



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
OBSERVATÓRIO DO VALONGO

Título

HIERARQUIAS ESTRUTURAIS
NA DETERMINAÇÃO DA DISTÂNCIA SOL-CENTRO GALÁTICO

Autor

CAMILO TELLO BOHORQUEZ

Orientador

JOSÉ AUGUSTO BUARQUE DE NAZARETH

PROJETO DE CONCLUSÃO DO CURSO DE ASTRÔNOMO

Rio de Janeiro - Agosto 1988

" A distância ao Centro Galático, R_0 , é um dos parâmetros fundamentais em astronomia observacional. Sua importância para nosso entendimento da escala e estrutura da Galáxia, e a bem conhecida dificuldade em medi-la acuradamente, implicam que todo método disponível para sua determinação deve ser investigado."

William E. Harris

RESUMO

O valor esperado de uma variável discreta com distribuição de probabilidade binomial, foi encontrado intrinsecamente relacionado com um processo Markov que converge assintoticamente para o valor médio da variável. Para um conjunto ordenado de subsistemas dos aglomerados globulares da Galáxia, os valores esperados de uma das variáveis de um conjunto de parâmetros espaciais interdependentes são utilizados para identificar os efeitos sistemáticos da absorção pelo meio interestelar do disco galáctico na distribuição espacial dos aglomerados. A viabilidade de um conjunto de possíveis escolhas para a distância ao Centro Galáctico, R_0 , é testada por um critério de realidade que compensa a distorção da suposta simetria esférica do sistema, e resulta, por otimização, na escolha do valor $R_0 = 8.4$ kpc com um desvio representativo $\Delta R_0 = 0.13$ kpc.

Palavras-chave : Aglomerados Globulares - Operações Binárias
- Cadeias de Markov.

INTRODUÇÃO

A natureza do método científico implica no desenvolvimento de um processo formal, para estabelecer uma relação de identidade entre a realidade e seus aspectos. As conclusões serão satisfatórias, se o corpo teórico proposto for concebido mediante argumentação lógica a partir de uma axiomática consistente.

O centróide de uma estrutura espacial transmite a noção de uma abstração física, que caracteriza o comportamento global de um sistema no estado estacionário. Mas este equilíbrio macroscópico é uma generalização que envolve indiretamente a forma específica da distribuição espacial dos elementos estruturais; pois para uma dada configuração do sistema há um centróide determinado e, no entanto, o contrário não é verdade. Por outro lado a organização dos elementos numa estrutura depende das distâncias relativas entre eles, isto é, de um comportamento do sistema a nível local. É de se esperar, portanto que haja todo um comportamento transitório do nível local ao nível global, que permita estabelecer um critério mais preciso da relação entre a ordem estrutural do sistema e suas propriedades macroscópicas.

Este projeto é uma tentativa de explorar o conjunto de informações adicionais que um tal critério possa nos fornecer para determinar a distância do Sol ao Centro Galáctico segundo a distribuição espacial dos aglomerados globulares.

Todo e parte conectividade.

Integrabilidade

Os resultados obtidos foram bastante promissores e amplamente consistentes com os dos estudos mais recentes sobre aglomerados globulares, variáveis RR Lyrae e nuvens de OH no plano galáctico.

Finalmente, é necessário enfatizar que os aglomerados globulares são os mais prominentes membros da componente esferoidal da Galáxia, e que a isotropia do espaço no qual ela se encontra imersa e a simetria azimutal do sistema de aglomerados são presupostos em todo nosso projeto.

CONTEÚDO

Capítulo 1	
Considerações Preliminares	1
Capítulo 2	
Os Parâmetros de Desvio	7
Capítulo 3	
Expressões Analíticas	14
Capítulo 4	
As Tendências Estruturais	22
Capítulo 5	
O Critério de Realidade	36
Capítulo 6	
a - O Procedimento Final	40
b - Resultados e Comentários	42
Apêndice A	
O Comportamento Assimptótico do Processo de Atribuição de Valores Representativos para uma Sequência Cíclica de Segmentos Lineares	54
Apêndice B	
Tabela B.1	
Componentes de Distância Galáticos para Aglomerados Globulares	68
Tabelas B.2 e B.3	
Valores Representativos e Tendências Estruturais do Parâmetro de Desvio Horizontal	69

CAPÍTULO 1

CONSIDERAÇÕES PRELIMINARES

As distâncias relativas entre as posições dos elementos de uma estrutura espacial estabelecem uma propriedade da natureza denominada FORMA. As projeções destas distâncias ao longo de cada um dos eixos ortogonais de um sistema de referência, configuram sequências unidimensionais de segmentos lineares, cujos comprimentos individuais, imediatamente visualizados, adquirem o caráter de unidades *intrínsecas* de medida.

§ Definição 1.1

O valor representativo é a média aritmética das coordenadas de posição que delimitam o intervalo de distância que compreende um segmento linear.

Propriedade 1.1.a - Unicidade

O processo de atribuição de valores representativos para uma sequência de segmentos lineares é intrinsecamente *iterativo*. Um conjunto inicial de n coordenadas delimita $n-1$ intervalos e seus valores representativos associados, resultantes da atribuição de grau 1, constituem, por sua vez, um 2º conjunto de $n-1$ coordenadas que delimitam $n-2$ intervalos, e assim sucessivamente até chegarmos a atribuição de grau $n-1$, quando será gerado o n -ésimo conjunto de coordenadas com apenas um elemen-

to, um *único* valor representativo que reflete integralmente o conjunto inicial de atribuição de grau nulo (grau = ordem de iteração).

Propriedade 1.1.b - Valor Esperado

Suponhamos uma progressão ordenada e unidimensional de segmentos lineares, correspondendo a um *conjunto ordenado* de n coordenadas de posição, tal que

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_n$$

A seqüência de segmentos lineares para este conjunto possui um valor representativo \widetilde{N}_n deduzido como se segue:

$$\widetilde{N}_1 = \frac{n_1 + n_1}{2} = n_1$$

$$\widetilde{N}_2 = \frac{n_1 + n_2}{2} = \langle N_2 \rangle$$

$$\widetilde{N}_3 = \frac{\frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_2 + n_3}{2}}{2} = \frac{n_1 + 2n_2 + n_3}{2^2}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_4 &= \frac{\frac{\frac{n_1 + n_2}{2} + \frac{n_2 + n_3}{2}}{2} + \frac{\frac{n_2 + n_3}{2} + \frac{n_3 + n_4}{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{n_1 + 3n_2 + 3n_3 + n_4}{2^3} \end{aligned}$$

E, em geral, para n coordenadas,

$$\begin{aligned} \widetilde{N}_n = \frac{1}{2^{n-1}} & (\alpha_{n1} n_1 + \alpha_{n2} n_2 + \alpha_{n3} + \dots + \\ & + \alpha_{n,n-1} n_{n-1} + \alpha_{nn} n_n) \end{aligned}$$

ou

$$\widetilde{N}_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=1}^n \alpha_{ni} n_i \quad (1.1)$$

onde

$$\alpha_{ni} = \alpha_{n-1,i-1} + \alpha_{n-1,i}$$

e

$$\alpha_{n1} = \alpha_{nn} = 1.$$

A mesma relação recursiva para os coeficientes α_{ni} é encontrada na representação matricial do *triângulo de Pascal*. Para um conjunto de 7 coordenadas, por exemplo, teríamos

$$[\alpha_{ni}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Há portanto uma relação de identidade entre os coeficientes do *binômio de Newton*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad (1.2)$$

onde

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! k!} \quad | \text{Ref. 3} | \quad (1.3)$$

e os coeficientes α_{ni} em (1.1) tal que

$$\binom{n-1}{i-1} = \alpha_{ni}. \quad (1.4)$$

Lembraremos agora, que estes mesmos coeficientes são denominados *números de Bernoulli* e se encontram associados à distribuição binomial de probabilidade num processo de amostragem estacionário (processo de Bernoulli), caracterizado por n eventos mutuamente independentes e um número k de sucessos, onde as probabilidades de sucesso e fracasso*, em cada tentativa, são a e b respectivamente. Como a soma de todas as probabilidades é igual a 1 e $a = b = \frac{1}{2}$ em (1.2), seguem

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} = 2^{n-1}; \quad (1.5)$$

ou seja

(*) As probabilidades de se escolher entre a coordenada anterior e a coordenada posterior de um intervalo segundo o valor representativo do segmento linear considerado.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{i-1} = 1. \quad (1.6)$$

Desta forma o valor representativo associa ao significado *intuitivamente geométrico* de um processo iterativo de bisseções de segmentos lineares ordenados o significado estatístico do *valor esperado* de uma distribuição discreta de probabilidade, segundo a qual, o valor esperado da variável n_i é a média ponderada de todos os possíveis valores do conjunto ordenado de coordenadas. A distribuição binomial é neste caso

$$b(j, m, p) = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{i-1} \quad (1.7)$$

onde $j = i-1$, $m = n-1$ e $p = 1/2$.

Propriedade 1.1.c - Convergência Assimptótica

Se convencionarmos que a seqüência admite o acréscimo de um segmento extra, compreendido pelo intervalo delimitado na sua extremidade anterior pela extremidade posterior do último segmento da seqüência e na sua extremidade posterior pela extremidade anterior do primeiro segmento (no caso unidimensional este segmento abrange a extensão total da seqüência), então o processo de atribuição se torna *ilimitado* e a seqüência é dita *cíclica*. Para a seqüência cíclica o número de intervalos, independentemente da atribuição de grau, é equivalente ao número de coordenadas. No Apêndice A deste projeto é apresentada uma dedução formal que associa o limite assimptótico de um processo de

de atribuição infinita à média aritmética do conjunto inicial de coordenadas. Na teoria da probabilidade este comportamento assintótico é típico de uma distribuição inicial estacionária de probabilidades de transição entre os estados ergódicos de um sistema. Do ponto de vista do valor representativo as coordenadas compartilham todas as probabilidades em sequências de ponderação ciclicamente defasadas. À cada compartilhamento (transição) a ponderação se torna menos e menos seletiva, a influência dos estados iniciais na distribuição de probabilidades se desgasta, e no limite todas as coordenadas (estados) serão igualmente prováveis; como se constata no equilíbrio macroscópico que se atribui usualmente ao centróide.

perde de
relevância,
devido a
dinâmica.

CAPÍTULO 2

OS PARÂMETROS DE DESVIO

Se ângulos representam um desvio em relação a uma direção pré-estabelecida e o radiano possui um caráter adimensional por definição, assim as medidas angulares e as funções trigonométricas associadas mostram-se adequadas na descrição estrutural de um sistema. O fator de escala, por sua vez, constitui o vínculo encarregado de dimensionar as comparações relativas para transformar os desvios em parâmetros estruturais.

Numa primeira tentativa estaríamos dispostos a utilizar coordenadas esféricas e poderíamos considerar o sistema contido no interior de uma esfera, cujo raio representaria o fator de escala. Mas desta forma incorreríamos inocentemente na prática inadequada da *exclusividade*, ao fazermos uso de um único referencial com origem no centro da esfera; assim como o uso de unidades de medida padronizados não foi suficiente para descrever a ordem relativa das coordenadas nas sequências de segmentos lineares.

A natureza *relativa* do processo comparativo é portanto essencial para sermos conclusivos em qualquer tipo de análise, e para apreciarmos este ponto de vista introduziremos o conceito da ORIGEM MÚLTIPLA. Se baseada na subjetividade múltipla como sinônimo de objetividade, a origem múltipla consiste no uso simultâneo de múltiplos referenciais, cujas origens, quando regularmente distribuídas no espaço, conformam a estrutura de um só

Integra
idade?

lido regular geométrico. Dentre estes, o hexaedro regular, ou cubo, possui a particularidade fortuita de proporcionar uma associação direta entre seus referenciais e sistemas de coordenadas retangulares. Uma subdivisão homogênea do volume do sólido em sub-volumes de *potencial estrutural* equivalente garantirá um processo comparativo sistematicamente não tendencioso na obtenção de valores representativos para os parâmetros estruturais do subsistema compreendido por cada subvolume. A equivalência de potencial estrutural e a subdivisão homogênea são características dos sólidos regulares, pois todos os subvolumes resultantes compreendem domínios espaciais equivalentes.

No caso do volume cúbico, a subdivisão do seu conteúdo se dá por intermédio de 3 planos mutuamente ortogonais, paralelos respectivamente as faces do cubo e coincidentes em seu centro. Ao longo daquele que é paralelo as faces superior e inferior encontramos, como mostra a Fig. 1, o plano principal do sistema e localizaremos um dos seus elementos estruturais como será descrito à seguir.

Suponhamos que o elemento se encontra num subvolume acima do plano principal e numa posição E, tal como aparece na Fig. 2 (ver pág. 12).

Seja a perpendicular do respectivo subsistema definida como o lado $\overline{SS'}$, perpendicular ao plano principal e conti

do num mesmo plano com o elemento*. Como o cubo comporta o sistema inteiro, os referidos planos serão tratados em termos de suas seções dentro do cubo. Assim o plano principal é um quadrado e o do elemento, o retângulo SS'B'B.

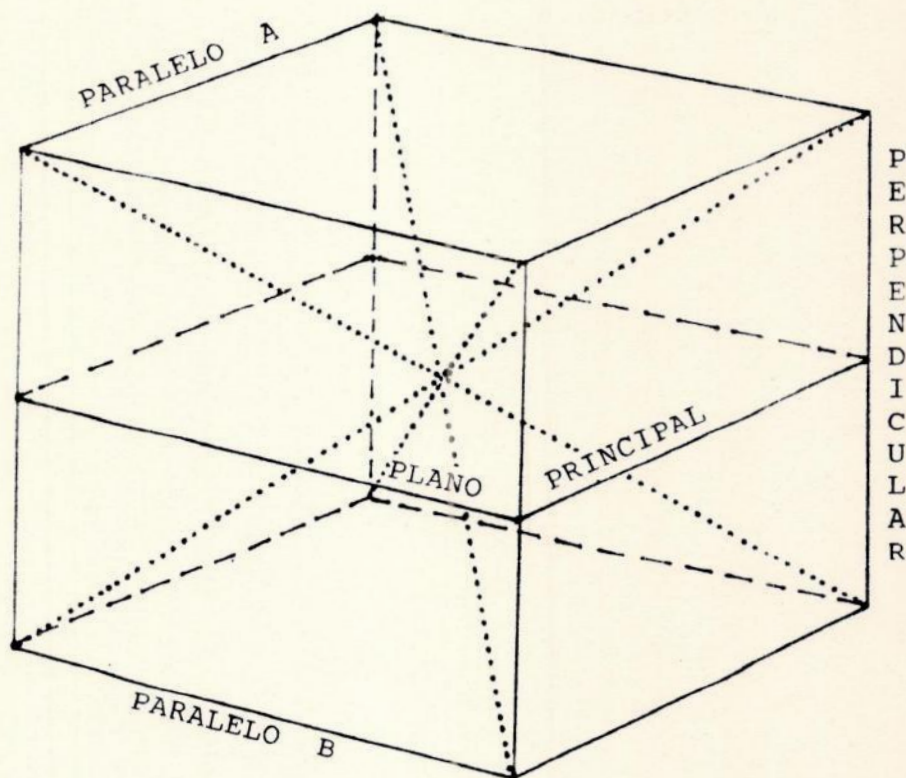


Fig. 1 - O centro geométrico do cubo é a interseção das 4 diagonais principais.

(*) Os lados do cubo que comporta o sistema recebem 3 designações diferentes. Os 4 lados perpendiculares ao plano principal são as "Perpendiculares"; os 4 lados paralelos ao plano principal, mas acima deste, são os "Paralelos A"; enquanto que os 4 abaixo dele, "Paralelos B". O plano principal contém o centro geométrico do cubo (a interseção das 4 diagonais principais) e os vértices da sua seção quadrática bissecionam as respectivas Perpendiculares.

Já vimos que um desvio ocorre quando se constata uma divergência em relação a uma direção principal. Num cubo, as direções principais passam pelo seu centro de simetria (o centro geométrico), o qual vamos supor coincidente com o centro do sistema. A família das diagonais principais do cubo se intercepta neste centro e se habilita, portanto, para compor um conjunto básico de direções principais.

Um primeiro desvio poderá então se referir ao ângulo α entre o retângulo do elemento (o retângulo $SS'B'B$) e o retângulo principal (α na Fig. 2), cujas diagonais são diagonais principais e se originam nos extremos S e S' da Perpendicular do sistema em questão. Ao longo de Paralelos A e B se definem segmentos entre os vértices não coincidentes dos retângulos; mas os segmentos \overline{AB} e $\overline{A'B'}$, que completam as extensões destes mesmos Paralelos serão escolhidos como candidatos para definir um Parâmetro de Desvio Horizontal (HDP), já que o crescimento dos valores de um parâmetro assim proposto, acompanha o aumento da distância do elemento em relação à origem do referencial do subsistema. Para um observador a orientação dos referenciais é tal que a abcissa do elemento se estabelece a sua direita e a ordenada a sua esquerda, de forma que quando a primeira for maior do que a segunda o HDP é determinado ao longo dos Paralelos à direita do subsistema (Paralelos A_R e B_R); mas caso contrário, nos Paralelos à esquerda (Paralelos A_L e B_L). Por outro lado se a abcissa e a ordenada forem idênticas, o desvio é nulo, e o parâmetro poderá ser determinado indiferentemente, à esquerda ou à direita, pois nos dois casos os valores do

HDP são máximos e coincidem. Critérios adicionais, tais como propriedades *inerentes* à natureza do sistema em si*, se tornam necessários para especificar eventuais *condições de fronteira*. Mesmo assim para sermos inteiramente consistentes com a definição do HDP, devemos ainda escolher entre o segmento inferior $\overline{A'B'}$ e o segmento superior \overline{AB} . Esta questão será resolvida quando considerarmos as restrições impostas na viabilidade de estabelecer um segundo parâmetro estrutural ao longo da Perpendicular do subsistema.

