UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

INSTITUTO DE ECONOMIA

BACHARELADO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Guilherme Sohnlein Exel

DISCRIMINAÇÃO INTERTEMPORAL DE PREÇOS SOB PREFERÊNCIAS TEMPORALMENTE INCONSISTENTES

Rio de Janeiro

2021

GUILHERME SOHNLEIN EXEL

DISCRIMINAÇÃO INTERTEMPORAL DE PREÇOS SOB PREFERÊNCIAS TEMPORALMENTE INCONSISTENTES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como requisito para obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas

Orientador: Professor Dr. Pedro James Frias Hemsley

RIO DE JANEIRO
2021

CIP - Catalogação na Publicação

E956d

Exel, Guilherme Sohnlein
Discriminação intertemporal de preços sob preferências temporalmente inconsistentes / Guilherme Sohnlein Exel. -- Rio de Janeiro, 2021.
34 f.

Orientador: Pedro James Frias Hemsley.
Trabalho de conclusão de curso (graduação) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Economia, Bacharel em Ciências Econômicas, 2021.

1. Discriminação intertemporal de preços. 2. Inconsistência intertemporal. 3. Controle ótimo. I. Hemsley, Pedro James Frias, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

GUILHERME SOHNLEIN EXEL

DISCRIMINAÇÃO INTERTEMPORAL DE PREÇOS SOB PREFERÊNCIAS TEMPORALMENTE INCONSISTENTES

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Instituto de Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito para a obtenção do título de Bacharel em Ciências Econômicas.

Rio de Janeiro, 12/16/2021.

PEDRO JAMES FRIAS HEMSLEY - Presidente

Professor Dr. do Instituto de Economia da UFRJ

MARIA EDUARDA BARROSO PERPÉTUO DE SOUZA

Mestre em Economia pela UFRJ

LYNDA CAROLINA PAVÃO

Mestre em Economia pela UFF

Dedico esse trabalho à minha mãe.

As opiniões expressas neste trabalho são de exclusiva responsabilidade do(a) autor(a)

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer, em primeiro lugar, à minha mãe (Karin) e ao meu pai (Ruy), que me deram todo o apoio que eu poderia desejar nesta jornada.

Agradeço à Beatriz, minha irmã, e à Ivânia, minha segunda mãe.

Agradeço a todos os professores que me acompanharam durante a graduação, em especial ao professor Rolando, com quem eu mais aprendi. Agradeço também ao professor Pedro, meu orientador, e ao professor Getúlio.

Agradeço aos meus amigos do Rio e de Floripa, especialmente ao Fröner e ao Renan.

Agradeço à Anna Lúcia por manter o Instituto de Economia de pé e funcionando.

Por fim, agradeço à Alessandra. Obrigado pela paciência, pela força, pelo carinho, pelo amor e por viajar tantas vezes para me visitar. Espero poder agradecer a você em muitos trabalhos e dissertações por vir.

RESUMO

Nesta monografia, é desenvolvido um modelo formal de discriminação intertemporal de preços com consumidores que olham para o futuro. No início do período, um monopolista que vende um bem discreto anuncia a trajetória completa dos preços futuros. Um contínuo de consumidores escolhe, a cada momento, entre comprar o bem ou adiar a compra —antecipando uma queda no preço. A escolha do consumidor está sujeita a um problema de inconsistência intertemporal, uma vez que cada consumidor desconta no tempo o valor do dinheiro e a utilidade do bem de formas diferentes. O problema do monopolista é tratado formalmente como um problema de controle ótimo. O princípio do máximo de Pontryagin fornece condições para encontrar as trajetórias ótimas de preços e vendas. Comenta-se o efeito das diferentes taxas de desconto na determinação das soluções.

Palavras-chave: Discriminação de preços. Inconsistência intertemporal. Controle ótimo.

ABSTRACT

In this monograph, a formal model of intertemporal price discrimination with forward-looking consumers is developed. At the beginning of the period, a monopolist who sells a discrete good announces the full trajectory of futures prices. A continuum of consumers choose, at each moment, between buying the good or delaying the purchase —anticipating a drop in price. The consumer's choice is subject to a problem of intertemporal inconsistency, as each consumer discounts over time the value of money and the utility of the good in different ways. The monopolist's problem is formally treated as an optimal control problem. Pontryagin's maximum principle provides conditions for finding the optimal price and sales trajectories. The effect of each discount rate in determining the solutions is discussed.

Keywords: Price discrimination. Time inconsistency. Optimal Control.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A discriminação de preços é uma prática quase onipresente em mercados monopolizados (VARIAN, 1989). De fato, ela é naturalmente sugerida pelo problema de precificação com *mark-up*: baixar o preço para vender a mais consumidores reduz o preço pago pelos consumidores que já estariam dispostos a comprar o bem por um preço mais alto. A forma natural de eliminar esse *trade-off* é vender a preços diferentes para consumidores diferentes. Diversas restrições podem limitar essa prática —ou impedi-la completamente— mas, idealmente, o vendedor seria capaz de cobrar de cada consumidor um valor igual ao seu preço de reserva, apropriando-se de todo excedente do consumidor.

Uma forma notável e prevalente de discriminação de preços é a discriminação intertemporal de preços: quando o preço de um bem varia no tempo, consumidores que compram o bem em momentos diferentes pagam preços diferentes. Se o monopolista deseja discriminar entre dois consumidores diferentes, é preciso que a receita adicional extraída do consumidor de valorização mais alta compense atrasar a compra do consumidor de valorização[1] mais baixa. Além disso, é preciso garantir que o tempo até a queda do preço compense ao consumidor de valorização mais alta pagar o preço mais alto, dadas as preferências intertemporais dos consumidores. O *trade-off* entre "vender a mais consumidores" e "cobrar um preço mais alto" presente no problema estático de precificação monopolista se transforma em um trade-off entre "vender mais rapidamente" e "manter o preço mais alto por mais tempo" na versão dinâmica do problema.

É preciso ressaltar um pressuposto crítico em qualquer modelo de discriminação intertemporal de preços: a capacidade do monopolista de se comprometer com uma trajetória de preços futuros. O artigo seminal de COASE (1972) demonstra uma situação na qual, dado um monopolista vendendo um estoque limitado de um bem durável, consumidores pacientes podem forçar o monopolista a igualar o preço ao custo marginal em todo período. Esse resultado emerge do fato de que o monopolista não é capaz de "prometer" aos consumidores que o preço permanecerá alto por qualquer quantidade de tempo. Assim, a demanda é zero para qualquer preço maior que o custo marginal. Nesse modelo simples, bastaria que o monopolista dispusesse de um mecanismo para se comprometer com um preço constante a todos os períodos que ele seria capaz de, ao menos, obter um lucro positivo no primeiro período (e igual ao lucro obtido no caso estático). Os modelos que permitem esse compromisso envolvem (em seu tratamento formal) apenas um problema de otimização dinâmica, enquanto que modelos sem compromisso[2] envolvem um tratamento de

[1] A palavra "valorização" é utilizada aqui como sinônimo de "preço de reserva".
[2] Mais precisamente, com compromisso limitado —como será discutido mais detalhadamente no capítulo 1.

jogos dinâmicos, para os quais é preciso encontrar equilíbrios de Nash Bayesianos perfeitos em subjogos. O compromisso garante que o lucro do monopolista discriminador é sempre igual ou maior que o lucro do monopolista que não discrimina, de forma que qualquer variação do preço no tempo pode ser creditada à discriminação de preços. Já a ausência de compromisso pode potencialmente reduzir o lucro do monopolista, independentemente do monopolista desejar discriminar preços ou não. Dessa forma, apesar de o caso com compromisso ser menos realista (varejistas geralmente não assinam contratos se comprometendo com o preço futuro de seus produtos), ele pode oferecer *insights* interessantes sobre os incentivos que afetam o monopolista, ou servir como um *benchmark* para modelos sem compromisso, ao evidenciar o lucro potencial do monopolista em uma situação idealizada. É importante ressaltar que, em todos essas situações, os consumidores não são *míopes*, eles são perfeitamente capazes de otimizar ao longo do tempo —seja observando a trajetória completa dos preços, seja tomando suas decisões em antecipação do que o monopolista fará no futuro.

