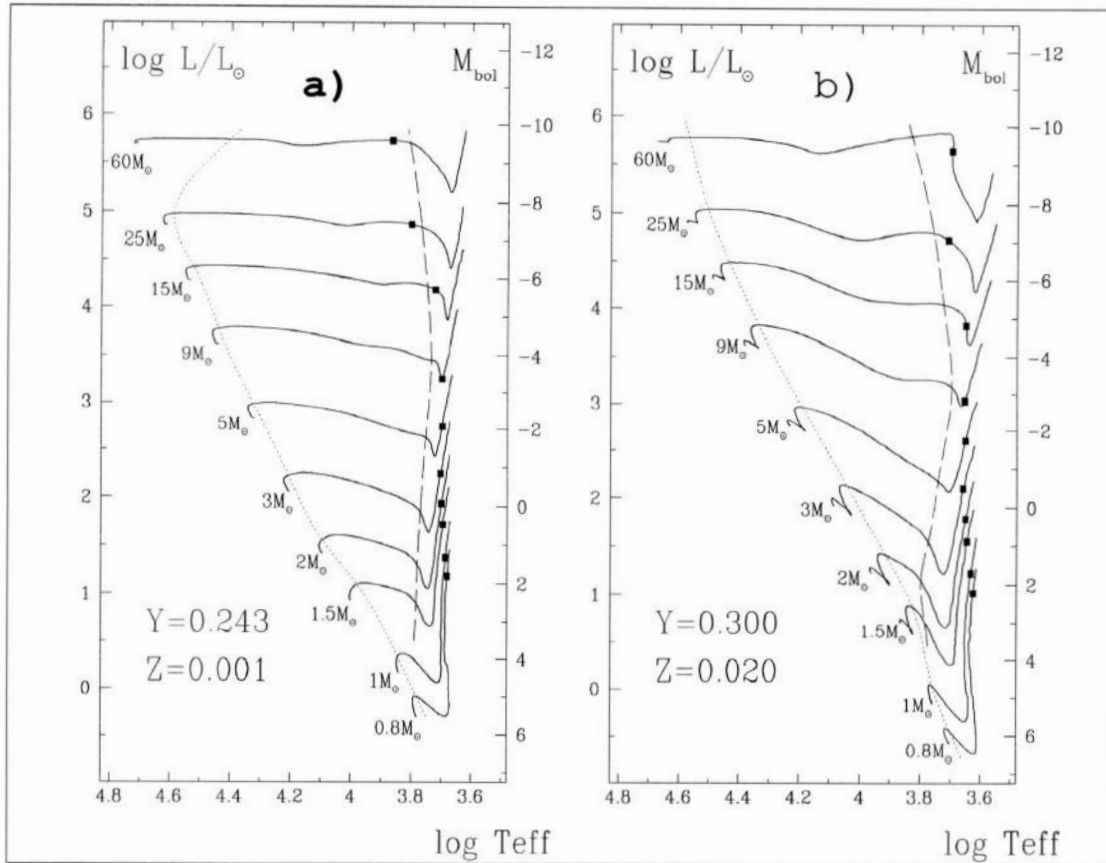


Figura 1.3: Nas figuras (a) e (b), podemos ver dois exemplos de diagramas HR teóricos com trajetórias evolutivas computadas para estrelas de diferentes massas iniciais (as linhas contínuas). Na figura (a) as estrelas possuem metalicidade inicial $Z = 0.001$ e abundância inicial de hélio $Y = 0.243$, já na figura (b) a metalicidade inicial é $Z = 0.020$ e a abundância de hélio $Y = 0.300$. Este exemplo ilustra como a evolução da estrela é determinada univocamente pela sua massa e composição iniciais (conferir o Teorema de Russel-Vogt no Capítulo 2). Figura extraída da Ref. [3]

Um erro muito comum, quando se começa a estudar o diagrama H-R é pensar que as estrelas da Seqüência Principal a percorrem ao longo de sua evolução. Isto não ocorre. Na realidade, cada estrela possui associada a ela uma trilha evolucionária que deverá percorrer ao longo de sua vida. Se considerarmos, como uma primeira aproximação, que a estrela é esférica, e se ignorarmos efeitos oriundos de rotações e campos magnéticos, então a forma dessa trilha evolutiva deverá depender apenas da massa e composição iniciais da estrela (ver a Figura 1.3 e conferir o teorema de Russell-Vogt no Capítulo 2). Quando a trilha de uma estrela em contração gravitacional intercepta a Seqüência Principal, a estrela atinge um ponto de sua vida em que será estável por um longo período de tempo. Isto é assegurado observacionalmente pelo fato de que 90% de todas as estrelas residem na Seqüência Principal (ou próximas desta), e,

portanto, devem estar utilizando sua mais eficiente e prolífica fonte de energia – a fusão de hidrogênio em hélio. Atualmente acredita-se que os processos nucleares começam pouco antes da estrela chegar à Sequência Principal.

Chamamos de fase de pré-sequência principal o período de proto-estrela, ou seja, quando ainda não há reações de fusão termonuclear e a única fonte de energia para a emissão de radiação térmica é a gravitação, como consequência do teorema do virial.

Capítulo 2

Nascimento e Morte de uma Estrela

Uma estrela apresenta uma vida útil ao longo da qual ela evolui. Durante sua evolução a estrela passa por estágios distintos que culminam com sua “morte”. Justamente pelo fato de as estrelas não serem objetos estáticos, o estudo da evolução estelar torna-se de fundamental importância na astrofísica. As estrelas começam suas vidas como nuvens de gás e poeira, contraindo-se, e evoluem de proto-estrelas, através de uma fase de ignição nuclear, até chegar na seqüência principal. Na seqüência principal as estrelas passam a maior parte de sua vida fundindo hidrogênio em hélio. Após a queima de sua reserva de hidrogênio, a estrela evolui rapidamente para fora da seqüência principal encaminhando-se para seu fim como uma anã branca ou num evento de supernova que pode deixar como remanescentes uma estrela de nêutron, uma estrela de quark ou um buraco-negro. Entretanto, a evolução das estrelas em fases quase estacionárias é tão lenta que, em curtos intervalos de tempo, podemos considerá-las aproximadamente estáticas para fins de cálculo da sua estrutura em cada fase.

2.1 O Nascimento

As estrelas são imensas massas de plasma quente auto-gravitantes sustentadas pela fornalha nuclear em sua região central, porém sua formação não é imediata. Nuvens de matéria interestelar compostas basicamente de hidrogênio e pequenas impurezas, remanescentes de outras estrelas, são os berçários das estrelas. Uma estrela inicia sua existência como uma gigantesca nuvem de gás e poeira. O movimento desordenado na nuvem gera flutuações de densidade que levam a nuvem a se condensar sob sua própria atração gravitacional. Inicialmente é formado um núcleo levemente mais denso que vai acretaando material da nuvem.

2.1.1 A Proto-Estrela

Eventualmente a nuvem acaba densificando-se sob sua própria auto-gravitação. A nuvem começa sua contração com o material na região central agregando-se primeiro enquanto o material externo permanece estacionário. A taxa de acreção de massa no núcleo cresce com a temperatura inicial da nuvem. Leva cerca de 10^5 a 10^6 anos para acumular o equivalente a uma massa solar no núcleo da nuvem. A energia potencial gravitacional é convertida em energia térmica aquecendo a superfície da proto-estrela a até milhões de Kelvin. O caroço que se forma no centro é o que chamamos de “proto-estrela”. A proto-estrela não é uma estrela propriamente dita, pois não apresenta ainda reações nucleares em seu interior, mas pode ser considerada um “embrião” de estrela. A frente de choque na superfície da proto-estrela aquece o gás a milhões de Kelvin e o gradiente de temperatura formado faz com que o gás irradie e esfrie. Entretanto, a alta opacidade da nuvem em volta da proto-estrela impede que a radiação saia, impossibilitando a observação do nascimento de uma proto-estrela. Essa mesma radiação também reduz a taxa de acreção do material para a proto-estrela.

A temperatura continua a subir à medida que a proto-estrela ganha massa e se contrai. Como a contração da proto-estrela é lenta, o teorema do virial se torna uma boa aproximação podendo supor-se que a metade da energia gravitacional é convertida em energia cinética e a outra metade é irradiada. A pressão e a densidade crescem tanto que a proto-estrela se torna opaca e o equilíbrio termodinâmico é estabelecido localmente, com o campo de radiação sendo descrito por uma temperatura relacionada à energia cinética do gás. Pouca radiação escapa, pois a maior parte é gasta na ionização da nuvem. Quando esta já está quase completamente ionizada, a grande população de elétrons livres passa a exercer importante contribuição na pressão do gás freando a contração e o equilíbrio hidrostático também é estabelecido.

À medida que a proto-estrela se contrai sob sua auto-gravitação, a temperatura continua a subir rapidamente no interior, aumentando o gradiente de temperatura entre as camadas centrais e as externas. Como o núcleo é opaco à radiação, não é possível transmitir para as camadas mais frias a toda a energia produzida no núcleo. Surge então uma zona convectiva entre o caroço e a superfície da proto-estrela. O caroço vai aumentando com a acreção de massa, mas a proto-estrela continua contraindo-se e “espremendo” a zona convectiva. Normalmente, os núcleos de hidrogênio são impedidos de se fundir devido à barreira Coulombiana, em torno de 1 MeV. Entretanto, quando a temperatura da proto-estrela atinge temperaturas da ordem de 10^6 K, passa a haver tunelamento da barreira Coulombiana possibilitando a ocorrência de reações termonucleares¹. É o nascimento da estrela propriamente dita! Com o início das reações

¹ Como é a movimentação térmica dos prótons que permite o efeito de tunelamento quântico, a

termonucleares, a estrela pára de se contrair e atinge uma configuração de equilíbrio hidrodinâmico. A estrela começa, então, sua vida na seqüência principal.

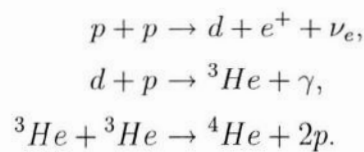
É interessante comentar que, para massas suficientemente pequenas, a temperatura central de proto-estrelas abaixo da seqüência principal não se tornarão grandes o suficiente para permitir o tunelamento da barreira Coulombiana. Estima-se que para massas menores que $0.07 M_{\odot}$ (conferir na Ref. [4]) a contração gravitacional seja parada pela pressão de elétrons degenerados antes que haja uma queima eficiente do hidrogênio.

2.1.2 Nasce a Estrela

Após o período de proto-estrela surgem as reações termonucleares no núcleo. São justamente as reações de fusão no núcleo que definem uma estrela ativa (daí surge a analogia do início de tais reações com o “nascimento” da estrela).

O processo de fusão termonuclear deve gerar uma quantidade de energia no interior da estrela grande o suficiente para evitar o colapso total da estrela, com a pressão do gás equilibrando a pressão da força gravitacional exercida pelas camadas mais externas da estrela. Algumas das reações que determinam o equilíbrio hidrostático de uma estrela são as cadeias pp , o ciclo CNO e o ciclo 3α , descritas abaixo (ver Refs [5] e [6]):

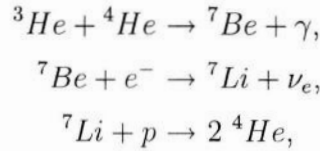
- **Cadeias pp** ($T \sim 10^7$ K) – Em 1939, H. A. Bethe (ver Ref. [7]) propôs que a interação fraca exerce um papel fundamental no início do processo de queima do hidrogênio, que ocorre via decaimento β de um dos prótons. O dêuteron produzido na reação se funde quase que imediatamente com outro próton formando 3He que poderia se fundir com outro próton formando 4Li . Porém, o 4Li é instável e, portanto, tal reação não ocorre. Na verdade, o 3He só pode reagir com outro 3He formando 4He . Desta forma, a seqüência de reações possíveis (também chamadas de **cadeia ppI**) fica



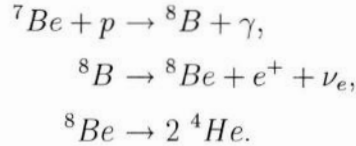
É interessante comentar que a seção de choque para a primeira reação da cadeia acima é muito pequena, como conseqüência, a vida média para a queima dos prótons no Sol é da ordem de 10^{10} anos. Quando há 4He em grandes proporções, existe a possibilidade deste reagir com 3He dando início a outra cadeia de reações

fusão que ocorre nos interiores estelares é chamada de “fusão termonuclear”.

(chamada **cadeia ppII**)

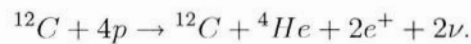


ou ainda a seqüência (chamada de **cadeia ppIII**)

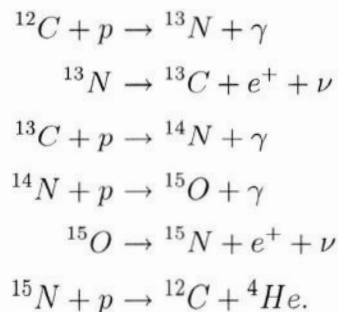


A cadeia ppI tem um balanço de 26.20 MeV, com dois neutrinos de energia média de 0.263 MeV cada (0.42 MeV máxima), enquanto a cadeia ppII tem um balanço de 25.67 MeV, correspondendo a uma perda por neutrinos de 4%, com neutrinos de 0.80 MeV, além dos dois de 0.263 MeV. A cadeia ppIII, com 19.2 MeV, corresponde a uma perda por neutrinos de 28%, com neutrinos carregando 7.2 MeV, além dos dois de 0.263 MeV. Estas duas últimas relacionadas com a luminosidade de neutrinos do Sol, e essenciais para a solução do problema de neutrinos solares.

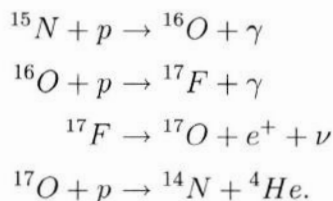
- **Ciclo CNO** ($T \sim 1.5 \times 10^7 \text{ K}$): O ciclo CNO foi proposto independentemente por Bethe e Weizsäcker em 1938 (ver Refs. [7, 8]). No ciclo CNO a soma de partículas antes e depois do ciclo fornece:



Ou seja, o núcleo de ${}^{12}\text{C}$ assume o papel de catalizador. A cadeia completa de reações é:

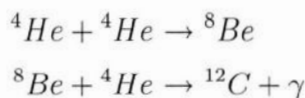


Porém, em menor quantidade, também podem ocorrer as reações



Estas reações envolvendo elementos mais pesados (C , N), devem ocorrer em estrelas de segunda geração, formadas com poeira estelar contaminada por esses elementos.

- **Ciclo 3α ($T \sim 10^8 \text{ K}$):** Depois que todo o hidrogênio do caroço é consumido, uma camada de hidrogênio continua sendo queimada em torno do caroço isotérmico até que a temperatura seja grande o suficiente para iniciar a queima do hélio no caroço. A reação 3α (também chamada de triplo α) ocorre quando três núcleos de hélio (partículas α) se fundem em um núcleo de carbono. Entretanto, tal reação ocorre em duas etapas: primeiro duas partículas α formam um estado ressonante do núcleo de ${}^8\text{Be}$ altamente instável; a segunda etapa ocorre quando, devido à grande densidade de α , esse estado ressonante é apanhado por uma terceira partícula α gerando um núcleo de ${}^{12}\text{C}$.



Para que tal reação ocorra, o núcleo da estrela deve apresentar abundância de hélio e a temperatura deve ser igual ou superior a 10^8 K . Ou seja, o processo só ocorre em estrelas velhas e com núcleos quentes. A dependência em relação à temperatura ocorre porque o ${}^8\text{Be}$ é muito instável e decai rapidamente: o tempo necessário para que um estado ressonante recém formado de ${}^8\text{Be}$ colida com uma partícula α gerando um ${}^{12}\text{C}$ é muito maior do que o tempo médio que a ressonância ${}^8\text{Be}$ leva para decair. Porém, com temperaturas da ordem de 10^8 K a taxa de reações produzindo ${}^8\text{Be}$ aumenta consideravelmente fazendo com que sempre haja uma pequena população de ${}^8\text{Be}$ em qualquer instante. Como consequência do aumento das taxas de produção de ${}^8\text{Be}$, aumenta a probabilidade de que um desses estados ressonantes colida com uma partícula α antes de decair. Normalmente, a probabilidade de que se dê o processo 3α deveria ser extremamente pequena. Mas o nível energético inferior do ${}^8\text{Be}$ tem exatamente a mesma

energia que duas partículas α , e na segunda etapa, o ${}^8\text{Be}$ e o ${}^4\text{He}$ têm exatamente a mesma energia que o estado excitado do ${}^{12}\text{C}$. Estas ressonâncias aumentam substancialmente as possibilidades de que uma partícula α incidente se combine com um núcleo de ${}^8\text{Be}$ para dar lugar a um núcleo de carbono. A existência desta ressonância foi prevista por Fred Hoyle (ver Ref. [9]) antes de que se desse conta realmente de sua necessidade para que se forme carbono.

Quando o combustível nuclear se esgota, a fusão do hidrogênio cessa e não há mais nada que contrabalance a pressão gravitacional. O caroço de hélio começa, então, a se contrair devido à pressão gravitacional exercida pelas camadas superiores. Isso promove um aumento de temperatura suficiente para iniciar a fusão do hélio, que quando ocorre promove uma expansão súbita das camadas superiores ao caroço (*flash do hélio*).

A queima de hélio produz um caroço de carbono. Quando um elemento se exaure, se a temperatura for grande o suficiente, inicia-se a queima dos elementos mais pesados. Cascas concêntricas vão se formando à medida que cada elemento é sintetizado, o núcleo passa a ter uma estrutura semelhante à de uma cebola (ver Figura 2.1). A queima de elementos continua até o ferro, quando as reações nucleares então cessam, pois a fusão do ferro em elementos mais pesados é endotérmica. Elementos mais pesados que o ferro não são produzidos nas reações de fusão e sim em supernovas (através do processo r), sobre as quais falaremos mais adiante na Seção 2.2.3, ou através do processo s sobre o qual falaremos na próxima subsecção. Durante a queima de hélio o processo s (slow) de lenta captura de nêutrons, produzidos nas reações com ${}^{13}\text{C}$, ${}^{13}\text{N}$ e ${}^{22}\text{Ne}$, ocorre em estrelas massivas, produzindo os nucleons até o chumbo. Para as estrelas de massa entre $1-8M_{\odot}$ o processo s pode ocorrer desde que haja uma fonte de nêutrons provendo o fluxo necessário para a ocorrência do processo.

2.1.3 Processo- s e Processo- r

Os principais processos de produção dos elementos mais pesados que o ferro são o processo- s e o processo- r , sendo ambos processos em que núcleos como ${}^{56}\text{Fe}$ e outros similares capturam nêutrons produzidos nas reações nucleares em fases evolutivas anteriores. O processo- s (de *slow*, lento) é um processo nucleossintético de captura de nêutrons em que o fluxo de nêutrons disponível não é muito alto, como acontece nos estágios finais de evolução de estrelas de massa intermediária, na fase de gigantes frias, na fase de queima hidrostática. O processo é denominado “lento” porque ocorre em escalas de tempo longas com relação ao tempo de decaimento beta, ou seja o tempo que o núcleo leva para decair é maior do que o tempo necessário para capturar um nêutron. Com a captura de um nêutron e a liberação de um elétron, o número atômico aumenta, repetindo-se o processo até a formação de elementos bem mais pesados. Nesse caso, um

núcleo “semente” como o ^{56}Fe pode capturar nêutrons em sucessivas reações nucleares, formando elementos como *Co*, *Ni*, *Cu*, *Zn*, etc., indo até o ^{209}Bi , com $Z = 83$.

Para os demais elementos além do ^{209}Bi é necessário o processo-*r* (de “rápido”), em que a captura dos nêutrons vem seguida de decaimento beta. Este processo está associado essencialmente a eventos explosivos energéticos, caracterizando portanto a nucleossíntese explosiva. Pode ocorrer nas explosões de supernovas de tipos II, Ib ou Ic, deixando como remanescente uma estrela de nêutrons, ou seja, gerando enormes fluxos de nêutrons. Os elementos produzidos no processo-*s* podem também ser formados no processo-*r*, mas o processo-*r* alcança rapidamente os números atômicos mais altos. Além dos processos *s* e *r*, os elementos mais pesados que o ferro podem também ser produzidos pelo processo-*p*, de captura direta de prótons, se a temperatura for suficientemente alta. No sistema solar, os elementos *Y*, *Ba*, *Sr*, *Zr*, *La* e *Ce* são produzidos principalmente pelo processo-*s*, enquanto que *Eu*, *Dy* e *Sm* são devidos essencialmente ao processo-*r*. Alguns elementos, como *Rb*, *Pr* e *Nd* são produzidos de maneira semelhante por ambos os processos. Para maiores detalhes ver a Ref. [10].

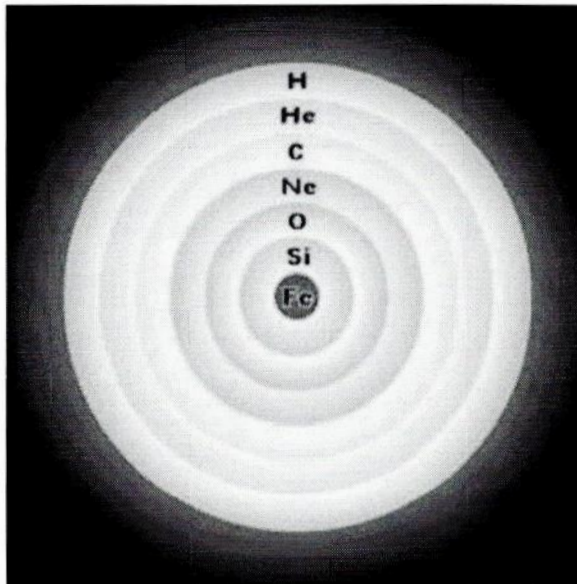


Figura 2.1: As camadas do caroço se formam concentricamente formando uma estrutura semelhante à de uma cebola. Figura extraída do endereço eletrônico: <http://www.answers.com/topic/supernova>.

2.1.4 O Teorema de Russel-Vogt

Como dissemos acima, quando a síntese de um elemento cessa, começa a síntese do elemento seguinte **se a temperatura for grande o suficiente!** A temperatura

a que uma estrela pode chegar, por sua vez, depende da massa inicial da nuvem que origina a proto-estrela. Em 1920, Heinrich Vogt e Henry Norris Russel propuseram o chamado teorema de Russel-Vogt, sem qualquer base matemática, que afirma que para dada massa total e composição química, existe uma e somente uma solução para as equações básicas de estrutura estelar.

