



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE ECONOMIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM CIÊNCIAS ECONÔMICAS

Alexandre Artmann Uribe

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE MÉTRICAS DE RISCO FINANCEIRO: UMA
MODELAGEM DE VAR E CVAR EM DIFERENTES MERCADOS

Rio de Janeiro

2024

Alexandre Artmann Uribe

Análise comparativa entre diferentes métricas de risco financeiro: uma
modelagem de VAR e CVAR em diferentes mercados

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Instituto de Economia da
Universidade Federal do Rio de Janeiro
como exigência para obtenção do título
de Bacharel em Ciências Econômicas.

Orientador: Professor Dr. Getúlio Borges
da Silveira Filho

Rio de Janeiro

2024

CIP - Catalogação na Publicação

U76a Uribe, Alexandre Artmann
 Análise comparativa entre métricas de risco
 financeiro: uma modelagem de VaR e CVaR em
 diferentes mercados / Alexandre Artmann Uribe. --
 Rio de Janeiro, 2024.
 51 f.

 Orientador: Getúlio Borges da Silveira Filho.
 Trabalho de conclusão de curso (graduação) -
 Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto
 de Economia, Bacharel em Ciências Econômicas, 2024.

 1. Métricas de Risco. 2. Gestão de Riscos. 3.
 Risco Financeiro. 4. Value-at-Risk (VaR). 5.
 Conditional Value-at-Risk (CVaR). I. Filho, Getúlio
 Borges da Silveira, orient. II. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob a responsabilidade de Miguel Romeu Amorim Neto - CRB-7/6283.

ALEXANDRE ARTMANN URIBE

ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE MÉTRICAS DE RISCO FINANCEIRO: UMA
MODELAGEM DE VAR E CVAR EM DIFERENTES MERCADOS

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao Instituto de Economia da
Universidade Federal do Rio de Janeiro,
como requisito para a obtenção do título
de Bacharel em Ciências Econômicas.

Rio de Janeiro, 28/03/2024.

GETÚLIO BORGES DA SILVEIRA FILHO - Presidente

Professor Dr. do Instituto de Economia da UFRJ

ALEXANDRE BARROS DA CUNHA

Professor Dr. do Instituto de Economia da UFRJ

ANTONIO LUIS LICHA

Professor Dr. do Instituto de Economia da UFRJ

Resumo

A avaliação de riscos fornece uma compreensão objetiva de incertezas a serem enfrentadas e é útil para tomada de decisões eficientes em diversas áreas. Este estudo tem como objetivo explorar e comparar métricas de risco financeiro – especificamente o Value-at-Risk (VaR) e o Conditional Value-at-Risk (CVaR) – para avaliar sua eficiência, pontos fortes e fracos. Diante da ausência de um consenso sobre a medida mais adequada para o risco financeiro, esta pesquisa realiza uma análise exploratória em diferentes mercados, incluindo ações, câmbio e renda fixa. O estudo busca identificar o desempenho dessas métricas em contextos diversos, utilizando o método histórico e o método paramétrico com modelos variados, como distribuições normal e t-student, além de incorporar diferentes níveis de significância. O método histórico do VaR demonstrou eficiência, especialmente quando atualizado diariamente, enquanto o paramétrico normal apresentou limitações, exacerbadas durante eventos extremos como a pandemia de Covid-19, decretada em março de 2020. Os resultados também apontam que, para a renda fixa, a parametrização por t-student de 4 graus de liberdade foi mais eficaz do que os demais modelos paramétricos. A pesquisa destaca a importância da constante atualização de dados para otimizar modelos de risco. Embora se reconheça algumas limitações intrínsecas, como a incapacidade de se prever eventos imprevisíveis, conhecidos como "cisnes negros", ressalta-se a relevância e a necessidade contínua da gestão de risco para uma compreensão objetiva dos desafios financeiros. A habilidade de gestores e investidores em prever riscos de forma mais precisa oferece vantagens significativas na minimização de perdas e aproveitamento de oportunidades. Em síntese, este trabalho busca contribuir para o entendimento crítico da gestão de riscos financeiros, promovendo uma abordagem fundamentada empiricamente e que também é teoricamente rico ao organizar conceitos advindos da literatura e discutir os modelos associados.

Palavras-chave: Métricas de Risco; Gestão de Riscos; Risco Financeiro; Value-at-Risk (VaR); Conditional Value-at-Risk (CVaR).

Abstract

Risk assessment provides an objective understanding of uncertainties to be faced and is useful for efficient decision-making in various areas. The objective of this study is to explore and compare financial risk metrics – specifically Value-at-Risk (VaR) and Conditional Value-at-Risk (CVaR) – to assess their effectiveness, strengths, and weaknesses. In the absence of a consensus regarding the most suitable measure for financial risk, this research conducts an exploratory analysis across different markets, including stocks, currency exchange, and fixed income. The study seeks to identify the performance of these metrics in diverse contexts, using both historical and parametric methods with various models, such as normal and t-student distributions, and incorporating different significance levels. The historical VaR method demonstrated efficiency, especially when updated daily, while the normal parametric method showed limitations, exacerbated during extreme events such as the Covid-19 pandemic declared in March 2020. Results also indicate that, for fixed income, the parametrization by a t-student of 4 degrees of freedom was more effective than other parametric models. The research highlights the importance of a continuous update of data to optimize risk models. Although acknowledging some intrinsic limitations, such as the inability to predict unforeseeable events, known as “black swans”, this study emphasizes the crucial and ongoing need for risk management to gain an objective understanding of financial challenges. The ability of managers and investors to predict risks more accurately provides significant advantages in minimizing losses and seizing opportunities. In summary, this work aims to contribute to a critical understanding of financial risk management, promoting an empirically grounded and theoretically enriching approach.

Keywords: Risk Metrics; Risk Management; Financial Risk; Value-at-Risk (VaR); Conditional Value-at-Risk (CVaR).