Esta monografia desenvolve um modelo de discriminação intertemporal de preços com compromisso (por parte do monopolista). Para isso, se baseia no modelo seminal de STOKEY (1979). Esse é um modelo de escolha discreta (entre 0 e 1 unidades) em tempo contínuo, onde existe um contínuo de consumidores —heterogêneos apenas em seu preço de reserva instantâneo x do bem. O modelo desenvolvido nesta monografia mantém esta estrutura, mas traz duas diferenças cruciais.

Em primeiro lugar, Stokey modela as preferências temporais dos consumidores de forma que a utilidade do bem é decrescente no tempo. Isso significa que os consumidores não apenas descontam a utilidade futura do bem relativo ao tempo presente: a utilidade do bem de fato decai com o passar do tempo, limitando o preço máximo que qualquer consumidor pagaria pelo bem a cada momento. No modelo aqui desenvolvido, os consumidores descontam a utilidade futura do bem em relação ao presente. Entre outras coisas, isso ajuda manter o significado da variável x como o preço de reserva instantâneo de cada consumidor: o valor máximo que cada consumidor estaria disposto a pagar pelo bem caso não tivesse a opção de esperar pelo preço abaixar. Com preferências temporais *relativas*, esse valor permanece constante no tempo. Ainda assim, mesmo quando o preço do bem fica abaixo de sua valorização instantânea, um consumidor pode preferir não comprar o bem no presente e esperar para comprar no futuro. Isso pode acontecer devido a (i) a expectativa de que o preço vai abaixar no futuro; (ii) o fato de que comprar no futuro permite adiar um pagamento; (iii) a relativa paciência de cada consumidor em relação a obter o bem vendido pelo monopolista .

Como o modelo desenvolvido nos capítulos 2 e 3 discute discriminação intertemporal de preços, o caso de maior interesse é o caso em que os consumidores são muito impacientes pelo bem e um pouco mais pacientes pelo dinheiro que usarão para pagar pelo bem, enquanto que o monopolista é muito paciente pelo seu próprio lucro.

Em segundo lugar, no modelo de Stokey, o monopolista enfrenta uma taxa de desconto do lucro igual a taxa de desconto do preço do bem que as consumidoras enfrentam. Como aponta VARIAN (1989), esse é um dos motivos pelos quais Stokey chega no equilíbrio agregador em que as vendas só ocorrem no início do período, concluindo que discriminação intertemporal de preços geralmente não é vantajosa. O modelo aqui desenvolvido considera que a taxa de desconto do monopolista é inferior à taxa de desconto do consumidor, o que facilmente gera equilíbrios separadores com vendas espalhadas no tempo.

Apesar da inspiração em Stokey, o modelo aqui desenvolvido não é uma resposta ao seu artigo, mas sim um estudo independente sobre um tipo específico de inconsistência intertemporal que emerge das preferências intertemporais das consumidoras baseadas no tempo relativo. Se cada consumidora desconta sua valorização do bem a uma taxa mais alta do que ela desconta o preço a ser pago pelo bem, é possível que sua decisão sobre o momento ótimo de comprar o bem mude conforme o tempo passa, caracterizando um problema de inconsistência intertemporal. Considerações sobre o comportamento das consumidoras são discutidas no capítulo 2. Uma vez encontrada uma regra de comportamento consistente para as consumidoras, esta é usada como uma restrição no problema de maximização de lucro do monopolista, que é tratado como um problema de controle ótimo no capítulo 3.

1 REVISÃO DE LITERATURA

O artigo seminal de STOKEY (1979) sobre discriminação intertemporal de preços não foi o último artigo da autora sobre o tema. Em STOKEY (1981) ela novamente discute um problema de precificação dinâmica, desta vez incorporando o caráter relativo das preferências temporais. Contudo, muito da estrutura do seu primeiro artigo é modificada, desta vez tratando de um estoque finito de produto. O estoque é visto como a variável de estado do problema, e uma curva de demanda é exogenamente imposta, ao invés de tratar das preferências das consumidoras diretamente, como em seu primeiro artigo.

O segundo artigo de Stokey é muito mais relacionado ao artigo seminal de COASE (1972), que introduz o problema de ausência de compromisso por parte do monopolista. Notavelmente, ambos os artigos são anteriores KREPS; WILSON (1982), pioneiro na caracterização de equilíbrios de Nash em jogos sequenciais. O modelo de Coase é muito simples e apresenta um caso em que a presença de uma dimensão temporal colapsa o lucro do monopolista a zero. O raciocínio é simples: sabendo que o monopolista desejará vender todo seu estoque, consumidores pacientes demandarão zero unidades do produto a cada período que o preço for diferente do custo marginal. Dessa forma, o único equilíbrio é o monopolista igualar o preço ao custo marginal desde o início do período. Na literatura mais recente sobre o tema, esse caso é identificado como uma *solução de canto* em modelos de teoria dos jogos mais sofisticados.

Como esta monografia é focada no caso com compromisso, a literatura do caso sem compromisso não será discutida extensamente. Uma boa referência no tema é BESANKO; WINSTON (1990), que faz algumas observações interessantes a partir de um modelo que trata do jogo sequencial entre monopolista e consumidoras. Em primeiro lugar, algum nível de compromisso ainda é necessário. Virtualmente todos os modelos de jogos sequenciais que tratam do tema são em tempo discreto, e a escolha do comprimento de cada período é fundamental para determinar o equilíbrio. Besanko e Winston mostram que quando o comprimento tende a zero, isto é, o modelo discreto tende a tempo contínuo, o lucro do monopolista colapsa —como antecipou COASE (1972).

No modelo desenvolvido nesta monografia, as preferências intertemporais de cada consumidor em relação ao valor em dinheiro a ser pago pelo bem e à sua valorização pessoal do bem diferem. Isto origina um problema de inconsistência intertemporal, que é incidentalmente resolvido pela imposição de que as consumidoras não podem se comprometer previamente com a data na qual elas comprarão o bem. Este ponto será melhor discutido no capítulo 2. É possível identificar um problema de inconsistência intertemporal no comportamento de um agente como um tema da área de economia comportamental.

Preferências intertemporalmente inconsistentes são extensamente discutidas na literatura de escolha intertemporal. ERICSON; LAIBSON (2018) é um excelente apanhado dos modelos nesta área. A escolha do consumidor no modelo aqui desenvolvido pode ser entendida pela lente do modelo discutido em FERNÁNDEZ; RAMBAUD (2018), que permite que à taxa de desconto do consumo variar no tempo. Contudo, o modelo aqui desenvolvido se limita a um caso particular de escolha discreta, e a taxa de desconto "variante no tempo" aparece como duas taxas de desconto constantes que descontam coisas diferentes.

