VISTO
Em 18/8/1977

O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

ALEXANDRE HUMBERTO ANDREI

O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Sua formulação teórica e um exemplo de aplicação astronômica.

ORIENTADOR: JOSÉ FELIPE CARIA CALDEIRA

RIO DE JANEIRO - 1976

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE ASTRONOMIA

Este trabalho é dedicado à minha esposa, Ana, e a meu Pai, cujo estímulo e auxílio foram sempre inestimáveis. Dedico também agradecimentos especiais ao meu orientador José Felipe Caria Caldeira, às minhas colegas Jucira Louzada Penna e Margaret de Queiroz.

PARTE I

S U M Á R I O

O método dos mínimos quadrados, apesar de ser firmemente baseado na teoria estatística, é em sua parte fundamental um conceito voltado para realizações de ordem prática. Assim sendo, e pelo próprio caráter de projeto de fim de curso de graduação, a diretriz que este trabalho tenta seguir é a de objetividade e praticidade. Uma abordagem que permita ao leitor uma visão que, mesmo tão abrangente quanto possível, possa capacitá-lo rapidamente ao emprego do método, tal é a intenção.

À maneira de introdução, cuidamos de fornecer um panorama da teoria dos erros. São apresentados a curva de distribuição Gaussiana, as diferentes definições de erro e suas distinções e são introduzidas ainda as noções de média aritmética, de resíduos e de peso. As demonstrações matemáticas utilizadas ficam ao nível do ensino Universitário, além do mais, os postuladis estatísticos são principalmente fundamentados em estrito senso comum. Esta introdução, portanto, é destinada a preencher de maneira breve, possíveis lacunas no conhecimento específico do leitor, ou, mais seguramente, relembrá-lo de uma ou outra particularidade esquecida.

Na descrição do método dos mínimos quadrados, procurou-se antes, reorganizar a exposição no sentido de torná-la o

mais clara quanto possível, ao invés de ser tentado um enfoque inédito ou audacioso do problema. Exemplo de tal postura, é o ajustamento de uma série de valores segundo uma reta, isto é, embora seja o caso menos complexo, a demonstração é válida e consistente com qualquer curva que defina melhor a disposição de uma dada série de valores.

Para finalizar, é apresentado um exemplo extraído de uma observação real, que por si próprio reafirma a importância que tem para o astrônomo o método dos mínimos quadrados. Sua utilização, aliada ao conhecimento da teoria dos erros, cresce na medida em que é cada vez mais necessária a determinação exata dos valores fornecidos pelas observações, a determinação exata dos erros que eles trazem e na medida em que a quantidade de dados obtidos tem atingido proporções literalmente astronômicas.

PARTE II

LEI DOS ERROS; MÓDULO DE PRECISÃO

Erros sistemáticos ocorrem por causas persistentes ao longo de uma série de observações ou são devidas a uma determinada lei.

Erros acidentais ocorrem por causas tão variáveis e transigentes que não podem ser melhor pesquisadas. Supomos que acontecem erros positivos e negativos de igual dimensão e número e que os erros pequenos são mais prováveis que os grandes.

Em geral se demonstra matematicamente que a distribuição de erros ou seja a freqüência de erros Δ é de tipo:

$$1)\ F(A) \sim e^{-x^2} \quad \text{ou} \quad e^{-(h\Delta)^2}$$

onde x é proporcional ao número de erros e pode se afirmar que $x=h\Delta$ onde h é a medida da dispersão dos erros e se chama, módulo de precisão. Para diversas distribuições de erros se obtem a mesma freqüência de erros $F(\Delta)$ para o mesmo valor de $x=h\Delta$.

Quanto maior o valor de h menor será o correspondente valor de Δ ; para determinado valor de $F(A)$, Δ é inversamente proporcional a h. Esta simples e oportuna relação se apresenta como uma boa aproximação do valor real da distribuição de erros.

Podemos então escrever:

$$2)\ F(\Delta)\ d\Delta = C\ e^{-x^2}\ dx$$

onde $F(\Delta)\, d\Delta$ é a parcela de todos os erros entre Δ e $\Delta + d\Delta$.

O valor de C se obtem observando que:

$$3)\quad 1 = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\Delta)\, d\Delta = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx-$$

Um dos modos de calcular a integral (3) é a seguinte:

$$4)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy$$

considerando x e y em coordenadas retangulares e integral dupla

$$5)\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + y^2)}\, dx\, dy$$

e contido na figura de revolução (fig.1) e pode então ser também expressa como:

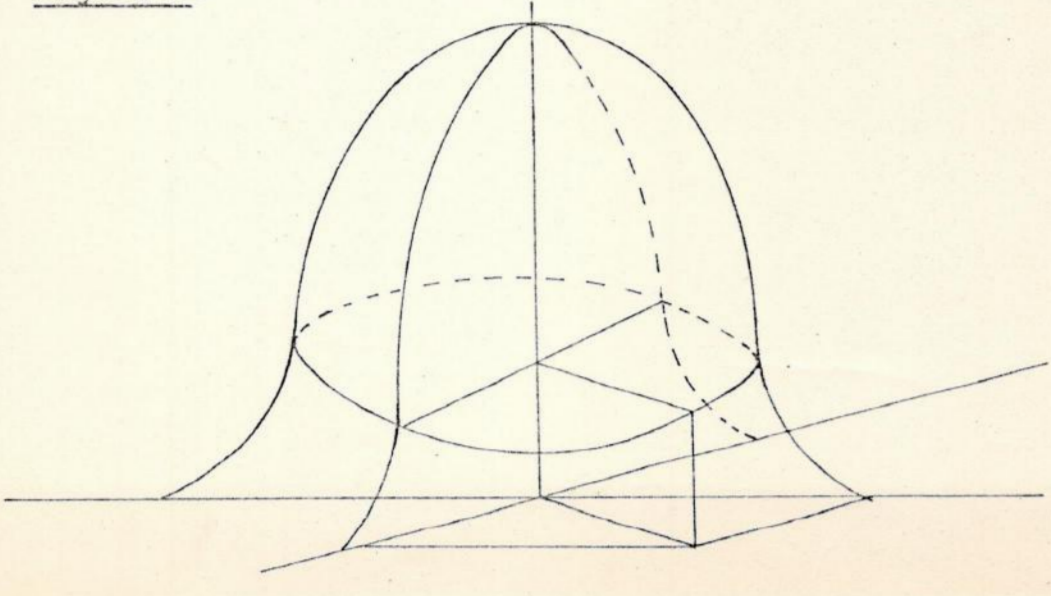
$$6)\quad \int_{0}^{\infty} 2\pi r\, e^{-r^2}\, dr$$

e que pode ser resolvida assim:

$$7)\quad \pi \int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\, d(r^2) = \pi\, e^{-r^2} \Big|_{+\infty}^{0} = \pi$$

(invertindo os limites de integração, inverteu-se o sinal).

Figura 1.



Conseqüentemente (4)

$$8) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$$

e também $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (9)

e reportando-nos a (3)

$$10) \quad C = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Assim teremos:

$$11) \quad F(\Delta) \, d\Delta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \, dx$$

ou substituindo $x = h\Delta$

$$12) \quad F(\Delta) \, d\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-(h\Delta)^2} \, d\Delta .$$

$F(\Delta)$ representa a <u>função de probabilidade</u> ou <u>curva normal</u> ou <u>distribuição de Gauss</u> ou Maxwell.

ERRO MÉDIO, COMUM E PROVÁVEL

No estudo dos erros acidentais é oportuno ter certos erros específicos representando a precisão da série de observações. Consideramos tratar-se de séries homogêneas, isto

é, que todas as observações têm o mesmo módulo de precisão.

Identificamos:

Erro médio ϵ

Erro comum η

Erro provável r

cujos valores teóricos serão deduzidos a seguir.

