



PROBLEMAS INVERSOS EM ESCOAMENTOS TRANSIENTES DE
LÍQUIDOS EM TUBULAÇÕES

Raphael Costa Carvalho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Helcio Rangel Barreto Orlande
Marcelo José Colaço

Rio de Janeiro
Março de 2020

PROBLEMAS INVERSOS EM ESCOAMENTOS TRANSIENTES DE LÍQUIDOS
EM TUBULAÇÕES

Raphael Costa Carvalho

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA MECÂNICA.

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande
Marcelo José Colaço

Aprovada por: Prof. Marcelo José Colaço
Prof. Gustavo César Rachid Bodstein
Prof. Leonardo Antonio Bermeo Varón
Prof. Antonio André Novotny

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
MARÇO DE 2020

Carvalho, Raphael Costa

Problemas Inversos Em Escoamentos Transientes de Líquidos Em Tubulações / Raphael Costa Carvalho. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2020.

XI, 109 p.: il.; 29,7 cm.

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Marcelo José Colaço

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Mecânica, 2020.

Referências Bibliográficas: p. 98-102.

1. Problemas Inversos. 2. Escoamentos Transientes. 3. Métodos Numéricos. I. Orlande, Helcio Rangel Barreto *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Mecânica. III. Título.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por continuar a me dar forças e resiliência, dessa vez na conclusão do meu mestrado.

Agradeço à Nossa Senhora pela intercessão.

Agradeço à minha mãe Tânia e ao meu pai Márcio pela educação, amor e carinho dados a mim e à minha irmã.

Agradeço à minha irmã Raphaelle pela amizade ao longo da vida e por ser a melhor irmã que Deus podia me dar.

Agradeço à minha avó Lourdes, às minhas tias Fátima e Aparecida e ao meu primo Lucas por todo o carinho.

Agradeço ao professor Helcio Orlande e ao professor Marcelo Colaço pela paciência, atenção e ensinamentos ao longo desses dois anos de mestrado.

Agradeço a todos os alunos e funcionários do Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor (LTTC) pela amizade e ajuda durante a tese: Bruno, Elias, Elton, Evanise, Felipe Sant'Anna, Felipe Yamaguchi, Gabriel, Iasmin, Ingrid, Inoussa, Júlio César, Luciana, Luiz Carlos, Luiz Ferreira, Mohsen, Nilton, Paulo César, Paulo Veiga, Rodrigo, Svetlana e Victor.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Engenharia Mecânica da UFRJ pelos ensinamentos passados durante o curso de mestrado.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

PROBLEMAS INVERSOS EM ESCOAMENTOS TRANSIENTES DE LÍQUIDOS EM TUBULAÇÕES

Raphael Costa Carvalho

Março/2020

Orientadores: Helcio Rangel Barreto Orlande

Marcelo José Colaço

Programa: Engenharia Mecânica

Escoamentos transientes em tubulações é um tópico bastante estudado tanto dentro do contexto industrial como acadêmico. Em sistemas hidráulicos, os sinais transientes no escoamento normalmente surgem devido à forma como são operados elementos presentes na tubulação, como bombas hidráulicas e válvulas. Se a velocidade do fluido é alterada de forma brusca, um fenômeno denominado golpe de aríete ou transiente hidráulico pode ocorrer. Esse fenômeno é caracterizado pelo surgimento de ondas de pressão de grande magnitude e velocidade, que podem ser muito perigosas para a integridade de todo o sistema hidráulico. Dessa forma, no projeto de um sistema hidráulico, é muito importante saber caracterizar como esse fenômeno ocorre e suas possíveis consequências. Assim, o presente trabalho busca a aplicação de técnicas Bayesianas para a solução de um problema inverso com o objetivo de estimar parâmetros presentes na formulação matemática do golpe de aríete. Para isso será aplicado o método de Monte Carlo via Cadeia de Markov de forma clássica e usando a computação em paralelo no fenômeno do transiente hidráulico simulado em um circuito hidráulico experimental presente no Laboratório de Tecnologia e Transmissão do Calor (LTTC/UFRJ) em fase final de construção.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

INVERSE PROBLEMS IN TRANSIENT LIQUID FLOWS IN PIPES

Raphael Costa Carvalho

March/2020

Advisors: Helcio Rangel Barreto Orlande
Marcelo José Colaço

Department: Mechanical Engineering

Transient flows in pipes is a topic that has been widely studied both within the industrial and academic context. In hydraulic systems, the transient signals in the flow usually arise due to the way in which elements present in the pipeline, such as hydraulic pumps and valves, are operated. If the speed of the fluid is changed abruptly, a phenomenon called water hammer or hydraulic transient can occur. This phenomenon is characterized by the appearance of pressure waves of great magnitude and speed, which can be very dangerous for the integrity of the entire hydraulic system. Thus, in the design of a hydraulic system, it is very important to characterize how this phenomenon occurs and its possible consequences. Thus, the present work seeks the application of Bayesian techniques for the solution of an inverse problem in order to estimate parameters present in the mathematical formulation of water hammer. For that, the Markov Chain Monte Carlo method will be applied in the classic way and using parallel computing in the hydraulic transient phenomenon simulated in an experimental hydraulic circuit present at the Technology and Heat Transmission Laboratory (LTTC / UFRJ) in the final stage of construction.

Sumário

1	Introdução.....	1
1.1	Motivação	1
1.2	Objetivos.....	2
1.3	Organização do Trabalho.....	2
2	Revisão Bibliográfica	4
2.1	Contexto Histórico.....	4
2.2	A Importância da Prevenção do Golpe de Aríete	5
3	Problema Físico e Formulação Matemática	8
3.1	Equação da Conservação da Quantidade de Movimento Linear.....	8
3.2	Equação da Conservação da Massa	9
3.3	Circuito Hidráulico	16
3.4	Bomba Hidráulica.....	18
3.4	Formulação Matemática das Perdas Localizadas.....	19
4	Método de Volumes Finitos para a Solução do Problema Direto.....	23
4.1	Métodos Numéricos para a Solução das Equações do Golpe de Aríete.....	23
4.2	Estudo da Natureza do Problema.....	28
4.3	Fracionamento das Equações Não Homogêneas	29
4.4	Esquema de Fluxo Médio Ponderado (WAF).....	30
4.5	Esquemas TVD.....	32
4.6	Método de Solução	32
4.7	Solução Aproximada do Problema de Riemann	34
4.8	Volumes Fictícios	36
4.9	Critério de Estabilidade	38
5	Método MCMC para a Solução do Problema Inverso.....	39
5.1	Conceitos Gerais.....	39
5.2	Inferência Bayesiana.....	40
5.3	Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov	42
5.4	Algoritmo de <i>Metropolis-Hastings</i> em Paralelo	45
5.5	Análise dos Parâmetros Presentes nas Equações do Golpe de Aríete	52
6	Resultados e Discussões	55
6.1	Verificação do Código Computacional para o Circuito Hidráulico	55
6.2	Estimativa de Parâmetros	68
6.3	Análise Estatística da Estimativa de Parâmetro	91
7	Conclusão	96
8	Referências	98
	Apêndice A: Resultados para a Estimativas dos Demais Parâmetros do Modelo Matemático.....	103

Nomenclatura

- a celeridade.
- A área da seção transversal do duto.
- \mathbf{B} vetor termo fonte.
- b variável correspondente a cada família de onda na solução do problema de Riemann.
- c_K número de Courant.
- C_{CFL} coeficiente CFL (Courant-Friedrichs-Lewy).
- Cov função de covariância.
- D diâmetro interno do duto.
- e espessura da parede do duto.
- E módulo de elasticidade do duto.
- f fator de atrito.
- F força na direção do escoamento.
- \mathbf{F} vetor de fluxo.
- g aceleração da gravidade na direção z .
- h altura da curva de 90° presente no circuito hidráulico.
- \mathbf{J} matriz de sensibilidade.
- K módulo de elasticidade do líquido.
- K_p coeficiente de perda de carga localizada.
- L comprimento do duto.
- I número de medidas.

M	número de sensores.
N	número de ondas na solução do problema de Riemann.
N_p	número de parâmetros.
\mathbf{P}	vetor de parâmetros.
p	pressão.
q	vazão mássica.
Q	vazão volumétrica.
r	parâmetro de fluxo.
R	raio do duto.
Re	número de Reynolds.
s	número de estados na cadeia de Markov após descartar o período de aquecimento.
S	velocidade da onda presente no método HLL.
\mathbf{T}	vetor solução do problema direto.
t	tempo.
TV	variação total.
u	velocidade na direção paralela ao escoamento.
\mathbf{U}	vetor das variáveis de estado.
W	operador representando o sistema de equações diferenciais ordinárias, Equação (4.9).
\mathbf{W}	matriz de covariância.
x	posição axial.
\mathbf{Y}	vetor de medidas.

Z operador representando o sistema de equações diferenciais parciais, Equação (4.9).

Letras Gregas

- α probabilidade de aceitação.
- γ peso específico do fluido.
- Γ função de autocovariância normalizada.
- δ diferencial.
- Δ variação.
- ε rugosidade do duto.
- θ ângulo entre a direção do escoamento e o plano horizontal de referência.
- κ desvio padrão da proposta.
- λ autovalor.
- Λ matriz Jacobiana.
- μ média da distribuição gaussiana.
- η desvio padrão da distribuição gaussiana.
- ξ função utilizada nas Equações (4.16) e (4.17).
- ρ massa específica.
- σ desvio padrão das medidas.
- τ_0 tensão de cisalhamento na parede do duto.
- ϕ distribuição proposta.
- Φ função limitadora.
- φ razão entre o tempo de transição por processo e o cálculo do problema direto.
- ν volume específico.
- ν_p módulo de Poisson.
- χ distância infinitesimal.

ω variável aleatória com média zero, distribuição normal e desvio padrão unitário

Subscritos

* região com solução aproximada no problema de Riemann.

0 estado inicial.

at atrito.

D à direita.

e entrada.

E à esquerda.

ext externa.

i passo da solução no espaço.

k família de ondas do problema de Riemann.

max máximo.

min mínimo.

N número da onda na solução do problema de Riemann.

s saída.

Sobrescritos

k família de ondas do problema de Riemann.

n passo da solução no tempo.

1 Introdução

1.1 Motivação

Escoamentos internos transientes de líquidos envolvem fenômenos bem conhecidos e analisados em diversos problemas de engenharia como pode ser visto, por exemplo, em FOX *et al.* (2014). Se em algum momento a velocidade do líquido é alterada bruscamente em algum ponto na tubulação, surge um fenômeno conhecido como transiente hidráulico ou golpe de aríete (nome dado devido ao ruído de batida característico do processo) (LOMBARDI, 2005, MENDES, 2011). Essa alteração de velocidade normalmente é causada pelo fechamento rápido de válvulas ou devido à partida ou ao desligamento rápido de bombas.

Segundo LÜDECKE e KOTHE (2006), por causa da inércia do fluido, a velocidade do líquido não é capaz de se ajustar à nova configuração do escoamento quando ocorre um fechamento brusco de válvula. Como consequência, parte da energia cinética do fluido é transformada em energia de pressão, que se converte em trabalho de compressão do líquido e na deformação das paredes do duto (LOMBARDI, 2005). Devido a esses fenômenos, surgem ondas de pressão de alta intensidade com velocidade de propagação próxima de 1000 m/s ao longo da tubulação. As grandes magnitudes dessas ondas de pressão podem colocar em risco as tubulações e seus acessórios, causando até mesmo deformações plásticas nos tubos e falhas estruturais. Dessa forma, é necessário saber como ocorrem e quais são as magnitudes das ondas de pressão, para escolher adequadamente o material a ser utilizado nos dutos e empregar dispositivos de segurança que permitam a tubulação suportar as mudanças de pressão ocorridas durante o golpe de aríete.

Além de saber o comportamento das ondas de pressão presente no transiente hidráulico, existem certos parâmetros presentes na formulação matemática que possuem grande influência no fenômeno do golpe de aríete, sendo capazes de alterar a velocidade de propagação da onda de pressão, por exemplo. A aplicação de técnicas Bayesianas para a solução de um Problema Inverso pode ser uma ferramenta bastante útil na estimativa desses parâmetros e, em consequência, na caracterização do processo do golpe de aríete.

1.2 Objetivos

O presente trabalho possui como objetivo a estimativa de parâmetros presentes na formulação matemática do escoamento através da técnica Bayesiana denominada método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC). As estimativas serão feitas tendo como base um circuito hidráulico experimental presente no Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor (LTTC/UFRJ) em fase final de montagem para entrar em funcionamento.

Assim, as equações que modelam o fenômeno do golpe de aríete serão deduzidas a partir dos princípios de conservação da massa e da quantidade de movimento linear, de forma que o sistema de equações diferenciais parciais gerado seja resolvido pelo método de volumes finitos usando uma versão TVD (*Total Variation Diminishing*) do esquema de Fluxo Médio Ponderado (WAF), descrito por TORO (1997). Dessa forma, serão simuladas as variações de pressão e vazão no circuito hidráulico nas posições de alguns sensores presentes na configuração experimental.

Feita a simulação numérica, o método MCMC será aplicado através do algoritmo de *Metropolis-Hastings* na estimativa dos parâmetros. No presente trabalho, será aplicado e analisado tanto a forma clássica do algoritmo quanto uma versão que utiliza a computação em paralelo, presente em CUI *et al.* (2019). A versão em paralelo é vista com o objetivo de reduzir o tempo computacional, devido ao algoritmo de *Metropolis-Hastings* tradicional precisar que as equações do modelo matemático sejam resolvidas um número elevado de vezes.

1.3 Organização do Trabalho

O presente trabalho está dividido da seguinte forma: no capítulo 2, realiza-se a revisão bibliográfica do fenômeno do golpe de aríete, na qual são analisados os primeiros estudos sobre o tema assim como a importância de prevenir sua ocorrência em sistemas hidráulicos; no capítulo 3, são deduzidas as equações do transiente hidráulico por meio das equações de conservação de massa e quantidade de movimento linear; no capítulo 4, faz-se uma revisão dos métodos numéricos presentes na literatura para resolver as equações diferenciais do transiente hidráulico, analisa-se a natureza do problema e se aplica o método numérico para a simulação do escoamento; no capítulo 5, é feita uma análise sobre a inferência Bayesianas para a solução de Problemas Inversos

e, em particular, é analisado o Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC); no capítulo 6, são apresentados e analisados os resultados da simulação numérica para o circuito hidráulico experimental bem como os resultados para a estimativa de parâmetros para solução do problema inverso. Finalmente, no capítulo 7, são apresentadas as conclusões e as propostas de continuação do trabalho.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Contexto Histórico

De acordo com CHAUDHRY (2014), o estudo de transientes em fluidos começa com a análise da propagação das ondas sonoras no ar, água e no escoamento de sangue nas artérias. Cientistas como Newton (1687) e Langrange (1788) analisaram esse fenômeno e estimaram que a velocidade de propagação das ondas no ar era igual a 298,4 m/s, um erro relativo de 14% em relação ao valor experimental de 348 m/s presente na literatura contemporânea.

No começo do Século XIX, a Europa estava em plena Revolução Industrial, um fenômeno que aumentou a necessidade de um fornecimento maior de energia elétrica para o abastecimento das máquinas e unidades fabris, bem como da crescente população urbana. Nesse período, a geração hidroelétrica foi a principal responsável pelo abastecimento energético (GHIDAQUI *et al.*, 2002).

Companhias hidroelétricas contribuíram fortemente para o desenvolvimento de laboratórios para o estudo de fluidos e turbomáquinas, que analisavam entre outros fenômenos, o processo de golpe de aríete. Allievi, um dos primeiros pesquisadores a estudar esse processo, realizou os seus experimentos através do resultado de falhas e incidentes causados pelo aumento de pressão devido ao rápido fechamento de válvulas em usinas de potência no norte da Itália (GHIDAQUI *et al.*, 2005).

Como relata LÜDECKE *et al.* (2006), GUIDAQUI *et al.* (2005) e CHAUDHRY (2014), a equação mais conhecida para modelar o fenômeno do transiente hidráulico foi desenvolvida por Joukowsky em 1898, através de experimentos realizados em sistemas hidráulicos de Moscou, com dutos de 7,62 km, 305 m e 101,5 km de extensão e 50 mm, 101,5 mm e 152,5 mm de diâmetro, respectivamente. Esse modelo é conhecido na literatura como equação fundamental do golpe de aríete ou simplesmente equação de Joukowsky, sendo mostrada na Equação (2.1) a seguir:

$$\Delta p = \rho a \Delta u \quad (2.1)$$

onde Δp se refere a diferença de pressão, ρ é a massa específica do fluido e Δu é a variação de velocidade longitudinal do fluido. O parâmetro a representa a velocidade

de propagação da onda de pressão no fluido, também conhecida como celeridade (SZYDLOWSKI, 2002).

TIJSSELING e ANDERSON (2004) mostram que Johannes Von Kries publicou em 1883 (15 anos antes de Joukowsky) em seu trabalho sobre o escoamento de sangue nas artérias, a mesma fórmula mostrada pela Equação (2.1) para modelar o golpe de aríete. Contudo, devido ao texto de Von Kries nunca ter sido traduzido do alemão, o trabalho de Joukowsky tornou-se mais conhecido.

A teoria geral do golpe de aríete, entretanto, só foi desenvolvida em 1902 por Allievi, sendo esse autor responsável também pela produção de cartas para os picos de pressão na seção da válvula devido ao seu fechamento uniforme (GHIDAQUI *et al.*, 2005). Com o passar dos anos, o fenômeno do transiente hidráulico foi sendo melhor estudado e as suas equações governantes foram modificadas até resultar nas equações de conservação de massa e momentum mostradas no capítulo 3.

2.2 A Importância da Prevenção do Golpe de Aríete

Os riscos que o golpe de aríete pode gerar nas tubulações são consideráveis. A Figura 2.1 mostra uma tubulação de 12 mm de espessura destruída pelo transiente hidráulico. Dessa forma, entender as consequências causadas pelo golpe de aríete é necessário para manter os dutos e todos os componentes do sistema hidráulico em bom estado de funcionamento.



Figura 2.1: Tubulação com paredes de 12 mm de espessura destruída pelo golpe de aríete (LÜDECKE *et al.*, 2006)

A seguir, são listados alguns dos problemas que o golpe de aríete causar nas tubulações:

2.2.1 Altas e Baixas Pressões

Como mostra BOULOS *et al.* (2005) e LÜDECKE *et al.* (2006), o fenômeno do transiente hidráulico gera pontos de pressões máximas e mínimas nos dutos. Pressões máximas durante o regime transiente podem destruir as tubulações, as suas fixações, válvulas, bombas entre outros componentes do sistema hidráulico. Muitas vezes, o dano causado pelas ondas de pressão não é visto no mesmo momento em que ocorre o fenômeno, sendo que as suas consequências não se tornam aparentes até muito tempo depois do evento. A Figura 2.2 mostra uma válvula de retenção destruída devido à sobrepressão.



Figura 2.2: Válvula de retenção DN800 destruída devido à sobrepressão (LÜDECKE *et al.*, 2006)

Baixas pressões também podem ser extremamente danosas ao sistema hidráulico. Ao se atingir valores menores que a pressão atmosférica, pode ocorrer o colapso de tubos de parede fina ou de seções reforçadas de concreto, além da flambagem dos dutos (BOULOS *et al.*, 2005, LÜDECKE *et al.*, 2006).

Outro fenômeno relacionado às baixas pressões na tubulação é o processo de cavitação. Segundo MATTOS e DE FALCO (1998), a cavitação em líquidos ocorre quando a pressão absoluta em qualquer ponto do sistema hidráulico atinge valor igual ou inferior à pressão de vapor do líquido, fazendo com que parte do líquido se vaporize. Esse processo gera uma mistura de líquido e bolhas de vapor dentro da tubulação. Quando essa mistura atingir algum ponto do escoamento onde a pressão absoluta for novamente superior à pressão de vapor do líquido, haverá o colapso das bolhas com o

retorno à fase líquida. Como o volume específico do líquido é inferior ao volume específico do vapor, o colapso das bolhas implicará a existência de um vazio, causando o surgimento de ondas de choque.

Algumas consequências do fenômeno de cavitação para os sistemas hidráulicos são: vibrações indesejáveis, diminuição do rendimento da bomba, aceleração do processo de corrosão e flexões nos dutos (MATTOS e DE FALCO., 1998, ELBASHIR *et al.*, 2007)

2.2.2 Vibrações

Como mostra BOULOS *et al.* (2005), o golpe de aríete pode gerar fortes vibrações nos sistemas hidráulicos, prejudicando os suportes das tubulações, danificando os equipamentos de controle e medição e também o concreto presente em dutos revestidos. Essas vibrações, se continuarem por muito tempo, causarão esforços cíclicos que podem acarretar no surgimento de falhas por fadiga na tubulação. É preciso estar atento às frequências em que ocorrem as vibrações para que elas não se aproximem da frequência natural de vibração dos dutos, evitando assim que aconteça a ressonância e isso seja capaz de destruir todo o sistema hidráulico (BOULOS *et al.*, 2005).

2.2.3 Qualidade do Fluido Transportado

Em sistemas de distribuição de água potável para o consumo da população também é necessário estar atento ao fenômeno do golpe de aríete, uma vez que a qualidade da água na tubulação que sofreu esse fenômeno pode ser prejudicada. Segundo BOULOS *et al.* (2005), os eventos transientes podem gerar fortes cisalhamentos entre o fluido e as paredes da tubulação, causando a remoção de partículas presentes nos dutos.

Níveis baixos de pressão também ajudam na contaminação da água, ao gerar vazamentos nos dutos ou nas juntas das tubulações, permitindo a intrusão da água do solo ou mesmo de contaminantes (BOULOS *et al.*, 2005 e GHIDAOU *et al.*, 2005). Além disso, pontos de baixa pressão na tubulação induzem o retorno da água no sistema hidráulico, podendo ocorrer a mistura entre a água doméstica e a água industrial nos sistemas de distribuição (BOULOS *et al.*, 2005).

3 Problema Físico e Formulação Matemática

O problema físico do golpe de aríete pode ser modelado por equações baseadas nos princípios da conservação da massa e da quantidade de movimento linear, bem como a aproximação de que o escoamento é unidimensional. As variáveis dependentes são a pressão p e a velocidade média u na seção transversal do duto, enquanto que as variáveis independentes são a distância x , medida ao longo da tubulação, e o tempo t . Dessa maneira, $p = p(x, t)$ e $u = u(x, t)$. As equações gerais de conservação da massa e da quantidade de movimento linear são descritas a seguir (STREETER *et al.*, 1982).

3.1 Equação da Conservação da Quantidade de Movimento Linear

Para o desenvolvimento da equação de conservação da quantidade de movimento linear será analisado um elemento de fluido definido por um volume de controle diferencial, conforme ilustrado na Figura 3.1.

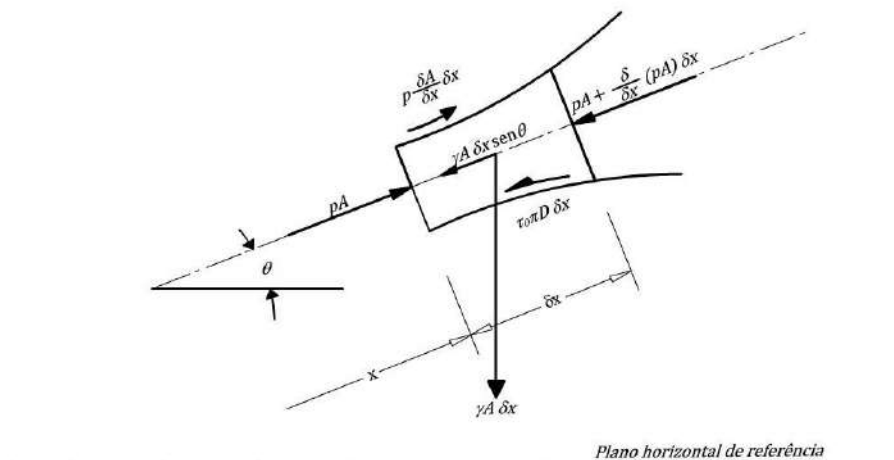


Figura 3.1: Volume de controle para a dedução da equação de conservação da quantidade de movimento linear (adaptado de STREETER *et al.*, 1982).

Aplicando a Segunda Lei de Newton na direção da velocidade do escoamento para o elemento diferencial da Figura 3.1 obtêm-se a Equação (3.1), sendo que o termo é igual à área da seção transversal, ρ igual à massa específica do fluido e θ é o ângulo a direção do escoamento e o plano horizontal de referência.

$$pA - \left[pA + \frac{\partial}{\partial x} (pA) \delta x \right] + p \frac{\partial A}{\partial x} \delta x - \gamma A \delta x \sin \theta - \tau_0 \pi D \delta x = \rho A \delta x \frac{Du}{Dt} \quad (3.1)$$

No lado esquerdo da Equação (3.1), os dois primeiros termos referem-se à diferença das forças de pressão entre a entrada e a saída do volume de controle, o terceiro termo refere-se à força de pressão exercida na superfície lateral do volume de controle, o quarto termo é a componente da força peso (sendo γ o peso específico do líquido) e o último termo é a força de atrito na parede do duto, onde τ_0 é a tensão de cisalhamento na parede. O termo da direita refere-se à massa do volume de controle ($\rho A \delta x$) multiplicada pela derivada total da velocidade.

Dividindo todos os membros da Equação (3.1) pela massa do volume de controle diferencial e simplificando obtém-se:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g \sin \theta - \frac{4\tau_0}{\rho D} = \frac{Du}{Dt} \quad (3.2)$$

Expandindo o termo da aceleração chega-se a

$$\frac{Du}{Dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.3)$$

e substituindo a Equação (3.3) na Equação (3.2) obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \sin \theta + \frac{4\tau_0}{\rho D} = 0 \quad (3.4)$$

3.2 Equação da Conservação da Massa

Para a dedução da equação de conservação da massa vamos utilizar como base a Figura 3.2:

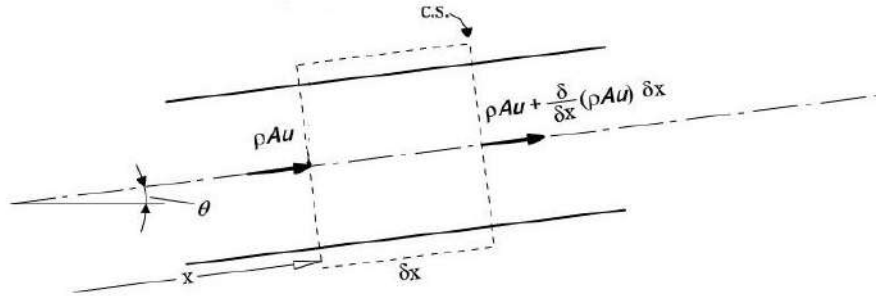


Figura 3.2: Volume de controle para a dedução da equação da conservação da massa (adaptado de STREETER *et al.*, 1982).

O princípio de conservação da massa é dado por:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \dot{m}_e - \dot{m}_s \quad (3.5)$$

onde \dot{m}_e é a vazão mássica que entra no volume de controle e \dot{m}_s a vazão mássica de saída. Ao realizar o balanço de massa no elemento diferencial da Figura 3.2, obtêm-se:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A \delta x) = \rho Au - \left[\rho Au + \frac{\partial}{\partial x}(\rho Au) \delta x \right] \quad (3.6)$$

Simplificando, temos:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho Au) \delta x = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A \delta x) \quad (3.7)$$

Após o desenvolvimento da Equação (3.7) e a sua divisão pela massa no volume de controle ($\rho A \delta x$) obtém-se:

$$\frac{u}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

Podemos reduzir a Equação (3.8) utilizando o conceito de derivada total, onde:

$$\frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} = \frac{u}{A} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{u}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.10)$$

Com isso, a Equação (3.8) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.11)$$

onde o primeiro termo da Equação (3.11) se refere à elasticidade da parede do tubo e à sua taxa de deformação devido às ondas de pressão, enquanto o segundo termo se refere à compressibilidade do fluido.

STREETER e WYLIE (1982) mostram que a taxa de variação da área pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{D}{2eE} \left(\frac{Dp}{Dt} \right) \frac{D}{2} \pi D \quad (3.12)$$

onde e se refere à espessura da parede do tubo e E é o módulo de elasticidade do duto.

Desta forma, o primeiro termo da Equação (3.11) torna-se:

$$\frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} = \frac{D}{eE} \left(\frac{Dp}{Dt} \right) \quad (3.13)$$

Usando a definição do módulo de elasticidade volumétrica do fluido (STREETER e WYLIE, 1982), sendo ν o volume específico do fluido, temos:

$$K = -\frac{Dp}{D\nu/\nu} = \frac{Dp}{D\rho/\rho} \quad (3.14)$$

o segundo termo da Equação (3.11) pode ser escrito como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{K} \frac{Dp}{Dt} \quad (3.15)$$

Aplicando as Equações (3.13) e (3.15) na Equação (3.11) tem-se:

$$\frac{1}{K} \frac{Dp}{Dt} \left(1 + \frac{K}{E} \frac{D}{e} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.16)$$

Define-se agora a velocidade de propagação da onda de pressão no fluido, também conhecida como celeridade (STREETER e WYLIE, 1982; LOMBARDI, 2005), como (SZYDLOWSKI, 2002):

$$a = \sqrt{\frac{1}{\rho \left(\frac{1}{K} + \frac{D}{eE} \right)}} \quad (3.17)$$

De acordo com CHAUDHRY (2014), a expressão para a celeridade está diretamente relacionada com as propriedades elásticas do duto assim como com o tipo de suporte da tubulação e com o grau de liberdade para o duto se movimentar longitudinalmente. Dessa forma, CHAUDHRY (2014) mostra outra fórmula mais geral para o cálculo da celeridade:

$$a = \sqrt{\frac{K}{\rho \left(1 + \left(\frac{K}{E} \right) \psi \right)}} \quad (3.18)$$

O parâmetro ψ é definido por CHAUDHRY (2014) como o parâmetro de ancoragem e ele está diretamente relacionado com o tipo de geometria da tubulação e o tipo de suporte aplicado a ela. CHAUDHRY (2014) mostra as seguintes expressões para esse parâmetro para os diversos tipos de tubulação e ancoragem, onde R_o e R_i são os raios interno e externo da tubulação, respectivamente:

1) Duto Rígido

$$\psi = 0 \quad (3.19)$$

2) Duto elástico de parede grossa

2.1) Duto ancorado contra movimentos longitudinais em relação ao seu comprimento

$$\psi = 2(1 + \nu_p) \left(\frac{R_o^2 + R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} - \frac{2\nu_p R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} \right) \quad (3.20a)$$

2.2) Duto ancorado contra movimentos longitudinais na extremidade final

$$\psi = 2 \left[\frac{R_o^2 + 1.5R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} + \frac{\nu_p (R_o^2 - 3R_i^2)}{R_o^2 - R_i^2} \right] \quad (3.20b)$$

2.3) Duto com válvulas de expansão

$$\psi = 2 \left(\frac{R_o^2 + R_i^2}{R_o^2 - R_i^2} + \nu_p \right) \quad (3.20c)$$

3) Duto elástico de parede fina

3.1) Duto ancorado contra movimentos longitudinais em relação ao seu comprimento

$$\psi = \frac{D}{e}(1-\nu_p^2) \quad (3.21a)$$

3.2) Duto ancorado contra movimentos longitudinais na extremidade final

$$\psi = \frac{D}{e}(1-0.5\nu_p) \quad (3.21b)$$

3.3) Duto com válvulas de expansão

$$\psi = \frac{D}{e} \quad (3.21c)$$

Nessas equações, o parâmetro ν_p é o módulo de Poisson do duto e a equação para o seu cálculo é dada por

$$\nu_p = \frac{E}{2G} - 1 \quad (3.22)$$

onde G é o módulo de cisalhamento do duto.

Escrevendo a Equação (3.16) em função da celeridade tem-se:

$$\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

onde a derivada total da pressão pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{Dp}{Dt} = u \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} \quad (3.24)$$

Para aplicações do golpe de aríete, o termo $u \frac{\partial p}{\partial x}$ é muito menor do que o termo $\frac{\partial p}{\partial t}$

(STREETER e WYLIE, 1982). Dessa forma, a equação (3.23) torna-se:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.25)$$

Podemos ainda usar a vazão mássica, dada por:

$$q = \rho Au \quad (3.26)$$

e reescrever as Equações (3.20) e (3.4) como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{qa^2}{A} \right] - \frac{q}{\rho A} \frac{\partial}{\partial x} (\rho a^2) &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[Ap + \frac{q^2}{\rho A} \right] - P \frac{\partial}{\partial x} A + \rho A g \sin \theta + \frac{4\tau_0 A}{D} &= 0 \end{aligned} \quad (3.27.a,b)$$

A formulação dada pelas nas Equações (3.27.a,b) pode ser simplificada desprezando as variações da área e da massa específica em função de variações da pressão dentro do duto. Nesta formulação simplificada, as variações da área e da massa são levadas em consideração através da celeridade a (CHAUDHRY, 2014). Assim, temos que (SZYDLOWSKI, 2002):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{qa^2}{A} \right] &= 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[Ap + \frac{q^2}{\rho A} \right] + \rho A g \sin \theta + \frac{4\tau_0 A}{D} &= 0 \end{aligned} \quad (3.28.a,b)$$

Existem diferentes equações constitutivas para a tensão de cisalhamento τ_0 na parede do duto. Uma delas é a aproximação de Darcy-Weisbach (STREETER e WYLIE, 1982) que é dada por:

$$\tau_0 = \frac{\rho f |u| u}{8} \quad (3.29)$$

ou, em função da vazão, a equação (3.29) torna-se:

$$\tau_0 = \frac{\rho f |q| q}{8(\rho A)^2} \quad (3.30)$$

onde f é o fator de atrito de Darcy-Weisbach, que pode ser encontrado no diagrama de Moody, ou pela seguinte equação transcendental para o escoamento turbulento (FOX *et al.*, 2014), onde ε é a rugosidade do duto.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left(\frac{\varepsilon/D}{3,7D} + \frac{2,51}{Re\sqrt{f}} \right) \quad (3.31)$$

É mostrado na literatura (AXWORTHY *et al.*, 2000; BRUNONE *et al.*, 1995) que as Equações (3.29) e (3.30) para o cálculo da tensão de cisalhamento não são capazes de proporcionar dissipação suficiente para escoamentos transientes rápidos em tubulações, que é o caso do golpe de aríete. Na realidade, a tensão de cisalhamento para escoamentos transientes é maior que a prevista pelas Equações (3.29) e (3.30), que se referem a escoamentos hidrodinamicamente desenvolvidos e em regime permanente. Portanto, neste trabalho será usada a seguinte expressão, dada por WYLIE (1997), baseada no estudo feito por BRUNONE (1991):

$$\frac{4\tau_0}{\rho D} = \frac{f|u|u}{2D} + f_u \left(\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (3.32)$$

onde o parâmetro f_u é o fator de atrito transiente. Substituindo a Equação (3.32) no balanço da quantidade de movimento linear, Equação (3.28b), obtém-se:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[Ap + \frac{q^2}{\rho A} \right] + \frac{f|q|q}{2\rho AD} + f_u \left(\frac{\partial q}{\partial t} - a \frac{\partial q}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.33)$$

Pode-se ainda escrever as equações de conservação na forma vetorial, ou seja:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{B}(\mathbf{U}) \quad (3.34.a)$$

onde

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (3.34.b)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \frac{qa^2}{A} \\ Ap + \frac{q^2}{\rho A} \end{pmatrix} \quad (3.34.c)$$

Se for usada a equação de Darcy-Weisbach para tensão cisalhante na parede e for considerado que as variações da área e massa específica são levadas em consideração através da celeridade, o termo fonte é dado por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-f|q|q}{2\rho AD} - \rho A g \sin \theta \end{pmatrix} \quad (3.34.d)$$

enquanto que se for usada a equação de WYLIE (1997), o termo fonte é então dado por:

$$\mathbf{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-f|q|q}{2\rho AD} - \rho A g \sin \theta - f_u \left(\frac{\partial q}{\partial t} - a \frac{\partial q}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (3.34.e)$$

Para o sistema de equações dado pelas Equações (3.27.a,b), o termo fonte será igual à Equação (3.34.f), sendo essa expressão escolhida para o cálculo de $\mathbf{B}(\mathbf{U})$ no presente trabalho.

$$\mathbf{B}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \frac{q}{\rho A} \frac{\partial}{\partial x} (\rho a^2) \\ \frac{-f|q|q}{2\rho AD} - \rho A g \sin \theta + P \frac{\partial}{\partial x} A - f_u \left(\frac{\partial q}{\partial t} - a \frac{\partial q}{\partial x} \right) \end{pmatrix} \quad (3.34.f)$$

Nas Equações (3.34a-f), \mathbf{U} é o vetor das variáveis de estado, \mathbf{F} é o vetor que representa o fluxo de \mathbf{U} e \mathbf{B} é o vetor que representa o termo fonte. Pode-se notar que \mathbf{F} e \mathbf{B} são funções do vetor de variáveis de estado, ou seja, $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{U})$ e $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{U})$.

3.3 Circuito Hidráulico

Para a realização dos experimentos do golpe de aríete no Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor (LTTC) da COPPE/UFRJ, está sendo montado um circuito hidráulico de aproximadamente 150 metros de extensão. O circuito é composto por uma sequência de segmentos retos horizontais, que irão percorrer o comprimento de duas paredes, em diferentes alturas, iniciando próximo ao chão e atingindo uma altura máxima de aproximadamente 2,3m. Os trechos retos de tubos possuem comprimentos de 5,19 e 6,13 metros, dependendo da parede em que se encontram, e serão conectados com curvas de 90° e 180°. O circuito completo possui 14 curvas de 90° e 12 curvas de 180°, conforme apresentado na Figura 3.3.

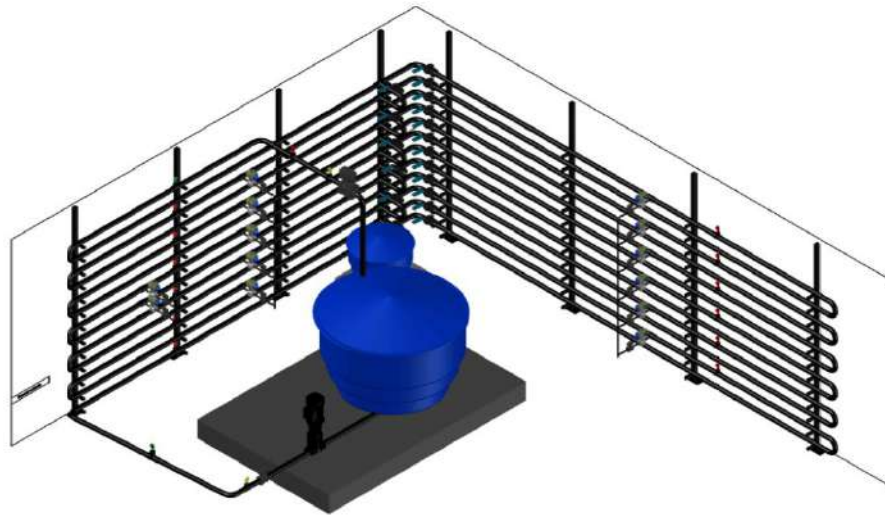


Figura 3.3 Projeto do circuito hidráulico experimental presente no LTTC/COPPE.