Da mesma forma que a Perpendicular é um segmento da interseção entre os planos do retângulo do elemento e de um retângulo principal, o Paralelo \overline{AC} também pode constituir um segmento da interseção entre planos que contêm o retângulo $ACJ'J$ do elemento e um retângulo principal com diagonais que se originem nos extremos A e C do Paralelo. Como cada uma das 4 Perpendiculares está ligada a um subsistema *superior* tipo A e a um subsistema *inferior* tipo B, o vértice J do retângulo do elemento poderá oferecer uma divisão da Perpendicular $\overline{SS'}$ em pares de segmentos para todos os possíveis elementos de um subsistema, desde que os tipos de subsistema e Paralelo sejam *compatíveis* (A com A, B com B). Só assim, o desvio correspondente ao ângulo β entre os retângulos determinará, sem ambiguidades, o segmento \overline{SJ} , cujo comprimento ao longo da Perpendicular do subsistema e a partir da origem de seu referencial, estabelece o valor do Parâ-

(*) No caso específico da nossa galáxia, o sentido da rotação galáctica constitui um tal critério, uma vez que elementos deste sistema situados na fronteira de um subsistema, mas acima ou abaixo do plano principal (o disco galático), podem ser selecionados como membros do subsistema para dentro do qual estariam sendo naturalmente carregados segundo o sentido de rotação da Galáxia.

metro de Desvio Vertical (VDP). Analogamente, o HDP será localizado segundo o mesmo critério de compatibilidade, que neste caso resulta na escolha do segmento \overline{AB} .

Na fig. 2 percebemos que a localização do elemento é confinada a um plano vertical representado pelo retângulo do elemento contendo a Perpendicular $\overline{SS'}$ do subsistema. O segundo retângulo do elemento contendo o correspondente Paralelo \overline{AC} intercepta o primeiro numa reta, que se divide em dois segmentos, \overline{JE} e \overline{EB} , a partir da exata localização do elemento. O terceiro e último dos parâmetros estruturais, o Parâmetro de Desvio Central (CDP), é identificado com o segmento \overline{JE} entre a Perpendicular e o elemento, enquanto que o "ângulo" associado ao desvio se refere a comparação relativa (adimensional) entre os dois segmentos.

Fig. 2 - (na página seguinte). Na parte superior, as relações espaciais envolvidas na transformação das coordenadas retangulares no referencial do sistema com origem O no centro do cubo, para as coordenadas retangulares no referencial de um subsistema com origem em S. Logo abaixo, a localização dentro do cubo do subvolume associado a este subsistema, onde as 3 setas menores correspondem a orientação dos parâmetros de desvio de um elemento. Na parte inferior, uma representação esquemática para os retângulos utilizados na definição dos ângulos de desvio horizontal (α) e vertical (β), bem como a consequente inferência dos parâmetros de desvio horizontal (HDP), vertical (VDP) e central (CDP).

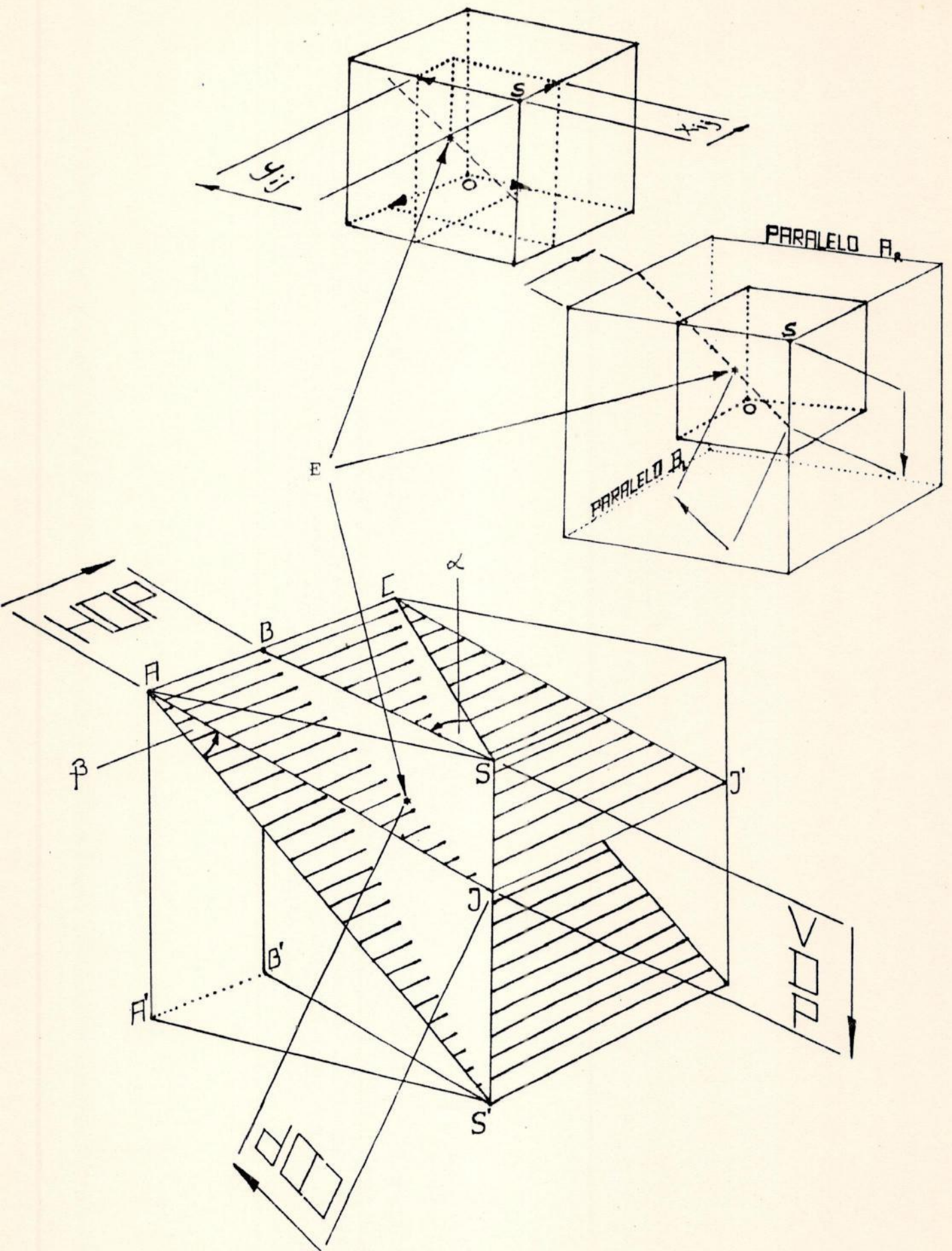


Fig. 2

CAPÍTULO 3

EXPRESSÕES ANALÍTICAS

Na fig. 3 os três parâmetros de desvio são

$$\text{HDP} = \overline{AB}$$

$$\text{VDP} = \overline{SJ}$$

$$\text{CDP} = \overline{JE}$$

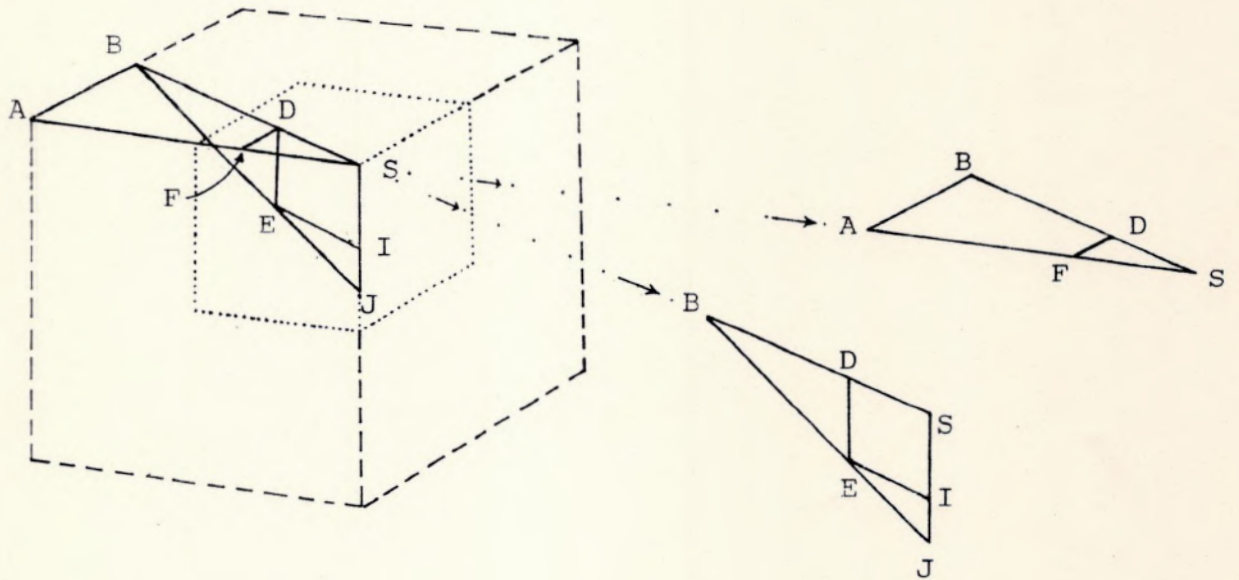


Fig. 3 - Orientação dos triângulos ABS e BSJ em relação a localização de um elemento em E.

Aplicando a *Lei dos segmentos proporcionais* aos triângulos SAB e BSJ teremos

$$(I) \quad \frac{\overline{SA}}{\overline{SF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{DS}}$$

$$(II) \quad \frac{\overline{JB}}{\overline{JE}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{EI}} = \frac{\overline{SJ}}{\overline{IJ}}$$

$$(III) \quad \frac{\overline{DJ}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{JS}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{SB}}{\overline{DB}}$$

Sejam:

$$|\overline{SA}| = \xi \qquad |\overline{SF}| = M \qquad |\overline{FD}| = m$$

$$|\overline{AB}| = w \qquad |\overline{BE}| = q \qquad |\overline{JE}| = p$$

$$|\overline{BS}| = |\overline{SB}| = U \qquad |\overline{DS}| = |\overline{EI}| = r$$

$$|\overline{JS}| = |\overline{SJ}| = t \qquad |\overline{ED}| = |\overline{SI}| = g$$

$$|\overline{IJ}| = s$$

tal que

$$r^2 = m^2 + M^2 \quad (3.1)$$

e

$$\rho^2 = s^2 + r^2 \quad (3.2)$$

Assim, combinando a (I) e a (II) teremos

$$\frac{w}{m} = \frac{U}{r} = \frac{t}{s} = \frac{\xi}{M} . \quad (3.3)$$

Como

$$|\overline{JB}| = |\overline{JE}| + |\overline{EB}|$$

e

$$|\overline{SJ}| = |\overline{SI}| + |\overline{IJ}| ,$$

então a partir da (II) segue

$$\frac{p + q}{p} = \frac{q + s}{s}$$

ou

$$s = \frac{p}{q} g . \quad (3.4)$$

Por outro lado na III

$$|\overline{DB}| = |\overline{SB}| - |\overline{DS}|$$

e portanto

$$\frac{p + q}{q} = \frac{U}{U - r} \quad \text{ou} \quad \frac{p}{q} = \frac{U}{U - r} - 1$$

Mas se utilizamos a (3.3)

$$\frac{p}{q} = \frac{\frac{\xi}{M}}{\frac{\xi}{M} - 1} - 1 = \frac{1}{\frac{\xi}{M} - 1} \quad (3.5)$$

seria, no entanto, conveniente ter

$$\frac{\xi}{M} = k \quad \text{e} \quad \frac{\xi}{M} - 1 = c , \quad (3.6)$$

pois desta forma, substituindo (3.5) em (3.4)

$$s = \frac{g}{c} \quad (3.7)$$

e os parâmetros de desvio horizontal e vertical serão, respectivamente, pela (3.3),

$$w = km \quad e \quad t = ks \quad (3.8)$$

Já o parâmetro de desvio central é obtido diretamente a partir de (3.1) e (3.2) utilizando as relações (3.8) e (3.6)

$$p^2 = s^2 + m^2 + M^2 = \frac{t^2 + w^2 + \xi^2}{k^2}$$

ou

$$p = \frac{1}{k} \sqrt{t^2 + w^2 + \xi^2} \quad (3.9)$$

Na prática, condições da fronteira, devidas à orientação do sistema dentro do cubo, são responsáveis pelo cálculo específico dos parâmetros estruturais w , t e p em cada subsistema. Neste projeto o fator de escala $\psi (\xi)$ é de 64 kpc, e o centro geométrico do cubo coincide com o Centro Galáctico na origem do referencial de um sistema de coordenadas retangulares (X, Y, Z) para 105 aglomerados globulares da lista de Harris (Ref. 1 e Apêndice B). O plano principal e o disco galáctico se orientam no plano XY com o Sol localizado no eixo negativo dos X.

Sejam agora (x_{ij}, y_{ij}) as coordenadas retangulares de um aglomerado no plano da Galáxia, onde i denota o quadrante e j o tipo de subsistema. O critério de seleção atribuído ao sentido da rotação galáctica (ver nota * na pág. 11) e uma

amostragem não tendenciosa, que alterne entre A e B conforme a ordem sequencial dos quadrantes quando $z_{ij} = 0$, definem as condições de fronteira necessárias para delimitar os domínios de cada subsistema (tabela 1 e 2).

TABELA 1

Condições de fronteira para os quadrantes

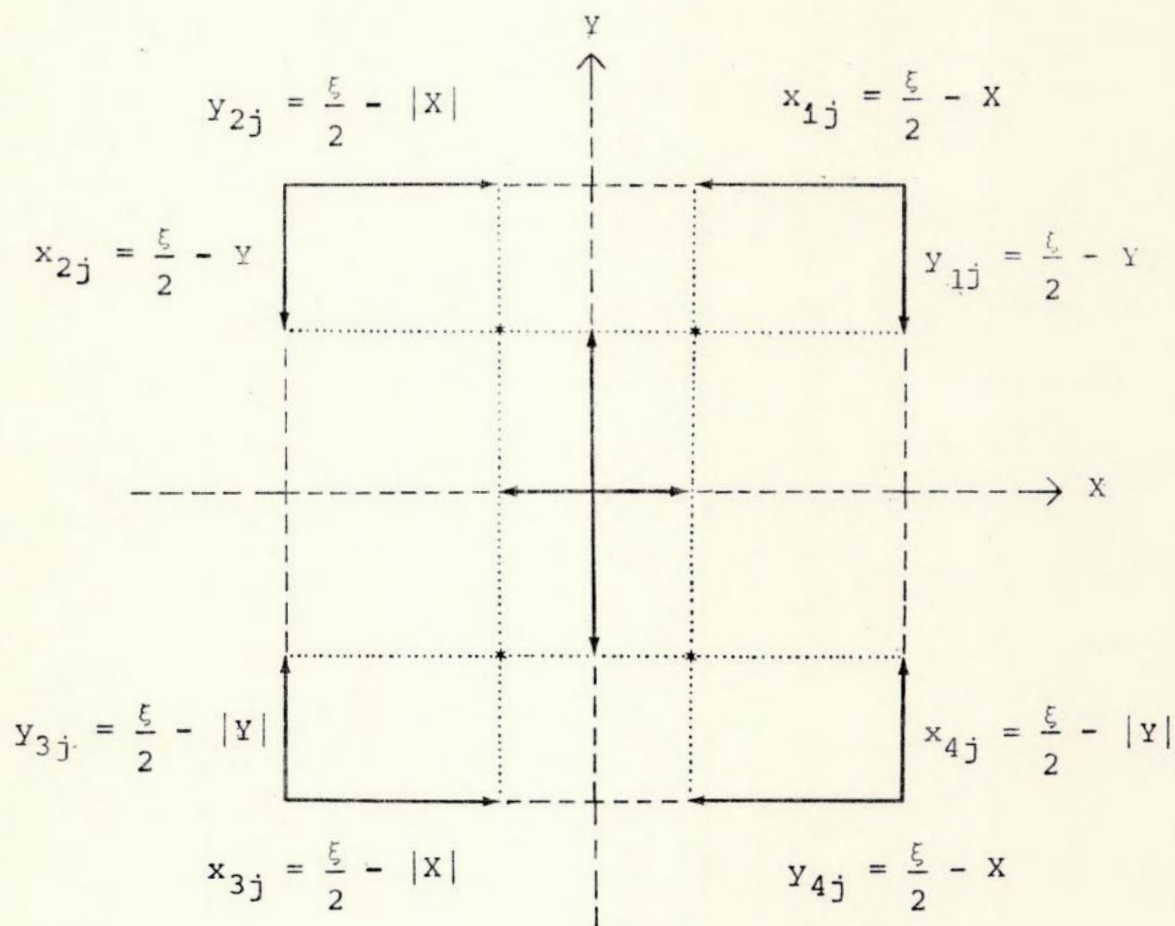
i	DOMÍNIO		
1	$X > 0$	e	$Y \geq 0$
2	$X \leq 0$	e	$Y > 0$
3	$X < 0$	e	$Y \leq 0$
4	$X \geq 0$	e	$Y < 0$

TABELA 2

Condições de fronteira para os tipos de subsistemas

j	DOMÍNIO	i
A	$Z \geq 0$	1,3
B	$Z < 0$	1,3
A	$Z > 0$	2,4
B	$Z \leq 0$	2,4

Finalmente, a relação formal entre os parâmetros indexados e as coordenadas (X, Y, Z) é estabelecida segundo o seguinte esquema no quadrado do plano principal do cubo.



Portanto se o quadrante é ímpar:

$$x_{ij} = \frac{\xi}{2} - |X| \quad \text{e} \quad y_{ij} = \frac{\xi}{2} - |Y| \quad (3.10)$$

e se o quadrante é par:

$$x_{ij} = \frac{\xi}{2} - |Y| \quad \text{e} \quad y_{ij} = \frac{\xi}{2} - |X| \quad (3.11)$$

De forma análoga

$$g_{ij} = \frac{\xi}{2} - |Z|;$$

enquanto que M e m são definidos segundo o esquema da seguinte tabela

M	Condição	m
x_{ij}	$x_{ij} > y_{ij}$	y_{ij}
y_{ij}	$y_{ij} \geq x_{ij}$	x_{ij}

CAPÍTULO 4

AS TENDÊNCIAS ESTRUTURAIS

ma
escrito → ?

