

ESCREVENDO O “LIVRO DA NATUREZA” NA
LINGUAGEM DA MATEMÁTICA
(A LEI DE AMPÈRE)

Vitor Hugo Alves Dias

Monografia apresentada para obtenção do diploma de Licenciatura
Instituto de Física
Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro

Banca Examinadora:

Professora Penha Maria Cardozo Dias (orientadora)
Professora Teresinha J. Stuchi
Professor Antonio Carlos Fontes dos Santos
Professor Carlos Renato de Carvalho

Dezembro/2015

Agradecimentos

- Primeiramente Deus, fonte de toda a inspiração e razão da minha vida.
- Aos meus Pais, Juvenil e Maura, que me apoiaram desde o início do curso até a sua conclusão. Agradeço especialmente ao meu Pai, pois apesar de algumas dificuldades que ele passou, ele me ajudou e com isso obtive a vitória.
- Aos meus Pastores da Igreja a qual eu sirvo, por suas palavras de incentivo e encorajamento na minha vida.
- À minha linda esposa Jaqueline pelo amor, força e apoio nos momentos difíceis e agora no momento de minha defesa também agradeço à minha filha Hadassa que nasceu e que tem me dado mais força ainda.
- À minha orientadora Penha Maria Cardozo Dias pela oportunidade de aprender com ela, pelo encorajamento durante o curso de Licenciatura em Física, pelos elogios e paciência no momento em que estava em trabalho de campo e passei um bom tempo sem terminar a Monografia do curso.
- Aos meus amigos durante a graduação Cláudio Bessa e Raphael Carvalho, pela grande cooperação durante o curso de Física.
- Aos professores do Instituto de Física da UFRJ, especialmente Marcos Pedra, Miguel Gregório, Adir Moisés, Júlio Maria Neto, Vitorvani pelo grande acréscimo de conhecimento no curso de Licenciatura em Física.
- Ao Ricardo José Soares, da Oficina, pelo companheirismo e grande ajuda de ferramentas e acessórios no experimento realizado na Monografia.
- Ao João Paulo Martins de Castro Chaib por ceder sua tese de doutorado que contribuiu muito para o desenvolvimento do meu trabalho.
- Ao André Koch Torres Assis por enviar a tese de doutorado de seu aluno João Paulo Martins de Castro Chaib com bastante rapidez e pelas suas publicações na Revista Brasileira de Ensino de Física que foram bastante relevantes para meu trabalho.

Conteúdo

1	Introdução	4
2	A descoberta de Ampère	6
2.1	O problema de Ampère	6
2.2	A explicação de Ampère (descoberta de uma nova lei)	8
3	Os quatro casos de equilíbrio	12
3.1	Primeiro caso de equilíbrio	12
3.2	Segundo caso de equilíbrio	14
3.3	Terceiro caso de equilíbrio	16
3.4	Quarto caso de equilíbrio	17
4	A expressão matemática da nova lei	19
4.1	Determinação da variáveis envolvidas na lei	19
4.1.1	Valor de ρ em uma situação simples	21
4.2	Determinação das componente dos elementos de circuitos que interagem entre si	21
4.2.1	Teorema: A influência mútua dos elementos de correntes é somente entre elementos paralelos	21
4.2.2	As várias componentes dos elementos de circuitos	22
4.2.3	As componentes de circuitos infinitesimais que interagem	23
4.3	A Força entre os circuitos	23
4.4	As componentes cartesianas da força	23
4.5	A dependência da distância ($n = 2$)	25
4.6	A direção da força após integração	25
5	Conclusão	27
6	Material Instrucional	28
6.1	As componentes vetoriais da força	28
6.2	A descoberta da interação ente correntes	28
6.2.1	Procedimento de Montagem	28
A	Os cálculos intermediários	34
A.1	Re-escrevendo (4)	34
A.2	Demonstração de (9)	34
A.2.1	Demonstração de $1 - n - 2k = 0$	35

A.3 Demonstração de (11) a (16) 36

Capítulo 1

Introdução

A lei de Ampère do Eletromagnetismo é, em geral, apresentada de modo bem simplificado, nos livros de Ensino Médio. Por exemplo, em um livro muito utilizado no Ensino Médio ([1], p.316), a lei de Ampère é apresentada do seguinte modo:

Sua definição diz que a circulação do vetor \vec{B} , em um percurso fechado, i , é proporcional à soma algébrica das correntes enlaçadas pelo percurso.

$$C(\vec{B}) = \mu_0 \sum i;$$

μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo.

Analogamente, em ([2], p.396):

A Lei circuital de Ampère afirma: A circulação do vetor \vec{B} ao longo de um percurso fechado é diretamente proporcional à soma algébrica das intensidades de corrente enlaçadas pelo percurso:

$$\sum B_i \cdot \Delta l_i \cdot \cos\theta_i = \mu \sum i,$$

μ é a permeabilidade magnética do meio.

Em ([3], p.32 e p.154) Ampère é, inicialmente, citado sem especificar contribuições (p.32):

A unidade SI da intensidade da corrente elétrica é o coulomb/segundo, denominada ampère (em homenagem a André-Marie Ampère, cientista francês do início do século XIX, um dos pioneiros nas pesquisas sobre eletrodinâmica).

e só muitas páginas após (p.154) reconhece que Ampère contribui com a teoria de que a imantação de certas substâncias é devida à orientação de espiras de corrente microscópicas:

a semelhança entre o campo de uma espira de corrente e o campo de um pequeno dipolo magnético levou Ampère a imaginar que o magnetismo natural e a imantação de certas substâncias seria produzido pela orientação de microscópicas espiras de corrente.

O autor não menciona que a interação entre dois fios é consequência direta da relação entre a eletricidade e o magnetismo e que isso foi descoberto por Ampère.

Abordagens simplificadas justificam-se, pois a lei de Ampère é complicada, do ponto de vista matemático, para um aluno iniciante da Licenciatura e, com maior força, para um aluno do Ensino Médio; sua expressão matemática envolve integrais, produtos vetoriais, assuntos

não tratados no Ensino Médio. Um aluno da Licenciatura que seja atento pode perguntar-se como o próprio Ampère foi capaz de chegar a uma matematização tão complicada, partindo de experimentos. Na verdade, foi uma difícil, complicada e inteligentíssima interação entre experimento e capacidade de matematizar. Para que se perceba esta complexidade em notação moderna, a força entre os circuitos da figura é [12]¹:

$$\mathbf{F} = \frac{ii'}{c^2} \oint \oint \frac{d\mathbf{s} \times (d\mathbf{s}' \times \mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3} \quad (1.1)$$

em que c é a velocidade da luz.

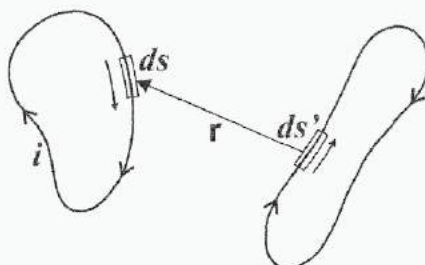


Figura 1.1: **Lei de Ampère.** A figura mostra dois circuitos. As correntes são respectivamente i e i' ; os elementos de circuito são respectivamente $d\mathbf{s}$ e $d\mathbf{s}'$; \mathbf{r} liga os centros dos circuitos elementares, isto é, $\mathbf{r} = \mathbf{s} - \mathbf{s}'$, em que \mathbf{s} e \mathbf{s}' são as posições dos centros, respectivamente.

O trabalho de Ampère pode ser dividido em duas partes: A descoberta do efeito e o estabelecimento de sua expressão matemática. O objetivo desta monografia é apresentar esses dois aspectos do trabalho de Ampère, que possam servir de motivação ao aluno da Licenciatura. No capítulo 2, é apresentado como Ampère descobriu o fenômeno; esse capítulo segue de perto a análise de M.P. Souza Filho *et alii* ([4], p.605). O capítulo 4 reproduz o processo do estabelecimento da expressão matemática da lei; no capítulo 3, são apresentados experimentos preliminares feitos por Ampère para estabelecer alguns fatos sobre a direção da força em um elemento infinitesimal de corrente, antes de partir para a matematização da lei.

A motivação inicial do trabalho seria fazer uma animação computadorizada dos experimentos que possibilitaram a Ampère estabelecer a expressão da força. Nessa animação, o estudante poderia observar direções das correntes, o afastamento ou a aproximação dos fios, etc., e percorrer o caminho de Ampère. Embora a expressão geral seja complicada para o Ensino Médio, muito poderia ser feito quanto a mostrar como a força age e como dos próprios fatos que o estudante está vendo, a História foi escrita. Contudo, o tempo gasto para aprender técnicas de computação gráfica não compensaria o resultado. Reproduzir todas as experiências feitas por Ampère, em sala de aula, mostra-se impraticável pela dificuldade e quantidade dos experimentos. Assim, optou-se pela simples leitura do trabalho de Ampère. Isso já é suficiente por si só, pois o processo seguido por Ampère é uma lição sobre métodos de descoberta científica.

A monografia está planejada para estudante de Licenciatura. Foi introduzido um quarto capítulo com material instrucional, mostrando a direção dos vetores; foi, ainda, refeito um experimento sugerido em ([4], p.609). O experimento é equivalente ao experimento original de Ampère, quando observou o efeito, é de fácil elaboração e usa “material caseiro”.

¹No sistema CGS.

Capítulo 2

A descoberta de Ampère

2.1 O problema de Ampère

Desde o século XVIII, já havia sido constatada uma relação entre Eletricidade e Magnetismo. Era conhecido que raios elétricos liberados durante tempestades afetavam a polaridade de bússolas, a ponto de ocorrerem reversões magnéticas completas, ou seja, o pólo norte da bússola se tornava o pólo sul e vice-versa. Segundo R. A. Martins ([5], pg.95), Hans Christian Oersted (1777-1851) realizou várias experiências para tentar estabelecer essa relação. Entretanto, naquela época a importância dos trabalhos de Oersted não foi muito entendida, devido a ter sido uma descoberta casual e que os aspectos quantitativos do fenômeno não foram descobertos por ele.

A eletricidade era entendida como um fluido que permeava o espaço e os corpos. Físicos se dividiam entre duas concepções. A primeira era a de que existiam dois fluidos, um correspondendo à eletricidade positiva e o outro, à negativa. Na segunda, existia um único fluido; a deficiência de fluido correspondia à eletricidade negativa e o excesso de fluido, à eletricidade positiva. Segundo ([5], pg.96), Oersted acreditava na existência de dois fluidos elétricos. Essas cargas se encontrariam e separariam continuamente, caracterizando o que Oersted chamou de (*apud* Martins) “conflito elétrico” ([5], p.96):

por um tipo de contínua decomposição e recomposição, ou melhor, por uma ação que perturba o equilíbrio em cada momento, e o restabelece no instante seguinte. Pode-se exprimir essa sucessão de forças opostas que existe na transmissão da Eletricidade, dizendo que a Eletricidade sempre se propaga de modo Ondulatório”.

Em 1820, Hans Christian Oersted observou que um longo fio, próximo a uma bússola, alterava a orientação da agulha da bússola (que é naturalmente ao longo do meridiano terrestre local), sempre que uma corrente atravessava o fio (figura 1.1): Quando a bússola era colocada acima do fio, a agulha se desviava para leste; e para oeste, se colocada abaixo. Esse era um novo fenômeno a ser explicado.