O erro médio, ou seja a raiz quadrada média do erro, se obtem assim:

Sen quadrado é a aproximação dos quadrados dos erros, ou seja:

$$\epsilon^2 = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(h\Delta)^2} \Delta^2 \, d\Delta$$

fazendo $h\Delta = x$; $d\Delta = \frac{dx}{h}$

temos

$$\epsilon^2 = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^2 \, dx.$$

Integrando por partes ou seja

$$\int x \, du = nu - \int u \, dx \quad \text{onde}$$

$$u = -\frac{e^{-x^2}}{2} \quad \text{temos que} \quad du = e^{-x^2} \, n \, dn$$

temos então:

$$.\epsilon = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\left[\frac{-x\,e^{-x^2}}{4}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dn = \frac{1}{h^2\sqrt{\pi}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\text{ou} \quad \epsilon^2 = \frac{1}{2h^2} \qquad e = \frac{1}{h\sqrt{2}} \qquad (13)$$

O erro comum ou médio absoluto N se obtem asim:

$$N = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\; e^{-(h\Delta)^2}\;\Delta\, d\Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}}\; e^{-(h\Delta)^2}\; d\Delta^2 =$$

$$= \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\; e^{-(h\Delta)^2}\; d(h\Delta)^2 = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}\; e^{-(h\Delta)^2}$$

e portanto

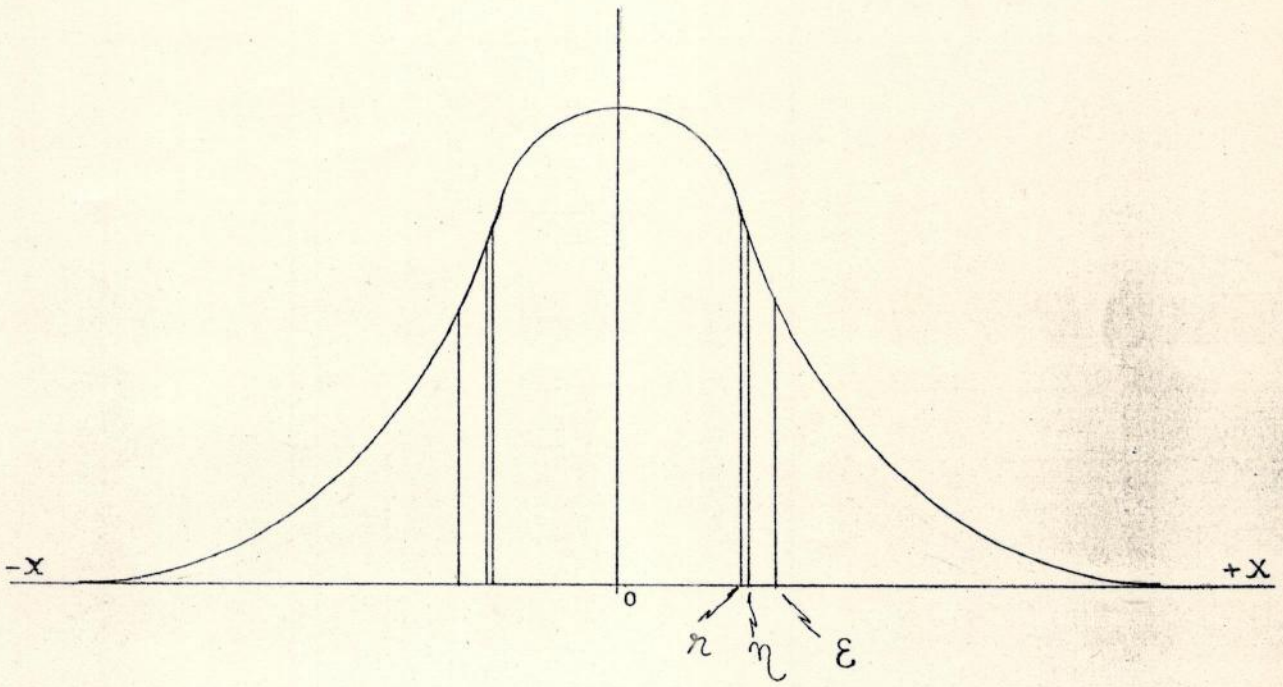
$$N = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} \qquad (14)$$

O erro provável é a linha divisória entre um número igual de erros grandes e pequenos considerando seus valores absolutos. Com outras palavras, em qualquer distribuição de erros, há uma chance igual de que um erro seja maior ou menor do que um erro provável. Por isso, o erro provável é dado pela condição.

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^{r} e^{-(h\Delta)^2}\; d\Delta = \frac{1}{2}$$

ou substituindo nF=h

$$\int_0^{h2} e^{-x^2}\, dn = \frac{\sqrt{\pi}}{4} = 0{,}4431$$



Dos valores tabelados da integral, se obtem hr = = 0,477 portanto,

$$r = \frac{0{,}477}{h} \qquad (15)$$

Resumindo:

Erro médio $\epsilon = \dfrac{1}{h\sqrt{2}} = 1{,}2533\ N$

Erro comum $N = \dfrac{1}{h\sqrt{\pi}} = 0{,}7979\,\epsilon$

Erro provável $r = \dfrac{0{,}477}{1} = 0{,}8453\ N = 0{,}6745\,\epsilon$

A tabela 1 relaciona a probabilidade P para que um erro seja menor do que t vezes o erro provável.

A tabela 2 relaciona a probabilidade P de erros den

tro de certos limites, e a probabilidade é chance de um erro exceder, certo limite, tudo com relação ao erro provável.

VER TABELAS 1 e 2 NAS PÁGINAS SEGUINTES.

MÉDIA ARITMÉTICA; EQUAÇÕES DE CONDIÇÃO, RESIDUAIS

Aproximamos o princípio e o método dos mínimos quadrados considerando a média aritmética de séries homogêneas de observações.

Seja uma série de M valores observados,

$$n \ , \ n_2 \ , \ n_3 \ \ldots\ldots \ n$$

de uma quantidade desconhecida x, todas feitas nas mesmas condições. Podemos dizer que temos uma série de equações observacionais ou equações de condição.

$$x = n_1$$

$$x = n_2$$

$$-$$

$$-$$

$$-$$

$$x = n_m$$

Para cada valor arbitrado para x, podemos formar os assim chamados "residuais" v (chamados também "Observados me-

TABELA (1)

PROBABILIDADE DO ERRO SER t VEZES MENOR DO QUE O ERRO PROVÁVEL

t	P
0.0	0.000
0.1	0.054
0.2	0.107
0.3	0.160
0.4	0.213
0.5	0.264
0.6	0.314
0.7	0.363
0.8	0.411
0.9	0.456
1.0	0.500
1.1	0.541
1.2	0.587
1.3	0.619
1.4	0.655
1.5	0.688
1.6	0.719
1.7	0.748
1.8	0.775
1.9	0.800
2.0	0.823
2.2	0.862
2.4	0.895
2.6	0.921
2.8	0.941
3.0	0.957
3.5	0.982
4.0	0.9930
5.0	0.99926
6.0	0.999948
7.0	0.9999977

TABELA (2)

LIMITES	P	ERRO MAIOR DO QUE	P	CHANCE, UMA EM:
0-0.5r	0.264	r	0.600	2
0-r	0.500	2r	0.177	6
r-2r	0.323	3r	0.043	23
2r-3r	0.134	4r	0.007	143
3r-4r	0.036	5r	0.00074	1.350
4r-5r	0.006	6r	0.000052	19.230
5r-	0.001			

OBS.: Probabilidades e chances em relação ao Erro Provável.

nos computados" ou simplesmente O-C).

$$V_1 = n_1 - x$$

$$V_2 = n_2 - x$$

-

-

-

$$v_m = n_m - x$$

Evidentemente a soma algébrica dos residuais pode ser escrita:

$$[v] = [n] - mx \qquad (16)$$

De especial interesse é a média aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma n}{m} \qquad (17)$$

e para qual

$$[v] = 0$$

Em muitos problemas envolvendo observação a média aritmética é o valor preferido e é considerado o mais provável. Esta preferência é relacionada com uma propriedade simples dos residuais. Se formamos a soma dos quadrados residuais, achamos:

$$[v^2] = [(n - x)^2] = [n^2] - 2x\,[n] + mx^2$$

A soma V^2 depende da escolha do x mas tem um valor extremo quando $\frac{d\,[v^2]}{dn} = -2\,[n] + 2\,mn = 0$

ou seja quando $\bar{n} = \frac{[n]}{m}$ (17)

observe-se que $\dfrac{d^2\left[v^2\right]}{dx^2} = 2m$

portanto a média aritmética corresponde ao valor mínimo da soma dos quadrados dos residuais.