(a)



(b)

Figura 3.4: (a) Circuito hidráulico LTTC/COPPE e (b) Curva de aumento de altura do circuito.

São utilizados treze transdutores de pressão, dos quais, um é colocado na entrada e outro na saída do circuito, a uma distância de 143,57 metros entre si. Para a tubulação, são utilizados dutos comerciais de aço galvanizado com diâmetro interno de 52,48 mm. Seis desvios foram instalados a fim de alterar o tamanho do percurso. Cada um permite o desvio do escoamento de um duto para aquele imediatamente acima, a partir da abertura de uma válvula esfera, e bloqueia o percurso original a partir do fechamento de outras duas válvulas esferas. Ao todo, foram instaladas 18 válvulas esferas. Desta forma, será possível trabalhar com diversos comprimentos menores. Contudo, nesse trabalho, será analisado apenas o caso com o comprimento total do circuito, totalizando 150,7839 metros de comprimento entre o primeiro e último transdutor de pressão.

O circuito hidráulico experimental está em processo final de construção, dessa forma no presente trabalho não será possível utilizar medidas experimentais reais, contudo, toda a simulação numérica bem como a estimativa de parâmetros presentes na equação do golpe de aríete será feita tendo como base a geometria do circuito.

3.4 Bomba Hidráulica

No circuito hidráulico experimental presente no LTTC/COPPE será usada uma bomba na entrada da tubulação, diferentemente do que é visto usualmente na literatura para analisar o golpe de aríete, onde se costuma usar um tanque com pressão constante. Por causa dessa configuração experimental, é necessário escrever as condições de contorno na entrada da tubulação em função da curva da bomba para aplicação da condição de contorno que será usada no método numérico descrito no Capítulo 4. Foi selecionada uma bomba centrífuga da Schneider modelo VFD VME-9540 com frequência de operação igual a 60 Hz, cuja curva pode ser vista na Figura 3.5.

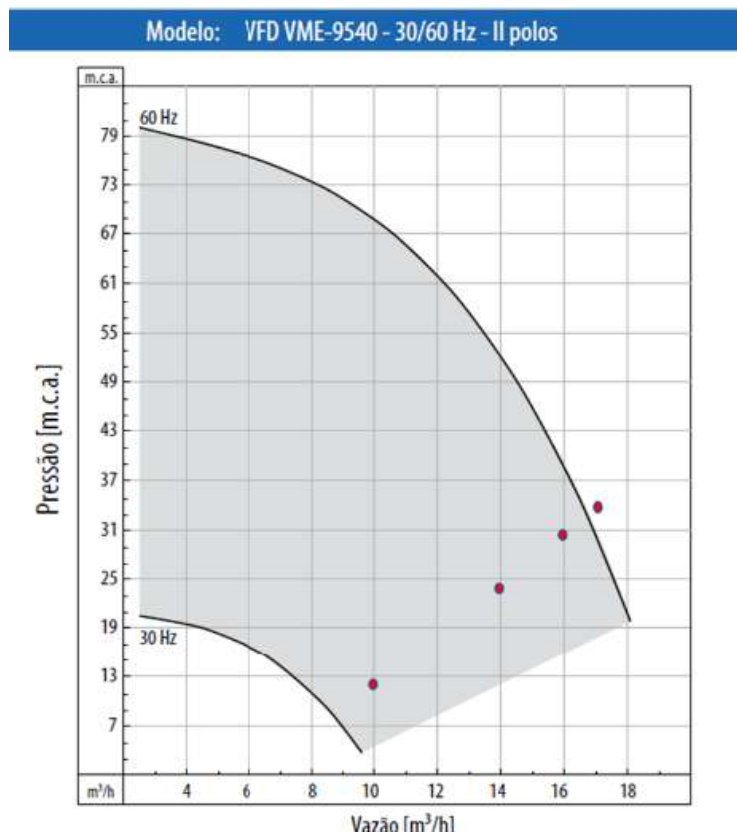


Figura 3.5. Curva da bomba VME-9540 para diferentes frequências

A curva da bomba dada pelo fabricante não fornece o valor da altura manométrica quando a vazão volumétrica da bomba é nula. Por causa disso, para a

aplicação dos métodos numéricos foi realizada uma extrapolação da curva da bomba para obter o valor da altura manométrica com vazão nula. Essa extrapolação foi feita de forma a permitir um ajuste de curva por uma equação de segundo grau com apenas uma raiz positiva, que é ilustrada na Figura 3.6 junto com a curva real da bomba.

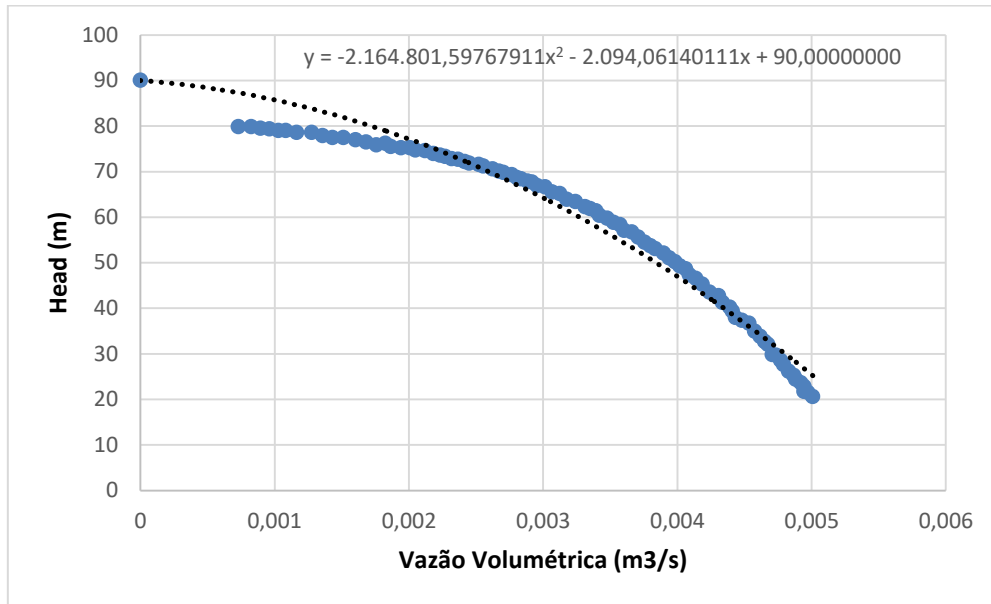


Figura 3.6. Curva da bomba para 60Hz (curva azul) e o ajuste de curva calculado (curva preta)

A equação da bomba dada pelo ajuste de curva é igual a

$$Head = -2164801,59767913Q^2 - 2094,06140111Q + 90 \quad (3.35)$$

É importante destacar que a curva da bomba dada pelo ajuste de curva possui algumas diferenças em relação à curva dada pelo catálogo, principalmente em relação à pressão máxima fornecida pela bomba. Dessa forma, para a validação dos resultados numéricos, a ser realizada quando o circuito hidráulico estiver funcionando, é necessário produzir um novo ajuste de curva para a bomba escolhida. Essa etapa será realizada após a construção do circuito experimental.

3.4 Formulação Matemática das Perdas Localizadas

No circuito hidráulico experimental existem diversos elementos que produzem perdas de cargas localizadas no escoamento, como por exemplo, medidores de vazão, joelhos e válvulas. Dessa forma, é necessário contabilizar essas perdas tanto no cálculo da pressão inicial do circuito quanto nas equações diferenciais que representam o golpe de aríete.

WANG (2002) aplica as perdas de carga localizadas nas equações do golpe de aríete utilizando a mesma metodologia de quando aparece algum tipo de bloqueio na tubulação, sendo a única diferença o coeficiente de perda utilizado. A presença de um bloqueio na tubulação é mostrada no volume de controle presente na Figura 3.7.

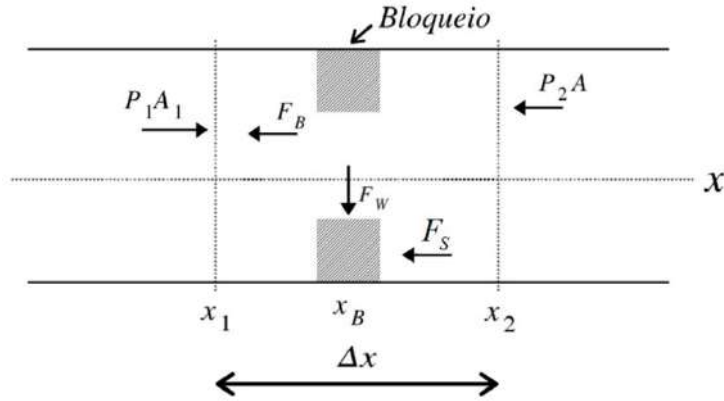


Figura 3.7. Diagrama de corpo livre para uma seção de duto com bloqueio

Podemos escrever a equação de conservação da quantidade de movimento linear para o volume de controle da seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Au)\Delta x + \frac{\partial}{\partial x}(\rho Au^2)\Delta x = \sum F_x \quad (3.36)$$

As forças atuando no volume de controle no eixo x são:

- 1- Forças de pressão nas seções 1 e 2: $F_{p1} = p_1A_1$, $F_{p2} = p_2A_2$.
- 2- Força de cisalhamento: $F_S = \tau_0\pi D(x_2 - x_1)$.
- 3- Força induzida pelo bloqueio: $F_L = \Delta P_B A$.

Considerando um escoamento da esquerda para a direita, tem-se o somatório de forças no eixo x do volume de controle é igual a:

$$\sum F = p_1A_1 - p_2A_2 - \tau_0\pi D(x_2 - x_1) - \Delta P_B A \quad (3.37)$$

Substituindo o somatório das forças na Eq. (3.37) e dividindo por Δx e fazendo $\Delta x \rightarrow 0$, temos que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho Au) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho Au^2) + A \frac{\partial p}{\partial x} + \tau_0\pi D + \Delta P_b A \delta(x - x_b) = 0 \quad (3.38)$$

onde $\delta(x - x_b)$ é a função delta de Dirac, definida como

$$\delta(x - x_b) = \begin{cases} \infty & \text{se } x=x_b \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.39)$$

de forma que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x_b - \varepsilon}^{x_b + \varepsilon} \delta(x - x_b) dx = 1 \quad (3.40)$$

onde ε é uma distância infinitesimal. O termo $\delta(x - x_b)$ possui dimensão de (comprimento⁻¹)

Expandindo os termos na Eq. (3.38), temos que:

$$u \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho A u) \right] + \rho A \frac{\partial u}{\partial t} + \rho A u \frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial p}{\partial x} + \tau_0 \pi D + \Delta P_B A \delta(x - x_b) = 0 \quad (3.41)$$

O termo entre colchetes é a equação da conservação da massa, sendo, portanto, igual a zero. Dividindo a Eq. (3.41) por ρA temos que:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\tau_0}{\rho D} + \frac{\Delta P_B \delta(x - x_b)}{\rho} = 0 \quad (3.42)$$

Escrevendo em função da vazão mássica q temos:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q^2}{\rho A} \right] + A \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\tau_0 A}{D} + \Delta P_B A \delta(x - x_b) = 0 \quad (3.43)$$

sendo essa equação utilizada no método WAF-TVD onde há perdas localizadas.

A equação da perda de pressão ΔP_B para a perda de carga localizada pode ser escrita da seguinte forma:

$$\Delta P_B = \rho K_p \frac{Q|Q|}{2A^2} = K_p \frac{q|q|}{2\rho A^2} \quad (3.44)$$

onde K_p é o coeficiente de perda de carga. Dessa forma, substituindo a Eq. (3.44) na Eq. (3.43) temos que:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q^2}{\rho A} \right] + A \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\tau_0 A}{D} + K_p \frac{q|q|}{2\rho A} \delta(x-x_b) = 0 \quad (3.45)$$

Considerando que o escoamento possui uma inclinação θ , basta adicionar o termo $g \sin \theta$ na Equação (3.42), ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\tau_0}{D} + g \sin \theta + \frac{\Delta P_B \delta(x-x_b)}{\rho} = 0 \quad (3.46)$$

Dessa forma, escrevendo a Equação (3.46) em função da vazão mássica temos:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q^2}{\rho A} \right] + A \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\tau_0 A}{D} + \rho A g \sin \theta + \Delta P_B A \delta(x-x_b) = 0 \quad (3.47)$$

Assim, escrevendo a Equação (3.47) em função do coeficiente K_p , temos que:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{q^2}{\rho A} \right] + A \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4\tau_0 A}{D} + \rho A g \sin \theta + K_p \frac{q|q|}{2\rho A} \delta(x-x_b) = 0 \quad (3.48)$$

4 Método de Volumes Finitos para a Solução do Problema Direto

No presente capítulo, apresenta-se a solução do problema direto dado pelas Equações (3.34a-f). Para isso, assume-se que todos os parâmetros e funções da formulação matemática são conhecidos. A solução do problema direto tem como objetivo o cálculo das variações de pressão e vazão ao longo do duto para cada instante de tempo. No presente trabalho, a solução numérica é obtida pelo método de volumes finitos usando uma versão TVD (*Total Variation Diminishing*) do esquema de Fluxo Médio Ponderado (WAF), descrito por TORO (1997).

4.1 Métodos Numéricos para a Solução das Equações do Golpe de Aríete

Nos trabalhos de STREETER e WYLIE (1978, 1982), são mostrados alguns métodos para a solução das equações do golpe de aríete, como por exemplo o método algébrico e o método gráfico. Os autores recomendam o uso do método das características ou MoC na abreviatura em inglês, devido a sua simplicidade na programação, assim como sua boa eficiência e acurácia, além de facilitar na implementação das condições de contorno. De acordo com GUIDAOUI *et al.* (1994), esse é o método mais usado na literatura.

No MoC, as duas equações diferenciais parciais do golpe de aríete são transformadas em quatro equações diferenciais ordinárias (escritas na forma de diferenças finitas) ao longo de linhas características como é mostrado em GHIDAQUI *et al.* (1994). Como explica TORO (1997), as linhas características são curvas $y=y(t)$ no plano $y-t$ onde as equações diferenciais parciais se transformam em equações diferenciais ordinárias.

Segundo SZYDLOWSKI (2002), a transformação das equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias faz surgir termos adicionais nas equações do golpe de aríete, distorcendo um pouco a solução numérica da solução real. Como mostra GUIDAOUI *et al.* (1994), soluções acuradas podem ser obtidas pelo método das características se o número de Courant for igual a 1. Para que essa condição seja satisfeita, é necessário que a velocidade de propagação da onda seja constante, o que,

em geral, não ocorre no golpe de aríete, devido à compressibilidade do líquido e da elasticidade da tubulação (SZYDLOWSKI, 2002).

Segundo WYLIE e STREETER (1978), para o método das características obter soluções em posições e intervalos de tempo especificados, é necessário realizar interpolações numéricas, o que gera dissipação numérica artificial na solução. A solução do MoC por interpolação produz resultados acurados para dutos rígidos e quando a celeridade varia muito pouco. Para casos em que a vazão volumétrica ou a celeridade varia muito ao longo do tempo, como por exemplo, em escoamentos dentro de dutos muito deformáveis ou com fluidos muito compressíveis, WYLIE e STREETER (1978) recomendam a solução através do uso das denominadas malhas características.

Além do MoC, outros métodos para resolver as equações do transiente hidráulico podem ser encontrados na literatura. Como será visto no próximo capítulo, o golpe de aríete pode ser modelado por um sistema de equações diferenciais parciais. Um método popular na literatura para resolver esse tipo de sistema de equações foi desenvolvido por GODUNOV (1959). Esse é um método de primeira ordem e a solução é considerada como constante por partes sobre cada célula da malha de volumes finitos em um tempo fixo e a evolução da solução para o próximo passo resulta das interações da onda que se originam na fronteira das células adjacentes. A vantagem desse método é que não são produzidas oscilações perto de descontinuidades.

Baseado no método de Godunov, o método de Roe (ROE, 1981), busca resolver as equações hiperbólicas através de uma solução aproximada para o problema de Riemann, estimando o fluxo na fronteira do volume de controle em um método de volumes finitos.

GUINOT (2000) usa o método de Godunov para resolver as equações do golpe de aríete. Nesse trabalho, é mostrado que as aproximações de segunda ordem são mais rápidas computacionalmente e fornecem resultados mais precisos que as de primeira ordem para o método de Godunov.

AXWORTHY *et al.* (2000) fazem o uso da termodinâmica irreversível estendida (*extended irreversible thermodynamics* - EIT), de maneira a derivar a equação para a perda de energia no escoamento não estacionário (*unsteady pipe flow*) 1D em um duto. Esta técnica é recomendada por especialistas em técnicas experimentais, pois fornece

uma base física para modelos de aceleração instantânea. Os autores relatam que a EIT é melhor empregada em problemas de transientes hidráulicos, uma vez que os modelos convencionais de golpe de aríete predizem adequadamente a amplitude inicial da onda de pressão. Porém, a queda dessa amplitude e a fase dos ciclos sucessivos das ondas não são bem compreendidos. A solução numérica com base em EIT é obtida através do Método das Características (MoC) e é analisada em comparação com resultados experimentais, obtendo boa concordância na comparação destes.

SZYDLOWSKI (2002) usa o esquema proposto por Roe para a solução do problema de Riemann como forma de resolver as equações do golpe de aríete utilizando a abordagem de volumes finitos. Para garantir que o método de volumes finitos seja sempre de segunda ordem, os valores das funções são extrapoladas do centro dos volumes de controle para a interface do volume pela técnica MUSCL (*Monotonic Upwind Scheme for Conservation Laws*).

WOOD *et al.*(2005) comparam a formulação e o desempenho computacional entre as abordagens Euleriana e Lagrangeana para resolver as equações do transiente hidráulico em sistemas de distribuição de água. Na abordagem Euleriana, as equações de conservação são resolvidas explicitamente e o estado hidráulico do sistema é atualizado em pontos espaciais fixos conforme o tempo avança em incrementos uniformes. enquanto que a abordagem Lagrangeana segue o movimento das ondas de pressão e atualiza o sistema em intervalos fixos ou variados no tempo. Os métodos escolhidos foram o MoC (Euleriano) e o método da onda característica (Lagrangeano), sendo aplicados em quatro redes hidráulicas de diferentes tamanhos, onde foi observada uma grande concordância entre os métodos.

SZYMKIEWICZ *et al.* (2005) utilizam o método de elementos finitos para resolver o problema do golpe de aríete, onde, para se ter uma aproximação de terceira ordem espacial e temporal, é usado um esquema implícito de seis pontos com malha fixa. Os resultados mostraram que, para simular as observações experimentais, é necessário introduzir uma difusão numérica, além de ajustar adequadamente os parâmetros da função peso usada no método dos elementos finitos.

SEPEHRAN *et al.* (2006) simulam o transiente hidráulico aplicando o método das diferenças finitas através de um esquema implícito com malha deslocada (*staggered grid*) construída de forma não simétrica, com o objetivo de facilitar a implementação

das condições de contorno. Os resultados foram comparados com a solução dada pelo método das características e com dados experimentais. A comparação mostrou uma boa concordância em relação ao pico de pressão inicial. No entanto, o método proposto nesse trabalho foi mais acurado em relação aos dados experimentais do que o método das características, considerando a evolução temporal do fenômeno do golpe de aríete.

AFSHAR *et al.* (2008) aplicam o método das características de forma implícita (IMOC), uma vez que no MoC tradicional é preciso formular as condições de contorno para cada equipamento encontrado no sistema hidráulico, o que dificulta em parte a aplicabilidade do método. O método proposto pelos autores faz uma formulação genérica das condições de contorno para qualquer equipamento encontrado na tubulação. Comparando com o MoC tradicional, os resultados obtidos para um fechamento instantâneo da válvula e para uma falha da bomba foram satisfatórios.

HWANG *et al.* (2013) buscam resolver as equações do transiente hidráulico pelo que os autores chamam de método de partículas características. Semelhante ao MoC, dois tipos de partículas regulares oriundas do sistema de equações características do golpe de aríete são usados para construir a evolução da solução. Uma partícula se desloca seguindo a linha característica positiva, enquanto a segunda partícula segue a linha característica negativa. Além destas partículas, são introduzidas partículas de choque, que correspondem ao cruzamento das linhas características. Desta forma, as características do escoamento podem ser atualizadas como no MoC, mas sem limitações numéricas. Através de casos testes, os autores comparam a solução obtida com as soluções numéricas dadas pelo método de Godunov e pelo método das características. O método descrito por HWANG *et al.* (2013) faz parte do grupo de métodos chamado método da partícula, um tipo de método que tem se tornado cada vez mais popular na dinâmica dos fluidos computacional, devido a seus precisos resultados sem a necessidade de prescrever relações topológicas nos nós computacionais.

WANG *et al.* (2015) propõem um método acoplado explícito-implícito. Para a estratégia de acoplamento, um método implícito de diferenças finitas é usado em seções curtas ou com variação de seção transversal enquanto que o MoC tradicional é usado para os trechos longos com seção transversal constantes. Essa escolha é motivada pela melhor estabilidade dos métodos implícitos. Assim, o acoplamento entre os métodos ocorre pela divisão do duto em trechos, onde cada trecho será aplicado um tipo de

método. Através de casos testes, o método proposto foi comparado com o MoC puramente explícito e com dados experimentais, mostrando uma concordância excelente.

JIANG *et al.* (2018) trazem a proposta do uso do Método das Diferenças Finitas (MDF) para determinar os transientes de pressão oriundo dos golpe de aríete, considerando a ausência e a presença de cavitação. Nesse artigo é feita a comparação da solução através do Método das Características (MoC), resultados experimentais e o Método das Diferenças Finitas com o objetivo de observar qual das soluções numéricas apresenta melhor resultado. Para investigar a cavitação, as bolhas de ar são consideradas para o cálculo da velocidade do som. Os autores concluem que o MDF proposto apresenta melhores resultados que o MOC, quando comparados com os resultados experimentais.

JENSEN *et al.* (2018) desenvolveram um código de acesso livre unidimensional para resolver o fenômeno do transiente hidráulico, sendo que o método numérico escolhido para resolver as equações do golpe de aríete foi o método das características. Nesse trabalho foram analisados alguns modelos para o termo de atrito, considerando casos onde esse termo é constante e casos onde ele é variável. Além disso, foram implementados dois modelos matemáticos para a solução do transiente hidráulico com o objetivo de modelar os fenômenos de cavitação e separação de coluna. O código proposto pelos autores foi validado com dados experimentais da literatura, para o caso de um tubo conectado a um reservatório em uma extremidade e uma válvula na outra. A validação experimental do código foi feita analisando-se o efeito do termo de atrito e com dados de três trabalhos experimentais disponíveis na literatura. Após isso, o efeito da cavitação no código proposto foi avaliado usando-se outros três conjuntos de dados experimentais. De forma geral a concordância entre o algoritmo e os resultados experimentais foi satisfatória.

No presente trabalho será aplicado o método de volumes finitos para a solução das equações do golpe de aríete via esquema WAF-TVD, sendo esse método explícito de segunda ordem no tempo e espaço. O uso desse método foi motivado pela sua eficiência para a solução de escoamentos compressíveis de gás no interior de dutos, conforme foi mostrado no trabalho de BARBOSA (2003). Nesse trabalho foi visto que o método WAF-TVD é bastante robusto para escoamentos com descontinuidades.

O método WAF-TVD foi usado também por MADEIRA (2011) para a simulação de escoamento de gás em dutos com o objetivo de aplicar a solução obtida na detecção do fechamento de válvula em gasodutos, através do filtro de partículas SIR. Esse trabalho foi continuado por LUCUMI (2015) através da comparação entre os resultados obtidos pelo filtro SIR e ASIR.

Nos trabalhos de CARVALHO (2018) e CARVALHO *et al.* (2018) o método WAF-TVD foi aplicado na solução das equações do golpe de aríete para dois casos testes. Foi visto através da comparação com resultados analíticos e experimentais que o método numérico obteve uma ótima concordância para ambos os casos, sendo que a pequena discordância apresentada para o caso com atrito foi causada pelo modelo escolhido para representar o atrito entre o fluido e a parede do duto.

4.2 Estudo da Natureza do Problema

Definido o método numérico a ser utilizado, é preciso definir a natureza do problema estudado. Um sistema de equações diferenciais parciais pode ser classificado da seguinte maneira (OZISIK *et al.*, 2017):

- Sistema Elíptico;
- Sistema Parabólico;
- Sistema Hiperbólico;
- Sistema Misto.

Para analisar a natureza do problema do golpe de aríete, o sistema de equações (3.34a-f) é escrito na seguinte forma quasi-linear (TORO, 1997):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{B}(\mathbf{U}) \quad (4.1)$$

ou

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{B}(\mathbf{U}) \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{\Lambda}$ é a matriz Jacobiana do sistema, que é igual a:

$$\Lambda \equiv \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial U_1} & \frac{\partial F_1}{\partial U_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial U_1} & \frac{\partial F_2}{\partial U_2} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

Para o presente problema, formulado pelas Equações (3.34a-f), a matriz Jacobiana é dada por:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a^2}{A} \\ A & \frac{2q}{\rho A} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

cujos autovalores são:

$$\begin{cases} \lambda_1 = u - \sqrt{u^2 + a^2} \\ \lambda_2 = u + \sqrt{u^2 + a^2} \end{cases} \quad (4.5)$$

Nota-se que os dois autovalores são reais e distintos. Portanto, o sistema de Equações (3.34a-f) é hiperbólico (TORO, 1997; OZISIK *et al.*, 2017).

4.3 Fracionamento das Equações Não Homogêneas

Para aplicação do método numérico utilizado para a integração da Equação (3.34a), o sistema não homogêneo é fracionado em dois: um sistema homogêneo de equações diferenciais parciais (EDP) e um sistema não homogêneo de equações diferenciais ordinárias (EDO) (TORO, 1997; MADEIRA, 2011; OZISIK *et al.*, 2017). O sistema é fracionado em cada intervalo de tempo Δt , com a condição inicial dada pela solução no tempo anterior, ou seja,

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^n \quad (4.6)$$

onde \mathbf{U} representa o vetor de variáveis de estado e $t^n = n\Delta t$. A cada tempo t^{n+1} , \mathbf{U}^n evolui para \mathbf{U}^{n+1} com o passo de tempo $\Delta t = t^{n+1} - t^n$.

Um fracionamento de primeira ordem no tempo é dado (TORO, 1997; OZISIK *et al.*, 2017) da seguinte forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}^n \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\mathbf{U}}^{n+1} \quad (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{B}(\mathbf{U}) \\ \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}^{n+1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{U}^{n+1} \quad (4.8)$$

Assim, a solução do sistema (4.7) é a condição inicial do sistema (4.8). Outra forma de reescrever esse fracionamento é:

$$\mathbf{U}^{n+1} = W^{(\Delta t)} Z^{(\Delta t)} (\mathbf{U}^n) \quad (4.9)$$

onde $Z^{(\Delta t)}$ e $W^{(\Delta t)}$ representam os operadores do sistema de equações diferenciais parciais (4.7) e do sistema de equações diferenciais ordinárias (4.8), respectivamente. O sistema de equações representado pelo operador $W^{(\Delta t)}$ pode ser resolvido através da integração explícita da Equação (4.8) pelo método de Euler, ou seja:

$$\mathbf{U}^{n+1} = \bar{\mathbf{U}}^{n+1} + \mathbf{B}\Delta t \quad (4.10)$$

Para o sistema representado por $Z^{(\Delta t)}$, o método utilizado aqui é descrito na próxima seção.

4.4 Esquema de Fluxo Médio Ponderado (WAF)

O método WAF (*Weighted Average Flux*) ou em português, Fluxo Médio Ponderado, é uma generalização do método de Lax-Wendroff e do método *upwind* de primeira ordem de Godunov, para sistemas não lineares de leis conservativas. O método WAF tem suas origens no esquema de fluxo randômico, que é de segunda ordem no tempo e no espaço, sendo sua abordagem determinística (TORO, 1997).

Será considerada agora a integração da equação homogênea correspondente ao sistema dado pela Equação (4.7), ou seja,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (4.11)$$

Na abordagem de volumes finitos, o domínio é dividido em volumes de controle, ou células, conforme ilustrado na Figura 4.1.

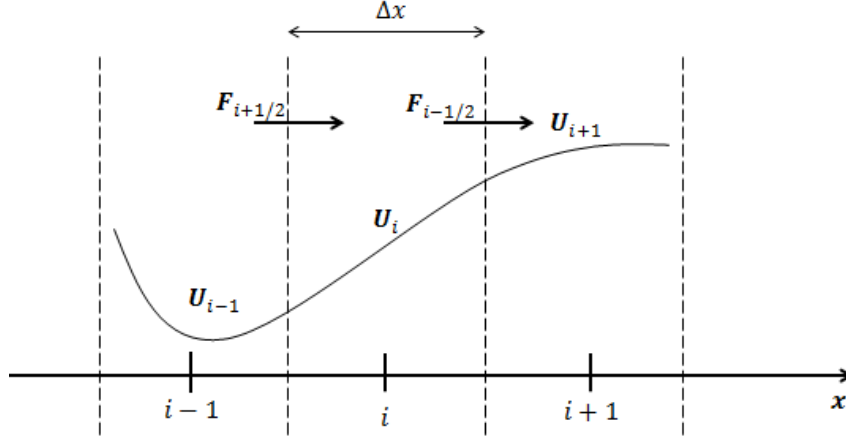


Figura 4.1: Discretização em volumes finitos para o caso unidimensional.

Considerando o domínio $\left[x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \right] \times [t, t + \Delta t]$, sendo Δx e Δt os intervalos espacial e temporal, respectivamente, a integração da Equação (4.11) neste domínio resulta em:

$$\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [\mathbf{U}(x, t + \Delta t) - \mathbf{U}(x, t)] dx + \int_t^{t+\Delta t} [\mathbf{F}(x + \Delta x / 2, t) - \mathbf{F}(x - \Delta x / 2, t)] dt = 0 \quad (4.12)$$

onde $\mathbf{F}(x, t) = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x, t))$.

O método WAF assume propriedades constantes localmente, ou seja, \mathbf{U}_i^n é uma média da solução $\mathbf{U}(x, t^n)$ na célula $\left[x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}} \right]$ no instante $t = t^n$, ou seja,

$$\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \mathbf{U}(x, t^n) dx \quad (4.13)$$

Aplicando a Equação (4.13) na Equação (4.12), tem-se:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{1}{\Delta x} \int_t^{t+\Delta t} [\mathbf{F}(x + \Delta x / 2, t) - \mathbf{F}(x - \Delta x / 2, t)] dt \quad (4.14)$$

Um esquema numérico explícito para resolver a integral acima é dado por:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^n - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n \right) \quad (4.15)$$

onde $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^n$ é uma aproximação numérica para o fluxo \mathbf{F} calculado na fronteira $i + \frac{1}{2}$ do volume de controle.

4.5 Esquemas TVD

Segundo TORO (1997), os esquemas TVD são baseados na condição de que a variação total da solução numérica não aumenta com o tempo. A variação total pode ser definida para uma solução discreta da seguinte maneira (TORO, 1997):

$$TV(\xi^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |\xi_{i+1}^n - \xi_i^n| \quad (4.16)$$

onde ξ é uma função $\xi = \xi(x)$.

Dessa forma, um esquema TVD pode ser definido matematicamente como:

$$TV(\xi^{n+1}) \leq TV(\xi^n), \quad \forall n \quad (4.17)$$

4.6 Método de Solução

Nesta seção, é aplicada a condição TVD ao método WAF. Para a aplicação da restrição TVD em sistemas não lineares, foi observado empiricamente que a solução para sistemas completos pode ser caracterizada por saltos de uma variável b , através das ondas do problema de Riemann (TORO, 1997).

A versão TVD do fluxo WAF em $i + \frac{1}{2}$ é:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}_i + \mathbf{F}_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \text{sign}(c_k) \Phi_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \Delta \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \quad (4.18)$$

onde $N(=2)$ é o número de ondas do problema de Riemann para o sistema dado pelas Equações (3.34.a-f). Na Equação (4.18),

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} = \Phi_{i+\frac{1}{2}} \left(r^{(k)} \right) \quad (4.19)$$

é a função limitadora e

$$\text{sign}(c_k) = \frac{c_k}{|c_k|} \quad (4.20)$$

é a função sinal.

O parâmetro c_k representa o número de Courant para as ondas $k=1$ e $k=2$ de velocidade S_k , sendo dado por (TORO, 1997):

$$c_k = \frac{\Delta t S_k}{\Delta x} \quad (4.21)$$

O salto do fluxo através da onda k é dado por:

$$\Delta \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} = \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(k+1)} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} \quad (4.22)$$

onde $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{U}^{(k)})$ e

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{(1)} &= \mathbf{U}_i^n = \mathbf{U}_E \\ \mathbf{U}^{(2)} &= \mathbf{U}^* \\ \mathbf{U}^{(3)} &= \mathbf{U}_{i+1}^n = \mathbf{U}_D \end{aligned} \quad (4.23)$$

sendo que o cálculo de \mathbf{U}^* será demonstrado na próxima seção.

O parâmetro de escoamento $r^{(k)}$ refere-se a onda k da solução $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}$ do problema de Riemann e é dado pela razão:

$$r^{(k)} = \begin{cases} \frac{\Delta b_{i-\frac{1}{2}}^{(k)}}{\Delta b_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}} & \text{para } c_k > 0 \\ \frac{\Delta b_{i+\frac{3}{2}}^{(k)}}{\Delta b_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}} & \text{para } c_k < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Para as equações de Euler, é recomendado usar como variável b a massa específica ou a energia interna específica (TORO, 1997). Para o caso da equação do golpe de aríete, será utilizada a pressão. Assim,

- (i) $\Delta b_{i-\frac{1}{2}}^{(k)}$ representa o salto em p através da onda k na solução $\mathbf{U}_{i-\frac{1}{2}}(x, t)$ do problema de Riemann com dados $(\mathbf{U}_{i-1}, \mathbf{U}_i)$ em um instante t^n .
- (ii) $\Delta b_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}$ representa o salto em p através da onda k na solução $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(x, t)$ do problema de Riemann com dados $(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$ em um instante t^n .
- (iii) $\Delta b_{i+\frac{3}{2}}^{(k)}$ representa o salto em p através da onda k na solução $\mathbf{U}_{i+\frac{3}{2}}(x, t)$ do problema de Riemann com dados $(\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}_{i+2})$ em um instante t^n .

A função limitadora $\Phi_{i+\frac{1}{2}}^{(k)}$ na Equação (4.19) tem como objetivo garantir que o esquema numérico seja do tipo TVD. TORO (1997) sugere algumas funções limitadoras, como Superbee, Minbee e Van Leer. Da mesma forma que nos trabalhos de BARBOSA (2003), MADEIRA (2011) e LUCUMI (2015), será utilizada aqui a função Van Leer, que é um limitador intermediário. Essa função é dada por:

$$\Phi_{VL}(r, |c|) = \begin{cases} 1 & \text{se } r \leq 0 \\ 1 - \frac{(1-|c|)2r}{1+r} & \text{se } r > 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

4.7 Solução Aproximada do Problema de Riemann

Como visto na seção anterior, para implementar o método WAF-TVD é necessário resolver o Problema de Riemann. Originalmente, o problema de Riemann referia-se ao chamado problema do tubo de choque, onde dois gases estacionários com diferentes pressões são separados por um diafragma. A ruptura deste diafragma causa uma onda de compressão (choque) para o lado de mais baixa pressão e uma onda de expansão no sentido oposto (TORO, 1997).

O problema de Riemann foi generalizado para a solução de qualquer problema unidimensional hiperbólico, onde as condições iniciais sejam dadas por:

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^{(0)}(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_E & \text{se } x < 0 \\ \mathbf{U}_D & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad (4.26)$$

onde \mathbf{U}_D e \mathbf{U}_E são dois vetores representados pela Figura 4.2.

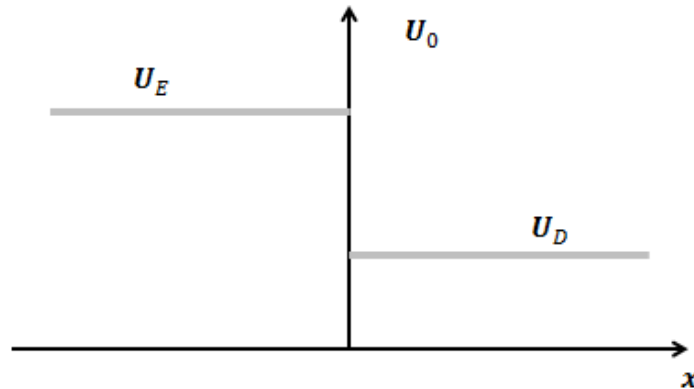


Figura 4.2: Condições iniciais para o problema de Riemann (TORO, 1997).

Para a solução aproximada do problema de Riemann, TORO (1997) apresenta o uso do método HLL desenvolvido por Harten, Lax e Van Leer. Neste método, a aproximação para o fluxo na fronteira da célula é obtida diretamente, supondo uma configuração que consiste de duas ondas separando três estados, conforme apresentado na Figura 4.3.

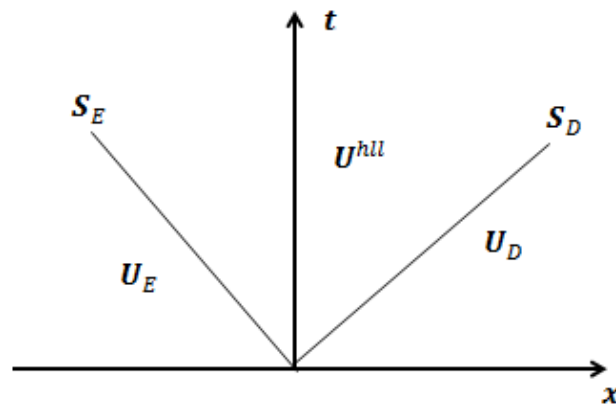


Figura 4.3: Regiões e ondas para o método HLL (TORO, 1997).