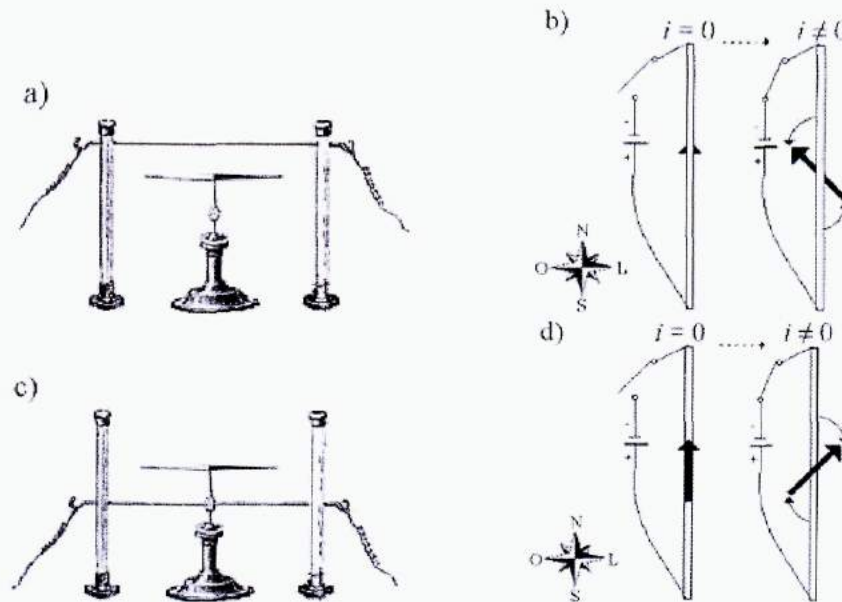


Figura 2.1: **Experiência de Oersted.** Deflexão da agulha imantada de uma bússola em relação ao meridiano magnético pela passagem de uma corrente elétrica em um longo fio retilíneo colocado de forma paralela à agulha imantada. Em (a) a agulha está abaixo do fio e se desvia como em (b). Em (c), está abaixo e se desvia como em (d).

Para explicar suas observações, supôs que o “conflito elétrico” não ficasse restrito ao interior do fio, existindo, também, no espaço ao redor do fio. Como a agulha se inclinava em relação ao meridiano magnético, quando havia corrente no fio, Oersted supôs que o “conflito elétrico” no exterior do fio seguisse trajetórias helicoidais. Além do mais, ele afirmou que o “conflito elétrico” interagiria com os pólos de um ímã, empurrando-os ao longo do fluxo do “conflito elétrico” no exterior do fio.

Jean-Baptiste Biot e Félix Savart interpretaram a experiência de Oersted como significando que um fio onde houvesse passagem de corrente fosse um fio imantado, capaz de interagir com outros ímãs ([6]). Eles nunca chegaram a encontrar uma distribuição apropriada de pólos magnéticos ao longo da seção reta do fio com corrente que conseguisse reproduzir fielmente a orientação espacial da agulha da bússola em relação ao fio. Passaram, então, a explicar o fenômeno em termos de forças exercidas por cada elemento de corrente do fio sobre os pólos magnéticos da agulha da bússola ([6]). Essas forças não seriam mais de atração e repulsão ao longo da reta que une um elemento da corrente a um pólo magnético, mas seriam perpendiculares ao plano formado pela direção do elemento de corrente e pela reta unindo o elemento de corrente ao pólo magnético. Depois de terem obtido que a força exercida por um longo fio retilíneo sobre um pólo magnético é inversamente proporcional à distância entre eles, tentaram obter a força exercida por um elemento de corrente sobre um pólo magnético. A lei que expressa a suposta força exercida por cada elemento de corrente sobre um pólo magnético de um de um ímã foi expressa nas seguintes palavras por Biot (*apud* ([6]), p.90):

Assim, quando um fio conjuntivo indefinido, animado pela corrente voltaica, age sobre um elemento de magnetismo austral ou boreal, situado a uma certa distância FA ou FB de seu centro, a resultante das ações que ele exerce é perpendicular à distância mais curta da molécula ao fio.

Logo, a lei, assim interpretada, significa que a ação total do fio conjuntivo sobre um elemento magnético qualquer, seja austral ou seja boreal, é inversamente proporcional à distância retilínea deste elemento ao fio. A ação de um fio conjuntivo e retilíneo sobre um elemento magnético, tal como acabamos de obter pelas experiências precedentes, é apenas um resultado composto; pois, ao dividir em pensamento todo o comprimento do fio em uma infinidade de pedaços de um comprimento muito pequeno, vê-se que cada pedaço deve agir sobre a agulha com uma energia diferente, de acordo com a distância e de acordo com a direção segundo a qual sua ação é exercida. Ora, essas forças elementares são precisamente o resultado simples que é sobretudo importante de conhecer, pois a força total exercida pelo fio é apenas a soma aritmética de seus efeitos. Mas basta usar o cálculo para ir desta resultante à ação simples: é o que fez o Sr. Laplace. Ele deduziu matematicamente de nossas observações a lei de força exercida individualmente por cada pedaço do fio sobre cada molécula magnética que apresentamos a ele. Essa força está dirigida, como a ação total, perpendicularmente ao plano obtido pelo elemento longitudinal do fio, e pela distância mais curta desse elemento até a molécula magnética solicitada. Sua intensidade, como nas outras ações magnéticas, é inversamente proporcional ao quadrado dessa mesma distância.

Para determinar a dependência do ângulo entre o elemento de corrente e a reta que o liga à molécula magnética. Biot e Savart realizaram uma nova experiência com um longo fio oblíquo na forma do sinal $>$, situado em um plano vertical, atuando sobre uma agulha magnética; denotam por i o ângulo formado entre o ramo inferior do fio e a horizontal ([6], p.90). Biot afirma (*apud* [6], p.90):

Encontrei, assim, que, tanto para o fio oblíquo quanto para o fio retilíneo, a ação era inversamente proporcional à distância, mas a intensidade absoluta era mais fraca para o fio oblíquo do que para o fio reto, na proporção do ângulo ZMH (do fio oblíquo) em relação à unidade. Esse resultado, analisado pelo cálculo, me pareceu indicar que a ação de cada elemento i do fio oblíquo sobre cada molécula, m , de magnetismo austral ou boreal é inversamente proporcional ao quadrado de sua distância im até a molécula e proporcional ao seno do ângulo miM , formado pela distância im com o comprimento do fio.

2.2 A explicação de Ampère (descoberta de uma nova lei)

Ampère não segue o ponto de vista sugerido por Oersted de que “alguma coisa” gira ao redor do fio, quando uma corrente passa por ele (seja essa “alguma coisa” o “conflito elétrico”, como definido por Oersted, ou o “campo magnético” de hoje). Ele segue uma idéia antiga que explica interações em termos de pares de força de ação e reação entre partículas; no caso, entre entre o fio e o ímã. Diferentemente de Biot, supõe a existência de correntes elétricas no interior da agulha magnetizada; assim, a experiência de Oersted é explicada por uma interação direta entre a corrente no fio e correntes elétricas na agulha imantada. Ele pode ter sido motivado ao perceber uma analogia entre a orientação das bússolas devido ao magnetismo terrestre e a observação de Oersted de que um fio com corrente pode alterar essa orientação ([4], p.607); assim, a orientação magnética terrestre poderia ser devida a correntes elétricas na Terra (*apud* [4], p.607):

A primeira reflexão que fiz, quando desejei procurar as causas dos novos fenômenos descobertos pelo Sr. Oersted, foi que a ordem pela qual se descobrem dois fatos não interfere em quaisquer conclusões a que se possa chegar a partir das analogias que eles apresentam. Podíamos supor que, antes de saber que a agulha imantada assume uma direção constante do sul ao norte — (devido

à presença do magnetismo terrestre) — tivéssemos conhecido, inicialmente, a propriedade de que a agulha é girada por uma corrente elétrica (retilínea) em uma situação (em que o eixo desta agulha fica) perpendicular a essa corrente, de modo que o pólo austral da agulha fosse levado à esquerda da corrente; e que se descobrisse, posteriormente, a propriedade que [a agulha] tem de girar constantemente em direção ao norte (geográfico terrestre, devido ao magnetismo terrestre) a extremidade que era levada para o lado esquerdo da corrente. [Se essa fosse a seqüência histórica das descobertas], não seria a idéia mais simples, que se apresentaria imediatamente a quem quisesse explicar a direção constante do sul ao norte, supor, na Terra, [a existência de] uma corrente elétrica, [fluindo] em uma direção tal que o norte [geográfico terrestre] se encontrasse à esquerda de um homem que, deitado sobre a superfície da Terra de modo a ter a face voltada para a agulha, recebesse essa corrente indo na direção dos seus pés a sua cabeça, concluindo disto que [a corrente terrestre] ocorre de leste para oeste, em uma direção perpendicular ao meridiano o magnético?

Ampère faz uma analogia entre a terra e um ímã cilíndrico (*apud* [4], p.607):

Agora, se as correntes elétricas são a causa da ação diretriz da Terra, as correntes elétricas serão, também, a causa da ação diretriz de um ímã sobre um outro ímã. Segue-se que um ímã deve ser considerado como um conjunto de correntes elétricas que ocorrem no plano perpendicular ao seu eixo, direcionadas de modo que o pólo austral do ímã, que se vira para o norte [geográfico, devido à ação magnética da Terra], encontra-se à direita dessas correntes, dado que ele está sempre à esquerda de uma corrente disposta fora do ímã, e que lhe faz face em uma direção paralela. Ou melhor, essas correntes se estabelecem primeiramente no ímã, seguindo as curvas fechadas mais curtas, seja da esquerda para a direita, seja da direita para a esquerda, e, então, a linha perpendicular aos planos dessas correntes torna-se o eixo do ímã e suas extremidades formam os dois pólos. Assim, em cada um dos pólos de um ímã, as correntes elétricas em que se compõem são dirigidas ao longo de curvas fechadas concêntricas.

Para testar essas idéias, Ampère tentou reproduzir as atrações e repulsões entre pólos magnéticos através de fios conduzindo correntes constantes. Seguindo [4], Ampère realizou o seguinte experimento, em que simula a atração ou repulsão entre dois pólos magnéticos: Enrolou um fio na forma de uma espiral plana; colocou o eixo da espiral alinhado com o eixo norte sul de um ímã em forma de barra; ao passar uma corrente constante no fio, observou uma atração ou uma repulsão entre a espiral e o ímã. A atração tornava-se uma repulsão, quando ele invertia o pólo do ímã que estava mais próximo da espiral ou quando invertia a direção da corrente elétrica que fluía através da espiral. A interpretação termina ([4], p.607):

A diferença principal dessa experiência em relação à experiência de Oersted é que Ampère observou atrações e repulsões entre a espiral e o ímã, enquanto que Oersted observou uma deflexão lateral da agulha imantada, devido a um torque exercido pelo fio com corrente.

A seguir, Ampère substituiu o ímã em forma de barra por uma segunda espiral (figura 2.2).

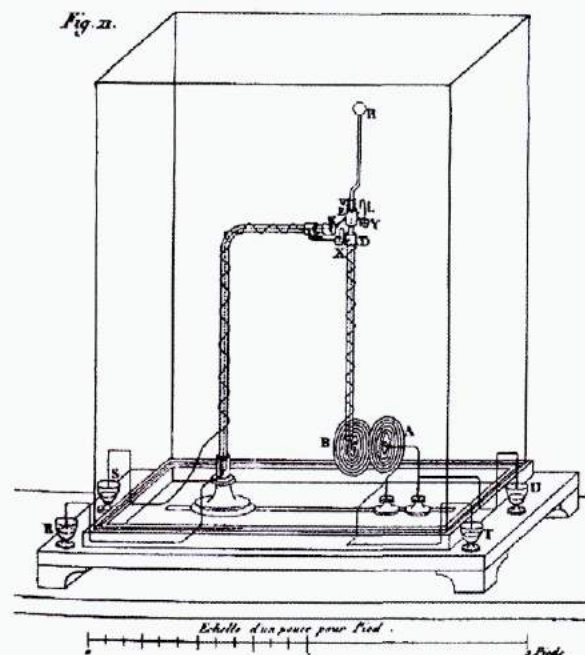


Figura 2.2: **Experiência original de Ampère.** A figura mostra a montagem do experimento da interação entre dois condutores conduzindo correntes constantes (retirada de [9], p.609).