O disco galáctico, pela sua disposição em relação ao Sol, afeta sistematicamente a radiação emitida por objetos em diferentes faixas de latitude, sendo máxima na direção ao Centro da Galáxia. Devido à interposição do meio interestelar a distribuição espacial dos aglomerados globulares apresenta uma *distorção* na sua simetria (a de um halo galáctico supostamente esférico), aproximando de nós o Centro da Galáxia e conferindo uma aparente distribuição elipsoidal ao conjunto daqueles aglomerados de baixas latitudes e longitudes galácticas, que tendem a se espalhar ao longo da linha de visada.

Neste Projeto, será proposto um método de análise das coordenadas de posição dos aglomerados que permita recompor a suposta simetria esférica. O método se deriva das propriedades de um conjunto de cinco definições.

§ Definição 4.1:

O valor característico C de um parâmetro estrutural ψ é o valor representativo do conjunto de seus valores representativos.

$$C(\psi) = \bar{\psi} \quad , \quad \Phi = \{\psi_{ij}\}$$

§ Propriedade 4.1:

$$\bar{\psi} = \langle \psi \rangle$$

Cada valor representativo corresponde a uma medida no referencial de um subsistema diferente. Mas como as origens dos referenciais se localizam nos vértices do cubo, a *regularidade* na distribuição destas origens induz um padrão cíclico ao processo de comparação relativo entre os valores representativos ; e resulta numa atribuição ilimitada, que converge assintoticamente para a média aritmética do conjunto.

§ Definição 4.2:

Uma *tendência estrutural* τ corresponde a propensão de um parâmetro estrutural em se afastar de seu valor característico.

§ Propriedade 4.2:

Grau de Centralização

$$\psi_{ij} \geq C(\psi) \rightarrow \tau^+$$

$$\psi_{ij} < C(\psi) \rightarrow \tau^-$$

Para interpretarmos o significado do afastamento em relação ao valor característico, vejamos primeiro, sob que condições os parâmetros estruturais assumem valores *extremos*.

$$w = \xi \frac{m}{M} = \begin{cases} \xi & ; & m = M \\ 0 & ; & m = 0 \end{cases}$$

$$t = \xi \frac{s}{M} = \begin{cases} \xi & ; & s = M \\ 0 & ; & s = 0 \end{cases}$$

$$p = \sqrt{s^2 + m^2 + M^2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2} \xi & ; & s = m = M = \frac{\xi}{2} \\ 0 & ; & s = m = M = 0 \end{cases}$$

Se a localização de um aglomerado é tanto mais próxima do Centro Galático, quanto maior for o seu grau de centralização, então o grau de centralização máximo ocorrerá quando w , t e $2p/\sqrt{3}$ forem equivalentes ao fator de escala (*). Desta forma, se o afastamento aumenta o grau de centralização, a tendência será qualificada por um *estado de polaridade* positivo (τ^+); enquanto que se o diminui, seu estado de polaridade será negativo (τ^-).

(*) Em termos dos desvios angulares, o horizontal e o vertical se tornam nulos, e seus domínios, individualmente restritos aos retângulos das respectivas diagonais principais, se interceptam numa diagonal principal, cuja equipartição nos segmentos p e q , referentes ao desvio central, se localiza no centro do cubo. Caso os valores de w e t sejam arbitrários, a equipartição em p e q limitará a localização aos planos secundários ($M=\xi/2$), que junto ao plano principal são os responsáveis pela divisão interna do cubo nos subvolumes.

Uma vez conhecidas as tendências estruturais de cada subsistema, submeteremos seus estados de polaridade a um processo de comparação relativo, que presupõe, neste caso, a existência de uma ordem cíclica para a localização dos subvolumes dos subsistemas e a natureza recursiva do método de atribuição infinita. Isto significa que a sequência inicial de tendências deve gerar uma outra sequência com um número igual de estados de polaridade.

Em primeiro lugar vamos estabelecer uma sequência cíclica de subsistemas S_{ij} que seja necessariamente coerente com as características de simetria do halo galático e que reflita durante o processo de comparação a influência da escolha do Centro Galático no centro do cubo. O resultado aparece na Fig. 4, que coloca em oposição relativa ao Centro Galático uma sucessão alternada de subsistemas tipo A e B. Mas mesmo que a hipótese de simetria esférica e a natureza da sequência cíclica não definam, a priori, subsistemas, cujas tendências possam dar início e fim a uma representação linear (ordenada) do conjunto das tendências de um parâmetro estrutural, esta questão é imprescindível ao processo de sistematização para se elaborar uma ordem hierárquica de todas as sequências possíveis e permitir que a aparente distorção, causada pelos efeitos de seleção na simetria do sistema, seja identificada. Como os efeitos de seleção decorrem da posição do Sol em relação ao sistema dos aglomerados globulares, os subsistemas S_{3A} e S_{2B} são os mais adequados para inicializar e finalizar respectivamente a representação linear dos subsistemas.

§ Definição 4.3: Um processo de transcrição consiste na aplicação de operações binárias sobre os pares consecutivos de tendências

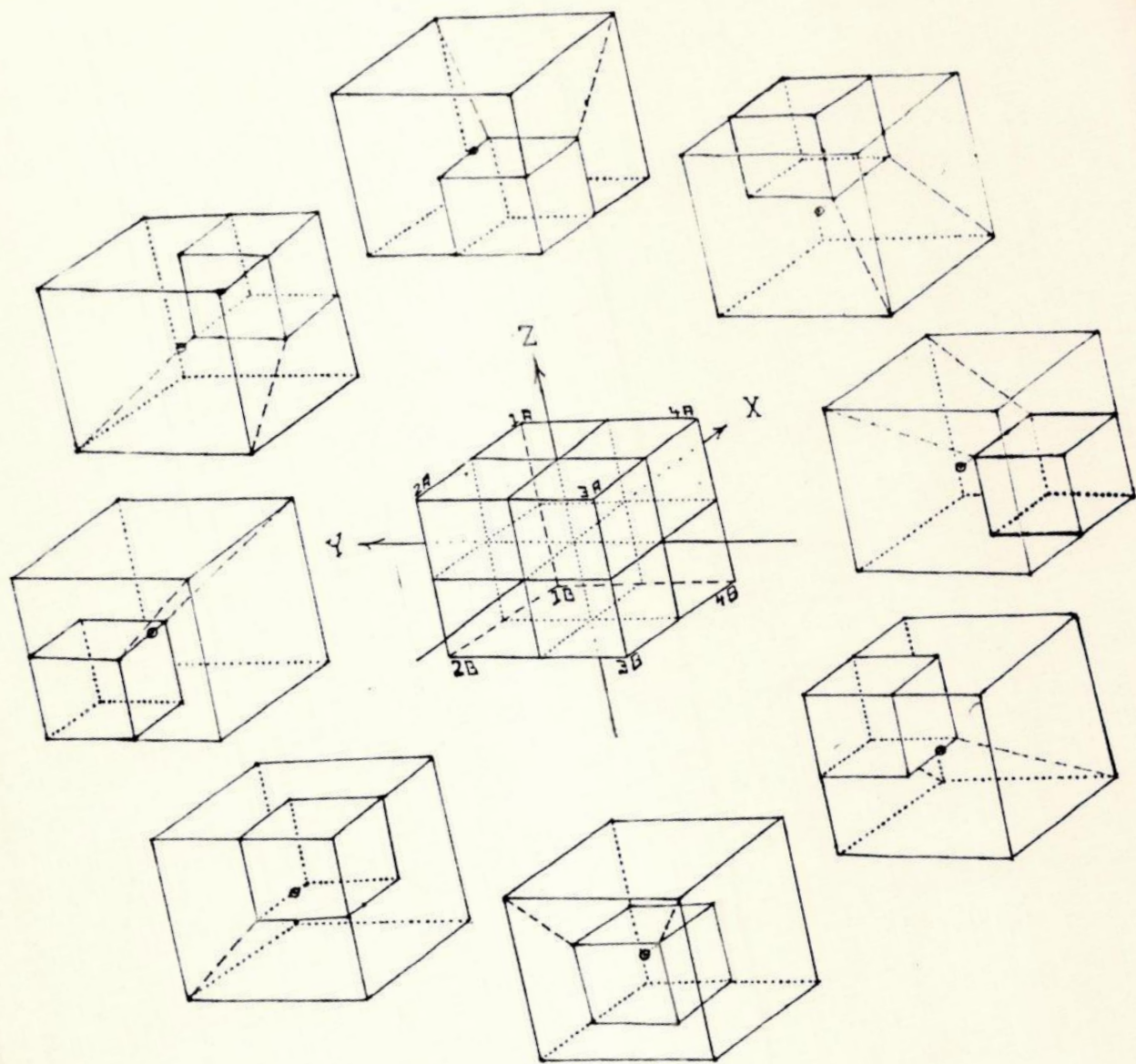


Fig. 4 - Distribuição espacial dos subvolumes associados aos sistemas S_{ij} :

cias estruturais numa sequência cíclica.

Seja $\tau_{\mu v}$ a μ -ésima tendência na representação linear de uma sequência cíclica de tendências e v , um índice relativo a sequência de transcrições. Então

$$\tau_{\mu v} * \tau_{\mu+1, v} = \begin{cases} \tau_{\mu+1, v-1} & , \quad \mu \neq 8 \\ \tau_{1, v-1} & , \quad \mu = 8 \end{cases}$$

onde

$$* : \tau \times \tau \rightarrow \tau \quad (\text{Ref. 2})$$

define uma operação binária sobre o conjunto das tendências estruturais, segundo a qual o estado de polaridade da tendência resultante é obtido a partir da seguinte tabela

*	+	-
+	-	+
-	+	-

Estas operações são, portanto, comutativas e associativas enquanto que a escolha do estado de polaridade resultante é uma consequência do fato, de que a compensação implícita entre tendências de polaridade oposta se manifesta positivamente em relação ao caráter normalizador do equilíbrio expresso pelo valor característico; mas não demonstra mudanças na propensão do parâmetro estrutural se as polaridades das respectivas tendências forem semelhantes.

§ Definição 4.4: Graficamente a representação linear de uma sequência cíclica de tendências será dada por uma sucessão de

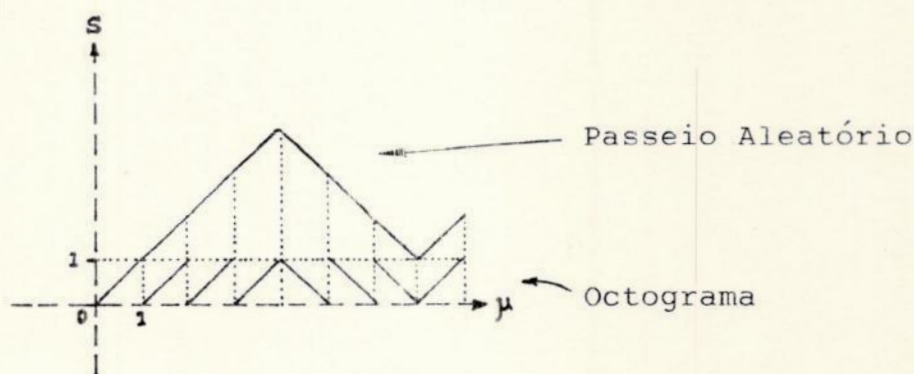
"barras", denominada de octograma, segundo a correspondência

$$\{\tau^+, \tau^-\} \longrightarrow \{/, \backslash\}$$

Num contexto mais preciso, um octograma poderá ser derivado a partir da representação geométrica de um passeio aleatório (*) por uma linha octogonal, cujos lados possuem coeficiente angular $\epsilon_{\mu\nu}$ e cujo μ -éssimo vértice possui ordenada $s_{\mu\nu}$, tal que

$$s_{\mu\nu} - s_{\mu-1,\nu} = \epsilon_{\mu\nu} = \pm 1, \quad s_0 = 0 \quad (\mu=1,2,\dots,8).$$

Exemplo:



§ Propriedade 4.4.a: Estado Fundamental

Após um número de transcrições menor ou igual ao número de subsistemas (8), qualquer octograma se reduz ao octograma cuja linha octogonal possui apenas coeficientes angulares $\epsilon = -1$. A indiferenciação deste octograma diante do processo de transcrição nos leva a denominar-lo de estado fundamental e a seguinte definição se torna adequada,

§ Definição 4.5: O nível hierárquico ν de um octograma é equivalente ao número de transcrições de sua completa redução.

(*) Na teoria da probabilidade, todo arranjo de números inteiros $\{s_1, s_2, \dots, s_x\}$ que satisfaz

$$s_i - s_{i-1} = \epsilon_i = \pm 1, \quad s_0 = 0 \quad (i=1,2,\dots,x)$$

é denominado uma trajetória de um passeio e possui a representação geométrica de uma linha poligonal (Ref. 4, pág. 66).



Fig. 5 - Os níveis hierárquicos v ocupados durante a redução completa de um octograma.

Na Fig. 5 passamos então a encontrar o estado fundamental no nível hierárquico nulo; o que não é, senão, uma consequência intrínseca das próprias operações binárias, pois durante a 1ª transcrição são comparadas tendências, cujos domínios se estendem a subsistemas individuais. Mas a cada nova transcrição se acrescenta mais um subsistema ao domínio D de cada tendência. Seja, portanto,

$$x(\mu) = ij$$

uma função de indexação que define a sequência de varredura dos subsistemas na Tabela 3; então, após m transcrições de um dado octograma, o domínio de uma tendência $\tau_{\mu, v-m}$ será dado por

$$D_{v-m} = \sum_{\mu}^{\mu+m} S_{x(\mu)}$$

onde, evidentemente, se $\mu + m > 8$ então $\mu + m = \mu + m - 8$

TABELA 3

Correspondência entre os índices ij dos subsistemas e μ das tendências num octograma

μ	1	2	3	4	5	6	7	8
ij	3A	1B	2A	4B	1A	3B	4A	2B

Assim o par ordenado de uma operação binária sobre as tendências do octograma resultante da 7ª transcrição define necessariamente uma comparação entre tendências equivalentes, porque seus domínios comportam sequências dos mesmos 8 subsistemas. E, embora, a ordem dos subsistemas de cada uma destas sequências não seja a mesma, isto não afeta os resultados das operações binárias (propriedades comutativa e associativa).

Exemplo:

$$(\tau^+ * \tau^-) * \tau^- = \tau^+ * (\tau^- * \tau^-),$$

porque

$$(\tau^+ * \tau^-) = \tau^+ \quad \text{e} \quad \tau^- = (\tau^- * \tau^-).$$

§ Propriedade 4.5.a: Conjugação Simétrica

O processo inverso da transformação

$$\tau_{\mu\nu} = \begin{cases} \tau_{\mu-1, \nu+1} * \tau_{\mu, \nu+1} & , & \mu \neq 1 \\ \tau_{8, \nu+1} * \tau_{\mu, \nu+1} & , & \mu = 1 \end{cases}$$

constrói simultaneamente um par de octogramas simetricamente conjugados em níveis hierárquicos consecutivos (ver Fig. 6)

A ramificação implícita no uso destas relações constitui o princípio de formação da hierarquia.

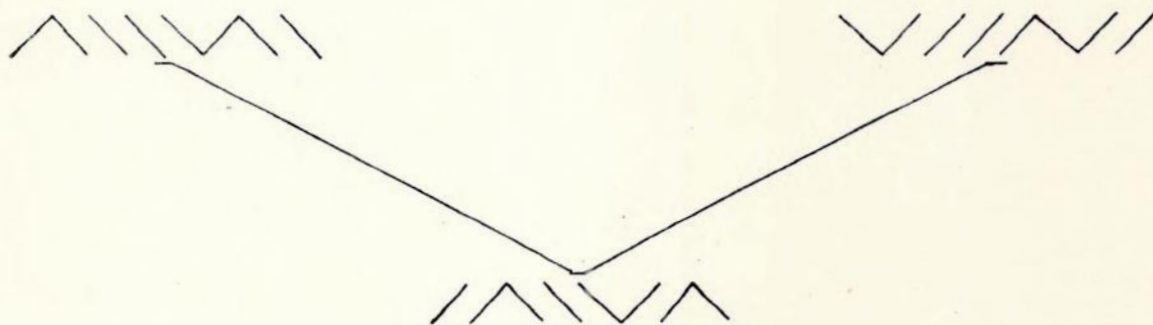


Fig. 6 - Uma unidade estrutural hierárquica: um par de octogramas simetricamente conjugados se transforma num único octograma de nível hierárquico imediatamente inferior.

Resta, agora, estabelecermos um critério de uniformidade para que, dada uma sequência cíclica de tendências, possamos identificar uma periodicidade padrão, ou seja, uma ordem sequencial principal para a configuração da representação linear correspondente. O critério adotado segue uma convenção por tentativa e erro de se construir um octograma da maneira mais simples possível, o que a nível de organização é tomado como um presuposto básico. A redução completa do octograma assim indicado (Fig. 7), possui ainda um padrão fractal, não detectado na redução de nenhum outro octograma, que com a sua bem conhecida propriedade de auto-semelhança compatibiliza com os motivos da convenção.

§ Propriedade 4.5.b: Defasagem k

$$\tau_{\mu\nu} = \tau_{\mu+k, \nu} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 7)$$

A defasagem k é nula para a sequência padrão (hierárquica) e a μ -ésima tendência mapeia o i -ésimo subsistema de tipo j no ν -ésimo nível hierárquico segundo a Tabela 3.



Fig. 7 - A redução completa do octograma de defasagem nula.