ERRO DA SOMA DE OBSERVAÇÕES, DE UMA OBSERVAÇÃO E DA MÉDIA ARITMÉTICA

Sejam m observações: $n_1, n_2 \ldots n_m$ e a incógnita x. Qual a exatidão da soma N dessas observações? Sejam os erros individuais.

$\triangle 1, \triangle 2 \ldots\ldots \triangle m$

então o erro $\triangle N$ de N é $\triangle N = \triangle 1 + \triangle 2 \ldots\ldots + \triangle n$.

de onde deduzimos que $\triangle^2 N = \left[\triangle^2\right]$

considerando que para um número suficientemente grande de observações, os produtos $\triangle 1 \triangle 2$, $\triangle 1 \triangle 3 \ldots$ são desprezíveis.

Introduzindo a noção do erro médio ϵ temos

$\left[\triangle^2\right] = m\epsilon^2$ e $\triangle^2_N$ pode ser aproximadamente E^2 onde E e o erro médio da soma N, suposição justificada na maioria dos casos.

Então,

$$E^2 = m\epsilon^2 \quad \text{ou}$$

$$E = \epsilon\sqrt{m} \qquad (20)$$

Para a média aritmética dos m valores ou seja, para $\frac{N}{m}$ o erro é reduzido m vezes. Portanto o erro médio ϵ_0 da média aritmética é

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} \qquad (21)$$

A média aritmética de m valores, pode ser considerada m vezes mais válida do que uma observação. O erro médio de uma observação, pode ser considerado como erro médio de peso unitário. Então o erro médio da média aritmética é obtido do erro médio do peso m, dividindo o último pela raiz quadrada do peso m. Reciprocamente, o peso m é igual ao quadrado do erro médio de peso unitário dividido pelo quadrado do erro médio da média aritmética. A mesma relação existe, naturalmente, para os erros prováveis.

A próxima questão é: Como se pode deduzir ϵ e portanto ϵ_0 dos residuais v da média aritmética?

O procedimento é o seguinte:

Para cada observação, o residual v da média aritmética é ligado ao erro Δ pela relação:

$$\Delta = v - \Delta_0$$

onde Δ_0 é o erro da média aritmética. Deve ser repetido que somente os residuais podem ser avaliados e não os erros contudo que a diferença pode ser mínima se houver bastante observações e conseqüentemente, um valor pequeno para Δ_0.

Elevando ao quadrado

$$\Delta^2 = v^2 + \Delta_0^2 - 2v\,\Delta_0$$

e a soma dos quadrados dos residuais é

$$\left[\Delta^2\right] = \left[v^2\right] + m\,\Delta_0^2 \qquad (22)$$

pois o somatório do terceiro termo é evidentemente zero.

Agora suponhamos que Δ_0 é igual ao erro médio ϵ_0 da média aritmética, o que na maioria dos casos é verdadeiro. Então teremos:

$$\left[\Delta^2\right] = \left[v^2\right] + m\,\epsilon_0^2 \qquad (23)$$

mas $\left[\Delta^2\right] = m\,\epsilon^2$ e $\epsilon_0^2 = \dfrac{\epsilon^2}{m}$ de onde $\epsilon^2\,(m-1) =$

$$= \left[v^2\right] \quad \text{ou} \quad \epsilon = \sqrt{\frac{\left[v^2\right]}{m-1}} \qquad (24)$$

que a fórmula do erro médio de cada observação de uma série.

O erro provável é

$$V = 0{,}6745\sqrt{\frac{\left[v^2\right]}{m-1}} \qquad (25)$$

A média aritmética de m observações tem o peso = m.

O erro médio e o erro provável da média aritmética é dada por:

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{\sqrt{m}} = \sqrt{\frac{\left[v^2\right]}{m\,(m-1)}} \qquad (26)$$

$$r_0 = \frac{r}{\sqrt{m}} = 0{,}6745\sqrt{\frac{\left[v^2\right]}{m\,(m-1)}} \qquad (27)$$

ERRO DE SÉRIE DE OBSERVAÇÕES

Temos um método simples e rápido para calcular o erro médio ou provável de uma série de um pequeno número de m observações de uma quantidade. Mostrou-se que o erro médio ϵ é em relação ao intervalo R isto é, a diferença entre o maior e menor valor pela fórmula:

$$\epsilon = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{(m + 1) \quad (m + 2)}{3m \ (m - 1)}}$$

e portanto o erro da média aritmética,

$$\epsilon = \frac{R}{2m} \sqrt{\frac{(m + 1) \quad (m + 2)}{3 \quad (m - 1)}}$$

Estas fórmulas dão uma boa aproximação quando m é pequeno, digamos não mais de 6.

A tabela 3 mostra o fator pelo qual deve ser multiplicado o intervalo R para obter o valor da média e do erro provável para séries de 3, 4, 5 e 6 observações.

TABELA (3)

m	3	4	5	6
$\bar{\epsilon}$ /R	0.53	0.45	0.41	0.38
ϵ /R	0.30	0.23	0.18	0.16
$\bar{\epsilon}$ /R	0.36	0.30	0.28	0.26
ϵ /R	0.20	0.15	0.12	0.11

OBS.: Relação de Erro Médio e Provável no intervalo

O erro provável (ou médio) tem ele mesmo um erro provável (ou médio) uma vez que seu valor foi computado com um número limitado de observações. Pode se demonstrar que a razão do erro provável para o erro provável é

$$\frac{0,477}{\sqrt{n}} . \qquad (30)$$

Por exemplo, uma determinação de paralaxe baseada em 25 observações, tem um erro provável de 0"010 que por sua vez tem um erro provável de 0",001.

COMBINAÇÃO DE ERROS

Se uma quantidade é afetada por diversas fontes de erro, então se pode demonstrar que:

$$\epsilon_t^2 = \epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \ldots\ldots \epsilon_m^2 \qquad (30)$$

onde ϵ_t é o erro médio total e ϵ_1, ϵ_2 ..... ϵ_m são os erros médios devido as diversas fontes de erro. Por exemplo, se $u = x + y + z$ o erro médio u está ligado aos erros médios de x, y, z pela relação:

$$\epsilon_u^2 = \epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2 \qquad (32)$$

Do mesmo modo da relação

$$u = ax + by + cz \quad \text{teremos}$$

$$\epsilon_u^2 = (a\,\epsilon_x)^2 + (b\,\epsilon_y)^2 + (c\,\epsilon_z)^2. \qquad (33)$$

Relações correspondentes existem naturalmente para os erros prováveis.

PESO DAS OBSERVAÇÕES

Peso de uma medição é o quadrado R^2 de sua "precisão R".

A noção de peso fica mais clara apreciando a situação seguinte: Para determinar uma grandeza Z, são feitas uma série de medições de precisão R e uma segunda série de precisão K^1. Supondo que sabemos apenas um resultado m da primeira série e um resultado m^1 da segunda série. Que valor podemos atribuir a Z ? O resultado será, evidentemente da forma:

$$Z = \frac{h\,m + h'\,m'}{h + h'}$$ dizendo então que h e h' são os pesos atribuídos às duas medições. Sendo x e y os erros com relação a m e m', o erro de Z será $\dfrac{h\,x + h'\,y'}{h + h'}$.

Não podemos procurar tornar mínimo o valor provável desta expressão, pois ele será provavelmente zero, já que x e

Y são considerados com seus sinais. Procuraremos então render mínimo seu quadrado, isto é:

$$M\left(\frac{h\,x + h'\,y}{h + h'}\right) \cong \frac{h^2\,M\,(x)^2 + h'^2\,M\,(y)^2}{(h + h')^2}$$

pois o valor médio de xy é nulo.

Por outro lado, sabemos que

$$M\,(x)^2 = \frac{1}{2K^2} \quad e \quad M\,(y)^2 = \frac{1}{2K'^2}$$

e deve se procurar o mínimo de:

$$\frac{h^2}{R^2} = \frac{h'^2}{K'^2} \qquad \frac{1}{(h + h')^2}$$

Fazendo $h = x\,(h + h')$

$h' = (1 - x)\,(h + h')$

a expressão será

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{(1 - x)^2}{K'^2}$$ e anulando sua derivada em x se obtem:

$$\frac{x}{R^2} - \frac{1 - x}{K^2} = 0$$

ou seja

$$\frac{h}{K^2} = \frac{h'}{K'^2}$$

Os pesos h e h' são proporcionais a R^2 e R'^2 e o valor de Z será:

$$Z = \frac{K^2 m + K'^2 m'}{X^2 + K'^2}$$

Quanto mais observações pertencerem à mesma série tendo portanto a mesma precisão, somos levados a considerar a média aritmética (aliás Gauss partiu da média aritmética para sua lei dos erros).