Lista de Figuras

Figura 4 - 1: Preço do Índice Ibovespa.....	27
Figura 4 - 2: Preço da taxa de câmbio Dólar	27
Figura 4 - 3: Preço dos vértices da ETTJ Pré-fixada.....	28
Figura 4 - 4: Ilustração do método de <i>Backtesting</i>	29
Figura 5 - 1: Modelos de VaR para o Índice Ibovespa ($\alpha = 95\%$).....	32
Figura 5 - 2: Modelos de VaR para o Dólar ($\alpha = 95\%$).....	32
Figura 5 - 3: Modelos de VaR para a ETTJ Pré-fixada ($\alpha = 95\%$)	33
Figura 5 - 4: Modelos de VaR para o Índice Ibovespa ($\alpha = 99\%$)	33
Figura 5 - 5: Modelos de VaR para o Dólar ($\alpha = 99\%$).....	34
Figura 5 - 6: Modelos de VaR para a ETTJ Pré-fixada ($\alpha = 99\%$)	34
Figura 5 - 7: VaR parametrizado por curva normal ($\alpha = 99\%$, Ibovespa).....	37
Figura 5 - 8: VaR parametrizado por curva normal ($\alpha = 95\%$, ETTJ Pré-fixada)	38
Figura 5 - 9: Gráfico QQ Plot dos retornos do Ibovespa em 2020 x Curva Normal Padrão	41
Figura 5 - 10: Gráfico QQ Plot dos retornos do Ibovespa em 2019 x Curva Normal Padrão	42
Figura 5 - 11: Gráfico QQ Plot dos retornos do Ibovespa em 2022 x Curva Normal Padrão	42
Figura 5 - 12: Função de autocorrelação dos retornos para o Dólar (2020).....	44
Figura 5 - 13: Função de autocorrelação dos retornos para o Ibovespa (2020).....	44
Figura 5 - 14: Função de autocorrelação do quadrado dos retornos para o Ibovespa (2020)	45

Lista de Tabelas

Tabela 5 - 1: Resultados dos testes para o VaR Histórico.....	35
Tabela 5 - 2: Resultados dos testes para o VaR Paramétrico (Normal)	35
Tabela 5 - 3: Resultados dos testes para o VaR Paramétrico (T-Student com 10 graus de liberdade).....	36
Tabela 5 - 4: Resultados dos testes para o VaR Paramétrico (T-Student com 4 graus de liberdade).....	36
Tabela 5 - 5: Resultados dos testes para os modelos de CVaR em 2019	39
Tabela 5 - 6: Resultados dos testes para os modelos de CVaR em 2020	39
Tabela 5 - 7: Resultados dos testes para os modelos de CVaR em 2021	39
Tabela 5 - 8: Resultados dos testes para os modelos de CVaR em 2022	40
Tabela 5 - 9: Resultados dos testes para os modelos de CVaR em 2023	40
Tabela 5 - 10: Teste Jarque-Bera para todas as distribuições de retornos ano a ano.....	43

Sumário

1 - Introdução.....	8
1.1 - Contexto	9
1.2 - Objetivo do Trabalho	10
2 - Revisão da Bibliografia e Hipóteses	11
2.1 - Definição de Métrica de Risco	11
2.2 - Desvio Padrão	12
2.3 - Risco de Queda (<i>Downside Risk</i>)	13
2.4 - <i>Value-at-Risk</i>	13
2.5 - Métodos de modelagem do VaR: Histórico e Paramétrico	15
2.6 - Conditional Value-at-Risk	16
2.7 - Coerência das Métricas de Risco	17
2.8 - Teste de Aderência (<i>Backtest</i>)	19
2.9 - Teste de Kupiec	20
2.10 - Teste de Christoffersen.....	21
2.11 - Testes I e II de Acerbi e Szekely	22
2.12 - Marcação a Mercado e Cálculo dos Retornos	23
2.13 - Estrutura Temporal da Taxa de Juros.....	25
3 - Metodologia	26
3.1 - Base de Dados	26
3.2 - Implementação dos Testes para os Modelos de VaR.....	29
3.3 - Implementação dos Testes para os Modelos de CVaR	30
4 - Teste Empírico: Resultados e Discussão.....	32
4.1 - Resultados VaR	32
4.2 - Resultados CVaR	38
5 – Considerações Finais	46
6 - Referências Bibliográficas:	49

1 - Introdução

A medição de risco desempenha um papel fundamental em diversas áreas do conhecimento. Ela é importante já que fornece uma compreensão objetiva dos riscos que estão sendo enfrentados. Ter conhecimento e avaliar os riscos é útil precisamente porque permite uma tomada de decisão mais eficiente para se atingir os objetivos perseguidos, sejam quais forem.

Risco pode ser definido, de uma maneira geral, como a possibilidade de ocorrência de eventos indesejáveis ou prejudiciais. É uma medida da incerteza associada a um evento futuro e da possibilidade de danos ou perdas. Risco é um conceito que pode ser aplicado a inúmeras áreas de estudo. O presente trabalho tem como foco específico o risco financeiro, este se refere à possibilidade de perdas financeiras decorrente de diversas incertezas presentes nos mercados financeiros e, ainda mais especificamente, foca-se em uma subdivisão desse, denominada de risco de mercado, a ser definida mais adiante. De maneira resumida, risco financeiro pode ser visto como a chance de que um investimento, transação ou negócio não produza os resultados desejados, levando à perda de capital.

Risco não é necessariamente um conceito negativo. Todo tipo de ação humana envolve risco em algum sentido. Em muitos casos, assumir riscos podem levar a oportunidades e benefícios. Há uma concepção comum no mercado financeiro de que há um *trade-off* entre risco e retorno. De acordo com Jorion (2007), existe uma relação positiva entre risco e retorno, o que significa que investimentos mais arriscados geralmente oferecem retornos mais altos. No entanto, essa relação não é linear e pode variar muito dependendo das condições de mercado e do tipo de investimento. Sendo assim, um gerenciamento adequado de risco tem como propósito entender a situação em que um investimento ou negócio se encontra de forma a encontrar um equilíbrio entre aproveitar oportunidades e minimizar possíveis perdas.

Neste trabalho, realiza-se uma análise exploratória a respeito de modelos de risco envolvendo as seguintes métricas quantitativas: *Value-at-Risk* (VaR) e *Conditional Value-at-Risk* (CVaR), identificando pontos fortes e fracos, assim como a eficiência dos diferentes modelos.

Este estudo tem um caráter empírico-analítico, devido a apoiar-se em dados levantados e em realizar análises estatísticas para validação de hipóteses. Envolve, ainda,

um aspecto teórico ao organizar conceitos advindos da literatura e discutir os modelos associados.

1.1 - Contexto

Segundo Peter Bernstein, em “Desafio aos Deuses” (1998), “a concepção do controle do risco constitui uma das ideias centrais que distinguem os tempos modernos do passado mais remoto”. Risco é um dos pilares do mercado financeiro e a gestão de risco constitui um trabalho diário e contínuo de todas as instituições financeiras ao redor do mundo.