2 O COMPORTAMENTO DAS CONSUMIDORAS

Considere um mercado em que um monopolista produz um bem indivisível a custo marginal igual a zero. Ele vende esse bem para um contínuo de consumidoras[1] indexadas por $x \in [0, \overline{x}]$, que compram no máximo uma unidade do bem. Seja f a função densidade de x, em que a quantidade de consumidoras é normalizada para a unidade: $\int_0^{\overline{x}} f(x)\, dx = 1$.

x é igual ao valor que a consumidora indexada por x atribui ao bem vendido pelo monopolista no tempo presente, ou seja, é igual ao valor que ela está disposta a pagar pelo bem no tempo presente caso ela não tenha opção de comprar o bem no futuro. No tempo $t \in [0, T]$, a utilidade que a consumidora atribui à perspectiva de obter o bem em $t + s$ é dada por $U(x, s)$, onde U atende às seguintes propriedades:

$$U(x, 0) = x, \quad \frac{\partial}{\partial x}U(x, s) > 0, \quad \frac{\partial}{\partial s}U(x, s) < 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial s}U(x, s) \leq 0 \tag{2.1}$$

A primeira propriedade diz que x é o preço de reserva instantâneo da x-ésima consumidora quando ela não tem a opção adiar a compra. A segunda diz que a utilidade é crescente em x. A terceira diz que a utilidade decresce com o tempo de espera até a obtenção do bem, estabelecendo que as consumidoras são impacientes. A quarta diz que consumidoras que valorizam mais o bem também são mais impacientes.

A função U pode descrever a impaciência do consumidor de forma bastante geral, permitindo qualquer forma de desconto intertemporal do valor do bem, não se limitando a especificações como a exponencial ou a quase-hiperbólica.

Note que $U(x, s)$ não depende do tempo absoluto t, apenas da distância temporal s entre o tempo t e o tempo $t + s$. Este é o único sentido no qual a função de utilidade aqui definida difere da função de utilidade apresentada em STOKEY (1979). As propriedades em (2.1) são exatamente as mesmas, exceto que Stokey entende que U depende diretamente do tempo absoluto t e não apenas da distância temporal s. Essa diferença pode parecer sutil, mas altera completamente a regra de decisão do consumidor e introduz um problema de inconsistência intertemporal, como veremos mais tarde. A princípio, é preciso notar que uma função de utilidade que depende do tempo absoluto não captura estritamente a impaciência do consumidor, e sim o decaimento da utilidade do bem com o tempo que pode ocorrer por fatores diversos. Uma consumidora impaciente e que possui preferências estáveis atribui uma utilidade à obtenção do bem hoje e outra (mais baixa) à obtenção

[1] A partir deste ponto, consumidoras serão sempre tratadas com o pronome *ela/dela*.

do bem amanhã. Se esta consumidora for impedida de obter o bem por trinta dias, no amanhecer do trigésimo dia a consumidora deve atribuir os mesmos valores de utilidade à obtenção do bem no trigésimo dia e no trigésimo primeiro dia que ela atribuía, trinta dias atrás, à obtenção do bem no primeiro e no segundo dia, respectivamente. Esta seria uma consumidora que desconta a utilidade pelo tempo relativo.

Quando a utilidade da consumidora pelo bem depende do tempo absoluto no qual o bem é comprado, esse desconto pode estar representado outras coisas que não impaciência. Por exemplo, o bem pode ficar obsoleto rapidamente, de forma que ele se torne menos atraente frente à competição com o passar do tempo. Alternativamente, pode haver valor em ser um *early-adopter* do bem, de forma que obter o bem na data do "lançamento" proporciona muito mais utilidade do que obtê-lo alguns dias mais tarde. Essas situações dizem mais sobre características específicas do bem do que características das preferências dos consumidores. Por consequência, opto por definir que a utilidade das consumidoras pelo bem varia apenas com o tempo relativo.

Em $t = 0$, o monopolista determina e anuncia a trajetória de preços $p(t)$, com a qual ele se compromete. Cada consumidora pode comprar no máximo uma unidade do bem em algum momento do tempo $t \in [0, +\infty)$ ao preço $p(t)$. Cada consumidora toma sua decisão comparando a utilidade do bem com o valor presente do preço do bem em diferentes momentos do tempo. Assim, podemos definir a função

$$W_t(x, s) = U(x, s) - p(t + s)e^{-\rho s}$$

Que representa a variação líquida de bem estar da x-ésima consumidora ao comprar o bem s períodos à frente, avaliada no período t. A constante ρ é a taxa de desconto da consumidora em relação ao preço do bem. A variável t representa o tempo presente na perspectiva da consumidora, enquanto que a variável s representa a distância temporal entre o presente e o momento da compra.

Como desejo investigar o caso em que as consumidoras são mais impacientes pelo bem do que pelo dinheiro que usarão para pagar pelo bem, adiciono a hipótese suplementar

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial s} U(x, 0) < -\rho \tag{2.2}$$

Que é uma versão mais forte da quarta propriedade em (2.1).

Note que, enquanto a função utilidade do bem depende do tempo relativo s, a função de variação líquida de bem estar depende também do tempo absoluto t. O tempo t deve ser entendido como "hoje": o referencial temporal a partir do qual a consumidora avalia sua variação de bem estar. A variável s deve ser entendida como a distância temporal entre "hoje" (t) e algum momento no futuro ($t+s$). Essa dependência simultânea de tempos absoluto e relativo gera um problema de inconsistência temporal, como se as preferências da consumidora estivessem mudando ao longo do tempo: em $t = 0$ a consumidora pode acreditar que o melhor momento para comprar o bem será após $s = 10$ dias, ou seja, no dia 10. Mas, chegando em $t = 5$, é possível que ela decida que o momento ótimo da compra será após $s = 3$ dias, ou seja, no dia 8. Contudo, na definição de W vemos que a função de utilidade do bem não muda com o tempo, e o desconto exponencial do preço também não. Na seção seguinte, eu estudo este problema de inconsistência intertemporal e identifico que ele se origina do fato de que o processo de desconto do preço de reserva instantâneo x do bem é diferente do processo exponencial de desconto de seu preço.

2.1 Inconsistência intertemporal

Para estudar o problema de inconsistência intertemporal, podemos começar colocando a pergunta: *para quais especificações da função U não há inconsistência intertemporal?* Ou, mais especificamente, *para quais especificações da função U a consumidora decide no início do intervalo de vendas ($t = 0$) que irá comprar o bem em s^* e não muda de ideia ao longo do intervalo $[0, t^*]$?*

Dada uma consumidora com preço de reserva instantâneo igual a $\tilde{x}$, podemos formalizar o tempo ótimo de espera s^* até a compra como função do tempo absoluto t da seguinte forma[2]:

$$s^*(t) = \arg\max_s W_t(\tilde{x}, s)$$

Assim, a condição para que a consumidora nunca mude de ideia sobre o momento ótimo da compra é

$$s^*(t) = s^*(0) - t \quad \forall t \in [0, s^*(0)] \tag{2.3}$$

Intuitivamente, se hoje a consumidora decide comprar o bem em 10 dias a partir de hoje, é preciso que amanhã ela deseje comprar o bem em 9 dias a partir de amanhã, e assim por diante.

Assumindo que $p(t)$ é continuamente diferenciável, (2.3) implica em

$$\frac{\partial W_t}{\partial s}(\tilde{x}, s^*(0) - t) = 0 \quad \forall t \in [0, s^*(0)] \tag{2.4}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade:

$$\frac{\partial W_t}{\partial s}(\tilde{x}, s^*(0) - t) = U_s(\tilde{x}, s^*(0) - t) - [p'(s^*(0)) - \rho p(s^*(0))]e^{-\rho(s^*(0)-t)}$$

[2] Para que a consumidora deseje comprar o bem em s^*, também é preciso respeitar a restrição de participação $W_0(\tilde{x}, s^*) \geq 0$, mas, para esta discussão, vamos ignorar esta condição. A dependência de s^* sobre x está omitida por simplicidade, uma vez que $x = \tilde{x}$ está sendo mantido constante.