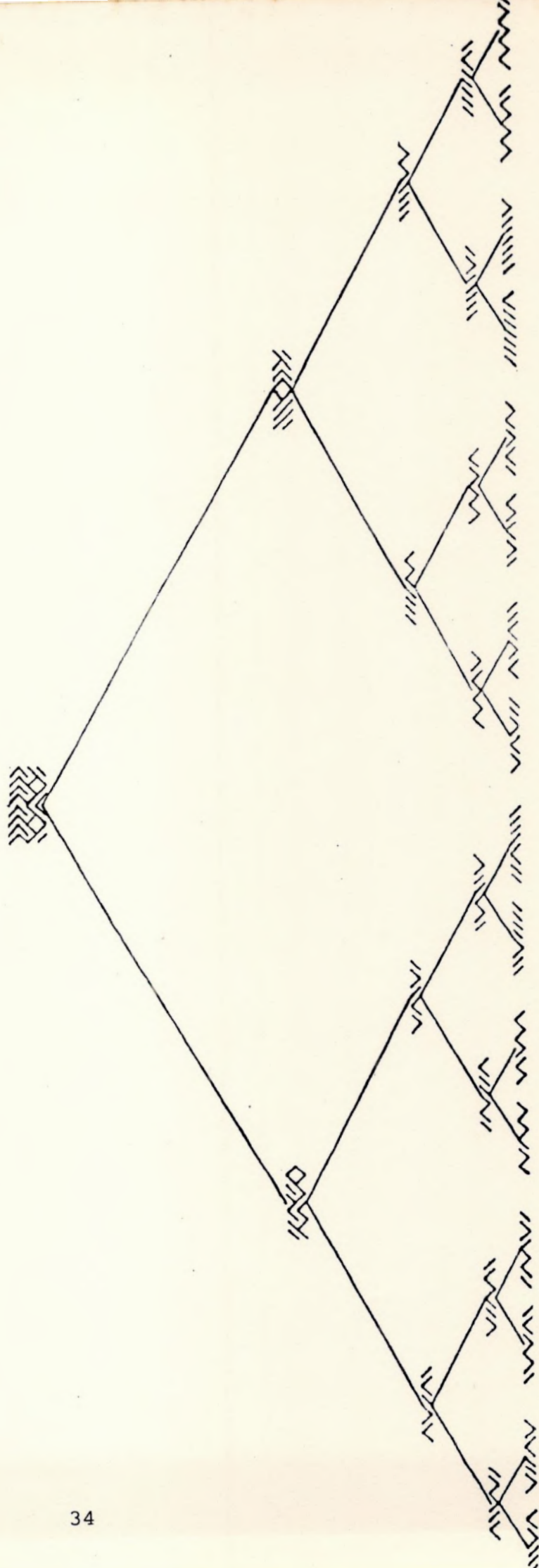
As operações binárias admitem, no caso dos octogramas, a existência de apenas nove níveis hierárquicos, pois o princípio de *cardinalidade* destes entes geométricos seria violado na tentativa de se gerar octogramas num décimo nível.

Propriedade 4.4.c - Hierarquia

O número total de octogramas possíveis é equivalente, na teoria da probabilidade, ao número de trajetórias diferentes $\{s_1, s_2, \dots, s_8\}$ entre a origem e os pontos $(8, y)$, onde y é arbitrário; ou seja, ao número de resultados diferentes num processo Bernoulli de oito tentativas. No entanto, a maioria dos octogramas apresenta apenas uma defasagem na periodicidade das suas tendências e o aspecto final da hierarquia se restringe a um número bem menor (Fig. 8).

Note-se que a existência de pares de octogramas conjugados no segundo, terceiro e quinto nível hierárquico não são simétricos e se configuram num único octograma: no terceiro e quinto nível quando $k = 4$, e no segundo nível quando $k = 2$ ou $k = 4$. Estes níveis hierárquicos se denominam *auto-conjugados*. Por outro lado, todos os pares de octogramas conjugados ocupam um mesmo nível, com uma única exceção: o conjugado do octograma no primeiro nível é o octograma do estado fundamental, cujo nível hierárquico é nulo e vice versa. Para contornarmos esta aparente contradição, faremos uma interpretação das implicações práticas aqui envolvidas, que nos ajudará a entender melhor o significado da conjugação, e ao mesmo tempo proporcionará integridade e subsistência à infraestrutura teórica dos conceitos

Fig. 8 - Hierarquia dos octogramas.



propostos. Anomalias sempre provaram ser o melhor campo de trabalho para o entendimento dos fenômenos naturais, simplesmente, porque a ausência de uma *diferença básica* elimina o conceito da comparação, e sem esta última não há descrição lógica.

Uma vez que os estados de polaridade das tendências do octograma no primeiro nível são todos positivos, conclui-se, que todos os valores representativos do parâmetro de desvio em questão são, por definição, maiores ou iguais ao seu valor característico. Mas como o valor característico é a média aritmética destes valores representativos, a única alternativa viável consiste em atribuir o mesmo valor ao parâmetro de desvio em todos os subsistemas. Tal circunstância seria, de fato, verificada para uma distribuição esférica *ideal* de uma amostra completa de aglomerados globulares em torno do Centro Galático na ausência dos efeitos de seleção, e que tornaria irrelevante a posição do observador. A distribuição dos elementos não precisa ser homogênea, desde que seja regular, para conformar um quadro de tendências identicamente positivas. Agora, o octograma do nível zero se defronta com um impasse formal: a sua constatação na prática é inconcebível, já que uma média aritmética é inexistente além do domínio do conjunto de seus valores. Não é, portanto, por um mero acaso, que este singular octograma possa existir indefinidamente num estado de *perpétua* transformação sem mais razão de ser do que sua própria consequência. Ele expressa o significado de um autêntico valor representativo para o conjunto dos octogramas, porque ele assume simultaneamente a identidade de todas as possíveis formas de distribuição.

CAPÍTULO 5

O CRITÉRIO DE REALIDADE

Vamos estabelecer agora um método de *calibração* de octogramas, que detecta o grau de distorção induzido na simetria do sistema pelos efeitos de seleção. O método se fundamenta no seguinte critério de realidade:

"A aparente assimetria na distribuição espacial dos aglomerados globulares poderá ser compensada através de uma *alteração* na correspondência sequencial entre subsistemas e subvolumes"

Esta alteração implica num processo iterativo que desloca sequencialmente os subsistemas e aumenta à cada iteração, de 1, a defasagem k . Consequentemente, a periodicidade das tendências estruturais de um octograma retornará a sua forma padrão após $8-k$ iterações. Exemplo:



Fig. 9 - Anulação da defasagem k mediante o deslocamento sequencial dos subsistemas.

O valor $8-k$ será então utilizado como *índice de correção* para controlar o transporte dos subsistemas na reocupação dos subvolumes.

Mas antes de proceder a uma descrição suscinta das implicações formais deste processo, teremos que comparar o funcionalismo das expressões analíticas dos parâmetros de desvio diante dos efeitos de seleção. Em outras palavras, teremos que fazer uma inspeção preliminar do conteúdo semântico das tendências estruturais, para poder determinar se um parâmetro de desvio é mais sensível do que os outros em refletir a influência dos efeitos de seleção introduzidos pela matéria interestelar do disco galático. Afinal, o índice de correção depende de um único valor de k , referente a um único octograma, e a princípio, existem 3 valores para k (um por conta de cada parâmetro de desvio) não necessariamente iguais.

Ao compararmos as expressões (3.8) e (3.9) concluímos que a escolha do parâmetro mais adequado para estabelecer o índice de correção deve ser atribuída à w , porque sua dependência nas coordenadas X e Y dos aglomerados é afetada diretamente pela disposição do disco galático no plano principal do cubo. Já o parâmetro t é tendencioso em relação à X e Y , pois ele depende de X , ou de Y , através do valor de M em (3.12); e p depende de t .

Porém, w dispõe de 2 sequências distintas de segmentos lineares ao longo de um par de Paralelos, perpendiculares entre

si em cada subsistema. Haverá, portanto, 2 conjuntos de valores representativos, e cada um com sua respectiva defasagem. Esta duplicidade não é paradoxal; muito pelo contrário, ela torna o critério de realidade muito mais preciso, pois ao invés de tratar de uma reestruturação do sistema a partir de um único índice de correção, que forneceria $\binom{8}{1}$ configurações espaciais possíveis, o sistema poderá agora assumir $\binom{8}{2}$ configurações diferentes para compensar com maior eficácia os efeitos de seleção.

Assim, o *desdobramento* da defasagem atribuí à periodicidade das tendências para aglomerados com $x_{ij} \geq y_{ij}$ uma defasagem k_x e para os aglomerados com $x_{ij} < y_{ij}$ uma defasagem k_y . Anteriormente tinha sido escolhida uma correspondência entre os índices ij dos subsistemas S_{ij} e o índice μ das tendências τ_μ , que dependia do sentido da rotação galática. Mas segundo os referenciais dos subsistemas, este sentido é exclusivamente coerente com a condição $x_{ij} \geq y_{ij}$, e não atenderia à estética de um conceito formal de simetria^(*). Basta, no entanto, considerar o sentido *contrário* da rotação galática para obtermos uma correspondência adequada para a condição $x_{ij} < y_{ij}$. Desta forma, a defasagem k_y será determinada a partir de octogramas construídos de acordo com a tabela 4, onde o critério anterior sobre a inicialização da representação linear para uma sequência cíclica foi mantido.

(*) O crescimento de w acompanha o sentido da rotação galática quando $x_{ij} \geq y_{ij}$.

TABELA 4

Correspondência entre tendências e subsistemas segundo o sentido contrário da rotação galática.

μ	1	2	3	4	5	6	7	8
ij	2A	4B	3A	1B	4A	2B	1A	3B

CAPÍTULO 6

a - O PROCEDIMENTO FINAL

A reocupação dos subvolumes pelos respectivos subsistemas subentende, a cada iteração, a seguinte transformação seletiva de coordenadas:

- i - Se o subsistema for transportado para abaixo do plano principal, as coordenadas X, Y e Z dos aglomerados serão submetidas a uma reflexão,

$$(X, Y, Z) \longrightarrow (-X, -Y, -Z) .$$

- ii - Se o transporte for para acima do plano principal, apenas a coordenada Z será refletida, enquanto que as projeções dos aglomerados no plano XY sofrerão uma rotação de $+90^0$ em torno do eixo Z quando $x_{ij} \geq y_{ij}$, e de -90^0 quando $x_{ij} < y_{ij}$;

$$Z \rightarrow -Z$$

e

$$\left. \begin{array}{l} X \rightarrow Y \\ Y \rightarrow -X \end{array} \right\} \text{ se } x_{ij} \geq y_{ij} ,$$

ou

$$\left. \begin{array}{l} X \rightarrow -Y \\ Y \rightarrow X \end{array} \right\} \text{ se } x_{ij} < y_{ij}.$$

Cientes de que a alteração na distribuição espacial dos aglomerados pretende restituir a simetria original do sistema, seremos obrigados a inferir indiretamente o valor para a distância R_0 do Sol ao Centro Galáctico. Para isto aplicaremos um *critério de otimização*, que parte do princípio de que a restituição da simetria original do sistema (a simetria esférica) é tanto mais completa, quanto menor for o valor do denominado desvio representativo

$$\Delta R = \sqrt{\bar{X}^2 + \bar{Y}^2},$$

associado a uma escolha de R_0 num sistema já corrigido da defasagem na periodicidade de suas tendências estruturais. Neste projeto é testada a viabilidade de um conjunto de 33 candidatos a R_0 , uniformemente distribuídos no intervalo fechado entre 6.9 kpc e 10.1 kpc, de acordo com a estimativa feita por Harris em 76 (Ref. 1):

$$(8.5 \pm 1.6) \text{ kpc},$$

onde o erro combina ± 1.2 kpc de natureza interna, aleatória, e ± 1.0 kpc por conta da incerteza na altura do ramo horizontal das variáveis RR Lyrae nos diagramas HR dos aglomerados globulares.

b - RESULTADOS E COMENTÁRIOS

A tabela 5 (pág. 44) lista os valores representativos \bar{X} e \bar{Y} , e o correspondente desvio representativo ΔR_0 associado a cada um dos 33 candidatos à R_0 , enquanto que na figura 10 (pág.46) a linha poligonal pontilhada se constitui a partir dos segmentos lineares compreendidos entre os pares ordenados $(R_0, \Delta R_0)$. Pelo critério de otimização, este teste inicial (Teste 1) nos fornece o valor $R_0 = 8.0$ kpc com $\Delta R_0 = 0.26$ kpc; mas segundo o gráfico resultante, constata-se logo que o teste é bem menos sensível para os candidatos acima do valor escolhido, isto é, para aqueles candidatos que na realidade seriam mais fortemente afetados pelo obscurecimento introduzido pela matéria interestelar do disco galático.

O comportamento assimétrico em relação ao resultado fornecido é, certamente, consequência do critério utilizado para inicializar os octogramas e que tinha sido estabelecido para refletir os efeitos de seleção experimentados por um observador localizado no sistema solar. Mas sob a hipótese de uma simetria esférica para a distribuição espacial dos aglomerados globulares em torno do Centro Galático, e a suposição de que a restauração desta simetria, mais precisamente, da sua simetria azimutal, seja o resultado de um procedimento o mais objetivo possível, torna-se necessária a eliminação de quaisquer resíduos de caráter subjetivo, que estariam, ainda, viciando sistematicamente os resultados obtidos.

Desta forma, foi realizado um segundo teste (Teste 2) levando em consideração o fato de que o desdobramento da defasagem e a subsequente avaliação do desvio representativo possuem uma natureza bidimensional, cuja interpretação se presta à constituir o seguinte critério:

"Se a inicialização e a finalização do octograma que detecta a defasagem k_x ocorrem a partir de subvolumes cujas seções transversas ao eixo X se constatarem no plano YZ, então a inicialização e a finalização do octograma que detecta a defasagem k_y devem ocorrer a partir de subvolumes cujas seções transversas ao eixo Y se constatarem no plano XZ".

Estes pressupostos de natureza estritamente semântica, inicializam os octogramas, tanto para k_x como para k_y , no subvolume ocupado pelo subsistema 3A, mas as respectivas finalizações serão encontradas nos subvolumes dos subsistemas 2B e 4B.

Os resultados do teste 2 na tabela 6 (pág. 45) determinam a linha poligonal contínua da figura 10. Agora o valor escolhido $R_0 = 8.4$ kpc confirma as nossas expectativas de encontrarmos um valor maior para R_0 , pois o obscurecimento tende a aproximar de nós o Centro Galáctico, enquanto que com um $\Delta R_0 = 0.13$ kpc, este resultado acusa uma sensibilidade bem mais significativa do que o anterior.

TABELA 5⁽¹⁾Desvios Representativos dos candidatos à R₀ no teste 1

R ₀	\bar{X}	\bar{Y}	ΔR_0
6.9	-1.06	- .71	1.28
7.0	-1.09	- .66	1.27
7.1	-1.38	- .67	1.53
7.2	-1.59	- .71	1.74
7.3	-1.1	- .92	1.43
7.4	-1.21	- .89	1.50
7.5	- .6	-2.18	2.26
7.6	- .41	-1.28	1.34
7.7	- .06	- .91	0.91
7.8	- .08	-1.49	1.74
7.9	- .24	-0.09	0.26
8.0	- .24	- .08	0.25
8.1	- .54	- .48	0.78
8.2	- .63	- .56	0.84
8.3	- .12	-1.17	1.18
8.4	- .89	- .66	1.11
8.5	.38	- .74	0.83
8.6	- .72	- .95	1.19
8.7	.77	-1.04	1.29
8.8	- .03	.4	0.40
8.9	- .57	-1.94	2.02
9.0	- .61	-2.57	2.64
9.1	- .42	-2.31	2.35
9.2	-1	-3.09	3.25
9.3	- .73	- .35	0.81
9.4	.02	.99	0.99
9.5	-1.03	-2.64	2.83
9.6	- .57	-2.72	2.78
9.7	.05	-1.52	1.52
9.8	0.09	-1.43	1.43
9.9	- .87	.44	0.97
10.0	- .9	-1.03	1.37
10.1	- .6	-4.78	4.82

(1) Todos os valores em kpc.

TABELA 6⁽¹⁾Desvios representativos dos candidatos à R₀ no teste 2

R ₀	\bar{X}	\bar{Y}	ΔR_0
6.9	- .97	- .86	1.30
7.0	-1.1	- .82	1.37
7.1	-1.05	- .89	1.38
7.2	-1.08	-1.08	1.53
7.3	-1.02	- .76	1.27
7.4	- .9	- .69	1.13
7.5	- .51	-1.22	1.32
7.6	- .36	-1.42	1.46
7.7	- .12	-1.01	1.02
7.8	- .56	- .86	1.03
7.9	- .4	- .63	0.75
8.0	- .59	- .58	0.83
8.1	- .89	-1.39	1.65
8.2	-1.01	-1.41	1.73
8.3	.58	.23	0.62
8.4	.1	.08	0.13
8.5	.23	.33	0.40
8.6	.79	-1.7	1.87
8.7	.41	- .16	0.44
8.8	.04	.75	0.75
8.9	- .7	- .19	0.73
9.0	- .88	- .59	1.06
9.1	- .64	- .22	0.68
9.2	- .22	-1.27	1.29
9.3	.69	1.01	1.22
9.4	- .02	1.53	1.53
9.5	- .78	1.53	0.89
9.6	- .53	- .42	0.58
9.7	1	.33	1.05
9.8	1.11	.39	1.18
9.9	- .94	- .91	1.31
10.0	.97	- .67	1.18
10.1	- .17	-2.25	2.26

(1) Todos os valores em kpc.

A questão da sensibilidade em relação aos dois testes poderá ser examinada de forma mais precisa se utilizarmos as propriedades 1.1.a (Unicidade) e 1.1.c (Convergência Assimptótica) decorrentes da definição do valor representativo. Inicialmente na fig. 11, os dois contornos poligonais da fig. 10 foram suavizados pelos segmentos lineares resultantes das 32 iterações necessárias à determinação de um único valor representativo em cada um dos casos. Note-se a assimetria acentuada do Teste 1 em relação ao Teste 2.