Um exemplo extremo em nível global relacionado à uma má gestão de risco foi a crise financeira em 2007-2008, que afetou a economia global como um todo de forma sistêmica. Bellini (2017) argumenta como essa crise foi causada por uma combinação de fatores, incluindo a bolha imobiliária nos Estados Unidos, a securitização de hipotecas de alto risco e uma falta de regulamentação de risco adequada. O autor destaca como a crise afetou os bancos e outras instituições financeiras em todo o mundo, levando à falência ou o resgate pelo governo de muitas dessas instituições. Em resposta a este cenário, os governos em todo o mundo tomaram medidas para estabilizar o sistema financeiro e prevenir futuras crises. Uma dessas respostas foi o Acordo de Basileia III (2010-2022), que estabeleceu novos requisitos de capital para os bancos e introduziu medidas para reduzir o risco sistêmico. Estas implicações demonstram que estudar risco é fundamental para evitar consequências negativas. É importante reconhecer os riscos de forma a buscar minimizá-los. A gestão de riscos desempenha, então, um papel imprescindível para a proteção financeira de qualquer instituição, permitindo-a tomar as melhores atitudes ao lidar com a incerteza sobre o futuro.

Ainda que o risco financeiro possa ser considerado em uma diversidade de subdivisões – que variam a depender do autor – Jorion (2007) afirma que esse tipo de risco geralmente é classificado em quatro categorias: risco de mercado, risco de liquidez, risco operacional e risco de crédito. Este estudo foca especificamente no risco de mercado e nas suas diferentes formas de quantificação. O risco de mercado é um tipo de risco financeiro que se refere à possibilidade de perda financeira decorrente de flutuações nos preços dos ativos financeiros. Isso inclui riscos associados a mudanças nas taxas de juros, taxas de câmbio, preços das ações e commodities. Este tipo de risco é uma fonte importante de informação para empresas e instituições financeiras que operam em

mercados financeiros e geralmente é gerenciado por meio de técnicas como diversificação de portfólio ou *hedges*.

1.2 - Objetivo do Trabalho

Métricas de risco (ou medidas) são utilizadas para quantificar este conceito abstrato conhecido como risco. Ao utilizar dados de mercado como insumos, uma métrica de risco consegue apresentar o risco em número. Com isso, pode-se ter uma noção de que tipo de perda é esperado em um investimento e ainda permitir uma comparação entre diferentes investimentos.

Entretando, como saber qual métrica usar? Qual métrica consegue medir o risco com mais precisão? Será que uma métrica consegue ser superior às outras ou há métricas que possuem vantagens em determinadas situações específicas? Será que uma métrica funciona melhor em um tipo de mercado? Este estudo tem como objetivo explorar tais questões.

Kato (2004) afirma que ainda não há um consenso sobre qual é a medida de risco mais adequada para o risco financeiro. Uma análise comparativa entre diferentes medidas de risco, como realizada neste trabalho, pretende contribuir com conhecimento acerca do tema de gestão de riscos. É senso comum que cada métrica possui vantagens e limitações, sendo assim, a pesquisa comparativa pode contribuir para identificar qual delas é mais adequada em diferentes contextos. A avaliação da consistência dos resultados oferece maior compreensão sobre se as métricas convergem ou se há discrepâncias significativas que precisam ser consideradas.

São investigados quatro modelos de *Value-at-Risk* (VaR): um por método histórico e três por métodos paramétricos (distribuição normal, distribuição t-student com 10 graus de liberdade e distribuição t-student com 4 graus de liberdade) e três modelos de *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) de método paramétrico, utilizando as mesmas distribuições do VaR. Todos os modelos são analisados em diferentes mercados: ações, câmbio e renda fixa. Além disso, os modelos de VaR foram verificados em níveis de significância distintos.

2 - Revisão da Bibliografia e Hipóteses

2.1 - Definição de Métrica de Risco

Inicialmente é importante definir melhor o conceito específico de métrica de risco utilizado neste trabalho, assim como apresentar suas características distintas. Neste estudo, utilizou-se o *Value-at-Risk* (VaR) em dois métodos distintos (histórico e paramétrico) e o *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) pelo método paramétrico. Esta escolha deveu-se à sua relevância no mercado financeiro e no meio acadêmico para se quantificar o risco. A métrica de risco mais comum para se medir a volatilidade, o desvio padrão, também está definida adiante, visto que é utilizada como um parâmetro para modelar o VaR e o CVaR.

Verificou-se que uma métrica de risco é uma medida quantitativa que tem o objetivo de fornecer uma avaliação do risco de mercado associado a um determinado ativo financeiro, portfólio ou investimento de uma forma geral. Ferramentas que mapeiam variáveis aleatórias para números reais são chamadas de medidas e, em nosso caso específico, medidas de risco (ROCCIOLETTI, 2015).

Artzner et al. (1999) fornecem uma definição de risco bem pragmática ao descrever o quão próxima ou distante uma posição de investimento está em relação ao que é aceito pelo regulador. O grau de risco de uma posição é expresso por um número. Quanto mais arriscada a posição, maior será sua medida de risco. Desta maneira, se o risco excede um certo limite definido pelo regulador, este excesso é interpretado como uma quantidade de capital que o agente deve adicionar à posição para torná-la aceitável. Da mesma maneira, se o risco fica abaixo do limite definido, o agente pode retirar uma quantia em dinheiro desta posição que já é aceitável e investi-la de forma mais lucrativa. Nessa definição, Artzner et al. (1999) relacionam o conceito de medida de risco à aceitabilidade de um regulador. Dependendo do grau de tolerância de um regulador específico, pode-se ter diferentes conjuntos de posições aceitáveis.

Entretanto, independentemente do grau de tolerância estabelecido por um regulador, o número que representa o grau de risco de um ativo ainda pode ser utilizado ao compará-lo com o número de outro ativo. Essa abordagem é útil porque fornece informação sobre quais ativos são mais ou menos arriscados.

2.2 - Desvio Padrão

Harry Markowitz (1952) em seu artigo – inovador para a época – “*Portfolio Selection*” provocou uma revolução na área de finanças e investimentos e influenciou o desenvolvimento da gestão de risco de mercado. Ele criou uma abordagem sistemática e quantitativa para construir portfólios com diferentes ativos e minimizar a relação risco-retorno do portfólio com base no retorno esperado, volatilidade e covariância desses ativos. Ele demonstrou que, ao combinar ativos financeiros com diferentes características de risco e retorno em um portfólio, é possível obter uma redução do risco total sem necessariamente sacrificar o retorno esperado. Markowitz (1952) utilizou o desvio padrão como uma medida de volatilidade dos ativos financeiros. Ele argumentou que o desvio padrão é uma medida adequada para capturar a variabilidade dos retornos de um ativo ao longo do tempo, e utilizou essa medida como parte fundamental do cálculo do risco em sua teoria de seleção de portfólio. O desvio padrão amostral é definido como a dispersão de um conjunto de dados de uma amostra em relação à sua média. Ele apresenta uma estimativa numérica do quanto se desviam os valores individuais da média. O desvio padrão amostral é definido matematicamente como:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

Em que s representa o desvio padrão amostral; X_i são os valores individuais do conjunto de dados; \bar{X} é a média amostral dos dados; e n é o número de observações na amostra.