Segundo [4], embora Ampère não tenha justificado por que o fez, isso “não parece ter sido fruto do acaso”. Ampère estaria dando continuidade à verificação experimental de sua hipótese que todos os efeitos magnéticos são devidos a correntes no interior dos ímã. Deveria, pois, ser possível reproduzir atrações e repulsões entre ímã trabalhando apenas com condutores conduzindo correntes constantes. Obviamente, o experimento com duas espirais corroborou essa hipótese ([4], p.608):

Com isto, observou, pela primeira vez na história, uma interação direta entre dois condutores conduzindo correntes constantes. Neste caso tinha duas espirais em planos paralelos com seus eixos colineares. Observou a atração ou repulsão entre elas, dependendo do sentido das correntes. A atração podia ser convertida em uma repulsão ao inverter a direção de uma das duas correntes. Caso invertesse a direção das duas correntes, a atração continuava a existir.

Nas palavras do próprio Ampère (*apud* ([4], p.608):

Imitei esta disposição tanto quanto possível, com uma corrente elétrica, curvando o fio condutor em espiral. Esta espiral era formada com um fio de latão e terminada por duas porções retilíneas deste mesmo fio, que eram envolvidas dentro de dois tubos de vidro para que não entrassem em contato entre elas, e pudessem ser unidas às duas extremidades da pilha [este tipo de experiência é o método zero chamado de *balança de Ampère*].

De acordo com o sentido no qual se faz passar a corrente em tal espiral, ela é fortemente atraída ou repelida pelo pólo de um ímã que é colocado [diante da espiral], de modo que a direção do seu eixo seja perpendicular ao plano da espiral, conforme as correntes elétricas da espiral e do pólo

do ímã estejam no mesmo sentido ou em sentido contrário. Substituindo o ímã por outra espiral, cuja corrente esteja no mesmo sentido que o [do ímã], tem-se as mesmas atrações e repulsões. Foi assim que descobri que duas correntes elétricas se atraíam, quando fluíam no mesmo sentido e se repeliam, no caso contrário.

Segundo os autores [4] esse texto “[...] indica o caminho seguido por Ampère e o fato de sua descoberta da atração e repulsão entre condutores retilíneos ter vindo depois da observação da atração e repulsão entre espirais, inspirada por este último fato”. Para argumentar que o resultado do experimento não era uma consequência direta da observação de Oersted, como alegado por alguns, Ampère apresenta um contra-exemplo (*apud* [4], p.608):

Quando o Sr. Oersted descobriu a ação que o fio condutor exerce sobre um ímã, devia-se, na verdade, ser levado a supor que poderia haver uma ação mútua entre dois fios condutores. Porém, esta não seria uma consequência necessária da descoberta deste célebre físico, já que uma barra de ferro doce age, também, sobre uma agulha imantada e, contudo, não existe qualquer ação mútua entre duas barras de ferro doce. Enquanto que, se se conhecesse somente o fato da deflexão da agulha imantada pelo fio condutor, não se poderia supor que a corrente elétrica somente comunicava a este fio a propriedade de ser influenciado pela agulha, de uma maneira análoga à maneira em que o ferro doce é (influenciado) por esta mesma agulha — o que seria suficiente para que ele agisse sobre ela — sem que, para isso, resultasse alguma ação entre dois fios condutores, quando eles se encontrassem fora de influência de qualquer corpo imantado? Somente a experiência podia decidir esta questão. Realizei-a no mês de setembro de 1820 e foi demonstrada a ação mútua entre os condutores voltaicos.

Fenômenos observados em que há torque ou força entre ímãs e condutores são explicados pela atração e repulsão entre elementos decorrente ao longo da reta que os une. Isso vai ser importante nos experimentos que levam à expressão da força. Finalmente, para caracterizar os fenômenos de interação direta entre correntes elétricas, sem que haja necessariamente a presença de ímãs, Ampère criou a expressão “eletrodinâmica” (*apud* [4], p.608):

O nome de eletro-magnético, dado aos fenômenos produzidos pelos fios condutores da pilha de Volta, só podia designar convenientemente estes fenômenos na época em que apenas se conheciam entre estes fenômenos aqueles que o Sr. Oersted descobriu entre uma corrente elétrica e um ímã. Creio que devo empregar a denominação eletro-dinâmico, para reunir em um nome comum todos esses fenômenos e, especialmente, para designar os fenômenos que observei entre dois condutores voltaicos. Ela exprime a característica própria destes fenômenos, a saber, de serem produzidos pela eletricidade em movimento; enquanto que as atrações e repulsões elétricas conhecidas há muito tempo são os fenômenos eletrostáticos produzidos pela distribuição desigual da eletricidade em repouso nos corpos onde se observam estes fenômenos.

Capítulo 3

Os quatro casos de equilíbrio

Esses são experimentos, nos quais nada acontece ([7], p.185-199). Por nada acontecer, as forças envolvidas estão em equilíbrio e é possível tirar inferência sobre a direção das forças ou sobre a ação das correntes, como se verá em cada caso.

3.1 Primeiro caso de equilíbrio

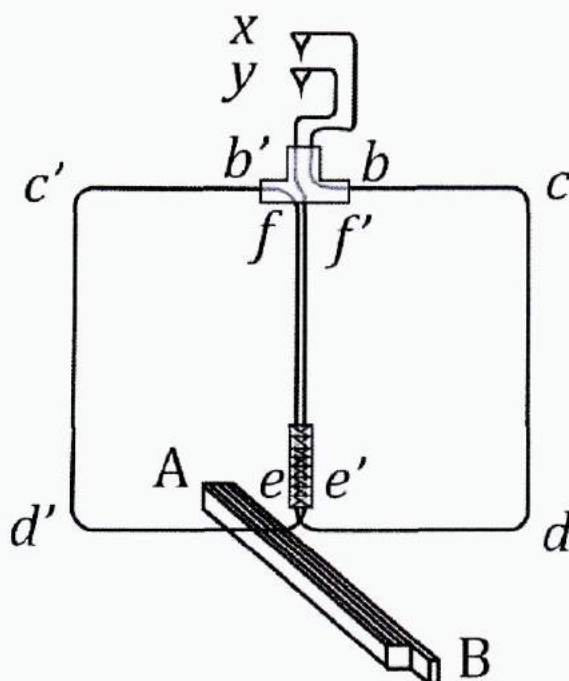


Figura 3.1: **Experimento 1.** Os circuitos $bced$, e $b'c'd'e'$ podem girar em torno do eixo vertical pivotado em bb' . O condutor AB é dobrado várias vezes e as correntes nele causam a rotação do circuito móvel.

Objetivo

Mostrar que correntes iguais e opostas produzem forças iguais e opostas e que o efeito de uma corrente muda de sinal, quando a corrente muda de sinal ([8], pg.187).

Descrição

Qualquer que seja o ângulo formado pelo plano do circuito móvel com o condutor AB , o circuito fica imóvel, Significa que as forças de AB sobre $bcde$ e $b'c'd'e'$ exercem torques que se cancelam mutuamente.

Explicação moderna

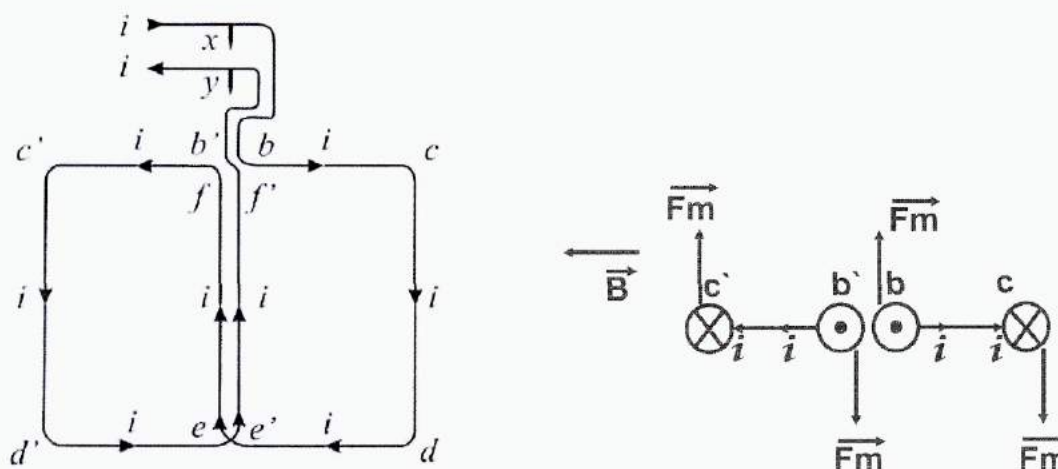


Figura 3.2: **Correntes e forças.** Esquerda: Em $bcde$, a corrente é horária e em $b'c'd'e'$, anti-horária. Direita: O experimento, visto verticalmente para baixo; estão mostrados as direções da força nos circuitos (\vec{F}), as correntes; a indução (\vec{B}). (retirada de [9], p.91)

De acordo com o diagrama de forças apresentado, o circuito AB gera uma indução (\vec{B}) no plano dos circuitos, quando no estado de equilíbrio.

No caso em que \vec{B} for o campo magnético terrestre e AB as correntes terrestres que o geram, é possível orientar o aparato, de modo que o plano dos circuitos fique paralelo ao meridiano terrestre, eliminando o efeito do magnetismo terrestre. Então, o experimento tem um “efeito colateral”, de eliminar a ação do magnetismo terrestre.

3.2 Segundo caso de equilíbrio

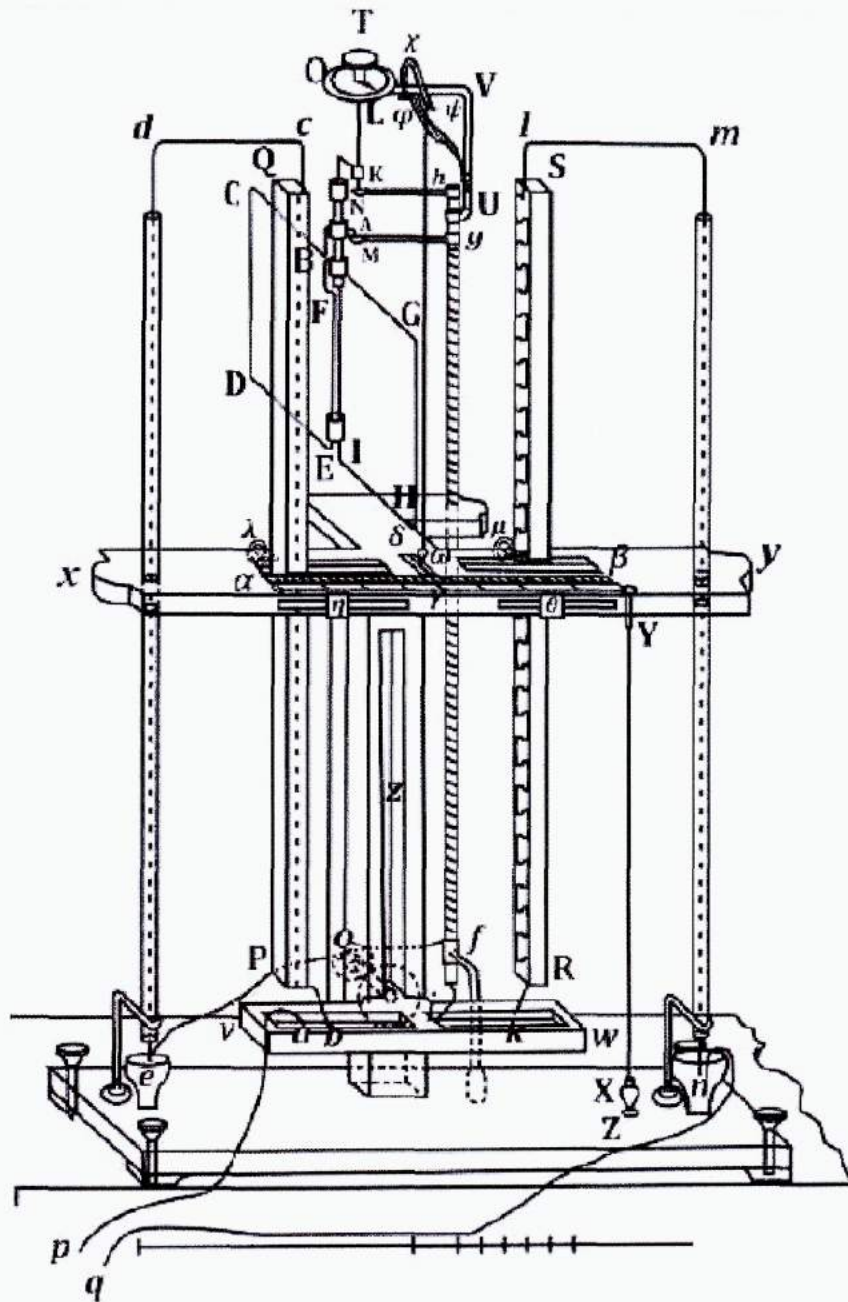


Figura 3.3: Experimento 2. As linhas $pabcdefgMABDEFGHIKNhiklmnq$ formam um circuito. PQ e RS são condutores fixos; GH é móvel e está no meio do intervalo entre os dois condutores fixos. (retirada de [9], pg.94)

Objetivo

Mostrar que a ação exercida por um condutor sinuoso é igual à ação exercida por um condutor retilíneo. Significa que correntes opostas e iguais no condutor sinuoso causam efeitos que se cancelam ([8], pg.188).