De acordo com o Teorema de Russell-Vogt:

Se uma estrela se encontra em equilíbrio hidrostático e térmico, e se toda sua energia deriva de reações nucleares, então sua estrutura é única e completamente determinada por sua massa total e pela distribuição dos diversos elementos químicos em seu interior.

Em outras palavras, as propriedades com as quais a estrela nasce, massa e composição, são justamente as propriedades que determinam sua estrutura. Ou seja, o último elemento a ser sintetizado é definido pela configuração inicial da estrela, pois quanto maior a massa da estrela maior será sua compressão gravitacional, determinando uma vida mais curta para estrelas mais massivas. Além disso, estrelas menos massivas em geral não chegam a produzir ferro pois não atingem a compressão gravitacional necessária, mas por outro lado gastam seu combustível nuclear com mais parcimônia e possuem um tempo de vida maior. Quando todo combustível nuclear é consumido, a estrela em geral termina sua vida como uma anã branca (se a massa inicial for pequena) ou num evento de supernova (se a massa inicial for grande).

Devemos fazer aqui uma importante consideração: **o Teorema de Russel-Vogt não leva em conta a influência de rotações, campos magnéticos, forças de maré nem outras possíveis influências externas na estrutura nem na evolução estelares.** Entretanto, o mesmo não deve ser desprezado pois embora trate-se de um modelo supersimplificado ele hoje serve como modelo didático introdutório ao estudo da Evolução Estelar.

2.2 A Morte

A estrela também acaba eventualmente alcançando seu fim quando todo o seu combustível nuclear se esgota. Ou seja, quando toda energia proveniente de reações nucleares cessa, a estrela se encaminha para o fim de sua trajetória evolutiva. Nesta seção consideraremos os possíveis estágios finais da estrela.

Durante as reações termonucleares muitos raios gama liberados no carço produzem pares elétron-pósitron que se aniquilam produzindo pares neutrino-antineutrino. A perda de neutrinos aumenta muito com a temperatura. A perda é tão grande nesse

estágio que as etapas seguintes de queima de elementos ocorrem cada vez mais rápido, como oxigênio em um ano e silício em uma semana. Quando um dos elementos combustíveis é exaurido as reações termonucleares cessam, como consequência a estrela não consegue mais equilibrar sua estrutura e o caroço se contrai, se a estrela tiver massa $M \gtrsim 8M_{\odot}$ ela continua a se contrair até atingir a temperatura necessária para iniciar a próxima etapa de queima. Em alguns casos a perda de calor em um estágio seguinte é tão grande que pode ocasionar a re-expansão das camadas mais externas da estrela, eventualmente até ejetando matéria para o exterior da estrela. Vale comentar aqui que, para estrelas de baixa massa, quando as reações termonucleares cessam a pressão gravitacional acaba sendo detida pela pressão de elétrons degenerados antes que seja possível iniciar a queima do elemento seguinte. O remanescente dessa fase é o objeto que chamamos de *anã branca* e que será discutido mais adiante.

Cada processo de fusão termonuclear necessita de uma energia de ignição, gerada a partir da energia gravitacional. Em 1931, Chandrasekhar determinou as massas mínimas necessárias para que uma estrela desse início a estes processos (ver Ref. [11]). Abaixo transcrevemos alguns valores, a título de exemplo:

$$H \rightarrow 0.08M_{\odot}$$

$$He \rightarrow 0.25M_{\odot}$$

$$C \rightarrow 1.06M_{\odot}$$

$$Ne \rightarrow 1.37M_{\odot}.$$

O esgotamento da fusão nuclear sinaliza o fim do estágio luminoso da estrela. A fusão termonuclear que ocorre durante a maior parte da vida de uma estrela e a época de seu esgotamento dependem de sua massa inicial (conferir o Teorema de Russell-Vogt). Só estrelas massivas ($M \gtrsim 8 M_{\odot}$) chegam a produzir ferro nas reações de fusão. Estas estrelas massivas podem terminar suas vidas como estrelas de nêutron ou buracos-negros. Em estrelas menos massivas a combustão é mais lenta e não chega à síntese do ferro. Estas estrelas terminam suas vidas como anãs brancas.

2.2.1 Gigante Vermelha

As gigantes vermelhas não estão entre os estágios finais das estrelas mas precedem o estágio de anã branca, portanto é interessante comentarmos brevemente este que é um importante estágio intermediário das estrelas.

Em termos de tamanho físico o caroço isotérmico de hélio degenerado nunca é muito grande. Assim, a evolução pós-sequência principal de uma estrela de pouca massa

pode ser vista como o processamento de material estelar além da zona de queima, com o hélio resultante sendo acumulado em um pequeno volume com peso molecular médio muito maior (o caroço pode atingir densidades da ordem de 10^6 g.cm^{-3}). A densidade caindo logo acima do caroço de hélio levará a um aumento da temperatura (que passa a ser da ordem de 10^8 K), de modo que os mecanismos de geração de energia nuclear possam suprir a energia necessária para suportar a estrela através do processo triplo- α . Entretanto, um aumento na temperatura central levaria a um aumento do gradiente de temperatura e a um conseqüente aumento da luminosidade. A luminosidade aumentada, por sua vez, provoca a expansão do envelope externo da estrela, diminuindo o gradiente de temperatura. O equilíbrio é estabelecido com uma temperatura de camada superior com gradiente de temperatura e luminosidade um pouco maiores. O processo continua até que o gradiente de temperatura exceda o gradiente adiabático. Então o envelope externo inteiro se tornará convectivo ficando com a menor temperatura que uma estrela pode ter – segundo modelos teóricos de Hayashi & Hoshi (limite de Hayashi).

O aumento no tamanho físico do envelope diminui a temperatura superficial e, portanto, aumenta a opacidade radiativa nas camadas externas. Isso promove a redução da eficiência do transporte radiativo e assegura a formação da zona convectiva externa. O envelope externo agora passa a se comportar como um polítropo de índice $n = 1.5$ aproximadamente (ver Seção 3.2 sobre polítropos).

A estrela agora é totalmente convectiva. A redução contínua do suprimento de hidrogênio disponível na região de queima na camada, que se torna extremamente fina, leva a um aumento contínuo na temperatura de camada acompanhado de um aumento da luminosidade. Com a zona convectiva externa comportando-se como um polítropo e carregando eficientemente a energia para a superfície, a perda de energia é novamente limitada pela fotosfera e a estrela se expande rapidamente para acomodar o fluxo de energia aumentado. Daí o termo gigante, que pelo resfriamento desloca-se para a região do vermelho nos Diagramas H-R.

2.2.2 Anã Branca

Embora sejam quentes, as anãs brancas não são estrelas propriamente ditas visto que são objetos cujas reações termonucleares já se extinguíram. Pode-se dizer que são “cinzas” de estrelas mortas que estão esfriando. Quando esfriam totalmente, essas “cinzas” tornam-se objetos frios chamados de anãs negras, pois já não emitem luz.

Existem duas propostas básicas para a teoria sobre anãs brancas. A primeira leva em conta que um gás relativístico degenerado se comporta como um polítropo (ver Seção 3.2) e explora as implicações desse fato. A segunda proposta é a de investigar

detalhadamente a física específica da equação de estado e criar modelos a partir dos resultados obtidos.

Algumas estrelas de baixa massa, embora não todas, ejetam matéria antes de atingirem a fase de anã branca, essa matéria ejetada forma imensas massas de plasma a que chamamos de nebulosas planetárias. A ejeção de uma nebulosa planetária durante as fases finais da evolução de uma estrela de baixa massa deixa um caroço quente e degenerado de carbono e oxigênio exposto ao meio interestelar. Embora o caroço possa ter uma massa em torno de $0.1 M_{\odot}$ até pouco mais de $1 M_{\odot}$ o futuro do caroço daí em diante será independente de sua massa. Enquanto as variáveis de estado passam por regiões de degenerescência, através de regiões de degenerescência parcial até uma casca superficial não-degenerada, as propriedades básicas da estrela podem ser compreendidas se tratarmos as estrelas como polítropos.

Sabemos observacionalmente que uma anã branca remanescente da evolução estelar tem em torno de uma massa solar confinada em um volume de dimensões planetárias e, portanto, terá um densidade da ordem de $\rho = 10^6 \text{ g.cm}^{-3}$. Algumas anãs brancas têm densidades centrais maiores do que 10^7 g.cm^{-3} . Uma colher de chá do material que as constitui pesaria 50 toneladas na Terra!

Se assumirmos que o gás é totalmente ionizado (estado de plasma), então a energia típica de um elétron será em torno de 0.1 MeV, um gás completamente degenerado. Se o caroço estelar estivesse a uma temperatura de 10^7 K , um íon típico teria uma energia em torno de 1 KeV. Como as densidades de energia são como pressões, ainda que as densidades para elétrons e íons apresentassem os mesmos valores numéricos, a pressão de elétrons ainda dominaria. De fato, como um íon típico produz múltiplos elétrons, a pressão de elétrons é sempre muito maior. Conseqüentemente a estrutura será determinada, em grande parte, pela pressão de elétrons e os íons poderão ser ignorados. Entretanto, Hamada e Salpeter (ver Ref. [12]) demonstraram que para densidades em torno de 10^8 g.cm^{-3} a energia de Fermi² do “mar” de elétrons se torna tão alta que aumenta também a probabilidade de ocorrência do decaimento beta inverso e alguns dos elétrons “desaparecem” sendo capturados pelos prótons dos núcleos. Isso força a redução do limite de massa além do que se esperaria para um gás puramente degenerado.

Apesar de não haver concordância entre muitas previsões teóricas devido às incertezas na modelagem da convecção e na taxa de reação $C(\alpha, \gamma)O$ o limite superior de massa não é determinante para se dizer qual a percentagem de estrelas que terminam sua vida como anãs brancas. Estimativas modernas indicam que nascem muitas estrelas de baixa massa e poucas estrelas massivas sendo que para cada estrela de $10 M_{\odot}$

²A energia de Fermi de um sistema é a maior energia possível que uma partícula do sistema pode ter. Para maiores detalhes ver o Capítulo 4.

nascem 250 estrelas de $1 M_{\odot}$.

A energia que a estrela emite durante toda a sequência de esfriamento das anãs brancas até entrar em equilíbrio térmico com o universo (tornando-se uma anã negra), é a quantidade de energia que a estrela produziu ao longo de todas as fases evolutivas anteriores. A estrela está literalmente apenas esfriando.

As anãs brancas são o produto final da evolução estelar para cerca de 95-98% de todas as estrelas.

2.2.3 Supernova

Assim como as anãs brancas representam o fim lento de estrelas que “viveram” muito, há também aquelas estrelas de vida mais curta que acabam suas vidas em eventos rápidos e drásticos como uma explosão. É o caso das *supernovae* que descreveremos nesta Seção.

Quando uma grande estrela explode, ela libera muito de sua matéria no espaço interestelar. Por alguns dias ela se torna tão brilhante quanto uma galáxia (algumas até mais!). É o evento a que chamamos de *supernova*. As supernovas de Tipo II, das quais falaremos mais adiante, têm energia cinética da ordem de 10^{50} a 10^{51} *ergs* e luminosidades de 10^9 a $10^{10} L_{\odot}$. A matéria ejetada se esfria e, posteriormente, pode vir a se tornar matéria-prima para a formação de novos sistemas estelares.

Acredita-se que alguns desses sistemas que venham a se formar se desenvolvam como famílias de estrelas e planetas (tal como é nosso sistema solar). Isto explica a existência em nosso meio dos elementos mais pesados que o ferro, pois tais elementos não podem ser produzidos por fusão termonuclear no caroço do núcleo estelar, e sim durante as explosões de supernovas. Ou seja, de acordo com essa teoria, devemos nossa própria existência a uma ou mais supernovas que explodiram a bilhões de anos atrás.

A *supernova* (ou abreviadamente SN), com plural *supernovae* (abreviado como SNe), representa a explosão catastrófica que marca o fim da vida de certas estrelas. Uma massa de uma a dez massas solares é ejetada a velocidades da ordem de dez por cento da velocidade da luz. A energia correspondente é comparável à energia de ligação gravitacional de uma estrela e, portanto, evidencia que a estrela fica severamente, se não completamente, comprometida.

Algumas SNe podem produzir remanescentes compactos como estrelas de nêutron e buracos-negros. Elas também podem liberar restos extensos que são ejetados para fora e conduzem ondas de choque para o meio interestelar. Essa energia pode ajudar a formar novas estrelas e, em algumas circunstâncias, pode “soprar” matéria totalmente para fora de galáxias quentes.

Devido a seus grandes brilhos, as SNe podem ser usadas para determinar distâncias

e ajudam a determinar a idade, forma e dinâmica do universo.

Dos estudos de SNe em outras galáxias, Minkowski classificou dois tipos básicos, baseado na presença ou não de hidrogênio no espectro observado, chamados de :

1. **Tipo I:** caracterizado pela ausência de hidrogênio no espectro e é hoje dividido nos seguintes subtipos:
 - a) **Tipo Ia:** (subgrupo que compreende 80% das SNe de Tipo I), em geral são explosões de estrelas antigas (seu tempo estimado de vida é da ordem de 10^9 anos) e de baixa massa (algo em torno de $3 - 8 M_{\odot}$). Esta é uma classe extremamente homogênea de objetos. Na fase de brilho máximo, seu espectro apresenta fortes linhas de absorção de silício. A luminosidade máxima é bem definida, principalmente se considerarmos separadamente as SNe de galáxias *late-type* (mais brilhantes) e *early-type* (menos brilhantes)³. No cenário “standard”, esta SN ocorre em sistemas binários, onde uma anã branca de carbono/oxigênio acreta a massa da estrela secundária, eventualmente atinge o limite de Chandrasekhar ($1.44 M_{\odot}$) e explode em uma reação termonuclear. A reação ocorre quando a queima de seu carbono e oxigênio é disparada, produzindo elementos mais próximos do ferro. Um importante isótopo produzido é o ^{56}Ni que decai para ^{56}Co , que por sua vez decai para ^{56}Fe . Esses decaimentos liberam raios gama da ordem de MeV e pósitrons que potencializam a curva de luz óptica.
 - b) **Tipo Ib:** Tais SNe têm linhas fortes de hélio e pouco silício durante o máximo. Os progenitores dessas SNe (assim como as de Tipo Ic) são estrelas maciças que colapsam.
 - c) **Tipo Ic:** Espectro semelhante ao Tipo Ib, mas sem as linhas proeminentes de hélio.
2. **Tipo II:** O que define as SNe deste tipo é o fato de que exibem a linha $H\alpha$ de forma proeminente. Exceto pelo hidrogênio, seu espectro é similar às SNe de Tipo Ib/c, mas, assim como a luminosidade máxima, há uma grande variedade. Estas SNe ocorrem devido ao colapso do caroço de estrelas no intervalo $10 - 30 M_{\odot}$.

Como anãs brancas com massa máxima, a massa de Chandrasekhar, as estrelas do Tipo Ia são essencialmente idênticas e, portanto, sofrem explosões quase idênticas. A

³Dentro do sistema de classificação de galáxias desenvolvido por Hubble, galáxias irregulares são definidas como “late-type” enquanto que galáxias elípticas e espirais sem braços (estas últimas também chamadas de S_0) são definidas como “early-type”.

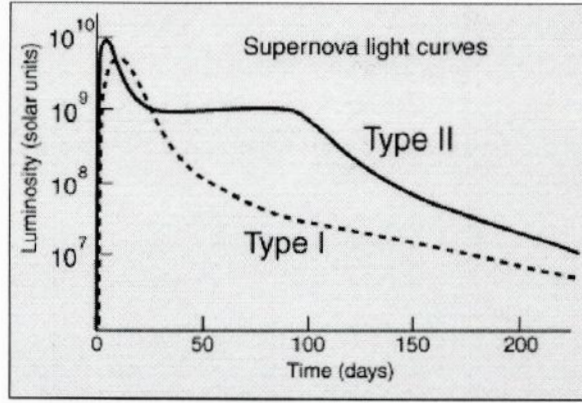


Figura 2.2: Comparação de Curvas de Luz de supernovas de Tipo I e Tipo II. Figura extraída do endereço eletrônico: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/Astro/snovcn.html>.

homogeneidade observada do Tipo Ia tem apontado para uma origem na explosão de anãs brancas constituídas principalmente de carbono e oxigênio. Sabemos hoje que as do Tipo Ia não são todas exatamente idênticas, mas o princípio básico se mantém. A idéia é a de que uma estrela mais massiva orbitando em um sistema binário onde a companheira é uma anã branca pode, eventualmente, perder massa para a companheira menor. Caso parte da atmosfera da estrela maior fique a uma distância da anã menor do que o raio de Roche (ou limite de Roche) da anã, parte dessa atmosfera pode ser atraída pela anã branca que passa então a “canibalizar” a companheira maior. Quando a soma da massa acretaada com a massa original da anã se torna maior do que o limite de Chandrasekhar surgem as condições para a ocorrência de novas reações nucleares conforme a Ref. [13]. Neste processo, carbono (ou possivelmente hélio) é queimado sob condições altamente degeneradas e uma substancial fração da estrela é consumida no processo.

O produto final dessa queima nuclear é o Fe , que é bastante abundante no espectro óptico das SNe do Tipo I. Outra característica marcante na diferenciação de Tipos I e II é o fato de que as SNe de Tipo I não apresentam linhas de hidrogênio no espectro observado, enquanto as de Tipo II apresentam tais linhas. Isso se deve ao fato de que as anãs binárias acima citadas geralmente queimam todo o hidrogênio acretaado da estrela maior convertendo-o em hélio antes da explosão de supernova. Isso explica a ausência dessas linhas nos espectros do Tipo I.

Quando a explosão de uma estrela massiva tem energia superior a $\sim 10^{52}$ erg (medido através da largura da linhas de emissão) chamamos de **hipernova**. Neste caso, o colapso do caroço pode resultar em um buraco-negro e estar associado ao fenômeno de *Gamma Ray Burst* (GRB - ou, numa tradução livre, *Pulso de Raios Gama*). Pos-

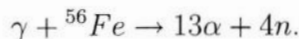
sivelmente estas explosões não têm simetria esférica.

O estudo de eventos do Tipo Ia não é o objetivo deste trabalho. Neste trabalho o que nos interessa realmente são os Tipos II, Ib e Ic pois é nesses tipos de eventos que nasce o objeto de nossa pesquisa: uma proto-estrela de nêutron que dará origem a uma estrela de nêutron.

As estrelas que produzem eventos de supernova que nos interessam são estrelas cuja vida é de curta duração, portanto, devem ser estrelas massivas. As massas das estrelas que produzem tais eventos são estimadas como sendo da ordem de dez ou talvez trinta a cinquenta massas solares. Devemos observar que deve haver um limite máximo de massa acima do qual a estrela colapsa num buraco negro (sobre o qual falaremos mais adiante) – entretanto tal limite superior de massa ainda é discutido até hoje e não está definido com exatidão.

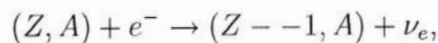
Vamos agora analisar brevemente os mecanismos que acionam a supernova. Em geral, a explosão segue a uma implosão do caroço de ferro. Há dois mecanismos principais que podem ocasionar a implosão (ou colapso) do caroço: a reação de fotodissociação do ^{56}Fe ; e, a captura eletrônica.

A fotodissociação do ^{56}Fe foi proposta por Burbidge et al na Ref. [15] através da reação

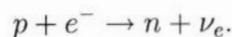


Trata-se de uma reação fortemente endotérmica capaz de consumir do sistema aproximadamente $2,1 \times 10^{18} \text{ erg/g}$. O ^{56}Fe é justamente o produto final dos ciclos de nucleossíntese, e que precedem a formação do caroço de pré-supernova.

A captura eletrônica também tem um papel de grande importância na implosão do caroço. Depois que o ^{56}Fe é sintetizado, o caroço da gigante vermelha se contrai lentamente, aumentando assim a densidade. Com isso o potencial químico dos elétrons cresce na mesma medida em que diminui o volume do sistema. Para densidades da ordem de 10^9 g/cm^3 , o potencial químico dos elétrons é $\mu_e \approx 10 \text{ MeV}$, e a seguinte reação é energeticamente possível:



conhecida como captura eletrônica. O termo (Z, A) representa o núcleo original de número atômico Z e número de massa A . Os prótons livres do meio eventualmente podem participar do processo através da reação



A captura eletrônica acelera duplamente o colapso: por um lado ela reduz drasti-

camente o número de elétrons do sistema, diminuindo a pressão e a energia interna do gás e, por outro lado, através do fluxo de neutrinos abundantemente emitidos para fora do sistema nos instantes iniciais do colapso.

Nos instantes finais do colapso, o endurecimento da equação de estado do caroço inverte repentinamente o sentido do movimento (*bounce*) ao mesmo tempo que as camadas externas próximas ao caroço - em movimento quase de queda livre - colidem violentamente com um caroço denso e duro, sendo então refletidas. A onda de choque gerada durante o choque de reflexão pode, eventualmente, ejetar as camadas externas inicialmente em colapso, juntamente com o restante da estrutura da estrela.

Uma ejeção interna de neutrinos é a primeira evidência de que ocorreu uma supernova de caroço implodido. Ela é seguida, algumas horas depois, por uma onda de choque atravessando a estrela e liberando radiação eletromagnética inicialmente num flash ultravioleta. A supernova se torna visível em comprimentos de onda ópticos e se expande, com a ascensão inicial da curva de luz como resultado do aumento da área superficial combinada com um decréscimo relativamente lento da temperatura. O pico de luz ocorre quando a temperatura das camadas externas começa a cair.

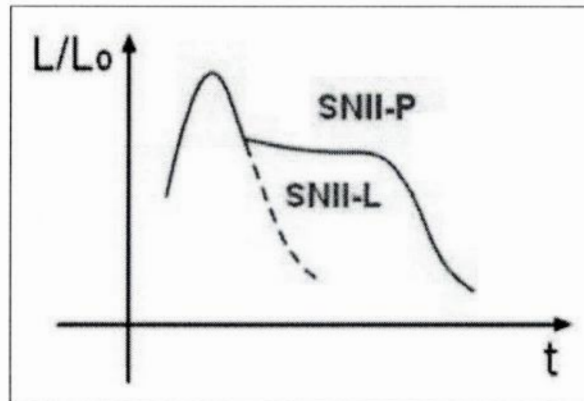


Figura 2.3: Comparação de Curvas de Luz de supernovas Tipos II-L e II-P. Figura extraída do endereço eletrônico: <http://www.answers.com/topic/supernova>.