No entanto, é importante ressaltar que o desvio padrão como uma única medida de risco possui algumas limitações e críticas. Por exemplo, ele é habitualmente adequado sob a premissa de que os retornos dos ativos da carteira seguem uma distribuição normal, o que nem sempre é uma hipótese verdadeira na prática. Muitas vezes a distribuição de retornos apresenta uma cauda pesada do lado esquerdo, indicando eventos extremos de queda, sendo incompatível, portanto, com a hipótese de normalidade. A assimetria e a curtose não são consideradas quando se observa apenas o desvio padrão. Por isso, muitos autores acadêmicos como Roman e Mitra (2009) e investidores advogam pelo uso de métricas de risco focadas no lado inferior da distribuição de retorno, ou seja, no risco conhecido como risco de queda (*downside risk*).

2.3 - Risco de Queda (*Downside Risk*)

Métricas de risco de *downside* são medidas assimétricas que quantificam o risco de acordo com os resultados e probabilidades de ocorrência de retornos abaixo de valores-alvo específicos. A ideia geral sobre o risco de *downside* é que o lado esquerdo de uma distribuição de retorno envolve o verdadeiro risco que se deseja evitar, enquanto o lado direito contém melhores oportunidades de investimento. Por exemplo, a volatilidade envolvendo retornos positivos pode aumentar muito o desvio padrão, mas não ser considerado algo negativo necessariamente. Além disso, argumenta-se que as métricas de risco de *downside* são mais intuitivas e estão mais em conformidade com a ideia geral do risco como um resultado indesejável ou adverso. O VaR e o CVaR – expostos adiante – podem ser considerados métricas de *downside*.

2.4 - *Value-at-Risk*

O *Value-at-Risk* (VaR) é uma medida de risco financeiro que estima a pior perda de um investimento ou carteira em um determinado horizonte de tempo, com um determinado nível de confiança (JORION, 2007). Em outras palavras, o VaR é uma estimativa estatística da perda máxima que uma carteira pode sofrer em condições normais de mercado durante um período específico. Por exemplo, se uma carteira de investimentos apresenta um VaR de 10 milhões de reais com um nível de confiança de 95% para um horizonte de tempo de um dia, isso significa que há uma probabilidade esperada de 5% de que a carteira tenha uma perda maior do que 10 milhões de reais em um único dia.

Ressalta-se que o nível de confiança e o horizonte de tempo escolhidos são convenções. Os níveis de confiança α de 95% e 99% e o horizonte de tempo de 1 dia são frequentemente usados para estimar o VaR. Além disso, Berger (2023) ressalta dois usos para o VaR que podem ser aplicados de maneira genérica a qualquer medida de risco: primeiro como uma medida de comparação e segundo como um indicador de perda. Ao comparar o risco entre vários ativos diferentes, pode-se obter uma melhor noção dos níveis de risco que o investidor está se propondo a aceitar e, com isso, utilizar essa informação para escolher um ativo menos arriscado se desejar. Entretanto, não se deve descartar também a utilidade do VaR como um indicador de perda ligada a uma carteira de investimento específica.

Obtém-se uma definição formal para o VaR ao considerá-lo como um quantil (de nível $1 - \alpha$) de uma distribuição de retornos projetada, supondo uma distribuição de retornos R associada a uma carteira e sua função de distribuição correspondente $F_R(l) = P(R \leq l)$. Dado um nível de confiança $\alpha \in (0, 1)$, o VaR da carteira no nível de confiança α é dado pelo maior número l tal que a probabilidade do retorno R ficar abaixo de l não seja maior que $(1 - \alpha)$. Em outros termos, o VaR é simplesmente um percentil da distribuição de retornos definido da seguinte maneira:

$$VaR_\alpha(R) = \max\{l \in \mathbb{R}: P(R < l) \leq 1 - \alpha\}$$

Há alguns métodos diferentes de se calcular o VaR, sendo os mais comuns o método paramétrico e o método histórico. O método paramétrico consiste em parametrizar uma distribuição de retornos projetada estimando os parâmetros correspondentes a partir dos dados observados na amostra e, em seguida, calcular a métrica de risco sobre a distribuição estimada. Este método é simples, porém se baseia na premissa de que é adequado estimar os retornos das posições de uma carteira de investimento usando a distribuição escolhida.

Tradicionalmente, o VaR se tornou uma medida de risco padrão no mercado financeiro devido a ter sido estabelecido nos acordos internacionais de Basileia em 2004 como um requisito obrigatório de mensuração de risco pelos bancos. Os requisitos para o risco de mercado foram estabelecidos no Acordo de Basileia II (2004) e foram posteriormente aprimorados no Acordo de Basileia III (2010-2022). O objetivo das diretrizes desses acordos é assegurar que os bancos tenham capital adequado para cobrir potenciais perdas decorrentes de flutuações nos preços de mercado de instrumentos financeiros. Os bancos que usam modelos internos para o cálculo são obrigados a realizar testes de aderência (*backtesting*) para verificar a adequação de seus modelos de VaR. Isso envolve a comparação dos valores de VaR calculados com as perdas reais observadas ao longo do tempo.

O VaR também se tornou uma das medidas de risco mais populares porque é uma medida simples e fácil de entender, que permite aos investidores avaliar rapidamente o risco de uma carteira de investimentos. Além disso, o VaR é amplamente utilizado por reguladores e instituições financeiras para avaliar a exposição ao risco de mercado e definir limites de risco. Ele tem a vantagem de poder ser calculado para diferentes horizontes temporais (por exemplo: um dia, uma semana ou um mês) e níveis de

confiança (sendo 95% ou 99% os mais comumente utilizados), permitindo aos investidores ajustar a medida às suas necessidades específicas.

2.5 - Métodos de modelagem do VaR: Histórico e Paramétrico

Um dos métodos utilizado neste trabalho é o baseado em simulação histórica, abreviado simplesmente por método histórico. Este consiste em calcular os retornos de uma carteira no passado utilizando o próprio preço dos ativos em análise e determinar o quantil $(1 - \alpha)$ da amostra que corresponde ao pior retorno possível dado o nível de confiança α . Este método mais geral tem a vantagem de não fazer nenhuma suposição sobre a forma da distribuição dos retornos e está mais alinhado com as definições de perda inesperada, que se tornaram comuns para medir o risco de crédito em horizontes temporais longos (JORION, 2007).

O outro método empregado de forma a se obter uma comparação direta com o método histórico apoia-se na parametrização e será abreviado simplesmente por método paramétrico. Trata-se de uma estimação do VaR a partir de parâmetros de uma distribuição que não seja necessariamente a gaussiana, sendo possível parametrizar uma infinidade de curvas diferentes para representar a distribuição de retornos projetada. Porém, o método paramétrico mais comum se refere a uma estimação de uma curva gaussiana (normal) a partir dos parâmetros da média e desvio padrão.