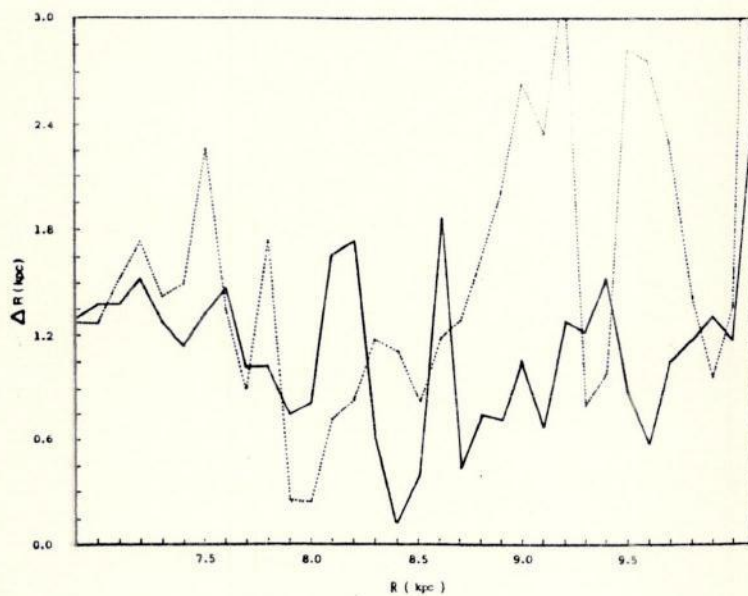


Fig. 10 - Desvios representativos em 2 testes de viabilidade.

Teste 1 (.....) indica $R_0 = 8.0$ kpc e Teste 2 (——) indica $R_0 = 8.4$ kpc.

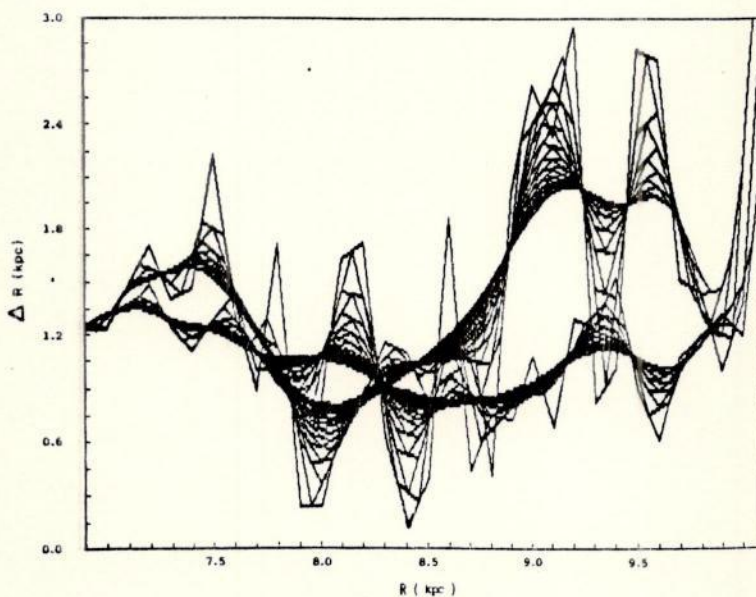


Fig. 11 - Os segmentos lineares dos processos completos de atribuição de valores representativos para as sequências da fig. 10.

A seguir, foi acrescentado aos mesmos contornos poligonais da Fig. 10 um segmento linear extra entre os pares ordenados localizados nas extremidades destas linhas, que lhes permite, assim, configurar seqüências cíclicas. A convergência assintótica inerente ao processo de atribuição de valores representativos para tais seqüências conforma uma tendência ao equilíbrio (ver Apêndice A), e se presta de forma imprescindível e reveladora para retratar minuciosamente as divergências de comportamento nos dois Testes. Isto é o que pode ser visto na Fig. 12, a partir da qual pode-se inferir um consenso de acuracia, que favorece ao Teste 2, e que se fundamenta em dois aspectos mutuamente concorrentes:

- i - A estabilidade do equilíbrio se traduz no achatamento (razão entre os semi-eixos maior e menor) dos contornos elípticos, que atua como indicador da dispersão do conjunto dos valores representativos em torno da média $\langle \Delta R_0 \rangle$. Quanto mais achatado, tanto menos disperso e mais estável.
- ii - A altura da média $\langle \Delta R_0 \rangle$ representa claramente, pelo critério de otimização, a sensibilidade do teste como um todo.

Isto significa que para assegurar-nos da confiabilidade depositada numa dada escolha é necessário que o consenso de acuracia acima citado seja favorável não só em relação à sensibilidade do teste, mas também em relação a estabilidade do equilíbrio.

Ainda na Fig. 12 pode-se dizer que o Teste 1 surge como uma mera deformação do Teste 2 face aos efeitos de seleção.

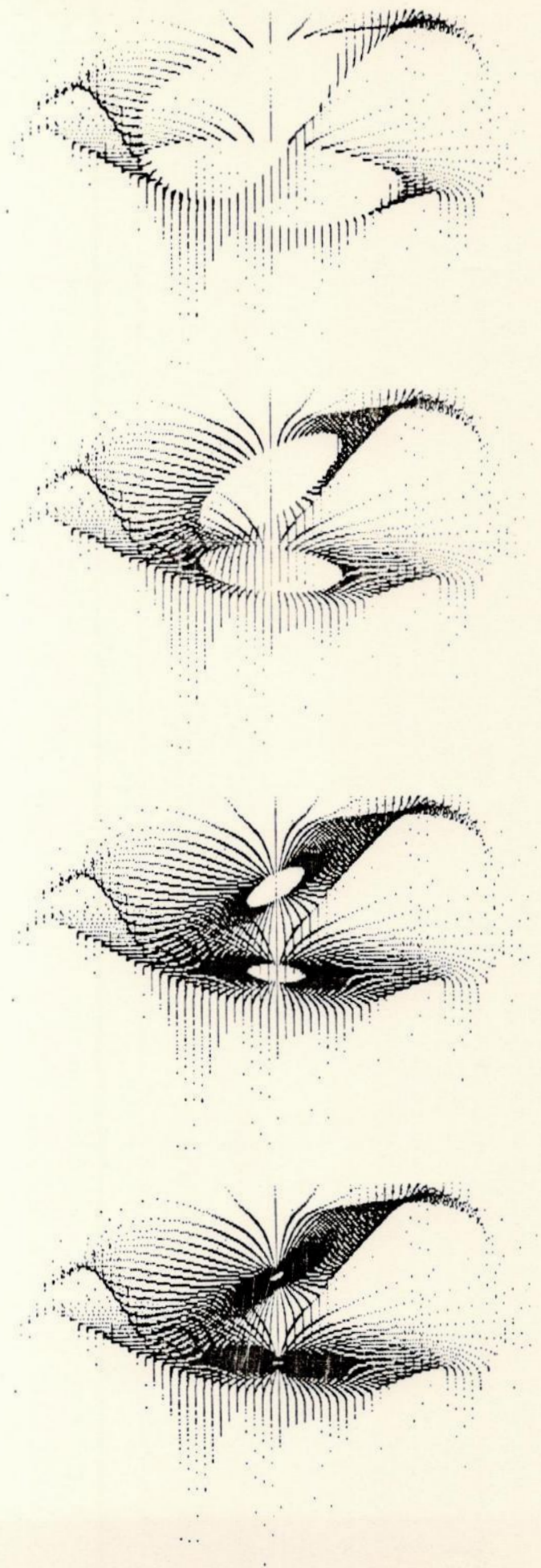


Fig. 12 - Nesta seqüência de ilustrações, vê-se a tendência ao equilíbrio nos Testes 1 e 2 dos valores representativos em torno dos respectivos valores característicos (limites assintóticos) : $\langle \Delta R_0 \rangle = 1.55$ kpc (Teste 1) e $\langle \Delta R_0 \rangle = 1.12$ kpc (Teste 2) . No correspondente processo Markov, o número de transições aumenta de cima para baixo.

Os resultados do parágrafo anterior poderão ser obtidos de forma mais elegante, se o comportamento assintótico for examinado a partir dos pares ordenados (\bar{X}, \bar{Y}) ao invés dos pares ordenados $(R_0, \Delta R_0)$. Isto é constatado nas figuras 13 e 14, onde a origem dos eixos cartesianos presuppõe a localização do próprio Centro Galático. Neste caso é evidente que a sensibilidade se torna uma questão de proximidade da origem, enquanto que a estabilidade do equilíbrio tende a comprometer o achatamento do contorno elíptico (só no Teste 2) com o alinhamento da região de convergência, o par ordenado escolhido (indicado pelas setas na figura 14) e a localização do Centro Galático.

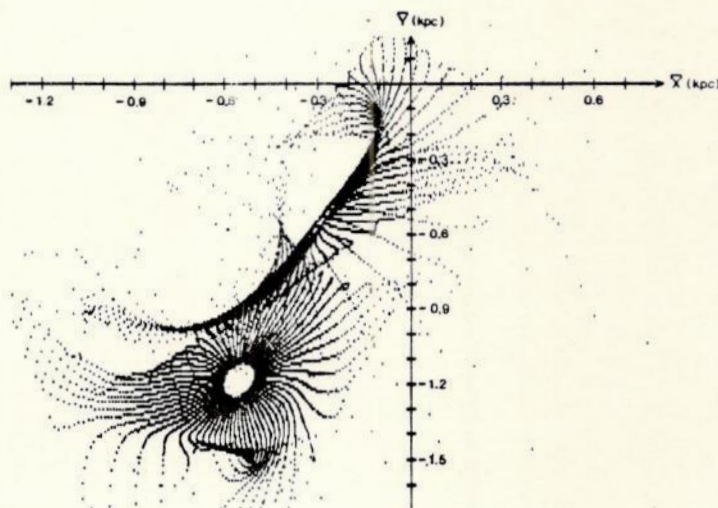


Fig. 13 - Comparação dos comportamentos assintóticos nos Testes 1 e 2 (ver Fig. 14).

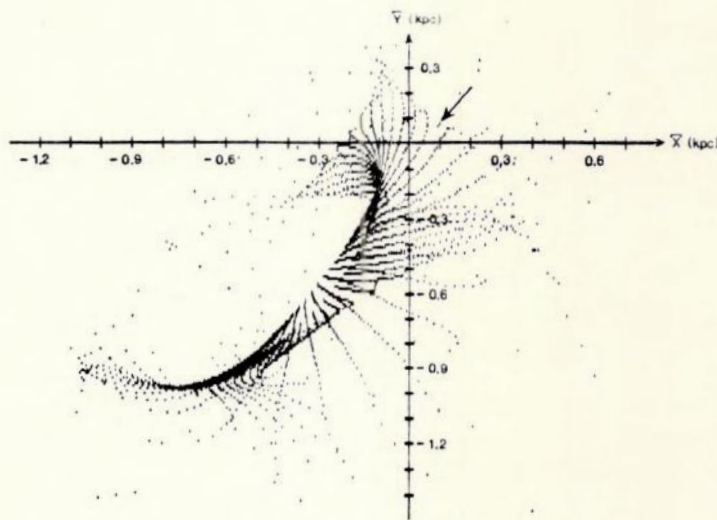
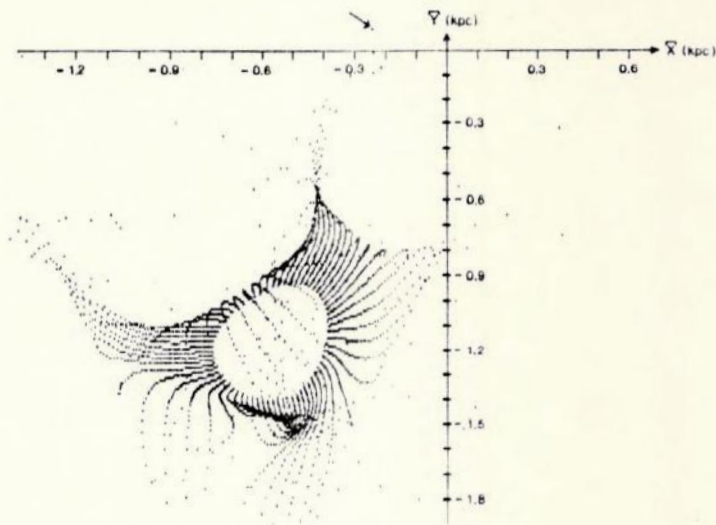


Fig. 14 - A convergência assintótica em torno dos valores característicos $(-0.57 \text{ kpc} , -1.17 \text{ kpc})$ do Teste 1, na parte superior, e $(-0.29 \text{ kpc} , -0.55 \text{ kpc})$ do Teste 2 na parte inferior. $\bar{X} = \tilde{X}$, $\bar{Y} = \tilde{Y}$.

Por último, seria desejável verificar a influência da centralização do intervalo de candidatos em torno do valor escolhido, para evitar a presença de uma eventual fonte de erro sistemático decorrente da desigualdade numérica de candidatos acima e abaixo da referida escolha. Isto implica que os respectivos intervalos nos dois testes devem ser remarcados para [6.4 kpc , 9.6 kpc] no Teste 1, e para [6.8 kpc , 10.0 kpc] no Teste 2. Os resultados da Tabela 7 e os gráficos das Figuras 15 e 16 atestam positivamente em favor do determinado anteriormente pelo consenso de acuracia, corroborando ainda mais os nossos pressupostos teóricos. Os Testes com os intervalos centralizados nas respectivas escolhas apresentam uma melhoria relativa entre 8% e 9% no Teste 1, e entre 3% e 4% no Teste 2.

TABELA 7

Limites de Convergência dos Testes de Viabilidade⁽¹⁾

	Teste	A	B
$\langle \Delta R_0 \rangle$	1	1.55	1.41
	2	1.12	1.09
$(\langle \tilde{X} \rangle , \langle \tilde{Y} \rangle)$	1	(-0.57 , -1.17)	(-0.64 , -1.01)
	2	(-0.29 , -0.55)	(-0.31 , -0.51)

A - Testes com intervalos centralizados em $R_0 = 8.5$ kpc.

B - Teste 1 centralizado em $R_0 = 8.0$ kpc e Teste 2 centralizado em $R_0 = 8.4$ kpc.

⁽¹⁾ Todos os valores em kpc.

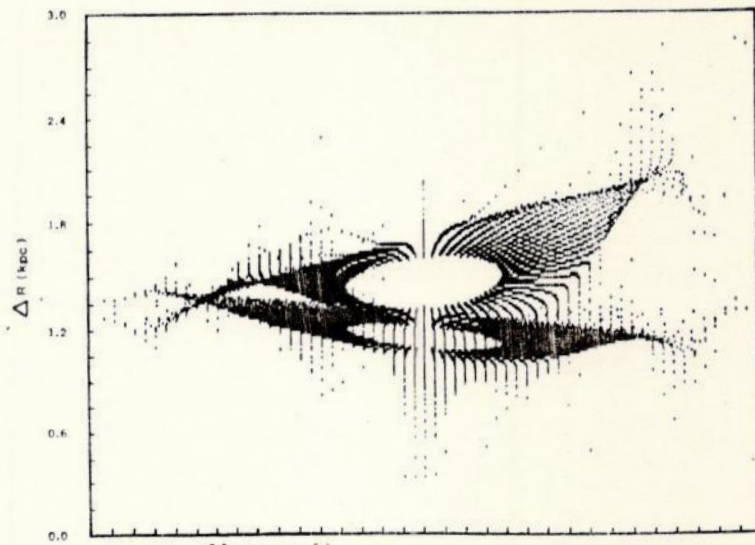


Fig. 15 - A tendência ao equilíbrio em torno dos valores característicos dos Testes 1 e 2, e intervalos centralizados nas respectivas escolhas. (Ver a Fig. 12) .

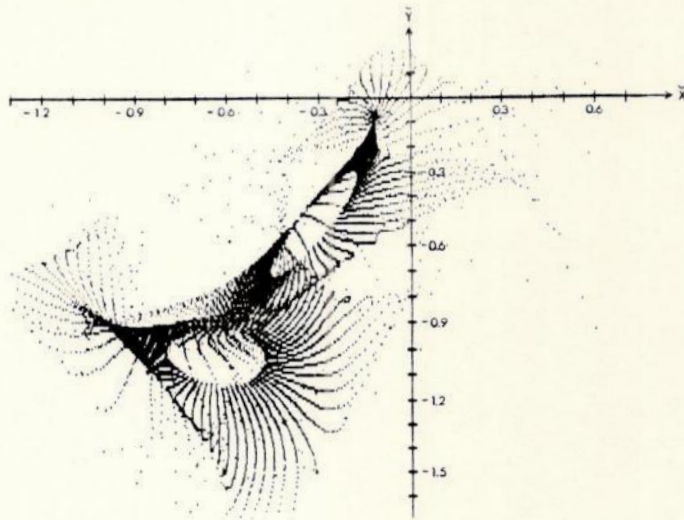


Fig. 16 - A convergência assintótica nos Testes 1 e 2 com os intervalos centralizados nas respectivas escolhas . (Comparar com a Fig. 13) .

Na tabela 8 são dadas as determinações mais recentes da distância R_0 , que confirmam amplamente o resultado deste projeto e qualificam o método do valor representativo como uma alternativa válida no tratamento objetivo de amostras observacionais susceptíveis à efeitos de seleção.

TABELA 8

DATA	AUTOR	MÉTODO	R_0 (kpc)
1972	Toomre	Modelo do Disco Galático	9.0 ± 1.0
1974	Rybicki et. al.		
1974	Bolona e Feast	Estrelas OB distantes	9.0 ± 1.6
1974	van den Berg	Estrelas da Sequência Principal	9.2 ± 2.2
1975	Oort e Plaut	RR Lyrae no Núcleo Galático	8.7 ± 0.65
1976	Harris	Aglomerados Globulares	8.5 ± 1.6
1986	Yurevich (Ref. 5)	Curva de Rotação	+ 0.9
			8.2 - 0.7
1987	Fernley et. al. (Ref. 6)	Escala da Magnitude Absoluta das RR Lyrae	8.0 ± 0.65

O valor de R_0 atualmente aceito pela UAI é de 8.5 ± 1.1 kpc.