Há duas categorias de explosões de supernova Tipo II, as quais foram classificadas em 1973 por Barbon *et al.* [14] levando em consideração a forma da curva de luz – um gráfico de luminosidade versus tempo – que se segue à explosão. As SNe de Tipo II-L mostram uma curva com declínio constante, quase linear (daí a letra L). Já as de Tipo II-P apresentam curvas com um período de declínio mais lento permanecendo brilhantes por mais tempo mesmo após ter passado por seu brilho máximo. A curva apresenta uma estrutura como um platô (o que justifica a letra P), seguida por um decaimento normal (ver Figura 2.3).

Os picos de luz nas supernovas de Tipo II-L são aproximadamente uniformes enquanto os picos das do Tipo II-P apresentam grande dispersão, isso deve-se possivelmente a diferenças nos raios das estrelas progenitoras.

As supernovas de Tipo II acusam a presença de hidrogênio em seu espectro, acredita-se que a existência do platô esteja associada à profundidade do envelope de hidrogênio. As de Tipo Ib e Ic, embora raras, são também supernovas de caroço colapsante, mas não apresentam em seu espectro linhas de Hidrogênio e Hélio (para as de Tipo Ic). Como resultado, esses tipos de supernova aparentam ser pobres desses elementos.

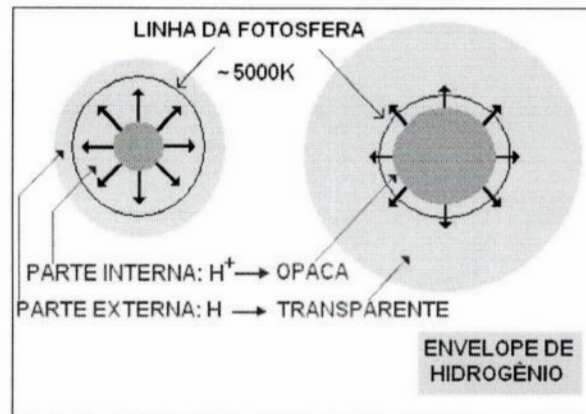


Figura 2.4: A frente de recombinação se expande até as camadas mais internas reduzindo a opacidade dessas camadas, permitindo que as mesmas possam ser observadas.

O começo do platô corresponde a uma mudança na opacidade da camada externa da estrela explodida. Como a onda de choque produzida pelo colapso do caroço se propaga para fora atravessando a estrela, ela aquece o envelope externo da estrela a até 10^5 K ionizando todo o hidrogênio. O hidrogênio ionizado possui opacidade alta para os fótons, a radiação proveniente das partes internas não consegue escapar. Somente os fótons das camadas mais externas são observáveis. Depois de algumas semanas, entretanto, as camadas mais externas da estrela esfriam o suficiente para que o hidrogênio ionizado possa se recombinar para formar hidrogênio neutro. Nas supernovas de caroço colapsante a temperatura crítica para a recombinação do hidrogênio gira em torno de $4 - 6 \times 10^3$ K. Embora o hidrogênio ionizado seja opaco à radiação eletromagnética, o hidrogênio neutro é transparente para muitos comprimentos de onda⁴, e esta frente de recombinação onde a opacidade muda é conhecida como fotosfera da estrela (ver Ref. [16]). Uma vez que o hidrogênio comece a se recombinar, os fótons das regiões mais quentes, e mais internas, do envelope de hidrogênio poderão escapar e será possível observar essas regiões mais profundas da atmosfera estelar (ver Figura 2.4).

⁴É importante lembrar que o hidrogênio neutro também é opaco para vários fótons, como os da radiação ultravioleta!

À medida que a estrela continua se expandindo, forçando a fotosfera mais e mais para dentro da estrela, sucessivas regiões internas vão esfriando até a temperatura de recombinação. Desde que essa temperatura se mantenha essencialmente constante à medida que a fotosfera avança através do envelope de hidrogênio, um platô é criado na curva de luz.

É interessante lembrar que as próprias supernovas de Tipo II-L bem observadas são poucas em relação às de Tipo II-P e existe muita controvérsia sobre serem uma classe distinta de objetos. Alguns astrônomos acreditam que as SN Tipo II-L não apresentam fase de platô simplesmente porque seu envelope de hidrogênio seria muito menor.

Outra característica relacionada à fase de platô é a luminosidade. Nessa fase O brilho é maior nas estrelas que produzem muito níquel, e ambas as características estão ligadas a explosões de energias mais intensas e velocidades de ejeção maiores. Depois que a frente de recombinação ultrapassa o envelope de hidrogênio, a fase de platô (quando existe) termina, e as curvas de luz das supernovas de Tipo II acabam com um formato de “cauda” radioativa. Isso é potencializado pela conversão de ^{56}Co em ^{56}Fe e tem a mesma forma para todas as supernovas de caroço colapsante.

2.2.4 Estrela de Nêutron

Estrelas de nêutron são pequenas estrelas compactas com densidades da ordem de $10^{15} \text{ g.cm}^{-3}$ e raios da ordem de 10 km. São compostas basicamente de nêutrons embora possuam também prótons e elétrons. Estes enormes “núcleos” ricos em nêutrons são mantidos pela gravitação e requerem uma massa mínima da ordem de um décimo de uma massa solar. Também foi proposto, com base na Ref. [17] um limite máximo para tais objetos inicialmente de $0.7 M_{\odot}$ na Ref. [18], entretanto, estimativas mais modernas (vide Ref. [19]) indicam que esse limite seja da ordem de duas a três massas solares. Estrelas de nêutron, com mais massa do que esse limite superior, tendem a entrar em colapso e podem originar buracos-negros.

Estrelas de nêutron se formam, em geral, em explosões de SNe de Tipo II quando estrelas massivas – da ordem de dez ou mais massas solares – esgotam seu combustível nuclear depois de queimá-lo por milhões de anos. Se o caroço de ferro no centro da estrela esgotada excede o limite de uma massa solar e meia, a estrela sofre um colapso gravitacional em alguns segundos e tem uma morte violenta.

Quando ocorre o colapso do caroço de ferro, os prótons dos núcleos de ^{56}Fe capturam elétrons e se convertem em nêutrons. Cada reação cria um neutrino. Quando o colapso atinge a densidade de núcleos atômicos, a pressão dos nêutrons consegue segurar o colapso e a contração cessa. Uma grande quantidade de energia é liberada na formação de uma estrela de nêutron. Esta energia é cerca de mil vezes mais do

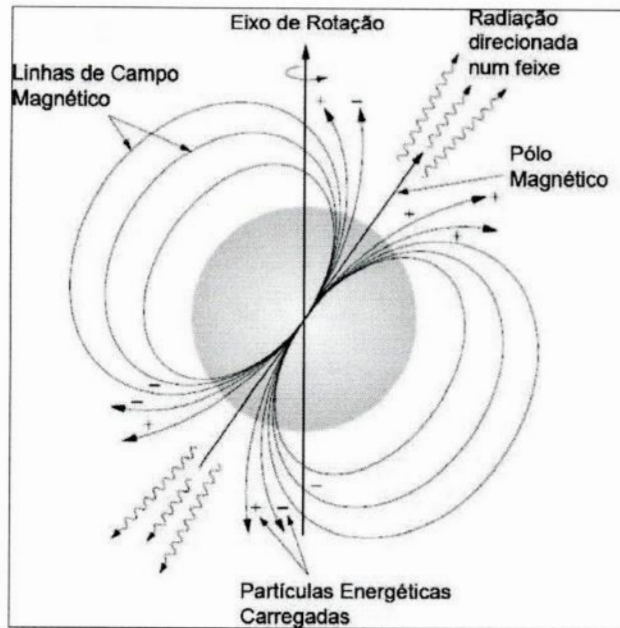


Figura 2.5: Um pulsar é uma estrela de nêutron cujo eixo de rotação não coincide com seu eixo magnético. A rotação da estrela em alta velocidade somada a esse desalinhamento dos eixos faz com que o sinal recebido seja intermitente, semelhante a um farol piscando, porém em altíssimas velocidades.

que o necessário para expelir as camadas externas da estrela – as quais contêm cálcio, oxigênio, carbono e hélio – e qualquer envelope externo de hidrogênio. O problema é que muito da energia produzida no colapso se perde para os neutrinos que podem facilmente se difundir para fora da recém-nascida estrela de nêutron e passam “através” da matéria colapsada.

Algumas estrelas de nêutron com alta rotação apresentam um desalinhamento entre seu campo magnético B e seu eixo de rotação Ω . Elas emitem radiação de dipolo na forma de ondas de rádio que parecem pulsos que se alternam – como as luzes de um farol (ver Figura 2.5) – quando o feixe chega à Terra com a frequência de rotação da estrela de nêutron. Tais estrelas são chamadas de pulsares, pois a radiação que recebemos vem em “pulsos”. Pulsares de rádio foram primeiramente descobertos por Bell e Hewish em 1967. Desde então milhares de pulsares já foram catalogados.

Pulsares de Raios X e Emissores de Pulsos de Raios Gama (do inglês *Gamma Ray Bursters*), segundo alguns teóricos, são estrelas de nêutron com discos de acreção (ver Figura 2.6). As erupções de raios X seriam explosões termonucleares devidas à acreção de matéria pela superfície de uma estrela de nêutron. Depois de acumular hidrogênio durante horas, a pressão e a temperatura se tornariam suficientes para disparar uma explosão termonuclear que seria vista como uma erupção de raios X . A energia en-

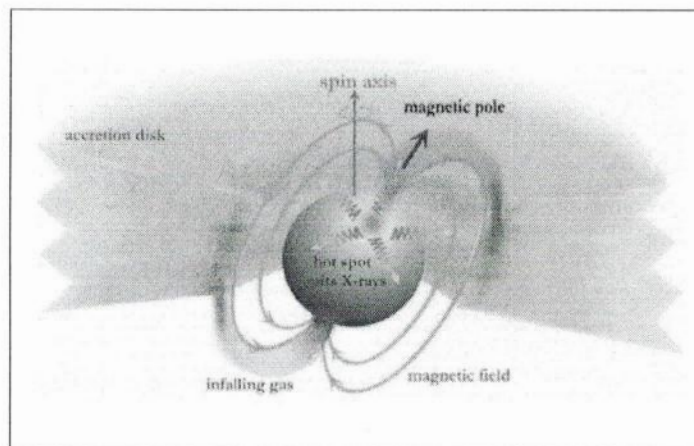


Figura 2.6: Quando uma estrela de nêutron recebe matéria de um disco de acreção, eventualmente atinge-se a temperatura necessária para a ocorrência de reações termonucleares. Durante tais explosões são liberadas grandes quantidades de raios X. Figura extraída do endereço eletrônico: <http://www.oulu.fi/astronomy/astrophysics/pr/head.html>.

volvida é da ordem das energias de ligação nucleares típicas (~ 7 MeV por átomo de hidrogênio). A acreção lenta de uma companheira de baixa massa gera um fundo contínuo de raios X. Existem outros modelos para explicar estes fenômenos, porém não os analisaremos pois abordar tais modelos fugiria aos objetivos deste trabalho.

Recentemente uma subclasse de pulsares de raios X foi descoberta. Uma *magnetar* (contração no inglês de *magnetic star*) é uma estrela de nêutron cuja energia do campo magnético excede todas as outras fontes de energia, inclusive a rotação. Em alguns casos o campo magnético pode ser da ordem de 10^{15} Gauss – motivo pelo qual tais objetos foram apropriadamente batizados de *magnetars* – o que torna as magnetars os objetos com os mais intensos campos magnéticos conhecidos.

As magnetars foram inicialmente propostas para explicar as propriedades dos *repetidores de raios gama moles* [20] (ou SGR, do inglês *soft gamma repeaters*). SGR são fontes de erupções curtas, e repetitivas, de raios γ (da ordem de ~ 100 KeV).

Os SGR possuem períodos de atividade eruptiva (bursts), pontuada por longos períodos de inatividade. Ocasionalmente (talvez a cada século) eles emitem intensas e gigantescas erupções de radiação γ podendo atingir energias da ordem de vários MeV cujas intensidades na Terra chegam a ser maiores do que qualquer outra fonte de raios cósmicos [21].

2.2.5 Buraco Negro

Numa definição sucinta, buraco negro é uma região do espaço na qual toda matéria colapsou e da qual nenhum objeto material, luz ou sinal de qualquer tipo consegue escapar. Em outras palavras, uma região na qual o campo gravitacional é tão intenso que não deixa nada escapar.

Os atuais modelos de buraco negro são baseados na *Teoria da Relatividade Geral*, na qual pode ser demonstrado que se uma quantidade qualquer de matéria for suficientemente comprimida – tal que fique contida dentro de um raio crítico conhecido como raio de Schwarzschild – nenhum sinal pode escapar dela.

Um buraco negro surgiria se uma quantidade de matéria fosse comprimida dentro de seu raio de Schwarzschild, e a vizinhança do buraco negro – conhecida como horizonte de eventos – seria uma esfera com esse raio. Nada que caísse lá dentro jamais poderia escapar novamente.

É importante ressaltar que o buraco negro não é um objeto sólido, é uma região do espaço cujo raio depende apenas da matéria que caiu em seu interior. O que acontece com a matéria depois não depende do tamanho do buraco, e qualquer matéria que caia em seu interior só servirá para aumentar o raio do buraco.

Buracos negros se formam como o resultado do colapso de muitas estrelas massivas quando estas esgotam seu combustível nuclear ao final de seus ciclos de vida. Muitas estrelas colapsam até formar objetos compactos densos – como é o caso das anãs brancas e das estrelas de nêutron, discutidas nas seções anteriores – porém, muitas estrelas massivas podem continuar a colapsar até que toda sua matéria esteja comprimida em um ponto de densidade infinita conhecido como singularidade. Mas antes que isso aconteça toda a matéria colapsante terá passado dentro de seu raio de Schwarzschild, formando um buraco negro e desaparecendo para sempre.

Alguns buracos negros parecem ter origens não-estelares. Grandes nuvens de gás ou um grande número de estrelas poderia colapsar em buracos negros super-massivos no centro de quasares e em sistemas galácticos que parecem estar explodindo. Outro tipo de buracos negros não-estelares foi proposto pelo físico britânico Stephen Hawking, de acordo com sua teoria vários mini-buracos negros primordiais teriam se formado na época do Big Bang.

Capítulo 3

A Estrutura Estelar

3.1 As Equações de Estrutura Estelar na Sequência Principal

Na Sequência Principal, podemos considerar a aproximação de equilíbrio quase-estático da estrutura estelar. Neste caso, as leis de conservação de energia e momentum para o sistema gasoso que compõe o meio estelar permitem estabelecer as equações macroscópicas que descrevem a estrutura estelar. Vamos considerar a situação de simetria esférica como uma boa aproximação para a distribuição de matéria de uma estrela. Neste caso, temos que a conservação do momentum leva à condição de equilíbrio hidrostático

$$\frac{dp}{dr} = -4\pi G \frac{\rho}{r^2} \int_0^r \rho(r') r'^2 dr', \quad (3.1)$$

onde p é a pressão, ρ a distribuição de massa na estrela, e G é a constante gravitacional. O balanço de energia permite escrever

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 j_Q)}{dr} = \rho \epsilon, \quad (3.2)$$

onde j_Q é a componente radial do fluxo de calor e ϵ é a taxa de produção de energia nos processos de reação que ocorrem no interior da estrela. Se definirmos a luminosidade térmica $L(r)$ como o fluxo de calor da superfície de raio r , temos

$$L(r) = 4\pi r^2 j_Q,$$

e podemos expressar a equação (3.2) como

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon. \quad (3.3)$$

Considerando que a radiação está em equilíbrio térmico com a matéria, o fluxo de energia emitida por unidade de área é dado pela equação da radiação de corpo negro

$$\varepsilon_{rad} = \sigma T^4,$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann.

Surge aqui um gradiente de temperatura entre as regiões internas e externas da estrela dado por (ver Ref. [5])

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{4acT^3} \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (3.4)$$

Como há um gradiente de temperatura, então ocorre emissão de fótons das regiões internas, de mais altas temperaturas, para as regiões mais externas, mais frias. Aqui podemos afirmar que a transferência de energia é radiativa. Podemos agora resolver as equações (3.1), (3.3) e (3.4), dadas as funções determinantes das propriedades da matéria do interior estelar

$$\begin{aligned} p &= p(\rho, T) \\ \epsilon &= \epsilon(\rho, T) \\ \kappa &= \kappa(\rho, T), \end{aligned}$$

cujas condições de contorno em $r = 0$ são:

$$\begin{aligned} L(0) &= 0 \\ \frac{dp}{dr} &= 0 \\ \frac{dT}{dr} &= 0. \end{aligned}$$

A partir de valores iniciais como, por exemplo, $\rho(r = 0)$ e $T(r = 0)$, podemos resolver o sistema dado. Na superfície, tomando $\rho = 0$ ou $p = 0$, podemos calcular a massa

$$M = 4\pi \int_0^R \rho r^2 dr.$$

Para um dado valor inicial arbitrário de ρ_0 , podemos ajustar um valor inicial de temperatura T_0 tal que $T = 0$ na superfície. Desta forma, podemos determinar o raio R , a luminosidade superficial L e a massa M . Porém, observacionalmente temos que $T \neq 0$ na superfície. A temperatura efetiva pode então ser obtida pela relação de corpo

negro

$$T_{eff} = \left(\frac{L}{4\pi\sigma R^2} \right)^{1/4} .$$

Na realidade, o equilíbrio radiativo da equação (3.4) nem sempre ocorre, pois quando a taxa de produção de energia se torna muito grande, a configuração de equilíbrio radiativo fica instável e o gradiente de temperatura é menos eficiente no transporte de energia para a superfície. Surgem então *correntes de convecção*, ou seja, surge uma camada convectiva.

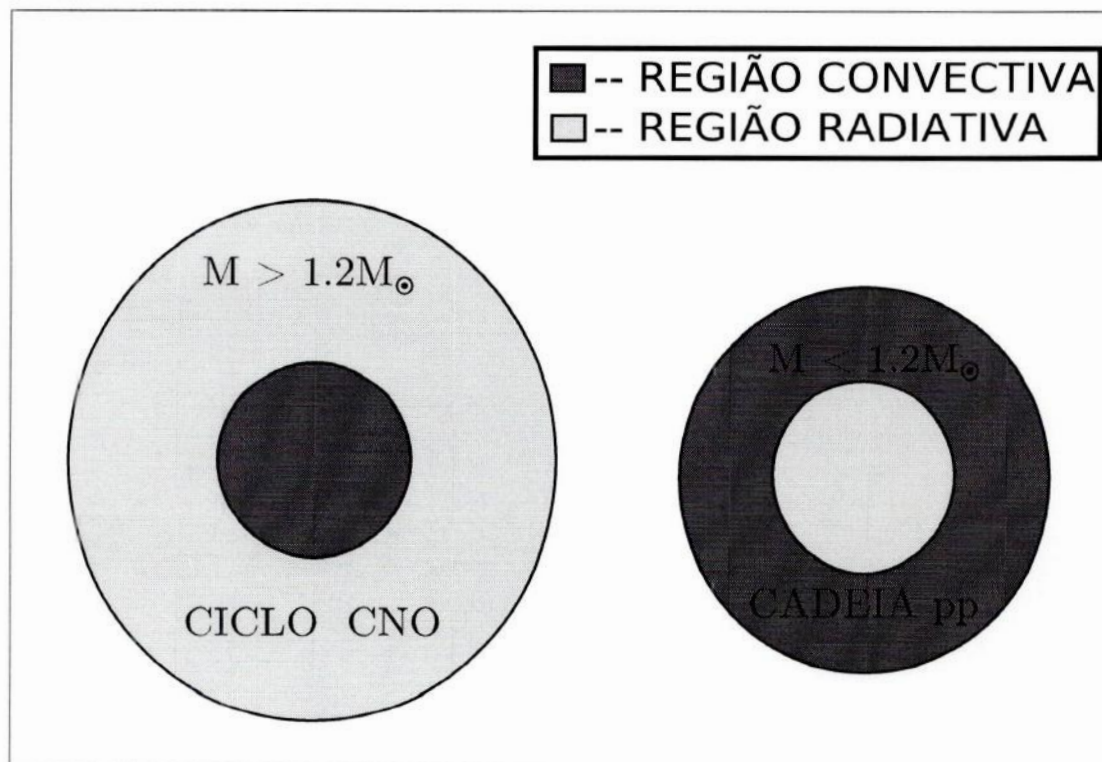


Figura 3.1: Estrelas massivas, que povoam a região superior da Sequência Principal, alcançam o ciclo CNO que é mais eficiente na liberação de energia. Os núcleos de tais estrelas são envolvidos por uma camada convectiva, pois o campo de radiação não dá conta de repassar para as camadas mais externas a energia produzida no núcleo. Analogamente, estrelas pouco massivas, que povoam a região inferior da Sequência Principal, apresentam uma camada convectiva externa, pois no núcleo a queima de hidrogênio ocorre através das cadeias *pp* que possuem menor eficiência do que o ciclo CNO.

Núcleos convectivos são encontrados em estrelas onde o ciclo CNO ou processo α -triplo ocorre, já que esses processos produzem grandes gradientes de temperatura. Essas estrelas são encontradas na região superior da Sequência Principal.

É interessante notar que as correntes de material quente não sobem sempre, após

percorrerem certa distância, elas serão termalizadas. Ou seja, elas se dissolverão no meio circundante e liberarão suas energias térmicas. Do mesmo modo, as correntes frias movimentando-se para baixo carregarão seus deficits de energia térmica com elas. O efeito líquido é um transporte convectivo de energia para cima e, portanto, um fluxo de energia de convecção. Como a convecção envolve o movimento de elementos de massa, ela produz uma composição homogênea na região convectiva, ao contrário da radiação que não mistura os componentes do material estelar.

Nas camadas mais externas, ambos os processos podem coexistir e carregar significativas quantias de energia, porém nos núcleos estelares só um dos dois processos irá dominar e carregar a maior parte do fluxo de energia.

3.2 Polítropos

Se a pressão puder ser escrita como uma função da densidade somente, $P = P(\rho)$, então a estrutura da estrela depende *somente* das equações de equilíbrio hidrostático e continuidade da massa. Em particular, se a dependência da pressão com a densidade em todos os pontos do interior estelar satisfizer a relação

$$P = K\rho^{(n+1)/n}, \quad (3.5)$$

com K e n constantes, a configuração é chamada de um *polítropo*. As equações de equilíbrio hidrostático e continuidade da massa podem ser reduzidas a uma equação diferencial de segunda ordem, dividindo-se a equação de equilíbrio hidrostático por ρ , multiplicando por r^2 e, então, derivando-se em relação a r os dois lados:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G\rho, \quad (3.6)$$

que é a equação de Poisson.