Baseando-se, então, na premissa da normalidade dos retornos para estimar o risco, sendo μ a média amostral dos retornos, σ o desvio padrão amostral dos retornos e Φ a função de distribuição da normal padrão, então o VaR paramétrico para o nível de confiança α é:

$$VaR_{\alpha} = \mu - \sigma \Phi^{-1}(\alpha)$$

Em muitos casos, é preferível uma distribuição t-student do que uma gaussiana para modelar retornos do mercado por aquela ter uma capacidade de lidar melhor com caudas mais pesadas. É comum, em algumas janelas de tempo, o mercado apresentar retornos negativos ou positivos de módulo muito elevado. Então, para capturar melhor a possibilidade de eventos extremos, este estudo testou a hipótese a criação um modelo de VaR com parametrização por t-student é adequado.

Sendo v o número de graus de liberdade; μ a média; e com uma variância = $\frac{v\sigma^2}{v-2}$ para $v > 2$; pode-se definir um modelo de VaR utilizando a função de distribuição t_v e a densidade g_v para a t-student padrão de nível de confiança α :

$$VaR_\alpha = \mu - \sigma t_v^{-1}(\alpha)$$

Ressalta-se que, no caso da distribuição t-student, σ não é o desvio padrão. Uma variável aleatória X tem distribuição t-student com v graus de liberdade e parâmetros de locação e escala respectivamente dados por μ e σ quando:

$$\frac{X - \mu}{\sigma} \sim t_v$$

2.6 - Conditional Value-at-Risk

Rockafellar (2000) enfatiza o uso do *Conditional Value-at-Risk* (CVaR) como uma melhor alternativa para otimizar um portfólio de investimentos do que o VaR. Uma característica que pode ser problemática é de que é possível criar carteiras com o mesmo valor de VaR, porém com níveis completamente diferentes de risco na cauda esquerda de retornos. Ou seja, o VaR falha em captar as nuances do que ocorre na cauda esquerda de retornos quando os retornos ficam abaixo do limite exposto pelo VaR.

O CVaR (*conditional value at risk*) é uma medida de risco que também pode ser considerada baseada no lado inferior da distribuição de retornos e pode ser uma solução para esta limitação do VaR. Muitas vezes o CVaR, também conhecido como *expected shortfall*, é utilizado em conjunto com o VaR por suas características complementares. Além disso, como o nome já diz, essa medida é condicional ao VaR, estimando a média das perdas além do VaR em um determinado nível de confiança. Enquanto o VaR fornece uma estimativa do pior cenário possível em um determinado nível de confiança, o CVaR estima a média das perdas além desse nível. É uma medida de risco que se concentra nas perdas mais severas e é particularmente útil para capturar o risco de cauda negativa da distribuição de retornos. Rockafellar (2000) argumenta que ela fornece informações mais completas sobre o risco, levando em consideração não apenas a magnitude das perdas em eventos extremos, mas também sua probabilidade de ocorrência.

Roccioletti (2015) fornece uma definição geral para o CVaR como sendo o de um valor esperado condicional das perdas quando o VaR correspondente ao quantil $(1 - \alpha)$ é ultrapassado:

$$CVaR_\alpha(R) = E\{R|R < VaR_\alpha\}$$

Ao se utilizar o método do CVaR parametrizado, outras definições matemáticas específicas podem ser utilizadas. Roccioletti (2015) apresenta as definições parametrizadas a seguir. No caso de uma parametrização por curva normal em que Φ representa a função de distribuição da normal padrão e ϕ a sua densidade, O CVaR é:

$$CVaR_\alpha = \mu - \sigma \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha}$$

Para uma parametrização por uma distribuição t-student, sendo v o número de graus de liberdade; μ a média; e com uma variância = $\frac{v\sigma^2}{v-2}$ para $v > 2$; pode-se definir um modelo de CVaR utilizando a função de distribuição t_v e a densidade g_v para a t-student padrão:

$$CVaR_\alpha = \mu - \sigma \frac{g_v(t_v^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \left(\frac{v + (t_v^{-1}(\alpha))^2}{v - 1} \right)$$

2.7 - Coerência das Métricas de Risco

Artzner et al. (1999) introduzem o conceito de coerência das métricas de risco. Uma métrica de risco é considerada coerente se ela satisfaz certos axiomas que garantem propriedades matemáticas desejáveis para avaliar o risco de forma consistente. Os axiomas necessários para a coerência são quatro: monotonicidade, subaditividade (convexidade), invariância sobre translações e homogeneidade positiva.

Sendo X_1 e X_2 posições financeiras que pertencem a uma certa classe χ de posições financeiras, o axioma da monotonicidade explica que se, em cada estado da natureza, a posição X_2 sempre se sai melhor do que a posição X_1 , então o risco associado a X_1 (denotado por uma função ρ que quantifica o risco) deveria ser maior do que o relacionado a X_2 (ROCCIOLETTI, 2015):

$$\rho(X_1) \geq \rho(X_2) \quad \forall X_1 \leq X_2$$

O axioma da subaditividade diz que, graças aos benefícios da diversificação, uma carteira composta por vários ativos será estritamente menos arriscada do que uma carteira composta por um único instrumento, desde que a correlação entre os ativos seja diferente de 1 (ROCCIOLETTI, 2015). Sendo assim, havendo limites de risco individuais para diferentes posições, o risco total é limitado pela soma desses riscos individuais:

$$\rho(X_1 + X_2) \leq \rho(X_1) + \rho(X_2)$$

O axioma da invariância sobre translações mostra que adicionar uma quantia de dinheiro $m \in \mathbb{R}$ a uma carteira com uma determinada posição financeira resulta em uma diminuição do risco desta carteira pela mesma quantidade e vice-versa. De acordo com a definição de risco fornecida por Artzner et al. (1999), $\rho(X)$ pode ser interpretado como uma quantia que deve ser adicionada a uma posição X de forma a torná-la aceitável para uma agência reguladora:

$$\rho(X_1 + m) = \rho(X_1) - m$$

O axioma da homogeneidade positiva mostra que, se uma exposição a uma posição específica for aumentada por um fator $\tau > 0$, então a medida de risco relacionada a essa posição também se modifica por este mesmo fator τ . Por exemplo, se uma posição duplicar, a medida de risco associada a esta posição também é duplicada:

$$\rho(\tau * X) = \tau * \rho(X)$$

Ao se referir à propriedade da homogeneidade positiva, considera-se apenas o risco de mercado porque, caso uma posição aumente por um fator τ , se poderia argumentar que o risco de liquidez aumentaria em uma razão maior que τ devido a uma dificuldade maior em liquidar a posição. Entretanto, este não é o escopo deste estudo, como foi elucidado anteriormente.