APÊNDICE A

O COMPORTAMENTO ASSIMPTÓTICO DO PROCESSO DE ATRIBUIÇÃO DE VALORES REPRESENTATIVOS PARA UMA SEQUÊNCIA CÍCLICA DE SEGMENTOS LINEARES

Este apêndice tem por objetivo aprofundar as raízes do conceito do valor representativo no campo da teoria da probabilidade. Um teorema e seu corolário servirão como ponto de partida para estabelecer o fundamento matemático que sustenta o emprego da intuição geométrica no estudo das estruturas espaciais.

Teorema

Numa seqüência cíclica de segmentos lineares a média aritmética dos valores representativos independe da atribuição de grau k .

Prova: Seja

$$\langle N_{kn} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_{ki} \quad (\text{A.1})$$

a média aritmética de n valores representativos obtidos no k -ésimo processo de atribuição. Porém nas seqüências cíclicas

$$n_{ki} = \begin{cases} (n_{k-1,i} + n_{k-1,i+1})^{1/2}, & i \neq n \\ (n_{k-1,n} + n_{k-1,1})^{1/2}, & i = n \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

e assim, substituindo (A.2) em (A.1) e expandindo teremos

$$\begin{aligned} \langle N_{kn} \rangle &= \frac{1}{2n} (n_{k-1,1} + 2n_{k-1,2} + \dots + 2n_{k-1,n} + n_{k-1,1}) \\ &= \frac{1}{n} (n_{k-1,1} + n_{k-1,2} + n_{k-1,3} + \dots + n_{k-1,n}); \end{aligned}$$

ou

$$\langle N_{kn} \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_{k-1,i} = \langle N_{k-1,n} \rangle . \quad (\text{A.3})$$

E por indução em k

$$\langle N_{kn} \rangle = \langle N_{0n} \rangle = \mu' \quad (k = 1, 2, \dots) , \quad (\text{A.4})$$

onde μ' é a média aritmética do conjunto inicial ($k=0$) das n coordenadas de posição, que delimitam os intervalos de distância, que por sua vez compreendem os segmentos lineares da sequência cíclica.

Q.E.D.

Corolário: A dispersão dos valores representativos em torno da média μ' tende a zero quando k tende a infinito.

§ Prova: Em termos da variância teremos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{kn}^2 = 0 \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\sigma_{kn}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n_{ki} - \mu')^2 \quad . \quad (\text{A.6})$$

E por substituição de (A.2) em (A.6)

$$\begin{aligned} \sigma_{kn}^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{1}{2} (n_{k-1,i} + n_{k-1,i+1}) - \mu' \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} (n_{k-1,n} + n_{k-1,1}) - \mu' \right]^2 \right\} \quad . \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

Uma vez que todos os índices de atribuição de grau são idênticos do lado direito de (A.7), torna-se conveniente aliviar a notação, atribuindo um único índice geral, que será subscrito ao parêntesis mais externo. Assim, a expansão de (A.7) é

$$\begin{aligned} \sigma_{kn}^2 = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{4} n_1^2 + \frac{1}{2} n_2^2 + \frac{1}{2} n_3^2 + \dots + \frac{1}{2} n_n^2 + \frac{1}{4} n_1^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} n_1 n_2 + \frac{1}{2} n_2 n_3 + \frac{1}{2} n_3 n_4 + \dots + \frac{1}{2} n_{n-1} n_n + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} n_n n_1 - \mu' (n_1 + 2n_2 + 2n_3 + \dots + 2n_n + n_1) + n\mu'^2 \right]_{k-1} ; \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \sigma_{kn}^2 = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} n_i^2 - 2\mu' n_i + \mu'^2 \right) + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2} n_i n_{i+1} \right) + \frac{1}{2} n_n n_1 \right\}_{k-1} , \end{aligned}$$

que por quadratura resulta em

$$\sigma_{kn}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n_i - \mu')^2_{k-1} + \frac{1}{2n} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (n_i n_{i+1} - n_i^2) + n_n n_1 - n_n^2 \right\}_{k-1} ;$$

mas o 1º termo desta expressão é equivalente a $\sigma_{k-1,n}^2$, por definição, e portanto

$$\sigma_{kn}^2 - \sigma_{k-1,n}^2 = \frac{1}{2n} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (n_i n_{i+1} - n_i^2) + n_n n_1 - n_n^2 \right\}_{k-1} . \quad (A.8)$$

Se (A.5) for verdadeira, então os dois lados da (A.8) são negativos, ou idênticamente nulos, caso todos os valores representativos sejam igualmente idênticos (solução trivial). Para tanto, vamos supor que o conjunto dos valores representativos $n_{k-1,i}$ seja ordenado da forma

$$n_{k-1,i} \rightarrow n'_{k-1,u} \quad (u=1,2,\dots,n)$$

tal que

$$n'_{k-1,u} \leq n'_{k-1,u+1} \quad , \quad n'_{k-1,n+1} = n'_{k-1,1} \quad (A.9)$$

ou ainda,

$$n'_{k-1,u} = n'_{k-1,1} + \delta_{k-1,u} \quad , \quad \delta_{k-1,u} \geq 0 \quad . \quad (A.10)$$

Substituindo (A.10) em (A.8) teremos

$$\sigma_{kn}^2 - \sigma_{k-1,n}^2 = \frac{1}{2n} \left\{ \sum_{u=1}^{n-1} \left[(n'_1 + \delta_u)(n'_1 + \delta_{u+1}) - (n'_1 + \delta_u)^2 \right] + (n'_1 + \delta_n)(n'_1 + \delta_1) - (n'_1 + \delta_n)^2 \right\}_{k-1} ;$$

e expandindo

$$\begin{aligned} \sigma_{kn}^2 - \sigma_{k-1,n}^2 &= \frac{1}{2n} \left[\delta_1 \delta_2 + \delta_2 \delta_3 + \delta_3 \delta_4 + \dots + \right. \\ &\quad + \delta_{n-1} \delta_n + \delta_n \delta_1 + n_1' (\delta_1 + 2\delta_2 + 2\delta_3 + \\ &\quad + \dots + 2\delta_n + \delta_1) - 2n_1' (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 + \dots + \\ &\quad \left. + \dots + \delta_n) - (\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \dots + \delta_n^2) \right]_{k-1} \dots \end{aligned}$$

Como $\delta_1 = 0$, em (A.10), segue

$$\sigma_{kn}^2 - \sigma_{k-1,n}^2 = \frac{1}{2n} \sum_{u=2}^n (\delta_{u-1} \delta_u - \delta_u^2)_{k-1} \quad . \quad (A.11)$$

Agora, (A.9) também diz que

$$n_{k-1,u-1}' \leq n_{k-1,u}' \leq n_{k-1,u+1}' \quad , \quad (A.12)$$

e pela respectiva substituição de (A.10) em (A.12) podemos escrever

$$n_{k-1,1}' + \delta_{k-1,u-1} \leq n_{k-1,1}' + \delta_{k-1,u} \quad .$$

Portanto

$$\delta_{k-1,u-1} \leq \delta_{k-1,u} \quad ,$$

e multiplicando os dois lados desta desigualdade por $\delta_{k-1,u}'$

vem que

$$\delta_{k-1,u} \delta_{k-1,u-1} \leq \delta_{k-1,u}^2 \quad ;$$

ou seja

$$(\delta_{u-1} \delta_u - \delta_u^2)_{k-1} \leq 0 \quad . \quad (A.13)$$

Finalmente substituímos (A.13) em (A.11) e obteremos

$$\sigma_{kn}^2 - \sigma_{k-1,n}^2 \leq 0 \quad , \quad (A.14)$$

que contém a solução trivial; mas a solução geral prova que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{kn}^2 = 0 \quad ,$$

como estabelecido em (A.5), porque a variância, ou distância média quadrática, nunca é negativa e isto implica que existe um valor máximo M , tal que

$$\left| \sigma_{M+1,n}^2 - \sigma_{Mn}^2 \right| \leq \epsilon^2$$

onde ϵ é um valor mínimo de resolução, atingido quando o desvio padrão $\sqrt{\sigma_{Mn}^2}$ for da ordem de grandeza da incerteza nas medidas do conjunto inicial de coordenadas.

Para um processo de atribuição com $k \geq 3$ o conjunto dos valores representativos com atribuição de grau $k-1$ presuppõe a existência de um outro conjunto com atribuição de grau $k-2$, de tal forma, que em virtude da natureza recursiva deste processo, a diferença não nula entre as variâncias em (A.11) poderá ser, de fato, expressa em termos do próprio conjunto inicial ($k=0$) de coordenadas n_{0i} . Isto é,

$$\sigma_{kn}^2 - \sigma_{k-1,n}^2 = \frac{1}{2^k n} \sum_{i=2}^n \left[\left(\sum_{j=1}^n \beta_{kj}^{(i-1)} n_{0j} \right) \left(\sum_{j=1}^n \beta_{kj}^{(i)} n_{0j} \right) - \left(\sum_{j=1}^n \beta_{kj}^{(i)} n_{0j} \right)^2 \right], \quad (\text{A.15})$$

onde o índice superior entre parêntesis especifica a matriz dos coeficientes de ponderação $\beta_{kj}^{(i)}$, referente a diferença δ_i cujo elemento na k -ésima linha e na j -ésima coluna multiplica a j -ésima coordenada n_{0j} .

Estes coeficientes obedecem às seguintes fórmulas recursivas

$$\beta_{kj}^{(i)} = \begin{cases} \beta_{k-1,j-1}^{(i)} + \beta_{k-1,j}^{(i)}, & j \neq 1 \\ \beta_{k-1,n}^{(i)} + \beta_{k-1,1}^{(i)}, & j = 1 \end{cases}, \quad (\text{A.16})$$

onde

$$\beta_{lj}^{(i)} = \begin{cases} -1, & j = 1 \text{ e } i \neq 1 \\ 0, & j \neq i \text{ ou } i = 1 \text{ e } j \neq 1 \\ +1, & j = i \text{ e } i \neq 1 \end{cases}$$

§ Exemplo A.1: Para $n = 7$ e $i = 5$, as 6 primeiras linhas da matriz são

$$[\beta_{kj}^{(5)}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ \bullet & -3 & -3 & -1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & -6 & -4 & \bullet & 4 & 6 \\ 9 & \bullet & -9 & -10 & -4 & 4 & 10 \end{bmatrix} ,$$

onde (•) denota uma anulação dos coeficientes; e se a variância da atribuição de grau $k = 4$ estiver sendo comparada com a variância da atribuição de grau $k = 3$ então

$$\sum_{j=1}^7 \beta_{4j}^{(5)} n_{0j} = -3n_{02} - 3n_{03} - n_{04} + n_{05} + 3n_{06} + 3n_{07} .$$

Da mesma forma o i -ésimo valor representativo após a k -ésima iteração é dado por

$$n_{ki} = \frac{1}{2^k} \sum_{j=1}^n \lambda_{k+1,j}^{(i)} n_{0j} , \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\lambda_{k+1,j}^{(i)} = \begin{cases} \lambda_{k,j-1}^{(i)} + \lambda_{kj}^{(i)} , & j \neq 1 \\ \lambda_{kn}^{(i)} + \lambda_{k1}^{(i)} , & j = 1 \end{cases} , \quad (\text{A.18})$$

e

$$\lambda_{lj}^{(i)} = \begin{cases} 1 , & i = j \\ 0 , & i \neq j \end{cases}$$

Exemplo A.2: Para $n = 7$ e $i = 5$, as 6 primeiras linhas da matriz são

$$[\lambda_{kj}^{(5)}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 10 & 5 & 0 & 0 & 1 & 5 & 10 \end{bmatrix} ,$$

e, conseqüentemente, para a atribuição de grau $k = 4$

$$n_{45} = \frac{1}{2^4} \sum_{j=1}^7 \lambda_{5j}^{(5)} n_{0j} = \frac{1}{2^4} (4n_{01} + n_{02} + n_{05} + 4n_{06} + 6n_{07}) .$$

Notemos também que ocorre uma verdadeira "interação destrutiva" entre dois triângulos de Pascal durante a construção dos coeficientes de ponderação em (A.15)

$$\beta_{kj}^{(i)} = \lambda_{kj}^{(i)} - \lambda_{kj}^{(1)} . \quad (\text{A.19})$$

Nós sentimos intuitivamente que o processo de atribuição procura estabelecer um equilíbrio, cuja definição se torna mais precisa à medida que o número de iterações aumenta. Pela definição do valor representativo, vemos logo que a média aritmética é confinada a uma posição *interna* ao intervalo de distância que compreende o segmento linear; e logicamente deduzimos que o processo de atribuição consiste numa série de determinações de posições que tendem ao equilíbrio. Tratando-se, no en-

tanto, de um processo ininterrupto, como é característico das sequências cíclicas, esperamos que estas posições de equilíbrio se tornem cada vez mais indistintas umas das outras. Em outras palavras, o processo inverso permitirá estabelecer a distribuição inicial das coordenadas de posição a partir de uma *singularidade num tempo infinito*. A rigor, a média aritmética das coordenadas seria inexistente, mas devido a resolução de nossos instrumentos de medida ela pode ser constatada, da mesma forma que o valor esperado de um conjunto de valores igualmente prováveis é previsto na teoria da probabilidade (*).

Já vimos como a atribuição de grau $n-1$ estabelecia uma distribuição discreta de probabilidade, dada por (1.7), para uma sequência de segmentos lineares. Mas no caso da sequência cíclica, qualquer uma das coordenadas pode dar início à esta sequência, e portanto, as probabilidades (1.7) devem ser atribuídas, cada uma, n vezes de forma cíclica, como está implícito nas fórmulas recursivas (A.18). O resultado poderá então ser descrito em termos de uma matriz cíclica de probabilidades de transição ρ_{ij} , conhecida na literatura por *cadeias de Markov* (Ref. 4; Capítulo XV); ou seja

(*) O equilíbrio macroscópico na física é um bom exemplo disto, pois ele é apenas o resultado da observação simultânea de um número grande de processos, que individualmente *desobedecem* à qualquer noção de equilíbrio estatístico.

$$\frac{1}{2^{n-1}} \begin{bmatrix} \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \dots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} \\ \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} & \dots & \binom{n-1}{n-3} & \binom{n-1}{n-2} \\ \binom{n-1}{n-2} & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} & \dots & \binom{n-1}{n-4} & \binom{n-1}{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & \binom{n-1}{4} & & \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} \\ \binom{n-1}{1} & \binom{n-1}{2} & \binom{n-1}{3} & & \binom{n-1}{n-1} & \binom{n-1}{0} \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} n_{01} \\ n_{02} \\ n_{03} \\ \vdots \\ n_{0,n-1} \\ n_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{n-1,1} \\ n_{n-1,2} \\ n_{n-1,3} \\ \vdots \\ n_{n-1,n-1} \\ n_{n-1,n} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Dada uma configuração inicial do conjunto de coordenadas n_{0j} , a distribuição inicial de probabilidades

$$\rho_{ij} = \frac{1}{2^{n-1}} \binom{n-1}{j-i}, \quad j - i < 0 \rightarrow n + j - i \quad (\text{A.21})$$

é dita estacionaria, e as probabilidades absolutas devem ser independentes do número de transições. Uma transição no processo de atribuição requer a execução de $n-1$ iterações; e quando se fala em: "O sistema possui uma *propabilidade de transição* do estado E_i para o estado E_j ", queremos dizer, que ρ_{ij} é a fração da coordenada n_j presente no valor representativo n_i . Se a seguir considerarmos uma segunda transição, então ρ_{ij} será agora a fração do valor representativo n_j presente no valor representativo n_i após uma segunda série de $n-1$ iterações. Na terminologia do processo Markov teremos

$$\sum_{j=1}^n \rho_{ij}^{(2)} n_{0j} = n_{2(n-1),i} \quad , \quad (\text{A.22})$$

onde $\rho_{ij}^{(2)}$ são as probabilidades de transição de passo 2 resultantes da multiplicação da matriz P das probabilidades ρ_{ij} por ela mesma. Analogamente, seja N_0 o vetor das coordenadas n_{0j} ; para então poder escrever (A.22) na forma

$$P^2 N_0 = N_2 \quad , \quad (\text{A.23})$$

ou em geral

$$P^m N_0 = N_m \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad . \quad (\text{A.24})$$

Por último, como a cadeia de Markov associada a ρ_{ij} é finita, irredutível e aperiódica, podemos utilizar a propriedade de ergódica que diz

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_{ij}^{(m)} = u_j, \quad (\text{A.25})$$

onde u_j é o inverso do seu *tempo médio de recorrência*, e concluir, que para a matriz *duplamente estocástica* P (tanto as linhas como as colunas somam 1), após um número infinito de transições (atribuição ininterrupta) todos os estados de transição (coordenadas de posição) serão igualmente prováveis. Portanto

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \rho_{ij}^{(m)} n_{0j} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n n_{0j} = \mu \quad (\text{A.26})$$

que estabelece, mais uma vez, a média aritmética μ como limite assintótico do processo de atribuição para as sequências cíclicas.

Devemos, portanto, lembrar que a convergência assintótica do processo de atribuição de valores representativos para sequências cíclicas possibilita traçar a evolução da tendência ao equilíbrio, desde seus vestígios mais remotos, em termos do comportamento individual dos elementos entre si, até a noção do próprio equilíbrio macroscópico como resultado de um comportamento simultâneo de todos os equilíbrios locais. Esta relação constitui um ponto de partida sem precedentes, que poderá tornar-se muito vantajoso e de particular significância, pois como o Feller diz: "Muitas discussões prolongadas e conclusões errôneas poderiam ser evitadas se levarmos em conta o fato de que a noção do equilíbrio estatístico (ou estado estacionário) não diz nada a respeito do comportamento da partícula individual".