Podemos calcular o vetor \mathbf{U}^* da seguinte maneira:

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}^{hll} = \frac{S_D \mathbf{U}_D - S_E \mathbf{U}_E + \mathbf{F}_E - \mathbf{F}_D}{S_D - S_E} \quad (4.27)$$

onde $\mathbf{U}_E = \mathbf{U}_i^n$, $\mathbf{U}_D = \mathbf{U}_{i+1}^n$, $\mathbf{F}_E = \mathbf{F}(\mathbf{U}_E)$ e $\mathbf{F}_D = \mathbf{F}(\mathbf{U}_D)$.

O método que será usado aqui para estimar as velocidades S_E e S_D é dado por TORO (1997):

$$\begin{aligned} S_E &= \min \{ \lambda_1^E, \lambda_1^D \} \\ S_D &= \max \{ \lambda_2^E, \lambda_2^D \} \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde $\{ \lambda_1^E, \lambda_1^D \}$ e $\{ \lambda_2^E, \lambda_2^D \}$ são os autovalores $\lambda_1 = u - \sqrt{u^2 + a^2}$ e $\lambda_2 = u + \sqrt{u^2 + a^2}$ da matriz Jacobiana Λ para as células i e $i+1$, respectivamente.

4.8 Volumes Fictícios

Em uma solução numérica por volumes finitos na forma explícita, é necessário saber o valor da solução em todas as células em um instante de tempo anterior. A princípio, pode-se não saber o valor da solução nas células do contorno. Nestes casos, deve-se utilizar condições de contorno numéricas para volumes fictícios, os quais são ilustrados na Figura 4.4.

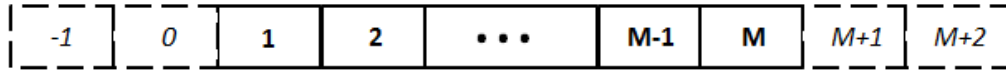


Figura 4.4: Volumes finitos e fictícios (LUCUMI, 2015).

LANEY (1998) apresenta uma técnica de extrapolação utilizando dois volumes fictícios na entrada e na saída da fronteira da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_0^n &= \mathbf{U}_1^n \\ \mathbf{U}_{-1}^n &= \mathbf{U}_2^n \\ \mathbf{U}_{M+1}^n &= \mathbf{U}_M^n \\ \mathbf{U}_{M+2}^n &= \mathbf{U}_{M-1}^n \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para o problema do golpe de aríete, quando existe um tanque na entrada da tubulação e uma válvula que é subitamente fechada na saída, CARVALHO (2018) adotou o seguinte procedimento: na entrada, o valor da pressão é imposto e a vazão é extrapolada. Para a jusante do duto, antes de fechar a válvula temos a pressão imposta

nos volumes virtuais e a vazão extrapolada enquanto que durante o fechamento da válvula tem-se a vazão imposta com a pressão extrapolada.

No caso em que existe uma bomba na entrada, como é a configuração do circuito hidráulico experimental, é necessário alterar a condição de contorno a montante do duto. Dessa forma, será utilizado o seguinte procedimento:

- 1- Extrapolam-se a vazão nos volumes fictícios -1 e 0 pelo valor da vazão presente no volume 1.
- 2- Se a vazão extrapolada for maior que a vazão mínima e menor do que a vazão máxima da bomba, calcula-se o valor da pressão nos volumes -1 e 0 pela Equação (3.35) que representa a curva da bomba vista na Seção 3.4.
- 3- Se a vazão extrapolada for maior que a vazão máxima da bomba ou menor que a vazão mínima, a pressão nos volumes virtuais é igual à pressão no tempo anterior.

Para a jusante do duto será utilizado o mesmo procedimento em CARVALHO (2018). Dessa forma, podemos resumir as condições de contorno utilizadas de acordo com a Tabela 4.1:

Tabela 4.1. Condições de contorno numéricas

Posição da condição de contorno	Válvula	Pressão	Vazão
Montante	Aberta	Calculada pela curva da bomba	Extrapolada
Jusante		Imposta pela pressão inicial	Extrapolada
Montante	Em processo de fechamento ou fechada	Calculada pela curva da bomba	Extrapolada
Jusante		Extrapolada	Imposta pelo fechamento da válvula

4.9 Critério de Estabilidade

Para que o esquema explícito descrito acima seja estável, foi escolhido utilizar o critério proposto por TORO (1997) para o cálculo do incremento de tempo Δt , isto é,

$$\Delta t = C_{\text{CFL}} \frac{\Delta x}{S_{\text{max}}^{(n)}} \quad (4.30)$$

onde Δx é comprimento da célula de discretização, C_{CFL} é o coeficiente CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) com $C_{\text{CFL}} \in (0,1]$. $S_{\text{max}}^{(n)}$ é a velocidade de propagação da onda mais rápida no instante tempo n dada por (TORO,1997):

$$S_{\text{max}}^{(n)} = \max |u_i^n| + a_i^n \quad (4.31)$$

sendo i é a posição da célula, u_i^n a velocidade do escoamento local e a_i^n a velocidade do som local. No caso do problema do golpe de aríete, a_i^n é a celeridade local.

5 Método MCMC para a Solução do Problema Inverso

5.1 Conceitos Gerais

Problemas Inversos fazem uso das respostas experimentais e do modelo matemático de um fenômeno da natureza para estimar parâmetros e/ou funções que apareçam na formulação do problema (ORLANDE, 2015). A solução para esse tipo de problema possui diversas aplicações, podendo ser aplicada em aparelhos de raio x ou ressonância magnética assim como na previsão de estados dinâmicos de um sistema, como por exemplo, a posição de um avião (ORLANDE, 2010).

De acordo com Hadamar, (OZISIK e ORLANDE, 2000; KAIPIO e SOMERSALO, 2005; ORLANDE, 2010 e KAIPIO e FOX, 2011), um problema matematicamente bem posto é definido como aquele tipo de problema em que a solução existe, é única e é estável em relação ao dados de entrada. Problemas inversos, em geral, não atendem a um ou mais desses requisitos, sendo classificados como mal postos.

Neste trabalho, a solução do problema inverso de interesse será obtida através de uma técnica de inferência estatística, dentro da abordagem Bayesiana (OZISIK e ORLANDE, 2000; KAIPIO e SOMERSALO, 2005; ORLANDE, 2010 e KAIPIO e FOX, 2011), sendo essa abordagem escolhida pela sua capacidade de lidar bem com as incertezas presentes nos parâmetros. Nesse tipo de abordagem, é feita inferência da densidade de probabilidade *a posteriori*, que é obtida através do teorema de Bayes, sendo que essa densidade é proporcional ao produto da função de verossimilhança (modelo para os erros de medida) e da distribuição *a priori* que é o modelo estatístico para a informação que é conhecida antes dos dados experimentais estarem disponíveis (ORLANDE, 2015).

Para a solução do problema inverso, consideramos o vetor de parâmetros como sendo um vetor que contém os parâmetros da formulação do problema direto, isto é:

$$\mathbf{P}^T = [P_1, P_2, \dots, P_{N_p}]^T \quad (5.1)$$

onde N_p é o número de parâmetros. Esses parâmetros podem representar, por exemplo, a velocidade de propagação da onda de pressão, assim como alguma propriedade física do fluido ou da tubulação. O vetor \mathbf{P} pode representar valores constantes dessas

variáveis ou uma aproximação de uma função em termo de funções de bases conhecidas.

Considera-se também o vetor de medidas disponíveis para a solução do problema inverso como:

$$\mathbf{Y}^T = [\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \dots, \bar{Y}_I]^T \quad (5.2)$$

onde \bar{Y}_i contem as medidas de M sensores no tempo $t_i, i = 1, \dots, I$, ou seja,

$$\bar{Y}_i = [Y_{i1}, Y_{i2}, \dots, Y_{iM}] \quad (5.3)$$

No caso de medidas simuladas e considerando que os erros de medida são aditivos e Gaussianos temos que:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}(\mathbf{P}) + \zeta \quad (5.4)$$

onde $\mathbf{T}(\mathbf{P})$ é a solução do problema direto usando o valor exato dos parâmetros e $\zeta = \omega\sigma$, sendo ω uma variável aleatória com média zero, distribuição normal, desvio padrão unitário, e σ o desvio padrão das medidas, sendo esses desvios iguais aos desvios padrões dos sensores de medida.

Com essas hipótese para os erros de medida, a função de verossimilhança pode ser escrita como (KAPIO e SOMERSALO,2005; ORLANDE 2015).

$$\pi(\varepsilon) = \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P}) = (2\pi)^{-D/2} |\mathbf{W}|^{-1/2} \exp\{-0,5[\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})]\mathbf{W}^{-1}[\mathbf{Y} - \mathbf{T}(\mathbf{P})]\} \quad (5.7)$$

onde \mathbf{W} é a matriz de covariância.

5.2 Inferência Bayesiana

Para a solução de Problemas Inversos dentro da abordagem Bayesiana, todas as variáveis presentes na formulação matemática são modeladas como variáveis aleatórias. A técnica de solução através dessa abordagem pode ser resumida através dos seguintes passos (KAPIO e SOMERSALO, 2004):

- 1) Baseada em toda a informação disponível para os parâmetros \mathbf{P} antes das medidas \mathbf{Y} serem tomadas, selecione uma função de distribuição de probabilidade $\pi(\mathbf{P})$ que represente adequadamente a informação *a priori*;
- 2) Selecione a função de verossimilhança $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$ que modele de forma apropriada os erros de medidas;
- 3) Desenvolva métodos para explorar a função de densidade a posteriori, que é a distribuição de probabilidade condicional dos parâmetros dada as medidas $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$.

O mecanismo formal para combinar a informação dada pelas medidas (função de verossimilhança) e a distribuição a priori é o Teorema de Bayes (KAPIO e SOMERSALO, 2004; ORLANDE, 2015).

Sejam \mathbf{P} e \mathbf{Y} variáveis aleatórias contínuas, então se tem:

$$\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) = \frac{\pi(\mathbf{P}, \mathbf{Y})}{\pi(\mathbf{Y})} \quad (5.6)$$

ou seja, a densidade condicional da variável aleatória \mathbf{P} dado um valor para a variável aleatória \mathbf{Y} é igual a densidade conjunta de \mathbf{P} e \mathbf{Y} dividida pela densidade marginal de \mathbf{Y} , onde

$$\pi(\mathbf{Y}) = \int_{R^N} \pi(\mathbf{P}, \mathbf{Y}) d\mathbf{P} \quad (5.7)$$

A densidade conjunta $\pi(\mathbf{P}, \mathbf{Y})$ geralmente não é conhecida, mas pode ser escrita em termos da função de verossimilhança e da distribuição *a priori* como:

$$\pi(\mathbf{P}, \mathbf{Y}) = \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})\pi(\mathbf{P}) \quad (5.8)$$

Substituindo a Equação (5.5) na Equação (5.4a), pode-se escrever o Teorema de Bayes da seguinte forma:

$$\pi_{\text{posteriori}}(\mathbf{P}) = \pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) = \frac{\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})\pi(\mathbf{P})}{\pi(\mathbf{Y})} \quad (5.9)$$

onde $\pi_{\text{posteriori}}(\mathbf{P})$ é a densidade posterior de probabilidade, $\pi(\mathbf{P})$ é a densidade *a priori*, $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$ é a função de verossimilhança e $\pi(\mathbf{Y})$ é a densidade marginal de probabilidade

das medidas, a qual desempenha o papel de uma constante de normalização para $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$. O cálculo de $\pi(\mathbf{Y})$ com a Equação (5.7) é em geral difícil, e normalmente não é necessário para cálculos práticos. Assim, o teorema de Bayes é comumente escrito como (ORLANDE, 2015):

$$\pi_{posteriori}(\mathbf{P}) = \pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) \propto \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})\pi(\mathbf{P}) \quad (5.10)$$

Uma técnica para a estimativa de parâmetros dentro da abordagem Bayesiana dá-se através de um problema de minimização da função objetivo *maximum a posteriori*. Para a sua aplicação, é necessário que a distribuição a posteriori seja analítica, fato que ocorre quando as distribuições são conjugadas, em particular, quando tanto a função de verossimilhança quanto a distribuição a priori são Guassianas. Para os casos em que a distribuição a posteriori não é analítica e/ou as integrações numéricas para a estimativa de suas estatísticas não são práticas, métodos de Monte Carlo via Cadeia de Markov (MCMC) podem fornecer a solução do Problema Inverso. (OZISIK e ORLANDE, 2000; KAIPIO e SOMERSALO 2005; ORLANDE, 2010; KAIPIO e FOX, 2011). Essa técnica para a solução foi escolhida no presente trabalho com o objetivo de analisar a sua versão em paralelo descrita por CUI *et al.* (2019) que será descrita nas próximas seções.

5.3 Método de Monte Carlo via Cadeia de Markov

A principal ideia do método é obter amostras da distribuição a posteriori usando técnicas de simulação iterativa, baseadas nas Cadeias de Markov e calcular estimativas amostrais das estatísticas dessa distribuição. A Cadeia de Markov é um processo estocástico em que, dado o estado presente, os estados passados e futuros são independentes.

Um dos algoritmos MCMC mais comuns é o algoritmo de *Metropolis Hastings* (ORLANDE, 2015). Esse algoritmo é baseado no método de aceitação-rejeição, onde são gerados valores candidatos \mathbf{P}^* que pertencem a uma distribuição proposta $\phi(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^t)$. O algoritmo é descrito a seguir (KAIPIO e SOMERSALO, 2005, ORLANDE, 2015):

- 1) Inicia-se o contador de iterações da cadeia $t=1$ com um estado inicial arbitrário \mathbf{P}^1

- 2) É gerado um candidato \mathbf{P}^* da distribuição proposta $\phi(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}^t)$.
- 3) Calcula-se a probabilidade de aceitação $\alpha(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}^t)$ através da seguinte equação:

$$\alpha(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}^t) = \min \left[1, \frac{\pi_{posterior}(\mathbf{P}^*) \phi(\mathbf{P}^t | \mathbf{P}^*)}{\pi_{posterior}(\mathbf{P}^t) \phi(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}^t)} \right] \quad (5.10)$$

- 4) Gera-se um número randômico $U \sim U(0,1)$ com distribuição uniforme em $(0,1)$
- 5) Se $U \leq \alpha(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}^t)$, faz-se $\mathbf{P}^{t+1} = \mathbf{P}^*$. Caso contrário, $\mathbf{P}^{t+1} = \mathbf{P}^t$. Faça $t = t+1$ e retorne ao passo 2 para gerar a sequência $\{\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^n\}$.

Analisando o algoritmo anterior, vemos que uma sequência é gerada para representar a distribuição a *posteriori* e a inferência dessa distribuição é obtida através das amostras de $\{\mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^n\}$. É importante notar que os valores de \mathbf{P}^t devem ser descartados até que a cadeia convirja para o equilíbrio, sendo esse período chamado de período de aquecimento da cadeia (KAPIO e SOMERSALO 2005; ORLANDE, 2015). Dessa forma, se m estados são necessários para a cadeia chegar ao equilíbrio, a amostra usada para calcular a estatística da cadeia é igual a $\{P_j^{m+1}, P_j^{m+2}, \dots, P_j^n\}$. O índice da amostra pode ser mudado de $t = m+1, \dots, n$ para $r = 1, \dots, s$ por simplicidade, onde $s = n - m$.

Pode-se verificar a convergência da cadeia através dos gráficos de $\{P_j^1, P_j^2, \dots, P_j^s\}$ com $r = 1, 2, \dots, s$ e também pelo gráfico da distribuição a posteriori $\pi_{posteriori}(\mathbf{P})$ dada pela Equação (5.10) (ORLANDE, 2015). GEWEKE propõe um método para análise de convergência baseado nas médias calculadas das amostras em diferentes intervalos na cadeia de Markov (GEWEK, 1992, ORLANDE, 2015, ORLANDE 2019). Seja

$$\bar{P}_j^a = \frac{1}{s_a} \sum_{r=1}^{s_a} P_j^{(r)} \quad (5.11a)$$

$$\bar{P}_j^b = \frac{1}{s_b} \sum_{r=s^*}^s P_j^{(r)} \quad (5.11b)$$

onde

$$s^* = s - s_b + 1 \quad (5.12a)$$

$$s_a = 0.1s \quad (5.12b)$$

$$s_b = 0.5s \quad (5.12c)$$

Dessa forma, \bar{P}_j^a e \bar{P}_j^b representam as médias das amostras obtidas nos intervalos iguais aos 10% iniciais da cadeia e nos 50% finais da cadeia, respectivamente. GEWEK (1992) demonstrou que $(\bar{P}_j^a - \bar{P}_j^b) \rightarrow 0$ quando a cadeia $\{P_j^1, P_j^2, \dots, P_j^s\}$ atinge o equilíbrio.

Para a avaliação da independência das amostras geradas, pode-se calcular o tempo de autocorrelação integrado (IACT) que representa o número de amostras correlacionadas entre amostras linearmente independentes na cadeia de Markov. Para uma sequência $\{P_j^1, P_j^2, \dots, P_j^s\}$ obtida da cadeia de Markov para o parâmetro P_j , o IACT é dado por (ORLANDE, 2015 e ORLANDE *et al.*, 2019):

$$IACT_j = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma_j(k) \quad (5.13a)$$

onde

$$\Gamma_j(k) = \frac{Cov_j(k)}{Cov_j(0)} \quad (5.13b)$$

é a função de autocovariância normalizada no retardo k e

$$Cov_j(k) = \text{cov}[P_j^{(r)}, P_j^{(r+k)}] \quad (5.13c)$$

é a função de covariância entre $P_j^{(r)}$ e $P_j^{(r+k)}$. Assim, pela definição do tempo de autocorrelação, o tamanho efetivo da cadeia é igual a (ORLANDE, 2015):

$$s_{eff} = \frac{s}{IACT} \quad (5.14)$$

Para o cálculo do IACT, o somatório da Equação (5.13a) deve ser truncado para um número finito de termos $s^* \leq s$. É esperado que a função de autocovariância normalizada $\Gamma_j(k)$ tenda a zero conforme o valor de k aumente, mas também seja dominada por ruído para valores grandes de k . Assim, s^* pode ser escolhido aumentando o valor de k até que $\Gamma_j(k)$ se aproxime de zero, evitando assim os termos que são bastante influenciados por ruído (ORLANDE, 2015).

Outro fato a se notar é que a distribuição proposta $\phi(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}^t)$ desempenha um papel fundamental no algoritmo de Metropolis-Hastings, uma vez que ela é responsável por gerar a amostra candidata \mathbf{P}^* , dada a amostra $\mathbf{P}^{(t)}$ no estado atual da cadeia de Markov. Escolhas comuns para $\phi(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}^t)$ incluem: (i) passeio aleatório ou *random walk* e (ii) amostragem independente (ORLANDE, 2015).

5.4 Algoritmo de *Metropolis-Hastings* em Paralelo

Na última década, o crescente desenvolvimento dos dispositivos eletrônicos tem permitido o contínuo avanço da capacidade de processamento juntamente com o aumento do número de núcleos presente em um único processador. Esse aumento no número de núcleos foi fundamental para o avanço da computação em paralelo (OH e HONG., 2017).

Em termos gerais, a computação em paralelo pode ser definida como o uso de mais de um núcleo do processador para realizar mais de uma tarefa de forma simultânea ou a partição de uma única tarefa em mais de um núcleo. De acordo com CHAPMAN *et al* (2008) a computação em paralelo pode ser dividida em dois tipos de tecnologias: a computação em paralelo com memória de processamento distribuída (DMP) e a computação em paralelo com memória de processamento compartilhada (SMP).

Segundo TURNER e HU (2001) e OH e HONG (2017), na memória de processamento distribuída (*distributed memory processing*) cada processador possui sua própria memória e comunica-se através de uma interface de transmissão de mensagem (*message passing interface*- MPI). Nesse tipo de processamento, a paralelização possui um melhor desempenho. Contudo, é mais difícil de programar, pois todo o código computacional precisa estar paralelizado.

Já para a memória de processamento compartilhada SMP (*shared memory processing*), a memória é compartilhada entre os núcleos, o que facilita a programação e a implementação do código computacional em paralelo. Segundo OH e HONG (2017), a biblioteca OpenMP é a biblioteca mais usada para se utilizar a abordagem SMP. De acordo com a definição do próprio site da biblioteca, a OpenMP é uma especificação para uma série de diretivas de compilação, bibliotecas de rotina e variáveis de ambiente que podem ser usadas para especificar um paralelismo de alto nível em programas escritos em Fortran e C/C++. Essa biblioteca é baseada no conceito de paralelismo *fork-joint* onde é possível fazer com que apenas determinadas partes do código estejam em paralelo, o que facilita bastante a conversão de um código escrito da forma serial para um código em paralelo (OH E HONG, 2017). A Figura 5.1 mostra um desenho esquemático do conceito *fork-joint*, onde as linhas vermelhas representam o núcleo principal, que trabalha tanto na parte sequencial quanto na parte paralela do código, a região azul representa a parte do código que está paralelizada e as linhas pretas representam os demais núcleos do processador.

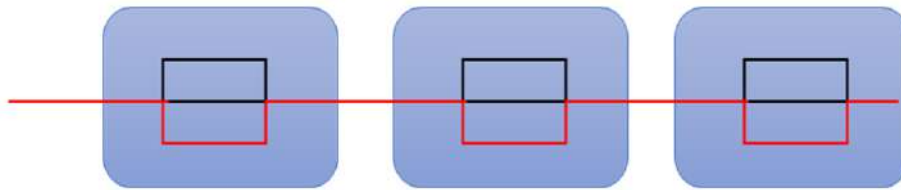


Figura 5.1: Conceito *Fork-Joint*.

Segundo CHAPMAN *et al* (2008), uma vantagem da OpenMP está na sua facilidade no uso, onde detalhes da programação em paralelo ficam restritos ao compilador. Uma desvantagem que existia na OpenMP era a limitação do número de núcleos por processador. Contudo, com o desenvolvimento da tecnologia, esse número de núcleos aumentou, gerando o interesse dessa biblioteca em comparação aos programas MPI (OH e HONG, 2017).

A computação em paralelo será usada neste trabalho na implementação do algoritmo de aceitação-rejeição descrito por CUI *et al.* (2019) para a aplicação do método MCMC. Uma dificuldade presente na aplicação dos métodos MCMC para a solução do problema inverso está no alto custo computacional do método devido ao elevado número de estados necessários na cadeia para gerar uma amostra da distribuição

a posteriori em algumas situações. Por causa disso, CUI *et al.* (2019) introduziram um método de aceitação-rejeição em paralelo com o objetivo de paralelizar o algoritmo de Metropolis-Hastings. Dessa maneira, para a aplicação do método MCMC em paralelo descrito por CUI *et al.* (2019), a OpenMP foi escolhida neste trabalho para a preparação de um código em C. O algoritmo é descrito a seguir, sendo que n representa o número de threads (núcleos) no processador, $r = 1, 2, \dots, n$ é o índice do processador e k o índice de iteração da cadeia de Markov.

Algoritmo de Metropolis-Hastings em Paralelo (CUI et al., 2019)

Estado atual da cadeia de Markov \mathbf{P}_i

Faça a simulação de n cadeias de Markov $\{\mathbf{P}_{r,k}\}_{k=0}^{\infty}$ em paralelo

Inicialize a cadeia de índice r $\mathbf{P}_{r,0} = \mathbf{P}_i$

Defina $t_r = \infty$

Faça $k = 1, \dots, \infty$

Gere um parâmetro candidato $\mathbf{P}^* \sim \phi(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}_{r,k-1})$

Calcule a probabilidade de aceitação

$$\alpha(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}_{r,k-1}) = \min \left[1, \frac{\pi_{\text{posterior}}(\mathbf{P}^*) \phi(\mathbf{P}_{r,k-1} | \mathbf{P}^*)}{\pi_{\text{posterior}}(\mathbf{P}_{r,k-1}) \phi(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}_{r,k-1})} \right]$$

Gere um número randômico $U \sim U(0,1)$ com distribuição uniforme em $(0,1)$

Se $U \leq \alpha(\mathbf{P}_{r,k-1} | \mathbf{P}^*)$,

Aceite \mathbf{P}^* fazendo $\mathbf{P}_{r,k} = \mathbf{P}^*$ e $t_r = r + n(k-1)$

Pare a simulação da cadeia de Markov de índice r

Caso contrário,

Rejeite \mathbf{P}^* fazendo $\mathbf{P}_{r,k} = \mathbf{P}_{r,k-1}$

Fim

Calcule $t_{\min} = \min(t_1, t_2, \dots, t_n)$

Se $t_r \leq r + n(k-1)$

Pare a simulação da cadeia de Markov de índice r

Fim

Fim

Fim

Defina $\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_i$ para $j = i+1, i+2, \dots, i+t_{\min} - 1$ e $\mathbf{P}_{i+t_{\min}} = \mathbf{P}_{t_{\min}}$ e retorne para o

começo do algoritmo.

Para ilustrar como o método funciona, é mostrado um desenho esquemático na Figura 5.2 para um processador com um número de núcleos igual a cinco. Nesse

desenho, os símbolos em vermelho e azul indicam os vetores de parâmetros candidatos rejeitados e aceitos, respectivamente.

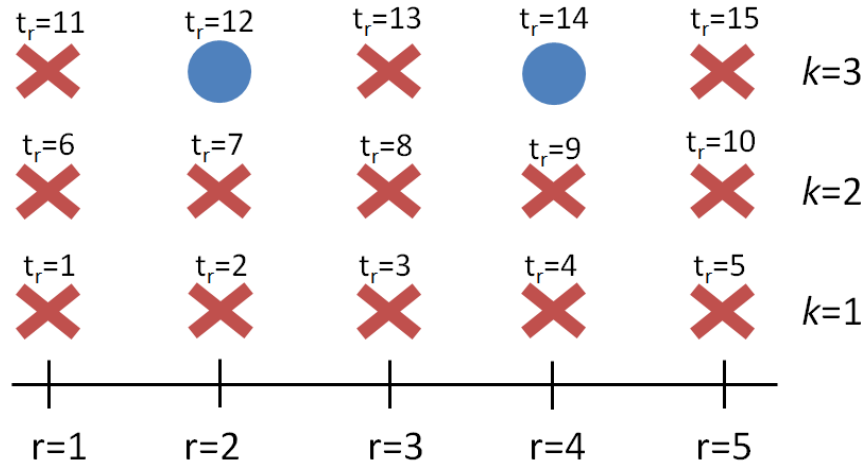


Figura 5.2: Método de aceitação e rejeição em paralelo.

O algoritmo inicia-se com um estado inicial \mathbf{P}_i gerando em paralelo cinco vetores de parâmetros candidatos \mathbf{P}^* diferentes obtidos a partir de \mathbf{P}_i . A seguir, resolve-se o problema direto em paralelo para cada vetor \mathbf{P}^* . Se algum desses vetores de parâmetros for aceito, calcula-se o termo t_r , caso contrário aumenta-se em uma unidade o índice k . No exemplo mostrado na Figura 5.2, os vetores de parâmetros candidatos foram aceitos para os termos t_r iguais a 12 e 14. Tendo sido aceito algum vetor \mathbf{P}^* , é calculado o menor valor de t_r , que no exemplo é igual a 12. Dessa forma, o algoritmo irá adicionar à cadeia de Markov o valor de \mathbf{P}_i um número de vezes igual ao valor de $t_r - 1$ calculado de forma que $\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_i$ para $j = i+1, i+2, \dots, i+t_{\min} - 1$ e $\mathbf{P}_{i+t_{\min}} = \mathbf{P}_{t_{\min}}$. Em seguida, o contador k retornará para o valor inicial igual a 1 tendo agora como valor de \mathbf{P}_i igual $\mathbf{P}_{t_{\min}}$ calculado anteriormente.

Para analisar o desempenho do algoritmo de *Metropolis-Hastings* em paralelo, CUI *et al.* (2019) apresentaram algumas expressões para o cálculo do aumento de velocidade de computacional ou *speed up factor*. Para isso, é assumido que cada aceitação/rejeição do método ocorre de forma independente com uma probabilidade α de aceitação. Assim, o número esperado de estados em um método MCMC regular para

que se obtenha o primeiro estado aceito é igual a α^{-1} . Já para o algoritmo de *Metropolis-Hastings* em paralelo, a probabilidade de se obter pelo menos um estado aceito utilizando n núcleos é igual a $1-(1-\alpha)^n$. Dessa forma, o número esperado de estados para que algoritmo descrito por CUI *et al.* (2019) aceite o primeiro estado é $[1-(1-\alpha)^n]^{-1}$. Considerando que o tempo computacional em cada estado do MCMC é constante, o fator de aumento de velocidade pode ser calculado como:

$$\frac{t_s}{t_p} = \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} \quad (5.14)$$

onde t_s e t_p são os tempos computacionais para a cadeia de Markov em paralelo e de forma serial, respectivamente.

Com a Equação (5.14) podemos gerar curvas para melhor visualizar como o aumento no número de núcleos influencia no fator de aumento de velocidade. Para isso, foram analisadas as situações em que a taxa de aceitação é igual a 1%, 5%, 10%, 30% e 50%. Essa análise é mostrada na Figura 5.2.

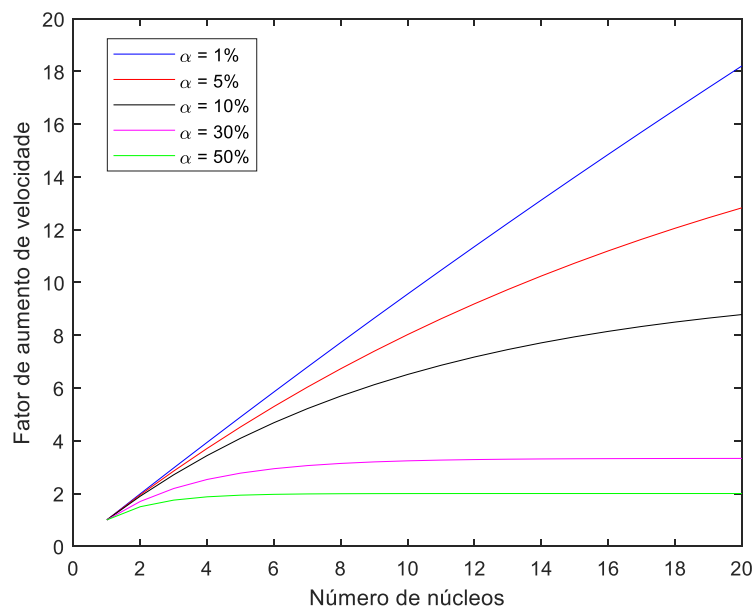


Figura 5.2: Fator de aumento de velocidade teórico para o esquema de aceitação rejeição em paralelo.

Pela Figura 5.2, observa-se que quanto menor a taxa de aceitação, maior será o fator de aumento de velocidade conforme mais núcleos são utilizados. Esse fato está

relacionado à característica do método proposto por CUI *et al.* (2019) que faz com que os estados não aceitos calculados pelo núcleos sejam incorporados na cadeia de Markov. Percebe-se que para taxas de aceitação a partir de 30%, o fator de aumento de velocidade possui um limitante próximo de 8 núcleos, ou seja, o uso de mais núcleos não irá contribuir para a maior velocidade do método.

CUI *et al.* (2019) ressalta que a Equação (5.14) é apenas teórica. Em diversas aplicações de engenharia, a simulação do modelo matemático ou problema direto requer acesso ao disco do computador para acessar arquivos de dados e especificações de simulação que não podem ser paralelizadas. Dessa forma, existe um limite prático para o fator de aumento de velocidade que não está presente na Equação (5.14). Esse limite é calculado por CUI *et al.* (2019) através da introdução do parâmetro t_T que representa o tempo computacional no cálculo do problema direto e o parâmetro φ que representa a razão entre o tempo de transição por processo e o cálculo do problema direto. Assim, cada iteração do método MCMC escrito de forma serial é igual a $(1 + \varphi)t_T$ enquanto que para o algoritmo em paralelo, esse tempo é igual a $(1 + n\varphi)t_T$. Isso leva a uma redução do fator de velocidade igual a

$$\frac{t_s}{t_p} = \frac{\left[1 - (1 - \alpha)^{n-1}\right]}{\alpha} \frac{1 + \varphi}{1 + n\varphi} \quad (5.14)$$

CUI *et al.* (2019) faz o mesmo procedimento mostrado na Figura 5.2 para um valor de φ igual a 0.2. Esse resultado é mostrado na Figura 5.3.

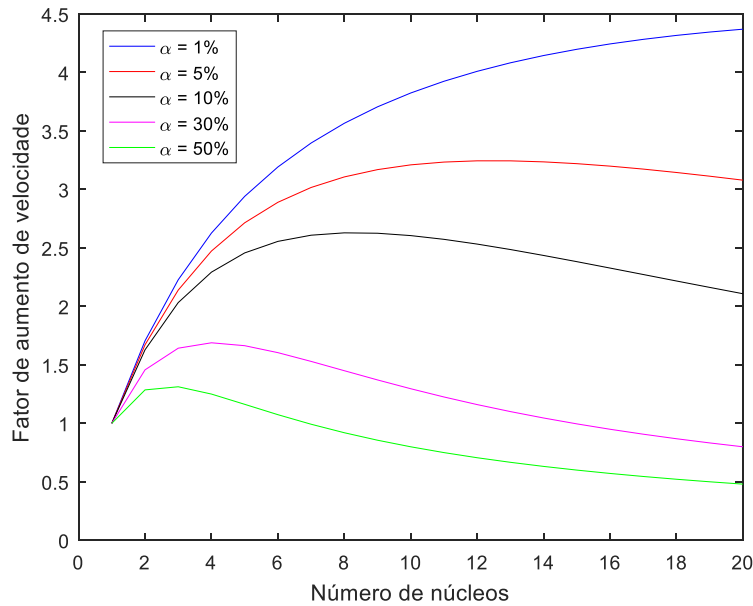


Figura 5.3: Fator de aumento de velocidade reduzido para o esquema de aceitação rejeição em paralelo.

Através da análise da Figura 5.3, observa-se que para altas taxas de aceitação, o aumento do número de núcleos acarreta em uma diminuição do fator de aumento de velocidade, sendo que o uso de mais de 8 processadores fará com que o método fique mais lento que o método MCMC de forma serial para uma taxa de aceitação de 50%.

5.5 Análise dos Parâmetros Presentes nas Equações do Golpe de Aríete

Analisando o problema direto dado pela Equação (3.34a-f) que representa o fenômeno do golpe de aríete, pode-se escrever o vetor \mathbf{P} como:

$$\mathbf{P}^T = [f_u, \psi, D, e, E, K, \rho_0] \quad (5.16)$$

Como é mostrado em WYLIE (1997), o fator de atrito transiente f_u possui um valor arbitrário, onde a sua magnitude é ajustada para cada tipo de problema. Dessa forma, podemos aplicar a solução do problema inverso para estimar esse parâmetro. Outro parâmetro importante para a equação do golpe de aríete é o parâmetro de ancoragem ψ e, como foi mostrado, o seu valor pode variar dependendo de como é feita a ancoragem no circuito hidráulico. Embora tenham sido apresentados expressões para o seu cálculo, nem sempre será possível saber o tipo de tubulação e o tipo de ancoragem a ser usado em um sistema hidráulico, assim esse parâmetro também pode ser estimado pela solução do problema inverso. Parâmetros como o diâmetro do duto D e a espessura

da parede do duto e podem ser medidos com boa precisão através de instrumentos de medição, além de seus valores já serem fornecidos pelo fabricante. O módulo de elasticidade do aço E e da água K já são bem conhecidos e seu valor está bem consolidado na literatura. A massa específica inicial ρ_0 pode possuir incertezas elevadas para os casos em que o líquido ou a mistura de líquidos presente no sistema hidráulico não é conhecida, contudo, essa configuração não será vista no presente trabalho. Dessa forma, para a caracterização do circuito hidráulico experimental, a solução do problema inverso terá como objetivo a estimativa de f_u e ψ .

Nos métodos clássicos para a estimativa de parâmetros, é necessário calcular a matriz de sensibilidade \mathbf{J} cujos elementos são os coeficientes de sensibilidade. O coeficiente de sensibilidade pode ser definido como (OSIZIK e ORLANDE, 2000):

$$J_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial P_j} \quad (5.17)$$

onde $i = 1, 2, \dots, I$, $j = 1, 2, \dots, N_p$, I é o número de medidas, N é o número de parâmetros desconhecidos. T_i é o i -ésimo valor da solução do problema direto e P_j é o j -ésimo parâmetro desconhecido.

Os coeficientes de sensibilidade medem o quão influente é um determinado parâmetro para a solução do problema direto. Parâmetros com coeficientes de sensibilidade de grande magnitude mostram que pequenas alterações no seu valor acarretarão grandes mudanças para a solução do problema direto.

Ainda de acordo com a abordagem clássica para a estimativa de parâmetros, se a magnitude dos coeficientes de sensibilidade for pequena, temos que $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$ é pequeno e o problema inverso é mal condicionado. Além disso, se as colunas de \mathbf{J} forem linearmente dependentes, $|\mathbf{J}^T \mathbf{J}|$ será nulo. Portanto, é desejável ter coeficientes de sensibilidade linearmente independentes e com grande magnitude para que o problema inverso não seja muito sensível aos erros de medida e estimativas acuradas dos parâmetros possam ser obtidas.

Em problemas que envolvem parâmetros com diferentes ordens de magnitude podem existir coeficientes de sensibilidade que se diferenciam também por várias

ordens de grandeza. Assim, para esses casos, a análise dos coeficientes de sensibilidade ou análise de sensibilidade é feita a partir do coeficiente de sensibilidade reduzido, que pode ser definido como:

$$J_{ij}^{red} = P_j \frac{\partial T_i}{\partial P_j} \quad (5.18)$$

Dessa forma, os coeficientes de sensibilidade reduzidos terão a mesma unidade, facilitando sua análise e comparação.

Na abordagem Bayesiana, em particular no algoritmo de Metropolis Hastings, ainda é necessária a análise dos coeficientes de sensibilidade, uma vez que eles influenciam a distribuição a posteriori, que agora é simulada através a cadeia de Markov. Parâmetros linearmente dependentes normalmente possuem cadeias periódicas e correlacionadas, de forma que uma distribuição de equilíbrio pode não ser alcançada. Enquanto que nos métodos clássicos de estimativa de parâmetros, os parâmetros linearmente dependentes ou com baixos coeficientes de sensibilidade precisam ter os seus valores fixados, na abordagem Bayesiana, esses parâmetros devem possuir distribuição *a priori* com variâncias pequenas, de forma a obter a estimativa dos outros parâmetros de forma adequada.