3.2.1 A Equação de Lane-Emden

Se definirmos variáveis adimensionais

$$\rho(r) \equiv \rho_c \theta^n(r), \quad (3.7)$$

e

$$r \equiv a\xi, \quad (3.8)$$

onde $\rho_c = \rho(r = 0)$ é a densidade central e a constante a dada pela equação

$$a = \left[\frac{(n+1) K \rho_c^{(1/n-1)}}{4\pi G} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

a (3.6) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) = -\theta^n. \quad (3.10)$$

Essa equação é chamada de equação de Lane-Emden, em honra ao físico americano Jonathan Homer Lane, que derivou a equação do equilíbrio hidrostático em 1869 e ao físico suíço Robert Emden. Modelos correspondentes às soluções dessa equação, para

um certo valor de n , são chamados de poltíropos de índice n . A pressão será dada por

$$P(r) = K\rho_c^{(1+1)/n}\theta^{1+n} = P_c\theta^{1+n}. \quad (3.11)$$

Se a equação de estado do material for a de um gás ideal com temperatura T , teremos

$$P = \frac{\rho}{\mu} N_A k T, \quad (3.12)$$

onde k é a constante de Boltzmann, μ é o peso molecular médio, e N_A é o número de Avogadro.

Então

$$P(r) = K' T^{n+1}(r) \quad (3.13)$$

e

$$T(r) = T_c \theta(r), \quad (3.14)$$

com

$$K' = \left(\frac{N_A k}{\mu} \right)^{n+1} K^{-n} \quad (3.15)$$

e

$$T_c = K\rho_c^{1/n} \left(\frac{N_A k}{\mu} \right)^{-1}. \quad (3.16)$$

Portanto, para um poltíropo com equação de estado de gás ideal e constante, θ mede a temperatura.

Finalmente, o fator de escala radial é dado por

$$a^2 = \left(\frac{N_A k}{\mu} \right)^2 \frac{(n+1) T_c^2}{4\pi G P_c} = \frac{(n+1) K \rho_c^{1/n-1}}{4\pi G}. \quad (3.17)$$

As condições de contorno

$$\begin{cases} \rho(r=0) = \rho_c \\ \frac{dP}{dr} = 0 \end{cases} \quad ; \text{ para } r=0$$

se traduzem em

$$\begin{cases} \theta(\xi=0) = 1 \\ \theta'(0) \equiv \frac{d\theta}{d\xi} = 0 \end{cases}$$

Se o índice politrópico n e a densidade central ρ_c forem dados, podemos integrar a equação de Lane-Emden (3.10) numericamente do centro até uma distância $r = R$ onde $P = 0$. Se chamarmos de ξ_1 a variável radial onde $\theta(\xi_1) = 0$ para $r = R$, obtemos

para R

$$R = a\xi_1 = \left[\frac{(n+1)P_c}{4\pi G\rho_c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \xi_1. \quad (3.18)$$

Dessa forma, especificando K , n e ρ_c ou P_c , obtemos o raio R .

Existem soluções analíticas para $n = 0, 1$ e 5 . Para um valor geral de n são necessárias soluções numéricas.

3.2.2 Soluções Analíticas

Para $n = 0$ o sistema equivale a uma esfera de densidade constante, e

$$\theta_0(\xi) = 1 - \frac{\xi^2}{6}; \text{ com } \xi_1 = \sqrt{6}. \quad (3.19)$$

Neste caso

$$P_c = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (3.20)$$

Para $n = 1$ a solução θ_1 é a função *sinc*

$$\theta_1(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}; \text{ com } \xi_1 = \pi, \quad (3.21)$$

onde a densidade é dada por $\rho = \rho_c\theta$ e a pressão por $P = P_c\theta^2$.

Para $n = 5$ a densidade central é finita, mas o raio tende a infinito

$$\theta_5(\xi) = \left[1 + \frac{\xi^2}{3} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.22)$$

com $\xi_1 \rightarrow \infty$. Embora o raio tenda a infinito, a massa é finita. As soluções de interesse se restringem ao intervalo $0 \leq n \leq 5$, pois para um índice $n > 5$ a massa também tende a infinito.

3.2.3 Soluções Não-Analíticas

A massa contida em uma esfera de raio r pode ser obtida pela equação de continuidade da masa

$$dM(r) = 4\pi r^2 \rho(r) dr,$$

em termos de ξ

$$dM(\xi) = 4\pi a^3 \rho_c \int_0^\xi \xi^2 \theta^n d\xi.$$

Comparando com a equação (3.10) vemos que podemos substituir θ^n por

$$\theta^n = -\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right).$$

Desta forma obtemos

$$M(\xi) = 4\pi a^3 \rho_c (-\xi^2 \theta')_{\xi},$$

onde

$$(-\xi^2 \theta')_{\xi} \equiv \left(-\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right)_{\theta=\xi}.$$

A massa total passa a ser dada, então, por

$$M = M(\xi_1),$$

$$M(\xi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \left(\frac{n+1}{G} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{P_c^{3/2}}{\rho_c^2} (-\xi^2 \theta')_{\xi_1}. \quad (3.23)$$

Resolvendo a equação (3.23) para P_c obtemos

$$P_c = \frac{1}{4\pi (n+1) (\theta')_{\xi_1}^2} \frac{GM^2}{R^4},$$

$$P_c = \frac{8.952 \times 10^{14}}{4\pi (n+1) (\theta')_{\xi_1}^2} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^2 \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^{-4} \text{ dina.cm}^{-4}. \quad (3.24)$$

Para um gás ideal

$$T_c = \frac{1}{(n+1) (-\xi \theta')_{\xi_1}} \frac{G\mu}{N_A k} \frac{M}{R},$$

$$T_c = \frac{2.293 \times 10^7}{(n+1) (-\xi \theta')_{\xi_1}} \mu \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \left(\frac{R_{\odot}}{R} \right) K. \quad (3.25)$$

Para cada valor de n podemos obter K em função de M e R :

$$K = \left[\frac{4\pi}{\xi^{n+1} (-\theta')^{n-1}} \right]_{\xi_1}^{\frac{1}{n}} \frac{G}{n+1} M^{1-1/n} R^{-1+3/n}. \quad (3.26)$$

Quando $n = 3$, K se torna dependente apenas de M .

Uma outra quantidade útil é a densidade média

$$\frac{\rho_c}{\langle \rho \rangle} = \frac{1}{3} \left(\frac{\xi}{-\theta'} \right)_{\xi_1} \quad (3.27)$$

Os valores de n que nos interessam são $n = 3/2$, para o caso de um gás completamente degenerado mas não relativístico, $P_e \propto \rho^{5/3}$, que também é o caso de um gás ideal

completamente convectivo, e $n = 3$ para um gás totalmente relativístico $P_e \propto \rho^{4/3}$.

3.3 As Equações de Estrutura Estelar para Objetos Compactos

A *Teoria Geral da Relatividade* é uma teoria clássica da gravitação na qual as variáveis são assumidamente contínuas e unicamente especificadas. O princípio de incerteza e a mecânica quântica não exercem nenhuma influência direta sobre a teoria.

Tradicionalmente, em relatividade geral, se utiliza um sistema de unidades onde $c = \hbar = G = 1$, nas seções seguintes utilizaremos esta notação pois facilita os cálculos. Todavia, nesta seção, não utilizaremos tal notação para que o significado físico dos diversos termos fique bem mais claro. Doravante utilizaremos a convenção de Einstein onde índices repetidos são índices de soma.

Basicamente é o tensor métrico que dita as propriedades da geometria do espaço-tempo. Ele é definido tal que

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.28)$$

Os elementos do tensor métrico são adimensionais, para o espaço Euclidiano comum são todos unitários se $\mu = \nu$ e os outros são nulos. Isto não é necessariamente verdade para espaços não-euclidianos.

As equações de campo relacionam as segundas derivadas do tensor métrico às propriedades da densidade energia-matéria local expressa em termos do tensor energia-momentum. As equações de Einstein são

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^2} T_{\mu\nu} \quad (3.29)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é conhecido como *tensor de Einstein* e $T_{\mu\nu}$ é o *tensor energia-momentum*. A relação entre o tensor métrico e o tensor de Einstein é bastante complexa.

Definamos

$$\Gamma_{\beta\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\beta} \right) \quad (3.30)$$

e

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha \equiv g^{\alpha\beta} \Gamma_{\beta\mu\nu} \quad (3.31)$$

onde $g^{\alpha\beta}$ é a matriz inversa de $g_{\alpha\beta}$, e Γ é conhecido como *símbolo de Christoffel*. Os símbolos de Christoffel e suas derivadas podem ser combinados para formar o *tensor de curvatura de Riemann*

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha \equiv \frac{\partial \Gamma_{\beta\delta}^\alpha}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha}{\partial x^\delta} + \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha \Gamma_{\beta\delta}^\mu - \Gamma_{\mu\delta}^\alpha \Gamma_{\beta\gamma}^\mu \quad (3.32)$$

Somando sobre todos os índices obtemos o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha} \quad (3.33)$$

Este quando somado sobre os dois índices restantes fornece o *escalar de curvatura*

$$R \equiv R_{\mu}^{\mu} \quad (3.34)$$

Finalmente, o tensor de Einstein pode ser expresso em termos do tensor de Ricci, do escalar de curvatura e do próprio tensor métrico como

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R \quad (3.35)$$

3.4 A Equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff

A mecânica estatística e a física de hádrons se relacionam através da função de partição ou do potencial termodinâmico do sistema. E a conexão entre estes e a astrofísica é feita pela equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff, (ver Refs. [17, 18]). É uma equação relativística para o equilíbrio hidrostático na estrela, deduzida a partir das equações de Einstein da Relatividade Geral.

Boa parte do progresso inicial na Relatividade Geral foi feito considerando uma métrica altamente simétrica que simplifica o tensor de Einstein. Vamos então considerar a métrica mais geral que exibe simetria esférica. Isto é, certamente, consistente com nossa suposição original de estrelas simétricas.

Se tomarmos as coordenadas esféricas usuais r , θ , φ , e t representar a coordenada temporal então a distância entre dois pontos nesta métrica poderá ser escrita como

$$ds^2 = -e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{e^{\alpha(r)} dt^2}{c^2} \quad (3.36)$$

onde $\lambda(r)$ e $\alpha(r)$ são funções arbitrárias da coordenada radial r . Precisamos também fazer outras suposições a respeito da estrela em questão, para manter a consistência com a suposição inicial de simetria esférica. Vamos assumir que o material da estrela obedece a uma equação de estado que não exibe tensões transversais, tal que todos os elementos não-diagonais do tensor de energia-stress sejam iguais a zero e os três primeiros elementos espaciais sejam iguais ao equivalente material da densidade de energia. A quarta componente diagonal deve ser justamente a densidade material, tal que (adotando $c=1$)

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = -\frac{P}{3}; T^{44} = \rho \quad (3.37)$$

isto é equivalente a dizer que a equação de estado tem a forma familiar

$$P = P(\rho)$$

Se tomarmos o tensor métrico especificado pela métrica (3.36) e repetirmos o procedimento da equação (3.28) até a equação (3.35) e somarmos sobre os três índices espaciais por causa da simetria esférica, obteremos das equações de Einstein

$$\begin{cases} e^{-\lambda} \left(\frac{\alpha'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi G P \\ e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi G \rho \end{cases} \quad (3.38)$$

O índice linha em α e λ denota diferenciação com respeito a r . A solução deve valer para todo o espaço, inclusive para fora da estrela onde $P=\rho=0$. Se tomarmos como contorno da estrela $r=R$, então para $r>R$ teremos as equações métricas de Schwarzschild

$$\begin{cases} e^{-\lambda(r)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\alpha(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 0 \\ e^{-\lambda(r)} \left(\frac{1}{r} \frac{d\lambda(r)}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

que tem soluções

$$e^{-\lambda(r)} = 1 + \frac{A}{r} \quad e \quad e^{-\alpha(r)} = B \left(1 + \frac{A}{r} \right) \quad (3.40)$$

onde A e B são constantes de integração arbitrárias determinadas pelas condições de contorno. Para r muito grande é necessário que o tensor métrico vá além do espaço plano euclidiano, ou seja

$$\lim_{\delta r \rightarrow \infty} e^{\lambda(r)} = \lim_{\delta r \rightarrow \infty} e^{\alpha(r)} = 1 \quad (3.41)$$

e $B = 1$. A integral de linha em torno do objeto precisa fornecer período e distância consistentes com a terceira lei de Kepler, significando que A está relacionado à massa Newtoniana do objeto. Mais especificamente

$$A = -\frac{2GM}{c^2} \quad (3.42)$$

que é conhecido como *raio de Schwarzschild*.

Podemos escrever

$$e^{\alpha(r)} \approx 1 + \alpha(r) \approx 1 + \frac{2GM}{r} \quad (3.43)$$

também sabemos que

$$\alpha(r) = 2\Omega \quad (3.44)$$

onde Ω é o potencial newtoniano a grandes distâncias. O parâmetro $\alpha(r)$ exerce a função de um potencial na métrica de Schwarzschild. Podemos, então, obter a solução para a primeira equação da (3.38) para sua derivada parcial e obter

$$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{G [M(r) + 4\pi r^3 P]}{r [r - 2GM(r)]} \quad (3.45)$$

Mesmo em uma métrica não-euclídeana deveríamos ter o resultado razoável

$$\nabla P = -\tilde{\rho} \nabla \Omega \quad (3.46)$$

onde $\tilde{\rho}$ é a densidade de massa total local tal que a densidade de matéria, ρ , precisa ser acrescida por P para incluir a massa da energia cinética do gás (ver Ref. [23]).

Combinando a equação (3.45) e a equação (3.46) obtemos

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G [\rho + P] [M + 4\pi r^3 P]}{r (r - 2GM)} \quad (3.47)$$

onde a equação (3.47) é a conhecida equação de Tolman–Oppenheimer–Volkoff (ou simplesmente TOV) do equilíbrio hidrostático. Junto com a equação de estado a equação TOV determina a estrutura de uma estrela relativística.

3.5 Formulação de Campos para Descrição Microscópica do Meio Estelar

Como vimos nas seções anteriores, a Equação de Einstein trás uma relação direta entre grandezas microscópicas de um sistema traduzida pelo seu conteúdo de energia-momentum e uma grandeza global relacionada à deformação espacial imposta pela presença da matéria e energia, o tensor de curvatura. Por conseqüência, a equação TOV se apresenta como uma relação entre grandezas microscópicas, a pressão, e grandezas globais, a massa total do sistema. Desta maneira, é necessário uma formulação microscópica para o meio estelar de onde se possa extrair, de forma consistente à termodinâmica, uma relação entre a pressão, densidade de energia e temperatura locais do meio estelar.

Quando um sistema clássico apresenta muitos graus de liberdade, os formalismos lagrangiano e o hamiltoniano – nos quais construímos as funções lagrangiana (L) ou a hamiltoniana (H) que aplicadas em certas equações dão como resultado as equações de movimento do sistema – se mostram adequados para descrevê-lo.

Estas funções são construídas a partir das expressões para as energias cinética (K)

e potencial (U). Assim:

$$L = K - U$$

e

$$H = K + U$$

do Cálculo Variacional, obtemos as equações de Euler-Lagrange, que dão as equações de movimento para L :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3.48)$$

onde os q_i s são as coordenadas generalizadas (uma para cada grau de liberdade). No caso de optar-se pelo formalismo hamiltoniano, utilizam-se as equações de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}; \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (3.49)$$

Nestes formalismos o campo passa a ser o “grau de liberdade”. No domínio relativístico o sistema deve ser invariante de Lorentz, e neste caso fica mais fácil verificar a invariância de Lorentz utilizando o formalismo lagrangiano ou o hamiltoniano. Por isso, em altas energias, utiliza-se teoria de campos com um destes formalismos.

Na formulação para campos, é mais conveniente trabalharmos com a densidade lagrangiana \mathcal{L} ao invés da lagrangiana. A densidade lagrangiana é definida em termos da lagrangiana como

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \quad (3.50)$$

Desta forma, as equações de Euler-Lagrange na formulação para campos e em notação quadrivetorial ficam

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (3.51)$$

onde os ϕ_i s são os vários campos possíveis num sistema.

Devemos tentar obter as equações de movimento para os casos livres que são mais simples e então introduzimos a interação. Quando trabalhamos com interações fortes, não conhecemos as expressões analíticas para os potenciais, então não podemos utilizar o procedimento clássico para construir a lagrangiana¹. A energia do sistema é obtida de maneira diferente, através do tensor energia-momentum, proveniente dos estudos de

¹ Cientes do abuso da linguagem, passaremos doravante a nos referir à densidade lagrangiana simplesmente como lagrangiana, como já se faz tradicionalmente em teoria quântica de campos.

mecânica dos meios contínuos (ver Ref. [22]):

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \sum_i \partial_\nu \phi_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \right) \quad (3.52)$$

onde o índice i soma todas as coordenadas generalizadas e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico dado por

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Conforme veremos em detalhes mais adiante, a partir do tensor de energia-momentum é possível obter a energia e a pressão do sistema através das relações

$$\begin{cases} \varepsilon = \langle T_{00} \rangle \\ P = \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle \end{cases} \quad (3.54)$$

onde $i=1,2,3$.

A obtenção da lagrangiana de duas partículas é formalmente imediata. Basta somar as duas respectivas lagrangianas do caso livre e depois adicionar a lagrangiana de interação que mistura as informações das duas partículas. O potencial de interação também deverá estar contido na lagrangiana de interação

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_B + \mathcal{L}_{INT} \quad (3.55)$$

No domínio da mecânica quântica relativística temos que levar em conta a diferença básica entre férmions e bósons que se reflete no spin. Então existem várias equações de movimento.

A equação mais simples é obtida partindo da expressão para energia relativística e aplicando os operadores para energia e momento:

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (3.56)$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla; \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

resultando em:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = m^2 c^4 \phi - \hbar^2 c^2 \nabla^2 \phi \quad (3.57)$$

ou

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0 \quad (3.58)$$

que é conhecida como equação de Klein-Gordon e vale para bósons de spin 0. A densidade lagrangiana que aplicada na equação (3.51) resulta nesta equação é dada por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \phi^2 \quad (3.59)$$

no sistema natural de unidades ($c = \hbar = 1$) o qual usaremos daqui em diante, é escrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi) + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad (3.60)$$

Dirac obteve uma equação compatível com a equação (3.48) que descreve férmions de spin $\frac{1}{2}$:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi = 0 \quad (3.61)$$

que é uma equação matricial, onde γ^μ representa as matrizes de Dirac, com a massa m há uma matriz identidade oculta na notação, e Ψ é um vetor escrito na forma de matriz coluna com quatro componentes. É importante lembrar que a amplitude de probabilidade ($\Psi^\dagger \Psi$) é uma multiplicação de matrizes que resultará em um escalar. Nesta equação o spin surge naturalmente por ser um efeito quântico-relativístico. A densidade lagrangiana para a equação de Dirac tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi \quad (3.62)$$

O fóton (que é um bóson não-massivo de spin 1) não é descrito pela equação de Klein-Gordon. Deve ser descrito pelas equações de Maxwell. Re-escrevendo as equações de Maxwell em termos dos potenciais escalar e vetor, φ e \vec{A} , obtemos

$$\nabla^2 \varphi - \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\rho \quad \text{e} \quad \nabla^2 \vec{A} - \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}) = -\vec{j} \quad (3.63)$$

ou, em notação quadrvetorial

$$\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu \quad (3.64)$$

onde $j^0 = c\rho = \rho$, (adotaremos $c=1$), $\vec{j} = (j^0, \vec{j})$ e $A = (\varphi, \vec{A})$. Adotando o calibre de Lorentz

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

Podemos compactar as equações dadas na equação (3.63) na forma quadrvetorial

$$\square A^\nu = j^\nu \quad (3.65)$$

A equação de movimento para um fóton livre (no vácuo, sem cargas e sem correntes reais), é dada por

$$\square A^\nu = 0 \quad (3.66)$$

A lagrangiana que, aplicada na equação (3.51), resulta na equação (3.66) é:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (3.67)$$

onde

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Na presença de fontes (ainda sob o calibre de Lorentz), teremos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \quad (3.68)$$

É interessante comentar que tanto a equação (3.67) quanto a equação (3.68) são invariantes sob transformações de Lorentz.

A generalização da equação do fóton para uma partícula que possua massa (e como o fóton, seja um bóson vetorial com spin 1), é chamada equação de Proca. O termo de massa é construído em analogia com a lagrangiana da equação de Klein-Gordon (3.58), sendo agora o campo vetorial. Esta lagrangiana para o caso livre é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu \quad (3.69)$$

onde

$$G_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu$$

Embora haja analogia com o caso do fóton apenas a notação é semelhante, não há relação com o campo eletromagnético. Havendo interação, teremos

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m^2 V_\mu V^\mu - j_\mu V^\mu \quad (3.70)$$

Pode-se construir uma lagrangiana de interação por acoplamento simples, com derivadas, etc, (utilizaremos apenas acoplamentos simples), respeitando também invariâncias e simetrias. Dados dois campos interagentes, ϕ (escalar da equação de Klein-Gordon) e Ψ (matriz da equação de Dirac), o acoplamento simples teria a seguinte forma:

$$g \bar{\Psi} \phi \Psi$$

onde g é uma constante. Para um acoplamento do campo Ψ com outro campo vetorial

do tipo A_μ :

$$g\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A_\mu$$

Como exemplo, podemos construir uma densidade lagrangiana para a interação entre um férmion de spin $\frac{1}{2}$ com carga elétrica q e representado pelo campo Ψ , e um fóton:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j_\mu A^\mu \quad (3.71)$$

onde, $j_\mu = q\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi A^\mu$ e podemos identificar a lagrangiana para o férmion livre e para o fóton livre que são responsáveis pela propagação das partículas e também o termo de interação.

O próximo capítulo é dedicado à discussão detalhada sobre a utilização destes conceitos para obtenção das características termodinâmicas do meio estelar para objetos densos.

Capítulo 4

Equação de Estado de Meios Estelares Densos Degenerados

A equação que relaciona densidade, temperatura, composição e pressão é chamada de equação de estado e sua forma funcional é relativamente diferente em regimes de temperatura-densidade diferentes.

Neste capítulo estudaremos os principais regimes em uma estrela de nêutron e suas respectivas equações de estado.

As partículas quânticas são classificadas como férmions ou bósons. Tal classificação se baseia no princípio de exclusão de Pauli. Os férmions de um sistema não podem ocupar um mesmo estado quântico (ter números quânticos idênticos), e isto é expresso através do princípio de exclusão. Já os bósons não obedecem ao princípio de exclusão – podem estar em diferentes estados com diferentes números de partículas em cada estado ou todas as partículas num mesmo estado. Isto acarreta numa grande diferença de comportamento do sistema.