Com $x = \tilde{x}$ constante e $p(t)$ conhecido, (2.4) fornece uma equação diferencial a partir da qual podemos determinar a forma de U na segunda variável, uma vez que descreve uma igualdade envolvendo uma derivada de U que deve valer para todo s em um intervalo fechado. Realizando a mudança de variável $s = s^*(0) - t$, esta equação diferencial pode ser escrita como:

$$U_s(\tilde{x}, s) = [\rho p(s+t) - p'(s+t)]e^{-\rho s}, \quad s \in [0, s^*(0)]$$

Integrando de ambos os lados, obtemos:

$$U(\tilde{x}, s) = \left[p(s+t) - \frac{p'(s+t)}{\rho}\right] e^{-\rho s} + c$$

A primeira propriedade de U em (2.1): $U(x,0) = x$, fornece um valor inicial. A aparente dependência da utilidade sobre o preço é consequência do fato de que W_t está maximizada. Temos que U é simplesmente

$$U(\tilde{x}, s) = \tilde{x}e^{-\rho s} \tag{2.5}$$

e a igualdade entre $\tilde{x}$ e o termo entre colchetes resulta da condição de primeira ordem para a maximização de W_t em s quando U é dada por (2.5):

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_t}{\partial s} = 0 &\Leftrightarrow -\rho\tilde{x}e^{-\rho s} - [p'(s+t) - \rho p(s+t)]e^{-\rho s} = 0 \\ &\Leftrightarrow \tilde{x} = p(s+t) - \frac{p'(s+t)}{\rho}\end{aligned}$$

A função de utilidade encontrada em (2.5) é simplesmente o preço de reserva instantâneo $\tilde{x}$ descontado exponencialmente pela taxa de juros. Ela fornece a seguinte função de variação líquida de bem-estar:

$$W_t(x, s) = [\tilde{x} - p(t+s)]e^{-\rho s}$$

Como tanto o preço do bem quanto o preço de reserva instantâneo são descontados pelo mesmo fator, a função descrita acima é simplesmente o *excedente instantâneo* descontado da consumidora. Esta forma funcional de W é muito utilizada na literatura. Contudo, esta monografia tem por objetivo analisar o caso geral no qual preço e preço de reserva podem ser descontados de formas diferentes, e é exatamente essa diferença que gera o problema de inconsistência intertemporal. A opção por fixar o processo de desconto do preço do bem como um desconto exponencial pela taxa de desconto ρ tem por objetivo simplificar a análise, além de ser intuitivamente razoável: a consumidora desconta o "dinheiro" de forma exponencial, mas pode descontar a utilidade do bem vendido pelo monopolista de diversas formas, desde que respeitando as propriedades básicas descritas em (2.1).

Dado que existe um problema de inconsistência intertemporal para o caso geral, é preciso entender como cada consumidora se comporta frente a essa inconsistência, ou seja, é preciso determinar, dada uma trajetória de preços $p(t)$, o momento no qual a x-ésima consumidora de fato compra o bem. A próxima seção busca aproveitar a ideia de que as consumidoras não possuem um mecanismo de compromisso através do qual determinar o dia da compra do bem com antecedência, ficando limitadas a uma escolha binária entre comprar e não comprar o bem no momento presente.

2.2 Uma regra de comportamento consistente sob preferências inconsistentes

Cada consumidora considera toda a trajetória de preços futuros ao tomar suas decisões sobre a compra do bem, de forma que não se pode dizer que elas são *míopes*. Contudo, a decisão que elas enfrentam a cada momento do tempo não é a de determinar exatamente o momento futuro da compra, mas apenas de decidir entre comprar ou não comprar o bem no tempo presente. Dessa forma, a x-ésima consumidora compra o bem no primeiro momento em que o máximo de W em s é atingido em $s = 0$.

Isso não implica que as consumidoras se enganam sobre quando vão comprar o bem: pode-se entender que a x-ésima consumidora possui autoconhecimento suficiente para antecipar a data na qual ela realmente comprará o bem, pois mesmo que ela não considere esta a data ótima em momentos anteriores, sem um mecanismo de compromisso ela nada pode fazer para mudá-la.

Formalmente, as consumidoras tomam uma decisão binária entre comprar ou não comprar o bem a cada momento do tempo t olhando apenas para a função de variação líquida de excedente no momento $s = 0$. Dessa forma, a x-ésima consumidora compra em

$$\tau(x) \quad \text{tal que} \quad 0 = \arg\max_s W_{\tau(x)}(x, s) \quad \text{e} \quad W_{\tau(x)}(x, 0) \geq 0$$

Condições necessárias para caracterizar $\tau(x)$[3] são as igualdades

$$\frac{\partial}{\partial s} W_\tau(x, \underbrace{0}_{=\text{s}}) = 0$$
$$W_\tau(x, 0) \geq 0$$

[3] Essas condições valem apenas para o interior do intervalo de vendas. Na seção seguinte será discutido o que pode acontecer nos extremos do intervalo.

Abrindo a função de variação de bem estar instantâneo, podemos reescrever as equações acima como:

$$\frac{\partial}{\partial s}U(x,0) = p'(t) - \rho p(t) \tag{R.I.}$$

$$U(x,0) \geq p(t) \tag{R.P.}$$

Do ponto de vista do monopolista, a equação (R.I.) pode ser entendida como um restrição de incentivo: a x-ésima consumidora deve preferir comprar em $\tau(x)$ do que em qualquer outro momento; e a equação (R.P.) pode ser entendida como um restrição de participação: comprar em $\tau(x)$ deve ser vantajoso.

Também deve valer a condição de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}U(x,0) - p''(t) + 2\rho p'(t) - \rho^2 p(t) < 0 \tag{2.6}$$

3 O PROBLEMA DO MONOPOLISTA

3.1 As correspondências entre tempo, preço e consumidoras

Para aplicar as técnicas do cálculo variacional e da teoria do controle ótimo para encontrar a curva de preços, é preciso tratar da correspondência entre cada consumidora, o preço que ela paga pelo bem (se ela compra o bem) e o momento do tempo no qual ela compra o bem.

Assuma que o monopolista deseja vender o bem continuamente ao longo do intervalo de vendas. Como é mais desejável para o monopolista vender a consumidoras com valores mais altos de x, podemos definir $\tau : [\underline{x}, \overline{x}] \to [0, T]$, que associa cada consumidora ao momento do tempo em que ela compra o bem, onde $\underline{x}$ é o valor da última consumidora a comprar o bem (que pode ou não ser igual a 0). Se $\tau(x)$ for invertível, podemos ainda descrever a função que associa cada momento do tempo ao valor de x da consumidora que compra o bem naquele momento. τ pode não ser invertível caso consumidoras indexadas por valores diferentes de x comprem o bem ao mesmo tempo, algo que pode acontecer no início e no final do período. Para contornar este problema, podemos definir a função $x : [0, T] \to [0, \overline{x}]$ da seguinte forma:

$$x(t) = \begin{cases} x_0 & \text{se } t = 0 \\ \tau^{-1}(t) & \text{se } 0 < t < T \\ x_T & \text{se } t = T \end{cases}$$

Onde x_0 é o menor valor de x dentre as consumidoras que compram o bem em $t = 0$ e x_T é o maior valor de x dentre as consumidoras que compram o bem em $t = T$. A Figura 1 apresenta uma possível correspondência entre x e t para um melhor entendimento das funções discutidas acima.