6 Resultados e Discussões

Nesta seção, são apresentados os resultados para a simulação do circuito e para a estimativa de parâmetros presente na formulação matemática do golpe de aríete. O código computacional desenvolvido para a solução das equações do fenômeno do transiente hidráulico através do método WAF-TVD foi verificado e validado em CARVALHO (2018). Nesse trabalho, foram analisados dois casos testes presentes em SZYDLOWSKI (2002) no qual existe um duto horizontal com um tanque no começo da tubulação e uma válvula a jusante que, em determinado instante de tempo, é fechada, gerando assim o fenômeno do golpe de aríete. A principal diferença entre os dois casos analisados é que enquanto no primeiro considera-se um duto rígido sem atrito e com a massa específica do líquido constante, no segundo caso as variações da área da seção transversal do duto bem como a variação da massa específica do líquido geradas pelo golpe de aríete são consideradas. Além disso, há a presença de atrito entre o fluido e a parede do duto para o segundo caso. Foi visto que para o caso sem atrito, a solução numérica apresenta uma excelente concordância com a solução analítica, enquanto que para o caso com atrito, foi observada a grande influência que o valor escolhido para o fator de atrito transiente f_u causa na solução calculada.

6.1 Verificação do Código Computacional para o Circuito Hidráulico

Com o código computacional verificado para os casos presentes no trabalho de SYDLOWSKI (2002), o método WAF-TVD é aplicado na simulação do circuito hidráulico experimental. Para isso, será considerada a existência de uma variação da área da seção transversal do duto devido ao fenômeno do golpe de aríete, sendo essa variação dada por (SZYDLOWSKI, 2002):

$$A = A_0 \left(1 + \frac{D}{e} \frac{p - p_0}{E} \right) \quad (6.1)$$

onde A_0 é a área transversal do duto sem variações de pressão devido ao golpe de aríete, e refere-se a espessura da parede do duto, E é o módulo de elasticidade do material e p_0 é a pressão inicial.

Para a variação da massa específica do líquido, considera-se (SZYDLOWSKI, 2002):

$$\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{P - P_0}{K} \right) \quad (6.2)$$

onde K é o módulo de elasticidade e ρ_0 a massa específica na pressão inicial do líquido, respectivamente.

Na fórmula do fator de atrito presente em WYLIE (1997) existem dois termos com derivadas espaciais e temporais da velocidade. A presença desses termos modifica as equações do golpe de aríete e seria necessário reescrevê-las. Uma forma de contornar essa situação é aproximar essas derivadas explicitamente por diferenças finitas usando a diferença atrasada para o tempo

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{q_i^n - q_i^{n-1}}{\Delta t} \quad (6.3)$$

e usando a diferença de quarta ordem no espaço. Nos volumes de controle centrais usamos a diferença centrada conforme a Equação (6.4)

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\frac{1}{12} q_{i-2}^n - \frac{2}{3} q_{i-1}^n + \frac{2}{3} q_{i+1}^n - \frac{1}{12} q_{i+2}^n}{\Delta x} \quad (6.4)$$

Nos contornos, usamos a diferença avançada na entrada e a diferença atrasada na saída conforme as Equações (6.5) e (6.6), respectivamente.

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{-\frac{25}{12} q_i^n + 4q_{i+1}^n - 3q_{i+2}^n + \frac{4}{3} q_{i+3}^n - \frac{1}{4} q_{i+4}^n}{\Delta x} \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\frac{25}{12} q_i^n - 4q_{i-1}^n + 3q_{i-2}^n - \frac{4}{3} q_{i-3}^n + \frac{1}{4} q_{i-4}^n}{\Delta x} \quad (6.6)$$

O circuito hidráulico foi descrito na Seção 3.3, sendo que as principais características dele são: a presença de uma bomba hidráulica na condição de contorno na entrada; a presença de 12 curvas de 90° (Figura 3.4b) para elevar a altura do fluido e a presença de uma válvula na extremidade final da tubulação. Dessa forma, para a

solução numérica do circuito hidráulico serão utilizados os dados de entrada presentes na Tabela 6.1 considerando a água como fluido de trabalho. A pressão inicial na entrada da tubulação foi calculada a partir da curva da bomba dada pela Eq. (3.30). Além disso, é importante ressaltar que o método WAF-TVD possui um Δt variável para atender o critério de estabilidade presente na Seção 4.9, contudo, foi estimada uma frequência de aquisição igual a 30 Hz para o sistema de aquisição de dados que será usado no circuito hidráulico experimental. Dessa forma, todos os resultados para a simulação do circuito terão um Δt igual a 0,033 segundos.

Tabela 6.1. Parâmetros do escoamento para o circuito hidráulico.

Vazão volumétrica inicial	Q_0	16,12 m ³ /h
Pressão inicial na entrada	p_0	0,3651 MPa
Massa específica inicial	ρ_0	1000 kg/m ³
Comprimento do Duto	L	150,7893 m
Diâmetro do Duto	D	0,05430 m
Espessura da parede	e	0,00391 m
Rugosidade do duto	ε	0,0457 mm
Módulo de elasticidade do aço	E	2x10 ¹¹ Pa
Módulo de elasticidade da água	K	2x10 ⁹ Pa
Fator de atrito	f	0,02215
Fator de atrito transiente	f_u	0,04
Parâmetro de ancoragem	ψ	13.8875 (Eq. 6.1.6c)
Altura da curva de 90°	h	0,1806 m

Além da perda de pressão por atrito ao longo do duto, existirá uma perda de pressão causada pela mudança de altura manométrica do fluido dada por:

$$\Delta p_h = \rho_0 g h \quad (6.7)$$

onde h é igual a diferença de altura das curvas de 90° que foram mostradas na Figura 3.4b e também uma perda de carga localizada devido aos acidentes (curvas, medidores de vazão e válvulas) presentes no circuito dada por:

$$\Delta P_{localizada} = \rho K_p \frac{u|u|}{2} \quad (6.8)$$

Desta forma, a pressão inicial ao longo do circuito é mostrada na Figura 6.2.

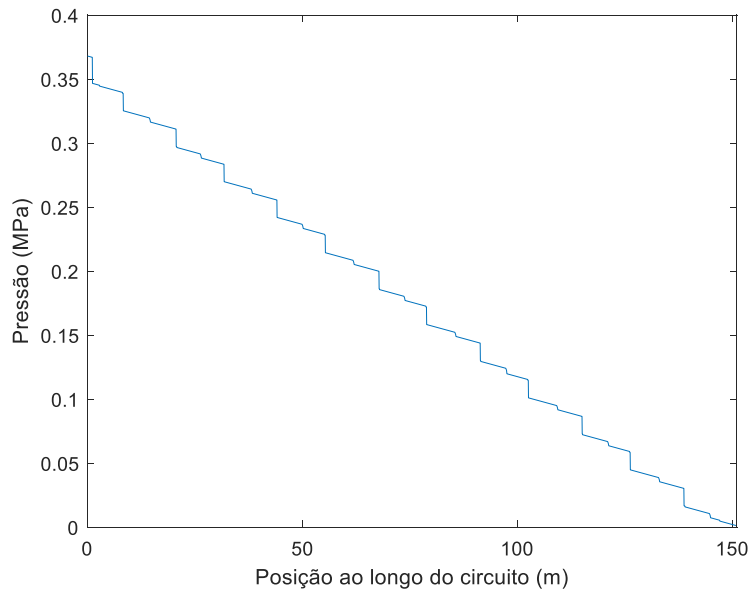


Figura 6.2. Pressão inicial ao longo do circuito

Para simular corretamente as curvas de 90° (também chamadas de joelhos) é necessário o uso de uma malha de volumes finitos não regular, ou seja, com tamanhos diferentes para cada volume de controle. Isso é feito para garantir um número fixo de volumes de controle em cada curva. A forma encontrada para que os centros dos volumes de controle nas conexões nunca estejam nas fronteiras entre a conexão e o trecho de tubo reto foi fixar o tamanho dos volumes na entrada e saída de cada curva, conforme pode ser visto pelos volumes em cinza presentes na Figura 6.3.

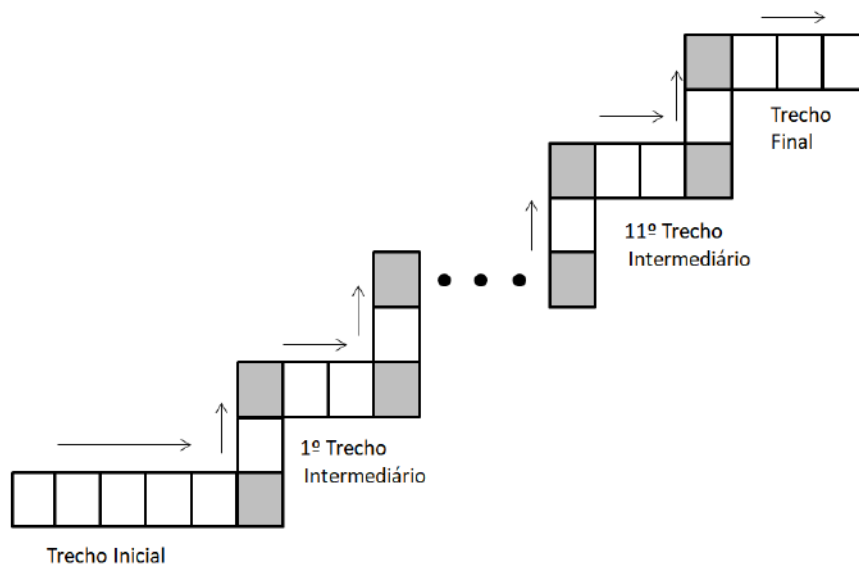


Figura 6.3: Malha espacial para o circuito.

A Figura 6.3 é uma representação esquemática de como foi feita a discretização espacial do circuito hidráulico. As setas na Figura 6.3 indicam o percurso feito pelo fluido simulado, sendo que as mudanças de altura nos joelhos (volumes em cinza) serão computadas através do termo $g \sin \theta$ presente no termo fonte $\mathbf{B}(\mathbf{U})$ da Equação (3.34a-f). O entendimento da Figura 6.3 dá-se juntamente com a Figura 6.4 que representa a vista superior do circuito. Para a aplicação no método de volumes finitos, o caminho percorrido pelo fluido no circuito hidráulico foi dividido em trechos: o primeiro trecho foi chamado de Trecho Inicial e ele é igual à junção dos trechos A, B, C, D, E mostrados na Figura 6.4. Em seguida, os trechos compreendidos entre dois joelhos (circulados em vermelho na Figura 6.4) foram denominados como Trecho Intermediário e eles compreendem os trechos E, D, C ou C, D, E dependendo do sentido do escoamento no fluido. Por último, temos o último caminho percorrido no circuito, denominado Trecho Final, onde o fluido escoava pelos trechos C e F mostrados na Figura 6.4. Para detalhar como acontece o escoamento no circuito hidráulico, são mostrados na Tabela 6.2 os caminhos percorridos pelo fluido.

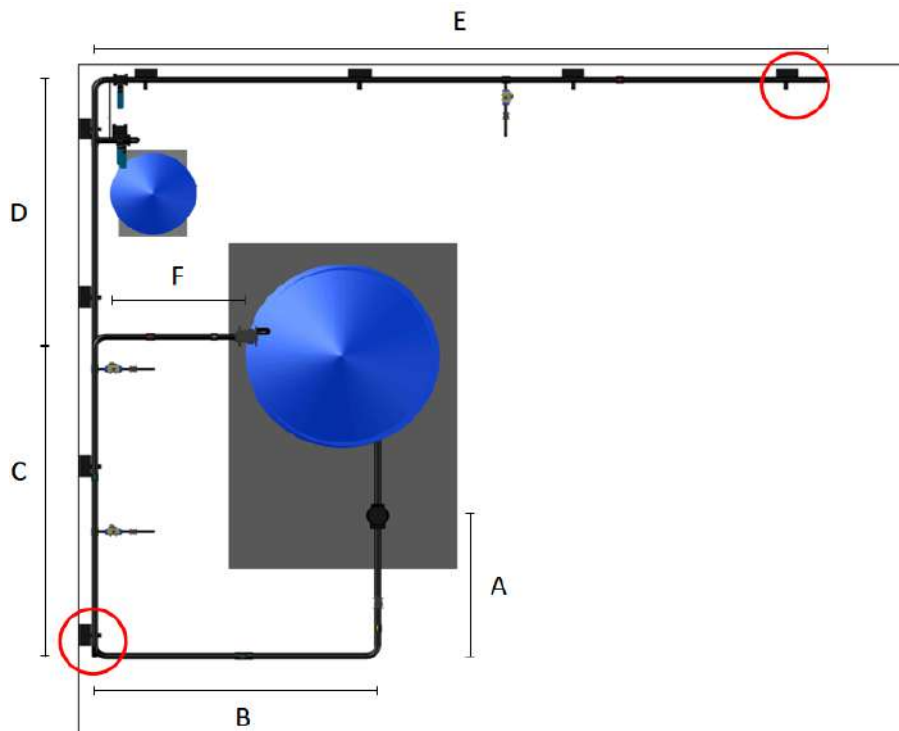


Figura 6.4: Vista superior do circuito.

Tabela 6.2. Parâmetros do escoamento para o circuito hidráulico.

Trecho	Caminho percorrido no circuito experimental
Trecho Inicial	A+B+C+D+E
1º Trecho Intermediário	E+D+C
2º Trecho Intermediário	C+D+E
3º Trecho Intermediário	E+D+C
4º Trecho Intermediário	C+D+E
5º Trecho Intermediário	E+D+E
6º Trecho Intermediário	C+D+E
7º Trecho Intermediário	E+D+C
8º Trecho Intermediário	C+D+E
9º Trecho Intermediário	E+D+C
10º Trecho Intermediário	C+D+E
11º Trecho Intermediário	E+D+C
Trecho Final	C+F

Para garantir a precisão numérica, é necessário que a razão de aspecto (razão entre duas malhas de diferentes tamanhos) seja próxima de 1. Devido a esse fato, o tamanho escolhido para os volumes em cinza terá ligação direta com o tamanho total da malha, uma vez que os trechos inicial, final e intermediário do circuito possuem tamanhos diferentes, alterando o Δx de cada volume. Dessa forma, foram geradas três malhas com tamanhos diferentes, conforme mostrado na Tabela 6.3, a fim de realizar a análise de convergência para o circuito.

Tabela 6.3: Malhas espaciais para o circuito

Comprimento do volume cinza	0,07872 m (igual a 1,5 vezes o diâmetro do duto)	0,05248 m (igual ao diâmetro do duto)	0,02624 m (igual à metade do diâmetro do duto)
Número de volumes no trecho inicial	120	300	500
Número de volumes no trecho intermediário	1067 (97 por trecho)	2750 (250 por trecho)	4400 (400 por trecho)
Número de volumes no comprimento final	45	90	150
Número de volumes cinza	24	24	24
Número total de volumes nas curvas de 90°	12 (1 por curva)	36 (3 por curva)	72 (6 por curva)
Número total de volumes	1268	3200	5146

Assim, para analisar a convergência da malha, o golpe de aríete foi simulado no circuito para um tempo de fechamento de válvula igual a 5 segundos, sendo que esse fechamento inicia-se após 4,1 segundos de escoamento em regime permanente, sendo esse tempo de fechamento de 5 segundos o menor tempo de fechamento possível para aplicar na válvula presente no circuito hidráulico. No presente trabalho será considerado que a vazão volumétrica na posição da válvula varia linearmente com o seu fechamento de acordo com a Eq. (6.5), onde $t_0^{\text{fechamento}}$ e $t_f^{\text{fechamento}}$ são os tempos de início e término de fechamento da válvula, respectivamente.

$$Q = Q_0 - Q_0 \frac{t - t_0^{\text{fechamento}}}{t_f^{\text{fechamento}} - t_0^{\text{fechamento}}} \quad (6.9)$$

Os resultados para as variações de pressão e vazão encontram-se nas Figuras 6.5-6.8 para os sensor 1, localizado a 4,59 m de distância da bomba hidráulica e sensor 13, localizado a 148,16 m de distância da bomba hidráulica. Através dos resultados obtidos, é visto a convergência gráfica entre as três soluções. Observa-se que o método numérico é capaz de calcular as oscilações das ondas de pressão (características do fenômeno do golpe de aríete) após o completo fechamento da válvula. Analisando a forma das curvas de pressão das Figuras 6.5 e 6.6, é visto a existência de dois regimes

transientes: o primeiro acontece quando a válvula começa a fechar e termina quando ela está completamente fechada, enquanto o segundo inicia-se com a válvula completamente fechada. O primeiro regime transiente é caracterizado pela ausência de oscilações e pelo aumento do valor da pressão ao longo do tempo até atingir um valor um pouco superior ao valor da pressão máxima dada pelo ajuste de curva da bomba. Já o segundo regime transiente é caracterizado pelas oscilações de pressão características do fenômeno do golpe de aríete. Após as oscilações de pressão serem dissipadas pelo atrito entre o fluido e a parede do duto e pela expansão da área transversal do duto, o circuito entra em um novo regime permanente caracterizado pela pressão máxima dada pelo ajuste de curva da bomba. Observa-se que a pressão em regime permanente após o fechamento da válvula estabiliza-se em um valor próximo de 0,88 MPa. Isso acontece devido ao ajuste de curva utilizado para modelar a bomba hidráulica que produz uma pressão de 0,88 MPa para uma vazão volumétrica nula. Conforme foi explicado na Seção 3.4 esse valor de pressão será um pouco inferior para o caso experimental

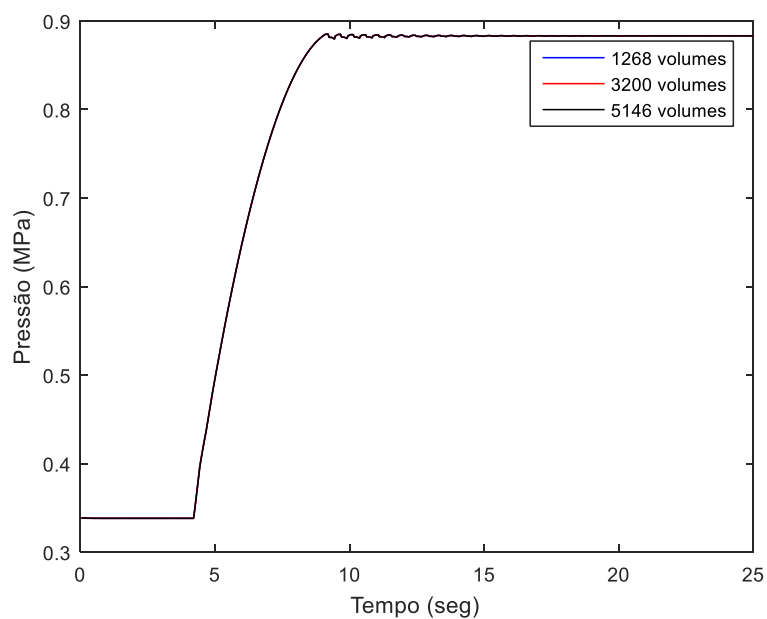


Figura 6.5: Comparação da variação da pressão em função do tempo para o sensor 1.

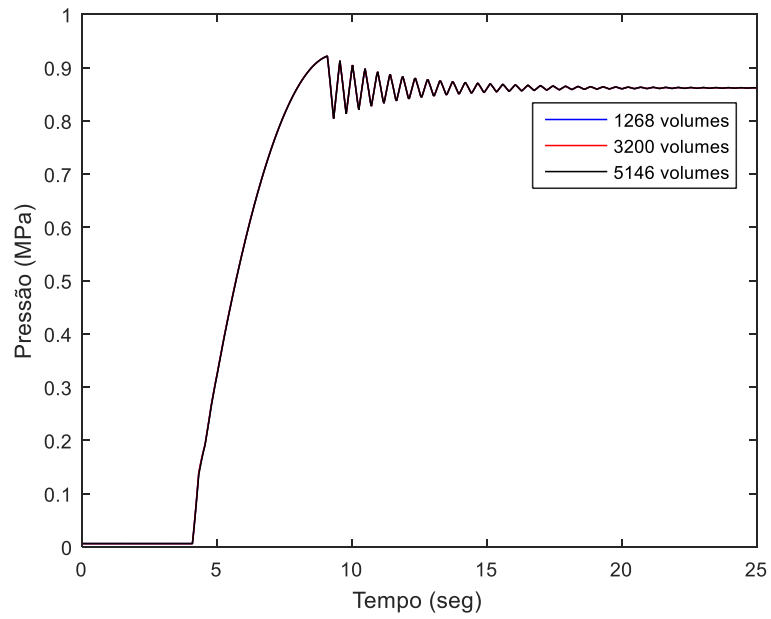


Figura 6.6: Comparação da variação da pressão em função do tempo para o sensor 13.

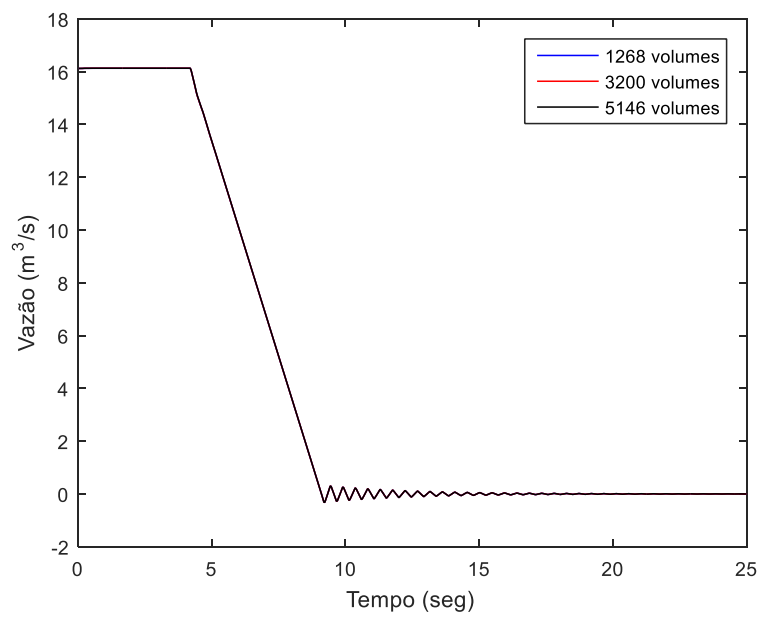


Figura 6.7: Comparação da variação da vazão em função do tempo para o sensor 1.

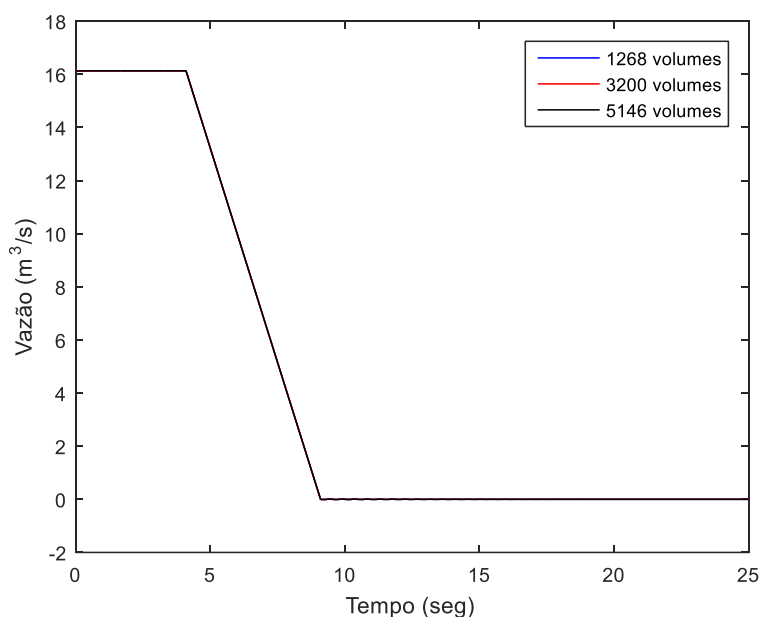


Figura 6.8: Comparação da variação da vazão em função do tempo para o sensor 13.

A seguir, na Tabela 6.4 são mostrados os tempos computacionais para cada caso simulado. Os códigos computacionais desse estudo foram implementados na linguagem C através do compilador MGW64 e executados em um computador com processador Intel® i7-8700 CPU@3.20GHz de 12 núcleos com uma memória RAM de 16 GB. Pela Tabela 6.4, pode-se ver que o tempo computacional usando 1268 volumes é o menor entre as três malhas analisadas. Dessa forma, por possuir a mesma solução das malhas mais refinadas e o menor tempo computacional, essa quantidade de volumes é a mais adequada para a aplicação do método MCMC, no qual será necessário resolver o problema direto um número significativo de vezes.

Tabela 6.4. Tempos computacionais para a simulação do circuito hidráulico

Número de Volumes	Tempo computacional (segundos)
1268	94,3
3200	459,8
5146	1394

Feita a análise da convergência de malha para o método WAF-TVD, o código do circuito experimental será verificado através da comparação da solução obtida pelo método WAF-TVD utilizando 1268 volumes e com a solução dada pelo método das características, fornecida por um código desenvolvido por Inoussa Tougri do

Laboratório de Máquinas Térmicas (LMT/UFRJ). Os resultados para as variações de pressão nos sensores 1 e 13 encontram-se nas Figuras 6.9 e 6.10 a seguir:

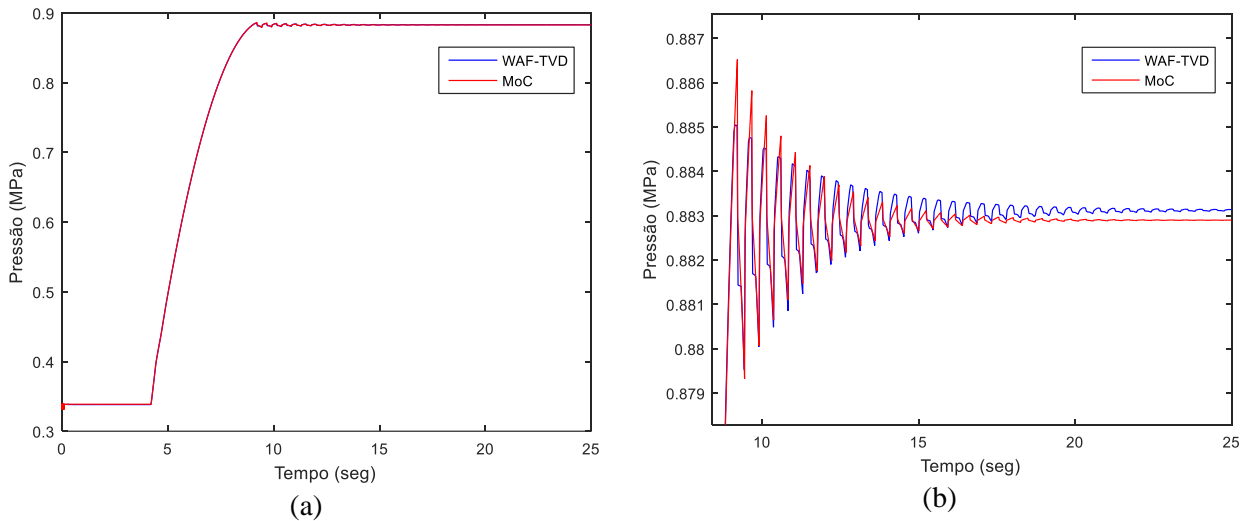


Figura 6.9: (a): Comparação da variação da pressão em função do tempo para o sensor 1 e (b): Comparação da variação da pressão em função do tempo para o sensor 1 entre 10 e 25 segundos.

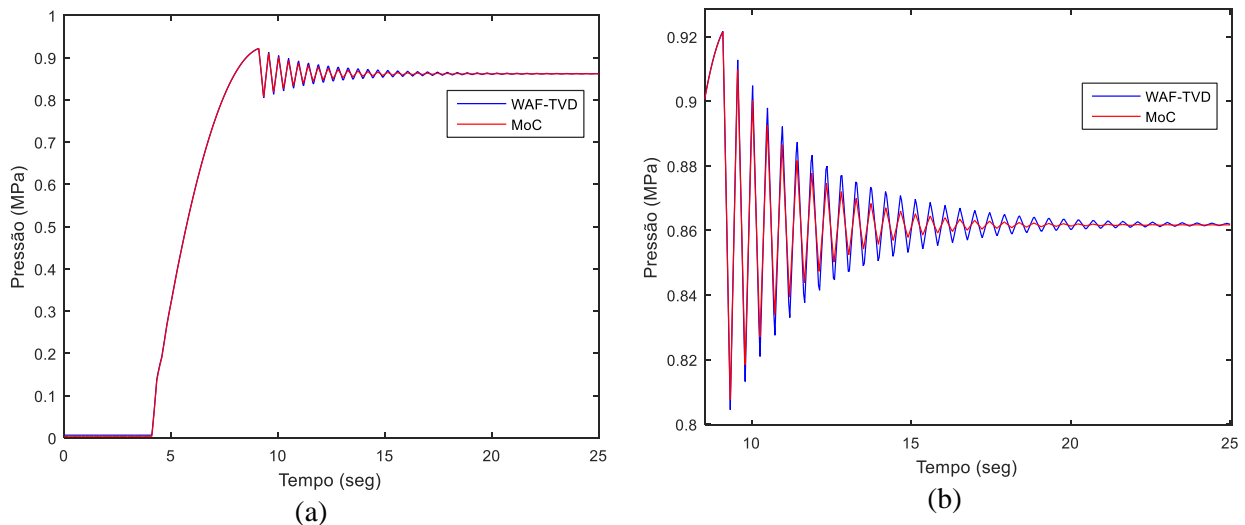


Figura 6.10: (a): Comparação da variação da pressão em função do tempo para o sensor 13 e (b): Comparação da variação da pressão em função do tempo para o sensor 13 entre 10 e 25 segundos.

Analisando as Figuras 6.9 e 6.10, percebe-se a ótima concordância entre os métodos, sendo ambos capazes de obter o mesmo formato para as duas curvas de pressão. Contudo, é importante notar que após o completo fechamento da válvula, os picos de pressão para o sensor 1 no método das características estão um pouco superiores aos obtidos pelo método WAF-TVD. Já para o sensor 13, existe uma concordância para o primeiro pico de pressão para ambos os métodos e após 10

segundos, as ondas de pressão obtidas pelo MoC são amortecidas mais rapidamente pelo método WAF-TVD. Essa pequena discrepância entre os resultados dos métodos numéricos talvez seja explicada pela maneira que foi implementada a condição de contorno da bomba hidráulica em cada método.

Dessa forma, o circuito hidráulico foi simulado novamente utilizando a pressão inicial constante na condição de contorno a montante em vez de utilizar a equação da bomba. Os resultados para as variações de pressão nos sensores 1 e 13 estão presentes nas Figuras 6.11 e 6.12. Através na análise das curvas de pressão, observa-se que a concordância entre os métodos foi excelente, sendo melhor do que para o caso em que a curva da bomba foi utilizada. Observa-se que a ausência da equação da bomba na condição de contorno fez com que a pressão máxima alcançada nos sensores 1 e 13 seja mais reduzida, além disso, observa-se a presença de dois regimes oscilatórios, sendo que o primeiro regime acontece entre 4,1 e 9,1 segundos e o outros acontece após 9,1 segundos quando a válvula está completamente fechada. É importante destacar que para o sensor 1, o método das característica teve uma pequena oscilação numérica nos tempo inicial da simulação e, além disso, observou-se uma pequena discrepância entre os métodos após o completo fechamento da válvula. Foi visto que as ondas de pressão obtidas pelo método WAF-TVD foram mais amortecidas se comparadas com as ondas calculadas pelo MoC.

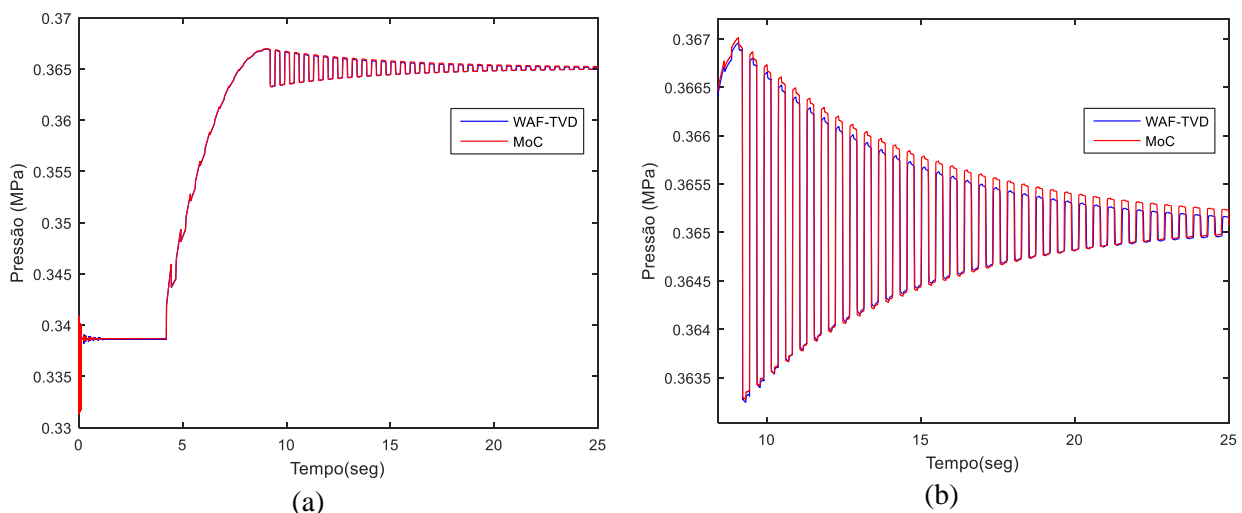


Figura 6.11: (a): Comparação da variação da pressão em função do tempo para o sensor 1 e (b): Comparação da variação da pressão em função do tempo para o sensor 1 entre 10 e 25 segundos sem utilizar a equação da bomba como condição de contorno.

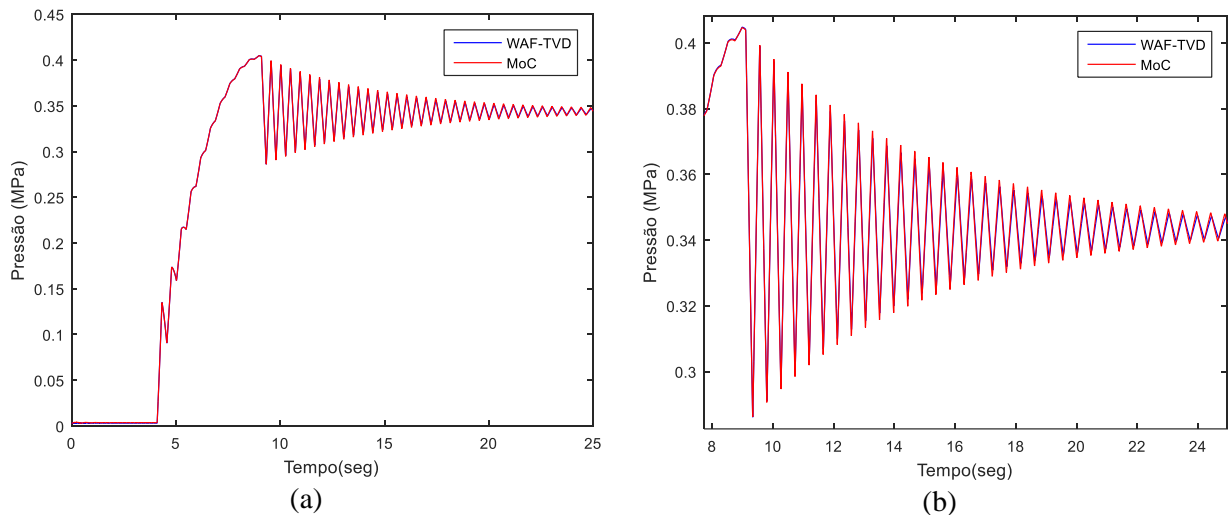
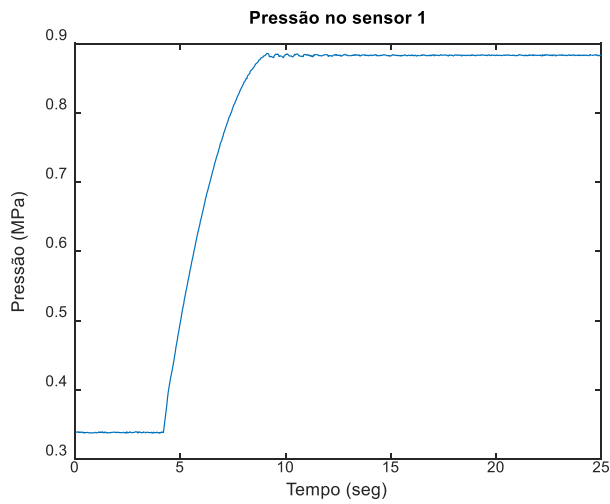
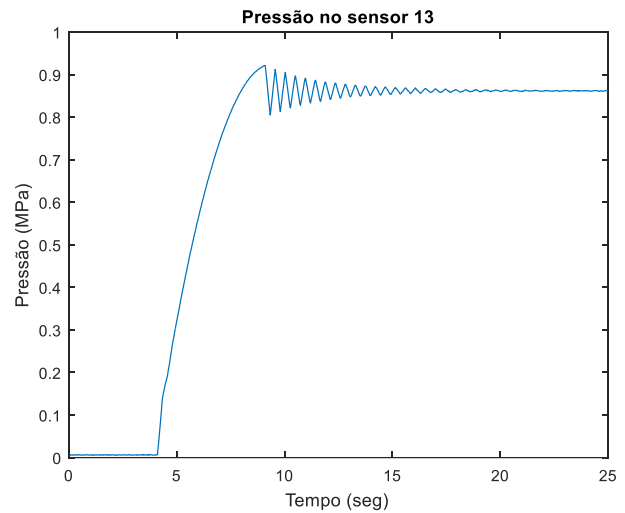


Figura 6.12: (a): Comparação da variação da pressão em função do tempo para o sensor 13 e (b): Comparação da variação da pressão em função do tempo para o sensor 13 entre 10 e 25 segundos sem utilizar a equação da bomba como condição de contorno.