A energia de um sistema é dada por

$$E = \sum_n^k N_n E_n,$$

onde N_n é o número de partículas no nível n (número de ocupação do nível n) e k é o número total de níveis de energia disponíveis.

Pelo fato desses férmions terem spin $\frac{1}{2}$, que possui duas projeções ($m_s = +\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$), podemos ter apenas 2 férmions num mesmo nível de energia, com projeções de spin (m_s) diferentes, assim os férmions vão ocupando os níveis de energia 2 a 2, mesmo que a energia do sistema seja a mínima (esta observação levou ao princípio de exclusão de Pauli).

Com os bósons ocorre diferente. No estado fundamental todos podem ocupar o

nível mais baixo de energia e por isso não estão sujeitos ao princípio de exclusão. Esta diferença de comportamento reflete-se na energia dos dois sistemas. Para o sistema de bósons, supondo que a energia do sistema seja mínima, todos estão no nível 1, então:

$$E = \sum_{n=1}^1 N_n E_n = N_1 E_1 = n E_1. \quad (4.1)$$

Para o sistema de férmions, só

$$E = \sum_{n=1}^k N_n E_n = N_1 E_1 + N_2 E_2 + N_3 E_3 + \dots + N_k E_k, \quad (4.2)$$

onde há uma grande diferença em relação ao sistema de bósons.

O comportamento dos férmions de estar num mesmo estado de energia, apenas com projeções de spin diferentes, é chamado degenerescência de spin. Esta degenerescência gera uma pressão de spin (devida ao princípio de exclusão), e esta, até certo limite, contrabalança a força gravitacional em algumas estrelas não permitindo o colapso. No caso da estrela de nêutron, são férmions degenerados que, através do princípio da exclusão de Pauli, contrabalançam a pressão gravitacional, através da pressão de spin.

4.1 Equação de Estado na Aproximação para $T \sim 0$

Em geral, nos sistemas fermiônicos há um nível máximo permitido de energia para as partículas. A energia desse nível é chamada de **energia de Fermi** E_F e não depende do número de partículas povoando esse nível. Esta definição torna-se importante quando comparamos a energia de Fermi com a energia média de cada nível do sistema.

Num sistema de N partículas idênticas (com N grande), estas ocuparão $N/2$ níveis de energia de $n = 1$ até $n = N/2$, até o nível de Fermi¹. Um cálculo unidimensional para E_0 resulta em:

$$E_0 = \frac{h^2}{8mL^2}, \quad (4.3)$$

onde h é a constante de Planck, m a massa do férmion e L é a largura do poço de potencial. A energia de Fermi será a energia do nível $n = N/2$ ($E_n = n^2 E_0$)

$$E_F = \frac{h^2}{32m} \left(\frac{N}{L} \right)^2, \quad (4.4)$$

que depende da densidade linear de partículas (N/L). A energia média é a energia total

¹ Se N for ímpar, devemos calcular com $(N + 1)/2$, pois o número de níveis é o mesmo para o último nível preenchido ou semi-preenchido.

dividida pelo número de partículas:

$$E_m = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N/2} 2E_0 n^2, \quad (4.5)$$

que para $N/2 \gg 1$ resulta em:

$$E_m = \frac{1}{3} E_F. \quad (4.6)$$

Quando N for grande, os níveis de energia ficam muito próximos uns dos outros e isto permite-nos aproximar por um contínuo. Desta forma, não teremos mais níveis de energia discretos, mas um certo número de partículas dentro de um intervalo dE com energia entre E e $E + dE$. Surge, então, a necessidade de se definir uma *densidade de estados*, e o número de ocupação (que dava o número de partículas num certo nível) agora terá um sentido probabilístico, e será uma função, também chamada de *fator de Fermi* ou *distribuição de Fermi*.

Em $T \sim 0$, como vimos, todos os níveis abaixo do nível de Fermi estão ocupados, e os níveis acima não são ocupados, assim, o número de ocupação abaixo de E_F será 1 e acima de E_F igual a 0.

Para $T \neq 0$ E_n passa a depender de T e o número de ocupação do nível n é:

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{e^{(E_n - E_F)/k_B T} + 1} \quad (4.7)$$

e a energia de Fermi em três dimensões ($T \cong 0$):

$$E_F = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (4.8)$$

que, analogamente ao caso unidimensional, depende da densidade de partículas que agora é a densidade volumétrica. É também importante definir a temperatura de Fermi:

$$E_F = k_B T_F \implies T_F = \frac{E_F}{k_B}. \quad (4.9)$$

Fazendo (4.9) na (4.7) obtemos

$$\langle N_n \rangle = \frac{1}{e^{-E_F/k_B T} + 1} = \frac{1}{e^{-T_F/T} + 1}, \quad (4.10)$$

portanto, se $T \ll T_F$, $\langle N_n \rangle \rightarrow 1$, então o sistema com $T \neq 0$ se comporta como se $T = 0$.

Desta forma, antes de se fazer qualquer cálculo com gás de Fermi a temperatura finita ($T \neq 0$) será útil comparar a temperatura do sistema com sua temperatura de

Fermi, pois para $T \ll T_F$ podemos aplicar as equações para $T \sim 0$ e desde já sabemos que o efeito da temperatura não será significativo nas propriedades macroscópicas desses sistemas, quando comparado com os cálculos efetuados para $T \sim 0$.

4.2 A Equação de Estado no Regime Subnuclear

Dentro do intervalo de densidades compreendido entre $4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3} \lesssim \rho \lesssim 2.8 \times 10^{14} g.cm^{-3}$ ocorrem reações de foto-emissão de nêutrons, a matéria estelar entra no assim chamado regime subnuclear com nêutrons livres. Essa fase também costuma ser chamada de *fase de gotejamento de nêutrons*. Para densidades até a fase de gotejamento de nêutrons, $\rho \approx 4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3}$, consideramos que a matéria fria estelar é permeada por uma rede de núcleos e um gás de elétrons relativísticos. Neste regime, a equação de estado BPS – Baym, Pethick e Sutherland [24] é usada. No próximo regime, o subnuclear com nêutrons gotejados, duas equações foram usadas, a equação BBP – Baym, Bethe e Pethick [25] se não considerarmos os neutrinos confinados e a GB – Gudmundsson e Buchler [26] se considerarmos os neutrinos confinados.

Em 1931 Chandrasekhar parametrizou a equação de estado de um gás de férmions livres (vide Refs. [11,27]) obtendo as relações:

$$P = \frac{gc^2}{6\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} \frac{p^4}{\epsilon} dp = \frac{gm^4c^5}{2\hbar^3} \phi(x), \quad (4.11)$$

$$\epsilon = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} \epsilon p^2 dp = \frac{gm^4c^5}{2\hbar^3} \chi(x), \quad (4.12)$$

com

$$n_p = \frac{g}{2\pi^2\hbar^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{g}{6\pi^2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 x^3, \quad (4.13)$$

$$x \equiv \frac{p_F}{mc}, \quad (4.14)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x \left(\frac{2}{3}x^2 - 1 \right) (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + \ln \left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \quad (4.15)$$

$$\chi(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left\{ x (1+2x^2) (1+x^2)^{\frac{1}{2}} - \ln \left[x + (1+x^2)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}. \quad (4.16)$$

onde g é a degenerescência (para elétrons devemos fazer $g = 2$), n_p é o número de partículas por unidade de volume, \hbar é a constante de Planck dividida por 2π , e p_F é o momento de Fermi da partícula. Além disso fizemos $m = m_e$ onde m_e é a massa do elétron.

De acordo com a Ref. [28] para um plasma neutro completamente ionizado, composto por íons com número de massa A e número atômico Z , o número de elétrons por

unidade de volume pode ser escrito como

$$n_e = \frac{Y_e \rho}{m_B},$$

onde $Y_e = Z/A$ é o número de elétrons por bárion, m_B a massa de repouso dos bárions e ρ a densidade de massa.

4.2.1 A Correção Eletrostática

No estado fundamental do sistema ($T = 0$) a distribuição das cargas positivas não é homogênea pois os íons tendem a formar uma rede cristalina. Devemos, então, introduzir algum tipo de correção eletrostática na equação de estado para os elétrons (ver Ref. [29]). Neste trabalho utilizaremos o modelo de *Wigner-Seitz* (ver Ref. [30]), onde a rede cristalina é modelada como um conjunto de células esféricas idênticas de raio r_0 . No centro de cada esfera há um núcleo e z elétrons uniformemente distribuídos. O volume de cada célula unitária é igual a $4\pi r_0^3/3 = 1/n_N$, onde n_N representa o número de núcleos por unidade de volume.

Tomando a carga eletrônica como e , para uma distribuição esférica e homogênea podemos escrever

$$q = -Ze \frac{r^3}{r_0^3},$$

também podemos tomar a interação eletrostática entre os elétrons como sendo

$$E_{e,e} = \int_0^{r_0} \frac{q dq}{r} = \frac{3Z^2 e^2}{5r_0}.$$

Através de uma integração análoga, obtemos a interação entre os elétrons e íons

$$E_{e,i} = Ze \int_0^{r_0} \frac{dq}{r} = -\frac{3Z^2 e^2}{2r_0}.$$

Desta forma, a energia eletrostática por célula é

$$E_R = E_{e,e} + E_{e,i} = -\frac{9Z^2 e^2}{10r_0}. \quad (4.17)$$

Usando-se a relação $n_e = Zn_N$ para eliminar r_0 em favor de n_e na equação anterior, podemos escrever

$$\frac{E_R}{Z} = -\frac{9}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} Z^{\frac{2}{3}} e^2 n_e^{\frac{2}{3}}, \quad (4.18)$$

que nos fornece a correção da energia eletrostática por elétron.

A correspondente correção da pressão pode ser obtida da relação

$$P_R = n_e^2 \frac{\partial (E_R/Z)}{\partial n_e}. \quad (4.19)$$

Substituindo a equação (4.18) na equação (4.19) e realizando a devida derivação, obtemos

$$P_R = -\frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{\frac{1}{3}} Z^{\frac{2}{3}} e^2 n_e^{\frac{4}{3}}. \quad (4.20)$$

Em geral, em regimes de baixas densidades tais correções são desprezíveis e podem ser ignoradas. Entretanto, tais correções tornam-se necessárias para altas densidades. Para $\rho \approx 10^{11} g.cm^{-3}$, por exemplo, a correção eletrostática na densidade de energia do gás de elétrons é da ordem de 15%.

É interessante lembrar também que, além da redução na energia e na pressão dos elétrons, a organização dos núcleos numa rede cristalina influencia, também, a composição química da matéria estelar.

4.2.2 Regime Subnuclear sem Nêutrons Livres

No regime subnuclear a matéria compõe-se essencialmente de núcleos imersos num mar de elétrons, e a interdistância média entre os núcleos,

$$r = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} R_0$$

é bem maior que o raio nuclear, R_0 . Para $\rho = 10^7 g.cm^{-3}$ temos, por exemplo, $r \approx 300R_0$. Portanto, a interação dominante é a eletromagnética.

O regime subnuclear sem nêutrons livres cobre justamente a faixa que vai de $500 g.cm^{-3}$ (onde o gás de elétrons é a componente determinante da pressão e densidade de energia) até a densidade limiar para o gotejamento de nêutrons ($\rho \cong 10^{11} g.cm^{-3}$).

Neste regime, o gás de elétrons pode ser tratado, em primeira aproximação, como um gás de Fermi degenerado. Vamos supor que a matéria estelar seja composta por núcleos de massa A e número atômico Z . Seja n_N a densidade de núcleos por unidade de volume e n_e a densidade de elétrons por unidade de volume. Podemos escrever a densidade de energia do sistema por unidade de volume como

$$\varepsilon(A, Z, n_N) = n_N M(A, Z) c^2 + n_N \varepsilon_R + \varepsilon_e(n_e), \quad (4.21)$$

onde $M(A, Z)c^2$ representa a energia do núcleo (A, Z) , englobando a energia de repouso dos nucleons, ε_e a energia dos elétrons por unidade de volume e ε_R a energia

eletrostática da rede por núcleo(negativa).

O valor obtido a partir da Ref. [31] e adotado para a energia da rede (tipo *bcc*) na Ref. [24] é:

$$\varepsilon_R = -1,819620 \frac{Z^2 e^2}{a^2}, \quad \text{onde } a \equiv \left(\frac{2}{n_N} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.22)$$

A densidade de energia do gás de elétrons é dada pela equação (4.12)

$$\varepsilon_e = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \chi(x), \quad (4.23)$$

onde m_e é a massa do elétron.

Podemos exprimir cada termo da equação (4.21) em função apenas de Z , A e n_B , onde n_B é o número de bárions por unidade de volume, utilizando as relações:

$$n_N = \frac{n_B}{A} \quad \text{e} \quad n_e = \frac{Z}{A} n_B. \quad (4.24)$$

Desta forma, para um dado valor de densidade bariônica podemos determinar o núcleo que minimiza a energia do sistema. Tal minimização pode ser operacionalizada supondo-se que Z e A são variáveis contínuas e resolvendo as equações

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} \right)_{A, n_B} = 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A} \right)_{Z, n_B} = 0. \quad (4.25)$$

Com a composição química e a energia do estado fundamental conhecidas, a pressão pode ser obtida através da relação

$$P = n_B^2 \frac{\partial(\varepsilon/n_B)}{\partial n_B}, \quad (4.26)$$

que com a equação (4.21), fornece

$$P = P_e + \frac{1}{3} n_N \varepsilon_R, \quad (4.27)$$

onde P_e é a pressão parcial de elétrons dada por

$$P_e = n_e \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial n_e} - \varepsilon_e = \frac{m_e^4 c^5}{\pi^2 \hbar^3} \phi(x). \quad (4.28)$$

A equação de estado de Baim *et al.* não incorpora nêutrons livres, devendo portanto ser aplicada ao regime de densidades menores que a densidade limiar de gotejamento de nêutrons. Para determinar a densidade de gotejamento de nêutrons introduzimos na equação (4.21) a densidade de energia dos nêutrons livres e, a seguir, minimizamos

a energia total também em relação à fração de nêutrons livres Y_n , definida por

$$Y_n = \frac{n_n}{n_B},$$

onde n_n é o número de nêutrons livres por unidade de volume. Verifica-se que

$$n_e = \frac{Z}{A}(1 - Y_n)n_B.$$

Agora, a grandeza a ser extremizada é

$$\varepsilon(A, Z, n_N) = n_N M(A, Z)c^2 + n_N \varepsilon_R + \varepsilon_e(n_e) + \varepsilon_n(n_e), \quad (4.29)$$

onde $\varepsilon_n(n_e)$ é a densidade de energia dos nêutrons livres. Derivando a equação (4.29) em relação a Y_n e igualando a zero, obtemos

$$\epsilon_F^{(n)} = \frac{M(A, Z)c^2 + Z\epsilon_F^{(e)} + 4Z\varepsilon_R/3n_e}{A}, \quad (4.30)$$

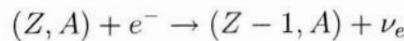
onde $\epsilon_F^{(n)}$ e $\epsilon_F^{(e)}$ são as energias de Fermi dos nêutrons e dos elétrons, respectivamente. Se $\epsilon_F^{(n)} \geq m_n c^2$, onde m_n é a massa do nêutron, os nêutrons passam a preencher um espectro contínuo de energia. Portanto, da equação anterior, vemos que o gotejamento de nêutrons é ditado pela condição

$$M(A, Z)c^2 \geq Am_n c^2 - Z\epsilon_F^{(e)} - 4Z\varepsilon_R/3n_e. \quad (4.31)$$

A densidade limiar para o gotejamento de nêutrons estabelecida pelos autores é igual a $4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3}$ onde ocorre a predominância do nuclídeo ^{118}Kr .

4.2.3 Regime Subnuclear com Nêutrons Livres

Quando nêutrons começam a ser liberados por núcleos ricos em nêutrons resultantes tanto da captura eletrônica



quanto por reações de foto-emissão de nêutrons, a matéria estelar entra no assim chamado regime subnuclear com nêutrons livres (com a densidade dentro do intervalo $4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3} \lesssim \rho \lesssim 2.8 \times 10^{14} g.cm^{-3}$).

Ao longo desta fase a matéria se apresenta, inicialmente, com núcleos ricos em nêutrons distribuídos numa rede cristalina e imersos num gás uniforme de elétrons

relativísticos degenerados e num gás de nêutrons não-relativísticos degenerado. Os nêutrons livres, por sua vez, vão tornando-se mais abundantes à medida que a matéria vai se comprimindo. Como os nêutrons interagem fortemente, ao contrário dos elétrons, eles tendem a reduzir a tensão superficial dos núcleos e patrocinar sua dissociação.

Os cálculos realizados (ver Ref. [25]) são semelhantes aos da Seção 4.2.2. A diferença básica está na inclusão da interação entre os nucleons nos cálculos e na forma de se determinar a energia dos núcleos.

A densidade de energia é escrita como

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon(A, Z, n_N, n_n, V_N) \\ &= n_N(W_N + W_R) + (1 - V_N n_N)\varepsilon_n(n_n) + \varepsilon_e(n_e),\end{aligned}\quad (4.32)$$

onde n_N é o número de núcleos por unidade de volume (densidade de núcleos), n_n a densidade de nêutrons livres, n_e a densidade de elétrons e V_N o volume do núcleo. Quando a pressão do gás de nêutrons externos aos núcleos aumenta, V_N diminui, devendo ser tratado, então, como variável. W_N representa a energia do núcleo, incluindo a energia de repouso, W_R a energia da rede cristalina por núcleo, ε_n a densidade de energia do gás de nêutrons e ε_e a densidade de energia do gás de elétrons. $V_N n_N$ corresponde à fração de volume ocupado pelos núcleos, enquanto que $1 - V_N n_N$ dá a fração de volume ocupado pelos nêutrons livres.

Podemos, então definir a densidade de nêutrons como

$$n_n \equiv \frac{N_n}{V_n} = \frac{N_n}{V(1 - V_N n_N)},\quad (4.33)$$

onde N_n é o número total de nêutrons livres, V_n o volume ocupado por eles e V é o volume do sistema. Como conseqüência, a densidade bariônica é dada por

$$n_B = A n_N + (1 - V_N n_N) n_n.\quad (4.34)$$

A condição de neutralidade de carga da matéria estelar nos dá

$$n_e = Z n_N.\quad (4.35)$$

Para obter a configuração de equilíbrio devemos minimizar ε fixando n_B , entretanto, ε é função de cinco variáveis e, portanto, precisamos de quatro condições de equilíbrio independentes para minimizar ε .

Primeiro minimizamos ε em relação a A , fixando $Z n_N$ (o número de prótons num dado volume unitário), $A n_N$, $n_N(A - Z)$ (o número de nêutrons nos núcleos), $n_N V_N$ (a fração do volume ocupado pelos núcleos), n_n e o número de nêutrons livres $n_n(1 -$

$V_N n_N$). Desta forma, teremos ε_n e ε_e também fixos. Definimos agora

$$x \equiv \frac{Z}{A}, \quad (4.36)$$

a condição descrita acima se expressa por

$$\frac{\partial}{\partial A} \left(\frac{W_N + W_R}{A} \right)_{x, A n_N, V_N n_N, n_n} = 0, \quad (4.37)$$

ou seja, a energia por nucleon deve ser mínima dentro dos núcleos.

A segunda condição é imposta pela estabilidade beta dos núcleos, relacionada com a variação de Z

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial Z} \right)_{A, n_N, V_N, n_n} = 0. \quad (4.38)$$

Entretanto

$$\frac{\partial}{\partial Z} \varepsilon_e(n_e) = \frac{d\varepsilon_e}{dn_e} \frac{\partial n_e}{\partial Z} = \mu_e n_N, \quad (4.39)$$

onde utilizamos a equação (4.35). μ_e é o potencial químico dos elétrons. Comparando as equações (4.32), (4.38) e (4.39), obtemos

$$\mu_e = -\frac{\partial}{\partial Z} (W_N + W_R)_{A, n_N, V_N, n_n}. \quad (4.40)$$

Já o potencial químico dos nêutrons nos núcleos é dado por

$$\mu_n^{(N)} = \frac{\partial}{\partial A} (W_N + W_R)_{Z, n_N, V_N, n_n}, \quad (4.41)$$

que é a energia mínima necessária para adicionar um nêutron ao núcleo.

Analogamente, para os prótons, temos

$$\begin{aligned} \mu_p^{(N)} &= \frac{\partial}{\partial Z} (W_N + W_R)_{A-Z, n_N, V_N, n_n} \\ &= \frac{\partial}{\partial Z} (W_N + W_R)_{A, n_N, V_N, n_n} + \frac{\partial}{\partial A} (W_N + W_R)_{Z, n_N, V_N, n_n}, \end{aligned} \quad (4.42)$$

Substituindo as equações (4.40) e (4.41) na equação (4.42), e resolvendo a equação resultante para μ_e , obtemos a condição de equilíbrio beta na forma usual

$$\mu_e = \mu_n^{(N)} - \mu_p^{(N)}. \quad (4.43)$$

Essa condição equivale a dizer que não deve haver nenhum custo de energia para transferir um nêutron do gás para o núcleo. Isto implica em minimizar ε em relação a

A, fixando-se Z , n_N , V_N e n_B , ou seja,

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A}\right)_{Z, n_N, V_N, n_B} = 0. \quad (4.44)$$

Como n_B não é independente das demais variáveis, a equação (4.44) pode ser reescrita como

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A}\right)_{Z, n_N, V_N, n_B} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial A}\right)_{Z, n_N, V_N, n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial A} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_n}\right)_{Z, n_N, V_N, A} = 0. \quad (4.45)$$

A partir da equação (4.34)

$$\frac{\partial n_n}{\partial A} = -\frac{n_N}{1 - V_N n_N}. \quad (4.46)$$

Já a energia do núcleo por unidade de volume ocupado pelo gás de nêutrons é dada por

$$\frac{n_N V}{V_n} W_N = \frac{n_N}{1 - V_N n_N} W_N. \quad (4.47)$$

A energia do núcleo e ε_n variam quando o núcleo goteja um nêutron. Sendo assim, o potencial químico dos nêutrons livres deve ser definido por

$$\mu_n^{(G)} = \frac{n_N}{1 - V_N n_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n}\right)_{Z, A, n_N, V_N} + \frac{d\varepsilon_n}{dn_n}. \quad (4.48)$$

Como W_R não depende de n_B , a equação (4.45) pode ser reescrita na forma

$$n_N \frac{\partial}{\partial A} (W_N + W_R)_{Z, n_N, V_N, n_n} = \frac{n_N^2}{1 - V_N n_N} n_N \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n}\right)_{Z, A, n_N, V_N} + n_N \frac{d\varepsilon_n}{dn_n}, \quad (4.49)$$

usando-se a equação (4.32). Comparando as equações (4.41) e (4.48) obtemos

$$\mu_n^{(N)} = \mu_n^{(G)}. \quad (4.50)$$

A quarta e última condição de equilíbrio vem da minimização de ε em relação a V_N , fixando-se Z , A , n_N , e $N_n/V = n_n(1 - V_N n_N)$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V_N}\right)_{Z, A, n_N, N_n/V} = 0, \quad (4.51)$$

ou

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial V_N}\right)_{Z, A, n_N, n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial V_N} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial n_n}\right)_{Z, A, n_N, V_N} = 0. \quad (4.52)$$

Aplicando a equação (4.52) na equação (4.32)

$$\frac{\partial}{\partial V_N} (W_N + W_R)_{Z,A,n_N,n_n} + \frac{\partial n_n}{\partial V_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n} \right)_{Z,A,n_N,V_N} + \frac{1 - V_N n_N}{n_N} \frac{\partial n_n}{\partial V_N} \frac{d\varepsilon}{dn_n} - \varepsilon_n = 0. \quad (4.53)$$

Entretanto

$$P^{(N)} \equiv - \frac{\partial}{\partial V_N} (W_N + W_R)_{Z,A,n_N,n_n}, \quad (4.54)$$

e

$$\frac{\partial n_n}{\partial V_N} = \frac{n_N}{1 - V_N n_N} n_n. \quad (4.55)$$

Portanto,

$$-P^{(N)} + n_n \frac{n_N}{1 - V_N n_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n} \right)_{Z,A,n_N,V_N} + n_n \frac{d\varepsilon}{dn_n} - \varepsilon_n = 0. \quad (4.56)$$

Da equação (4.48) temos

$$\frac{n_N}{1 - V_N n_N} \left(\frac{\partial W_N}{\partial n_n} \right)_{Z,A,n_N,V_N} = \mu_n^{(G)} - \frac{d\varepsilon_n}{dn_N}. \quad (4.57)$$

Substituindo na equação (4.55)

$$P^{(N)} = n_n \mu_n^{(G)} - \varepsilon_n. \quad (4.58)$$

No entanto, a pressão do gás de nêutrons é definida por

$$P_n = n_n \mu_n^{(G)} - \varepsilon_n. \quad (4.59)$$

E portanto

$$P^{(N)} = P_n, \quad (4.60)$$

o que expressa o balanço entre a pressão dos núcleos e a pressão externa do gás de nêutrons.