Dado $x_0 < \overline{x}$, sabemos que a condição (R.I.) vale para x_0 em $t = 0$, isto é:

$$\frac{\partial}{\partial s} U(x_0, 0) = p'(0) - \rho p(0)$$

Para que as consumidoras em $[x_0, \overline{x}]$ escolham comprar o bem na borda $t = 0$, é preciso que, para elas, a derivada à direita da função de variação do excedente seja não positiva em $t = 0$, isto é:

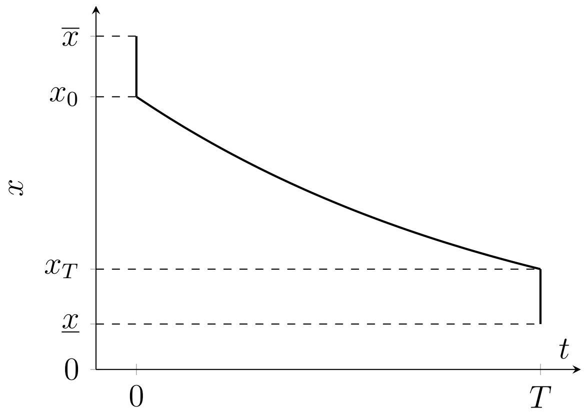
$$\frac{\partial}{\partial s} U(x, 0) \leq p'(0) - \rho p(0) \quad \forall x \in [x_0, \overline{x}]$$

O que é garantido pela última propriedade em (2.1), reproduzida abaixo:

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial x} U(x, s) \leq 0$$

O raciocínio é análogo para as consumidoras dentro do intervalo $[\underline{x},\, x_T]$ que compram em $t = T$. Note que o limite inferior deste intervalo é $\underline{x}$ e não 0. Isso se deve à restrição de participação (R.P.), que limita inferiormente o intervalo de consumidoras que de fato compram o bem em $x_T = p(T)$. Consumidoras com valores de x abaixo de $p(T)$ nunca compram o bem.

Figura 1 – Exemplo de correspondência entre x e t



Fonte: Elaboração do autor.

No interior do intervalo, x é uma função que se relaciona com a p através das restrições (R.I.) e (R.P.).

Não será apresentada uma justificativa formal para a escolha do monopolista de vender o bem continuamente em $[0, T]$, mas qualquer trajetória de preços que gere um intervalo de tempo durante o qual o monopolista não vende o bem é intuitivamente sub-ótima, uma vez que ele pode mudar a trajetória de preços de forma a adiantar as vendas seguintes. Dado este objetivo, é fácil provar a negatividade de $p'(t)$ e $x'(t)$. A primeira propriedade de U em (2.1) e a propriedade auxiliar em (2.2) garantem que

$$\frac{\partial}{\partial s} U(x, 0) + \rho x \leq 0$$

Substituindo a restrição (R.P.) na desigualdade acima, obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial s} U(x, 0) + \rho p(t) \leq 0$$

De (R.I.), o lado esquerdo dessa desigualdade é simplesmente igual a $p'(t)$

$$p'(t) = \frac{\partial}{\partial s}U(x, 0) + \rho p(t)$$

Logo, temos $p'(t) < 0$.

A função $p : [0, T] \to \mathbb{R}_+$ (que já foi apresentada na seção 2) está evidentemente bem definida sobre todo o intervalo de vendas, uma vez que a principal limitação do poder de discriminação do monopolista é exatamente a necessidade de cobrar apenas um preço por momento no tempo, não podendo discriminar entre consumidores que compram no mesmo momento do tempo. Além disso, é necessário que algum preço positivo seja cobrado a qualquer momento do intervalo de vendas $[0, T]$. É fácil ver que p será uma função decrescente, uma vez que nenhum consumidor aceitaria comprar o bem em um trecho ascendente da curva de preços.

3.2 A função lucro

Por simplicidade, considere que o monopolista possui custo marginal igual a zero. Dessa forma, o lucro instantâneo do monopolista é simplesmente igual a *preço vezes quantidade*. Dado que existe um contínuo de consumidoras e o monopolista desconta o lucro exponencialmente à taxa r, o monopolista escolhe o par de funções $(x(t),\, p(t))$, dadas as restrições (R.I.) e (R.P.) de forma a maximizar o valor presente descontado do seu lucro.

Se o monopolista deseja vender seu produto em um intervalo de tempo finito $[0,\, T]$, ele poderá auferir uma massa positiva de lucro tanto no início quanto ao final do intervalo, como exemplificado na Figura 1. Dessa forma, lucro do monopolista pode ser escrito como a soma de três termos, dois deles referentes ao lucro que ele recebe em $t = 0$ e em $t = T$, quando as consumidoras em $[x_0,\, \overline{x}]$ e em $[\underline{x},\, x_T]$ compram o bem, respectivamente. Podemos escrevê-los como:

$$\Pi_0 = p(0)\,[F(\overline{x}) - F(x_0)] \quad \text{e} \quad \Pi_T = p(T)\,[F(p(T) - F(x_T))]\,e^{-rT} \tag{3.1}$$

Onde

$$F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$$

O terceiro termo é referente ao lucro que o monopolista recebe no interior do intervalo de vendas $t \in (0, T)$, que pode ser expresso como uma integral ao longo do contínuo de consumidores:

$$\Pi_{(0,T)} = \int_{x_T}^{x_0} p(\tau(x)) f(x) e^{-r\tau(x)}\,dx \tag{3.2}$$

Aplicando integração por partes em (3.2)[1], obtém-se:

$$\Pi_{(0,T)} = p(\tau(x))F(x)e^{-r\tau(x)}\Big|_{x_T}^{x_0} - \int_{x_T}^{x_0} [p'(\tau(x)) - rp(\tau(x))]\tau'(x)F(x)e^{-r\tau(x)}\,dx$$

Realizando a substituição de variável $x = x(t)$, aproveitando o fato de que $\tau'(x(t))x'(t) = 1$, por definição.

$$\Pi_{(0,T)} = \int_0^T [p'(t) - rp(t)]F(x(t))e^{-rt}\,dt - p(t)F(x(t))e^{-rt}\Big|_0^T \tag{3.3}$$

Essa função ainda descreve apenas o lucro auferido no interior do intervalo. Definindo

$$\omega(x) \coloneqq \frac{\partial}{\partial s}U(x, 0)$$

para simplificar a notação, ao somar as funções final e inicial em (3.1) e realizar a substituição $p'(t) = \rho p(t) + \omega(x(t))$, o lucro total pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\Pi = \int_0^T [(\rho - r)p(t) + \omega(x(t))]F(x(t))e^{-rt}\,dt - p(t)F(x(t))e^{-rt}\Big|_0^T \\ + p(0)[1 - F(x(0))] \\ + p(T)[F(x(T)) - F(p(T))]e^{-rT}\end{aligned}$$

Simplificando:

$$\Pi = \int_0^T [(\rho - r)p(t) + \omega(x(t))]F(x(t))e^{-rt}\,dt + p(0) - p(T)F(p(T))e^{-rT} \tag{3.4}$$

A expressão para o lucro total em (3.4) não depende diretamente de nenhuma derivada de $x(t)$ ou de $p(t)$. Dessa forma, podemos utilizá-la como o funcional objetivo para um problema de controle, e os termos fora da integral podem ser usados como funções final e inicial para o problema.