Por último, torna-se necessário um comentário sobre o processo de convergência evidenciado nos gráficos apresentados neste projeto (Capítulo 6b). Eu me refiro ao fato, de que o desenvolvimento matemático até agora constatado se presta, apenas, para comportar uma convergência assintótica no caso de sequências cíclicas, cuja ordem de elementos se configura sem ambiguidades em uma única dimensão. Mas logo, vê-se que a bidimensionalidade dos referenciais cartesianos inutiliza a aplicação imediata deste pressuposto básico; e mesmo assim, não deixa de se comprometer com as conclusões deste Apêndice, a partir do momento que começa a se delinear um contorno de características elípticas. Este sim, poderá ser decomposto no acompanhamento de duas sequências cíclicas unidimensionais, e perpendiculares entre si, ao longo de cada um dos eixos cartesianos. No entanto, uma descrição completa estaria além dos objetivos deste Apêndice, pois ela implica numa extensão dos conceitos para o âmbito da topologia. Pessoalmente, eu acredito que um tratamento deste problema a nível das variedades não euclidianas possa ser um tema para futuras pesquisas, no qual o processo geral de Markov possa estar envolvido. Mas desde já, podemos concluir, que diante do processo de atribuição, toda configuração cíclica num espaço não euclidiano se degenera em sequências cíclicas do espaço euclidiano.

TABELA B.1

Componentes de distância galáticos para aglomerados globulares (1). (Ref. 1 - Tabela III)

NGC	D_0	X	Y	Z	r	NGC	D_0	X	Y	Z	r
104	4.6	1.9	-2.7	-3.3	7.8	6355	6.6	6.6	-0.1	0.6	2.0
288	8.7	-0.1	0.1	-8.7	12.2	6356	18.9	18.4	2.2	3.3	10.7
362	8.9	3.2	-5.2	-6.4	9.8	6362	7.1	5.6	-3.8	-2.1	5.3
1261	13.4	0.1	-8.2	-10.6	15.8	6366	4.5	4.1	1.4	1.2	4.8
Pal 1	45.8	-27.8	33.2	15.0	51.4	6388	14.3	13.7	-3.5	-1.7	6.5
1851	10.8	-3.8	-8.0	-6.2	15.9	6397	2.4	2.2	-0.9	-0.5	6.4
1904	13.5	-8.0	-8.6	-6.6	19.8	6401	6.3	6.3	0.4	0.4	2.3
2298	12.2	-4.9	-10.7	-3.4	17.5	6402	9.9	9.0	3.5	2.5	4.3
2419	92.9	-84.0	-0.6	39.7	100.7	Pal 6	2.6	2.6	0.1	0.1	5.9
2808	9.2	1.9	-8.9	-1.8	11.2	6426	15.7	13.3	7.1	4.4	9.6
Pal 3	95.5	-35.3	-61.7	63.8	99.0	6440	4.1	4.1	0.6	0.3	4.5
3201	4.4	0.6	-4.3	0.7	9.1	6441	10.1	10.0	-1.1	-0.9	2.1
Pal 4	93.3	-27.0	-11.1	88.7	96.1	6496	6.5	6.3	-1.3	-1.1	2.8
4147	17.5	-1.2	-3.7	17.1	19.9	6517	7.4	6.9	2.4	0.9	3.0
4372	4.8	2.5	-4.1	-0.8	7.3	6522	6.3	6.3	0.1	-0.4	2.3
4590	9.6	3.8	-6.7	5.7	10.0	6528	7.3	7.3	0.1	-0.5	1.3
4833	5.4	2.9	-4.4	-0.8	7.1	6535	9.6	8.4	4.3	1.7	4.7
5024	17.2	2.7	-1.4	16.9	17.9	6539	2.2	2.0	0.8	0.3	6.5
5053	15.1	2.7	-1.2	14.9	16.0	6541	6.8	6.6	-1.2	-1.3	2.6
5139	5.2	3.1	-3.9	1.3	6.7	6544	4.2	4.2	0.4	-0.2	4.3
5272	10.0	1.5	1.3	9.8	12.2	6553	5.6	5.6	0.5	-0.3	3.0
5286	8.8	5.7	-6.5	1.6	7.2	6558	9.0	9.0	0.0	-0.9	1.1
5466	14.4	3.0	2.7	13.8	15.1	IC1276	12.4	11.4	4.6	1.2	5.6
5634	21.6	13.4	-4.3	16.4	17.6	6569	7.7	7.6	0.1	-0.9	1.3
5694	29.3	22.4	-12.1	14.6	23.5	6584	16.1	14.7	-4.8	-4.6	9.1
IC4499	18.4	10.5	-13.7	-6.5	15.3	6624	7.5	7.4	0.4	-1.0	1.5
5824	23.5	19.4	-10.0	8.9	17.2	6626	5.8	5.7	0.8	-0.6	3.0
Pal 5	26.7	18.6	0.3	19.2	21.7	6637	10.4	10.3	0.3	-1.9	2.6
5897	12.0	9.9	-3.0	6.1	6.9	6638	13.3	13.0	1.8	-1.7	5.2
5904	7.2	4.9	0.3	5.2	6.4	6642	5.3	5.2	0.9	-0.6	3.5
5927	7.2	6.0	-4.0	0.6	4.7	6652	21.3	20.8	0.6	-4.2	13.0
5946	9.3	7.9	-5.0	0.7	5.1	6656	3.0	2.9	0.5	-0.4	5.6
5986	10.0	9.0	-3.8	2.3	4.5	Pal 8	30.3	29.2	7.3	-3.6	22.3
6093	8.3	7.7	-1.0	2.8	3.0	6681	10.8	10.5	0.5	-2.3	3.2
6101	12.2	8.7	-7.9	-3.3	8.6	6712	7.4	6.7	3.2	-0.6	3.7
6121	2.4	2.3	-0.4	0.7	6.3	6715	21.4	20.6	2.0	-5.2	13.3
6139	8.9	8.5	-2.7	1.1	2.9	6717	15.2	14.5	3.3	-2.9	7.5
6144	7.6	7.3	-1.0	2.1	2.6	6723	9.0	8.6	0.0	-2.7	2.7
6171	5.8	5.3	0.3	2.3	3.9	6752	4.3	3.6	-1.6	-1.9	5.5
6205	7.2	2.8	4.7	4.7	8.7	6760	3.8	3.1	2.2	-0.3	5.6
6218	5.4	4.7	1.3	2.4	4.7	6779	9.4	4.3	8.3	1.4	9.4
6229	27.1	5.8	19.9	17.6	26.6	Pal 10	8.5	5.2	6.7	0.4	7.5
6235	11.7	11.4	-0.2	2.7	4.0	6809	5.7	5.2	0.8	-2.2	4.1
6254	4.4	3.9	1.0	1.7	5.1	Pal 11	26.4	21.6	13.4	-7.1	20.0
6266	5.9	5.8	-0.7	0.8	2.8	6838	3.9	2.2	3.3	-0.3	7.2
6273	10.5	10.3	-0.6	1.7	2.5	6864	18.1	15.3	5.7	-7.9	11.8
6284	10.5	10.4	-0.3	1.8	2.6	6934	14.6	8.5	10.9	-4.7	11.9
6287	8.4	8.2	0.0	1.6	1.6	6981	17.3	11.9	8.4	-9.4	13.0
6293	7.5	7.4	-0.3	1.0	1.5	7006	34.5	14.4	29.2	-11.5	31.9
6304	5.2	5.2	-0.4	0.5	3.4	7078	10.1	3.8	8.2	-4.7	10.5
6316	10.6	10.5	-0.5	1.1	2.3	7089	11.2	5.4	7.3	-6.6	10.3
6325	6.5	6.4	0.1	0.9	2.3	7099	8.2	5.0	2.6	-6.0	7.4
6333	8.0	7.8	0.8	1.5	1.8	Pal 12	61.2	35.5	20.9	-45.3	56.7
6341	7.8	2.4	6.0	4.5	9.7	Pal 13	24.4	0.9	17.9	-16.5	25.5
6342	15.0	14.8	1.3	2.5	6.9	7492	21.9	5.8	7.8	-19.6	21.3
6352	5.4	5.0	-1.7	-0.7	3.9						

(1) Todas as distâncias em kiloparsecs. Os valores de r foram calculados supondo $R_0 = 8.5$ kpc.

Valores Representativos e Tendências Estruturais
do Parâmetro de Desvio Horizontal.

TABELA B.2
TESTE 1 ($R_0 = 8.0$ kpc)

$x_{ij} \geq y_{ij}$			ij	$x_{ij} < y_{ij}$		
N	\bar{w}	τ		N	\bar{w}	τ
4	59.12	-	1A	6	54.25	-
2	48.31	-	1B	9	56.83	+
13	58.55	-	2A	6	57.46	+
14	60.13	+	2B	5	52.87	-
6	58.91	-	3A	10	58.16	+
4	61.55	+	3B	11	58.70	+
7	59.70	+	4A	3	59.74	+
3	60.06	+	4B	2	44.49	-
C = 59.13 kpc $k_x = 1$				C = 56.57 kpc $k_y = 2$		

N = número de aglomerados globulares
w = valor representativo em kpc.
 τ = tendência estrutural (seu estado de polaridade)
C = valor característico
k = defasagem

TABELA B.3
TESTE 2 ($R_0 = 8.4$ kpc)

$x_{ij} \geq y_{ij}$			ij	$x_{ij} < y_{ij}$		
N	\bar{w}	τ		N	\bar{w}	τ
3	59.04	+	1A	5	52.89	-
3	52.91	-	1B	8	55.70	-
13	57.72	-	2A	7	57.58	+
14	59.31	+	2B	5	53.61	-
5	58.61	-	3A	12	58.65	+
2	59.89	+	3B	13	59.05	+
7	60.60	+	4A	3	58.97	+
3	60.97	+	4B	2	43.91	-
C = 58.73 kpc $k_x = 3$				C = 56.68 kpc $k_y = 4$		

AGRADECIMENTOS

Sem a compreensão e o acompanhamento que algumas pessoas me proporcionaram para o encaminhamento de minhas propostas, o presente trabalho nunca teria se revestido da terminologia adequada para sua divulgação. Eu gostaria, portanto, de agradecer em particular a Mary Effie Lewis, ^{PUC} Mauricio Nardone ^{COPPE} e Nilo Costa Serpa pela ajuda inestimável; e no Valongo a professora Lilia Irmeli Arany Prado e ao professor Jorge de Albuquerque Vieira pelo estimulante apoio ao desenvolvimento de ideias alternativas desde o começo dos meus estudos acadêmicos.

REFERÊNCIAS

- (Ref. 1) - Harris, W. E. (1976). A. J. 81, 1095.
- (Ref. 2) - Preparata, F. P. e Yeh, R. T. (1973). Em "Introduction to discrete Structures" (Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading-Massachusetts).
- (Ref. 3) - Bose, R. C. e Manvel, B. (1984). Em "Introduction to Combinatorial Theory" (John Wiley & Sons, New York).
- (Ref. 4) - Feller, W. (1957). Em "Introduction to Probability Theory and Its Applications" (John Wiley & Sons, New York), Vol. 1, 2nd ed.
- (Ref. 5) - Yurevich, L. V. (1987). Astrophysics (Engl. Trans.). 23(2), 520.
- (Ref. 6) - Fernley, J. A., Jameson, R. F., Longmore, A. J., Watson, F. G., Wesselink, T. (1987). Mon. Not. R. Astron. Soc.. 226(4), 927.


```

1 DIM X(66):DIM Y(66):DIM R(66)
2 0=0
10 DATA -.97,-.86,-1.1,-.82,-1.05,-.89,-1.08,-1.08,-1.02,-.76,-.9,-.69,-.51,-1.2
2,-.36,-1.42,-.12,-1.01,-.56,-.86,-.4,-.63,-.59,-.59,-.89,-1.39,-1.01,-1.41,.58,
-.23,.1,.08,.23,.33,.79,-1.7,.41,-.16,.04,.75,-.7,-.18,-.88,-.59,-.64,-.22,-.22,
-1.27,.69,1.01
20 DATA -.02,1.53,-.78,-.42,-.53,-.24,1,.33,1.11,.39,-.94,-.91,.97,-.67,-.17,-2.
25
26 DATA -1.06,-.71,-1.09,-.66,-1.38,-.67,-1.55,-.71,-1.1,-.92,-1.21,-.89,-.6,-2.
18,-.41,-1.28,-.06,-.91,-.89,-1.49,-.24,-.09,-.24,.08,-.54,-.48,-.63,-.56,-.12,-
1.17,-.89,-.66,.36,-.74,-.72,-.95,.77,-1.04,-.03,.4,-.57,-1.84,-.61,-2.57,-.42,-
2.31,-1,-3.09
27 DATA -.73,-.35,.02,.99,-1.03,-2.64,-.57,-2.72,.05,-1.52,.09,-1.43,-.07,.41,-.
9,-1.03,-.6,-4.78
30 FOR I= 1 TO 66
35 0 0+1
40 READ X(I):READ Y(I)
45 R(I)=SQR(X(I)^2+Y(I)^2)
70 NEXT I
71 SCREEN 2
72 GOSUB 250
74 FOR I= 1 TO 33
75 X(I)=400+X(I)*300:Y(I)=20+Y(I)*100
76 PSET (X(I),Y(I))
77 NEXT I
78 PSET (1,0):PSET (2,0):PSET (1,100):PSET (2,100)
79 LINE (0,0)-(0,190)
80 LINE (0,190)-(640,190)
81 LINE (0,0)-(640,0)
82 LINE (640,0)-(640,190)
83 FOR I=01 TO 31 STEP .1
84 LINE (10+I*200,10)-(10+I*200,22):LINE (396,1*100)-(404,1*100)
85 NEXT I
86 LINE (400,0)-(300,200):LINE (0,20)-(640,20)
100 FOR I= 1 TO 100
110 FOR J=1 TO 32
120 X(J)=(X(J)+X(J+1))/2:Y(J)=(Y(J)+Y(J+1))/2
130 NEXT J
140 GOSUB 301
150 GOSUB 250
160 NEXT I
210 FOR I=34 TO 66
211 X(I)=400+X(I)*300:Y(I)=20+Y(I)*100
212 PSET (X(I),Y(I))
215 NEXT I
220 FOR I=1 TO 100
225 FOR J=34 TO 66
227 X(J)=(X(J)+X(J+1))/2:Y(J)=(Y(J)+Y(J+1))/2
228 NEXT J
229 GOSUB 401
230 FOR C=34 TO 66
233 PSET (X(C),Y(C))
234 NEXT C
235 NEXT I
249 END
250 FOR C=1 TO 33
260 PSET (X(C),Y(C))
270 NEXT C
300 RETURN
301 S1=0:S2=0:S3=0:S4=0
303 FOR F=1 TO 16
305 S1=S1+X(2*F-1):S2=S2+Y(2*F-1)
306 S3=S3+X(2*F):S4=S4+Y(2*F)
307 NEXT F
308 X(33)=S1-S3+X(33):Y(33)=S2-S4+Y(33)
310 RETURN
401 S1=0:S2=0:S3=0:S4=0
403 FOR F=1 TO 16
405 S1=S1+X(2*F+33):S2=S2+Y(2*F+33)
406 S3=S3+X(2*F+34):S4=S4+Y(2*F+34)
407 NEXT F
408 X(66)=S1-S3+X(66):Y(66)=S2-S4+Y(66)
410 RETURN