O VaR apresenta todos os axiomas necessários para ser uma medida de risco coerente, menos o axioma da subaditividade. Ele não satisfaz a propriedade de subaditividade em todos os casos e, por isso, não é considerado uma métrica de risco coerente. Devido ao VaR assumir independência entre os ativos, ele não considera as correlações entre os ativos dentro de uma mesma carteira. Sendo assim, ele não reflete a redução de risco total que ocorre quando os ativos são combinados e, portanto, não apresenta a subaditividade.

No entanto, a ausência da propriedade de subaditividade não significa que o VaR seja ruim, mas demonstra uma limitação quando se trata de avaliar o risco em cenários de diversificação, incentivando a complementação do VaR com outras métricas como o CVaR, por exemplo.

O CVaR possui a vantagem de cumprir os quatro axiomas mencionados e, então, se qualifica como uma medida coerente de risco. Por esse motivo e pelo fato dele cobrir outra falha do VaR – a de que ele não captura a magnitude da perda se a mesma estiver abaixo do quantil do VaR – tudo indica que o CVaR é um complemento excelente para se analisar o risco. O problema do CVaR surge a partir de uma dificuldade maior em se encontrar uma metodologia de *backtesting* adequada, o que é discutido mais adiante.

2.8 - Teste de Aderência (*Backtest*)

Tendo sido definidas as medidas de risco a serem analisadas, este estudo tem como objetivo investigar as características destas métricas em ativos com diferentes fatores de risco para se ter uma ideia geral do funcionamento das mesmas. Há diferentes meios para validar um modelo de risco como, por exemplo, testes de estresse, entretanto, para determinar se as medidas acima são adequadas para prever o risco futuro com base em seus históricos passados, neste trabalho utilizou-se uma ferramenta de validação conhecida como teste de aderência (*backtest*).

O *backtesting* é uma técnica estatística que compara as previsões de risco feitas pelo modelo com os resultados reais observados em um período anterior. Ao comparar as previsões com os resultados reais, é possível identificar as fraquezas do modelo e fornecer ideias para melhorias. Esta técnica opera identificando a quantidade de violações (ou exceções) do modelo de risco, ou seja, a quantidade de vezes que o risco observado na realidade supera o risco previsto pelo modelo. Como exemplo rudimentar, em um modelo de VaR com nível de confiança de 99% e 1000 observações, é esperado que ocorram 10 violações do valor esperado de perda pelo modelo. Sendo assim, o *backtest* deve-se utilizar de técnicas estatísticas para validar se o nível de exceções está de acordo com o valor esperado.

O *backtesting* também pode ajudar a garantir que um banco ou outra instituição financeira esteja mantendo capital suficiente para cobrir seus riscos. Se o modelo subestimar o risco, a instituição pode não estar mantendo capital suficiente, o que pode ser perigoso em caso de perdas inesperadas. Por outro lado, se o modelo superestimar o risco, a instituição pode estar sendo excessivamente conservadora e mantendo mais capital do que é necessário. Além disso, o *backtesting* é uma ferramenta importante para garantir que as instituições financeiras estejam em conformidade com as regulamentações e padrões internacionais de gerenciamento de riscos. Como explicado anteriormente, as

autoridades reguladoras geralmente exigem que as instituições financeiras realizem testes regularmente para garantir que seus modelos de risco sejam precisos e confiáveis.

2.9 - Teste de Kupiec

Um dos métodos de *backtest* mais utilizados em gerenciamento de riscos para avaliar a adequação de modelos é o teste de Kupiec. O teste foi desenvolvido por Paul Kupiec (1995) com o objetivo de verificar se a frequência de perdas que excedem o modelo de risco é consistente com o próprio modelo. Define-se uma função $f(x)$ para descobrir o número de exceções tal qual:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } R_t < P_t \\ 0, & \text{se } R_t \geq P_t \end{cases}$$

Em que R_t representa o retorno real observado no dia t ; e P_t é o valor do risco previsto para o dia t .

O número n de exceções para o número de observações K então é:

$$n = \sum_{x=1}^K f(x)$$

Sendo assim, considerando a hipótese nula de que os dados são consistentes com o modelo, o número de exceções segue uma distribuição binomial:

$$P(n|T, p) = \binom{T}{n} p^n (1-p)^{T-n}$$

Dowd (2002) complementa que, para se implementar o teste de Kupiec, é necessário informações sobre T , p e n . Os dois primeiros podem ser facilmente obtidos a partir do tamanho da amostra e do nível de confiança especificado pelo modelo de risco, e pode-se derivar n a partir de um conjunto de observações em pares a cada período (retornos reais observados e os valores de risco previstos associados) como foi mostrado a partir da definição da função $f(x)$.

A estatística de teste para este método de Kupiec, também conhecido como teste de cobertura incondicional, é:

$$LR_{uc} = -2 \ln \left(\frac{(1-p)^{T-n} p^n}{\left[1 - \left(\frac{n}{T}\right)\right]^{T-n} \left(\frac{n}{T}\right)^n} \right)$$

Em que LR_{uc} segue aproximadamente uma distribuição Qui-Quadrado com um grau de liberdade. O teste de hipótese é realizado sob a hipótese nula de que a proporção de exceções da amostra é igual ao de modelo de risco.

É importante salientar que o teste de Kupiec necessita de uma amostra suficientemente grande para ser estatisticamente significativo. Além disso, é um teste simples que se preocupa apenas com o número de exceções e não considera informações valiosas como o tamanho dessas exceções ou se estas são independentes entre si.

2.10 - Teste de Christoffersen

Uma alternativa útil ao teste anterior é a abordagem de backtesting condicional que foi sugerida por Christoffersen (1998). Sua tese é de separar o teste em duas hipóteses: uma de que o modelo produz uma frequência de perdas consistente com o modelo de risco abordado (utilizando a estatística de teste proposta por Kupiec) e outra de que as exceções são independentes entre si. Sendo assim, este teste cria a possibilidade de que o modelo possa falhar se as violações não forem independentes entre si, diferentemente do teste anterior.

Christoffersen assume que uma sequência de observações é dependente ao longo do tempo e pode ser descrita utilizando-se uma sequência de Markov de primeira ordem com a seguinte matriz de transição:

$$\begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & \pi_{01} \\ 1 - \pi_{11} & \pi_{11} \end{bmatrix}$$

Em que π_{ij} representa a probabilidade da situação i ser seguida da situação j em uma data imediatamente posterior. O número 0 representa um caso de não-violação do modelo de risco e 1 representa um caso de violação. π_{01} significa a probabilidade de ocorrer um caso de violação sendo o instante atual um caso de não-violação. π_{11} seria a probabilidade de ocorrer uma violação seguida de outra violação.