De modo mais geral, considerando nas observações de precisão K_1 cujo resultado médio é X_1, N_2 observações de precisão K_2 com resultado médio X_2, etc, o valor Z será:

$$Z = \frac{n_1 K_1^2 X_1 + \ldots\ldots n_p K_p^2 X_p}{N_1 K_1^2 + \ldots n_p K_p^2}$$

isto é, o peso de um conjunto de observações se obtem multiplicando o peso das mesmas pelo seu número. Conclui-se que a precisão da média de diversas observações se obtem multiplicando a precisão de uma observação única pela raiz quadrada do número de observações. De fato: seja $x = x_1 + x_2 + \ldots\ldots x_n$ e K as precisões relativas aos erros n_1, $n_2 \ldots n_n$ e de sua soma X.

Temos então $\frac{1}{K^2} = \frac{1}{K_1^2} + \ldots\ldots \frac{1}{K_1^2}$ mas se considerarmos $K_1 = K_2 = \ldots K_n$ teremos logo

$$K = \frac{K_1}{\sqrt{n}}$$

A precisão relativa a $\frac{x}{n}$ e n vezes maior do que a precisão relativa a x, pois a um erro cometido com relação a x, corresponde um erro n vezes menor para $\frac{X}{n}$.

A precisão do erro da média é:

$$\frac{x}{} = \frac{x_1 + x_2 \ldots + x_n}{n} \quad \text{portanto} \quad nk = k_1 \sqrt{n}.$$

Assim, para a média de 100 medições, se obtem uma precisão 10 vezes maior que para uma única medida.

PARTE III

O MÉTODO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

APLICADO À TEORIA DOS ERROS

A impossibilidade prática de se obter o "valor exato" de qualquer grandeza física que se queira "medir", nos leva fatalmente à realização de uma série mais ou menos numerosa de medições, todas envolvendo um erro admitido a priori. Somos então levados a procurar, não o valor exato, mas a maior probabilidade de ter medições mais próximas do valor exato ou, com outras palavras, o mínimo erro provável.

Se a aproximação das medições é geral em qualquer medida física mesmo quando se dispõe de instrumental de grande precisão e quando as grandezas a medir estão ao nosso alcance obrigando-nos com isso à pesquisa acurada dos erros, o problema adquire maior relevo em astrometria, devido à ordem de grandeza dos elementos considerados.

A probabilidade para que o resultado de uma medição seja compreendida entre os valores u e du é, de acordo com o princípio da probabilidade composta, da forma:

$$(1) \quad P\,du = C\,e^{-K^2 \sum (u - u_i)^2}\,du$$

O valor máximo da probabilidade P, será portanto aquele que tornar mínimo o da expressão

$$(2) \quad S = \sum_{1}^{n}{}_{i}\,(u - u_i)^2$$

de onde resultará a condição

$$(3) \quad \frac{d\,S}{d\,u} = 2 \sum (u - u_i) = 0$$

mas

$$\sum (u - u_i) = n\,u - \sum u_i$$

O valor mais provável do u resultará pois, da expressão:

$$n\,u = \sum u_i \quad \text{ou} \quad u = \frac{\sum_{1}^{n}{}_{i}\,u_i}{n}$$

ou seja, justamente a média aritmética das determinações, consideradas evidentemente, todas com o mesmo "peso".

Nesta análise preliminar da procura do valor mais provável e do erro mínimo, a expressão (2) já contem o princípio dos mínimos quadrados.

Podemos agora passar a examinar o problema mais geral seguinte:

Sendo uma grandeza

$$Y = f\ (a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots\ldots\ a_m)$$

e conhecendo a seu respeito uma série de medições

$$y_1,\ y_2,\ \ldots\ldots\ y_n\ ;\quad (n > m)$$

quais serão os valores mais prováveis de

$$a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_m\ ?$$

As relações obtidas das medições mencionadas, são da forma

$$y_1 = f_1\ (a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_m)$$

$$y_2 = f_2\ (a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_m)$$

$$-$$

$$-$$

$$-$$

$$y_n = f_n\ (a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots\ a_m)$$

Se as medições y_i fossem realmente exatas, as equações obtidas seriam compatíveis, mesmo que seu número fôsse superior ao das incógnitas.

Na realidade, os valores y_i sendo medidas aproximadas, para tornar o sistema compatível é necessário agregar aos resultados y_1, as correções $z_1,\ z_2,\ \ldots\ldots\ z_m$, de tal forma, que as equações

$$f_1 = y_1 + z_1$$

$$f_2 = y_2 + z_2$$

$$-$$

$$-$$

$$f_n = y_n + z_n$$

sejam compatíveis em $a_1, a_2, \ldots\ldots a_m$.

A probabilidade para que os erros das medidas sejam exatamente as correções $z_1, z_2, \ldots\ldots z_n$, é proporcional, como vimos a: e^{-s}

onde $S = \Sigma z_i^2$

admitindo sempre o mesmo peso para as n medições.

Mais uma vez observamos que a probabilidade será máxima quando S será mínimo.

Os valores mais prováveis das correções z ou dos parâmetros a serão obtidos tornando nulas as derivadas parciais de s em função dos a.

$$\frac{\partial s}{\partial a_1} = 0 \qquad \frac{\partial s}{\partial a_2} = 0 \qquad \frac{\partial s}{\partial a_m} = 0$$

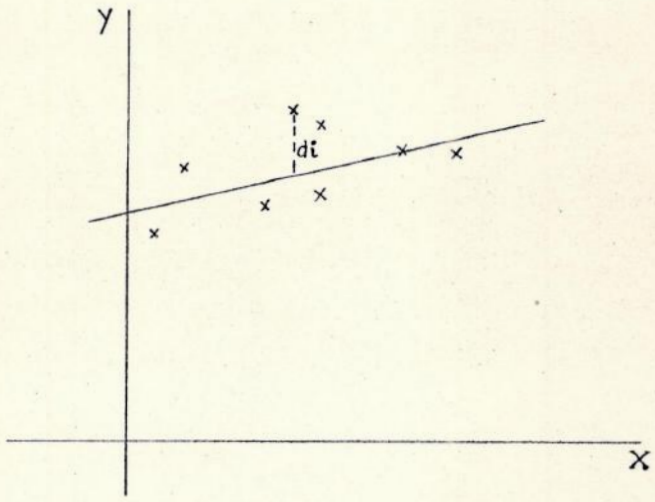
As equações assim obtidas são um número sempre igual ao das incógnitas podendo assim, nos fornecer diretamente os valores dos a.

Concluímos portanto que o sistema de valores adotados para os parâmetros a como mais provável, é aquele para o qual a soma dos quadrados dos erros das observações diretas (eventualmente multiplicados pelos pesos das observações) for mínimo; de onde, o nome de método dos mínimos quadrados.

Antes de prosseguirmos com a análise do caso geral

de n equações relativas a m parâmetros, vamos analisar um exemplo mais simples envolvendo uma série de valores de tendência linear com dois parâmetros a_1 e a_2.

Suponhamos uma série de valores observados e dispostos aproximadamente como na figura.



Se procurarmos ajustar os pontos obtidos à uma linha reta a fim de estabelecer a tendência mais provável, o problema é achar a equação mais provável para a reta desejada.

Sua equação será evidentemente de forma:

$Y = a_1 + a_2 X$ mas, para cada valor de Y teremos uma correção Z para tornar o sistema compatível.

Deste modo: $Y_i + d_i = a_1 + a_2 x_i$ ou

$$d_i = a_1 + a_2 x_i - y_i$$

$$d_i^2 = (a_1 + a_2 x_i - y_i)^2 \quad \text{e}$$

conseqüentemente:

$$f\ (a_1\ a_2) = \Sigma\ d^2 = \Sigma_1^n\ i\ \ (a_1 + a_2\ x_i - y_i)^2$$

sendo este justamente o valor que desejamos tornar mínimo.