```



```

10 A1=0:A2=0:A3=0:A4=0:B1=0:B2=0:B3=0:B4=0:C1=0:C2=0:C3=0:C4=0:D1=0:D2=0:D3=0:D4
=0
15 DIM V(105):DIM W(16):DIM L(105):DIM Q(16): DIM R(16): DIM U(16):DIM N(105)
20 DIM X(105):DIM Y(105):DIM Z(105):DIM T(105)
30 DATA 1.9,-2.7,-3.3,3,-1,.1,-8.7,1,3.2,-5.2,-6.4,2,.1,-8.2,-10.6,2,-3.8,-8,-6
.2,2,-8,-8.6,-6.6,2,-4.9,-10.7,-3.4,2,1.9,-8.9,-1.8,2,.6,-4.3,.7,2,-1.2,-3.7,17.
1,1,2.5,-4.1,-.8,1,3.8,-6.7,5.7,1,2.9,-4.4,-.8,1,2.7,-1.4,16.9,1,2.7,-1.2,14.9,1
,3.1,-3.9,1,3,2
40 DATA 1.5,1.3,9.8,2,5.7,-6.5,1.6,2,3,2.7,13.8,1,13.4,-4.3,16.4,1,22.4,-12.1,14
.6,1,10.5,-13.7,-6.5,2,19.4,-10,8.9,1,18.6,3,19.2,1,9.9,-3,6.1,1,4.9,.3,5.2,1,6
,-4,-.6,3,7.9,-5,.7,2,7.7,-1,2.8,2,8.7,-7.9,-3.3,1,2.3,-.4,.7,2,8.5,-2.7,1,1,2,7.
3,-1,2.1,2,5.3
41 DATA .3,2.3,3,2.8,4.7,4.7,1,4.7,1,3,2.4,2,5.8,19.9,17.6,2,11.4,-.2,2.7,2,3.9,
1,1.7,2,5.8,-.7,.8,2,10.3,-.6,1.7,1,10.4,-.3,1.8,2,8.2,0,1.6,3,7.4,-.3,1,1,5.2,-
.4,.5,3,10.5,-.5,1.1,3,6.4,.1,.9,2,7.8,.8,1.5,1,2.4,6.4,5.1,14.8,1,3,2.5,3,5,-1.
7,-.7,3,6.6,-.1
42 DATA .6,3,18.4,2,2,3,3,3,5.6,-3.8,-2.1,2,4.1,1.4,1,2,3,13.7,-3.5,-1.7,3,2,2,-
.9,-.5,1,6.3,-.4,.4,2,9,3.5,2.5,2,2.6,.1,.1,1,13.3,7.1,4.4,2,4.1,.6,.3,3,10,-1.1,
-.9,3,6.3,-1.3,-1.1,3,6.9,2.4,.9,2,6.3,.1,-.4,2,7.3,.1,-.5,3,8.4,4.3,1.7,1,2,-.8,
.3,3,6.6,-1.2
43 DATA -1.3,2,4.2,.4,-.2,2,5.6,.6,-.3,3,9,0,-.9,2,11.4,4.6,1,2,3,7.6,.1,-.3,3,1
4.7,-4.8,-4.6,2,7.4,.4,-1,3,5.7,.8,-.6,2,10.3,.3,-1.3,3,13,1.8,1,7,3,5.2,.9,-.6,
2,20.8,.6,-4.2,3,2.9,.5,-.4,1,29.2,7.3,-3.6,3,10.5,.5,2.3,3,6.7,3.2,-.6,3,20.6,2
,-5.2,2,14.5
44 DATA 3.3,-2.9,3,8.6,8,-2.7,3,3.6,-1.6,-1.9,2,3.1,2.2,-.3,2,4.3,0.3,1.4,1,5.2,
6.7,-.4,1,5.2,.8,-2.2,1,21.6,13.4,-7.1,1,2.2,3.3,-.3,3,15.3,5.7,-7.9,2,8.5,10.9,-
4.7,2,11.9,6.4,-9.4,3,3.8,8.2,-4.7,1,5.4,7.3,-6.6,1,5,2.6,-6,1,.9,17.9,-16.5,1,5
.8,7.8,-19.6,1
45 DATA 9,-3.8,2.3,2
49 E=0
50 DIM W1AX(20):DIM W1AY(20):DIM W1BX(20):DIM W1BY(20):DIM W2AX(20):DIM W2AY(20)
:DIM W2BX(20):DIM W2BY(20):DIM W3AX(20):DIM W3AY(20):DIM W3BX(20):DIM W3BY(20):D
IM W4AX(20):DIM W4AY(20):DIM W4BX(20): DIM W4BY(20)
53 FOR I=1 TO 105
54 L=E+1
55 READ X(I):READ Y(I):READ Z(I):READ T(I)
56 LPRINT " ", X(I) TAB(25) Y(I) TAB(45) Z(I) TAB(57) "#".E TAB(65) T(I)
59 NEXT I
60 FOR D=1 TO 1
61 LPRINT:LPRINT:LPRINT " THE H.D.P. OF THE D = ".D." CLUSTER F
AMILY "
62 INPUT D:INPUT W=D:D=E=0 :LPRINT
63 RESTORE
64 A1=0:A2=0:A3=0:A4=0:B1=0:B2=0:B3=0:B4=0:C1=0:C2=0:C3=0:C4=0:D1=0:D2=0:D3=0:D4
=0
65 FOR I 1 TO 105
66 READ X(I):READ Y(I):READ Z(I):READ T(I)
67 E=E+1
69 D=D+1
75 X(0)=X(I)-D:Y(0)=Y(I)+W:Z(0)=Z(I)
77 DEF FNG(I)=64*(32-ABS(Y(I)))/(32-ABS(X(0)))
78 DEF FNH(I)=64*(32-ABS(X(0)))/(32-ABS(Y(I)))
80 IF X(0)>0 AND Y(1)>0 THEN GOTO 100
85 IF X(0)<0 AND Y(1)>0 THEN GOTO 200
86 IF X(0)<0 AND Y(1)<0 THEN GOTO 300
87 IF X(0)>0 AND Y(1)<0 THEN GOTO 400
100 IF Z(1)<0 THEN GOTO 150
105 IF ABS(X(0))>=ABS(Y(1)) THEN GOTO 130
110 A1=A1+1:W1AX(A1)=FNG(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W1AX(A1):GOTO 495
130 A2=A2+1:W1AY(A2)=FNH(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W1AY(A2):GOTO 495
150 IF ABS(X(0))>=ABS(Y(1)) THEN GOTO 180
160 A3=A3+1:W1BX(A3)=FNG(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W1BX(A3):GOTO 495
180 A4=A4+1:W1BY(A4)=FNH(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W1BY(A4):GOTO 495
200 IF Z(1)<0 THEN GOTO 250
205 IF ABS(X(0))<=ABS(Y(1)) THEN GOTO 230
210 B1=B1+1:W2AX(B1)=FNG(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W2AX(B1):GOTO 495
230 B2=B2+1:W2AY(B2)=FNG(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W2AY(B2):GOTO 495
250 IF ABS(X(0))<=ABS(Y(1)) THEN GOTO 280
260 B3=B3+1:W2BX(B3)=FNH(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W2BX(B3):GOTO 495
280 B4=B4+1:W2BY(B4)=FNG(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W2BY(B4):GOTO 495
300 IF Z(1)<0 THEN GOTO 350
305 IF ABS(X(0))>=ABS(Y(1)) THEN GOTO 330
310 C1=C1+1:W3AX(C1)=FNG(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W3AX(C1):GOTO 495
330 C2=C2+1:W3AY(C2)=FNH(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W3AY(C2):GOTO 495
350 IF ABS(X(0))>=ABS(Y(1)) THEN GOTO 380
360 C3=C3+1:W3BX(C3)=FNG(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W3BX(C3):GOTO 495
380 C4=C4+1:W3BY(C4)=FNH(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W3BY(C4):GOTO 495
400 IF Z(1)<0 THEN GOTO 450
405 IF ABS(X(0))<=ABS(Y(1)) THEN GOTO 430
410 D1=D1+1:W4AX(D1)=FNH(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W4AX(D1):GOTO 495
430 D2=D2+1:W4AY(D2)=FNG(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W4AY(D2):GOTO 495
450 IF ABS(X(0))<=ABS(Y(1)) THEN GOTO 480
460 D3=D3+1:W4BX(D3)=FNH(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W4BX(D3):GOTO 495
480 D4=D4+1:W4BY(D4)=FNG(I):LPRINT " " TAB(30) "#".E TAB(40) W4BY(D4):GOTO 495
495 NEXT I

```



```

485 H=1
488 J=0
500 V=A1
501 J=J+1
505 IF V=0 THEN GOTO 520
510 FOR I=1 TO V
515 V(I)=W1AX(I):NEXT I:GOTO 525
520 W(J)=0:GOTO 600
525 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 580
535 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 600
580 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
600 V=A2
601 J=J+1
605 IF V=0 THEN GOTO 620
610 FOR I=1 TO V
615 V(I)=W1AY(I):NEXT I:GOTO 625
620 W(J)=0:GOTO 700
625 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 680
635 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 700
680 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
700 V=A3
701 J=J+1
705 IF V=0 THEN GOTO 720
710 FOR I=1 TO V
715 V(I)=W1BX(I):NEXT I:GOTO 725
720 W(J)=0:GOTO 800
725 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 780
735 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 800
780 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
800 V=A4
801 J=J+1
805 IF V=0 THEN GOTO 820
810 FOR I=1 TO V
815 V(I)=W1BY(I):NEXT I:GOTO 825
820 W(J)=0:GOTO 900
825 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 880
835 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 900
880 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
900 V=01
901 J=J+1
905 IF V=0 THEN GOTO 920
910 FOR I=1 TO V
915 V(I)=W2AX(I):NEXT I:GOTO 925
920 W(J)=0:GOTO 1000
925 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 980
935 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 1000
980 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
1000 V=02
1001 J=J+1
1005 IF V=0 THEN GOTO 1020
1010 FOR I=1 TO V
1015 V(I)=W2AY(I):NEXT I:GOTO 1025
1020 W(J)=0:GOTO 1100
1025 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 1080
1035 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 1100
1080 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
1100 V=03
1101 J=J+1
1105 IF V=0 THEN GOTO 1120
1110 FOR I=1 TO V
1115 V(I)=W2BX(I):NEXT I:GOTO 1125
1120 W(J)=0:GOTO 1200
1125 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 1180
1135 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 1200
1180 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
1200 V=04
1201 J=J+1
1205 IF V=0 THEN GOTO 1220
1210 FOR I=1 TO V
1215 V(I)=W2BY(I):NEXT I:GOTO 1225
1220 W(J)=0:GOTO 1300
1225 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 1280
1235 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 1300
1280 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
1300 V=01
1301 J=J+1
1305 IF V=0 THEN GOTO 1320
1310 FOR I=1 TO V
1315 V(I)=W3AX(I):NEXT I:GOTO 1325
1320 W(J)=0:GOTO 1400
1325 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 1380
1335 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 1400
1380 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2

```

```

1400 V=C1
1401 J=J+1
1405 IF V=0 THEN GOTO 1420
1410 FOR I=1 TO V
1415 V(I)=W1AY(I):NEXT I:GOTO 1425
1420 W(J)=0:GOTO 1500
1425 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 1480
1435 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 1500
1400 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
1500 V=C3
1501 J=J+1
1505 IF V=0 THEN GOTO 1520
1510 FOR I=1 TO V
1515 V(I)=W30X(I):NEXT I:GOTO 1525
1520 W(J)=0:GOTO 1600
1525 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 1580
1535 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 1600
1500 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
1600 V=C4
1601 J=J+1
1605 IF V=0 THEN GOTO 1620
1610 FOR I=1 TO V
1615 V(I)=W30Y(I):NEXT I:GOTO 1625
1620 W(J)=0:GOTO 1700
1625 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 1680
1635 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 1700
1600 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
1700 V=D1
1701 J=J+1
1705 IF V=0 THEN GOTO 1720
1710 FOR I=1 TO V
1715 V(I)=W1AX(I):NEXT I:GOTO 1725
1720 W(J)=0:GOTO 1800
1725 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 1780
1735 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 1800
1700 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
1800 V=D2
1801 J=J+1
1805 IF V=0 THEN GOTO 1820
1810 FOR I=1 TO V
1815 V(I)=W1AY(I):NEXT I:GOTO 1825
1820 W(J)=0:GOTO 1900
1825 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 1880
1835 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 1900
1800 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
1900 V=D3
1901 J=J+1
1905 IF V=0 THEN GOTO 1920
1910 FOR I=1 TO V
1915 V(I)=W40X(I):NEXT I:GOTO 1925
1920 W(J)=0:GOTO 2000
1925 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 1980
1935 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 2000
1900 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
2000 V=D4
2001 J=J+1
2005 IF V=0 THEN GOTO 2020
2010 FOR I=1 TO V
2015 V(I)=W40Y(I):NEXT I:GOTO 2025
2020 W(J)=0:GOTO 2500
2025 IF (V=1) OR (V=2) THEN GOTO 2080
2035 GOSUB 3000:W(J)=L(1):GOTO 2500
2000 IF V=1 THEN W(J)=V(1) ELSE W(J)=(V(1)+V(2))/2
2500 Q(1)=A1:Q(2)=A2:Q(3)=A3:Q(4)=A4:Q(5)=B1:Q(6)=B2:Q(7)=B3:Q(8)=B4:Q(9)=C1:Q(10)=C2:Q(11)=C3:Q(12)=C4:Q(13)=D1:Q(14)=D2:Q(15)=D3:Q(16)=D4
2505 W=0:Q=0:R=0:U=0
2507 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT:PRINT " " TAB(15) "THE X SEQUENCE" TAB(50) "THE Y SEQUENCE"
2510 FOR I=1 TO 8
2512 Q=Q+Q(2*1-1):R=R+Q(2*1)
2514 W=W+Q(2*1-1)*W(2*1-1):U=U+Q(2*1)*W(2*1)
2522 PRINT:PRINT " " TAB(10) 2*1-1 TAB(17) Q(2*1-1) TAB(25) W(2*1-1) TAB(45) R AT TAB(52) Q(2*1) TAB(60) W(2*1)
2525 NEXT I
2530 PRINT:PRINT:
2540 FOR P=1 TO 8
2545 IF W(2*P-1)=W/0 THEN PRINT " " TAB(15) "1" ELSE PRINT " " TAB(25) "0"
2550 IF W(2*P)=U/R THEN PRINT " " TAB(50) "1" ELSE PRINT " " TAB(60) "0"
2551 NEXT P
2562 PRINT:PRINT " " TAB(20) "WHOSE CHARACTERISTIC VALUES ARE :".PRINT:PRINT " " TAB(17) W/0 TAB(52) U/R
2563 GOSUB 5000
2564 GOSUB 4000
2565 NEXT 0
2566 SAVE "CALA.DRO.DAS"
2789 END
2800 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT " " TAB(15) " THE TOPOLOGICAL SEQUENCE " :PRINT

```



```

3000 K=K+1:L(K)=V(L):GOTO 3070
3010 L=0
3015 L=L+1
3020 FOR N=1 TO V-L-K
3035 IF V(L)>V(N+L) THEN GOTO 3050
3040 IF V-L-K=1 THEN GOTO 3060
3045 GOTO 3015
3050 NEXT N
3055 K=K+1:L(K)=V(L):GOTO 3070
3060 K=K+1:L(K)=V(L+1)
3070 LPRINT " " TAB(30) "L (:K,") = ".L(K)
3071 M=0
3075 FOR S=1 TO V-K+1
3080 IF V(S)-L(K) THEN GOTO 3100
3085 V(S-M)=V(S)
3086 GOTO 3101
3100 M=1
3101 NEXT S
3102 IF V-K<>1 THEN GOTO 3010
3105 L(V)=V(1)
3106 LPRINT " " TAB(30) "L (:V,") = ".L(V)
3110 R=0
3115 R=R+1
3120 FOR U=1 TO V-R
3125 I(U)=(L(U)+L(U+1))/2:NEXT U
3130 IF V-R<>2 THEN GOTO 3115
3131 L(1)=(L(1)+L(2))/2
3132 LPRINT:LPRINT " HAS THE REPRESENTATIVE VALUE OF : ".L(1)
3133 RETURN
4000 V=0
4010 FOR T=1 TO 0
4020 V(T)=X(T)
4030 NEXT T
4040 GOSUB 3000
4050 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT " THE ( X ) GALACTIC CENTER AT ".L(1)." FOR
".V." ".D."- CLUSTER FAMILY"
4055 GOSUB 7000
4060 STOP:CLS:SCREEN 1,1
4100 FOR I=1 TO 0
4105 PSET (160+X(I)*4,100-Y(I)*4)
4110 NEXT I
4115 GOSUB 4500
4120 FOR I=1 TO 0
4125 PSET (160+Z(I)*4,100-X(I)*4)
4130 NEXT I
4135 GOSUB 4500
4140 FOR I=1 TO 0
4145 PSET (160+Y(I)*4,100-Z(I)*4)
4146 NEXT I
4147 GOSUB 4500
4148 FOR I=1 TO 0
4150 PSET (160+Y(I)*4,100-Z(I)*4)
4155 PSET (160+X(I)*4,100-Z(I)*4)
4165 PSET (160+X(I)*4,100-Y(I)*4)
4170 NEXT I
4175 GOSUB 4500
4180 WIDTH 80
4190 RETURN
4500 SCREEN 1,1
4505 LINE (60,10)-(260,10):LINE (260,10)-(260,190)
4510 LINE (60,10)-(60,190):LINE (60,190)-(260,190)
4520 LINE (60,100)-(69,100):LINE (251,100)-(260,100)
4530 LINE (60,60)-(63,60):LINE (257,60)-(260,60)
4535 LINE (60,20)-(63,20):LINE (257,20)-(260,20)
4540 LINE (60,140)-(63,140):LINE (257,140)-(260,140)
4545 LINE (60,180)-(63,180):LINE (257,180)-(260,180)
4550 LINE (160,10)-(160,19):LINE (160,181)-(160,190)
4560 LINE (120,10)-(120,13):LINE (120,187)-(120,190)
4570 LINE (200,10)-(200,13):LINE (200,187)-(200,190)
4580 LINE (240,10)-(240,13):LINE (240,187)-(240,190)
4590 LINE (80,10)-(80,13):LINE (80,187)-(80,190)
4595 STOP:CLS
4600 RETURN

```

```

5000 INPUT H
5005 FOR I=1 TO H
5010 FOR J=1 TO 0
5015 Z(J)=Z(J)
5020 IF (X(J)>0 AND Y(J)>=0) OR (X(J)<0 AND Y(J)<=0) THEN GOTO 5100
5030 IF ABS(Y(J))<ABS(X(J)) THEN GOTO 5040 ELSE GOTO 5200
5040 IF (-Z(J))>0 THEN GOTO 5050 ELSE GOTO 5150
5050 X(J)--X(J)-Y(J)--Y(J):GOTO 5200
5100 IF ABS(Y(J))>ABS(X(J)) THEN GOTO 5140 ELSE GOTO 5200
5140 IF (-Z(J))>=0 THEN GOTO 5050
5150 N(J)=X(J)-X(J)--Y(J):Y(J)=N(J)
5200 NEXT J
5201 NEXT I
5300 INPUT H
5305 FOR I=1 TO H
5310 FOR J=1 TO 0
5315 Z(J)=Z(J)
5320 IF (X(J)>0 AND Y(J)>=0) OR (X(J)<0 AND Y(J)<=0) THEN GOTO 5400
5330 IF ABS(Y(J))>ABS(X(J)) THEN GOTO 5340 ELSE GOTO 5450
5340 IF (-Z(J))>0 THEN GOTO 5350 ELSE GOTO 5450
5350 X(J)--X(J)-Y(J)--Y(J):GOTO 5500
5400 IF ABS(Y(J))<ABS(X(J)) THEN GOTO 5440 ELSE GOTO 5500
5440 IF (-Z(J))>0 THEN GOTO 5350
5450 N(J)=Y(J)-Y(J)--X(J):X(J)=N(J)
5500 NEXT J
5501 NEXT I
5555 RETURN
7000 FOR I=1 TO 0
7020 V(I)=Y(I)
7030 NEXT I
7040 GOSUB 3000
7050 PRINT: PRINT: PRINT: PRINT " THE [ Y ] GALACTIC CENTER AT ".I(I)." FOR
".V:" ".D."- GAUSTER FAMILY"
7060 RETURN

```