As probabilidades π_{01} e π_{11} descrevem todo o processo de Markov neste caso, já que a probabilidade π_{00} é dada por $(1 - \pi_{01})$ e a probabilidade π_{10} é dada por $(1 - \pi_{11})$. A função de verossimilhança é:

$$L(\Pi_1) = (1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}$$

Em que n_{ij} é o número total de dias em que o estado i precedeu o estado j . Além disso, as seguintes definições são utilizadas:

$$\pi_0 = \frac{n_{01}}{n_{00}+n_{01}}, \quad \pi_1 = \frac{n_{11}}{n_{10}+n_{11}}, \quad \pi = \frac{n_{01}+n_{11}}{n_{00}+n_{01}+n_{10}+n_{11}}$$

A estatística de teste para verificar essa hipótese de independência, que também segue aproximadamente uma distribuição Qui-Quadrado com um grau de liberdade é dada por:

$$LR_{ind} = -2 \ln \left(\frac{(1 - \pi)^{n_{00}+n_{01}} \pi^{n_{01}+n_{11}}}{(1 - \pi_0)^{n_{00}} \pi_0^{n_{01}} (1 - \pi_1)^{n_{10}} \pi_1^{n_{11}}} \right)$$

Enfim, o teste de cobertura condicional de Christoffersen, que representa um aprimoramento do teste de Kupiec, é resultado de uma análise conjunta das estatísticas de testes para o teste de cobertura incondicional e para o teste de independência. A estatística de teste LR_{cc} pode ser obtida simplesmente a partir de uma soma das duas estatísticas de testes apresentadas. No caso, obtém-se uma distribuição Qui-Quadrado com dois graus de liberdade:

$$LR_{cc} = LR_{uc} + LR_{ind}$$

2.11 - Testes I e II de Acerbi e Szekely

Com a finalidade de se testar o CVaR, Acerbi e Szekely (2014) forneceram alguns testes que podem ser aplicados caso se assumam a independência na ocorrência de violações de VaR. Sendo o CVaR o valor esperado da cauda de uma distribuição condicionado à violação do VaR, a seguinte fórmula é válida:

$$E \left[\frac{R_t}{\text{CVaR}_{\alpha,t}(R)} - 1 \mid R_t < \text{VaR}_{\alpha,t} \right] = 0$$

Sendo R_t o retorno de um ativo específico no dia t , $I_t = (R_t < \text{VaR}_{\alpha,t})$ um indicador de violação do VaR (com nível de confiança α) no dia t e $N_t = \sum_{t=1}^T I_t > 0$, extrai-se a seguinte estatística de teste para uma amostra com T retornos:

$$Z_1(R) = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{R_t * I_t}{\text{CVaR}_{\alpha,t}}}{N_t} - 1$$

A estatística acima se refere ao Teste I de Acerbi e Szekely. A hipótese nula assume que a distribuição preditiva de retornos é igual à distribuição real. Já a hipótese alternativa é escolhida para presumir apenas que há uma subestimação do risco, ou seja, caso a métrica de risco esteja muito alta, a hipótese nula não é rejeitada:

$$E_{H_0}[Z_1|N_t > 0] = 0$$

$$E_{H_1}[Z_1|N_t > 0] > 0$$

Nota-se que o valor esperado de Z_1 é zero e indica um problema quando se torna positivo à medida que vai se distanciando de zero. Há uma sensibilidade do teste com relação à magnitude dos retornos quando há violações de VaR, porém, esse é completamente insensível ao número de violações. O teste parte da premissa que o modelo subjacente de VaR já está validado. Mesmo sob a hipótese alternativa H_1 , o modelo de VaR continua correto, portanto, é necessário possuir um modelo validado de VaR para que este teste seja válido.

O Teste II de Acerbi e Szekely também é influenciado pela magnitude dos retornos nos eventos de violação de VaR, porém também é influenciado pela frequência de violações. Sua estatística de teste é:

$$Z_2(R) = \frac{\sum_{t=1}^T \frac{R_t * I_t}{\text{CVaR}_{\alpha,t}}}{T(1 - \alpha)} - 1$$

Pode-se notar que o denominador não considera no Teste II o número de violações. Mas também se parte da premissa de que o modelo do VaR já foi validado. Assim como no teste anterior, o valor esperado de Z_2 é zero quando a hipótese nula é válida:

$$E_{H_0}[Z_2] = 0$$

$$E_{H_1}[Z_2] > 0$$

2.12 - Marcação a Mercado e Cálculo dos Retornos

É importante apresentar alguns conceitos do mercado financeiro para que se possa ter a base necessária para compreender como os modelos de risco podem ser aplicados. Um desses conceitos é o de marcação a mercado. O preço marcado a mercado diz respeito ao “valor justo” de um ativo no mercado. Este preço garante uma referência para sua negociação ou liquidação. Ele representa os ganhos e perdas do ativo no tempo. Ou seja, é uma valoração do ativo ao longo do tempo e serve para se calcular os retornos que foram utilizados como insumos no cálculo de risco.

A marcação a mercado varia dependendo do ativo. Para ações e taxas de câmbio, o preço foi determinado pela última cotação negociada em ambiente de bolsa de valores nos dias úteis em que se teve negociação do ativo. Para se calcular o retorno do Ibovespa e da taxa cambial Real-Dólar, utilizou-se o retorno discreto diário. O retorno discreto diário é a forma mais comum de se medir o retorno de índices de mercado, ações individuais e moedas. É uma forma adequada de se medir as flutuações diárias de preços em ativos em que não há efeito de juros compostos como considerado no caso dos títulos pré-fixados. Sendo P_t o preço de fechamento do dia t e P_{t-1} o preço de fechamento no dia útil imediatamente anterior, o retorno discreto diário é calculado da seguinte forma:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1$$