3.3 Aplicando controle ótimo

O problema do monopolista consiste em escolher um par de funções (x, p) que respeitem as restrições (R.I.) e (R.P.) de forma a maximizar o valor presente descontado do seu lucro. Ignorando a restrição de desigualdade (R.P.) e tomando $x(t)$ como variável de controle e $p(t)$ como variável de estado, o problema pode ser escrito como:

[1] STOKEY (1979) realiza o mesmo procedimento.

$$\begin{aligned}
\max \quad & \Pi = \int_0^T [(\rho - r)p(t) + \omega(x(t))]F(x(t))e^{-rt}\,dt + p(0) - p(T)F(p(T))e^{-rT} \\
\text{s.a.} \quad & x(t) \in [0, \overline{x}] \\
& \begin{cases} p'(t) = rp(t) + \omega(x(t)) \\ p(0) = p_0 \end{cases} \\
& x(0) = x_0\,, \quad x(T) = x_T
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Como temos e^{-rt} multiplicando os outros termos dentro da integral, o Hamiltoniano de valor presente é mais apropriado para a resolução deste problema. Ele pode ser escrito como

$$\mathcal{H}_c(p, x, t, \mu) = [(\rho - r)p(t) + \omega(x(t))]F(x(t)) + \lambda(t)[\rho p(t) + \omega(x(t))]$$

Aplicando o princípio máximo de Pontryagin, obtém-se as condições:

$$\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{[(\rho - r)p + \omega(x)]f(x)}{\omega'(x)} - F(x) && \text{(controle)} \\
\lambda' &= -(\rho - r)(F(x) + \lambda) && \text{(co-estado)} \\
p' &= \rho p - \delta x && (\mathit{R.P.})
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Note que a primeira condição não leva em consideração o fato de que o controle $x(t)$ está restrito ao conjunto $[0, \overline{x}]$. Seria preciso identificar quando o máximo do Hamiltoniano se encontra na borda desse intervalo para cobrir todos os casos.

Como a condição (R.P.) está sendo ignorada na montagem do problema, deve-se dar alguma atenção a essa condição inicialmente. Se $x(t) \equiv p(t)$, o monopolista extrai todo o excedente das consumidoras. Isso não é necessariamente ótimo, pois o monopolista enfrenta um *trade-off* entre a velocidade com a qual ele é capaz de realizar as vendas e a quantidade de excedente que ele é capaz de extrair de cada consumidora. Nesse caso, as trajetórias de preço e vendas estariam inteiramente determinadas por

$$\begin{cases} p'(t) = \rho p(t) + \omega(p(t)) \\ p(0) = \overline{x} \end{cases}$$

É interessante notar o que acontece quando a função utilidade é dada por $U(x, s) = xe^{-\delta t}$, com $\delta \geq \rho > r$. Para essa especificação, todos os descontos se dão exponencialmente, mas as consumidoras são mais impacientes pelo bem do que pelo dinheiro a ser gasto com a compra do bem, e o monopolista é mais paciente pelo seu lucro. Nesse caso, a solução da equação diferencial acima é simplesmente:

$$p(t) = \overline{x}e^{(\delta-\rho)t}$$

Se $\delta = \rho$ (isto é, se não existir inconsistência intertemporal), a função preço é constante igual a $\overline{x}$. Isso significa que, para extrair todo o excedente da $\overline{x}$-ésima consumidora, o monopolista precisa se comprometer a vender o bem apenas para ela, abrindo mão de todas as outras vendas.

Já se $\delta > \rho$, o preço decai lentamente com tempo, de forma que o monopolista é capaz de extrair todo o excedente de todas as consumidoras[2]. Quanto menor a diferença entre ρ e δ, mais lentamente o preço decai e mais lentamente as vendas são realizadas.

Para encontrar soluções específicas, assuma que a função utilidade é dada por $U(x, s) = xe^{-\delta t}$, de forma que $\omega(x) = -\delta x$. Assuma também que as consumidoras estão distribuídas uniformemente no intervalo $[0, \overline{x}]$, de forma que $f(x) = {}^1\!/_{\overline{x}}$. Assim, o hamiltoniano fica igual a

$$\mathcal{H}_c = [(\rho - r)p(t) - \delta x(t)]x(t) + \lambda(t)[\rho p(t) - \delta x(t)]$$

E as condições obtidas pelo princípio máximo ficam iguais a:

$$\lambda(t) = \frac{\rho - r}{\delta}p(t) - 2x \qquad \text{(controle)}$$
$$\lambda'(t) = -(\rho - r)(x(t) + \lambda(t)) \qquad \text{(co-estado)}$$
$$p'(t) = \rho p(t) - \delta x(t) \qquad (R.P.)$$

Das condições, obtém-se o seguinte sistema diferencial:

$$\begin{bmatrix} p'(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & -\delta \\ \frac{(\rho-r)(2\rho-r)}{2\delta} & -(\rho - r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

Algumas conclusões já podem ser tiradas desse sistema. Em primeiro lugar, quando $\rho = r$ o sistema se reduz a

$$\begin{bmatrix} p'(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho & -\delta \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(t) \\ x(t) \end{bmatrix}$$

e a solução em x é constante, o que significa que o monopolista realiza todas as vendas em $t = 0$. Esse resultado faz algum sentido intuitivo: quando as preferências

[2] Note que extrair todo o excedente das consumidoras pode não ser ótimo, uma vez que o monopolista desconta o lucro exponencialmente à taxa r. O maior lucro por venda pode não compensar o tempo perdido com cada venda

intertemporais das consumidoras em relação ao seu dinheiro são iguais às preferências do monopolista em relação a seu lucro, não há ganho para o monopolista em realizar discriminação de preços. Esse é exatamente o resultado encontrado por STOKEY (1979), que toma $\rho = r$ por pressuposto.

Aplicando a condição de transversalidade para ponto inicial livre na função inicial e usando (R.P.) com igualdade, obtém-se $p_0 = \frac{\overline{x}}{2}$, que é exatamente o preço que maximiza Π_0 em (3.4).

Voltando ao sistema em sua forma mais geral, obtém-se a seguinte equação diferencial em p:

$$-2p''(t) + 2rp'(t) + r(\rho - r)p(t) = 0 \tag{3.7}$$

De cuja solução é

$$p(t) = c_1 e^{\frac{r-\sqrt{(r(2\rho - r)}}{2}t} + c_2 e^{\frac{r+\sqrt{(r(2\rho - r)}}{2}t} \tag{3.8}$$

De (R.P.), podemos encontrar a trajetória de vendas a partir da trajetória de preços, a menos de duas constantes. Por simplicidade, comece assumindo que $x(0) = \overline{x}$ (o monopolista discrimina preços entre todas as consumidoras) e que o horizonte de vendas é infinito ($t \in [0, +\infty)$). Do ponto inicial fixo e da condição de transversalidade para horizonte infinito:

$$\lim_{t \to +\infty} \lambda(t) = 0$$

As soluções são:

$$\begin{cases} p(t) = \dfrac{2\delta\overline{x}}{2\rho - r + \sqrt{r(2\rho - r)}} e^{\frac{r-\sqrt{(r(2\rho - r)}}{2}t} \\ x(t) = \overline{x} e^{\frac{r-\sqrt{(r(2\rho - r)}}{2}t} \end{cases} \tag{3.9}$$

A primeira conclusão que pode ser tirada de (3.9) é que a trajetória das vendas $x(t)$ não depende da taxa de desconto δ da valorização do bem. O monopolista determina a trajetória das vendas conhecendo somente a taxa de juros r e a taxa de desconto ρ do preço. A taxa de desconto δ afeta apenas a trajetória de preços necessária para se produzir tais vendas.