Teremos então:

$$\frac{\partial\ f}{\partial\ a_1} = 2\ \Sigma\ (a_1 + a_2\ x_i - y_i) = 0$$

$$\frac{\partial\ f}{\partial\ a_2} = 2\ \Sigma\ x_i\ (a_1 + a_2\ x_i - y_i) = 0$$

portanto,

$\Sigma\ a_1 + a_2\ \Sigma\ x_i - \Sigma\ y_i = 0$ ($\Sigma\ a_1 = na_1$ por ser a_1 constante)

$$a_1\ \Sigma\ x_i + a_2\ \Sigma\ x_i^2 - \Sigma\ x_i\ y_i = 0$$

OU

$$n\ a_1 + a_2\ \Sigma\ x_i = \Sigma\ y_i$$

$$a_1\ \Sigma\ x_i + a^2\ \Sigma\ x_i^2 = \Sigma\ x_i\ y_i$$

de onde

$$a_1 = + \frac{\begin{vmatrix} \Sigma\ y_i; & \Sigma x_i \\ \Sigma\ x_i\ y_i; & \Sigma x_i^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n\ ; & \Sigma\ x_i \\ \Sigma\ x_i\ ; & \Sigma\ x_i^2 \end{vmatrix}} \quad e\ a_2 = + \frac{\begin{vmatrix} n\ ; & \Sigma\ y_i \\ \Sigma\ x_i; & \Sigma x_i\ y_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n\ ; & \Sigma\ x_i \\ \Sigma\ x_i; & \Sigma\ x_i^2 \end{vmatrix}}$$

O exemplo considerado, nos permite agora acompanhar melhor o tratamento do caso mais geral:

Seja uma série de medições destinadas a evidenciar a lei que nos permita a determinar um valor Y em decorrencia de outro valor conhecido X. A lei procurada aparecerá como resultado de m determinações Y_1 ..... Y_m dorrespondente a m valores de X_i ..... X_m da variável independente. Marcando um sistema de eixos retangulares X e Y, os pontos P_1 ..... P_m, se as medições efetuadas não tivessem qualquer erro, ficariam situados sobre uma curva Y = f (X) representativa do fenômeno.

Mesmo nesta hipótese puramente teórica, a determinação analítica de f (X) seria em grande parte arbitrária , resultando no problema geral da interpolação que aparece a cada instante nas ciências experimentais. A indeterminação porém cessa se decidirmos escolher f (X) entre as funções cuja expressão analítica seja convenientemente definida, como por exemplo, a parábola de grau n resultante do polinômio.

$$a_0 + a_1 x_1 + \ldots\ldots a_{m-1} x^{m-1}$$

Os coeficientes a_i constituirão as m incógnitas de um sistema de m equações lineares que certamente admitirá solução única se os X_i forem todos diferentes.

Podemos chamar o problema assim definido como interpolação parabólica e é a mais comumente usada, contudo que em certos casos podemos recorrer a interpolação inversa:

$$\frac{1}{X} = f\ (x)$$

ou semi-logarítimica: $\log Y = f\ (x)$ etc.

A forma de polinômio inteiro, escolhida para f(x), é a mais natural para os fenômenos físicos contínuos e permite o desenvolvimento de f(x) numa série de Mac-Laurin, limitada a um número conveniente de termos.

Efetuadas as n medições, os valores Y_i, X_i, X_i^2 ... X_i^m são conhecidos de modo que resulta um sistema linear de n equações de 1º grau com m incógnitas e cuja solução, pelo método dos mínimos quadrados, poderá ser acompanhado facilmente, considerando o caso de três incógnitas. Para simplificar a apresentação será aproveitada a simbologia utilizada por Gauss em casos semelhantes.

Seja então o sistema:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

$$-$$

$$-$$

$$-$$

$$a_nx + b_ny + c_nz + d_n = 0$$

Como nos propusemos, devemos achar o valor mínimo da soma S.

$$S = (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z + d_2)^2 + \ldots\ldots$$

cujos termos seriam, um por um, nulos se o sistema dado fosse compatível.

A condição para que S seja mínimo será dada pela solução das três equações:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0 \; ; \quad \frac{\partial s}{\partial y} = 0 \; ; \quad \frac{\partial s}{\partial z} = 0$$

Para explicitar facilmente as equações acima, utilizaremos as convenções:

$$[aa] = \Sigma a_i^2 \; ; \quad [bb] = \Sigma b_i^2 \; ; \quad [cc] = \Sigma c_i^2$$

$$[ab] = \Sigma a_i b_i \; ; \quad [ac] = \Sigma a_i c_i \; ; \quad [ad] = \Sigma a_i d_i \qquad \text{etc.}$$

Teremos então:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial x} = a_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + a_2 (a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2$$

$$+ \ldots\ldots = [aa]\, x + [ab]\, y + [ac]\, z + [ad] = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial y} = b_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= [ab]\, x + [bb]\, y + [bc]\, z + [bd] = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial s}{\partial z} = c_1 (a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= [ac]\, x + [bc]\, y + [cc]\, z + [cd] = 0 \qquad (3)$$

As equações (1), (2) e (3) são as equações normais do sistema dado.

Da equação (1) resulta:

$$X = - \frac{[ab]}{[aa]}\, y - \frac{[ac]}{[aa]}\, z - \frac{[ad]}{[aa]}$$

Substituindo o valor de $\underline{x}$ nas outras duas equações e chamando (de acordo com Gauss) os coeficientes resultantes de y, z e os termos livres de:

$$[bb.1] = [bb] - \frac{[ab]}{[aa]} [ab]$$

$$[bc.1] = [bc] - \frac{[ac]}{[aa]} [ab]$$

$$[bd.1] = [bd] - \frac{[ad]}{[aa]} [ab]$$

$$[cc.1] = [cc] - \frac{[ac]}{[aa]} [ac]$$

$$[cd.1] = [cd] - \frac{[ad]}{[aa]} [ac]$$

obteremos o sistema:

$$[bb.1]\, y + [bc.1]\, z + [bd.1] = 0 \qquad (4)$$

$$[bc.1]\, y + [cc.1]\, z + [cd.1] = 0 \qquad (5)$$

Obtivemos pois um sistema linear de duas equações cuja solução é:

$$Y = - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} z - \frac{[bd.1]}{[bb.1]}$$

que substituído em (5) nos dá:

$$\left([cc.1] - \frac{[bc.1]}{[bb.1]} [bc.1]\right) z + \left([cd.1] - \frac{[bd.1]}{[bb.1]} [bc.1]\right) = 0$$

ou adotando uma anotação simbólica semelhante à anterior:

$$[cc.2]\ z + [cd.2] = 0$$

$$Z = -\frac{[cd.2]}{[cc.2]}$$ o que permite a solução completa do sistema.

Obtidos os resultados pelo método exposto, aparece uma pergunta de capital importância: Qual a confiabilidade desses resultados? Consideraremos o caso mais simples da média aritmética, de uma série de medições executadas em condições idênticas. Sejam $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ os resultados das medições, A o valor exato desconhecido e M a média aritmética:

$$M = \frac{a_1 + a_2 \ldots\ldots + a_n}{n},$$

os erros reais $e_1, e_2 \ldots\ldots e_n$ cometidos em cada medição serão $A - a_1$; $A - a_2 \ldots\ldots A - a_n$, mas conhecemos apenas seus valores eproximados $M - a_1$; $M - a_2 \ldots\ldots$ que nos dão, quanto à precisão, o valor K, tal que:

$$\frac{1}{2\,K'^2} = \frac{(M - a_1)^2 + \ldots\ldots + (M - a_n)^2}{n}$$

Substituindo os erros verdadeiros (que evidentemente não podemos conhecer) $e_1, e_2 \ldots\ldots e_n$ pelos valores aproximados, teremos para K' também um valor aproximado. Vejamos seu grau de precisão.