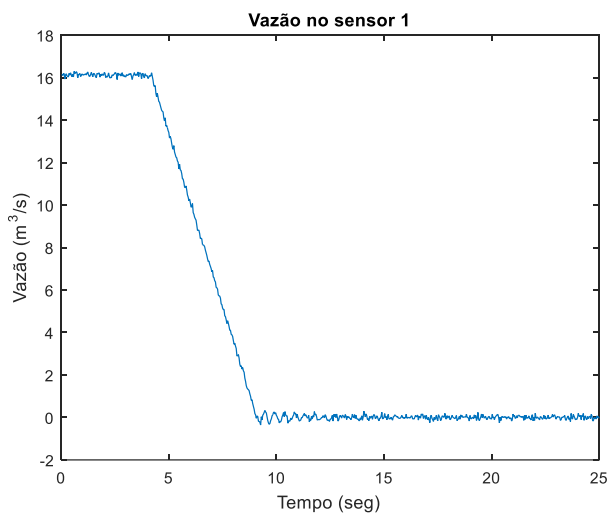
Com o método WAF-TVD verificado para o circuito, podemos gerar as medidas simuladas para a solução do problema inverso. Serão geradas 4 medidas simuladas para os valores de pressão e vazão nas posições dos sensores 1 e 13. Ao gerar as medidas simuladas, serão usados os desvios padrões dos sensores dados pelos fabricantes dos sensores para adicionar ruídos nas medidas. Esses desvios são iguais a 500 Pa e 0,08 m³/h para os sensores de pressão (sensor Omega PXM-409) e vazão (sensor de turbina CONTECH, modelo SVT.L.STD.BM.050.A4.038.A4.A.1.AT.2), respectivamente. Para as medidas simuladas, a malha utilizada tem 3200 volumes. Utilizou-se para gerar as medidas simuladas uma malha mais refinada do que aquela usada na solução do problema inverso para aliviar a ocorrência de um crime inverso (KAPIO e SOMERSALO, 2004), no qual o modelo matemático para gerar as medidas é o mesmo que é utilizado para resolver o problema direto. As medidas simuladas para os valores de pressão e vazão nos sensores 1 e 13 são apresentadas na Figura 6.13.



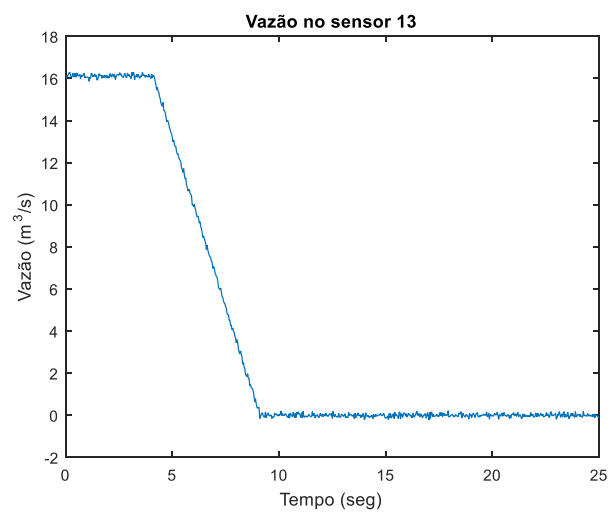
(a)



(b)



(c)

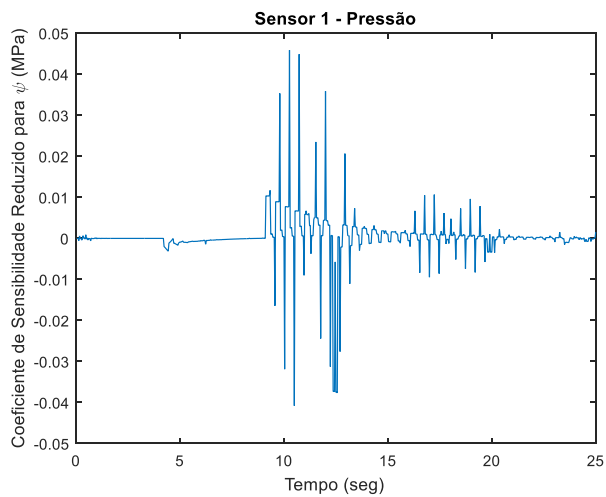


(d)

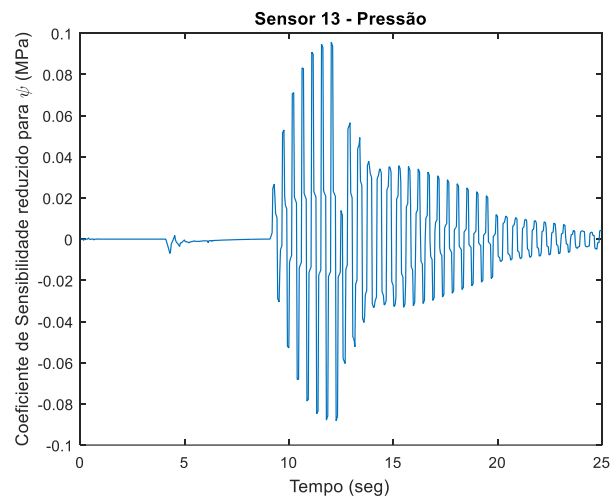
Figura 6.13: (a) Medida simulada de pressão no sensor 1, (b) Medida simulada de pressão no sensor 13, (c) Medida simulada de vazão no sensor 1 e (d) Medida simulada de vazão no sensor 13.

6.2 Estimativa de Parâmetros

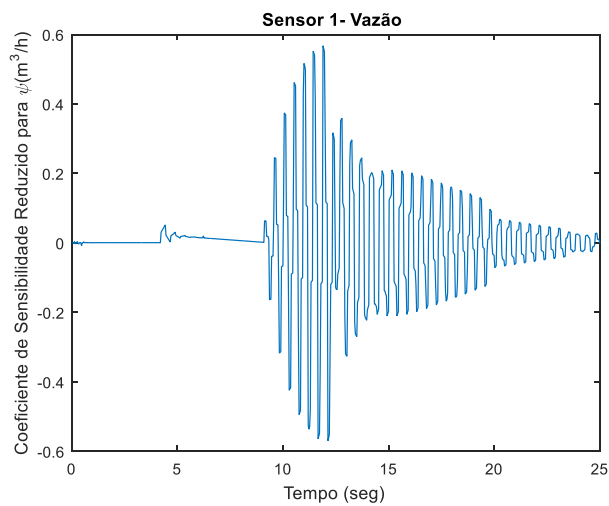
Antes de aplicar a solução do problema inverso para a estimativa dos parâmetros de interesse, é necessário realizar a análise de sensibilidade. Como existem medidas de pressão e vazão, os coeficientes de sensibilidade reduzidos são calculados separadamente para cada uma dessas grandezas. Os resultados obtidos são mostrados a seguir nas Figuras 6.14-6.17 utilizando uma malha de 3200 volumes.



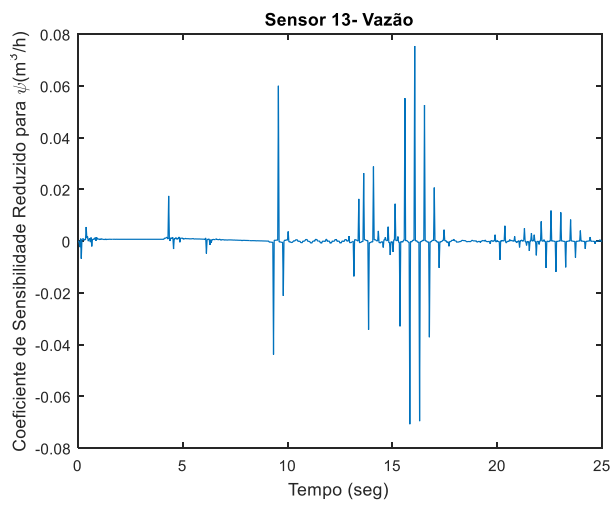
(a)



(b)

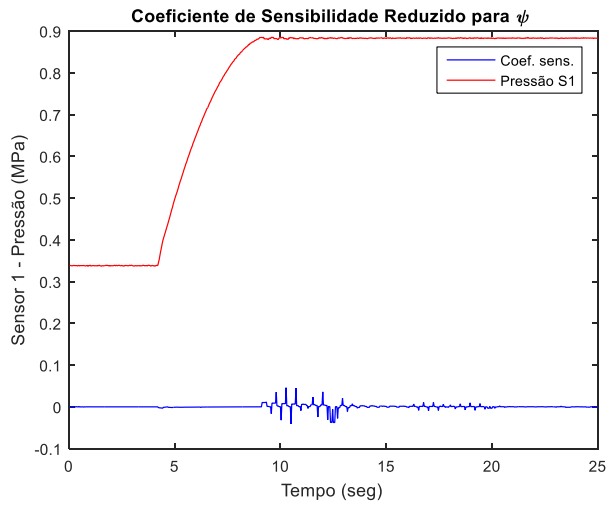


(c)

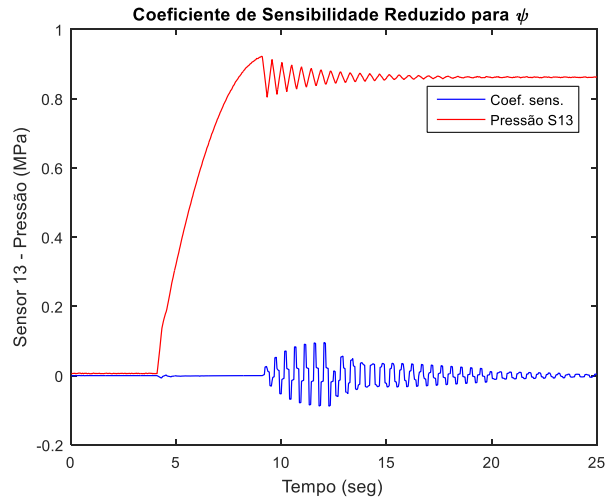


(d)

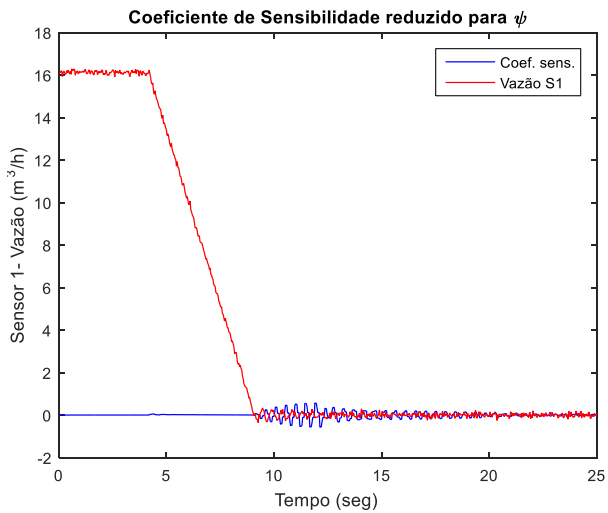
Figura 6.14: (a) Coeficiente de sensibilidade reduzido de pressão para ψ no sensor 1, (b) Coeficiente de sensibilidade reduzido de pressão para ψ no sensor 13, (c) Coeficiente de sensibilidade reduzido de vazão para ψ no sensor 1 e (d) Coeficiente de sensibilidade reduzido de vazão para ψ no sensor 13.



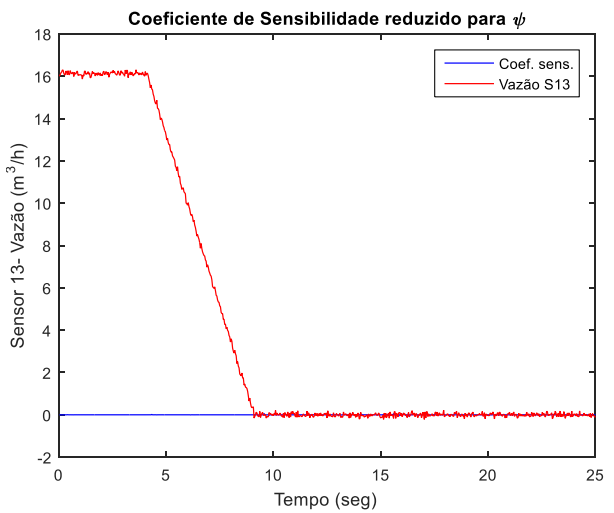
(a)



(b)

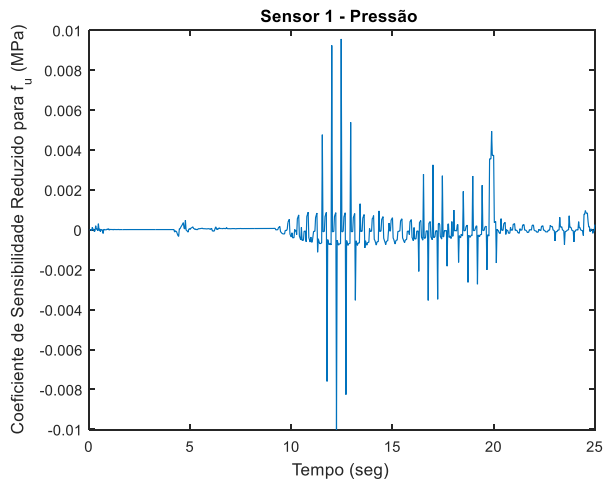


(c)

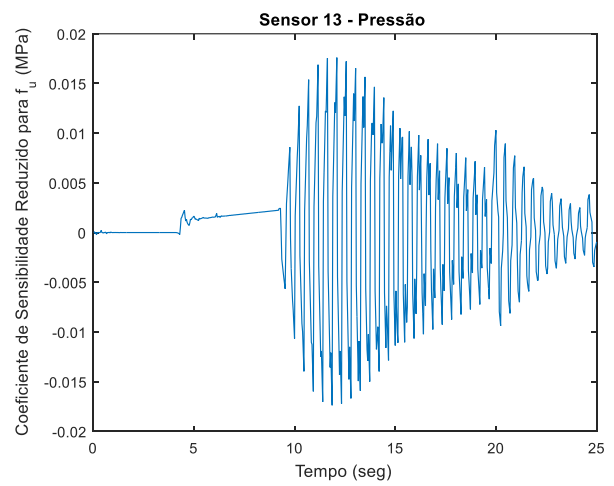


(d)

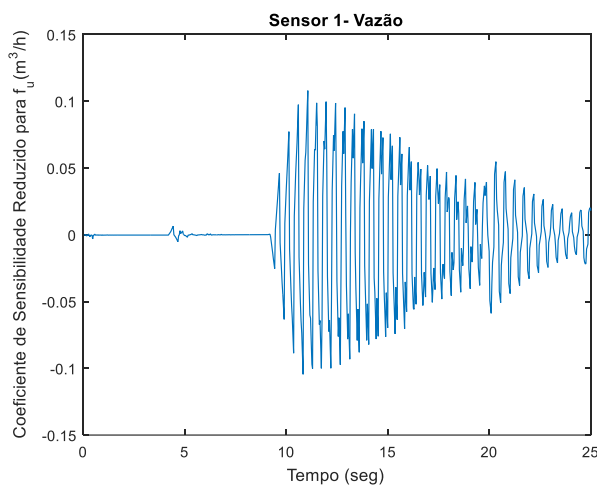
Figura 6.15: (a) Comparação entre o coeficiente de sensibilidade reduzido de pressão para ψ no sensor 1 e a medida de pressão no sensor 1, (b) Comparação entre o coeficiente de sensibilidade reduzido de pressão para ψ no sensor 13 e a medida de pressão no sensor 13, (c) Comparação entre o coeficiente de sensibilidade reduzido de vazão para ψ no sensor 1 e a medida de vazão no sensor 1 e (d) Comparação entre o coeficiente de sensibilidade reduzido de vazão para ψ no sensor 13 e a medida de vazão no sensor 13.



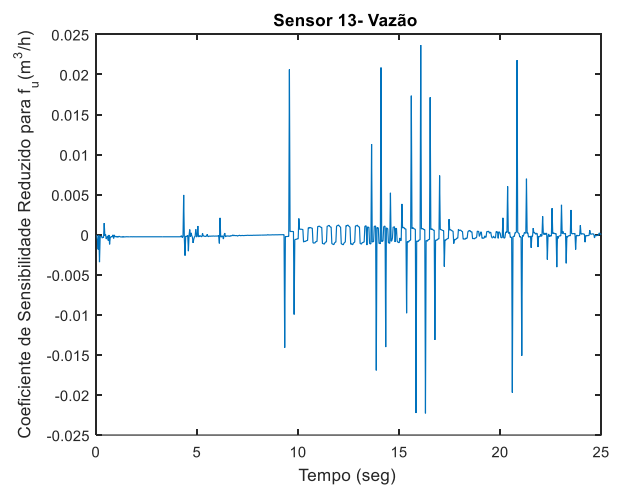
(a)



(b)

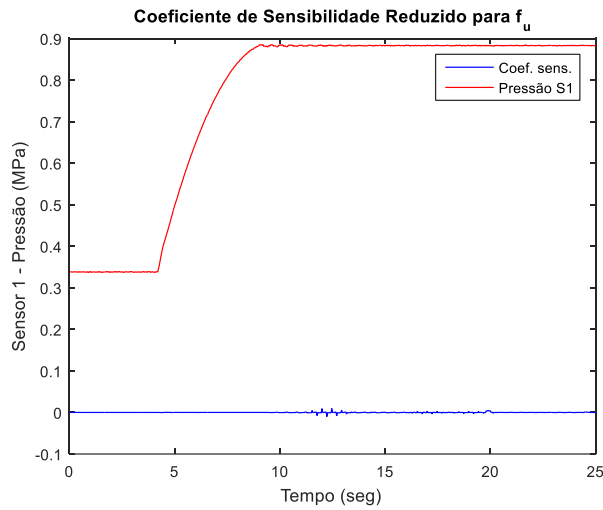


(c)

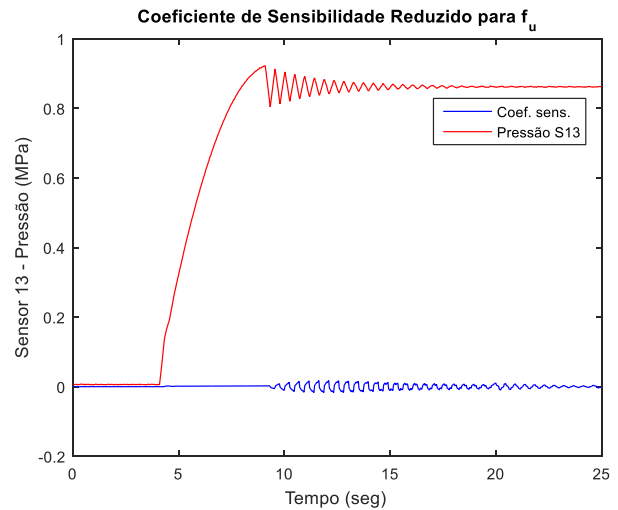


(d)

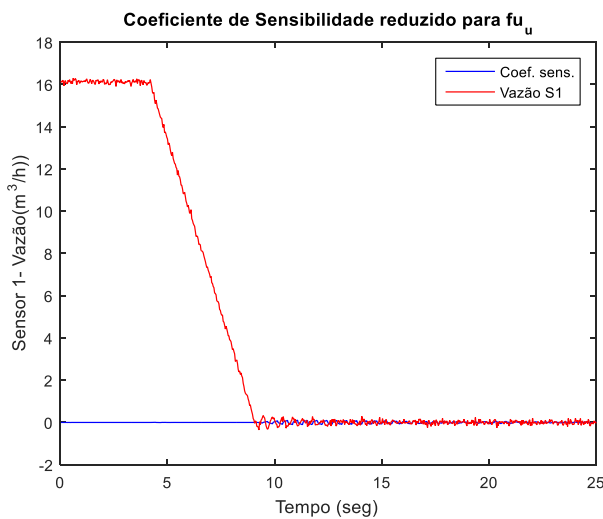
Figura 6.16: (a) Coeficiente de sensibilidade reduzido de pressão para f_u no sensor 1, (b) Coeficiente de sensibilidade reduzido de pressão para f_u no sensor 13, (c) Coeficiente de sensibilidade reduzido de vazão para f_u no sensor 1 e (d) Coeficiente de sensibilidade reduzido de vazão para f_u no sensor 13.



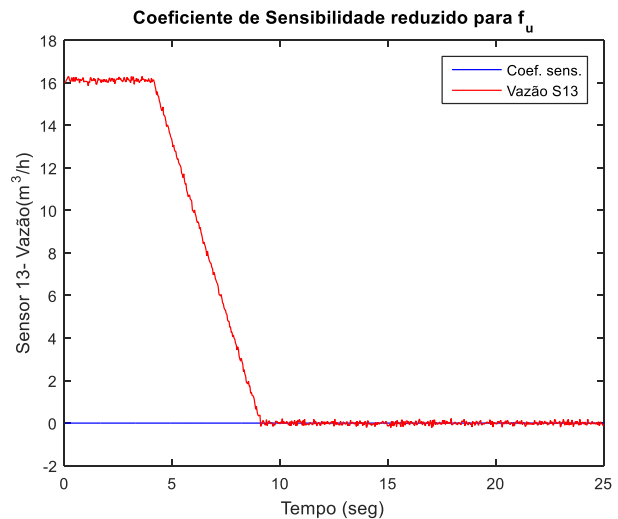
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.17: (a) Comparação entre o coeficiente de sensibilidade reduzido de pressão para f_u no sensor 1 e a medida de pressão no sensor 1, (b) Comparação entre o coeficiente de sensibilidade reduzido de pressão para f_u no sensor 13 e a medida de pressão no sensor 13, (c) Comparação entre o coeficiente de sensibilidade reduzido de vazão para f_u no sensor 1 e a medida de vazão no sensor 1 e (d) Comparação entre o coeficiente de sensibilidade reduzido de vazão para f_u no sensor 13 e a medida de vazão no sensor 13.

Através da comparação das Figuras 6.14 e 6.16, observa-se de forma gráfica a independência linear entre os coeficientes de sensibilidade de cada parâmetro e consequentemente, a independência linear entre os parâmetros. Observa-se também que os coeficientes de sensibilidade reduzidos possuem um valor muito próximo de zero antes de a válvula fechar e aumentam a sua magnitude depois de 10 segundos. Esse fato

está diretamente relacionado com o fenômeno físico do golpe de aríete, onde as maiores oscilações de pressão e vazão acontecem com a válvula completamente fechada.

Nas Figuras 6.15 e 6.17, os coeficientes de sensibilidade reduzidos são mostrados juntos das medidas de pressão e vazão para ser possível analisar a magnitude de cada coeficiente em relação às medidas. Nessas figuras, pode-se notar que, relativamente, os maiores valores dos coeficientes de sensibilidade acontecem no sensor 1 de vazão e no sensor 13 de pressão. Isso ocorre devido à configuração do circuito hidráulico experimental, onde existe uma bomba na entrada e uma válvula na saída. Assim, quanto mais próximo o sensor 1 estiver da bomba, mais influenciado pela pressão da bomba ele vai ser e menor será o seu coeficiente de sensibilidade reduzido de pressão. Quanto mais próximo estiver o sensor da válvula, sua vazão será mais influenciada pela vazão da válvula e menor será o seu coeficiente de sensibilidade reduzido vazão.

Feita a análise de sensibilidade, é preciso definir alguns conceitos para aplicação do método MCMC. Primeiro, vamos definir uma *priori* uniforme para os parâmetros f_u e ψ da seguinte forma:

$$\pi(\mathbf{P}) = \begin{cases} \frac{1}{P_j^{\max} - P_j^{\min}}, & P_j^{\min} \leq P_j \leq P_j^{\max} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.10)$$

onde P_j^{\max} e P_j^{\min} são os valores máximo e mínimo de cada parâmetro. Para o parâmetro f_u , o valor máximo é fornecido por WYLIE (1997), onde é dito que não pode ser maior que 0.1. Já o valor mínimo é igual a zero, que é o caso limite onde não há atrito transiente entre o fluido e a parede do duto ao se realizar o fechamento de válvula.

Para o parâmetro de ancoragem ψ , é necessário calcular sua ordem de grandeza através das Equações (6.1.4-6.1.6). Para isso, vamos utilizar o valor de D_0 igual a 60,3 mm fornecido pelo fabricante do duto e valor do módulo de cisalhamento G do aço 75 GPa aproximadamente (CRANDALL *et al*, 1999) Os resultados para o parâmetro ψ encontram-se na Tabela 6.5.

Tabela 6.5: Valor do parâmetro ψ em função da ancoragem

Tipo de duto	Tipo de Ancoragem	Valor de ψ
Duto Rígido	Equação (3.19)	0
Duto elástico de parede espessa	Equação (3.20a)	18,0426
	Equação (3.20b)	18,6029
	Equação (3.20c)	19,7909
Duto elástico de parede fina	Equação (3.21a)	12,4720
	Equação (3.21b)	11,6706
	Equação (3.21c)	13,8875

Observando a ordem de grandeza do parâmetro, é visto que o valor mínimo é igual a zero e o valor máximo é próximo de 20. Desta forma, para sua estimativa, será utilizada uma priori uniforme com os limites [0,30]. O limite superior da distribuição uniforme será um pouco maior do que foi calculado para considerar outros possíveis tipos de ancoragem não descritos por CHAUDRY (2014).

Para os demais parâmetros do problema, será usada uma priori Gaussiana com desvio padrão igual 3% das médias das distribuições *a priori*, as quais são iguais aos valores apresentados na Tabela 6.1. A priori Gaussiana é dada por:

$$\pi(P_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{P_j}^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{[P_j - \mu_j]^2}{\eta_j^2}\right\} \quad (6.11)$$

onde μ_j é igual a média e η_j é o desvio padrão de cada parâmetro.

Para realizar a estimativa dos parâmetros, é necessário ainda definir a distribuição de proposta $\mathbf{P}^* \sim \phi(\mathbf{P}^* | \mathbf{P}_{r,k-1})$, para gerar os parâmetros candidatos \mathbf{P}^* . No presente trabalho, foi escolhido utilizar a proposta do tipo *random walk* gaussiana:

$$P_j^* = P_{j,k-1} + \kappa \mathbf{N}(0,1) \quad (6.12)$$

onde $\mathbf{N}(0,1)$ é um número com distribuição Normal com média zero e desvio padrão unitário, enquanto κ é o desvio padrão da proposta passo.

O desvio padrão da proposta está diretamente relacionado com a taxa de aceitação do método MCMC. Ao escolhermos um valor muito baixo para κ , a taxa de

aceitação da cadeia será alta. Já para valores elevados de κ , serão necessários muitas iterações para o método aceitar um novo estado, ou seja, teremos uma baixa taxa de aceitação.

A seguir, nas Figuras 6.18-6.22, são mostrados os resultados obtidos para o número de estados aceitos, para estimativa de f_u , para estimativa de Ψ e para a posteriori utilizando o método MCMC de forma serial. O desvio da proposta escolhido foi de $5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$ para o fator de atrito transiente e para o parâmetro de ancoragem, e $5 \times 10^{-5} P_{j,k-1}$ para os demais parâmetros do modelo.

Através da análise das Figuras 6.19 e 6.20 observa-se a capacidade do método MCMC em estimar valores bem próximos dos exatos para os parâmetros f_u e Ψ . Contudo, observa-se que a cadeia gerada após 1000 estados ficou praticamente constante, o que explica o resultado do histograma mostrado na Figura 6.20. O resultado obtido pode ser explicado pela taxa de aceitação mostrada na Figura 6.18: entre 0 e 1000 estados, o método possui uma taxa de aceitação próxima de 35% e entre 0 e 4000 estados a taxa de aceitação cai para um valor próximo de 9%. No Apêndice A, é visto o mesmo comportamento nas Figuras 6.19 e 6.20 para os outros parâmetros do modelo.

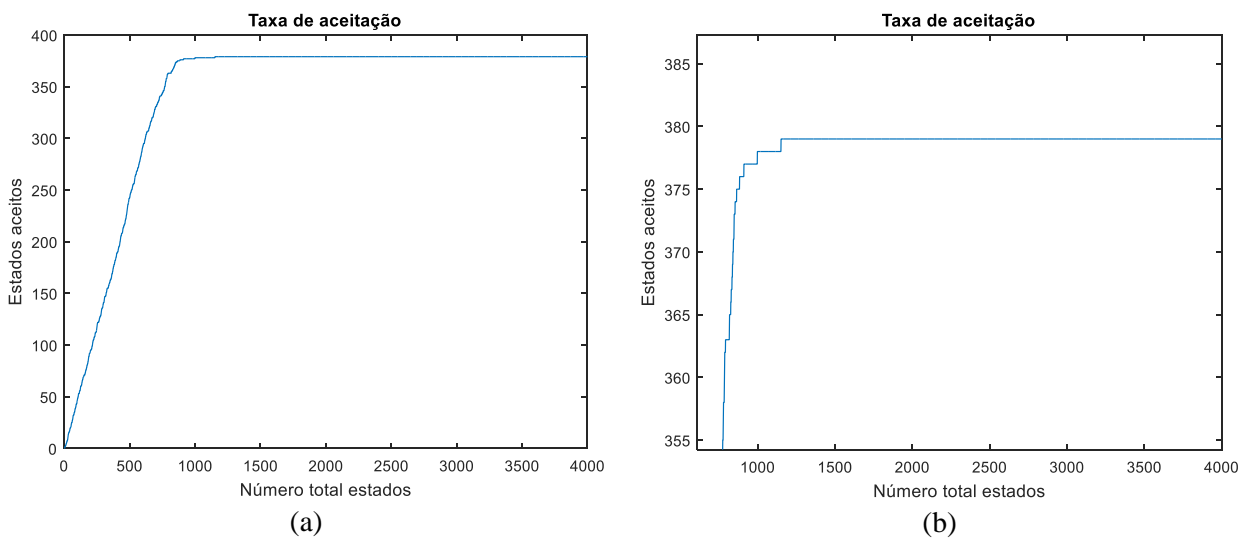


Figura 6.18: (a) Número de estados aceitos e (b) Número de estados aceitos entre 1000 e 4000 estados.

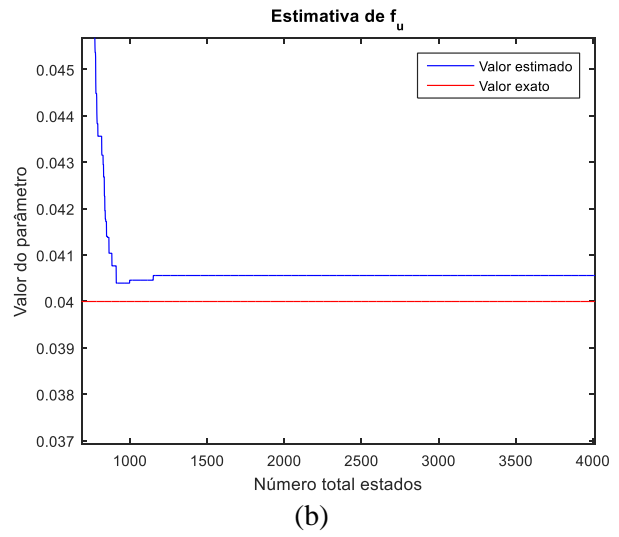
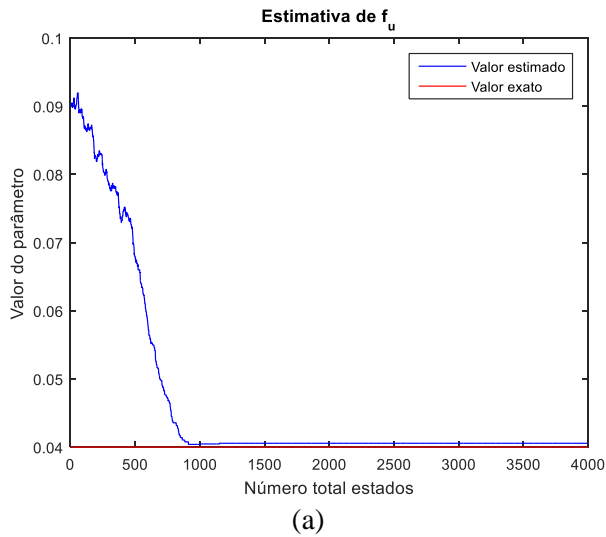


Figura 6.19: (a) Estimativa de f_u e (b) Estimativa de f_u entre 1000 e 4000 estados.

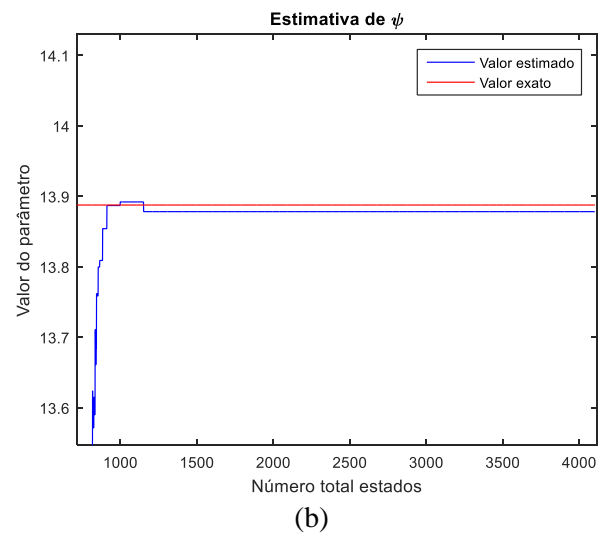
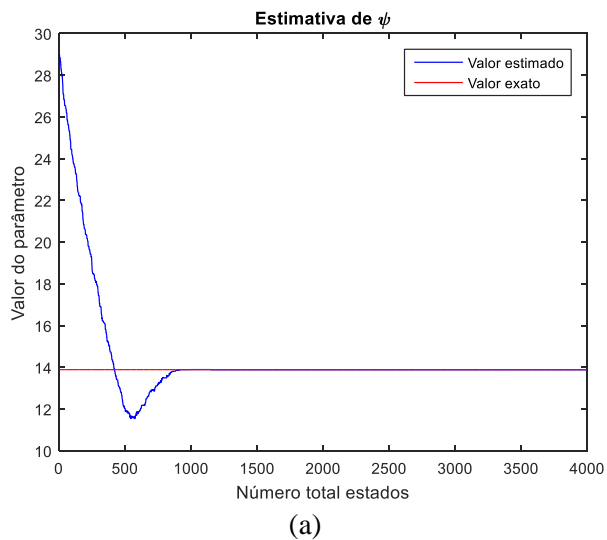


Figura 6.20: (a) Estimativa de ψ e (b) Estimativa de ψ entre 1000 e 4000 estados.

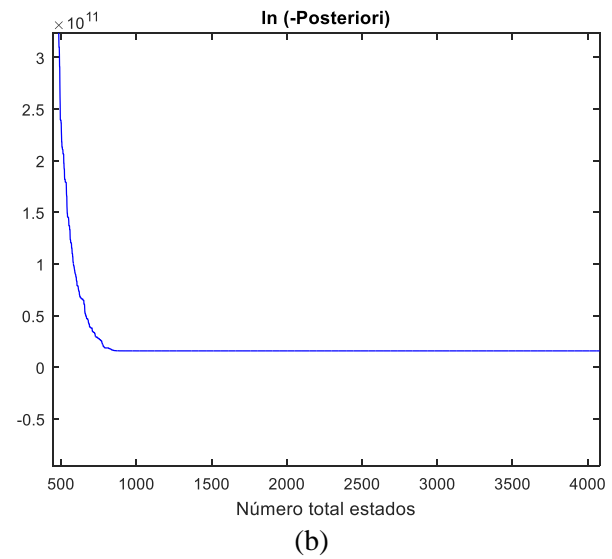
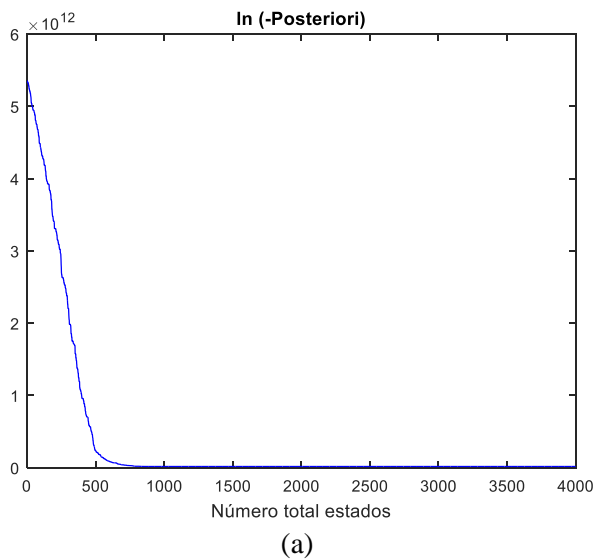


Figura 6.21: (a) Posteriori e (b) Posteriori entre 1000 e 4000 estados.