Descrição

A corrente percorre todos os condutores do dispositivo, de modo que a corrente nos dois condutores fixos tenham o mesmo sentido (seja descendente), contrário ao sentido em GH (seja ascendente). Como a ação dos dois condutores é a mesma a distância iguais, GH é repelida tanto por bc quanto por kl ; e GH deve ficar imóvel no meio do intervalo que os separa.

Explicação moderna

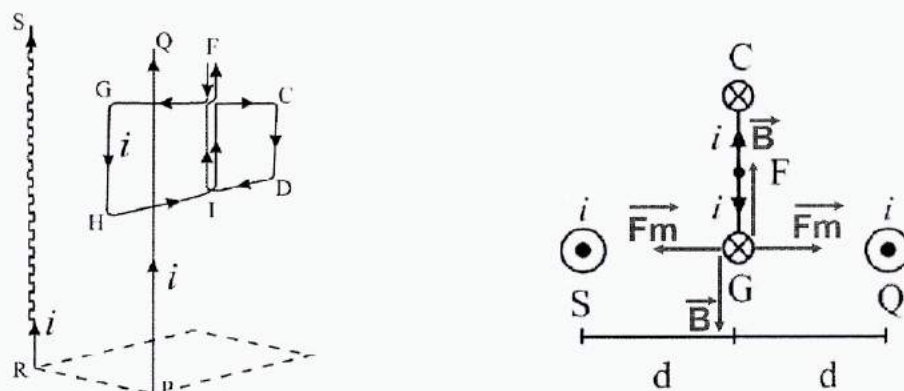


Figura 3.4: **Diagrama de forças.** (a) Visto na posição da figura 2.3. (b) Visto por um observador no topo do aparelho olhando verticalmente para baixo. (retirada de [9], pg.94)

As correntes nos condutores bc (retilíneo) e kl (sinuoso) geram campos magnéticos iguais ($|\vec{B}|$) que atuam no eixo GH do condutor móvel (vertical ao papel), no qual circula uma corrente igual às dos condutores bc e kl , mas em sentido contrário. Os campos magnéticos respectivamente gerados têm sentidos contrários no eixo GH e, portanto, as forças magnéticas produzidas neste eixo têm sentidos contrários, perpendiculares ao plano do circuito móvel, resultando assim no equilíbrio do condutor móvel.

3.3 Terceiro caso de equilíbrio

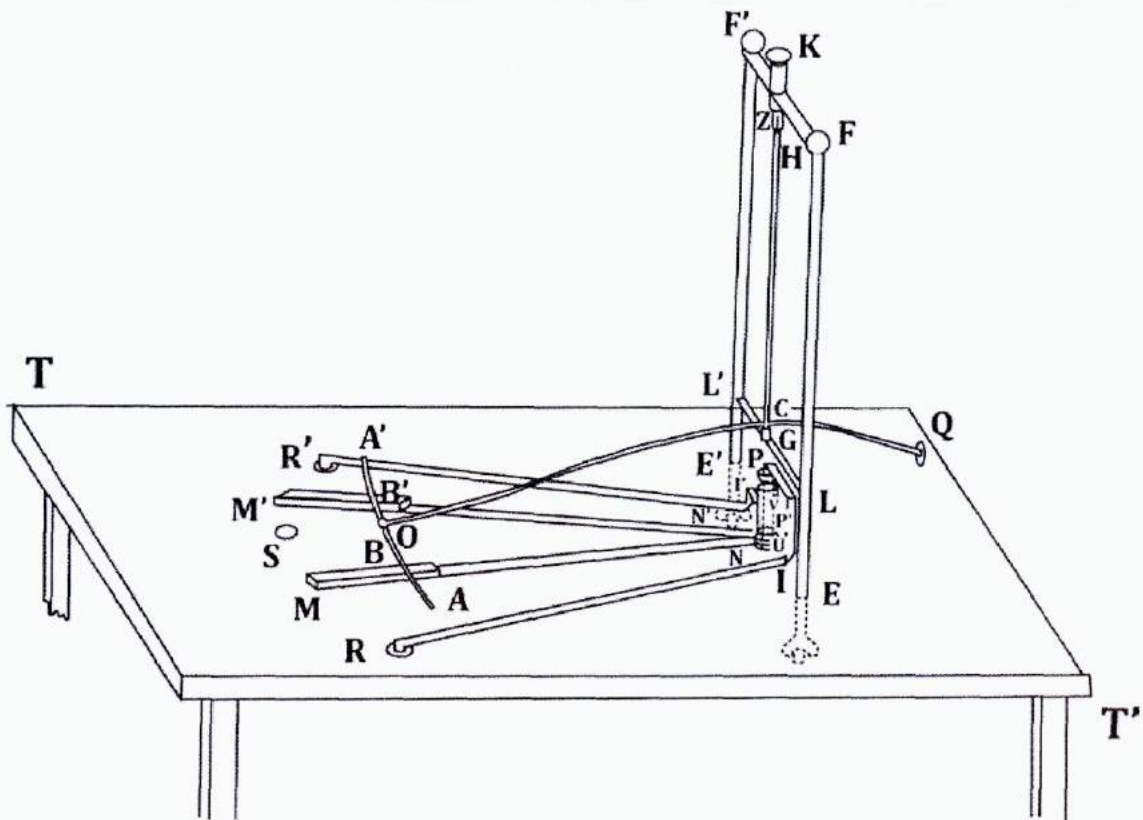


Figura 3.5: **Experimento 3.** MA e $M'B'$ são recipientes com mercúrio sobre os quais o condutor AA' desliza. O circuito total é formado por: Arco BB' ; condutores MN e $M'N'$; o circuito composto por RIP , $P'I'R'$, condutor curvilíneo de R' a S ; pilha. (retirada de [9], pg.132)

Objetivo

Mostrar que o arco BB' fica imóvel, quando seu centro está na direção do eixo GH . Significa que a ação da força magnética é perpendicular ao plano do circuito fechado ([8], pg.188).

Descrição

Por meio da dobradiça O , coloca-se o arco AA' em posição tal que seu centro esteja fora do eixo GH . Então, ao ligar a corrente, AA' desliza sobre o mercúrio entre os recipientes M e M' . Se o centro do arco AA' está no eixo GH , o arco fica imóvel. Significa que o torque é perpendicular ao arco, onde passa a corrente.

3.3.0.1 Explicação moderna

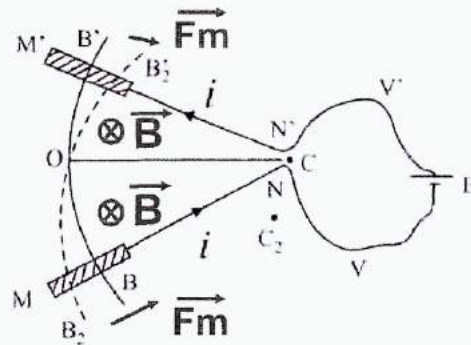


Figura 3.6: Diagrama e força. O circuito é escaneado de [9]. O diagrama mostra a corrente, a direção de \vec{B} e de \vec{F} .

A corrente é ao longo do arco, o campo \vec{B} e as forças em cada lado do arco estão ao longo de MN , $M'N'$, equilibrando o arco.

3.4 Quarto caso de equilíbrio

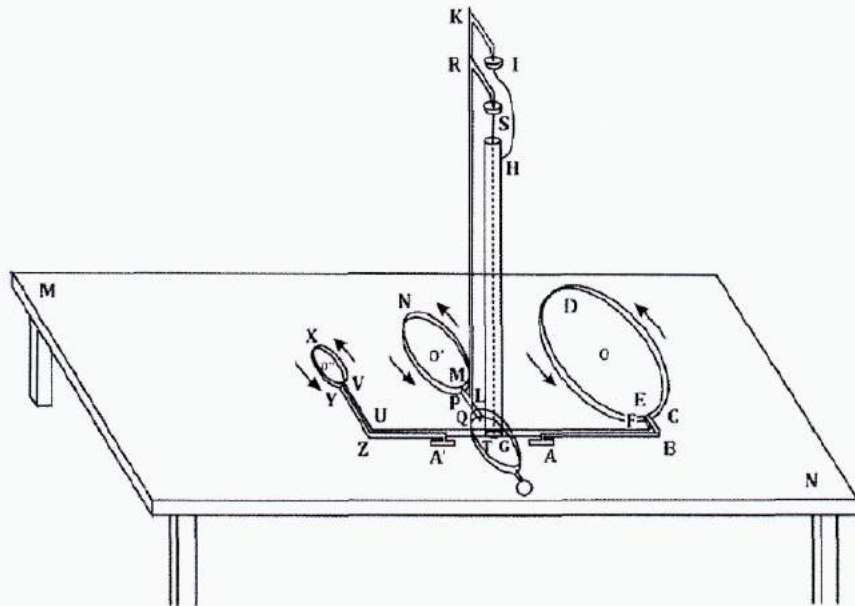


Figura 3.7: Experimento 4. As setas indicam o sentido da corrente no circuito. As partes circulares estão no plano da bancada. O círculo do meio é pivotado ao eixo GH , de modo a poder girar. (retirada de [9], pg.152)

Objetivo

Mostrar que ([10], p.85) “[a] força entre dois elementos de circuitos não é afetada, quando todas as dimensões lineares crescem proporcionalmente, mantendo inalterada a intensidade da corrente”. Significa que o sistema de círculos está em equilíbrio, se os círculos forem construídos na razão geométrica dos raios $r_1 = r, r_2 = \lambda r, r_3 = \lambda^2 r$ e as distâncias estiverem na razão $OO' = d, O'O'' = \lambda d$ ([8], pg.189).

Descrição

As espiras são similares, isto é, distâncias homólogas são proporcionais, de modo que seus raios estão na proporção $1, \lambda, \lambda^2$. O condutor móvel fica em equilíbrio, quando a distância entre os centros $O''O'$ e $O'O$ estão na razão de similaridade ([8], pg.189):

$$\frac{O''O'}{O'O} = \frac{\text{raio do círculo da esquerda}}{\text{raio do círculo do meio}} = \frac{\text{raio do círculo do meio}}{\text{raio do círculo da direita}} = \frac{1}{\lambda}$$

Explicação moderna

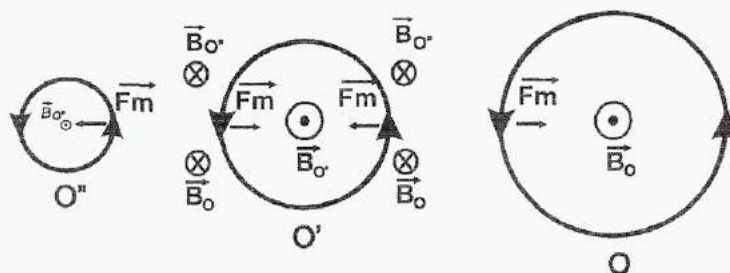


Figura 3.8: Diagrama de forças. A figura mostra as direções das forças e os campos nas espiras.