As quatro condições de equilíbrio deduzidas determinam completamente a composição química da matéria em função da densidade. Entretanto, a aplicação de tais condições implica que se especifique W_N , W_R , ε_n e ε_n . Apresentaremos as expressões obtidas pelos autores da Ref. [25] sem deduzí-las²

²A dedução de tais expressões é extensa e fugiria aos objetivos deste trabalho, para maiores detalhes conferir as Refs. [25] e [32].

A energia dos núcleos é escrita como

$$W_N(A, Z, V_N, n_n) = A [(1-x)m_n c^2 + x m_p c^2 + W(k, x)] + W_C(A, Z, V_N, n_n) + W_S(A, Z, V_N, n_n), \quad (4.61)$$

onde $W_C(A, Z, V_N, n_n)$ é a energia coulombiana, $W_S(A, Z, V_N, n_n)$ a energia superficial e o termo de volume $W(k, x)$ depende de n_B , através da relação

$$n_B \equiv \frac{2k^3}{3\pi^2}, \quad (4.62)$$

onde k é o número de onda e x a fração relativa de prótons definida na equação (4.36). Incluindo os efeitos da interação nucleon-nucleon através do potencial de Reid, os autores obtiveram, para $x = \frac{1}{2}$

$$W(k, \frac{1}{2}) = -\omega_0 + \frac{1}{2}K \left(1 - \frac{k}{k_0}\right)^2, \quad (4.63)$$

onde $\omega_0 \approx 16 \text{ MeV}$, k_0 é o número de onda que está associado à densidade de saturação ($k_0 \approx 1.4 \text{ fm}^{-1}$) e K a incompressibilidade ($\approx 135 \text{ MeV}$).

Utilizando $W(k, x)$ na determinação da densidade de energia do gás de nêutrons, para o qual $x = 0$, temos

$$\varepsilon_n = n_n [W(k_n, 0) + m_n c^2], \quad (4.64)$$

onde

$$n_n \equiv \frac{2k_n^3}{3\pi^2}. \quad (4.65)$$

O termo de superfície $W_S(A, Z, V_N, n_n)$, é construído de modo que $W_S = 0$ quando a densidade do gás de nêutrons e a densidade no interior dos núcleos são iguais, sendo dado por

$$W_S = \frac{\sigma (W_{ext} - W_{int})}{\omega_0} \left(1 - \frac{n_{ext}}{n_{int}}\right)^{\frac{2}{3}} A^{\frac{2}{3}}, \quad (4.66)$$

onde σ é um parâmetro ajustado pelos dados experimentais, n_{int} e n_{ext} são as densidades de nêutrons no interior dos núcleos e fora dos núcleos, respectivamente, $W_{int} \equiv W(n_{int})$ e $W_{ext} \equiv W(n_{ext})$.

A energia coulombiana, já incluída a correção eletrostática da rede cristalina, é dada por

$$W_{C+L} = \frac{3Z^2 e^2}{5 r_N} \left(1 - \frac{r_N}{r_0}\right)^2 \left(1 + \frac{r_N}{2r_0}\right), \quad (4.67)$$

onde r_N é o raio do núcleo e r_0 o raio da célula esférica definida na Seção 4.2.1.

A pressão obtida é

$$P = P_n + P_e + P_L, \quad (4.68)$$

onde P_n é a pressão do gás de nêutrons, P_e é a pressão do gás de elétrons e P_L é a pressão da rede, dada por

$$P_L = n_N^2 \left(\frac{\partial W_L}{\partial n_N} \right)_{A,Z,n_N,n_n}. \quad (4.69)$$

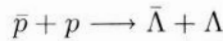
Quando $\rho = 4.3 \times 10^{11} g.cm^{-3}$, a pressão da matéria é devida quase que totalmente à pressão do gás de elétrons e $P_n/P \approx 0$, mas quando $\rho = 1.5 \times 10^{12} g.cm^{-3}$, $P_n/P \approx 0.20$, e para $\rho = 1.5 \times 10^{13} g.cm^{-3}$, $P_n/P \approx 0.80$.

4.2.4 A Constituição Bariônica do Meio

Em alguns experimentos de colisões de íons pesados observa-se o surgimento de bárions constituídos por um quark diferente daqueles que formam os nucleons (o up e o down) esse quark é chamado strange (estranho), e introduz-se um novo número quântico, a estranheza. Estes bárions, que possuem o quark estranho, são também chamados de híperons. Podemos formar oito bárions com diferentes combinações dos três quarks mais leves, (up, down, strange, ou, u, d, s), sendo dois nucleons e seis híperons (ver Tabela 4.1).

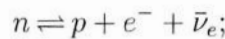
Acredita-se que tais bárions também surjam sob as altas densidades e energias das estrelas de nêutron.

Eis alguns exemplos de colisões geradoras de bárions mais pesados:



Também ocorrem outras reações que propiciam a formação desses bárions:

1. Equilíbrio β , dentro das estrelas de nêutron há nêutrons sofrendo decaimento β , mas há também a reação inversa, ou seja, há um equilíbrio ao qual chamamos equilíbrio β



Como o interior de uma estrela de nêutron é muito denso os elétrons ocupam rapidamente todos os estados permitidos de mais baixa energia. Com os estados de mais baixa energia já ocupados, devido ao Princípio de exclusão de Pauli, os

Tabela 4.1: Octeto bariônico: \vec{J}_S é o spin, $\vec{\tau}$ o isospin, τ_3 a terceira componente do isospin e S a estranheza.

Báron	Massa (MeV)	Composição	\vec{J}_S	$\vec{\tau}$	τ_3	S	Carga
p	938,28	uud	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	0	1
n	939,57	udd	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0
Λ	1115,6	uds	$\frac{1}{2}$	0	0	-1	0
Σ^+	1189,4	uus	$\frac{1}{2}$	1	+1	-1	-1
Σ^0	1192,5	uds	$\frac{1}{2}$	1	0	-1	0
Σ^-	1197,3	dds	$\frac{1}{2}$	1	-1	-1	1
Ξ^0	1314,9	uss	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\frac{1}{2}$	-2	0
Ξ^-	1321,3	dss	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-2	-1

elétrons passam a ter que ocupar estados de energia cada vez mais altos, fazendo a energia de Fermi dos elétrons aumentar demasiadamente. Esse aumento da energia de Fermi ocasiona um aumento da taxa de reação de captura de elétrons por prótons produzindo nêutrons e neutrinos. Isso ocasiona um aumento da taxa de ocorrência de reações de decaimento β inverso tornando-a competitiva em relação à taxa de ocorrência de decaimentos β diretos. Essa competitividade entre taxas de reações dá origem ao assim chamado “equilíbrio β ”.

2. Decaimento de elétrons e káons em múons e neutrinos, contribuindo assim para o resfriamento da estrela³

$$e^- \rightleftharpoons \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$$

$$K \longrightarrow 2\gamma$$

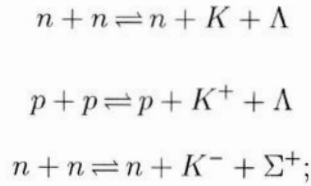
$$K^- \longrightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$$

$$K^+ + \mu^- \longrightarrow \mu^- + \mu^+ + \nu_\mu \longrightarrow 2\gamma + \nu_\mu;$$

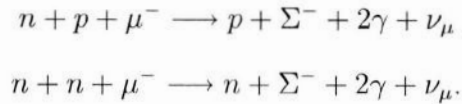
3. Reações envolvendo a interação forte, lembrando que devido ao momento de

³ A queda de temperatura estelar faz com que algumas reações deixem de ocorrer, mas a interação forte está sempre presente entre os hádrons.

Fermi elevado os nêutrons não se encontram degenerados



4. Com a queda de temperatura, muitas das reações ocasionadas pela interação forte deixam de ocorrer, no entanto os híperons continuam a ser formados através da interação fraca



Devemos levar em conta a ocorrência de espalhamentos e sucessivos decaimentos que produzem novas partículas, completando a lista do octeto bariônico. Muitos dos neutrinos nessas reações escapam. Também pode haver emissão de raios X resultando numa queda maior da temperatura que pode chegar a $10^8 K$ em um mês. Devido à emissão de fótons, a temperatura superficial pode cair até $10^5 K$.

4.3 A Equação de Estado no Regime Hadrônico

A Hadrodinâmica Quântica ou QHD (do inglês Quantum Hado-Dynamics), foi proposta em 1974 por Walecka [33]. Assim como a Eletrodinâmica Quântica ou QED (do inglês Quantum Electro-Dynamics) descreve as interações entre partículas carregadas através da troca de fótons a QHD é uma teoria com o objetivo de descrever a interação entre hádrons através da troca de mésons massivos. Hádrons são partículas que interagem através da força forte (nêutrons, prótons, mésons, etc). As estrelas de nêutron são formadas por bárions interagindo através da força forte, ou seja, são compostas por hádrons que interagem entre si. Como a matéria nas estrelas de nêutron é diferente da matéria nuclear, em densidade (principalmente) e em seus constituintes, aplicaremos as interações hadrônicas através de uma generalização do modelo proposto por Walecka.

Há duas subdivisões da QHD que diferenciam-se pelos mésons admitidos no sistema:

Essa teoria alcançou grande sucesso devido ao fato da mesma descrever de forma bastante simples a energia de ligação da matéria nuclear como um efeito relativístico que “desliga” a atração produzindo um mínimo para a energia de ligação na energia e densidade corretas em contrapartida com modelos não relativísticos que precisavam de

cálculos elaborados para dar conta desses números. No entanto, a compressibilidade da matéria nuclear obtida a partir dessa teoria é muito alta se comparada com a compressibilidade extraída de dados do “modo de respiração” – ressonância monopolar nuclear, muito importante para os estudos da evolução estelar. Portanto, modificações capazes de produzir uma descrição mais adequada da compressibilidade foram propostas.

Estes modelos serão aqui utilizados para obtenção de uma equação de estado para a matéria bariônica à temperatura zero, isto é, no estado fundamental, no contexto da aproximação de campo médio, que reduz as equações de um sistema de muitos corpos para um sistema de poucas equações. Faremos agora uma breve apresentação do modelo de Walecka. Como é usual, consideraremos daqui por diante $\eta = c = 1$.

4.3.1 O Modelo QHD – I

Na hadrodinâmica quântica considera-se que os nucleons não possuem estrutura interna, ou seja, eles são vistos como partículas fundamentais. Por isso a interação entre nucleons é descrita por acoplamento dos campos dos nucleons com os campos dos mésons. Pelo fato dos mésons σ e ω possuírem isospin zero, eles não distinguem entre prótons e nêutrons. Por isso vamos utilizar a terminologia “nucleon”, pelo fato de estas partículas (prótons e nêutrons) terem massas muito próximas e, a menos da carga elétrica, elas são muito semelhantes. Neste modelo o méson σ é o responsável pela parte atrativa da força nuclear, que domina a longa distância (na escala nuclear) e o méson ω pela parte repulsiva, em curtas distâncias. A fim de construir a densidade lagrangiana

Tabela 4.2: Divisões da QHD

MODELO	MÉSONS
QHD – I	σ, ω
QHD – II	$\sigma, \omega, \pi, \rho$

Tabela 4.3: Campos da QHD

CAMPOS	SPIN	ISOSPIN	PARTÍCULA	MASSA
Ψ	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Nucleon	m_B
σ	0	0	Méson escalar - isoscalar	m_σ
ω	1	0	Méson vetorial - isoscalar	m_ω
π	0	1	Méson pseudoescalar - isovetorial	m_π
ρ	1	1	Méson vetorial - isovetorial	m_ρ

para esse sistema, devemos observar as características das partículas na tabela acima. Escrevendo os termos para cada partícula, bem como termos de interação, obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_B) \psi - \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - m_\sigma^2 \sigma^2] \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega^\mu \omega_\mu - g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \omega_\mu + g_\sigma \bar{\psi} \psi \sigma. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Nesta lagrangiana, podemos distinguir um termo para os nucleons livres, um para os mésons σ e outro para os mésons ω , além dos termos de interação, $g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \omega_\mu$ e $g_\sigma \bar{\psi} \psi \sigma$. Além disso

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu \quad (4.71)$$

é um tensor antissimétrico. A partir da equação (4.70), onde as coordenadas generalizadas são, ψ , σ e ω_ν , obtemos as equações de movimento:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma = g_\sigma \bar{\psi} \psi \quad (4.72)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (4.73)$$

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi = 0. \quad (4.74)$$

A energia do sistema é obtida através do tensor energia-momentum, dado pela expressão abaixo (ver Ref. [22])

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_i \partial_\nu \phi_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \phi_i)} \right) \quad (4.75)$$

onde o índice i soma todas as coordenadas generalizadas e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico dado por

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

A partir da equação de Dirac livre ou com interação [34], é possível obter a expressão:

$$\partial_\mu (\bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi) = 0, \quad (4.77)$$

ou seja:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (4.78)$$

que é a equação da continuidade, portanto o termo entre parênteses é uma corrente bariônica que é conservada. Analisando as equações anteriores, vemos que a equa-

ção (4.72) é uma equação de Klein-Gordon com fonte escalar, e a equação (4.73) é uma equação de Proca cuja fonte é a corrente bariônica conservada:

$$j^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi, \quad (4.79)$$

pois obedece a equação da continuidade:

$$\partial_\nu j^\nu = 0. \quad (4.80)$$

Já a equação (4.74) é uma equação de Dirac com interação. As equações (4.72), (4.73) e (4.74) são equações diferenciais acopladas sem solução exata, sendo necessário utilizar algum método de aproximação. Utilizaremos a aproximação de campo médio neste trabalho. Porém, antes desse procedimento vamos obter o tensor energia-momentum (ver Ref. [36]) desse sistema:

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left[-\partial_\lambda \sigma \partial^\lambda \sigma + m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} F_{\lambda\rho} F^{\lambda\rho} - m_\omega^2 \omega_\lambda \omega^\lambda \right] g_{\mu\nu} + i \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial_\nu \Psi + \partial_\mu \sigma \partial_\nu \sigma + \partial_\nu \omega^\lambda F_{\lambda\mu}. \quad (4.81)$$

Outra relação útil (ver Ref. [37]), é que, para um fluido uniforme, o valor médio do tensor $T_{\mu\nu}$ é dado por

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = (\varepsilon + P) u_\mu u_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (4.82)$$

onde ε é a densidade de energia do fluido, P a pressão e $u_\mu = (1, \mathbf{u})$ o quadri-vetor velocidade associado ao movimento do fluido. Portanto, para um fluido uniforme em repouso, valem as relações:

$$\varepsilon = \langle T_{00} \rangle, \quad (4.83)$$

$$P = \frac{1}{3} \langle T_{ij} \rangle. \quad (4.84)$$

Em outras palavras, conhecendo os campos poderemos obter a pressão e a densidade de energia do sistema, que são as equações de estado do sistema.

Apartir da equação de Dirac, obtém-se uma solução geral para ψ que no formalismo de segunda quantização tem a seguinte forma:

$$\hat{\psi}(\vec{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_\alpha \left[f_\alpha A_\alpha + \tilde{f}_\alpha B_\alpha^\dagger \right], \quad (4.85)$$

onde V é o volume do sistema, A_α é o operador de aniquilação para partículas, B_α^\dagger é o operador de criação para antipartículas, f_α e \tilde{f}_α são bases escolhidas de acordo com a conveniência de cada problema. Para a equação (4.74) uma base adequada é a onda plana. Pelo fato de estudarmos apenas o estado fundamental ($T = 0$), não levaremos em consideração as antipartículas. A notação utilizada $\hat{\psi}(\vec{x}, t)$ deixa claro que ψ é um operador, e a quantização é proveniente das regras de anticomutação obedecidas pelos operadores de criação e aniquilação:

$$\{A_\alpha, A_{\alpha'}^\dagger\} = \{B_\alpha, B_{\alpha'}^\dagger\} = \delta_{\alpha\alpha'} \quad (4.86)$$

$$\{A_\alpha, B_{\alpha'}\} = \{A_{\alpha'}^\dagger, B_\alpha^\dagger\} = 0. \quad (4.87)$$

Isto também pode ser aplicado aos campos dos mésons, com as devidas modificações mas não será feito porque utilizaremos a aproximação de campo médio e, como veremos, ela apenas “quantiza” o campo dos nucleons. O estado fundamental do sistema $|F\rangle$ é construído arranjando os nucleons nos níveis de energia até o nível de Fermi, de acordo com o princípio da exclusão de Pauli:

$$|F\rangle = \prod_{\alpha}^{p_F} A_\alpha^\dagger |0\rangle, \quad (4.88)$$

onde p_F é o momento de Fermi e $|0\rangle$ é o estado de vácuo ou estado de mais baixa energia, tal que:

$$A_\alpha |0\rangle = B_\alpha |0\rangle = 0. \quad (4.89)$$

Deste modo, para calcularmos o valor médio de um certo observável, um operador \hat{O} no estado fundamental, fazemos:

$$O = \langle \hat{O} \rangle = \langle F | \hat{O} | F \rangle. \quad (4.90)$$

4.3.2 Aproximação de Campo Médio

Na literatura encontramos diferentes procedimentos denominados de “aproximação de campo médio” ou “mean field theory” (MFT - teoria de campo médio), por isso vamos descrever o que utilizaremos.

Quando a densidade de bárions aumenta, tal que o número de quanta trocados entre os nucleons for intenso o suficiente para que as flutuações quânticas sejam desprezíveis, os campos mesônicos comportam-se como campos clássicos. Assim, os nucleons movem-se como partículas independentes e interagem através de um campo médio comum a

todos. Com isto, o problema de muitos corpos reduz-se a um problema de um corpo sob a influência de um potencial efetivo.

No modelo utilizado, os observáveis são os nucleons, enquanto os mésons são virtuais, e isso implica na inexistência de correntes mesônicas. Por isso, os campos dos mésons não são quantizados, são eliminadas as flutuações quânticas, e sem tais flutuações eles tornam-se clássicos. Os campos mesônicos são substituídos por campos médios que não dependem do espaço-tempo, apenas da densidade bariônica. Considerando simetria esférica, não deve haver direção preferencial na matéria bariônica (espaço isotrópico). Assim, para que haja simetria por translação e rotação devemos remover os componentes vetoriais do campo $\omega^\mu = (\omega_0, \vec{\omega})$, tal que:

$$\langle \vec{\omega} \rangle = 0. \quad (4.91)$$

Também considera-se que o sistema seja estático para os campos mesônicos (isto remove a dinâmica do problema):

$$\partial_\mu \sigma = 0 \quad (4.92)$$

$$\partial_\mu \omega_\mu = 0. \quad (4.93)$$

Estas considerações eliminam as correntes mesônicas, mas devemos lembrar que elas não se aplicam aos bárions, não eliminando a corrente bariônica, que como vimos é conservada. O campo dos nucleons é tratado como um operador e é quantizado. Assim, o resultado é:

$$\sigma(x_\mu) \rightarrow \langle \sigma(x_\mu) \rangle \equiv \sigma_0 \quad (4.94)$$

$$\omega_\mu(x_\mu) \rightarrow \langle \omega_\mu(x_\mu) \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \omega_0, \quad (4.95)$$

onde a notação evidencia a não dependência do espaço-tempo⁴ e $\delta_{\mu 0}$ é apenas para eliminar a parte vetorial quando o quadri-vetor ω_μ aparecer nas equações, restando apenas o campo ω_0 .