Seja E o erro cometido substituindo A por M (o valor exato, pela média aritmética), temos então:

$E = A - M = e_1 - (M - a_1)$ e da mesma forma

$E = e_2 - (M - a_2)$ e conseqüentemente

$$\frac{1_2}{2\,K'^2} = \frac{(e_1 - E)^2 + \ldots\ldots (e_n - E)^2}{n}$$

desenvolvendo a expressão acima e considerando

$$\frac{\Sigma\, e_i^{\,2}}{n} = \frac{1}{2\,K'^2}$$

teremos:

$$\frac{1}{2\,K'^2} = \frac{1}{2\,K'^2} + E^2 - \frac{2\,E}{n}\,\Sigma\, e_i$$

mas

$\Sigma\, e_i = n\,E + n\,M - \Sigma\, a_i = n\,E$ temos então:

$$\frac{1}{2\,K'^2} = \frac{1}{2\,K^2} - E^2$$

O valor de K' aparece pois excessivo, ou seja, a adoção de K' como índice de precisão, seria atribuir às medições um grau de exatidão que elas não têm. O valor de K' poderá ser corrigido calculando uma aproximação de E^2.

Se $E = \dfrac{\Sigma\, e_i}{n}$ teremos:

$$E^2 = \frac{1}{n^2}\,\Sigma\, e_i^{\,2} + \frac{2}{n^2}\,\Sigma\, e_i e_j$$

Considerando a distribuição, equilibrada quanto aos erros em torno de zero, o termo $\Sigma\, e_i e_j$ é desprezível e assim

teremos:

$$E^2 = \frac{1}{n} \frac{\Sigma e_i^2}{n} = \frac{1}{n} \frac{1}{2 K^2}$$

de onde

$$\frac{1}{2 K^2} \quad 1 - \frac{1}{n-} = \frac{1}{n} \Sigma (M - a_i)^2$$

portanto

$$\frac{1}{2 K^2} = \frac{\Sigma (M - a_i)^2}{n - 1}$$

A análise não é rigorosamente exata porque $a_i a_j$ jamais pode ser nulo, mas seguindo o precedente aberto por Gauss, os observadores a consideram válida na prática.

O valor admitido para $\frac{1}{2 K^2}$ nos leva a uma estimativa do E^2, ou seja, do erro esperado:

$$E^2 = \frac{1}{n (n - 1)} \quad (M - a_i)^2$$

De maneira análoga se encontra a medida de precisão e o erro esperado da solução das equações normais tratadas antes.

As noções expostas são suficientes para aplicar o método dos mínimos quadrados quando necessário. O método, não isento de críticas, sobrevive com bastante utilidade. Evidentemente, não podemos pretender obter bons resultados onde houver medições grosseiramente erradas. O método é porém particularmente vantajoso quando se deseja comprovar a validade de uma teoria científica, ou quando se deseja calcular o valor de uma constante fundamental.

PARTE IV

MÉTODO DAS ALTURAS IGUAIS, UMA APLICAÇÃO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

A OBSERVAÇÃO DE ALTURAS IGUAIS

O método das alturas iguais, consiste, em sua parte prática, em observar o céu com uma luneta apontada a uma distância zenital z constante, segundo um azimute a que pode variar. Suponhamos, inicialmente, que $z < 90^{\circ} - \varphi$, sendo φ a latitude da luneta.

Para que uma estrêla de declinação δ cruze o campo, é necessário que δ esteja compreendido entre $(\varphi - z)$ e $(\varphi + z)$. Uma estrêla cuja declinação esteja no interior destes limites cruza duas vezes o campo, em dois azimutes simétricos relativamente ao meridiano. Os azimutes são facilmente calculáveis pela resolução do triângulo de posição, construído sobre a esfera celeste pelos pontos A, P, Z, respectivamente direção da estrêla, do polo elevado e do zenite, cujos três lados são conhecidos (fig. 1). O pequeno círculo de polo Z e raio esférico z é chamado almicantarado.

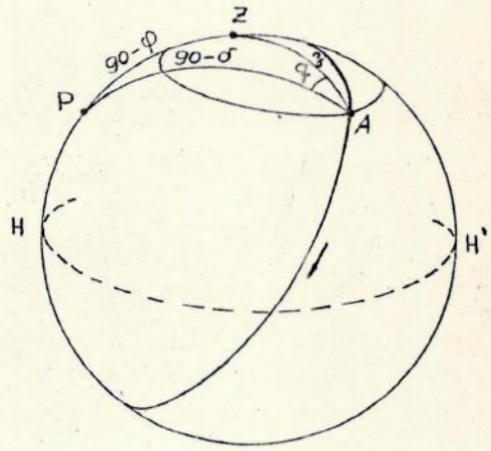
No campo da luneta o círculo determinado pelo movimento diurno do astro, o qual passa evidentemente por A, projeta-se segundo uma reta.

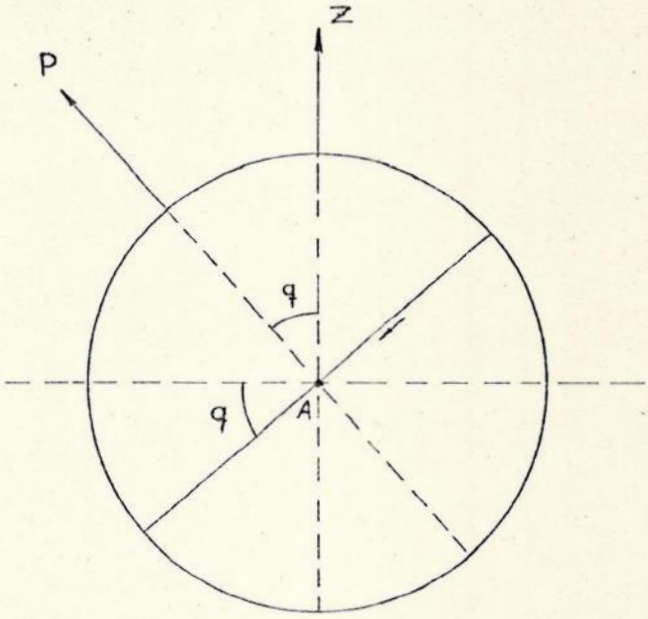
O almicantarado aparece na figura 2 como uma linha horizontal; o paralelo da estrêla é a linha oblíqua

que faz com o almicantarado o ângulo q, o qual é o ângulo em A do triângulo esférico ZPA (ângulo no astro).

É interessante conhecer a rapidez da variação angular de A, ela é de $2\pi \cos \delta$ radianos por dia sideral.

Fig. I e Fig. II





Analisemos alguns casos particulares. Quando δ é igual a $(\varphi - z)$ ou $(\varphi + z)$, $q = 0$ ou 180°, a probabilidade de ocorrer uma passagem na distância zenital z torna-se nula.

Quando o ângulo em q é reto, as estrelas passam em máxima digressão; δ é dado então por:

$$\text{sen } \delta = \text{sen } \varphi \text{ sec. } \delta$$

e os azimutes correspondentes são dados por:

$$\cos a = - t_g z \, t_g \varphi$$

Se $z > 90^o - \varphi$, o polo é interior ao almicantarado. As estrelas observáveis têm suas declinações compreendidas entre $\varphi - z$ e $180^o - \varphi - z$, q neste caso é menor que 90°.

OS DADOS OBSERVACIONAIS E AS INCÓGNITAS

O instrumento de observação das alturas iguais será, no trabalho que se segue, o Astrolábio Impessoal Danjon. Ele permite relacionar o instante das passagens dos astros (usualmente estrelas) com uma distância zenital instrumental constante z, da qual conhece-se apenas o valor aproximado z^o.

z é, portanto, a primeira incógnita a ser determinada pela observação astronômica.

O instante da passagem é o único dado experimental fornecido por observação. Seja E a leitura do relógio regulado em tempo sideral, T o tempo sideral local verdadeiro no mesmo instante, toma-se como incógnita relativamente ao instante de observação, a quantidade.

$$C = T - E$$

chamada correção do relógio. A variação de C durante a observação será negligenciada. Após a determinação de C, é obtido o tempo sideral local verdadeiro, em seguida o tempo sideral local médio T_m, e então o tempo sideral médio em Greenmich $T_{mG} = T_m + L$ (onde L é a longitude, suposta conhecida). Por fim, através de formulários encontráveis nas Efemérides, é achado TUO (tempo universal). Esta última parte do cálculo não será levada a cabo aqui, pois foge à nossa proposição de tão somente ilustrar a exposição do método dos mínimos quadrados, limitar-nos-emos, portanto, a determinar C.