Os campos magnéticos exercidos pelas espiras O e O'' sobre O' têm um mesmo sentido devido ao sentido das correntes percorridas nestas espiras serem iguais e em sentido contrário. Os campos são perpendiculares perpendiculares ao plano das porções circulares, pela regra da mão direita, e, portanto, as forças exercidas sobre o elemento de corrente em O' mais próximo de O'' está no sentido voltado para dentro da espira circular O e no mesmo eixo que une os centros das espiras; da mesma forma, o sentido da força sobre o elemento de corrente em O' mais próximo de O está, também, no sentido voltado para dentro da espira circular e no sentido contrário ao da força produzida por O'' , havendo, pois, repulsões nos dois lados da espira O' . Como as repulsões são iguais, resulta que a espira do meio está em equilíbrio. Se, em algum momento, a espira do meio for retirada do equilíbrio ela retornará a ele, oscilando em torno do eixo de pivotagem.

Capítulo 4

A expressão matemática da nova lei

Ampère ([10], p.83) “[proclama-se] um seguidor da escola que explica todos os fenômenos físicos em termos de forças iguais e diretamente opostas, entre pares de partículas”. Parece que o experimento 1 suporta essa consideração; o experimento 2 suporta a consideração de elementos infinitesimais (portanto lineares) de corrente. Posto isso, Ampère estabelece uma lei entre elementos de corrente.

4.1 Determinação da variáveis envolvidas na lei

Ampère inicia os cálculos estabelecendo que:

$$d^2F \propto ds \times ds';$$

ele assim o justifica ([7], p.199):

Inicialmente, é evidente que a ação mútua de dois elementos de correntes elétricas é proporcional a seus comprimentos; pois, ao supô-los divididos em partes infinitesimalmente pequenas, iguais à sua medida comum, todas as atrações ou repulsões dessas partes, podendo ser consideradas como sendo dirigidas segundo uma mesma reta, ajuntando-se necessariamente.

Segundo Edmund Whittaker, isso depende do experimento 2 ([10], p.85):

[Do experimento 2], vemos que o efeito de $d\vec{s}$ em $d\vec{s}'$ é a soma vetorial dos efeitos de dx , dy , dz em $d\vec{s}'$, em que essas são as três componentes de $d\vec{s}$.

Depois, Ampère estabelece:

$$d^2F \propto i \times i';$$

ele assim o justifica ([7], p.199):

Esta mesma ação deve, ainda, ser proporcional às intensidades das duas correntes. Para exprimir, em números, a intensidade de uma corrente qualquer, concebe-se que se tenha escolhido uma outra corrente arbitrária como termo de comparação, que se tenha pego dois elementos iguais em cada uma dessas correntes, que se tenha procurado a razão entre as ações que elas exercem a uma mesma distância sobre um mesmo elemento de qualquer outra corrente, na situação em que ela [a corrente teste] lhes seja paralela [às outras duas] e na qual sua direção seja perpendicular às retas que ligam seu meio ao meio dos outros dois elementos. Essa razão será a medida de uma das intensidades, tomando a outra como unidade.

Então para elementos de corrente paralelos entre si:

$$d^2F \propto i \times i' \times ds \times ds'$$

ou, nas palavras de Ampère, tacitamente invocando o experimento 3 ([7], p.200):

[...] suas ações mútuas, quando eles são perpendiculares à linha que liga seus meios, paralelos entre si e situados a uma unidade de distância, um do outro, será expressa por $ii'dsds'$; que tomaremos com o sinal + quando as duas correntes, indo no mesmo sentido, se atraem, e com sinal -, no caso contrário.

Generalizando à situação de interação, em que os elementos de corrente não mais são paralelos ([7], p.200):

[...] se se considera dois elementos colocados de uma maneira qualquer, sua ação mútua dependerá de seus comprimentos, das intensidades das correntes das quais eles fazem parte e de suas posições respectivas.

A posição respectiva dos elementos de circuito é determinada por ([7], p.200):

Essa posição pode-se determinar por meio do comprimento r da reta que liga os seus centros, dos ângulos θ e θ' que fazem, com um mesmo prolongamento desta reta, as direções de dois elementos tomados no sentido de suas correntes respectivas e, enfim, do ângulo ω que fazem entre eles os planos traçados por cada uma destas direções e pela reta que liga o centro dos elementos.

ou seja, as grandezas definindo a posição dos elementos de circuito são mostradas na figura abaixo:

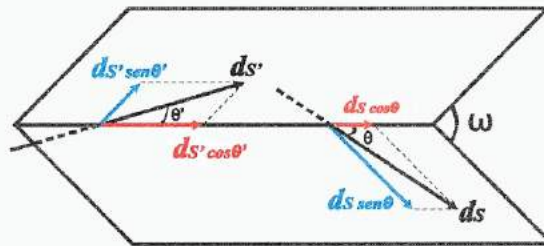


Figura 4.1: **Variáveis de direção.** ds e \hat{r} formam um plano e ds' e \hat{r} , outro plano; o ângulo entre os planos é ω .

Então, introduzindo uma função, até aqui desconhecida, dos ângulos ([7], p.201):

$$d^2F \propto \rho(\theta, \theta', \omega) \times (i \times i' \times ds \times ds').$$

Ampère introduz uma hipótese para a dependência em r ([7], p.200-201):

A consideração de diversas atrações ou repulsões observadas na natureza me levou a crer que a força, cuja expressão procuro, agia na razão inversa da distância; eu a suporei, para maior generalidade, na razão inversa da n -ésima potência dessa distância, n sendo uma constante a ser determinada.

Finalmente, a expressão mais geral da força é:

$$d^2F = \rho(\theta, \theta', \omega) \frac{i \times i' \times ds \times ds'}{r^n} \quad (4.1)$$

No restante dos cálculos, Ampère determina ρ e n .

4.1.1 Valor de ρ em uma situação simples

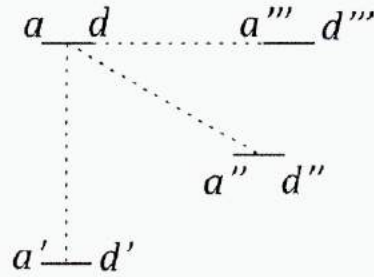


Figura 4.2: **Elementos de circuito paralelos.** (Figura 5 em [7]) ad e $a'd'$ são dois elementos de circuito perpendiculares a r ; $\omega = 0$; θ e θ' são fixos e iguais a $\pm\frac{\pi}{2}$, dependendo do sentido das correntes.

Se $a'd'$ for transportado paralelo a si mesmo, ao longo de um círculo com centro no meio de ad , ocupando as posições $a''d''$, $a'''d'''$, como na figura, continuará a ser $\omega = 0$; θ e θ' são ou iguais ou suplementares. Assim, nessa situação, será $\rho \equiv \phi(\theta, \theta')$ e

$$d^2F = \phi(\theta, \theta') \frac{i \times i' \times ds \times ds'}{r^n} \quad (d\vec{s} \parallel d\vec{s}' \text{ e em um mesmo plano}).$$

Quando $a'd'$ tiver girado de 90° , chegando finalmente a $a'''d'''$, estará no prolongamento de ad ; $\theta = \theta' = 0$ e nessa situação (ρ já independe das outras variáveis) será $\rho = k = \text{constante}$ e

$$d^2F = k \frac{i \times i' \times ds \times ds'}{r^n} \quad (d\vec{s} \text{ e } d\vec{s}' \text{ na mesma linha}) \quad (4.2)$$

4.2 Determinação das componente dos elementos de circuitos que interagem entre si

4.2.1 Teorema: A influência mútua dos elementos de correntes é somente entre elementos paralelos

O teorema estabelece que componentes de correntes perpendiculares entre si não interagem, de modo que a influência mútua é, apenas, entre as componentes paralelas ([7], p.202):

[...] [uma] porção infinitamente pequena de corrente elétrica não exerce nenhuma ação sobre uma outra porção infinitamente pequena de uma corrente situada em um plano que passa por seu meio e que é perpendicular a sua direção.

Parafraseando a demonstração: As duas metades do elemento perpendicular ao plano produzem, sobre o elemento no plano, ações iguais que se cancelam, pois, em uma metade do primeiro elemento a corrente se aproxima do plano e, na outra, se afasta. Esta afirmativa pressupõe os experimentos 1 e 2; quando o elemento perpendicular ao plano tende para zero, as forças tendem a ser iguais e opostas, paralelas ao plano, e se cancelam.

4.2.2 As várias componentes dos elementos de circuitos

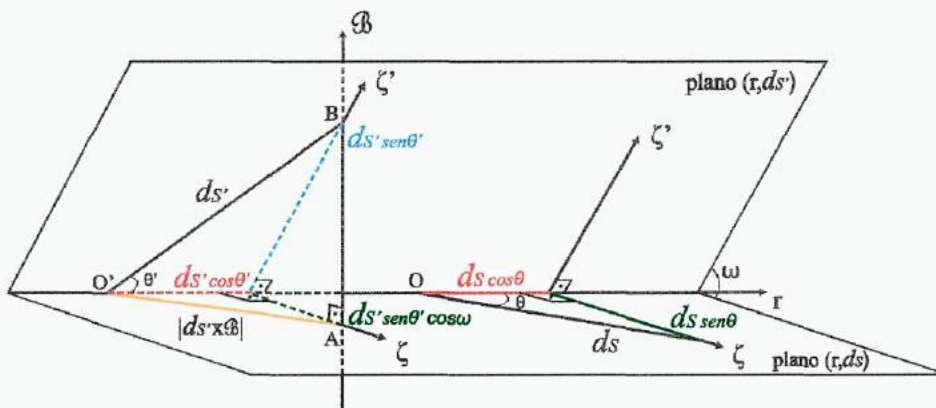


Figura 4.3: **Componentes dos elementos de circuito.** $\hat{\zeta}$ é o eixo perpendicular a \hat{r} no plano $(d\vec{s}, \hat{r})$; $\hat{\zeta}'$ o eixo perpendicular a \hat{r} no plano $(d\vec{s}', \hat{r})$; $AB \equiv \vec{B} \perp \text{plano } (d\vec{s}, \hat{r})$; $O'A \perp \vec{B} \equiv \vec{AB}$, pois pertence ao plano $(d\vec{s}, \hat{r})$; então $\vec{AB} = d\vec{s}' \cdot \vec{B}$ e $O'A = |d\vec{s}' \times \vec{B}|$.