Com efeito, nessa aproximação de campo médio, a densidade lagrangiana (4.70) torna-se:

$$\mathcal{L}_{ACM} = \bar{\psi} [i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 \omega_0 - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi - \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 \quad (4.96)$$

⁴Não confundir esta notação com o valor médio de uma função, que resulta em um número, isto é, uma constante.

e o tensor energia-momento:

$$T_{\mu\nu}^{ACM} = \frac{1}{2} [m_\sigma^2 \sigma_0^2 - m_\omega^2 \omega_0^2] g_{\mu\nu} + \langle i\bar{\psi}\gamma_\mu \partial_\nu \psi \rangle. \quad (4.97)$$

A densidade de energia e a pressão ficam:

$$\varepsilon_{ACM} = \langle i\bar{\psi}\gamma_0 \partial_0 \psi \rangle + \frac{1}{2} [m_\sigma^2 \sigma_0^2 - m_\omega^2 \omega_0^2] \quad (4.98)$$

$$P_{ACM} = -\frac{1}{3} \langle i\bar{\psi} (\vec{\gamma} \cdot \nabla) \psi \rangle - \frac{1}{2} [m_\sigma^2 \sigma_0^2 - m_\omega^2 \omega_0^2]. \quad (4.99)$$

As equações de movimento obtidas anteriormente (4.72), (4.73) e (4.74), agora tornam-se:

$$m_\sigma^2 \sigma_0 = g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (4.100)$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle \quad (4.101)$$

$$[(i\gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma_0 \omega_0) - (m_B - g_\sigma \sigma_0)] \psi = 0. \quad (4.102)$$

Definindo a densidade escalar

$$\rho_S \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \langle \psi^\dagger \gamma^0 \psi \rangle = \langle F | \psi^\dagger \gamma^0 \psi | F \rangle \quad (4.103)$$

e a densidade bariônica (número de bárions por volume)

$$\rho_B \equiv \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle = \langle \psi^\dagger \psi \rangle = \langle F | \psi^\dagger \psi | F \rangle, \quad (4.104)$$

podemos re-escrever as equações (4.100) e (4.101) como

$$\sigma_0 = \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2} \rho_S \quad (4.105)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2} \rho_B, \quad (4.106)$$

onde está explícito que os mésons devem ser massivos (m_σ e $m_\omega \neq 0$) e mostra sua dependência com a densidade.

Podemos verificar na equação (4.102) que o campo σ_0 atua na massa do nucleon, diminuindo-a com a interação, por isso, podemos definir uma “massa efetiva” dada por

$$m_B^* = m_B - g_\sigma \sigma_0. \quad (4.107)$$

O primeiro termo das equações (4.98) e (4.99) é calculado através da equação (4.102) conforme a Ref. [34], desta forma

$$\begin{aligned}
\langle i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi\rangle &= \langle\bar{\psi}[i\vec{\gamma}\cdot\nabla+g_\omega\gamma_0\omega_0+m_B^*]\psi\rangle \\
&= \langle\bar{\psi}(i\vec{\gamma}\cdot\nabla+m_B^*)\psi\rangle+\langle\bar{\psi}(g_\omega\gamma_0\omega_0)\psi\rangle \\
&= \langle\psi^\dagger(i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\nabla+\gamma^0m_B^*)\psi\rangle+\langle\psi^\dagger(g_\omega\omega_0)\psi\rangle \\
&= \langle F|\psi^\dagger(i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\nabla+\gamma^0m_B^*)\psi|F\rangle+\langle F|\psi^\dagger(g_\omega\omega_0)\psi|F\rangle. \quad (4.108)
\end{aligned}$$

O que resulta em⁵:

$$\langle F|\psi^\dagger(i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\nabla+\gamma^0m_B^*)\psi|F\rangle=\gamma\int_0^{p_F}\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\sqrt{p^2+m_B^{*2}} \quad (4.109)$$

$$\langle F|\psi^\dagger(g_\omega\omega_0)\psi|F\rangle=g_\omega\omega_0\langle F|\psi^\dagger\psi|F\rangle=g_\omega\omega_0\rho_B, \quad (4.110)$$

onde γ é a degenerescência de spin e isospin, que para matéria simétrica⁶ (número igual de prótons e nêutrons) vale 4. Como o sistema está no estado fundamental ($T=0$), a densidade bariônica, no contínuo, é simplesmente a integral de uma função degrau.

$$\rho_B=\gamma\int_0^\infty\frac{d^3p}{(2\pi)^3}\Theta\sqrt{p_F^2-p^2}=\frac{\gamma}{2\pi^2}\int_0^{p_F}p^2dp=\frac{\gamma p_F^3}{6\pi^2}. \quad (4.111)$$

O cálculo do primeiro termo da pressão na equação (4.108) de acordo com a Ref. [34] resulta em:

$$\langle-i\bar{\psi}(\vec{\gamma}\cdot\nabla)\psi\rangle=\langle\psi^\dagger(i\gamma^0\vec{\gamma}\cdot\vec{p})\psi\rangle=\frac{\gamma}{(2\pi)^3}\int_0^{p_F}\frac{p^2}{\sqrt{p^2+m_B^{*2}}}d^3p \quad (4.112)$$

e a densidade escalar

$$\rho_S=\frac{\gamma}{(2\pi)^3}\int_0^{p_F}\frac{m_B^*}{\sqrt{p^2+m_B^{*2}}}d^3p. \quad (4.113)$$

Com as equações (4.105), (4.106) e (4.107), podemos re-escrever as equações (4.98)

⁵Lembremos que aqui utilizamos o sistema natural de unidades onde: $\vec{p}\rightarrow-i\nabla$

⁶Este modelo não permite a descrição de matéria assimétrica, veremos adiante que para isso é necessário incluir o méson ρ .

e (4.99) como:

$$\varepsilon_{ACM} = \frac{1}{2} [m_\omega^2 \omega_0^2 + m_\sigma^2 \sigma_0^2] + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} d^3p \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} \quad (4.114)$$

$$P_{ACM} = \frac{1}{2} [m_\omega^2 \omega_0^2 - m_\sigma^2 \sigma_0^2] + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p \quad (4.115)$$

ou

$$\varepsilon_{ACM} = \frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 + \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} d^3p \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} \quad (4.116)$$

$$P_{ACM} = \frac{g_\omega^2}{2m_\omega^2} \rho_B^2 - \frac{m_\sigma^2}{2g_\sigma^2} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p. \quad (4.117)$$

Para determinar a massa efetiva podemos efetuar dois tipos de cálculo: através da minimização de ε em relação a σ_0 :

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma_0} \right)_{\omega_0, p_F} = 0 \quad (4.118)$$

ou através da substituição das equações (4.105) e (4.113) na equação (4.107). Em ambos os casos, obtém-se:

$$m_B^* = m_B - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{m_B^*}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p, \quad (4.119)$$

que é uma equação transcendental (deve ser resolvida numericamente). E então podemos numericamente encontrar os valores da densidade de energia e pressão.

As constantes g_σ e g_ω são ajustadas utilizando-se as propriedades da matéria nuclear no ponto de saturação [34]: a energia de ligação por nucleon (B/A) e o momento de Fermi (p_F):

$$-\frac{B}{A} = - \left(\frac{\varepsilon}{\rho_B} - m_B \right) = 15.75 \text{ MeV} \quad (4.120)$$

$$p_F = 1.42 \text{ fm}^{-1}. \quad (4.121)$$

Também são importantes a incompressibilidade nuclear (K) e a energia de simetria

(ε_{sym}):

$$K(\rho_0) = 9\rho_0^2 \left[\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_B^2} \right]_{\rho_B=\rho_0} \quad (4.122)$$

$$\varepsilon_{sym} = \frac{1}{2}\rho_B \left[\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_B} \right]_{\rho_3=0} = \frac{1}{6} \frac{p_F^2}{\sqrt{p_F^2 + m_B^{*2}}}, \quad (4.123)$$

onde

$$\rho_3 = \rho_p - \rho_n \quad (4.124)$$

é igual a zero para a matéria simétrica, do modelo QHD-I, sendo ρ_p e ρ_n as densidades de prótons e nêutrons.

A Tabela 4.4 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos com QHD-I e os valores esperados:

Tabela 4.4: Problemas com QHD-I

	m_B^*/m_B	K (MeV)	ε_{sym}
Esperado	0.7 a 0.8	210 ± 30	27 a 36
QHD-I	0.556	540	22.1

Percebe-se discrepância nos valores da massa efetiva, incompressibilidade e energia de simetria, indicando que o modelo QHD-I precisa ser melhorado.

4.3.3 Modelo de Walecka Não-Linear

Além de corrigir o valor da incompressibilidade K e da massa efetiva m_B^* , no ponto de saturação, são introduzidos na lagrangiana do modelo QHD-I termos não lineares no campo do méson σ , conforme a Ref. [38]. Em termos do formalismo de Feynmann, isso significa incluir termos de auto-interação desse campo, que são correções quânticas. A lagrangiana não-linear (NL) tem a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{NL} = -\frac{1}{3!}k\sigma^3 - \frac{1}{4!}\lambda\sigma^4, \quad (4.125)$$

onde k e λ são constantes ajustadas a fim de obterem-se melhores valores para K e m_B^* no ponto de saturação da matéria nuclear. Esta modificação altera a equação de movimento (4.72) para:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma + \frac{1}{2}k\sigma^2 + \frac{1}{6}\lambda\sigma^3 = g_\sigma \bar{\psi}\psi. \quad (4.126)$$

Usando a aproximação de campo médio:

$$\sigma_0 = -\frac{k}{2m_\sigma^2}\sigma_0^2 - \frac{\lambda}{6m_\sigma^2}\sigma_0^3 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2}\rho_S \quad (4.127)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2}\rho_B. \quad (4.128)$$

A densidade de energia e pressão do sistema, em relação às equações (4.114) e (4.115), tornam-se:

$$\varepsilon_{ACM} = \frac{m_\omega^2}{2}\omega_0^2 + \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma_0^2 + \frac{k}{6}\sigma_0^3 + \frac{\lambda}{24}\sigma_0^4 + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_F} d^3p \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} \quad (4.129)$$

$$P_{ACM} = \frac{m_\omega^2}{2}\omega_0^2 - \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma_0^2 - \frac{k}{6}\sigma_0^3 - \frac{\lambda}{24}\sigma_0^4 + \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \int_0^{p_F} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p \quad (4.130)$$

e a massa efetiva fica

$$m_B^* = m_B + \frac{k}{2m_\sigma^2 g_\sigma} (m_B - m_B^*)^2 + \frac{\lambda}{6m_\sigma^2 g_\sigma} (m_B - m_B^*)^3 - \frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \rho_S. \quad (4.131)$$

4.3.4 Hadrodinâmica Quântica – II

Até o presente, as equações apresentadas apenas descrevem interações entre nucleons, mais especificamente, interações do tipo próton-próton e nêutron-nêutron. Os mésons σ e ω não fazem distinção entre prótons e nêutrons, por isso não descrevem a interação próton-nêutron. Para tal, deve-se incluir o méson ρ , que permite a descrição da matéria assimétrica, sendo o responsável por corrigir o valor da energia de simetria do modelo QHD-I. O méson π na aproximação de campo médio tem contribuição nula, de acordo com a Ref. [34], por isso não será considerado. O méson ρ é um vetor-isovetor, o termo correspondente na lagrangiana para a propagação é uma lagrangiana de Proca:

$$-\frac{1}{4}\vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu, \quad (4.132)$$

e para a interação deve conter o isospin a fim de permitir a interação entre prótons e nêutrons ou, de maneira mais geral, entre partículas em diferentes estados de isospin:

$$g_\rho \bar{\psi} \gamma_\mu (\vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu) \psi, \quad (4.133)$$

onde $\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{\rho}_\nu - \partial_\nu \vec{\rho}_\mu - g_\rho (\vec{\rho}_\mu \times \vec{\rho}_\nu)$ e a notação $\vec{\rho}^\mu$ indica ser um quadri-vetor no espaço-tempo e vetor no espaço de isospin (isospin = 1), pois o méson ρ é um tripleto⁷ de quadrivetores:

$$\vec{\rho}^\mu = \begin{pmatrix} \rho_1^0 & \rho_1^x & \rho_1^y & \rho_1^z \\ \rho_2^0 & \rho_2^x & \rho_2^y & \rho_2^z \\ \rho_3^0 & \rho_3^x & \rho_3^y & \rho_3^z \end{pmatrix}.$$

A lagrangiana do modelo QHD-II com termos não-lineares, sem o méson π , incluindo a contribuição dos léptons (e^- , μ^-), é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{\psi} [\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi \\ & + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{3!} k \sigma^3 - \frac{1}{4!} \lambda \sigma^4 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\ & - \frac{1}{2} \vec{B}_{\mu\nu} \cdot \vec{B}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \cdot \vec{\rho}^\mu + \sum_{\lambda=e^-, \mu^-} \bar{\Psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \Psi_\lambda. \end{aligned} \quad (4.134)$$

A partir da lagrangiana da equação (4.134), obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\partial_\mu \partial^\mu \sigma + m_\sigma^2 \sigma + \frac{1}{2} k \sigma^2 + \frac{1}{6} \lambda \sigma^3 = g_\sigma \bar{\psi} \psi \quad (4.135)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_\omega^2 \omega^\nu = g_\omega \bar{\psi} \gamma^\nu \psi \quad (4.136)$$

$$\partial_\mu \vec{B}^{\mu\nu} + m_\rho^2 \vec{\rho}^\nu = g_\rho \bar{\psi} \gamma^\nu \vec{\tau} \psi \quad (4.137)$$

$$[\gamma_\mu (i\partial^\mu - g_\omega \omega^\mu - g_\rho \vec{\tau} \cdot \vec{\rho}^\mu) - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi = 0. \quad (4.138)$$

Seguindo o mesmo procedimento a fim de aplicar a aproximação de campo médio, a invariância por translação e rotação implica em:

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \langle \rho_{(i)}^\mu \rangle = 0, \quad (4.139)$$

onde $i, \mu = 1, 2, 3$ (parte espacial), e a invariância por rotação em relação ao eixo \hat{z} no espaço de isospin:

$$\langle \tau_1 \rangle = \langle \tau_2 \rangle = 0, \quad (4.140)$$

restando apenas τ_3 , assim:

$$\langle \rho_1^0 \rangle = \langle \rho_2^0 \rangle = 0 \quad (4.141)$$

⁷Isto é, existem três estados de carga, positivo, negativo e neutro.

e a operação de τ_3 em $|F\rangle$ resulta em:

$$\tau_3 |F\rangle = \frac{1}{2} (N_p - N_n) |F\rangle. \quad (4.142)$$

Com efeito, a aproximação de campo médio simplifica o problema porque efetivamente apenas leva em conta a parte temporal do méson ρ neutro, onde definimos $\langle \rho_0^3 \rangle \equiv \rho_{03}$. Então:

$$\sigma(x_\mu) \rightarrow \langle \sigma(x_\mu) \rangle \equiv \sigma_0 \quad (4.143)$$

$$\omega_\mu(x_\mu) \rightarrow \langle \omega_\mu(x_\mu) \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \omega_0 \quad (4.144)$$

$$\rho_\mu^{(j)}(x_\mu) \rightarrow \langle \rho_\mu^{(j)}(x_\mu) \rangle \equiv \delta_{\mu 0} \delta^{j3} \rho_{03}. \quad (4.145)$$

Com isto as equações de movimento (4.135) a (4.138) são simplificadas:

$$m_\sigma^2 \rho_0 + \frac{1}{2} k \sigma_0^2 + \frac{1}{6} \lambda \sigma_0^3 = g_\sigma \langle \bar{\psi} \psi \rangle \quad (4.146)$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \langle \bar{\psi} | \gamma^0 \psi \rangle \quad (4.147)$$

$$m_\rho^2 \rho_{03} = g_\rho \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi \rangle \quad (4.148)$$

$$[i \gamma_\mu \partial^\mu - g_\omega \gamma^0 \omega_0 - g_\rho \gamma^0 \tau_3 \rho_{03} - (m_B - g_\sigma \sigma)] \psi = 0. \quad (4.149)$$

Porém, agora temos:

$$\rho_S \equiv \langle \bar{\psi} \psi \rangle = \langle \bar{\psi}_p \psi_p \rangle + \langle \bar{\psi}_n \psi_n \rangle = \rho_S^p + \rho_S^n \quad (4.150)$$

$$\rho_S^i = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int_0^{p_{F_i}} \frac{m_B^*}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3 p \quad , \quad i = p, n \quad (4.151)$$

$$\rho_B \equiv \langle \bar{\psi} \gamma^0 \psi \rangle = \langle \bar{\psi}_p^\dagger \psi_p \rangle + \langle \bar{\psi}_n^\dagger \psi_n \rangle = \rho_p + \rho_n \quad (4.152)$$

$$\rho_i = \frac{\gamma}{6\pi^2} p_{F_i}^3 \quad , \quad i = p, n, \quad (4.153)$$

estando a equação (4.153) em acordo com a equação (4.152) apenas com a diferença de que agora temos duas distribuições: uma para prótons e outra para nêutrons, e também:

$$\rho_3 \equiv \langle \bar{\psi} \gamma^0 \tau_3 \psi \rangle = \frac{1}{2} (\langle \bar{\psi}_p^\dagger \psi_p \rangle - \langle \bar{\psi}_n^\dagger \psi_n \rangle) = \frac{1}{2} (\rho_p - \rho_n), \quad (4.154)$$

onde a equação (4.154) está de acordo com as equações (4.142) e (4.124).

Com isto, as equações para os campos podem ser escritas:

$$\sigma_0 = -\frac{k}{2m_\sigma^2}\sigma_0^2 - \frac{1}{6m_\sigma^2}\lambda\sigma_0^3 + \frac{g_\sigma}{m_\sigma^2}\rho_S \quad (4.155)$$

$$\omega_0 = \frac{g_\omega}{m_\omega^2}\rho_B \quad (4.156)$$

$$\rho_{03} = \frac{g_\rho}{m_\rho^2}\rho_3. \quad (4.157)$$

Novamente podemos escrever a lagrangiana de campo médio e, através do tensor energia-momentum definido na equação (4.75), obtemos as equações de estado:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ACM} = & \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \left(\sum_{i=n,p} \int_0^{p_{F_i}} \sqrt{p^2 + m_B^{*2}} d^3p \right) \\ & + \frac{m_\omega^2}{2}\omega_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2}\rho_{03}^2 + \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma_0^2 + \frac{k}{6}\sigma_0^3 + \frac{\lambda}{24}\sigma_0^4 \end{aligned} \quad (4.158)$$

$$\begin{aligned} P_{ACM} = & \frac{\gamma}{3(2\pi)^3} \left(\sum_{i=n,p} \int_0^{p_{F_i}} \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + m_B^{*2}}} d^3p \right) \\ & + \frac{m_\omega^2}{2}\omega_0^2 + \frac{m_\rho^2}{2}\rho_{03}^2 - \frac{m_\sigma^2}{2}\sigma_0^2 - \frac{k}{6}\sigma_0^3 - \frac{\lambda}{24}\sigma_0^4, \end{aligned} \quad (4.159)$$

lembrando que neste caso $\gamma = 2$, referindo-se somente à degenerescência de spin. Com a inclusão do méson π , há uma modificação no cálculo da energia de simetria:

$$\varepsilon_{sym} = \frac{1}{2}\rho_B \left[\left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_B} \right]_{\rho_3=0} = \frac{g_\rho^2}{12\pi^2 m_\rho^2} p_F^3 + \frac{1}{6} \frac{p_F^2}{\sqrt{p_F^2 + m_B^{*2}}}, \quad (4.160)$$

onde g_ρ e m_ρ deixam em evidência a importância do méson ρ neste cálculo, se compararmos com a equação (4.123). Como o número de parâmetros aumentou, agora é possível melhorar os resultados do modelo em relação aos valores esperados, mesmo sendo a energia de simetria calculada para matéria simétrica, onde o méson ρ não atua. Este modelo é aplicado em núcleos atômicos para descrever a interação forte entre os nucleons, que são bárions. Pelo fato de numa estrela de nêutron haver bárions interagindo através da força nuclear forte, será feita uma generalização da hadrodinâmica quântica com o intuito de aplicá-la em tais objetos celestes.

Os momenta de Fermi⁸ dos nucleons são obtidos através do potencial termodinâmico

⁸Momentum de Fermi é o momentum máximo que uma partícula do sistema pode ter. Está

(Ω):

$$\Omega = E - TS - \sum_{i=p,n} \mu_i N_i, \quad (4.161)$$

onde E é a energia, T a temperatura, S a entropia, μ o potencial químico e N o número de partículas. Os índices referem-se a prótons e nêutrons. O potencial termodinâmico também pode ser obtido através do cálculo da função de partição. No estado fundamental, $T = 0$, e tendo apenas partículas, a função distribuição é uma função degrau. De acordo com a Ref. [39]:

$$\Omega = \int \left(\frac{1}{2} [(\nabla\sigma_0)^2 - (\nabla\omega_0)^2 - (\nabla\rho_{03})^2] - V_{ef} \right) d^3r, \quad (4.162)$$

onde

$$V_{ef} = \frac{1}{2} \left[m_\sigma^2 \sigma_0^2 + \frac{2}{3!} k \sigma_0^3 + \frac{2}{4!} \lambda \sigma_0^4 - m_\omega^2 \omega_0^2 - m_\rho^2 \rho_{03}^2 \right] + \sum_i \left[\mu_i \rho_i - \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3p \left(\sqrt{p^2 + m_i^{*2}} + g_\omega \omega_0 + g_\rho \tau_{3i} \rho_{03} \right) \right]. \quad (4.163)$$

Minimizando Ω em relação a p_{F_p} e p_{F_n} , obtém-se:

$$p_{F_p}^2 \left(\sqrt{p_{F_p}^2 + m_p^{*2}} + g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} - \mu_p \right) = 0 \quad (4.164)$$

$$p_{F_n}^2 \left(\sqrt{p_{F_n}^2 + m_n^{*2}} + g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} - \mu_n \right) = 0, \quad (4.165)$$

onde $p_{F_p} = p_{F_n} = 0$ ou para p_{F_p} e p_{F_n} diferentes de zero, obtemos:

$$\mu_p = \sqrt{p_{F_p}^2 + m_p^{*2}} + g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} = 0 \quad (4.166)$$

$$\mu_n = \sqrt{p_{F_n}^2 + m_n^{*2}} + g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} \quad (4.167)$$

ou

$$p_{F_p} = \sqrt{\left(\mu_p - g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} \right)^2 - m_p^{*2}} \quad (4.168)$$

$$p_{F_n} = \sqrt{\left(\mu_n - g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \rho_{03} \right)^2 - m_n^{*2}}. \quad (4.169)$$

associado ao estado de maior energia do sistema, a *Energia de Fermi*.

4.4 O Modelo de Sacola do M.I.T.

A grande incerteza teórica na descrição da fase de quarks (até mesmo para decidir sobre a sua existência) é, sem dúvida, a equação de estado. Não sabemos como é a equação de estado num intervalo grande de densidades (desde aproximadamente umas poucas vezes a densidade de equilíbrio nuclear ρ_0 até dezenas de vezes ρ_0) as quais são possivelmente atingidas numa estrela de nêutron. Até hoje, infelizmente, não existe nenhuma teoria que cubra esse intervalo de densidades com relação aos graus de liberdade dos quarks. Na Ref. [40] mostrou-se que os efeitos do meio aumentam a energia por bárion da matéria de quarks (com estranheza incluída) tornando portanto a fase de quarks menos favorável do ponto de vista energético. A razão física para um aumento de energia por bárion é a dependência da massa efetiva com a densidade deduzida. Ela aumenta com o aumento da densidade.