O instante de observação E é evidentemente função de C, de z, da latitude φ e das coordenadas equatoriais aparentes do astro observado, α e δ.

O ângulo horário H do astro é dado por:

$$H = T - \alpha = C + E - \alpha$$

então

$$\cos z = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos(C + E - \alpha)$$

É fácil ver que α e δ não podem ser encaradas como incógnitas, pois, qualquer que seja o número n de passagens observadas ao longo de um certo grupo de estrelas selecionadas (mesmo se observássemos as duas passagens a Leste e a Oeste), o número de incógnitas seria maior que n; α e δ, portanto, são encaradas como constantes e extrairemos seu valor do FK4. Também φ é admitido constante conhecido, assim fazendo será obtida uma precisão maior sobre a medida de C. Indicamos por último, que os problemas relacionados à refração, são deixados de lado no desenvolvimento que se segue.

Sendo:

$$\cos z = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(C + E - \alpha) \qquad (1)$$

Onde:

Z = distância zenital instrumental

C = correção do relógio

φ = latitude do lugar

α = ascensão reta da estrela

δ = declinação da estrela

E = leitura do relógio no instante da passagem

podemos através dos valores de α, δ e E calcular pelos métodos dos mínimos quadrados os valores mais prováveis de Z e C.

A equação (1) em que substituimos $E-\alpha=\beta$ e dividimos por cos z passa a ser:

$$(2) \qquad 1 = \frac{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta}{\cos z} + \frac{\cos\varphi\cos\delta\cos C \cos\beta}{\cos z} - \frac{\cos\varphi\cos\delta\operatorname{sen} C \operatorname{sen}\beta}{\cos z}$$

considerando:

$$X = \frac{\cos C}{\cos z} \qquad Y = -\frac{\operatorname{sen} C}{\cos z} \qquad Z = \frac{1}{\cos z}$$

temos uma equação linear em X, Y e Z:

$$\left(\cos\varphi \cos\delta \cos\beta\right)X + \left(\cos\varphi \cos\delta \operatorname{sen}\beta\right)Y + \left(\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\delta\right)Z - 1 = 0$$

para cada valor de φ, δ e β temos uma equação em X, Y, Z que constituirão um sistema de 25 equações de acordo com os dados dos quadros seguintes:

QUADRO (1)

Nº no Fk4	E (TS)	α	δ
3445	$17^h\ 09^m\ 36^s.972$	$18^h\ 08^m\ 10^s.321$	$3^\circ\ 18'\ 46''.360$
1402	$17^h\ 15^m\ 18^s.343$	$15^h\ 18^m\ 4^s.851$	$-40^\circ\ 28'\ 4''.920$
1476	$17^h\ 20^m\ 12^s.005$	$18^h\ 18^m\ 22^s.199$	$3^\circ\ 21'\ 11''.450$
736	$17^h\ 24^m\ 0^s.594$	$19^h\ 33^m\ 39^s.969$	$-24^\circ\ 59'\ 44''.240$
566	$17^h\ 25^m\ 0^s.794$	$15^h\ 18^m\ 37^s.512$	$-36^\circ\ 4'\ 53''.190$
3232	$17^h\ 26^m\ 0^s.685$	$15^h\ 34^m\ 40^s.533$	$-42^\circ\ 24'\ 17''.610$
3565	$17^h\ 28^m\ 48^s.436$	$19^h\ 34^m\ 9^s.343$	$-18^\circ\ 20'\ 37''.400$
1427	$17^h\ 35^m\ 0^s.632$	$16^h\ 19^m\ 32^s.244$	$1^\circ\ 8'\ 42''.370$
577	$17^h\ 36^m\ 30^s.647$	$15^h\ 32^m\ 43^s.474$	$-14^\circ\ 37'\ 27''.130$
3562	$17^h\ 39^m\ 0^s.248$	$19^h\ 32^m\ 21^s.959$	$-10^\circ\ 40'\ 16''.160$
3300	$17^h\ 43^m\ 24^s.993$	$16^h\ 26^m\ 0^s.952$	$0^\circ\ 46'\ 31''.970$
603	$17^h\ 48^m\ 12^s.273$	$16^h\ 11^m\ 43^s.325$	$-\ 3^\circ\ 34'\ 1''.410$
1418	$17^h\ 50^m\ 0^s.036$	$15^h\ 56^m\ 5^s.450$	$-41^\circ\ 36'\ 9''.450$
744	$17^h\ 54^m\ 12^s.355$	$19^h\ 48^m\ 1^s.762$	$-10^\circ\ 53'\ 30''.810$
586	$17^h\ 57^m\ 36^s.582$	$15^h\ 47^m\ 46^s.468$	$-33^\circ\ 28'\ 35''.360$
3602	$18^h\ 00^m\ 36^s.141$	$20^h\ 00^m\ 14^s.384$	$-38^\circ\ 4'\ 50''.530$
1520	$18^h\ 02^m\ 18^s.776$	$19^h\ 51^m\ 48^s.997$	$-42^\circ\ 0'\ 5''.480$

CONTINUAÇÃO DO QUADRO Nº 1

Nº no Fk4	E (TS)	α	δ
3537	$18^h\ 05^m\ 18^s.282$	$19^h\ 11^m\ 11^s.381$	$2^\circ\ 12'\ 25''.840$
599	$18^h\ 08^m\ 48^s.221$	$16^h\ 3^m\ 18^s.108$	$-36^\circ\ 40'\ 4''.520$
735	$18^h\ 12^m\ 0^s.343$	$19^h\ 31^m\ 30^s.714$	$-48^\circ\ 12'\ 32''.550$
3295	$18^h\ 21^m\ 24^s.846$	$16^h\ 20^m\ 37^s.721$	$-39^\circ\ 4'\ 40''.650$
730	$18^h\ 22^m\ 42^s.834$	$19^h\ 22^m\ 58^s.598$	$3^\circ\ 0'\ 48''.980$
3357	$18^h\ 28^m\ 12^s.954$	$17^h\ 2^m\ 57^s.495$	$0^\circ\ 49'\ 30''.120$
665	$18^h\ 31^m\ 48^s.737$	$17^h\ 41^m\ 0^s.041$	$4^\circ\ 35'\ 11''.840$
3301	$18^h\ 45^m\ 36^s.156$	$17^h\ 26^m\ 16^s.470$	$0^\circ\ 22'\ 10''.760$

QUADRO (3)

Nº	$\cos\varphi\cos\delta\cos\beta$	$\cos\varphi\cos\delta\,\mathrm{sen}\,\beta$	$\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\delta$	$\cos\varphi\cos\delta$
1	0,88982	-0,23243	-0,02248	0,91968
2	0,61096	0,34294	0,25260	0,70063
3	0,89018	-0,23092	-0,02282	0,91964
4	0,70486	-0,44755	0,16439	0,83494
5	-0,63414	0,39008	0,22951	0,74451
6	0,60153	0,31761	0,26237	0,68023
7	0,74685	-0,45475	0,12244	0,87441
8	0,87155	0,29786	-0,00777	0,92104
9	0,76448	0,45838	0,09822	0,89137
10	0,79678	-0,42975	0,07204	0,90529
11	0,86911	0,33521	-0,00526	0,92114
12	0,84715	0,35734	0,02421	0,91943
13	0,60551	0,32842	0,25831	0,68886
14	0,79534	-0,43103	0,07351	0,90463
15	0,64836	0,41239	0,21459	0,76840
16	0,62855	-0,36157	0,23995	0,72513
17	0,60792	-0,31480	0,26033	0,68459

CONTINUAÇÃO DO QUADRO (3)

Nº	$\cos\varphi\cos\delta\cos\beta$	$\cos\varphi\cos\delta\,\mathrm{sen}\,\beta$	$\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\delta$	$\cos\varphi\cos\delta$
18	0,88276	-0,26100	-0,01498	0,92054
19	0,63087	0,38471	0,23233	0,73892
20	0,57734	-0,20872	0,29006	0,61391
21	0,61812	0,35964	0,24524	0,71513
22	0,88833	-0,23912	-0,02045	0,91995
23	0,85812	0,33482	-0,00560	0,92113
24	0,89579	0,20193	-0,03111	0,91827
25	0,86657	0,31253	-0,00251	0,92120

OBS.: Os resultados acima nos possibilitam o cálculo dos coeficientes das equações normais conforme demonstrado na página e seguintes.