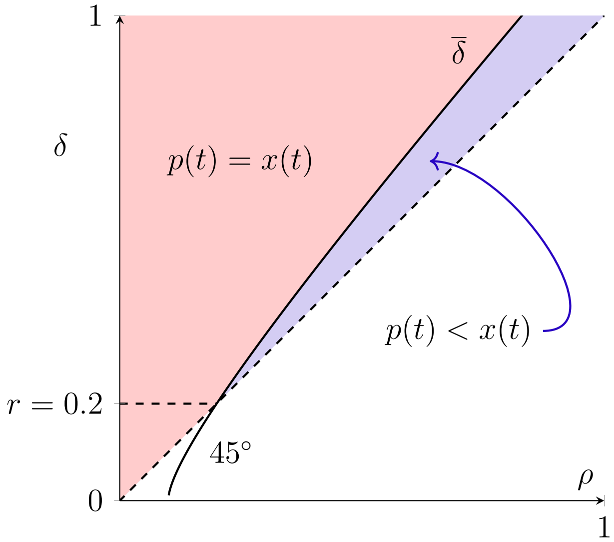
Como esperado, $p(t)$ é crescente em δ, o que significa que quanto mais impacientes pelo bem são as consumidoras, mais caro o monopolista cobra de cada consumidora e mais excedente ele extrai.

Note que existe um valor limite $\overline{\delta}$ para a taxa de desconto tal que $p(t) \geq x(t)$ e a restrição (R.P.) passa a valer com igualdade. Para r dado, esse valor pode ser encontrado a partir de (3.9):

$$\overline{\delta} = \frac{2\rho - r + \sqrt{r(2\rho - r)}}{2}$$

A Figura 2 compara as situações que cada par (ρ, δ) gera quando $r = 20\%$. A região de interesse é a área pintada acima da reta da identidade, pois x e p são crescentes quando $\delta < \rho$.

Figura 2 – Comparando δ e ρ quando $r = 20\%$



Fonte: Elaboração do autor.

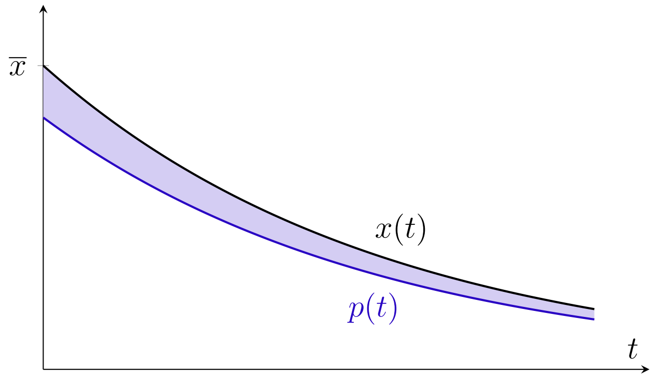
Temos que $\overline{\delta} > \rho$ para todo $\rho > r$, de forma que nunca vale a pena para o monopolista tentar extrair todo o excedente do consumidor quando $\delta = \rho$, isto é, no caso em que não há inconsistência intertemporal. Conclui-se que a inconsistência intertemporal na escolha do consumidor sempre cria alguma margem para o monopolista extrair mais excedente das consumidoras.

A Figura 3 ilustra a situação na qual $r = 10$ e $\rho = 30\%$. Com estes valores, se determina $x(t)$. A curva $p(t)$ desenhada representa a situação na qual $\delta = \rho$, e não há inconsistência intertemporal na escolha das consumidoras. A área pintada compreende todas as curvas $p(t)$ quando $\rho < \delta < \overline{\delta} = 36.2\%$.

3.4 Intervalo finito de vendas

Na secção anterior, discute-se o caso em que o horizonte de vendas é infinito, com $t \in [0, +\infty)$. Também é possível encontrar uma solução para o caso em que existe um

Figura 3 – Horizonte infinito



Fonte: Elaboração do autor.

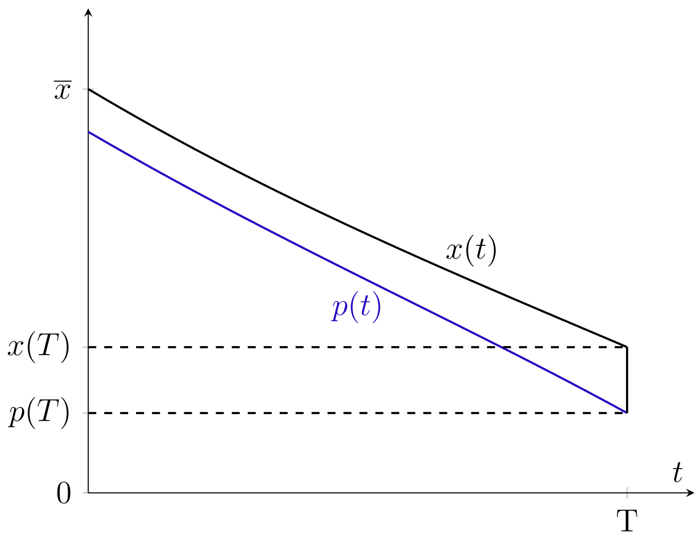
prazo dado T para o encerramento das vendas, que devem ocorrer no intervalo $[0, T]$.

Neste caso, usa-se a forma de $p(t)$ em (3.8). Do ponto inicial fixo $x(0) = \overline{x}$ e da condição de transversalidade para tempo finito

$$\lambda(T) = \frac{\partial}{\partial p_T}\Pi_T$$

É possível obter as constantes c_1 e c_2. Como as soluções são extensas, uma situação de exemplo será ilustrada graficamente. Impondo $r = 10\%$, $\rho = 45\%$, $\delta = 50\%$, $\overline{x} = 5$ e $T = 8$, obtém-se a solução ilustrada na Figura 4.

Figura 4 – Tempo final dado



Fonte: Elaboração do autor.

Como é possível identificar na figura, uma massa positiva de consumidoras igual a $F(x(T)) - F(p(T))$ compra o bem em $t = T$, totalizando, em valor presente, um lucro para o monopolista igual a $p(0)[F(x(T)) - F(p(T))]e^{-rT}$.

3.5 Segunda ordem

Dois tipos de análises de segunda ordem podem ser realizadas para o problema em questão. Em primeiro lugar, é preciso verificar se vale a condição de segunda ordem (2.6) do problema do consumidor para as trajetórias $x(t)$ e $p(t)$ encontradas. Temos:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}U(x,0) < p''(t) - 2\rho p'(t) + \rho^2 p(t) \Longrightarrow (\rho - r)(2\rho - r) > 0$$

Como estamos mais interessados no caso $r < \rho < \delta$, a expressão acima é trivialmente verdadeira.

Outra análise de segunda ordem é necessária para o problema do monopolista. Uma vez que o integrando no problema de controle em (3.5) é côncavo em $p(t)$ e em $x(t)$, basta que ω seja linear para que as condições encontradas sejam suficientes para um máximo, como é o caso do exemplo estudado. Quando ω não é linear, basta que $\lambda(t) \geq 0$ para todo t. De (3.6), essa condição é equivalente a

$$p' - rp \leq -\frac{\omega'(x)}{(\log(F(x))'}$$

Onde $(\log(F(x))'$ é a taxa de variação da distribuição de x e $\omega'(x) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial s}U(x,0)$. Como o termo à esquerda é negativo para qualquer trajetória admissível, a condição vale sempre que o termo à direita for positivo. Este é o caso para qualquer distribuição crescente de x.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No Capítulo 2, se desenvolve uma abordagem para tratar de consumidoras com preferências intertemporalmente inconsistentes, de forma que a data ótima da compra para cada consumidora parece variar com o passar do tempo. Com a hipótese auxiliar de que as consumidoras não são capazes de se comprometer com uma data futura de compra, mesmo preferências inconsistentes permitem uma forma de racionalizar a demanda que o monopolista enfrenta pelo seu produto.