Nesse trabalho usaremos uma variação desse modelo para o cálculo da equação de estado. Espera-se que a transição para matéria de quarks ocorra quando a matéria nuclear for comprimida tanto que seus constituintes hadrônicos se sobrepõem uns aos outros. Nestas circunstâncias, quarks em diferentes hádrons podem se intercambiar livremente e os graus de liberdade da matéria ficam sendo os dos quarks. A matéria fica então melhor descrita por quarks que constituem os hádrons, do que por hádrons. Devemos enfatizar que a densidade de matéria nuclear ($\rho = 1 \times 10^{14}$) é só um pouco menor que a da matéria hadrônica ($\rho = 2.8 \times 10^{14}$). Hádrons no núcleo estão quase se sobrepondo e basta uma pequena compressão para que a transição ocorra.

A teoria de quarks e glúons, a cromodinâmica quântica (ou QCD) contém dois aspectos fundamentais: liberdade assintótica e confinamento. Esses dois aspectos são incorporados ao modelo de sacola da seguinte maneira:

- dentro da sacola** as interações não são consideradas (ou são tratadas com teoria de perturbação de ordem mais baixa);
- fora da sacola** quarks não existem como partículas livres. Isto é alcançado, dando-se ao vácuo uma densidade de energia constante \mathbb{B} que mantém quarks e glúons confinados em pequenas regiões do espaço.

Neste modelo, os hádrons consistem de quarks livres ou fracamente interagentes aprisionados por uma pressão de vácuo em um pequeno volume, a “sacola”. Formalmente introduz-se o termo $\mathbb{B}g^{\mu\nu}$ no tensor de energia-momentum dentro desse volume, onde o parâmetro \mathbb{B} é chamado de constante de sacola. Esta constante fornece uma contribuição positiva para a densidade de energia dentro da sacola e uma contribuição negativa para a pressão. A pressão do vácuo é contra-balançada pela pressão dos quarks dentro da sacola, que estão portanto confinados. A constante \mathbb{B} é tratada como um

parâmetro livre do modelo, ela pode ser ajustada a partir do espectro hadrônico. Tais estimativas tipicamente fornecem $\mathbb{B} = 100 - 200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$. Valores pouco superiores podem ser obtidos através do ajuste pelas regras de soma da QCD. Para três sabores de quark e uma massa de quark estranho escolhida como $m_s = 150 \text{ MeV}$ obtem-se um ajuste de aproximadamente $\mathbb{B} = 150 \text{ MeV} \cdot \text{fm}^{-3}$ que é o valor que utilizaremos para a constante de sacola neste trabalho. Este valor fornece uma energia por bárion menor do que a de um núcleo de ${}^{56}\text{Fe}$.

O modelo de sacola tem sido usado para descrever a matéria de quarks e glúons não apenas dentro dos hádrons, como também em qualquer volume fechado finito, mesmo que seja tão grande quanto o interior de uma estrela de nêutron.

No modelo de sacola, a equação de estado para o plasma de quarks e glúons livres é dada por:

$$P = \frac{1}{3} (\varepsilon - 4\mathbb{B}) \quad (4.170)$$

$$\varepsilon_P = \frac{N_c N_f}{\pi^2} \left(\frac{7}{60} \pi^4 T^4 + \frac{1}{20} \pi^2 T^2 \mu_q^2 + \frac{\mu_q^4}{4} \right) + \frac{4}{15} N_g \pi^2 T^4 + \mathbb{B}, \quad (4.171)$$

onde N_f é o número de sabores de quarks leves, N_c o número de cores e N_g o número de glúons no plasma. T é a temperatura que só foi incluída aqui por erudição, visto que estamos utilizando a aproximação de $T = 0$ (vide a Seção 4.1).

Tabela 4.5: Equações de estado que utilizamos nos três regimes de densidade

Região	Densidade (g.cm-3)	Estrutura	Equação de Estado
I	$2 \times 10^3 < \rho < 4.3 \times 10^{11}$	Rede cristalina; núcleos leves e gás de elétrons.	BPS
II	$4.3 \times 10^{11} < \rho < 2.5 \times 10^{14}$	Rede cristalina; núcleos pesados, gás de elétrons relativísticos e gás de nêutrons (\pm neutrinos).	BBP e GB
III	$2.5 \times 10^{14} < \rho < 5 \times 10^{15}$	Nucleons relativísticos, mésons, múons, elétrons (\pm neutrinos).	QHD
IV	$\rho > 5 \times 10^{15}$	Quarks e glúons desconfina-dos.	Modelo de sacola do MIT

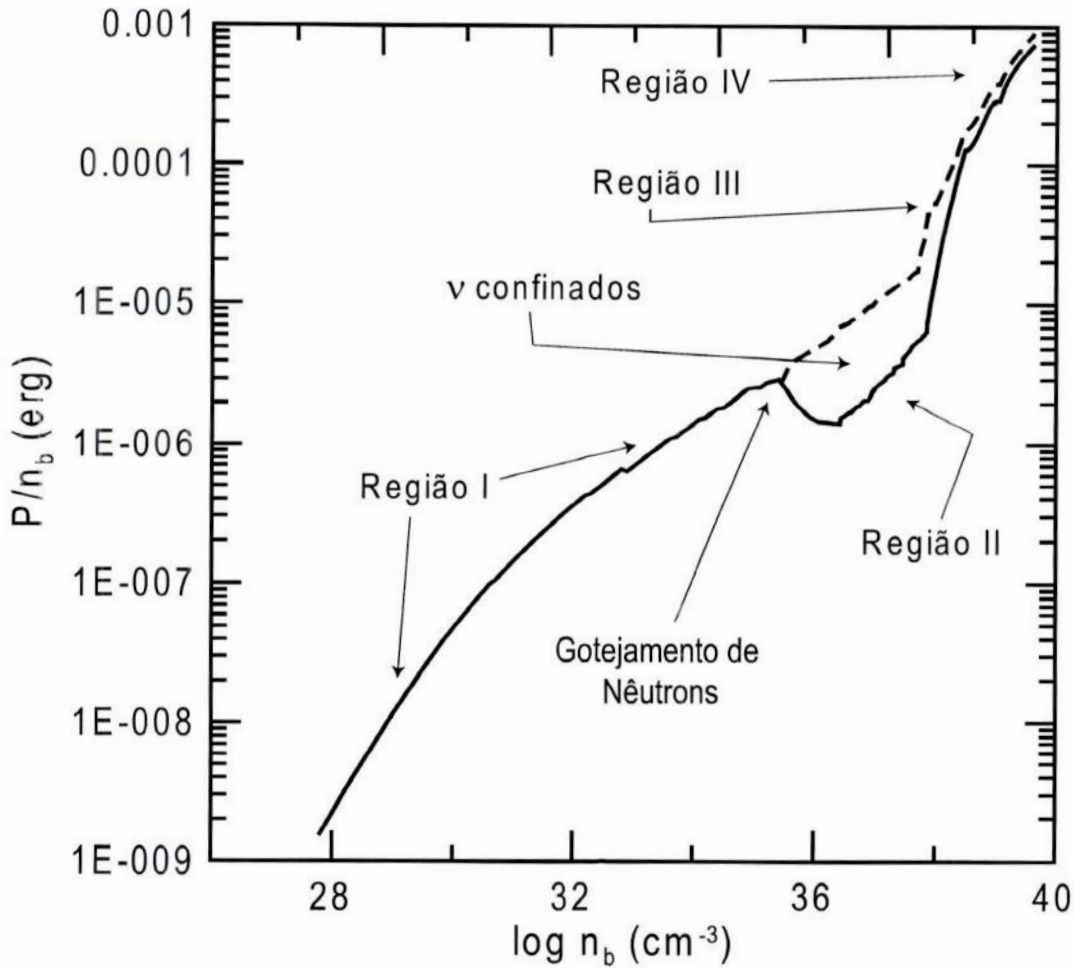


Figura 4.1: Equação de estado para diversos regimes de densidade. Na Região I temos a presença de núcleos imersos num gás de elétrons. Na Região II núcleos imersos num gás de elétrons e nêutrons; aqui podemos dividir duas equações de estado diferentes, a linha pontilhada representa a equação de estado com neutrinos confinados enquanto a linha contínua representa a equação sem os neutrinos confinados. Na Região III temos a presença de matéria nuclear. Na Região IV temos a fase com quarks desconfinados.

4.4.1 A Equação de Estado no Regime de Quarks

O modelo de sacola de quarks com massa efetiva é uma técnica usada para descrever de forma não perturbativa interações complexas e efeitos do meio como modos coletivos em sistemas de muitas partículas. A idéia básica é que as partículas de tais sistemas adquirem uma massa efetiva devido à interação com o resto do sistema. Adotando o esquema de quasi-partículas, efeitos do meio foram recentemente incorporados na equação de estado dos quarks no contexto do modelo de sacola do M.I.T. A massa efetiva aparece como um polo do propagador do quark iterado (e portanto não perturbativo) para potenciais químicos finitos, o qual é calculado na aproximação de densidade alta.

O resultado desse cálculo é uma massa efetiva para os quarks dependente do potencial químico da seguinte maneira:

$$m_f^* = \frac{m_f}{2} + \sqrt{\frac{m_f^2}{4} + \frac{g^2 \mu_f^2}{6\pi^2}}, \quad (4.172)$$

onde g é a constante de acoplamento forte para o plasma de quarks e glúons, μ_f é o potencial químico dos quarks, $f = u, d, s$ e $m_u = m_d = 0$ e $m_s = 150 \text{ MeV}$ são as massas correntes adotadas para os quarks.

Podemos notar que as massas efetivas aumentam com a constante de acoplamento e também com o potencial químico. Esse é então, dentro deste esquema, o resultado das interações. O último ingrediente do modelo é a constante de sacola fenomenológica \mathbb{B} introduzida da maneira usual e que supostamente simula a influência do confinamento e corresponde à diferença de energia entre o vácuo perturbativo dentro da fase de quarks desconfinada e o vácuo verdadeiro fora dela.

As equações de balanço químico na fase de quarks são dadas também pela equação

$$\mu_j = q_j \mu_n - q_e (\mu_e - \mu_{\nu_e}),$$

com

$$j = u, d, s.$$

Podemos explicitar estas equações como:

$$\mu_u = \frac{1}{3} \mu_n - \frac{2}{3} (\mu_e - \mu_{\nu_e})$$

e

$$\mu_d = \mu_s = \frac{1}{3} \mu_n + \frac{1}{3} (\mu_e - \mu_{\nu_e}).$$

Ao somarmos estas duas equações, obtemos uma relação fundamental entre o potencial químico dos nêutrons e os potenciais químicos dos quarks, dada por

$$\mu_n = \mu_u + 2\mu_d.$$

Em termos dos graus de liberdade da fase de quarks, é possível escrevermos também

$$\mu_u = \mu_d - \mu_e + \mu_{\nu_e}.$$

Nesta fase, a conservação da carga bariônica é dada por

$$\rho = \frac{1}{3} (n_u + n_d + n_s),$$

que deve ser satisfeita consistentemente com a conservação da carga elétrica que se expressa pela equação

$$\frac{1}{3}(2n_u - n_d - n_s) - n_e - n_\mu = 0,$$

lembrando que o modelo quando utilizado para descrever o meio estelar envolve a densidade de leptons presentes.

Notemos também que a conservação da fração leptônica total para a fase de quarks tem a mesma expressão da fase de hádrons.

Finalmente, as expressões da pressão e da densidade de energia para esta fase [41] são dados por

$$\begin{cases} P_Q = -\mathbb{B} + \sum_f P_f + \sum_l (P_l + P_{\nu_l}) \\ \varepsilon_Q = -P_Q + \sum_f \mu_f n_f + \sum_l \mu_l n_l + \sum_l \mu_{\nu_l} n_{\nu_l} \end{cases}, \quad (4.173)$$

onde P_f é a pressão de gás de férmions livres e \mathbb{B} é a constante de sacola, $l = e^-, \mu^-$ e $f = u, d, s$.

Capítulo 5

Considerações Finais e Perspectivas Futuras

*“A ciência não pode prever o que vai acontecer.
Só pode prever a probabilidade de algo acontecer.”*

César Lattes

Através do estudo de equações de estado abrangendo diversos regimes de densidade, dentro da aproximação de temperatura nula e de campo médio, obtivemos as ferramentas necessárias para varrer todos os regimes de densidades que podem ocorrer dentro de uma estrela de nêutron (ou uma proto-estrela de nêutron). A inclusão dos graus de liberdade de quarks nos permite que, futuramente, também venhamos a voltar nossa atenção também ao estudo de outros objetos compactos, tais como: estrelas de quark e estrelas híbridas.

5.1 O Ciclo de Vida de uma Estrela

A vida útil de uma estrela dura um tempo demasiado longo em comparação com o tempo de vida dos seres vivos, porém, assim como os seres vivos as estrelas não são estáticas. Pelo contrário, elas surgem evoluem e alcançam um fim. Por isso, em analogia com os organismos vivos, buscamos analisar os diversos estágios de existência de uma estrela subdividindo-os em três estágios básicos: Nascimento; Vida, e; Morte. Discutimos como uma imensa nuvem gasosa pode se contrair devido à sua auto-gravitação e acumulando cada vez mais matéria até que surjam reações termonucleares disparadas pelas altas temperaturas alcançadas no núcleo. Vimos que a maior parte da vida de uma estrela se desenrola na Sequência Principal enquanto queima hidrogênio no núcleo. Vimos que o fim de uma estrela não é único para todas, mas sim varia para cada estrela em função de sua massa e composição iniciais. Vimos também que é possível

classificar as estrelas em função de seu tipo espectral, e mais, vimos que é possível vincular características estruturais e espectrais através do estudo do diagrama HR. Vimos também que, embora o fim de cada estrela seja único, podemos classificar em grupos os objetos remanescentes de estrelas mortas: anãs-brancas, buracos-negros, estrelas de nêutron, estrelas de quark, etc. . .

5.2 A Aproximação de Estrela Fria ($T \sim 0$)

Como vimos no Capítulo 4 antes de se fazer qualquer cálculo com um gás de férmions a temperatura finita ($T \neq 0$), devemos comparar a temperatura do sistema com sua temperatura de Fermi, pois para $T \ll T_F$ podemos aplicar as equações para $T \sim 0$ sabendo que o efeito da temperatura não será significativo nas propriedades macroscópicas desses sistemas, quando comparado com os cálculos efetuados para $T \sim 0$.

5.3 O Regime Subnuclear

Vimos também como o regime subnuclear pode ser tratado dentro do formalismo das equações de estado apresentadas no Capítulo 4, onde inclusive é possível obter para um dado valor de densidade bariônica o núcleo que minimiza a energia do sistema. Ou seja, dada a densidade bariônica, a composição química e a energia do estado fundamental são determinadas, o que também nos permite obter a pressão. O estudo do regime subnuclear é importante pois muitos objetos compactos apresentam esse regime em parte de suas estruturas ao longo de sua evolução.

5.4 O Regime Hadrônico

O estudo da fase hadrônica também é de fundamental importância para o estudo de objetos densos. Vimos que A QHD-II e o modelo não-linear de Walecka apresentam correções importantes ao modelo original apresentado em 1974 pelo próprio Walecka (ver Ref. [33]). E que mesmo tais correções também podem ser utilizadas dentro do formalismo da aproximação de campo médio a $T \sim 0$.

5.5 O Regime de Quarks

Embora haja especulações sobre a existência ou não de um núcleo de quarks dentro de estrelas de nêutron, o estudo da fase de quarks é importante também do ponto de vista futuro, pois abre caminho para a análise de sistemas mais densos como estrelas de

quark e estrelas híbridas (essas últimas possuiriam em sua composição matéria nuclear e/ou hadrônica coexistindo com quarks desconfinados). O modelo de sacola do M.I.T. cobre a faixa de densidades atingida por esses objetos.

5.6 Perspectivas Futuras

De modo a dar continuidade à nossa pesquisa, aqui seguem algumas idéias que pretendemos implementar eventualmente nos nossos desenvolvimentos futuros:

1. **A utilização de um modelo TOV.** Através da integração das equações de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (ou simplesmente equações TOV), é possível obter configurações de equilíbrio hidrostático dentro da métrica de Schwarzschild. Embora equilíbrio hidrostático não implique em estabilidade estelar, a equação TOV faz a conexão entre aspectos microscópicos da constituição estelar e a estrutura macroscópica da estrela.
2. **Um tratamento efetivo para a evolução hidrodinâmica do meio.** Podemos tentar estudar uma proto-estrela de nêutron a partir de um modelo de 2-camadas, ou seja, dividimos o sistema em duas camadas homogêneas, representando esquematicamente os caroços interno e externo. Também incluímos as massas das camadas no conjunto de coordenadas lagrangianas do sistema para ter uma visão clara da transferência de massa e energia entre as caroços interno e externo. Desta forma, a partir de condições iniciais obtidas de maneira apropriada, podemos simular, dentro de um tratamento efetivo, a evolução hidrodinâmica da proto-estrela de nêutron durante o seu resfriamento. Segundo este modelo a Lagrangiana efetiva do sistema pode ser escrita como

$$\mathcal{L}(R_1, R_2, \dot{R}_1, \dot{R}_2, \dot{M}_1) = K - W - E, \quad (5.1)$$

onde K representa a energia cinética das camadas, W a energia gravitacional do sistema, e E é a energia interna do meio estelar. Os raios dos caroços interno e externo são, respectivamente R_1 e R_2 , sendo M_1 e M_2 são as massas correspondentes. Tomando como vínculo a conservação da massa total M teremos

$$M - (M_1 + M_2) = 0, \quad (5.2)$$

o que implica

$$\dot{M}_1 = -\dot{M}_2 \quad (5.3)$$

3. **Um tratamento hidrodinâmico mais realista para a evolução do meio.**

Com n -camadas o tratamento hidrodinâmico seria mais realista e talvez haja uma correções nos resultados encontrados no modelo de 2-camadas proposto no ítem anterior. Apesar de um modelo mais realista poder apresentar correções importantes, acreditamos que também validará os resultados gerais que possam ser obtidos com o modelo simplificado de 2-camadas.

Referências Bibliográficas

- [1] Clayton, D. D., 1968, “*Principles of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*”, McGraw-Hill, U. S. A.
- [2] Russell, H. N., 1914, *Popular Astronomy*, **22**, 275
- [3] Bernasconi, P. A. & Maeder, A., 1996, *Astron. Astrophys.*, **307**, 829.
- [4] Kumar, S. S., 1963, *Astrophys. J.*, **137**, 1121.
- [5] Kodama, T. & Duarte, S. B., 2004, *Tópicos de Astrofísica Nuclear*, Anais da V Escola do CBPF.
- [6] Gonçalves, H. A. R., 1995, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF).
- [7] Bethe, H. A., 1939, *Phys. Rev.*, **55**, 103B.
- [8] von Weizsäcker, C. F., 1938, *Physik. Zeitschr.*, **39**, 633.
- [9] Hoyle, F., 1954, *Astrophys. J. Suppl.*, **1**, 121.
- [10] Maciel, W. J., 2004, *Revista USP*, **62**, 66.
- [11] Chandrasekhar, S., 1931, *Astrophys. J.*, **74**, 81.
- [12] Hamada, T. & Salpeter, E. E., 1961, *Astrophys. J.*, **134**, 6381.
- [13] Hoyle, F. & Fowler, W. A., 1960, *Astrophys. J.*, **132**, 565.
- [14] Barbon, R., Ciatti, F. & Rosino, L., 1973, *Astron. Astrophys.*, **29**, 57.
- [15] Burbidge, E. M., Burbidge, G. R., Fowler, W. A. & Hoyle, F., 1957, *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 547.
- [16] Texto obtido no endereço eletrônico:
<http://astronomy.swin.edu.au/cms/astro/cosmos/T/Type+II+Supernova+Light+Curves>

- [17] Tolman, R. C., 1939, *Physical Review*, **55**, 364.
- [18] Oppenheimer, J. R. & Volkoff, G. M., 1939, *Physical Review*, **55**, 374.
- [19] Bombaci, I., 1996, *Astron. Astrophys.*, **305**, 871.
- [20] Thompson, C. & Duncan, R.C., 1995, *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **275**, 255.
- [21] Hurley, K. et al, 1999, *Nature*, **397**, 41.
- [22] Fetter, A. L. & Walecka J. D., 2003, "*Theoretical Mechanics of Particles and Continua* ", Dover Publications, U. S. A.
- [23] Misner, C. W., Thorne K. S. & Wheeler J. A., 1973, "*Gravitation*", W.H. Freeman and Co., U. S. A.
- [24] Baym, G., Pethick, C. & Sutherland, P., 1971, *Astrophys. J.*, **170**, 299.
- [25] Baym, G., Bethe, H. & Pethick, C., 1971, *Nuc. Phys.*, **A175**, 225.
- [26] Gudmundsson, E. H. & Buchler, J. R., 1980, *Astrophys. J.*, **238**, 717.
- [27] Chandrasekhar, S., 1931, *Phyl. Mag.*, **11**, 592.
- [28] Chiu, H. Y., 1968, "*Stellar Physics*", Vol. I, Blaisdel Publishing Co., U. S. A.
- [29] Salpeter, E. E., 1961, *Astrophys. J.*, **140**, 796.
- [30] Shapiro, S.L. & Teukolsky, S.A., 1983, "*Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*", John Wiley & Sons, U. S. A.
- [31] Horsfall, R. A. C. & Maradudin, A. A., 1960, *Math. Phys.*, **1**, 395.
- [32] Gonçalves, H. A. R., 1995, Tese de Doutorado, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF).
- [33] Walecka J. D., 1974, *Ann. Phys.*, **83**, 491.
- [34] Serot, B. D. & Walecka, J. D., 1986, *Adv. Nuc. Phys.*, Plenum Press, v. **16**, U. S. A.
- [35] Fetter, A. L. & Walecka J. D., 1968, "*Theoretical Mechanics of Particles and Continua* ", Interscience Publishers, U. S. A.
- [36] Lurié, D., 1968, "*Particles and Fields*", Interscience Publishers, U. S. A.
- [37] Weinberg, S., 1972, "*Gravitation and Cosmology*", John Wiley & Sons, U. S. A.

- [38] Boguta, J. & Bodmer, A. R., 1977, *Nucl. Phys. A*, **292**, 413.
- [39] Menezes, D. P. & Providência, C., 1999, *Nucl. Phys. A*, **650**, 283.
- [40] Li G. Q., Lee C. H. & Brown G., 1997, *Nucl. Phys. A*, **625**, 372.
- [41] Schertler, K., Greiner, C. & Thoma, M. H., 1997, *Nucl. Phys. A*, **616**, 654.