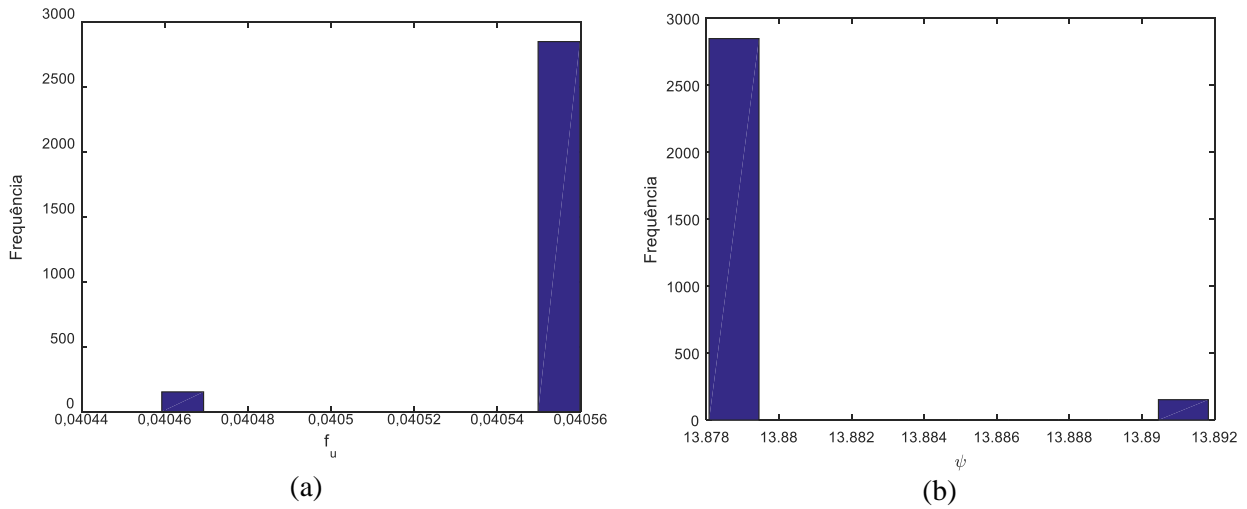
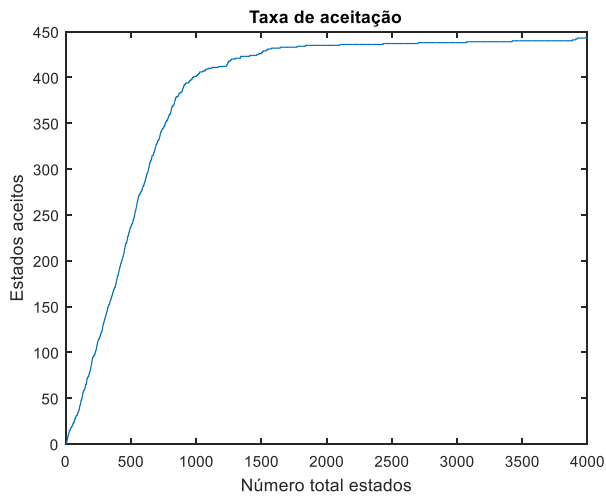
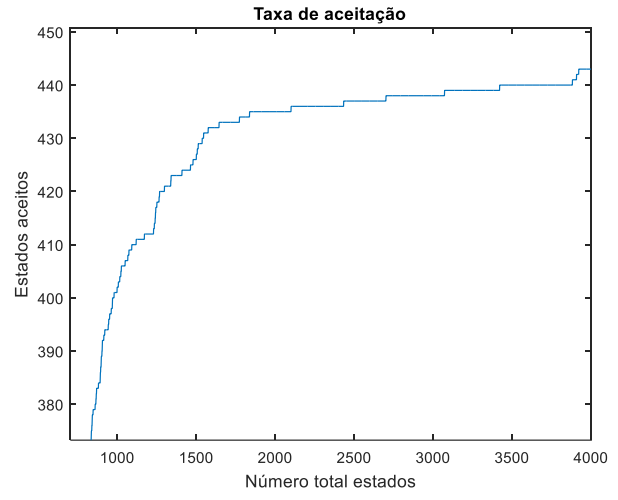


Figura 6.22: (a) Histograma de f_u e (b) Histograma de ψ

Como foi visto, a taxa de aceitação está diretamente relacionada com o desvio padrão da proposta escolhido. Altas taxas de aceitação são geradas por desvios pequenos. Contudo, quanto menor for o desvio, mais tempo o método MCMC levará para estimar um valor próximo do valor exato. Sabendo disso, foi examinado um novo caso no qual foi escolhido utilizar a seguinte abordagem: até 1000 estados na cadeia de Markov, foi usado um desvio da proposta igual ao que foi apresentado nas Figuras 6.18-6.22. A partir do estado 1000 da cadeia, o valor de κ para o fator de atrito transiente e para o parâmetro de ancoragem foi alterado para a $5 \times 10^{-4} P_{j,k-1}$. Os resultados para o número de estados aceitos, para estimativa de f_u , para estimativa de ψ e para a posteriori são mostrados nas Figuras 6.23-6.27. Com a alteração do desvio da proposta, percebe-se pela Figura 6.23 um aumento do número de estados aceitos de 380 para 440. Contudo, a taxa de aceitação continua baixa ficando próxima de 11%. Pela análise das Figuras 6.24 e 6.25, vê-se que o método foi capaz mais uma vez de estimar valores bem próximos dos valores de referência.

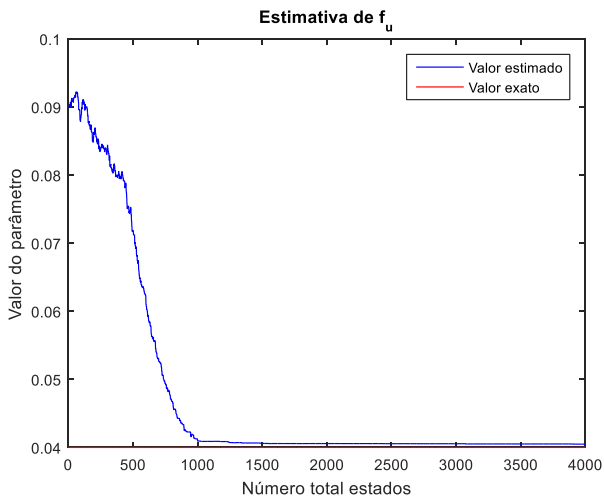


(a)

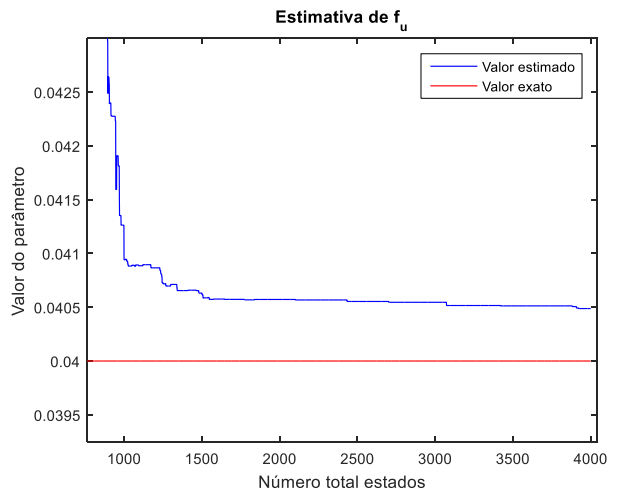


(b)

Figura 6.23: (a) Número de estados aceitos e (b) Número de estados aceitos entre 1000 e 4000 estados.

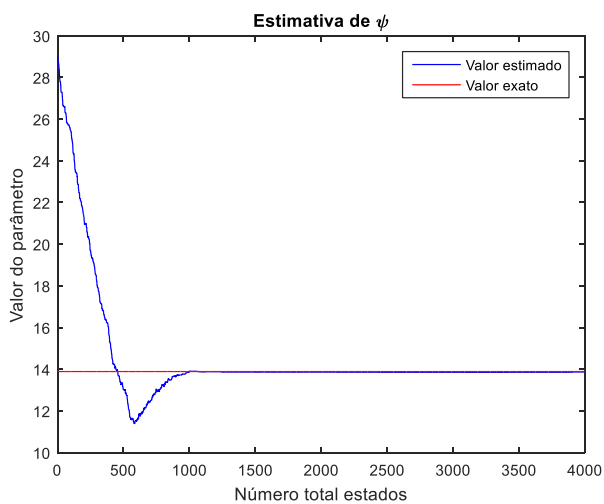


(a)

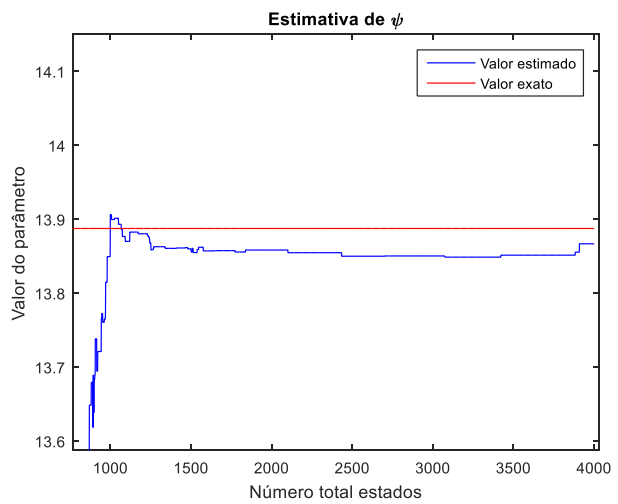


(b)

Figura 6.24: (a) Estimativa de f_u e (b) Estimativa de f_u entre 1000 e 4000 estados.



(a)



(b)

Figura 6.25: (a) Estimativa de ψ e (b) Estimativa de ψ entre 1000 e 4000 estados.

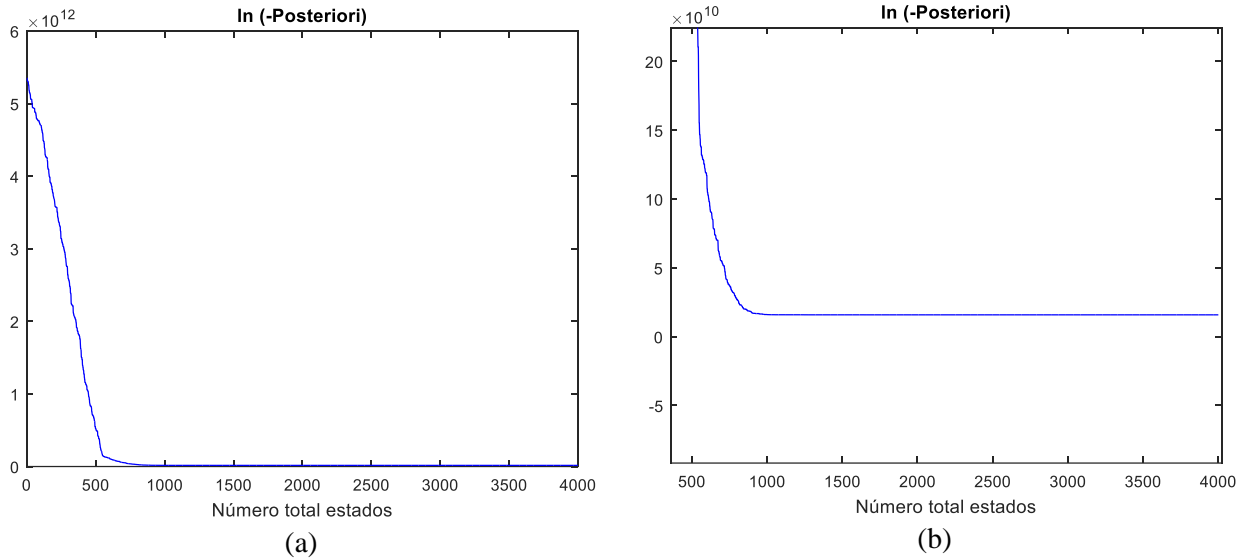


Figura 6.26: (a) Posteriori e (b) Posteriori entre 1000 e 4000 estados.

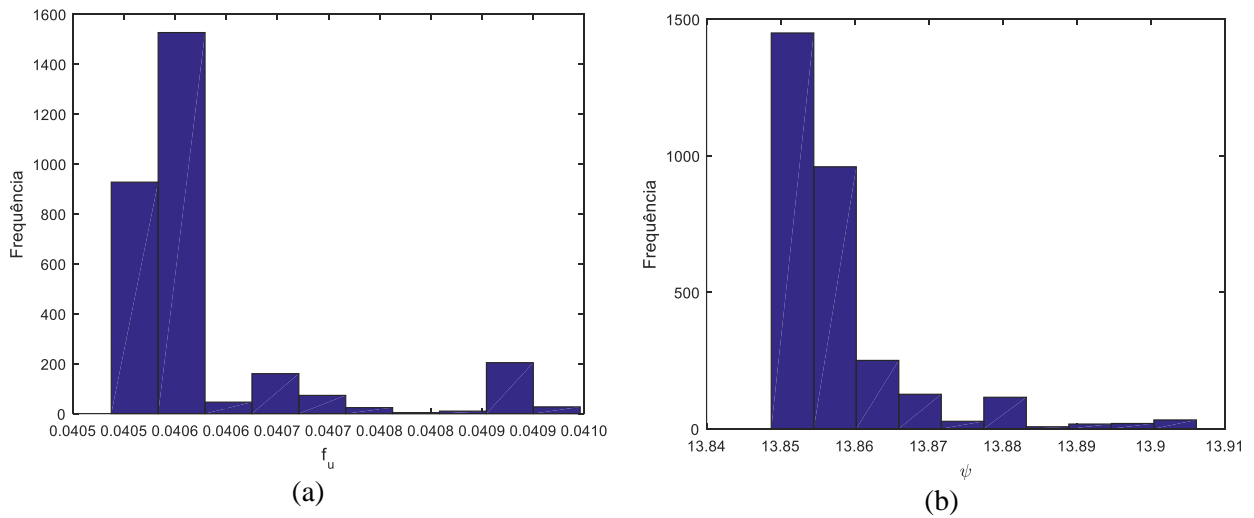


Figura 6.27: (a) Histograma de f_u e (b) Histograma de ψ .

Uma alternativa para melhorar os resultados obtidos nas Figuras 6.24 e 6.25 de forma que as amostras obtidas sejam uma boa representação da distribuição a *posteriori* é aumentar o número de estados totais na cadeia, contudo, o uso de mais estados na cadeia de Markov está limitada devido ao elevado tempo computacional. Para gerar os resultados presentes nas Figuras 6.23-6.27 foi necessário um tempo de 362443 segundos, ou 100 horas, aproximadamente.

Como alternativa para esse problema do tempo computacional, pode-se aplicar algoritmo de *Metropolis-Hastings* em paralelo descrito por CUI *et al.* (2019) e apresentado na Capítulo 5. Para analisar esse algoritmo foram rodados três casos, nos quais se variou o número de núcleos do processador (10, 7 e 3 núcleos) com o objetivo de analisar o aumento no tempo computacional. O desvio da proposta escolhido foi

igual ao usado algoritmo em serial, ou seja, igual a $5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$ para o fator de atrito transiente e para o parâmetro de ancoragem, e $5 \times 10^{-5} P_{j,k-1}$ para os demais parâmetros do modelo. Os resultados para o número de estados aceitos, para estimativa de f_u , para estimativa de Ψ e para a *posteriori* encontram-se a seguir nas Figuras 6.28-6.32 utilizando 10 núcleos do processador.

Observa-se pela Figura 6.28 que dobrar o número total de estados não aumentou de forma significativa a taxa de aceitação, sendo o seu valor próximo a 4,7%. Esse fato pode ser mais bem analisado dividindo o número total de estados em intervalos: entre 1000 e 3000 estados, é visto um aumento mais reduzido no número de estados aceitos e entre 3000 e 8000 estados, vê-se a aceitação de apenas dois novos estados. Embora a taxa de aceitação tenha sido baixa, observa-se pela Figura 6.32 que a *posteriori* foi minimizada. Além disso, ao analisar as Figuras 6.29 e 6.30, vemos que as estimativas para o fator de atrito transiente e para o parâmetro de ancoragem foram bem próximas dos valores de referência.

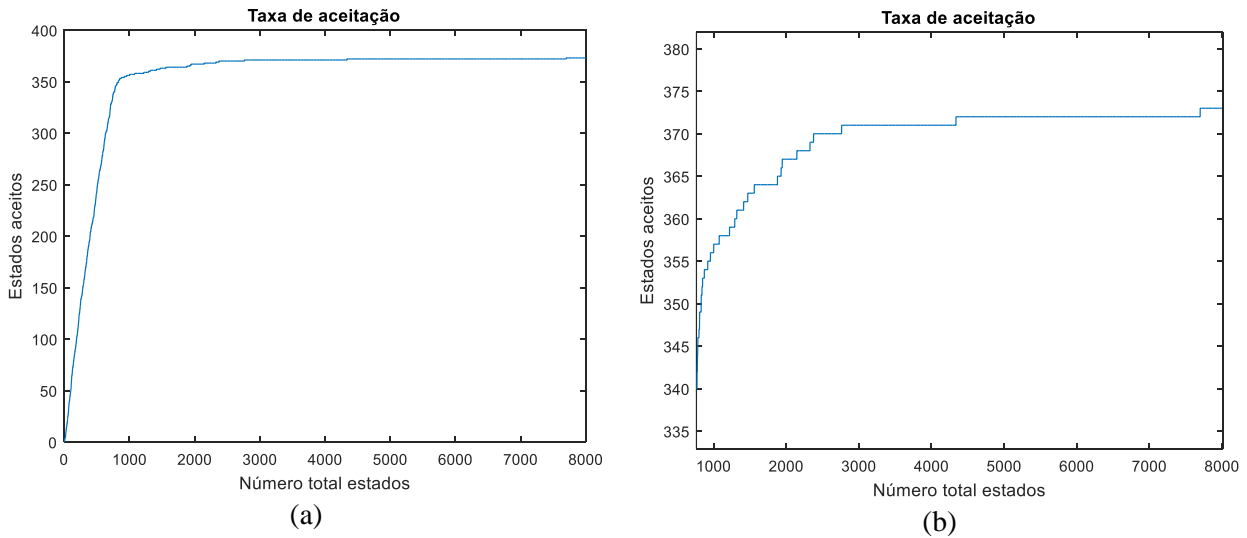


Figura 6.28: (a) Número de estados aceitos e (b) Número de estados aceitos entre 1000 e 8000 estados usando 10 núcleos do processador.

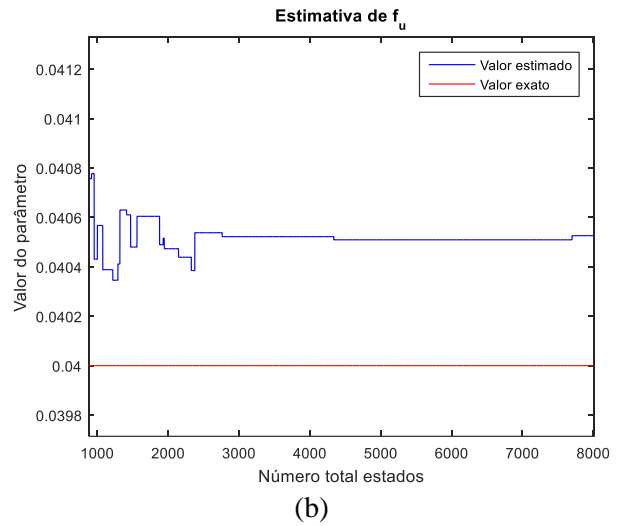
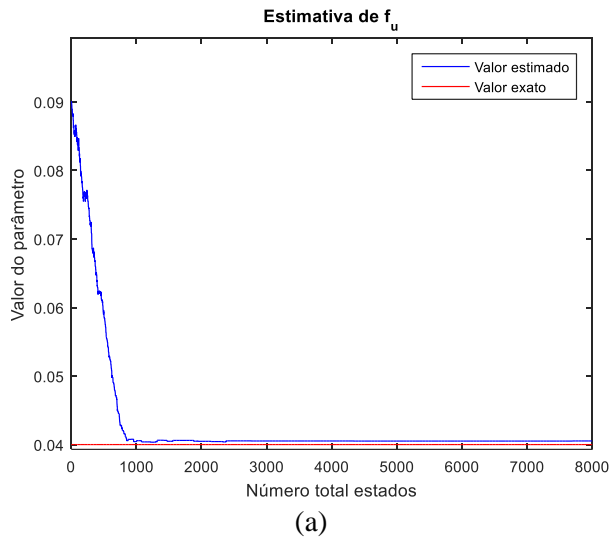


Figura 6.29: (a) Estimativa de f_u e (b) Estimativa de f_u entre 1000 e 8000 estados usando 10 núcleos do processador.

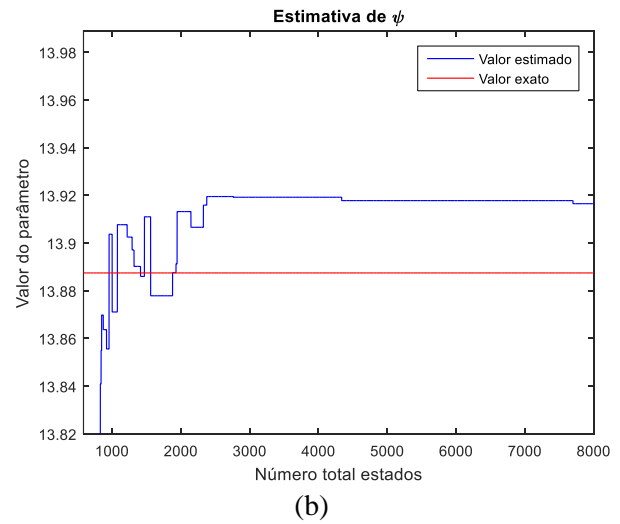
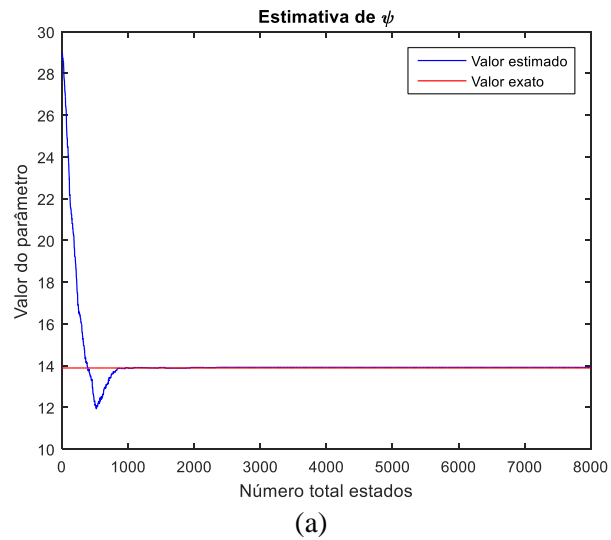


Figura 6.30: (a) Estimativa de ψ e (b) Estimativa de ψ entre 1000 e 8000 estados usando 10 núcleos do processador.

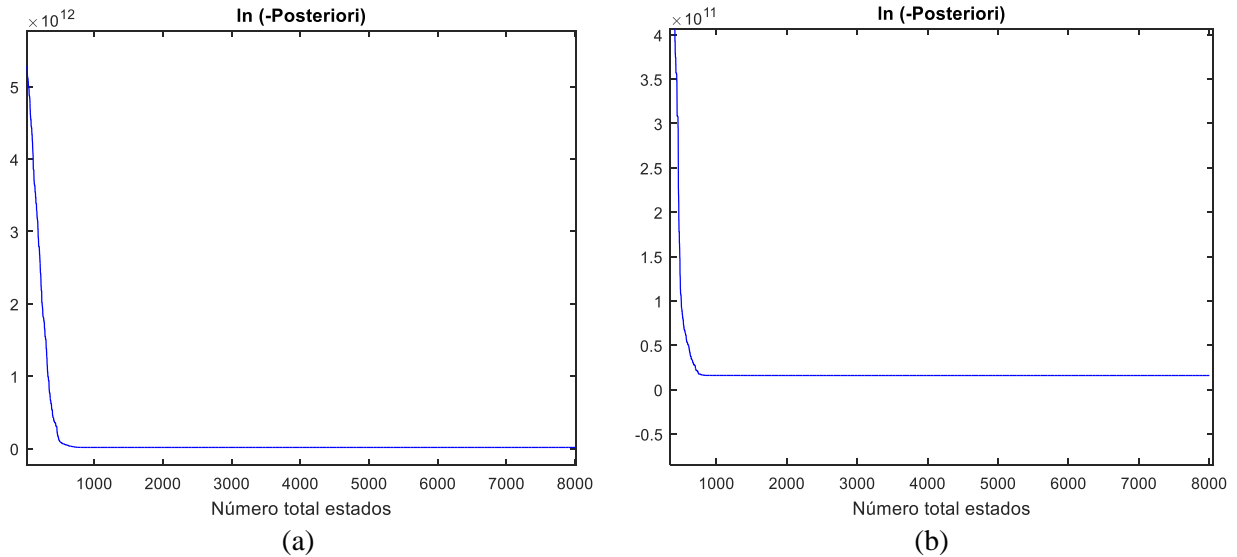


Figura 6.31: (a) Posteriori e (b) Posteriori entre 1000 e 8000 estados usando 10 núcleos do processador.

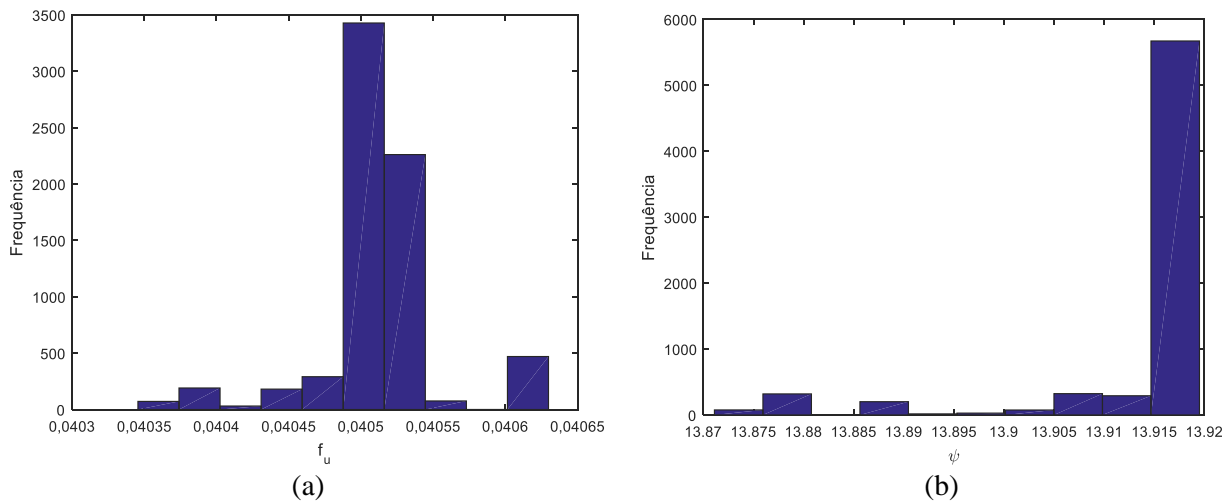
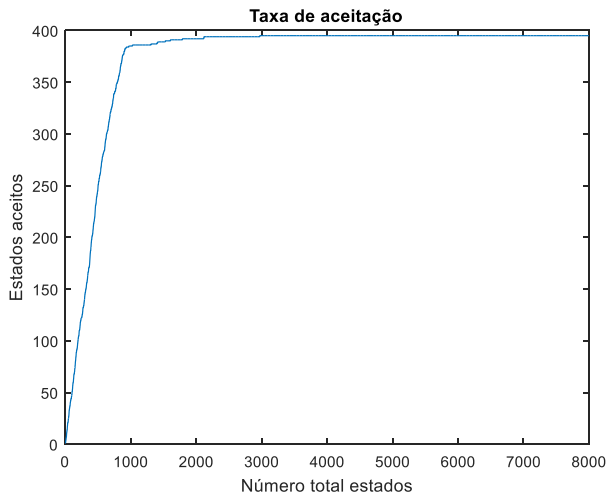
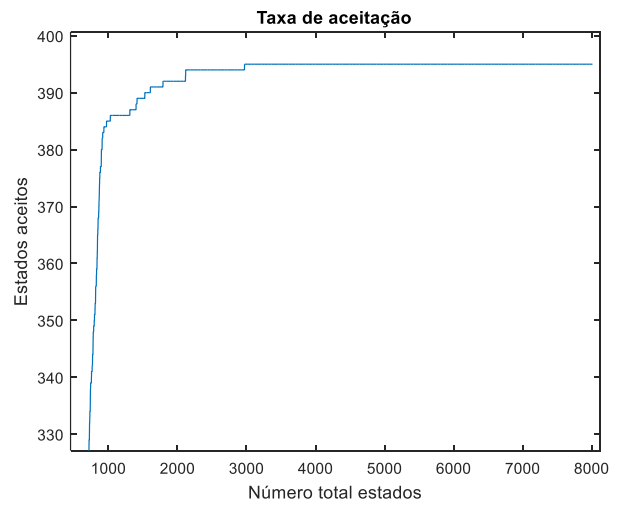


Figura 6.32: (a) Histograma de f_u e (b) Histograma de ψ usando 10 núcleos do processador.

Nas Figuras 6.33-6.37 são mostrados os resultados para o número de estados aceitos, para estimativa de f_u , para estimativa de ψ e para a posteriori utilizando 7 núcleos do processador. Observa-se pela Figura 6.31 que a taxa de aceitação para o algoritmo em paralelo utilizando 7 núcleos foi de 4,9%. Nota-se que, após 3000 estados aproximadamente, nenhum novo estado na cadeia de Markov foi aceito, entretanto, o número total de estados aceitos foi superior ao obtido utilizando 10 núcleos, justificando a maior taxa de aceitação para o resultados com 7 núcleos. Mais uma vez, observa-se pela Figura 6.36 que, embora a taxa de aceitação tenha sido baixa, a *posteriori* foi minimizada. Pela análise das Figuras 6.34 e 6.35, vê-se novamente a excelente estimativa para o fator de atrito transiente e para o parâmetro de ancoragem se comparados aos valores de referência.

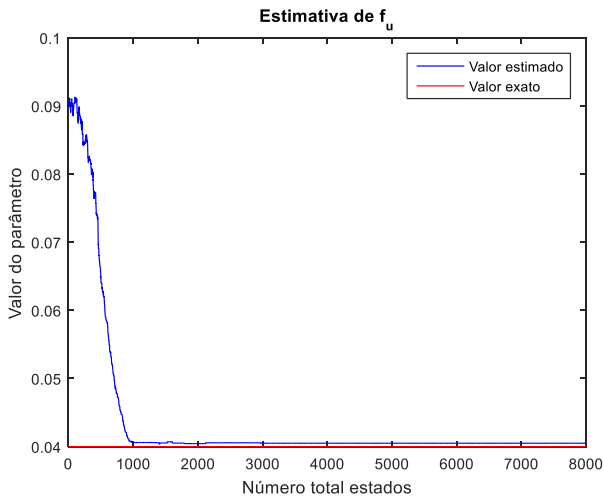


(a)

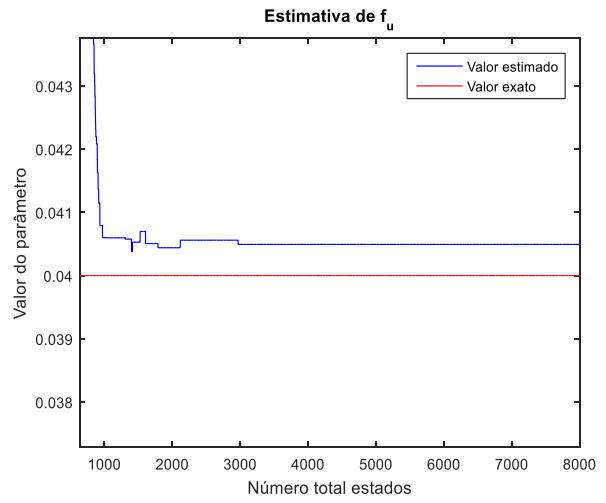


(b)

Figura 6.33: (a) Número de estados aceitos e (b) Número de estados aceitos entre 1000 e 8000 estados usando 7 núcleos do processador.



(a)



(b)

Figura 6.34: (a) Estimativa de f_u e (b) Estimativa de f_u entre 1000 e 8000 estados usando 7 núcleos do processador.

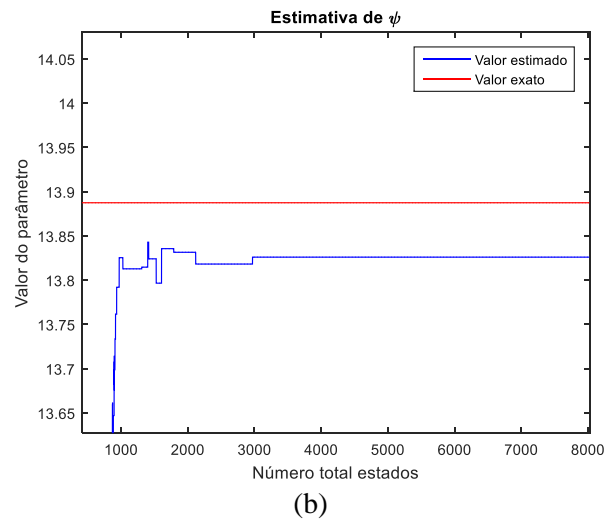
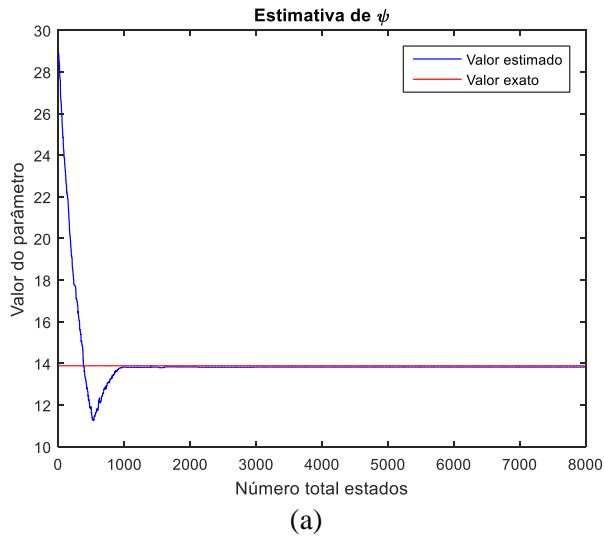


Figura 6.35: (a) Estimativa de ψ e (b) Estimativa de ψ entre 1000 e 8000 estados usando 7 núcleos do processador.

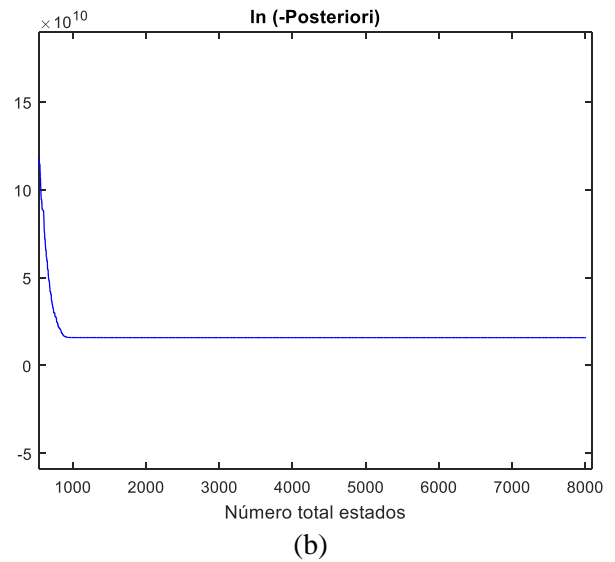
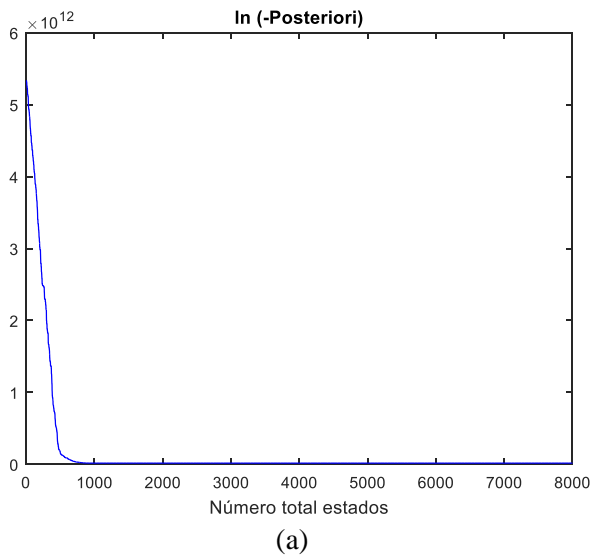


Figura 6.36: (a) Posteriori e (b) Posteriori entre 1000 e 8000 estados usando 7 núcleos do processador.

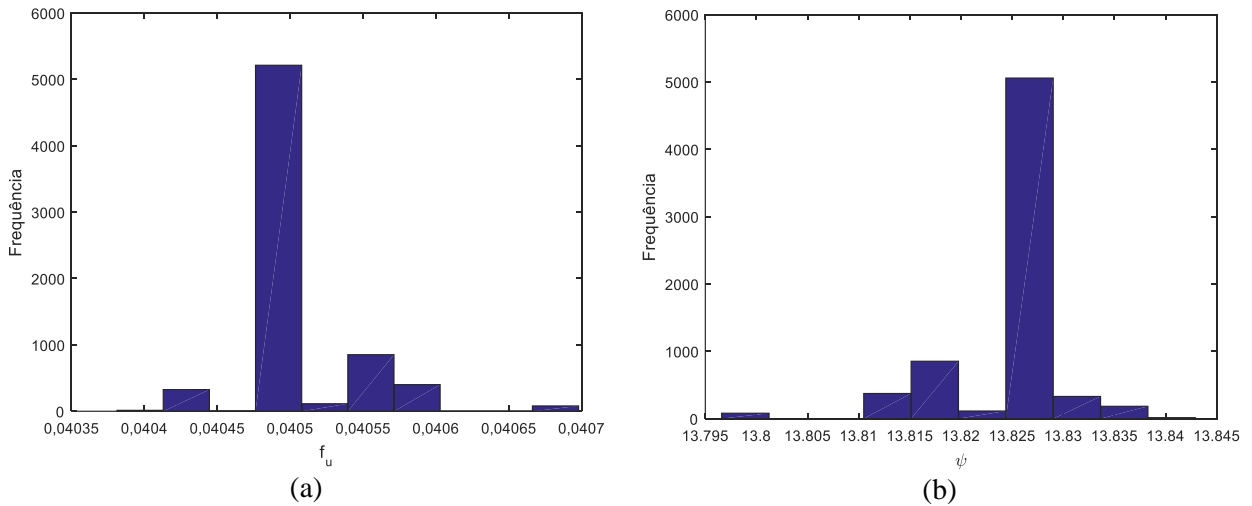


Figura 6.37: (a) Histograma de f_u e (b) Histograma de ψ usando 7 núcleos do processador.

Nas Figuras 6.38-6.42 são mostrados os resultados para o número de estados aceitos, para estimativa de f_u , para estimativa de ψ e para a posteriori utilizando 3 núcleos do processador. Observa-se pela Figura 6.33 que a taxa de aceitação foi aproximadamente 5,3%, sendo um pouco superior às taxa obtidas utilizando 10 e 7 núcleos. Essa melhora na taxa de aceitação muito provavelmente está relacionada à forma randômica que é gerado um parâmetro candidato pelo algoritmo de *Metropolis-Hastings* através da distribuição proposta dada pela Equação (6.12). Embora a taxa de aceitação tenha sido baixa, vê-se pela Figura 6.41 a minimização da *posteriori*. Analisando as Figuras 6.39 e 6.40, observa-se uma estimativa bem próxima dos valores de referência para o fator de atrito transiente e para o parâmetro de ancoragem.