As condições de ótimo encontradas no Capítulo 2 servem, no Capítulo 3 como uma restrição de incentivos e de uma restrição de participação para o problema de maximização de lucro do monopolista. Com uma forma engenhosa de escrever a função lucro sugerida em STOKEY (1979), este capítulo desenvolve o problema do monopolista como um problema de controle ótimo. Pode parecer estranha a alguns a opção pela trajetória de vendas $x(t)$ como variável de controle e a trajetória dos preços $p(t)$ como variável de estado. O contrário pode parecer mais natural. De fato, a variável de controle é aquela que é determinada diretamente pelo controlador do sistema, enquanto que o estado precisa respeitar uma restrição diferencial —através da qual o estado é indiretamente determinado pelo controle. Formalmente, isso se traduz no fato de que o controle pode ser "*jumpy*", ou *seccionalmente contínuo*, algo comum em problemas com controle restrito, como o aqui apresentado: $x(t) \in [0, \overline{x}]$. Contudo, nem considerações formais nem considerações intuitivas fazem muita diferença neste caso, uma vez que o mesmo sistema pode ser encontrado ao resolver um problema de cálculo variacional com uma restrição diferencial em que ambas as variáveis são de estado. Basta usar a substituição $x = x(t)$ em (3.2) e chegar ao problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & \int_0^T -p(t)f(x(t))x'(t)e^{-rt}\,dt \\ \text{s.a.} \quad & p'(t) = rp(t) + \omega(x(t)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

E as condições de Euler-Lagrange resultam na mesma equação diferencial em (3.7). Adicionalmente, é possível incorporar considerações transversais no problema de cálculo variacional notando que a função final de lucro em $t = T$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \Pi_T &= p(T)[F(x(T)) - F(p(T))]e^{-rT} \\ &= \int_0^T \Big((p' - rp)[F(x) - F(p)] + \underbrace{p(t)f(x(t))x'(t)}_{\text{(A)}} - p(t)f(p(t))p'(t)\Big)e^{-rt}\,dt \\ &\qquad + p(0)[F(x(0)) - F(p(0))] \end{aligned}$$

O termo (A) cancela com a função objetivo inteira em (4.1), e sobram apenas termos avaliados em $t = 0$ fora da integral. Se $p(0) = p_0$ for fixo, isso não é problema.

Dessa forma, vê-se que as condições obtidas através do Princípio do máximo de Pontryagin assumindo controle irrestrito em (3.6) são equivalentes às condições de Euler-Lagrange obtidas relaxando o grau de controle sobre $x(t)$. Não há justificativa formal para rejeitar $x(t)$ como variável de controle.

Ademais, abordagem de teoria do controle facilita a incorporação das funções de lucro Π_0 e Π_T ao problema, conciliando os dois problemas estáticos enfrentados pelo monopolista nas bordas do intervalo de vendas $[0, T]$ com o problema dinâmico enfrentado no interior deste intervalo. Como visto na Seção 3.4, é possível encontrar *equilíbrios mistos*: parte separador (em $t \in [0, T)$), parte agregador (em $t = T$).

O modelo aqui apresentado, ainda, possui outras fraquezas. Atenção especial foi dada ao caso em que $U(x, s) = xe^{-\delta s}$, que gera $\omega(x) = -\delta x$ linear em x. Em geral, funções de utilidade *multiplicativamente separáveis*, na forma $U(x, s) = \phi(x)\psi(s)$, geram um conjunto de soluções semelhante (STOKEY, 1979). Como consequência disso, pouco pode ser dito sobre casos em que U assume outras formas. Particularmente, o caso $U(x, s) = xe^{-\delta(x)s}$, com alguma especificação criativa para $\delta(x)$, seria de especial interesse, uma vez que é da classe de funções utilidade estudadas em alguns modelos comportamentais (FERNÁNDEZ; RAMBAUD, 2018).

Além disso, modelos com compromisso (por parte do monopolista) são de menor aplicabilidade do que modelos sem compromisso, tratados formalmente como um jogo dinâmico. Contudo, a abordagem de jogos sacrifica o tempo contínuo, uma vez que é mais fácil caracterizar um equilíbrio Bayesiano perfeito em tempo discreto. Além disso, a maior parte desses modelos opta por discretizar as consumidoras, definindo dois ou três grupos de consumidoras com valorizações distintas do bem. O modelo aqui apresentado é mais rico na dimensão temporal e na heterogeneidade entre as consumidoras.

O pressuposto de custo marginal igual a zero também pode ser relaxado. STOKEY (1979) discute custos marginais positivos e variantes no tempo. Contudo, na economia de 2021, muitas empresas que apresentam poder de mercado (especialmente aquelas que operam digitalmente) enfrentam custos marginais iguais a zero ou constantes —que podem ser incorporados no problema com uma simples translação no eixo x.

Três taxas de desconto diferentes coexistiram no Capítulo 3:

r: a taxa de desconto do lucro que o monopolista enfrenta;

ρ: a taxa de desconto dinheiro a ser gasto na compra do produto que as consumidoras enfrentam; e

δ: a taxa de desconto pela qual cada consumidora desconta sua valorização instantânea

x do bem.

Encontra-se, como antecipa VARIAN (1989), que o pressuposto $\rho > r$ é fundamental para garantir que a discriminação de preços seja vantajosa para o monopolista (ao menos quando a especificação de todos os processos de desconto é exponencial). Além disso, encontra-se que a inconsistência intertemporal gerada por $\delta > \rho$ permite ao monopolista aumentar seu lucro, extraindo maior excedente de cada consumidora. Mesmo com uma pequena diferença entre δ e ρ, rapidamente chega-se à uma situação em que a restrição de participação $x(t) \geq p(t)$ vale com igualdade, e o monopolista vende seu produto a cada consumidora ao seu respectivo preço de reserva instantâneo.

REFERÊNCIAS

BESANKO, D.; WINSTON, W. L. Optimal price skimming by a monopolist facing rational consumers. *Management Science*, INFORMS, v. 36, n. 5, p. 555–567, 1990.

CHIANG, A. *Elements of Dynamic Optimization*. [S.l.]: Waveland Press, 2000.

COASE, R. H. Durability and monopoly. *The Journal of Law Economics*, University of Chicago Press, Booth School of Business, University of Chicago, University of Chicago Law School, v. 15, n. 1, p. 143–149, 1972.

ERICSON, K. M.; LAIBSON, D. *Intertemporal Choice*. [S.l.], 2018. (Working Paper Series, 25358).

FERNÁNDEZ, I.; RAMBAUD, S. Inconsistency in intertemporal choice: a behavioral approach. *European Journal of Management and Business Economics*, v. 27, 03 2018.

GÁRCIGA O., R. Notas de aula: Otimização dinâmica. Instituto de Economia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2020.

KAMIEN, M.; SCHWARTZ, N. *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. [S.l.]: Dover Publications, 2012. (Dover books on mathematics).

KREPS, D. M.; WILSON, R. Sequential equilibria. *Econometrica*, [Wiley, Econometric Society], v. 50, n. 4, p. 863–894, 1982.

STOKEY, N. L. Intertemporal Price Discrimination*. *The Quarterly Journal of Economics*, v. 93, n. 3, p. 355–371, 08 1979.

______. Rational expectations and durable goods pricing. *The Bell Journal of Economics*, [RAND Corporation, Wiley], v. 12, n. 1, p. 112–128, 1981.

VARIAN, H. R. Price discrimination. In: . [S.l.]: Elsevier, 1989, (Handbook of Industrial Organization, v. 1). cap. 10, p. 597–654.