QUADRO (2)

Nº	E	α	$E-\alpha-\beta$	sen β	cos β	δ	sen δ	cos δ
1	257,40405	272,04300	-14,63895	-0,25273	0,96754	3,31288	0,05779	0,99833
2	258,82657	229,52021	29,30636	0,48948	0,87201	-40,46803	-0,64929	0,76054
3	260,05003	274,59249	-14,54246	-0,25110	0,96796	3,36318	0,05866	0,99828
4	261,00248	293,41654	-32,41406	-0,53603	0,84420	-24,99562	-0,42255	0,90634
5	-261,25331	229,65630	31,59701	0,52394	0,85175	-36,08144	-0,58894	0,80818
6	261,50285	233,66889	27,83396	0,46691	0,84430	-42,40489	-0,67437	0,73840
7	262,20182	293,53891	-31,33709	-0,52007	0,85412	-18,34372	-0,31472	0,94919
8	263,75263	244,88435	18,86828	0,32339	0,94626	1,14510	0,01998	0,99480
9	264,12770	233,18113	30,94657	0,51424	0,85765	-14,62420	-0,25248	0,96760
10	264,75103	293,09150	-28,34047	-0,47471	0,88014	-10,67116	-0,18517	0,98271
11	265,85414	246,50395	19,35019	0,33134	0,94351	0,77546	0,01353	0,99991
12	267,05114	244,18052	22,87062	0,38865	0,92138	- 3,56706	-0,06222	0,99806
13	267,50015	239,02270	28,47745	0,47681	0,87900	-41,60263	-0,66396	0,74777
14	268,55242	297,00734	-28,45492	-0,47647	0,87919	-10,89189	-0,18896	0,98199
15	269,40241	236,94361	32,45880	0,53669	0,84378	-33,47649	-0,55159	0,83411
16	270,15058	300,05993	-29,90935	-0,49863	0,86682	-38,08070	-0,61677	0,78714
17	270,57823	297,95415	-27,37592	-0,45983	0,88801	-42,00152	-0,66915	0,74313

CONTINUAÇÃO DO QUADRO (2)

Nº	E	α	$E-\alpha-\beta$	sen β	co β	δ	sen δ	cos δ
18	271,32616	287,79742	-16,47126	-0,28353	0,95896	2,20718	0,03851	0,99926
19	272,20092	240,82542	31,37550	0,52064	0,85377	-36,66792	-0,59718	0,80211
20	273,00142	292,87797	-19,87654	-0,33999	0,94043	-48,20904	-0,74558	0,66641
21	275,35351	245,15717	30,19634	0,50290	0,86431	-39,07796	-0,63038	0,77629
22	275,67847	290,74414	-15,06567	-0,25993	0,96563	3,01361	0,05257	0,99862
23	277,05397	255,73956	21,31441	0,36349	0,93160	0,82503	0,01440	0,99990
24	277,95306	265,25016	12,70290	0,21990	0,97552	4,58662	0,07997	0,99680
25	281,40064	261,56862	19,83202	0,33926	0,94069	0,36966	0,00645	0,99998

$\varphi = -22^{\circ}\ 53'\ 42''.150$

OBS.: sen φ = -0,38904

cos φ = 0,92122

$$[a\ a] = (\cos\varphi \cos\delta \cos\beta)^2 = 14,38372$$

$$[a\ b] = (\cos\varphi \cos\delta \cos\beta)(\cos\varphi \cos\delta \operatorname{sen}\beta) = 0,78763$$

$$[a\ c] = (\cos\varphi \cos\delta \cos\beta)(\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta) = 1,82881$$

$$[a\ d] = -\cos\varphi \cos\delta \cos\beta = -18,73099$$

$$[b\ b] = (\cos\varphi \cos\delta \operatorname{sen}\beta)^2 = 2,99897$$

$$[b\ c] = (\cos\varphi \cos\delta \operatorname{sen}\beta)(\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta) = 0,24919$$

$$[b\ d] = -(\cos\varphi \cos\delta \operatorname{sen}\beta) = -1,22222$$

$$[c\ c] = (\cos\varphi \cos\delta)^2 = 0,68730$$

$$[c\ d] = -(\cos\varphi \cos\delta) = -2,90712$$

Consequentementes as equações normais são:

$$14,38372\ X + 0,78763\ Y + 1,82881\ Z - 18,73049 = 0$$

$$0,78763\ X + 2,99897\ Y + 0,24919\ Z - 1,22222 = 0$$

$$1,82881\ X + 0,24919\ Y + 0,68730\ Z - 2,90712 = 0$$

Seguindo o método de Gauss teremos então:

$$[bb1] = 2,99897 - \frac{0,78763^2}{14,38372} = 2,95584$$

$$[bc1] = 0,24919 - \frac{1,82881}{14,38372} \times 0,78763 = 0,14905$$

$$[bd1] = -1,22222 + \frac{18,73099}{14,38372} \times 0,78763 = -0,19654$$

$$[cc1] = 0,68730 - \frac{1,82881^2}{14,38372} = 0,45479$$

$$[cd1] = -2,90712 + \frac{18,73099}{14,38372} \times 1,82881 = -0,52558$$

$$[cc2] = 0,45479 - \frac{0,14905^2}{2,95584} = 0,44727$$

$$[cd2] = -0,52558 + \frac{0,19654}{2,95584} \times 0,14905 = -0,51567$$

$Z = +1,15293$ $\cos z = 0,86736$ $z = 29^\circ\ 8469.$

$$\Longrightarrow \quad z = 29^\circ\ 50'\ 48''.840$$

De onde:

$$Y = -\left[\frac{bcl}{bbl}\right] Z \quad - \left[\frac{bdl}{bbl}\right]$$

$$Y = \; - \; \frac{0,14905}{2,95584} \; x \; 1,15793 \; + \frac{0,19654}{2,95584} = 0,00835$$

$$Y = \; - \; \frac{\text{sen } C}{\cos^z} \qquad \text{sen } C = - \; Y \; x \; \cos^z =$$

$$\text{sen } C = -0,00835 \; x \; 0,86736 = -0,00724$$

$$X = - \; \frac{[ab] Y + [ac] Z \quad + [ad]}{[aa]} =$$

$$X = - \; \frac{0,78763 \; x \; 0,00835 \; + \; 1,82881 \; x \; 1,15293 - 18,73099}{14,38372}$$

$$= \; + \; \frac{16,61512}{14,38372} = \; 1,15519$$

$$X = \frac{\cos C}{\cos Z} \qquad \cos C = X \cos Z$$

$$\cos C = 1,15512 \; x \; 0,86736 \cong 0,99997$$

$$\Longrightarrow C \cong - \; 1^m \; 39^s.559$$

Como se pode ver pelo desenvolvimento da página anterior, o método dos mínimos quadrados, apesar de fornecer resultados seguros e precisos, resulta muito trabalho só a quem se atreve ao cálculo manual.

Exatamente por este aspecto, que tornava a resolução do método das alturas iguais impraticável, foram aplicados tradicionalmente métodos gráficos e gráficos - - quadráticos (a cuja exposição nos dispensaremos).

Ultimamente, no entanto, com o advento das facilidades da computação e das pequenas calculadoras de bolso, o método de Gauss torna a ser largamente utilizado e pode mesmo ser considerado como um dos mais eficientes instrumentos de que dispõe o astronomo, ao tratar com grandes quantidades de dados observacionais.

B I B L I O G R A F I A

VAN DE KAMP, Peter - Principles of Astronetry
W. H. Freeman and Conpany,
1967

BOREL, Enile et Deltheil,
Robert - Probabilités Erreurs
Librarie Armand Colin,1950

WAUGH, Albert E. - Elementos de Estatística
Editora Globo

DÉBARBAT, Suzane et Guinot,
Bernard - La Méthode des Hauteurs
Egales en Astronomie
Gordon & Breach, 1970

MENESES, Darcy Leal de
(Capitão de Engenharia) - Teoria dos Erros e de Cálculos das Compensações pelo Método dos Mínimos Quadrados
Editora Imprensa Nacional
RJ - 1935

OBS.: O exemplo apresentado foi extraído de uma observação real feita pelo autor no dia 13/5/77.