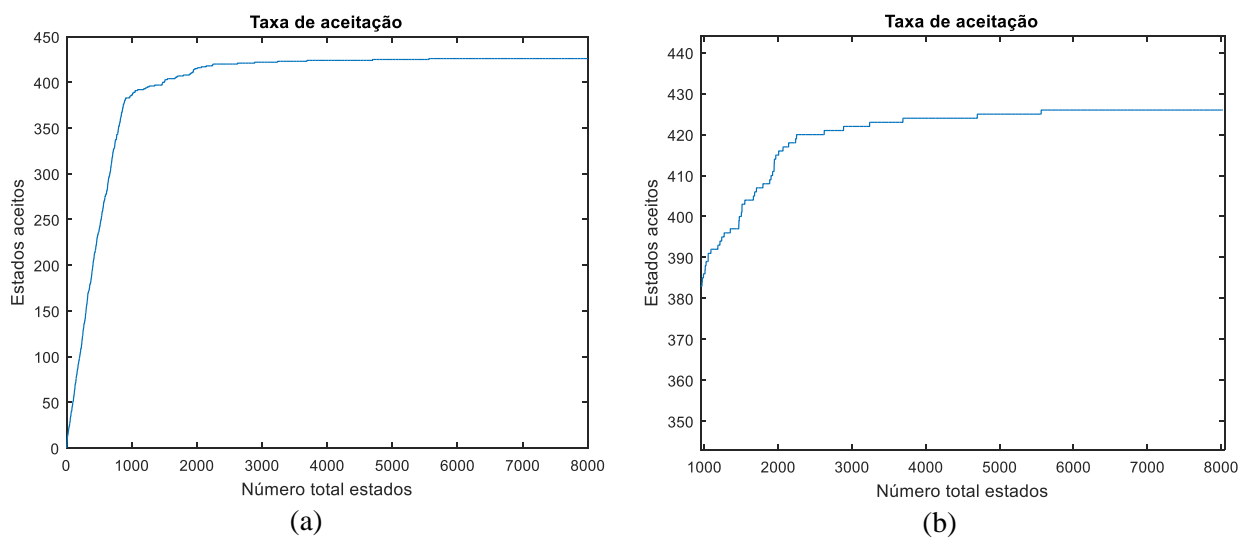
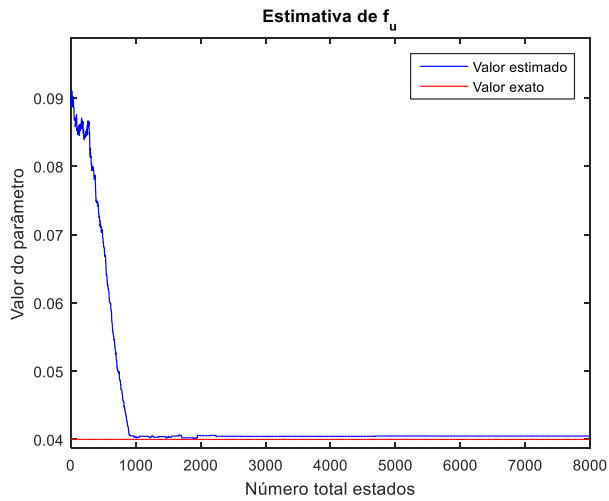
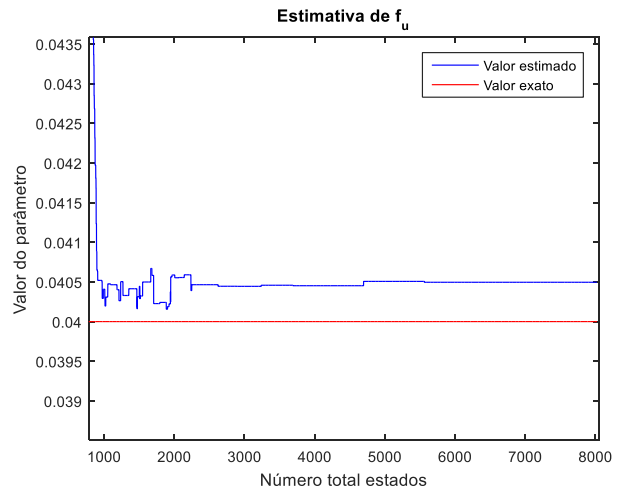


Figura 6.38: (a) Número de estados aceitos e (b) Número de estados aceitos entre 1000 e 8000 estados usando 3 núcleos do processador.

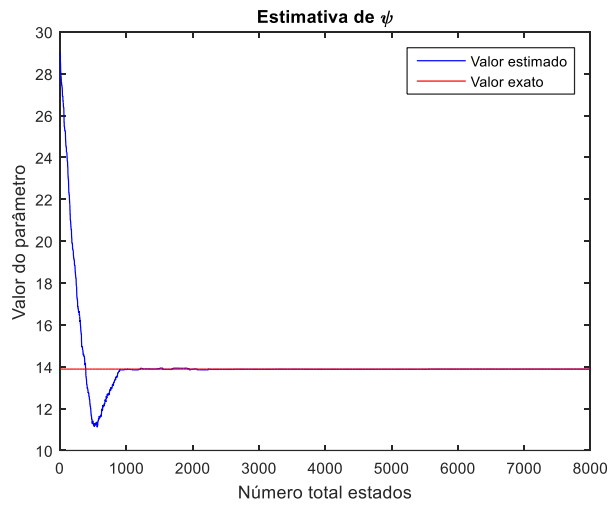


(a)

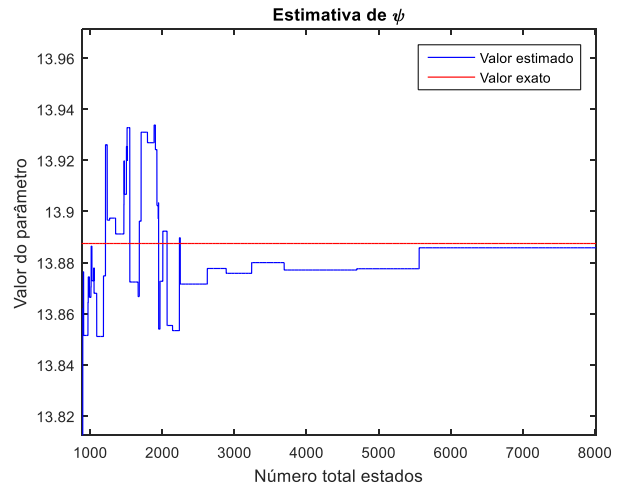


(b)

Figura 6.39: (a) Estimativa de f_u e (b) Estimativa de f_u entre 1000 e 8000 estados usando 3 núcleos do processador.



(a)



(b)

Figura 6.40: (a) Estimativa de ψ e (b) Estimativa de ψ entre 1000 e 8000 estados usando 3 núcleos do processador.

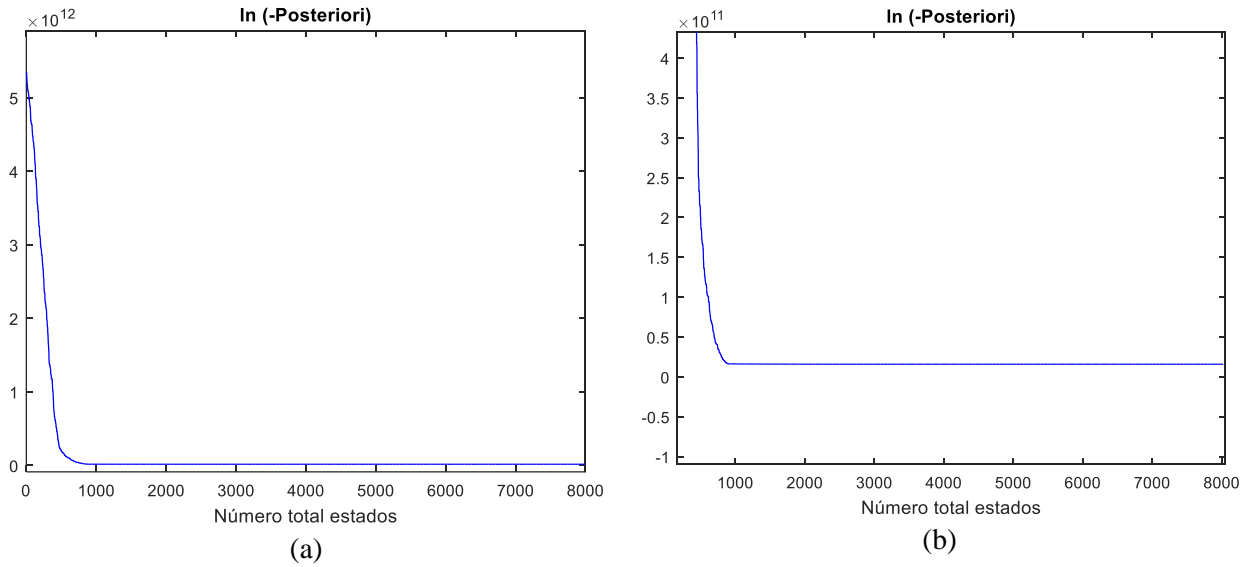


Figura 6.41: (a) Posteriori e (b) Posteriori entre 1000 e 8000 estados usando 3 núcleos do processador.

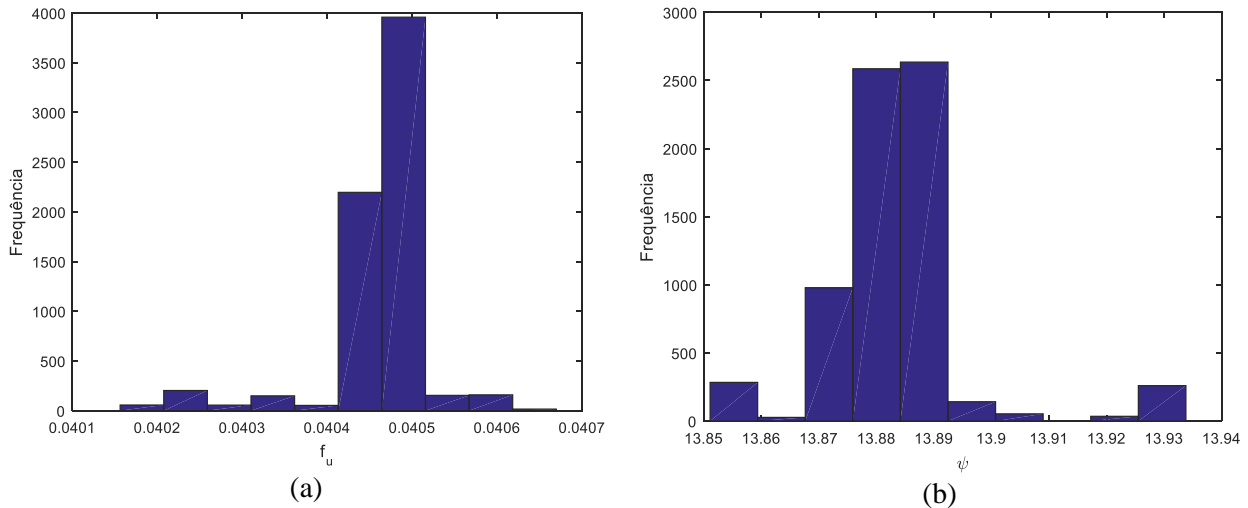


Figura 6.42: (a) Estimativa de f_u e (b) Estimativa de f_u entre 1000 e 8000 estados usando 3 núcleos do processador.

Através na análise dos resultados presentes nas Figuras 6.29, 6.30, 6.31, 6.32, 6.39 e 6.40 para estimativa de f_u , para estimativa de ψ , percebe-se, primeiramente, que dobrar o número de estados da cadeia não melhorou a estimativa para os números de estados aceitos em relação ao resultado obtido de forma serial, sendo que as taxas de aceitação ficaram próximas de 5%. Observa-se novamente o mesmo comportamento da cadeia obtida pelo algoritmo de *Metropolis-Hastings* de forma serial, onde o número de estados aceitos diminui muito quando o número total de estados é maior do que 1000. A partir desse número, o valor estimado já está bem próximo do exato.

Para melhorar a taxa de aceitação pode-se aplicar o mesmo procedimento no desvio padrão da proposta utilizado no algoritmo de *Metropolis-Hastings* clássico, contudo, é preciso definir a quantidade ideal de núcleos a ser utilizada. É visto na Tabela 6.6 que o uso de 7 núcleos possui o menor tempo computacional dos três casos analisados. Esse fato está coerente com o que foi relatado em CUI *et al.* (2019), ou seja, é visto que o aumento do número de núcleos utilizados não necessariamente produz de forma proporcional o mesmo aumento no *speed up factor*

Tabela 6.6: Valor da estimativa dos parâmetros

Número de núcleos	Tempo computacional (segundos)	Tempo computacional (horas)
10 núcleos	232108	64,47
7 núcleos	174800	48,55
3 núcleos	377545	104,874

Para calcular o *speed up factor* prático obtido por cada estimativa, será considerado que o tempo computacional para calcular 8000 estados na cadeia de Markov de forma serial é o dobro daquele obtido para 4000 estados, ou seja, duas vezes 362443 segundos. É importante ressaltar que essa consideração é uma aproximação, pois o cálculo do tempo computacional não é uma função linear e ao dobramos o número de estados não necessariamente o tempo computacional será dobrado. Assim, calculando o *speed up factor* através da Equação (5.15) para um valor de φ igual a 0.2, pode-se construir a Tabela 6.7 a seguir:

Tabela 6.7: Fatores de Aumento de Velocidade

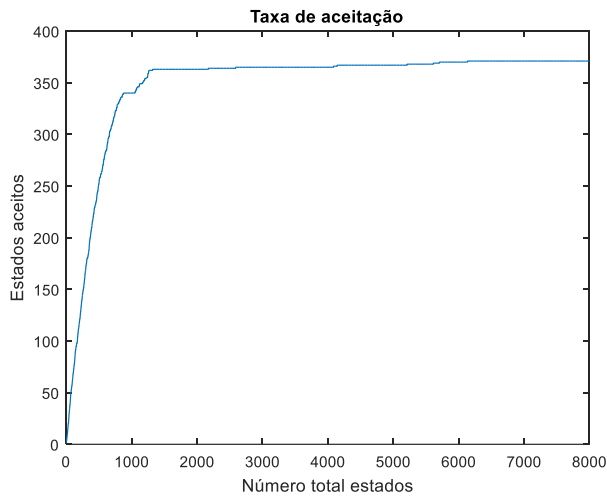
Número de núcleos	Taxa de aceitação	Fator de aumento de velocidade (real)	Tempo computacional (teórico)
10 núcleos	4,7%	3,12	3,25
7 núcleos	4,9%	4,18	3,03
3 núcleos	5,3%	1,91	2,13

Através da análise da Tabela 6.7, observa-se a diferença existente entre os fatores de aumento de velocidade teóricos e práticos. É visto que para o uso de 3 e 10 núcleos, o fator de aumento de velocidade obtido foi inferior daquele calculado pela Equação (5.15). O oposto aconteceu para o uso de 7 núcleos, no qual o fator de aumento de velocidade prático foi superior ao fator de aumento de velocidade teórico. Essas

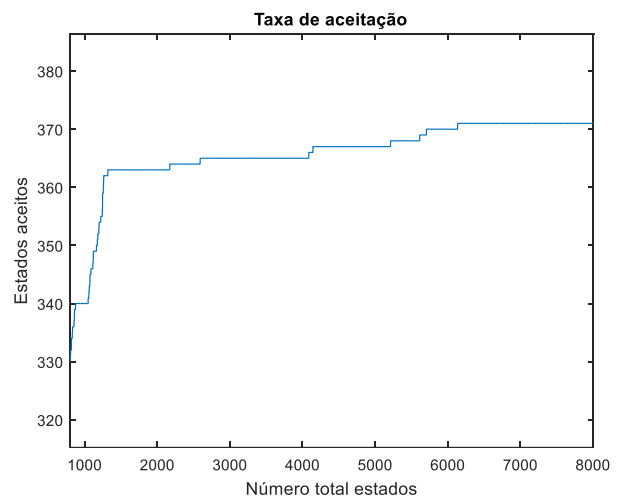
diferenças podem ser explicadas pelo parâmetro φ que representa a razão entre o tempo de transição por processo e o cálculo do problema direto, sendo que o seu valor de 0.2 foi escolhido de forma arbitrária, utilizando o mesmo valor visto em CUI *et al.* (2019). Assim, considerando os fatores de aumento de velocidades obtidos, o uso de 7 núcleos é o mais adequado dentre os três casos analisados para a aplicação do algoritmo de *Metropolis-Hastings*.

Definido o número de núcleos a ser utilizado, foi analisado um caso no qual é usado um desvio da proposta igual ao que foi apresentado nas Figuras 6.28-6.42 até 1000 estados e, a partir do estado 1000 da cadeia, o valor de κ para o fator de atrito transiente e para o parâmetro de ancoragem é alterado para a $1 \times 10^{-4} P_{j,k-1}$, um valor menor do que foi usado para o caso serial. Os resultados para o número de estados aceitos, para estimativa de f_u , para estimativa de Ψ e para a posteriori são mostrados nas Figuras 6.43-6.47.

Através da análise da Figura 6.43, percebe-se um aumento da taxa de aceitação logo após alterar o desvio da proposta depois 1000 estados da cadeia, contudo, em cerca de 2000 estados esse aumento estabiliza-se, o que acarreta em número muito baixo de estados aceitos, gerando uma taxa de aceitação próxima de 4%. Pelos resultados apresentados nas Figuras 6.43-6.47, observa-se que a alteração do passo de procura teve pouca influência para a melhora na taxa de aceitação. A estimativa para o fator de atrito transiente e para o parâmetro de ancoragem, como pode ser observado pelas Figuras 6.42 e 6.43, foram novamente bastante próximas dos valores de referência.

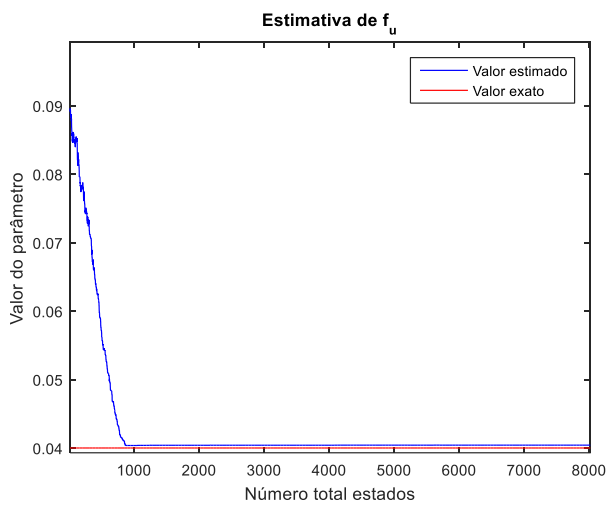


(a)

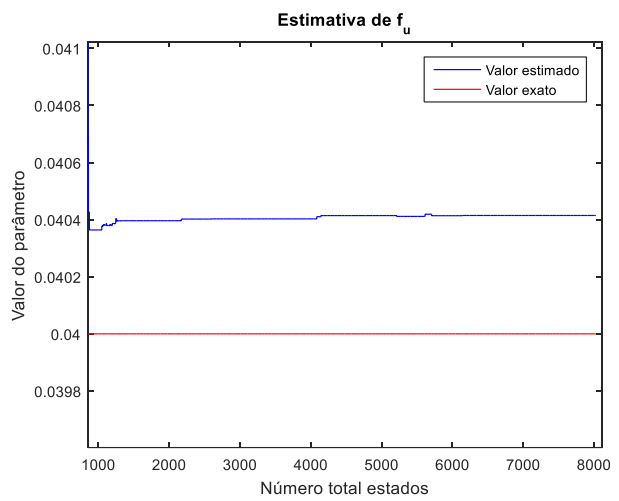


(b)

Figura 6.43: (a) Número de estados aceitos e (b) Número de estados aceitos entre 1000 e 8000 estados

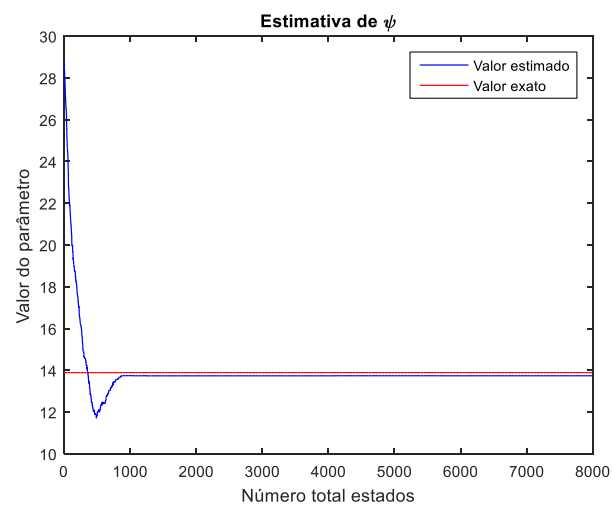


(a)

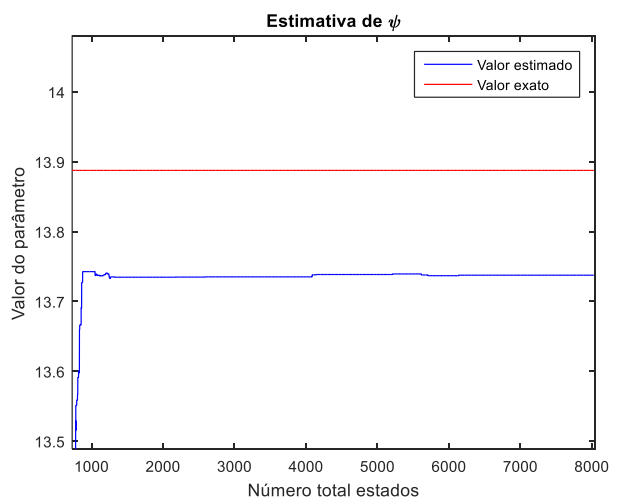


(b)

Figura 6.44: (a) Estimativa de f_u e (b) Estimativa de f_u entre 1000 e 8000 estados.



(a)



(b)

Figura 6.45: (a) Estimativa de ψ e (b) Estimativa de ψ entre 1000 e 8000 estados.

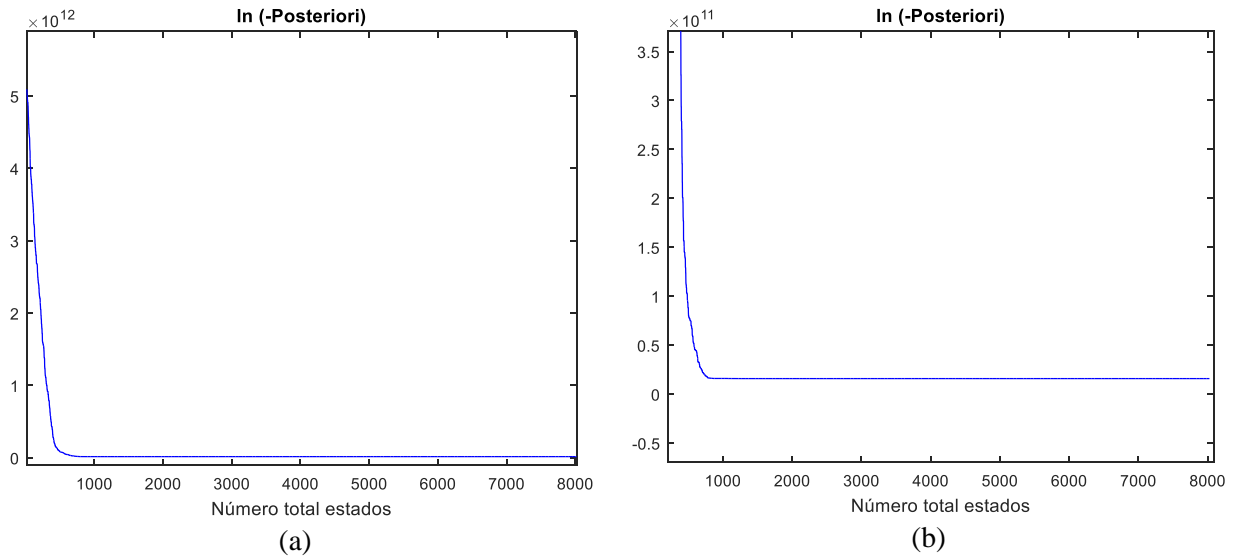


Figura 6.45: (a) Posteriori e (b) Posteriori entre 1000 e 8000 estados.

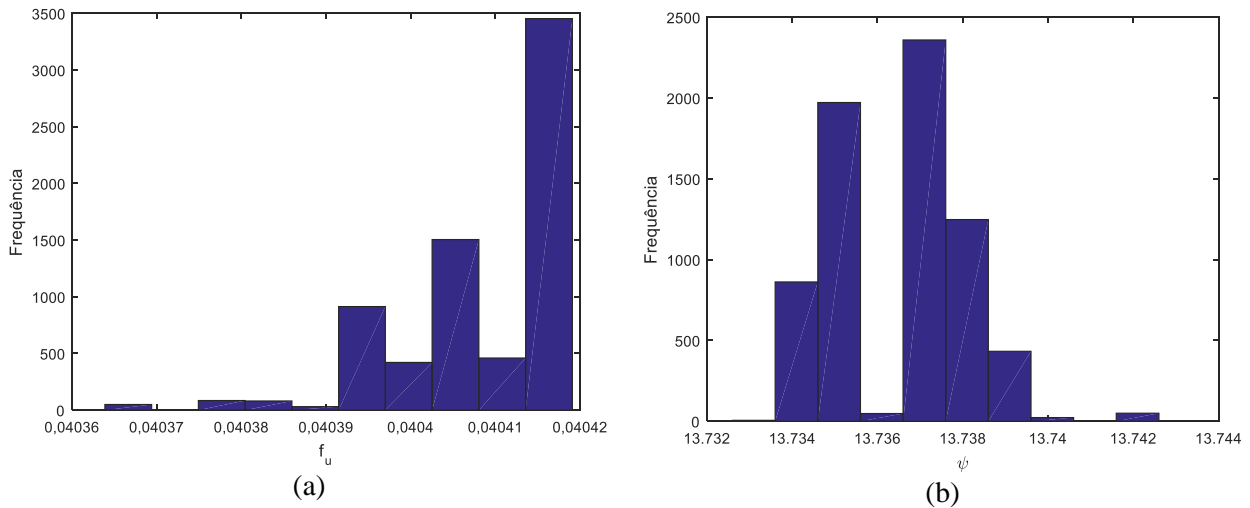


Figura 6.45: (a) Histograma de f_u e (b) Histograma de ψ .

6.3 Análise Estatística da Estimativa de Parâmetro

Todos os casos analisados na seção anterior para a estimativa de parâmetro podem ser resumidos nas Tabelas 6.8, 6.9 e 6.10, nas quais são calculados a média, o desvio padrão e o desvio relativo percentual obtido para os parâmetros f_u e ψ . Além disso, é feita análise estatística proposta por GEWEK (1992), na qual são calculadas as médias em diferentes intervalos da cadeia para analisar a sua convergência. 7

Tabela 6.8: Casos analisados

Casos	Número de Núcleos	Desvio proposta para f_u	Desvio proposta para ψ
1	Serial	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$
2	Serial	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$ até 1000 estados $5 \times 10^{-4} P_{j,k-1}$ após 1000 estados	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$ até 1000 estados $5 \times 10^{-4} P_{j,k-1}$ após 1000 estados
3	3	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$
4	7	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$
5	10	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$
6	7	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$ até 1000 estados $1 \times 10^{-4} P_{j,k-1}$ após 1000 estados	$5 \times 10^{-3} P_{j,k-1}$ até 1000 estados $1 \times 10^{-4} P_{j,k-1}$ após 1000 estados

Tabela 6.9: Análise estatística para f_u .

Caso	Média	Desvio Padrão	Desvio Relativo Percentual	\bar{P}^a	\bar{P}^b	$(\bar{P}^a - \bar{P}^b)$
1	0,040555	$2,205254 \times 10^{-5}$	1,3875	0,040509	0,040559	$-5,094559 \times 10^{-5}$
2	0,040582	$1,009373 \times 10^{-4}$	1,4550	0,040852	0,040525	$3,268160 \times 10^{-4}$
3	0,040468	$6,498887 \times 10^{-5}$	1,1700	0,040417	0,040496	$-7,862303 \times 10^{-5}$
4	0,040507	$3,965869 \times 10^{-5}$	1,2675	0,040578	0,040492	$8,590600 \times 10^{-5}$
5	0,040513	$4,133458 \times 10^{-5}$	1,2825	0,040509	0,040510	$-1,256800 \times 10^{-6}$
6	0,040407	$8,997369 \times 10^{-6}$	1,0175	0,040389	0,040414	$-2,417294 \times 10^{-5}$

Tabela 6.10: Análise estatística para ψ .

Caso	Média	Desvio Padrão	Desvio Relativo Percentual	\bar{P}^a	\bar{P}^b	$(\bar{P}^a - \bar{P}^b)$
1	13,878770	0,003017	0,0626	13,885043	13,878074	0,006969
2	13,856529	0,009949	0,2228	13,880474	13,851299	0,029175
3	13,882041	0,012718	0,0391	13,884815	13,883281	0,001533
4	13,824546	0,005321	0,4531	13,817119	13,826000	-0,008880
5	13,913949	0,010926	0,1907	13,893183	13,917689	-0,024506
6	13,736714	0,001663	1,0855	13,736131	13,737833	-0,001702

Através da análise das médias e desvio padrão presentes nas Tabelas 6.8 e 6.9 para a estimativa dos parâmetros observa-se capacidade do algoritmo de *Metropolis-Hastings* em estimar valores muito próximos dos valores de referência, tanto de forma serial quanto em paralelo. Observa-se que todos os desvios relativos percentuais calculados a partir da média para o fator de atrito transiente f_u , foram inferiores a 1,5%, enquanto que para o parâmetro de ancoragem ψ , observa-se que os desvios relativos percentuais foram inferiores a 1,1%.

Feita a análise de das médias e dos desvios padrões, foram calculadas as médias \bar{P}_j^a e \bar{P}_j^b para os 10% iniciais e os 50% finais das amostras respectivamente, de acordo com GEWEK (1992). Foi visto que o maior valor de $(\bar{P}^a - \bar{P}^b)$ para f_u foi da ordem de 10^{-4} , enquanto que para o parâmetro de ancoragem ψ a maior diferença para $(\bar{P}^a - \bar{P}^b)$ foi da ordem de 10^{-2} . Essas pequenas diferenças entre as médias dos parâmetros indicam a convergência das cadeias para todos os casos analisados.

Apesar dos resultados das estimativas terem sido excelentes em relação à média, cabe ressaltar que os desvios padrões calculados não são uma boa representação estatística do desvio padrão da distribuição a posteriori. Esse fato pode ser observado na Tabela 6.11 a seguir através do tempo de autocorrelação (IACT), que representa o número de amostras correlacionadas entre amostras linearmente independentes na cadeia de Markov e pelo tamanho efetivo da cadeia (s_{eff}) que dá o número de amostras independentes.

Tabela 6.11: Tempos de autocorrelação e tamanhos efetivos das cadeias

Caso	IACT de f_u	s_{eff} de f_u	IACT de Ψ	s_{eff} de Ψ
1	156	19,23	156	19,23
2	521	5,76	496	6,05
3	174	40,22	210	33,33
4	354	19,77	264	26,52
5	154	45,45	837	8,36
6	1904	3,68	1323	5,29

Pelos tempos de autocorrelação calculados, observa-se que o valor obtido para o caso 1 foi igual de 156 tanto para f_u quanto para Ψ . Isso significa que são necessários 156 amostras para gerar uma amostra não correlacionada. Assim, considerando um período de aquecimento da cadeia igual a 1000, em 3000 estados da cadeia teremos aproximadamente 19 (3000 amostras divididas pelo IACT) amostras não correlacionadas, que é o tamanho efetivo da cadeia. É visto que o tempo de autocorrelação obtido para o caso 2 foi superior ao calculado para o caso 1. Isso significa que para esse caso, o aumento no número de estados aceitos fez com que outros estados correlacionados fossem aceitos.

Para os casos 3-5, que são os casos implementados em paralelo, observa-se, através dos tempos de autocorrelação, que o número de 8000 estados na cadeia ainda não é capaz de produzir amostras capazes de representar bem a distribuição a posteriori. Considerando o período de aquecimento de 1000 estados, observa-se que o maior número de amostras não correlacionadas foi aproximadamente 45 para o parâmetro f_u estimado no caso 6 e aproximadamente 33 para o parâmetro Ψ estimado pelo caso 3. Observa-se que o aumento no número de estados aceitos no caso 6 aumentou o IACT, da mesma forma que aconteceu para o caso 2.

Um fato importante para destacar é que foram analisados outros casos não mostrados no presente trabalho, nos quais foram variados os desvios da proposta com o objetivo de melhorar a taxa de aceitação do método, entretanto, todos os casos analisados tiveram o mesmo comportamento dos seis casos mostrados.

Como foi visto, o elevado o tempo computacional obtido para cada caso analisado é um limitante para o aumento do número de estados na cadeia de Markov.. Uma alternativa para essa dificuldade em trabalhos futuros é o uso de modelos reduzidos, em vez do modelo matemático completo, para a solução do problema direto (ORLANDE, 2015).

Como os modelos reduzidos não reproduzem com exatidão o modelo matemático que representa a física do problema direto, algumas técnicas presentes na literatura buscam melhorar a solução do problema inverso obtida pelo uso dessas formas aproximadas do modelo real. Uma dessas técnicas é o modelo de erro de aproximação (*approximation error model –AEM*), no qual é utilizado a *posteriori* modificada pelo erro do modelo reduzido (KAPIO e SOMERSALO 2005; ORLANDE, 2015).

7 Conclusão

O presente trabalho tem como objetivo a aplicação de técnicas bayesianas para a solução de um problema inverso para realizar a estimativa de parâmetros importantes presentes na formulação matemática do golpe de aríete.

As equações do golpe de aríete foram deduzidas a partir das equações de conservação de massa e momento linear. Com isso, verificou-se que elas formam um sistema de equações diferenciais parciais de natureza hiperbólica. Devido à natureza do problema, foi escolhido aplicar o método WAF-TVD para a solução do sistema homogêneo de equação diferenciais parciais após ter sido implementado um esquema de fracionamento das equações, separando o termo fonte do restante do sistema.

O código desenvolvido na linguagem C foi verificado para os casos testes presente em CARVALHO (2018) e, assim, foi aplicado na simulação numérica para o circuito hidráulico experimental em fase final de construção no Laboratório de Transmissão e Tecnologia do Calor (LTTC/UFRJ). Com a simulação feita, foi realizado um estudo sobre as sensibilidades de dois parâmetros presentes na formulação matemática com o objetivo de verificar a independência linear entre eles para realizar as suas estimativas através da solução do problema inverso. Os parâmetros escolhidos foram o fator de atrito transiente e o parâmetro de ancoragem, devido à grande incerteza em relação ao valor exato de cada um.

Assim, foram calculados os coeficientes de sensibilidade reduzidos desses dois parâmetros para os sensores de pressão e vazão na entrada e na saída do circuito. Foi visto que os maiores valores dos coeficientes de sensibilidade acontecem no sensor 1 de vazão e no sensor 13 de pressão, devido à configuração do circuito hidráulico experimental.

Feita a análise de sensibilidade, foi aplicado o método de Monte Carlo via cadeia de Markov (MCMC) para solução do problema inverso com o objetivo de estimar os parâmetros de interesse do problema. Para isso, foram utilizadas duas abordagens: o método MCMC utilizando o algoritmo de *Metropolis Hastings* clássico e um algoritmo para a computação em paralelo proposto CUI *et al.* (2019). A ideia em usar o algoritmo de *Metropolis-Hastings* em paralelo está no fato do método precisar da solução do problema direto uma quantidade grande de vezes, o que aumenta seu custo

computacional. Dessa forma, a computação em paralelo, teoricamente, pode acelerar esse processo.

Através, dos resultados obtidos para a estimativa de parâmetros, observou-se que o algoritmo de *Metropolis Hastings* em paralelo possuiu um ganho grande de tempo computacional se comparado com o algoritmo de *Metropolis Hastings* clássico. Foi visto que o resultado em paralelo utilizando 7 núcleos foi o que teve o menor tempo computacional e, conseqüentemente, o maior fator de aumento de velocidade para os casos analisados.

Observou-se que o algoritmo de *Metropolis Hastings*, tanto de forma serial quanto paralelo, foi capaz de estimar valores para o fator de atrito transiente e para o parâmetro de ancoragem muito próximos daqueles valores de referência. Através da análise das médias em diferentes regiões das cadeias, foi visto a convergência das cadeias obtidas. Contudo, através do cálculo do tempo de autocorreção e do tamanho efetivo das cadeias, observou-se que apesar dos resultados das estimativas terem sido excelentes em relação à média, as amostras geradas pelas cadeias não são uma boa representação para todas as estatísticas da distribuição *a posteriori*.

Como continuação do trabalho, espera-se validar o código computacional desenvolvido com os resultados experimentais a serem obtidos com a finalização da montagem do circuito hidráulico experimental. Feito isso, será buscado uma solução para a baixa taxa de aceitação presentes no método MCMC e a utilização de modelos reduzidos com o objetivo de poder aumentar o número de estados totais na cadeia de Markov.

8 Referências

AXWORTHY, D. H., GHIDAOU, M. S., MCINNIS, D. A., Extended Thermodynamics Derivation of Energy Dissipation in Unsteady Pipe Flow, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 126(4), pp. 276-287, 2000.

BARBOSA, M. V, F. Implementação do Método WAF TVD para a Simulação de Escoamentos Compressíveis Quasi-Unidimensionais. Projeto Final de Graduação, DEM/EE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2003.

BOULOS, P. F., KARNEY, B. W., WOOD, D. J., LINGIREDDY, S, Hydraulic Transient Guideless for Protecting Water Distribution Systems, Journal of American Water Association, pp.111-124, 2005.

BRUNONE, B., GOLIA, U.M., GRECO, M., Effects of Two-Dimensionality on Pipe Transients Modeling, Journal of Hydraulic Engineering, vol. 121 (12), pp. 906-912, 1995.

CAMARGO, L.A., O Golpe de Aríete em Tubulações de Racalque. Análise Simplificada, XV Encontro de Engenheiros de Assistência Técnica, Joinville, 1989.

CARVALHO, R. C, ORLANDE, H.R.B, COLAÇO, M.J., MADEIRA, I. M., Application of WAF-TVD Scheme For Water Hammer Equations., ENCIT-2018, 2018, Águas de Lindóia, SP, 2018.

CARVALHO, R. C., Estudo Numérico do Problema do Golpe de Aríete em Tubulações. Projeto Final de Graduação, DEM/EE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2018

CHAPMAN B., JOST G., VAN DER PAS, R., 2008, Using OpenMP Portable Shared Memory Parallel Programming, Massachusetts Institute of Technology.

CHAUDHRY, M.H., Applied Hydraulic Transients, New York, USA, Springer. Third Edition, 2014.