Vetores nos planos das correntes com \hat{r} podem ser escritos em termos dos eixos, de modo que:

$$\begin{aligned} d\vec{s} &= ds [\cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\zeta}] \\ d\vec{s}' &= ds' [\cos \theta' \hat{r} + \sin \theta' \hat{\zeta}'] \end{aligned}$$

Inspeção da figura mostra que $\hat{\zeta} \cdot \hat{\zeta}' = \cos \omega$. Portanto:

$$d\vec{s} \cdot d\vec{s}' = ds ds' [\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega] \equiv ds ds' \cos \epsilon,$$

em que:

$$\cos \epsilon = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega \quad (4.3)$$

As várias componentes dos condutores são:

1. Componentes dos condutores na direção de \hat{r} :

$$\begin{aligned} ds_r &\equiv d\vec{s} \cdot \hat{r} = ds \cos \theta \\ ds'_r &\equiv d\vec{s}' \cdot \hat{r} = ds' \cos \theta' \end{aligned}$$

2. Componentes dos condutores na direção perpendicular a \hat{r}

- (a) Em seus respectivos planos com \hat{r} :

$$\begin{aligned} ds_\zeta &\equiv |d\vec{s} \times \hat{r}| = ds \sin \theta \\ ds'_\zeta &\equiv |d\vec{s}' \times \hat{r}| = ds' \sin \theta' \end{aligned}$$

- (b) Como os planos não são perpendiculares, essas componentes, quando respectivamente projetadas no plano ao qual não pertencem, produzem componentes perpendiculares a \hat{r} :

$$\begin{aligned} ds_{\zeta'} &\equiv d\vec{s} \cdot \hat{\zeta}' = ds \sin \theta \cos \omega && \text{no plano } (d\vec{s}', \vec{r}) \\ ds'_{\zeta} &\equiv d\vec{s}' \cdot \hat{\zeta} = ds' \sin \theta' \cos \omega && \text{no plano } (d\vec{s}, \vec{r}) \end{aligned}$$

4.2.3 As componentes de circuitos infinitesimais que interagem

São as paralelas entre si ([7], p.203):

1. Na direção $\parallel \hat{r}$:

$$ds_r = ds \cos \theta \quad \text{e} \quad ds'_r = ds' \cos \theta' \quad (4.4)$$

2. Na direção $\perp \hat{r}$

São as componentes no plano $(d\vec{s}', \vec{r})$:

$$d_{\zeta'} s \equiv d\vec{s} \cdot \hat{\zeta}' = ds \sin \theta \cos \omega \quad \text{e} \quad ds' \sin \theta' \quad (4.5)$$

Ou alternativa e equivalentemente, as componentes no plano $(d\vec{s}, \vec{r})$

$$d_{\zeta} s' \equiv d\vec{s}' \cdot \hat{\zeta} = ds' \sin \theta' \cos \omega \quad \text{e} \quad ds \sin \theta$$

4.3 A Força entre os circuitos

A interação é na direção perpendicular a ambos circuitos (experimento 3), que é \hat{r} . Portanto a força é dada pelos dois conjuntos (4.4) e (4.5):

$$\text{no conjunto (4.5) ([7], p.203):} \quad d^2 F_{r_1} = \frac{ii' ds ds'}{r^n} \sin \theta \sin \theta' \cos \omega.$$

$$\text{no conjunto (4.4) ([7], p.204):} \quad d^2 F_{r_2} = k \frac{ii' ds ds'}{r^n} \cos \theta \cos \theta'$$

A força tem a direção \hat{r} e módulo ([7], p.204):

$$d^2 F_r = \frac{ii' ds ds'}{r^n} (\sin \theta \sin \theta' \cos \omega + k \cos \theta \cos \theta') \quad (4.6)$$

4.4 As componentes cartesianas da força

A expressão (4.6) já é a solução. Mas Ampère obtém as componentes cartesianas. Inicialmente, (4.6) tem de ser posta em uma forma que permita escrever as variáveis em termos de suas componentes cartesianas; por exemplo, não é fácil obter $\cos \omega$.

Inicialmente, Ampère re-escreve (4.7) ([7], p.204):

$$d^2 F_r = \frac{ii' ds ds'}{r^n} (\cos \epsilon + h \cos \theta \cos \theta') \quad (4.7)$$

em que $h = k - 1$ e $\cos \epsilon$ é dado por (A.1). Após um longo cálculo ([7], p.207-212), apresentado no apêndice A, (4.7) é re-escrita ([7], p.212):

$$d^2 F_r = ii' r^k \frac{d}{ds} (r^k \cos \theta') ds ds' \quad (4.8)$$

A equação (4.8) envolve variáveis que podem ser escritas em termos das variáveis cartesianas. Os vetores \vec{r} e $d\vec{s}$ podem ser escritos em termos de seus cossenos diretores com \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} :

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \frac{x}{r} \hat{i} + \frac{y}{r} \hat{j} + \frac{z}{r} \hat{k} \\ d\vec{s} &= ds' (\cos \lambda' \hat{i} + \cos \mu' \hat{j} + \cos \nu' \hat{k}) \\ \cos \theta' = d\vec{s} \cdot \vec{r} &= \frac{x}{r} \cos \lambda' + \frac{y}{r} \cos \mu' + \frac{z}{r} \cos \nu' \end{aligned}$$

e substituindo em (4.8), a força em $d\vec{s}'$ é ([7], p.213):

$$d^2 F_r = ii' r^k ds' d (r^k \cos \theta') = ii' r^k ds' r^k d [r^{k-1} (x \cos \lambda' + y \cos \mu' + z \cos \nu')] \quad (4.9)$$

É demonstrado (apêndice A) que a força (4.9) tem as componentes ([7], p.214):

$$dX = \frac{1}{2} ii' ds' (C \cos \mu' - B \cos \nu') \quad (4.10)$$

$$dY = \frac{1}{2} ii' ds' (A \cos \nu' - C \cos \lambda') \quad (4.11)$$

$$dZ = \frac{1}{2} ii' ds' (B \cos \lambda' - A \cos \mu') \quad (4.12)$$

em que

$$A = \oint \frac{ydz - zdy}{r^{n+1}} \quad \text{ou} \quad A = \oint \frac{[\vec{r} \times d\vec{s}]_{\text{componente } x}}{r^{n+1}} \quad (4.13)$$

$$B = \oint \frac{z'dx' - x'dz'}{r^{n+1}} \quad \text{ou} \quad B = \oint \frac{[\vec{r}' \times d\vec{s}']_{\text{componente } y}}{r^{n+1}} \quad (4.14)$$

$$C = \oint \frac{x dy - y dx}{r^{n+1}} \quad \text{ou} \quad C = \oint \frac{[\vec{r} \times d\vec{s}]_{\text{componente } z}}{r^{n+1}} \quad (4.15)$$

Como $ds' \cos \lambda' = d\vec{s}' \cdot \hat{i}$, $ds' \cos \mu' = d\vec{s}' \cdot \hat{j}$ e $ds' \cos \nu' = d\vec{s}' \cdot \hat{k}$, o leitor moderno reconhece que:

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} ii' \oint [ds'_y C - ds'_z B] \equiv \frac{1}{2} ii' \oint \oint \frac{[d\vec{s}' \times (\vec{r} \times d\vec{s})]_{\text{componente } x}}{r^{n+1}} \\ Y &= \frac{1}{2} ii' \oint [ds'_z A - ds'_x C] \equiv \frac{1}{2} ii' \oint \oint \frac{[d\vec{s}' \times (\vec{r} \times d\vec{s})]_{\text{componente } y}}{r^{n+1}} \\ Z &= \frac{1}{2} ii' \oint [ds'_x B - ds'_y A] \equiv \frac{1}{2} ii' \oint \oint \frac{[d\vec{s}' \times (\vec{r} \times d\vec{s})]_{\text{componente } z}}{r^{n+1}} \end{aligned}$$

4.5 A dependência da distância ($n = 2$)

Ampère demonstra que a força entre dois circuitos fechados, finitos, de áreas respectivamente Λ e Λ' , situados no mesmo plano, age ao longo da reta ligando os centros e é igual a (p.231):

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{ii'\Lambda\Lambda'}{r^{n+2}}$$

A dedução é longa (da página 222 à página 231), cheia de resultados intermediários, e nada acrescentaria ao que já foi feito e basta, apenas, citar sua interpretação (p.231):

... pode-se obter a ação mútua de dois circuitos finitos, situados em um mesmo plano, considerando que suas áreas estejam divididas em elementos infinitamente pequenos, em todas as direções, e supondo que esses elementos ajam, um sobre outro, segundo a reta que os liga, em razão direta das áreas e inversa da potência $n + 2$ de sua distâncias.

A ação mútua das correntes fechadas não sendo função senão da distância, tira-se essa conseqüência importante, que não pode resultar dessa ação um movimento de rotação contínuo.

A expressão acima (p.231) “conduz à determinação do valor de n ”, segundo Ampère. Suponha que os circuitos sejam similares, de tal modo que distâncias lineares estejam na proporção λ . Então, as pequenas áreas similares estão na proporção λ^2 , enquanto as distâncias entre elas, na proporção m . Então, as forças nos circuitos infinitesimais homólogos são:

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{ii'\Lambda\Lambda'}{r^{n+2}} \quad \text{e} \quad \frac{n(n-1)}{2} \frac{ii'\Lambda\Lambda'}{r^{n+2}} \frac{\lambda^4}{\lambda^{n+2}}$$

Ora, pelo experimento 4, as forças são iguais, então:

$$\frac{\lambda^4}{\lambda^{n+2}} = 1 \Rightarrow n + 2 - 4 = 0 \Rightarrow n = 2$$

4.6 A direção da força após integração

Em notação vetorial, a força é:

$$\vec{F} = \frac{ii'}{2} \oint d\vec{s}' \times \oint \frac{\hat{r} \times d\vec{s}}{r^2}$$

Obviamente, Ampère não escreveu essa fórmula. Mas ele fez uma tentativa de achar a direção de \vec{F} . Ampère define a reta “diretriz” ([7], p.215):

$$\vec{B} = A\hat{i} + B\hat{j} + C\hat{k} \quad \text{ou} \quad \vec{B} = \oint \frac{\hat{r} \times d\vec{s}}{r^2};$$

a menos de sinais e escolha apropriada de unidades, isso é a indução magnética.

A diretriz é perpendicular à força, o que se constata, multiplicando (4.10), (4.11) e (4.12) respectivamente por A , B , C e somando ([7], p.215):

$$\vec{B} \cdot \vec{F} = 0.$$

A força $d\vec{F}$, de componentes (4.13), (4.14) e (4.15), é, também, perpendicular a $d\vec{s}$. De modo que \vec{F} está em um plano perpendicular a ambos, $d\vec{s}$ e \vec{B} , o plano $O'BA$ (Fig.4.3); Ampère chama esse plano de plano diretor. Finalmente,

$$\vec{F} = \frac{ii'}{2} \oint d\vec{s}' \times \vec{B}$$

Capítulo 5

Conclusão

Ampère partiu de dois experimentos que corroboram a hipótese de interação direta entre elementos de corrente. Um experimento mostra que a força é perpendicular ao elemento de circuito. Com esses fatos, pôde achar as variáveis de que a força depende, deduzindo a solução geral (7), a menos da potência em r . A potência correta resulta do experimento 4, que garante que a força entre circuitos depende da distância e não do tamanho relativo. No mais, para obter a forma cartesiana, é questão de manipulação analítica. As constantes corretas em (1) dependem de unidades de medida.

Sobre a fórmula expressou-se James Clerk Maxwell (*apud* [10], p.88):

O todo, teoria e experimento, parece ter saltado, inteiramente pronto e com o instrumental completo, do cérebro do “Newton da Eletricidade”. Ela é perfeita em forma e inatingível em acuracidade; e é sumariada em uma fórmula da qual todos os fenômenos podem ser deduzidos e que deve sempre permanecer a fórmula cardinal da eletrodinâmica.

Os resultados desenvolvidos nesta Monografia foram aceitos para publicação na Revista Brasileira de Ensino de Física em 18/09/2015 e serão publicados ainda este ano no v. 37, n. 4.

Capítulo 6

Material Instrucional

6.1 As componentes vetoriais da força

Como sempre é um problema para o aluno entender projeções e conseqüentemente o cálculo vetorial, realizamos uma maquete da Figura 4.3, para melhor visualização das componentes vetoriais.

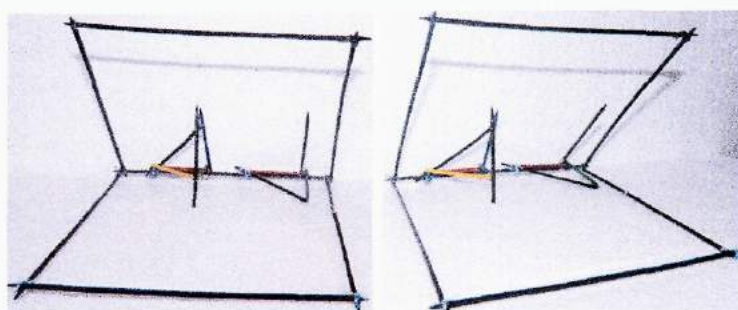


Figura 6.1: Maquete da Figura 4.3 com as componentes dos elementos do circuito.

6.2 A descoberta da interação ente correntes

Seguindo a reprodução do experimento de ([4], pg.609), realizamos algumas modificações na estrutura do circuito elétrico, no processo de montagem e na execução do mesmo, mostrando assim a interação entre duas espirais conduzindo correntes constantes.