CRANDALL, S. H., DAHL, N. C., LARDNER, T. J., An Introduction to the Mechanics of Solids, McGraw-Hill Science, 2 edition, 1999.

CUI, T., FOX, C., NICHOLLS, G. K., O'SULLIVAN, M. J., 2019, Using Parallel Markov Chain Monte Carlo to Quantify Uncertainties in Geothermal Reservoir Calibration, *International Journal for Uncertainty Quantifications*, vol. 9, pp 295-310.

ELAOU, S., TAIEB, L. H., TAIEB, E.H., Leak detection of hydrogen-natural gas mixtures in pipes using the characteristics method of specified time intervals, *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, pp. 637-645, 2010.

ELBASHIR, M. A. M., AMOAH, S. O. K., Hydraulic Transient in a Pipeline Using Computer Model to Calculate and Simulate Transient, Master Thesis, Lund University, Sweden, 2007.

FOX, R. W., MCDONALD, A. T., LEYLEGIAN, J.C., *Introdução à Mecânica dos Fluidos*, 8ª Ed., LTC, 2014.

GEWEK, J., Evaluating the Accuracy of Sampling-Based Approaches to the Calculation of Posterior Moments, Minneapolis, MN, Federal Reserve Bank of Minneapolis, Research Department, 1992.

GHIDAOU, M. S., KARNEY, B. W., Equivalent Differential Equations in Fixed-Grid Characteristics Method, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 120, 1994.

GHIDAOU, M.S., ZHAO, M., MCINNIS, D. A., AXWORTHY, D. H., A Review of Water Hammer Theory and Practice, *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 58, pp.49-76, 2005.

GUINOT, V., Riemann Solvers for Water Hammer Simulations by Guderony Method, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 49, pp. 851-870, 2000

HWANG, Y., Development of a Characteristic Particle Method for Water Hammer Simulation, *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 139, pp. 1175-1192, 2013.

JENSEN, R.K., LARSEN, J.K., LASSEN, K.L., MANDØ, M., ANDREASEN, A., 2018, Implementation and Validation of a Free Open Source 1D Water Hammer Code, *Fluids*, v. 3, n. 64, 2019.

JIANG, D., REN, C., ZHAO, T., CAO, W., Pressure Transient Model of Water-Hydraulic Pipelines with Cavitation, *Applied Sciences*, v. 8, n. 388, pp. 1-14, 2018.

KAIPIO, J. P., SOMERSALO, E., Computation and Statistical Methods for Inverse Problems, Springer, Berlin, 2004.

KAIPIO, J.P., FOX, C., The Bayesian Framework for Inverse Problem in Heat Transfer, Heat Transfer Engineering 32(9), pp. 718-753, 2011.

LANEY, C. B., Computational Gasdynamics, Cambridge, Cambridge University Press, 1998.

LOMBARDI, J.C., Análise de distribuição de pressão em válvulas de diafragma poroso, 125 p., Tese (Doutorado Engenharia Mecânica), INPE, São José dos Campos, 2005.

LUCUMI, M. A.R. Comparação dos Algoritmos de Filtros de Partículas SIR e ASIR na Detecção de Fechamento de Válvulas em Gasodutos. 96 p. Tese (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Instituto COPPE de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

LÜDECKE, H. J., KOTHE, B., KSB Know-how Water Hammer, Volume 1, KSB, 2006.

MADEIRA, I.M. Detecção do fechamento de válvula em gasodutos pela utilização de filtros de partículas. 150 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) – Instituto COPPE de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2011.

MATTOS, E. E., DE FALCO, R., Bombas Industriais, 2ª Ed., Interciência, 1998.

MENDES, L. F. M., Métodos Clássicos de Protecção de Sistemas Elevatórios Contra o Golpe de Aríete, p. 95, Tese (Mestrado Engenharia Ambiental), Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2011.

MONTALVÃO, A.F.F., REIS, R.L., ARAMAKI, T.L., Simulation and Statistical Approach for Pipeline Leak Detection. Rio Pipeline Conference & Exhibition. Rio de Janeiro, 2017.

MURVAY, P., SILEA, I., A survey on gas leak detection and localization techniques, Journal of Loss Prevention in the Process Industries, Vol. 25, pp. 966-973, 2012.

OH, S. E., HONG J. W., 2017, Parallelization of a finite element Fortran code using OpenMP library, *Advances in Engineering Software*, no 104, pp-28-37.

ORLANDE, H. R. B., *Inverse Problems in Heat Transfer: New Trends on Solution Methodologies and Applications*, 14th International Heat Transfer Conference, August 8-13, Washington D.C, USA, 2010.

ORLANDE, H. R. B., *The use of techniques within the Bayesian Framework of Statistics for the Solution of Inverse Problems*, Metti 6 Advanced School, 2015

ORLANDE, H. R. B., LUTAIF, N. A., GONTIJO, J. A. R., Estimation of the kidney metabolic heat generation rate, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, e3224, 2019.

OZISIK, M, ORLANDE, H.R.B., *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, Taylor & Francis, 2000

OZISIK, N., ORLANDE, H. R. B., COLAÇO, M. J., COTTA, R. M., *Finite Difference Methods in Heat Transfer*, 2^a Ed., CRC Press, 2017.

SEPEHRAN, M., NOUDEH, M. A. B., *Water Hammer Simulation by Implicit Finite Difference Scheme Using Non-Symmetrical Staggered Grid*, *Recent Advances in Fluid Mechanics, Heat & Mass Transfer and Biology*, 2006.

STREETER, V. L., WYLIE, E. B., *Mecânica dos Fluidos*, 7^a Ed., Editora McGraw-Hill do Brasil, 1982.

SZYDLOWSKI, M., *Finite Volume Method for Water Hammer Simulation*, I International Scientific and Technical Conference on Technology, Automation and Control of Wastewater and Drinking Water Systems, TiASWiK'02, pp. 159-165, 2002.

SZYMKIEWICZ, R., MITOSEK, M., *Analysis Of Unsteady Pipe Flow Using The Modified Finite Element Method*, *Communications In Numerical Methods In Engineering*, 21:183-199, 2005.

TIJSSELING, A.S., ANDERSON, A., *A Precursor In Waterhammer Analysis: Rediscovering Johannes von Kries*, 9th International Conference on Pressure Surges, pp. 1-15, Chester, United Kingdom, 2004.

TORO, E. F., Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics, 2^a ed. Berlin, Springer, 1997.

TURNER, E. L., HU, H., 2001, A parallel CFD rotor code using OpenMP, Advances in Engineering Software, vol. 32, pp 665-671.

WANG, X., Leakage and Blockage Detection in Pipelines and Pipe Networks Systems Using Fluid Transients, Ph. D. Thesis, University of Adelaide, Australia, 2002.

WANG, C., YANG, J., Water Hammer Simulation Using Explicit-Implicit Coupling Methods, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 141, 2015

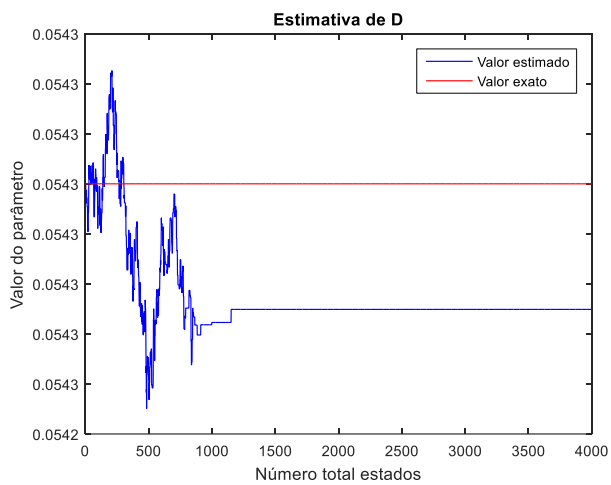
WILIE, E.B. STREETER, V.L., Fluid Transients. 2 ed., USA, McGraw Hill, 1978.

WOOD, D. J., LINGIREDDY, S., BOULOS, P. F., KARNEY, B.W., MCPHERSON, D. L., Numerical Methods For Modeling Transient Flow In Distribution Systems. Journal of American Water Works Association, July 2005, pp. 104-115, 2005.

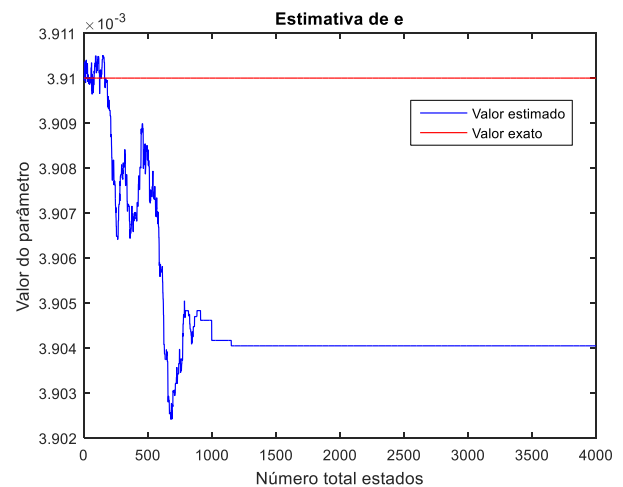
WYLIE, E. B., Frictional effects in unsteady turbulent pipe flows, Applied Mechanics Reviews, Vol. 50, n° 11, pp. 241-244, 1997.

Apêndice A: Resultados para a Estimativas dos Demais Parâmetros do Modelo Matemático

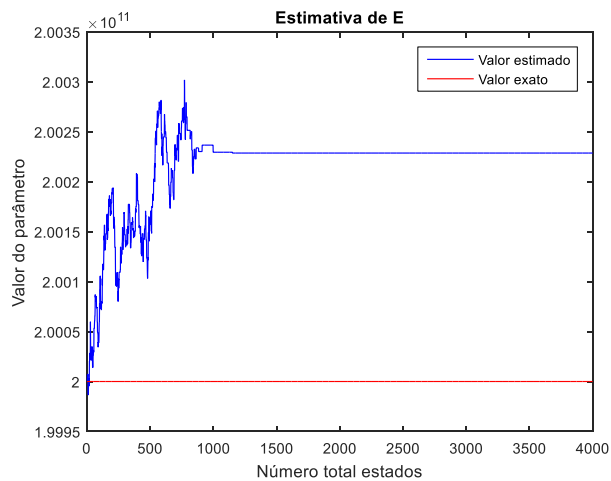
No presente apêndice, são mostradas as estimativas para os demais parâmetros presentes no modelo matemático para o fenômeno do golpe de aríete. Para facilitar o entendimento, será usado a denominação presente na Tabela 6.8 para cada caso analisado. Pela análise gráfica das cadeias, observa-se o mesmo comportamento visto para o fator de atrito transiente e para o parâmetro de ancoragem.



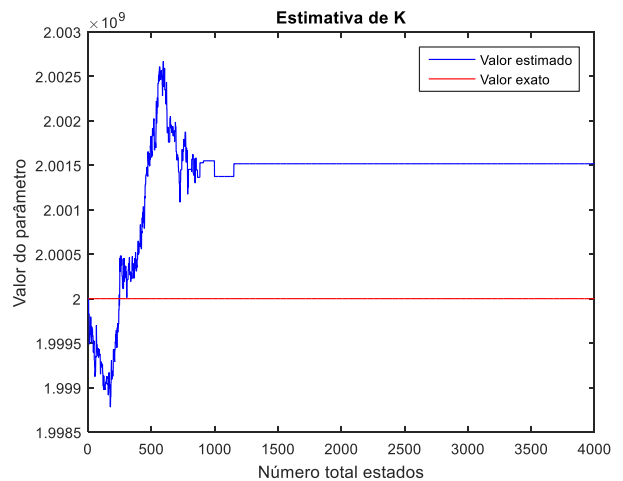
(a)



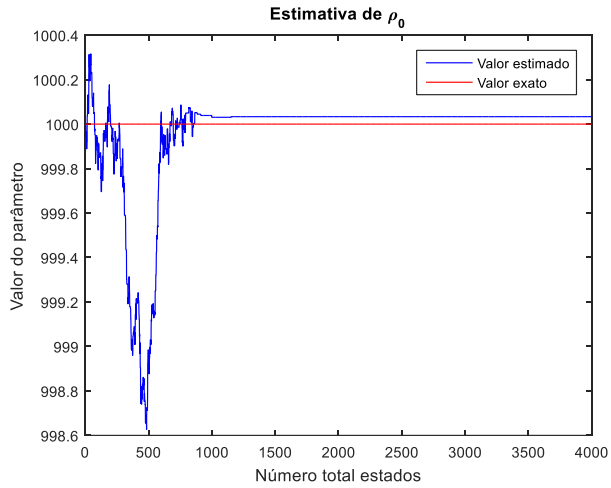
(b)



(c)

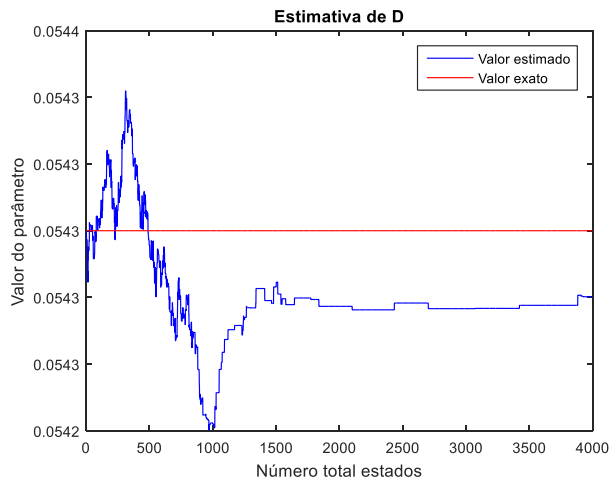


(d)

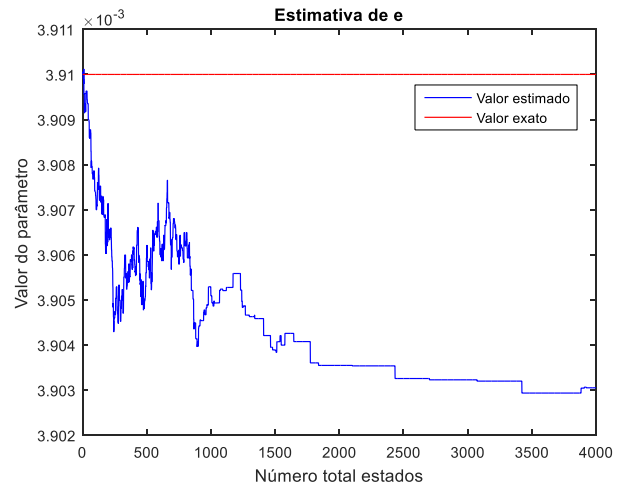


(e)

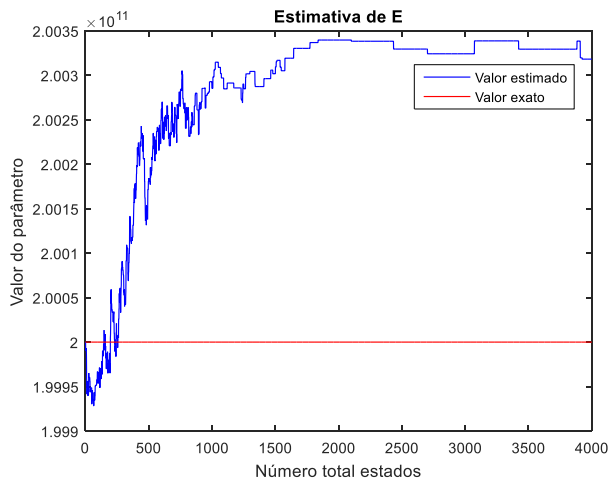
Figura A.1: Estimativas para o diâmetro do duto (a), espessura da parede do duto (b), módulo de elasticidade do aço (c), módulo de elasticidade do líquido (d) e (e) massa específica inicial do líquido para o Caso 1.



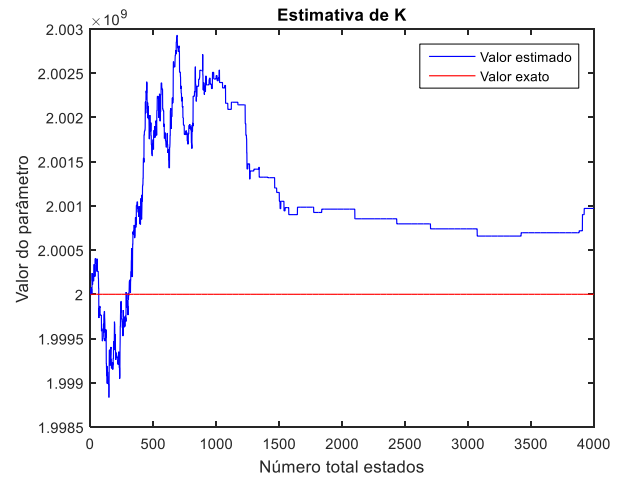
(a)



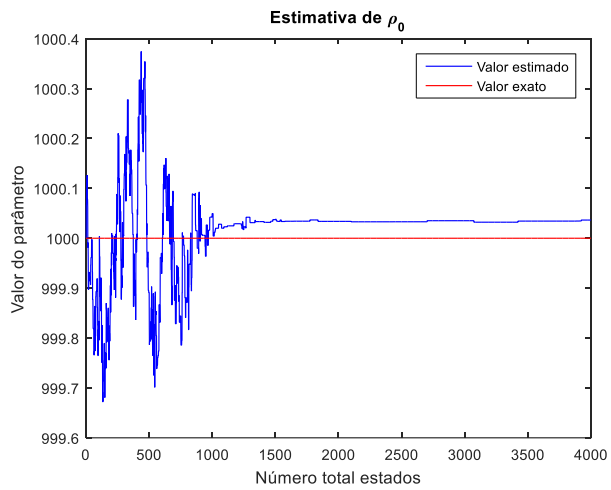
(b)



(c)

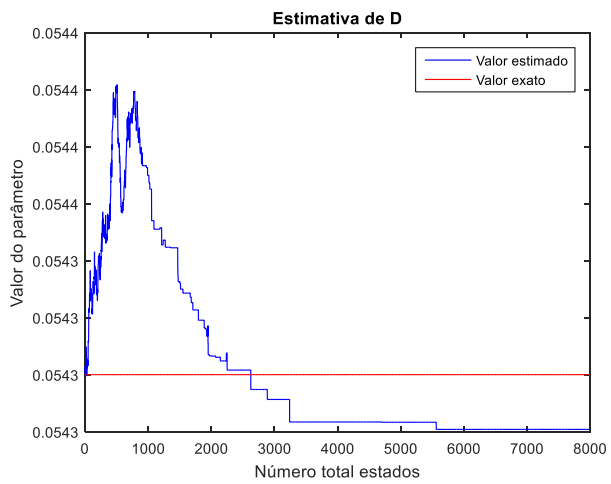


(d)

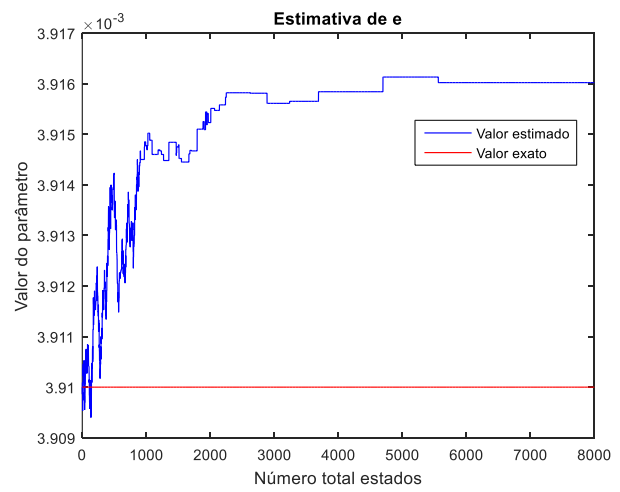


(e)

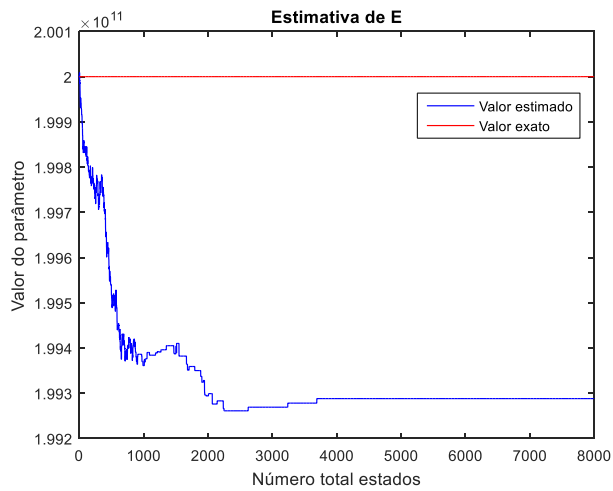
Figura A.2: Estimativas para o diâmetro do duto (a), espessura da parede do duto (b), módulo de elasticidade do aço (c), módulo de elasticidade do líquido (d) e (e) massa específica inicial do líquido para o Caso 2.



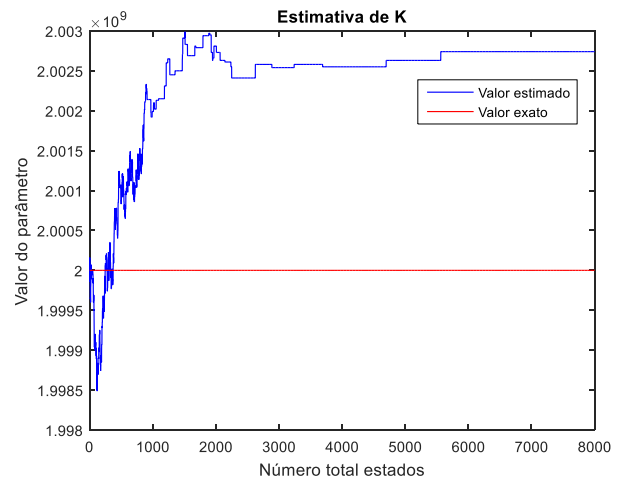
(a)



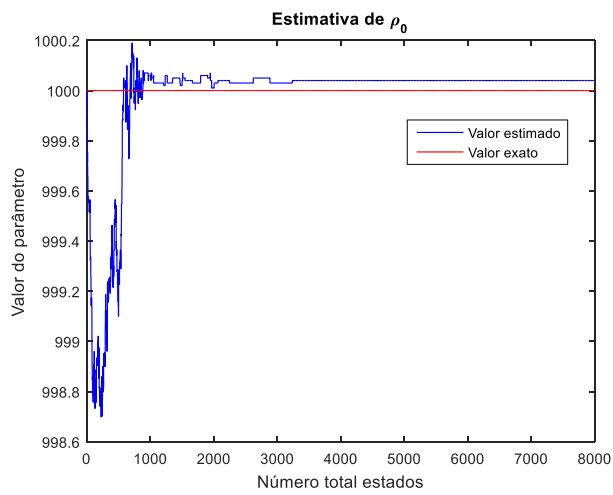
(b)



(c)

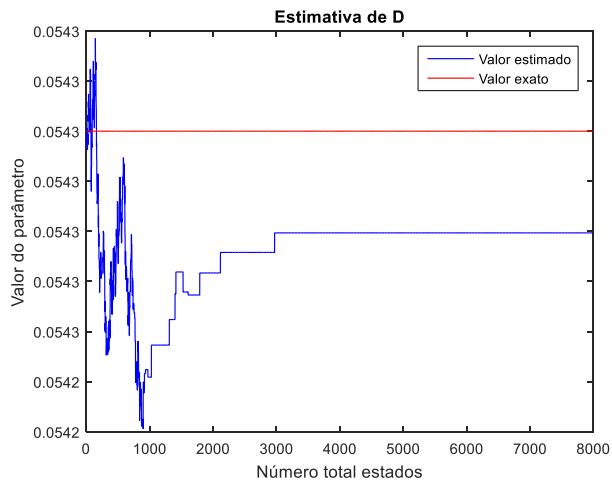


(d)

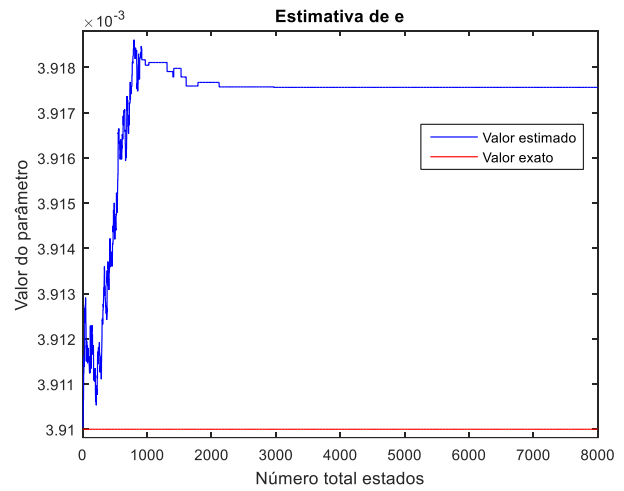


(e)

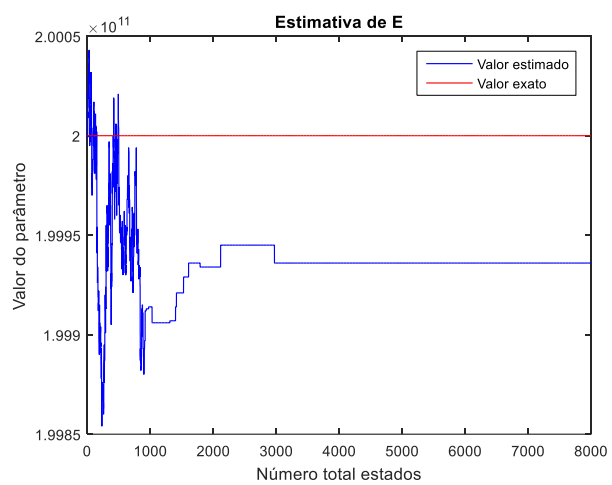
Figura A.3: Estimativas para o diâmetro do duto (a), espessura da parede do duto (b), módulo de elasticidade do aço (c), módulo de elasticidade do líquido (d) e (e) massa específica inicial do líquido para o Caso 3.



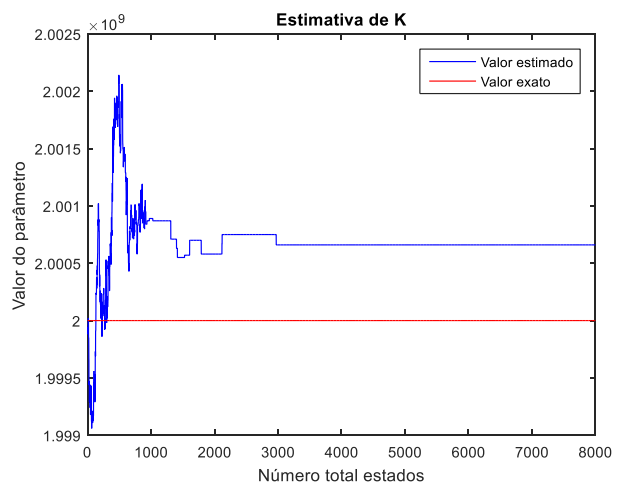
(a)



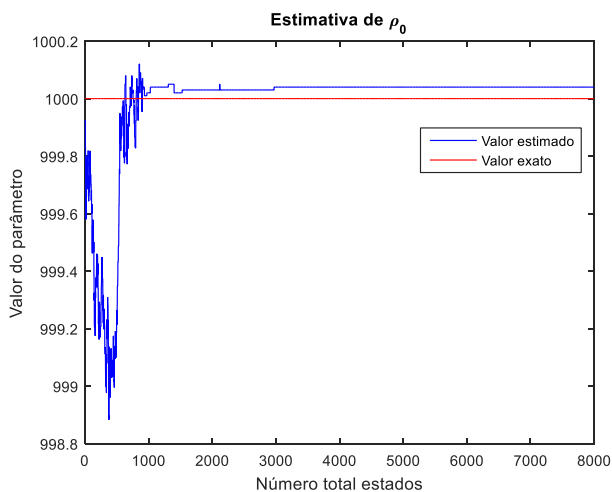
(b)



(c)

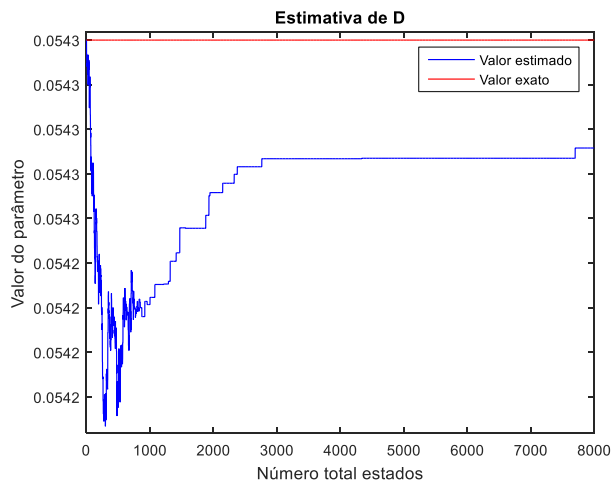


(d)

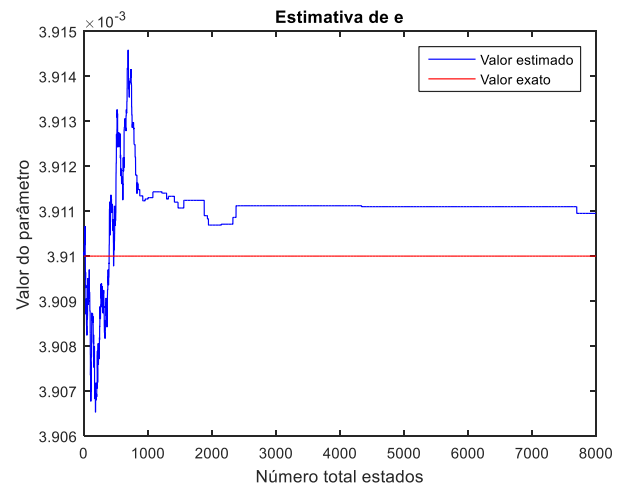


(e)

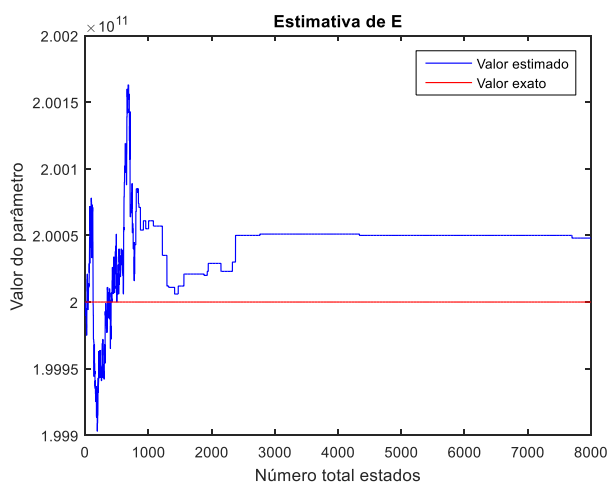
Figura A.4: Estimativas para o diâmetro do duto (a), espessura da parede do duto (b), módulo de elasticidade do aço (c), módulo de elasticidade do líquido (d) e (e) massa específica inicial do líquido para o Caso 4.



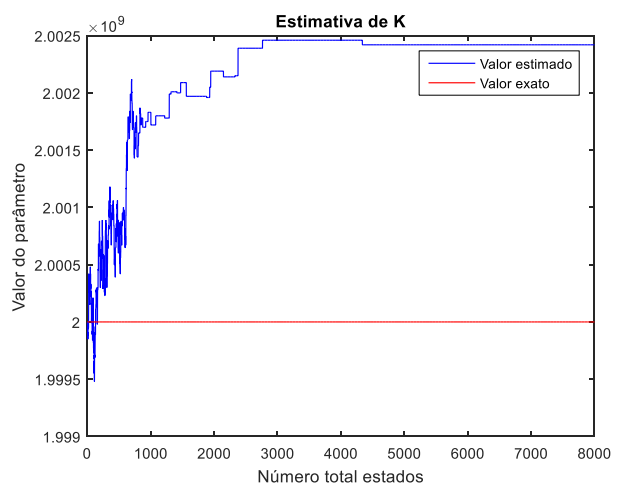
(a)



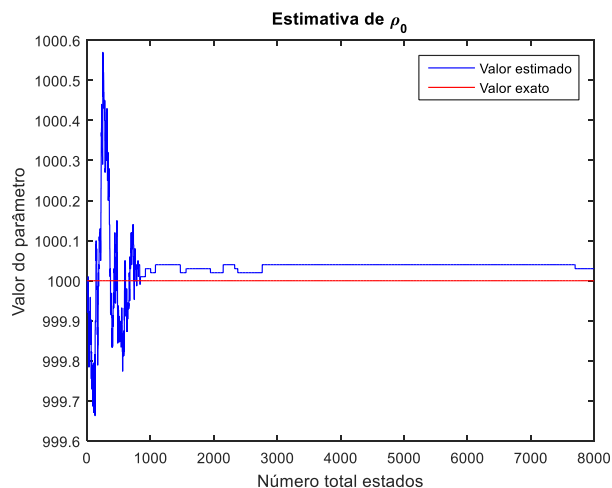
(b)



(c)

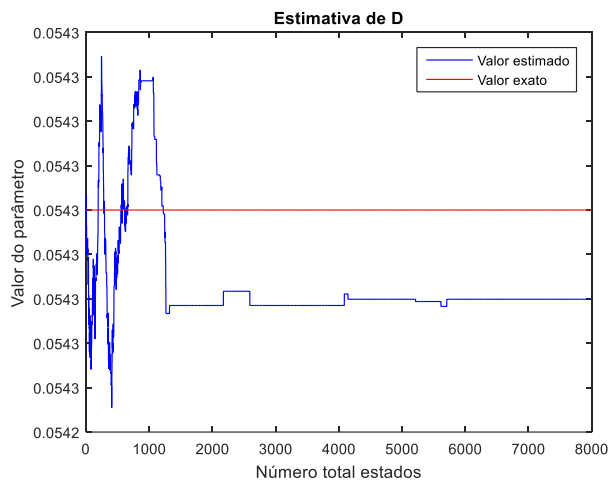


(d)

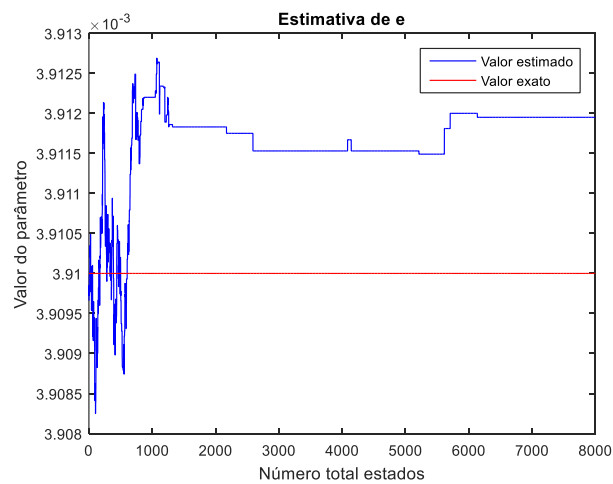


(e)

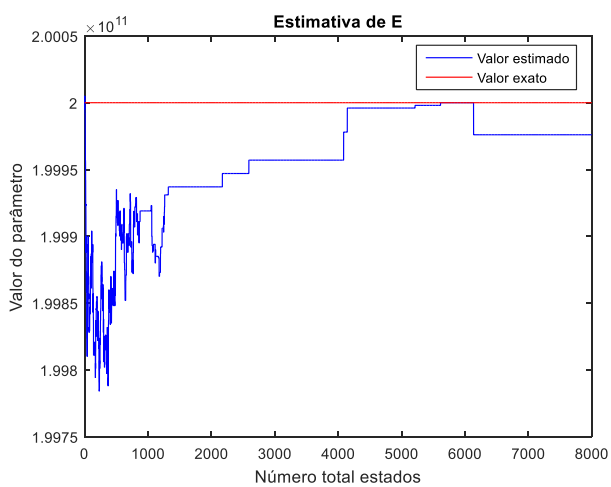
Figura A.5: Estimativas para o diâmetro do duto (a), espessura da parede do duto (b), módulo de elasticidade do aço (c), módulo de elasticidade do líquido (d) e (e) massa específica inicial do líquido para o Caso 5.



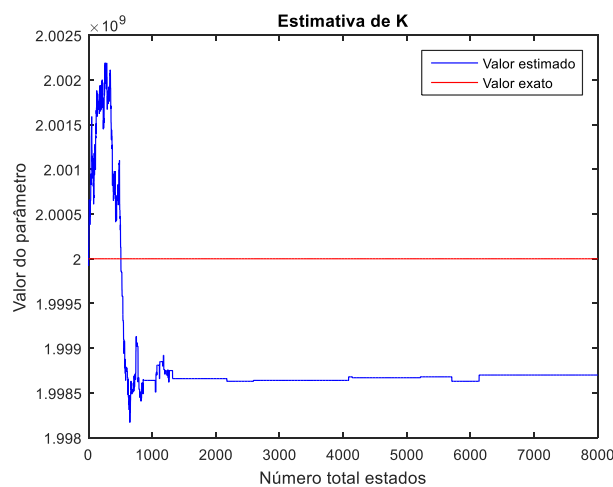
(a)



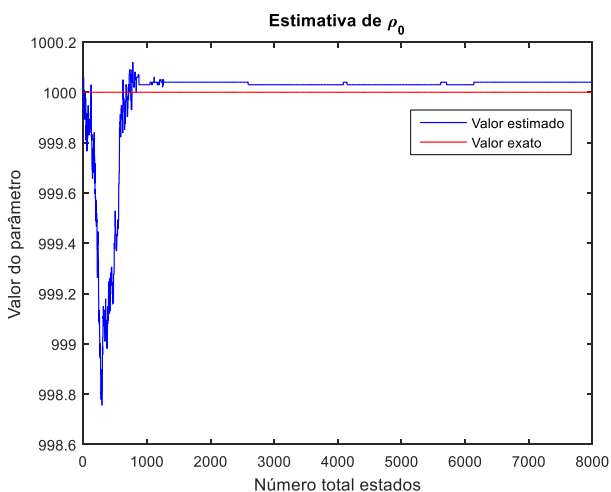
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura A.6: Estimativas para o diâmetro do duto (a), espessura da parede do duto (b), módulo de elasticidade do aço (c), módulo de elasticidade do líquido (d) e (e) massa específica inicial do líquido para o Caso 6.