6.2.1 Procedimento de Montagem

6.2.1.1 Materiais Utilizados

- 1 tábua de madeira de 15 cm × 20 cm;
- 2 bobinas enroladas com cerca de 2,50m de fio esmaltado 26 AWG cada uma;

- 3 espetinhos de madeira para churrasco de 25cm;
- percevejos (tachinhas);
- 2 baterias de 9V alcalinas;
- 2 imãs de geladeira ou 2 pequenos imãs cilíndricos;
- Diversos: 2 CDs ou DVDs velhos que não estejam funcionando, 5 arruelas de $5/32'' \approx 4mm$, 2 arruelas de $1/4'' \approx 6.5mm$, 1 parafuso de $1/8'' \times 5/8'' \approx 3mm \times 16mm$, 1 porca para o parafuso de $1/8'' \approx 3mm$, folha de papel alumínio, cola, prego, fósforo, martelo, estilete e linha de costura resistente.

6.2.1.2 Construção das espirais

Tomamos os dois discos de CD ou DVD e passamos na abertura circular central um prego quente em três posições formando um ângulo de 120° derretendo a parte de plástico transparente, num movimento do centro do CD até o final da parte transparente, formando assim três aberturas em cada um dos CDs.

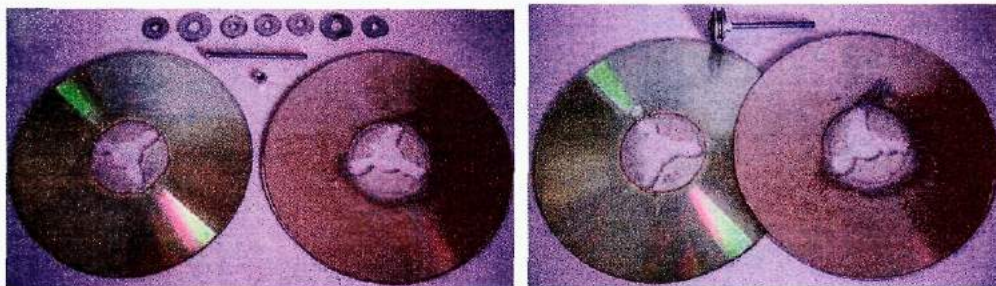


Figura 6.2: Cds ou DVDs com aberturas feitas e com as arruelas, porca e parafuso utilizados.

Passamos um fio esmaltado entre os Cds, deixando cerca de 15 cm de sua extremidade para fora colocamos o parafuso passando pelos dois CDs e uma arruela de $1/4'' \approx 6.5mm$, 5 de $5/32'' \approx 4mm$, uma de $1/4'' \approx 6.5mm$ e então fechamos o conjunto com a porca deste parafuso, faceando os Cds com as aberturas na parte transparente feitas no início. Assim sendo, apertamos a porca bem e começamos a enrolar o fio esmaltado entre os CDs bem apertado, observando que cada volta praticamente se sobrepõe a outra e ao término de enrolarmos todo o comprimento do fio, as espirais estarão formadas, percebendo portanto que é necessário deixar 15cm de fio em cada ponta das espirais. Ao final, passamos cola nas aberturas dos CDs nos dois lados realizados no início onde as espirais estão expostas e portanto com a cola, estarão mais firmes quando retiramos do conjunto dos CDs.

As duas extremidades, com 15cm de comprimento, são torcidas entre si à espiral, mantidas no mesmo plano da espiral. Após torcer, deixa-se duas pontas espaçadas uma da outra, por cerca de 2 cm. As camadas de verniz isolante destas pontas devem ser aquecidas com fósforo e lixadas até que se note o brilho do cobre que está coberto pelo verniz e com isso seja realizado o contato elétrico da parte exposta do cobre de cada terminal da espira ao circuito elétrico.

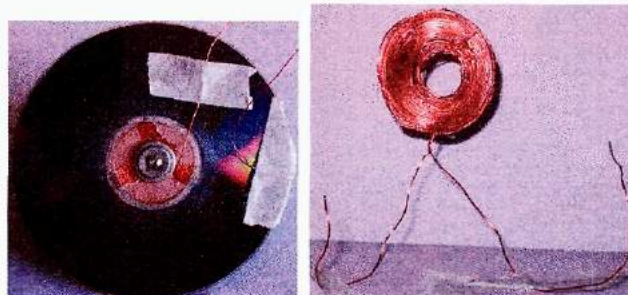


Figura 6.3: Construção das espirais e espiral finalizada.

6.2.1.3 As Baterias

Cada espiral será conectada em uma Bateria de 9V. Utilizando o soquete de bateria de 9V que já é uma alternativa de baixo custo e vendidos em lojas de materiais elétricos, com isso podendo conectar as baterias ao circuito elétrico.



Figura 6.4: Baterias utilizadas.

6.2.1.4 O circuito elétrico

Na tábua de madeira devem ser esquematizados e construídos dois circuitos elétricos idênticos, um para cada espiral. Eles devem ser posicionados faceando um ao outro, como indicado na Figura 6.4. Cada circuito será composto de duas baterias com seus soquetes, um interruptor (que normalmente vai ser aberto para evitar que as baterias se gastem), contatos realizados com percevejos que simularão a inversão de polaridade, trilhas de ligação feitas com papel alumínio, além da própria espiral.

Primeiro montamos as trilhas com papel alumínio, como indicado na Figura, colocando o papel alumínio na base de madeira. Note que no local onde possui uma fita crepe no meio, corresponde aos contatos responsáveis pela inversão de polaridade e da parte do interruptor, que vai depender do tamanho dos colchetes.

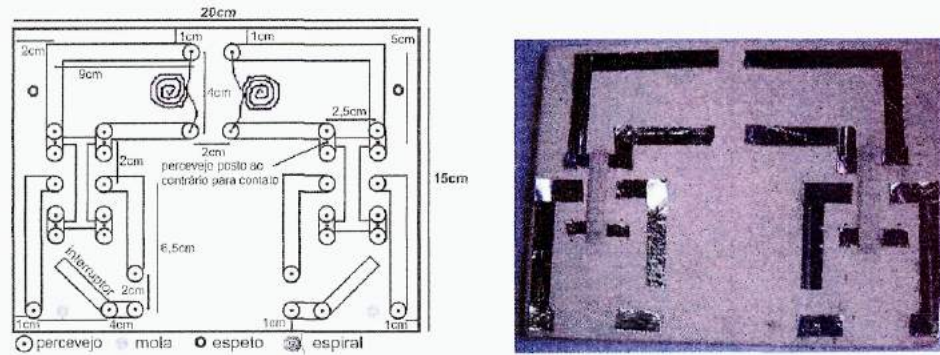


Figura 6.5: Projeto do Circuito elétrico e circuito elétrico montado.

6.2.1.5 Montagem do circuito de inversão de polaridade

Para realizar a inversão de polaridade foi realizada a ligação cruzada entre os extremos dos contatos dos percevejos conforme fig.6.6a, sendo realizado o isolamento desta primeira ligação e para isso foi utilizado uma fita durex, completando assim com a outra ligação cruzada por cima desta já realizada, sendo que uma não interfere eletricamente na outra.

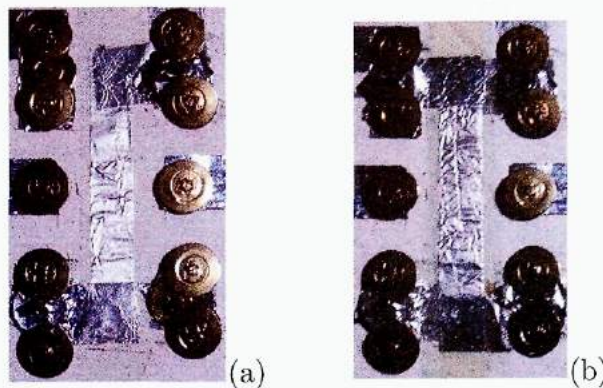


Figura 6.6: Montagem do circuito inversor de polaridade.

Na parte do interruptor, fazemos com um prego, um pequeno furo na tábua a uma distância de cerca de 1 cm de uma das extremidades do espaço sem alumínio e colocamos um pedaço de uma molinha de caneta esferográfica. Esta mola vai manter o interruptor normalmente aberto. Para fechar o circuito bastará pressionar com um dedo o colchete que estará sobre esta mola. Colocamos percevejos nas extremidades livres das trilhas de papel alumínio próximas à molinha, para facilitar o contato elétrico quando o interruptor for fechado. Um percevejo fará a fixação do interruptor de grampo de latão.

6.2.1.6 Montagem da haste de fixação das espirais

Façamos dois pequenos furos na tábua com um prego diametralmente opostos, seguindo o circuito elétrico como base e fixemos os dois espetinhos, um em cada furo realizado na tábua.



Figura 6.7: colchetes e Interruptor de colchetes montado.

Faremos o fechamento desses dois espetinhos em aproximadamente 15cm de altura da base de madeira, amarrando uma ponta num espetinho preso verticalmente e a outra ponta no outro espetinho, de forma que esta amarração fique paralela a base de madeira, como mostra a Figura 6.6

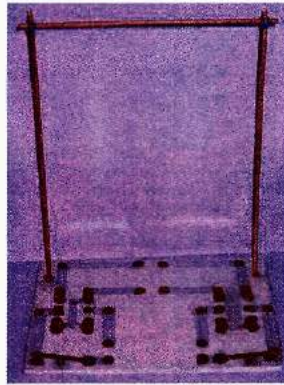


Figura 6.8: Hastes montadas com espetinho de churrasco.

6.2.1.7 Fixação das espirais

As espirais devem ser amarradas com linha de costura ao espetinho fechado horizontalmente, ficando suspensas. Elas devem facear uma a outra em planos verticais, com seus eixos colineares. Os contatos entre as espirais e as trilhas do circuito devem ser feitos com percevejos.

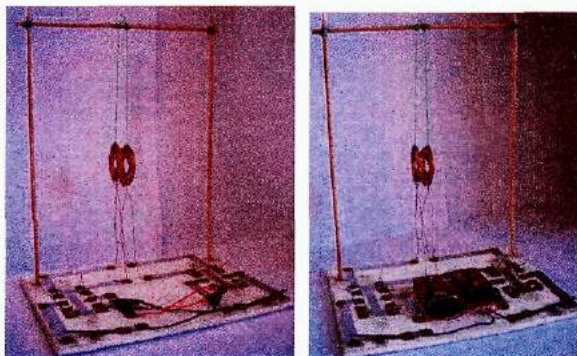


Figura 6.9: Montagem final com as espirais fixadas sem as baterias e com as baterias.

Esta montagem experimental permite observar que a interação magnética é caracterizada pela atração e repulsão entre ímãs. Isto é facilmente realizado pendurando, em duas linhas de costura, ímãs de geladeira ou ímãs cilíndricos, como se fossem pêndulos, com um desses ímãs na mesma altura, alinhados com o meridiano magnético local. Os eixos norte e sul de cada um estão alinhados, sendo que as extremidades mais próximas entre si possuem polaridades opostas, uma sendo um pólo norte e outra um pólo sul. Ao aproximarmos as duas linhas de costura, observa-se que eles se atraem quando a distância entre eles é pequena, sendo que o valor desta distância, em que a atração é perceptível, vai depender das intensidades dos ímãs. Segurando um deles com a mão e aproximando-o de um outro, suspenso na forma de um pêndulo, é fácil perceber a atração ou repulsão entre eles, dependendo de suas polaridades.

Apêndice A

Os cálculos intermediários

A.1 Re-escrevendo (4)

Os cossenos dos ângulos de ds e ds' com os eixos, \hat{i} , \hat{j} e \hat{k} são, respectivamente, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ e $\frac{dx'}{ds'}$, $\frac{dy'}{ds'}$, $\frac{dz'}{ds'}$. Então

$$d\vec{s} \cdot d\vec{s}' = ds ds' \left[\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \right];$$

por outro lado (equação (4)):

$$d\vec{s} \cdot d\vec{s}' \equiv ds ds' \cos \epsilon = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega$$

Logo,

$$\cos \epsilon = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos \omega \equiv \frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \quad (\text{A.1})$$

A.2 Demonstração de (9)

Seja [7], p.206):

$$\begin{array}{ll} \text{centro de } ds: & x, y, z \\ \text{centro de } ds': & x', y', z' \end{array}$$

Então a distância entre centros é [7], p.206):

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Pela definição de θ e θ' (seção 4):

$$\cos \theta = \frac{dr}{ds} \quad \text{e} \quad \cos \theta' = -\frac{dr}{ds'}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{dr}{ds} = \frac{x - x'}{r} \frac{dx}{ds} + \frac{y - y'}{r} \frac{dy}{ds} + \frac{z - z'}{r} \frac{dz}{ds} \\ \cos \theta' &= -\frac{dr}{ds'} = \frac{x - x'}{r} \frac{dx'}{ds'} + \frac{y - y'}{r} \frac{dy'}{ds'} + \frac{z - z'}{r} \frac{dz'}{ds'} \end{aligned}$$

Ou ([7], p.206):

$$\begin{aligned} r \frac{dr}{ds} &= (x - x') \frac{dx}{ds} + (y - y') \frac{dy}{ds} + (z - z') \frac{dz}{ds} \\ r \frac{dr}{ds'} &= -(x - x') \frac{dx}{ds'} - (y - y') \frac{dy}{ds'} - (z - z') \frac{dz}{ds'} \end{aligned}$$

Derivando $r \frac{dr}{ds}$ em relação s' ([7], p.207):

$$r \frac{d^2r}{dsds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} = \left(\frac{dx}{ds'} - \frac{dx'}{ds'} \right) \frac{dx}{ds} + (x - x') \frac{d^2x}{dsds'} + \text{etc};$$

como as coordenadas cartesianas sem linha independem de s' e vice-versa, só sobra ([7], p.207):

$$r \frac{d^2r}{dsds'} + \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} = -\frac{dx}{ds} \frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds} \frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds} \frac{dz'}{ds'} \equiv -\cos \epsilon$$

Substituindo em (8):

$$\begin{aligned} d^2 F_r &= \frac{ii' ds ds'}{r^n} \left(-r \frac{d^2r}{dsds'} - \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} - h \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\ &= -\frac{ii' ds ds'}{r^n} \left(r \frac{d^2r}{dsds'} + k \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\ &\equiv -\frac{ii' ds ds'}{r^n} \times \frac{1}{r^{k-1}} \times \frac{d(r^k \frac{dr}{ds})}{ds'} = -ii' r^{1-n-k} \frac{d(r^k \frac{dr}{ds})}{ds'} ds ds' \end{aligned}$$

Lembrando que $\cos \theta = \frac{dr}{ds}$, obtém-se a força em ds ([7], p.207):

$$d^2 F_r = -ii' r^{1-n-k} \frac{d(r^k \cos \theta)}{ds'} ds ds' = -ii' r^{1-n-k} d(r^k \cos \theta) ds;$$

trocando s por s' e lembrando que $-\cos \theta' = \frac{dr}{ds'}$, a força no circuito ds' é ([7], p.208):

$$ii' r^{1-n-k} \frac{d(r^k \cos \theta')}{ds} ds ds' = ii' r^{1-n-k} d(r^k \cos \theta') ds'$$

Finalmente, (9) é obtida, fazendo $1 - n = 2k$ ([7], p.212):

$$\begin{aligned} \text{em } s: \quad d^2 F_r &= -ii' r^k \frac{d}{ds'} (r^k \cos \theta) ds ds' = -ii' r^k d(r^k \cos \theta) ds \\ \text{em } s': \quad d^2 F_r &= ii' r^k \frac{d}{ds} (r^k \cos \theta') ds ds' = ii' r^k d(r^k \cos \theta') ds' \end{aligned}$$

A.2.1 Demonstração de $1 - n - 2k = 0$

Essa força é na direção \hat{r} ligando o meio dos circuitos elementares; como θ' é o ângulo entre \hat{r} e $d\vec{s}'$, a componente da força ao longo de $d\vec{s}'$ é ([7], p.208):

$$d^2 F_{s'} = ii' r^{1-n-k} \frac{d(r^k \cos \theta')}{ds} \cos \theta' ds ds'$$

Multiplicando e dividindo por r^k e agrupando termos:

$$d^2 F_{s'} = ii' r^{1-n-2k} (r^k \cos \theta') \frac{d(r^k \cos \theta')}{ds} ds ds' \equiv ii' r^{1-n-2k} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (r^k \cos \theta')^2 ds ds'$$

Desenvolvendo as derivadas (não apresentado por Ampère):

$$\begin{aligned} d^2 F_{s'} &= ii' r^{1-n-2k} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (r^k \cos \theta')^2 ds ds' \\ &= \frac{ii'}{2} ds' \left\{ \frac{d}{ds} \left[r^{1-n-2k} (r^k \cos \theta')^2 \right] - (r^k \cos \theta')^2 \frac{d}{ds} (r^{1-n-2k}) \right\} ds \\ &= \frac{ii'}{2} ds' \left[\frac{d}{ds} (r^{1-n} \cos^2 \theta') - r^{2k} \cos^2 \theta' (1-n-2k) r^{-n-2k} \frac{dr}{ds} \right] \end{aligned}$$

Integrando em ds , sobre um circuito fechado, a força em um elemento ds' é ([7], p.209):

$$\begin{aligned} \frac{ii'}{2} ds' \left[(r^{1-n} \cos^2 \theta') \Big|_{s=0}^{s=0} - \int r^{2k} \cos^2 \theta' (1-n-2k) r^{-n-2k} dr \right] = \\ \frac{ii'}{2} ds' \left[(r^{1-n} \cos^2 \theta') \Big|_{s=0}^{s=0} - (1-n-2k) \int \cos^2 \theta' r^{-n} dr \right] \end{aligned}$$

Ampère invoca o experimento 3 ([7], p.208):

Examinemos entretanto, o que resulta do terceiro caso de equilíbrio [...], o qual demonstra que a componente da ação de um circuito fechado qualquer sobre um elemento, segundo a direção desse elemento é sempre nula, qualquer que seja a forma do circuito.

Então, $F_{s'} = 0$. O primeiro termo é obviamente igual a zero. Ampère produz um exemplo em que o segundo não é zero; logo, a única possibilidade é $1-n-2k=0$ e $n=1-2k$.

Para produzir um exemplo em que o primeiro termo é diferente de zero, Ampère imagina esferas infinitesimalmente próximas, com centro no meio de ds' . Essas esferas cortam o circuito em pontos simétricos em relação ao centro de ds' , resultando em dr 's iguais mas de sinal oposto; quanto aos valores de $\cos^2 \theta'$ ([7], p.209):

[...] os valores de $\cos^2 \theta'$ podem ser diferentes e haverá uma infinidade de maneiras de fazê-lo [de escolher os raios das esferas] de modo que os quadrados de todos os cossenos relativos aos pontos situados de um mesmo lado entre os pontos extremos do circuito sejam menores que os relativos aos pontos correspondentes do outro lado;

A.3 Demonstração de (11) a (16)

As contas serão feitas, somente, para a componente X ; as outras são uma generalização óbvia. Para obter X , é só multiplicar a força em (10) (que é na direção \hat{r}) por $\frac{x}{r}$, que é o cosseno diretor de \vec{r} na direção \hat{i} :

$$d^2 X = ii' ds' r^{k-1} x d[r^{k-1} (x \cos \lambda' + y \cos \mu' + z \cos \nu')]$$

$$\begin{aligned}
d^2 X &= ii' ds' [x \cos \lambda' r^{k-1} d(r^{k-1} x) + x \cos \mu' r^{k-1} d(r^{k-1} y) + x \cos \nu' r^{k-1} d(r^{k-1} z)] \\
&\equiv ii' ds' \left[\cos \lambda' r^{k-1} x d(r^{k-1} x) + \frac{x}{y} \cos \mu' r^{k-1} y d(r^{k-1} y) + \frac{x}{z} \cos \nu' r^{k-1} z d(r^{k-1} z) \right] \\
&\equiv \frac{1}{2} ii' ds' \left[\cos \lambda' d(r^{2k-2} x^2) + \frac{x}{y} \cos \mu' d(r^{2k-2} y^2) + \frac{x}{z} \cos \nu' d(r^{2k-2} z^2) \right] \\
&= \frac{1}{2} ii' ds' \{ d[r^{2k-2} (x^2 \cos \lambda' + xy \cos \mu' + xz \cos \nu')] \\
&\quad - r^{2k-2} \left[y^2 \cos \mu' d\left(\frac{x}{y}\right) + z^2 \cos \nu' d\left(\frac{x}{z}\right) \right] \}
\end{aligned}$$

Como $2k = -n + 1$, segue-se que $2k - 2 = -n - 1$. Logo:

$$\begin{aligned}
d^2 X &= \frac{1}{2} ii' ds' \left[d\left(\frac{x^2 \cos \lambda' + xy \cos \mu' + xz \cos \nu'}{r^{n+1}}\right) - \frac{y^2 \cos \mu'}{r^{n+1}} d\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{z^2 \cos \nu'}{r^{n+1}} d\left(\frac{x}{z}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} ii' ds' d \left[x \left(\frac{x \cos \lambda' + y \cos \mu' + z \cos \nu'}{r^{n+1}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} ii' ds' \left[\frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} \cos \mu' + \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \cos \nu' \right] \\
&\equiv \frac{1}{2} ii' ds' \left[d\left(\frac{x \cos \theta'}{r^n}\right) + \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} \cos \mu' + \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \cos \nu' \right]
\end{aligned}$$

Integrando:

$$dX = \frac{1}{2} ii' ds' \left\{ \left[\frac{x \cos \theta'}{r^n} \right]_{\text{circuito fechado}} + \cos \mu' \int \frac{xdy - ydx}{r^{n+1}} + \cos \nu' \int \frac{zdx - xdz}{r^{n+1}} \right\}$$

O primeiro termo é zero, pois a integral é de $s = 0$ a $s = 0$ (circuito fechado).

Bibliografia

- [1] Ivan Ramalho & Nicolau Toledo, *Os Fundamentos da Física (Eletricidade)* (São Paulo: Editora Moderna, 1979)
- [2] Sérgio Calçada & José Sampaio, *Física Clássica (Eletricidade)*, (São Paulo: Atual Editora, 1985).
- [3] M.C. Fonte Boa & L.A.M. Guimarães, *Física Eletricidade e Ondas (Ensino Médio)*, (Rio de Janeiro: Brochura, 2001)
- [4] M.P. Souza Filho, J.P.M. de Castro Chaib, J.J. Caluzi e A.K.T. Assis “Demonstração didática da interação entre correntes elétricas”, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **29** (2007), 605-612.
- [5] R.A. Martins, Orsted e a descoberta do eletromagnetismo, *Cadernos de História e Filosofia da Ciência*, **10** (1986), 89-114.
- [6] J.P.M. de Castro Chaib & A.K.T. Assis, “Sobre os efeitos das correntes elétricas — tradução comentada da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica”, *Revista da SBHC*, **5** (2007), 85-102.
- [7] A.M. Ampère, “Théorie Mathématique des Phénomènes Electro-dynamiques Uniquement Déduite de l’Expérience”, in Editions Jacques Gabay, Sceaux, 1990, *Réimpression du Mémoire fondamental d’André-Marie Ampère paru en 1827 dans les, Mémoires de l’Académie Royale des Sciences de l’Institut de France, année 1823*.
- [8] Goldenberg, J., *Física geral e experimental*, Vol. 2. São Paulo: Editora Nacional, 1970.
- [9] Chaib, J., *Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica*. 2009. 386f. Tese (Doutorado em Ciências) - Instituto de Física, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, São Paulo. 2001.
- [10] Whittaker, Edmund *A History of the Theories of Æther and Electricity*, 2 vols., (New York: The Philosophical Library, 1951), v.1.
- [11] Weinberg, Steven, *The Discovered of Subatomic Particles*, *Scientific American Library*, 1983.
- [12] John David Jackson, *Classical Electrodynamics*, (New York, London, Sydney: John Wiley & Sons, 1962); 1967, sexta impressão.