A marcação a mercado dos títulos pré-fixados realizou-se utilizando retornos geométricos. O cálculo do retorno geométrico é preferível em títulos de renda fixa pré-fixados ao invés do retorno discreto devido à natureza de como os juros compostos afetam o retorno do investimento ao longo do tempo. O retorno geométrico leva em consideração o crescimento cumulativo que surge a partir dos juros compostos. Dowd (2002) afirma: “O retorno geométrico faz mais sentido ao longo de períodos de tempo mais longo porque permite que os rendimentos intermediários gerem retornos, enquanto o retorno aritmético assume implicitamente que os rendimentos intermediários ganham um retorno zero.” Sendo assim, para a marcação a mercado dos títulos pré-fixados, o retorno foi calculado da seguinte forma:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Para representar a taxa de juros pré-fixada, foram utilizadas Letras do Tesouro Nacional (LTNs) como títulos genéricos sem pagamento de cupons. Um título sem pagamento de cupom gera apenas um único fluxo de caixa no vencimento (R\$1.000,00 no caso da LTN), mas pode ser vendido antes do vencimento pelo preço determinado pela marcação a mercado. Sua precificação é feita da seguinte forma como consta no site do Tesouro Direto (Brasil, 2023):

$$P = \frac{1000}{(1+i)^{\frac{DU}{252}}}$$

Em que i representa a taxa de desconto do título ao ano e DU representa o número de dias úteis entre a data negociada e a data de vencimento. Para este trabalho, a taxa de desconto i considerada foi a taxa de juros anual negociada no vértice específico da curva de juros e DU é o prazo do vértice em dias úteis. Para representar o mercado de renda fixa construiu-se um portfólio contendo títulos que representam diversos vértices da curva de juros. Mais detalhes são esclarecidos posteriormente no capítulo de metodologia.

2.13 - Estrutura Temporal da Taxa de Juros

Por último, é importante definir um conceito utilizado para formar a carteira de renda-fixa. A Estrutura Temporal da Taxa de Juros (ETTJ) é uma representação gráfica da relação entre as taxas de juros de títulos que possuem uma mesma qualidade de crédito, mas prazos diferentes. Sendo assim, ela serve como uma ferramenta para a precificação de instrumentos de renda fixa. A ETTJ é especialmente útil para este trabalho pois dela foram extraídas as taxas de descontos i para compor os títulos de renda fixa. É uma simplificação da precificação de um título, pois desconsidera fatores como o prêmio de liquidez e o prêmio de crédito que também podem influenciar no preço de um título. Porém, a oscilação da taxa de juros do mercado é provavelmente o principal fator nas mudanças de preço de um título.

3 - Metodologia

Neste trabalho, toda manipulação de dados, cálculo das métricas de risco, assim como a execução do *backtest* e dos testes estatísticos foram realizados utilizando a linguagem de programação R no ambiente de desenvolvimento RStudio, de *software* livre.

3.1 - Base de Dados

Para que o estudo não fique limitado no sentido de analisar os modelos de risco em apenas um ativo financeiro ou determinado tipo de ativo financeiro, os portfólios utilizados para a análise de risco neste trabalho devem representar uma gama diversa de fatores de risco. Neste sentido, foram escolhidos ativos para representar diferentes mercados relevantes: o índice Ibovespa, a taxa de juros pré-fixada e a taxa cambial entre o Real e o Dólar Americano (abreviada simplesmente por Dólar a partir daqui). Com isso, obtém-se uma representatividade do mercado de renda variável, do mercado de câmbio e do mercado de renda fixa.

Uma vez que a taxa de juros pré-fixada varia ao longo do tempo e há diferentes títulos atrelados a esta taxa, um portfólio representativo deste mercado em particular pode ser montado a partir de uma seleção de diferentes vértices da curva de juros, ou seja, uma carteira que engloba títulos com diferentes vencimentos da curva de juros em questão.

Cada mercado analisado neste trabalho foi representado, portanto, por um ativo genérico. O mercado de renda variável foi representado pelo índice Ibovespa, o mercado de câmbio foi representado pela taxa de câmbio de venda PTAX e o mercado de renda fixa foi representado por um portfólio composto de LTNs sintéticas de diferentes vértices extraídos da ETTJ.

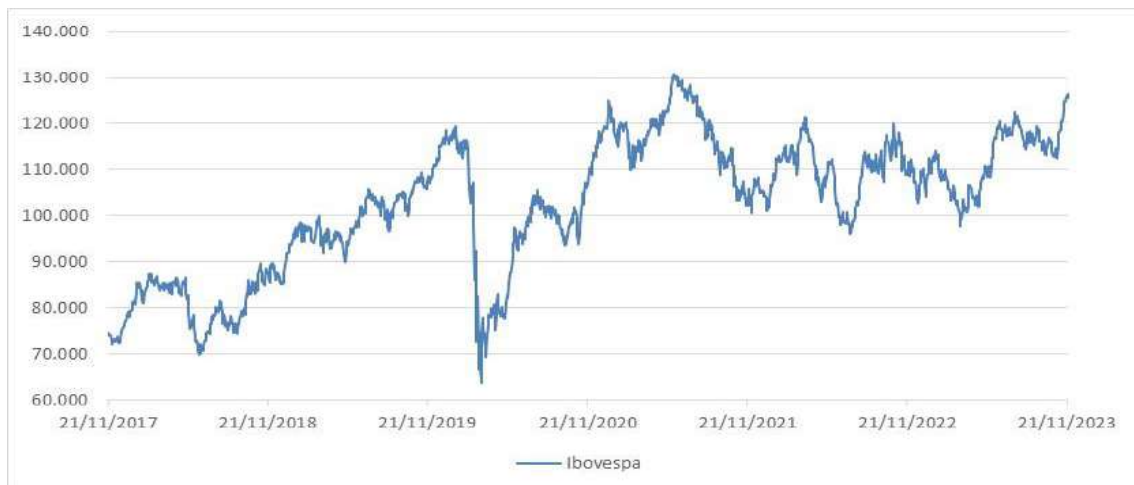
Os dados foram extraídos pela base de dados fornecida pelo sistema integrado de informações financeiras da Comdinheiro, uma empresa especializada em fornecer dados de mercado para diversas instituições financeiras ao redor do Brasil.

Foram extraídas as taxas fornecidas pela ETTJ Pré-fixada da ANBIMA dos vértices 126 DU, 252 DU, 504 DU, 1008 DU e 2016 DU de 20/11/2017 até 24/11/2023. Também foram extraídos, para o mesmo período de tempo, os preços de fechamento do índice Ibovespa e da taxa de câmbio de venda PTAX (calculada pelo Banco Central do Brasil e muito utilizada como a taxa de referência para o valor do dólar americano).

É importante esclarecer que, nas séries de dados da ETTJ, há uma lacuna de dados no período compreendido entre 05/07/2019 até 30/07/2019 (18 dias úteis) em todos os vértices considerados. Como solução, foi feita uma interpolação linear para preencher esse período. Sendo assim, ao se observar um gráfico dessas séries, se visualizará uma linha reta no período em questão que pode não corresponder à realidade. Entretanto, esse período é pequeno comparado à totalidade da amostra, então não deve comprometer o *backtesting*.

Os dados referentes aos preços dos ativos citados, com suas características de risco distintas podem ser visualizados nas figuras 4-1, 4-2 e 4-3 a seguir.

Figura 4 - 1: Preço do Índice Ibovespa



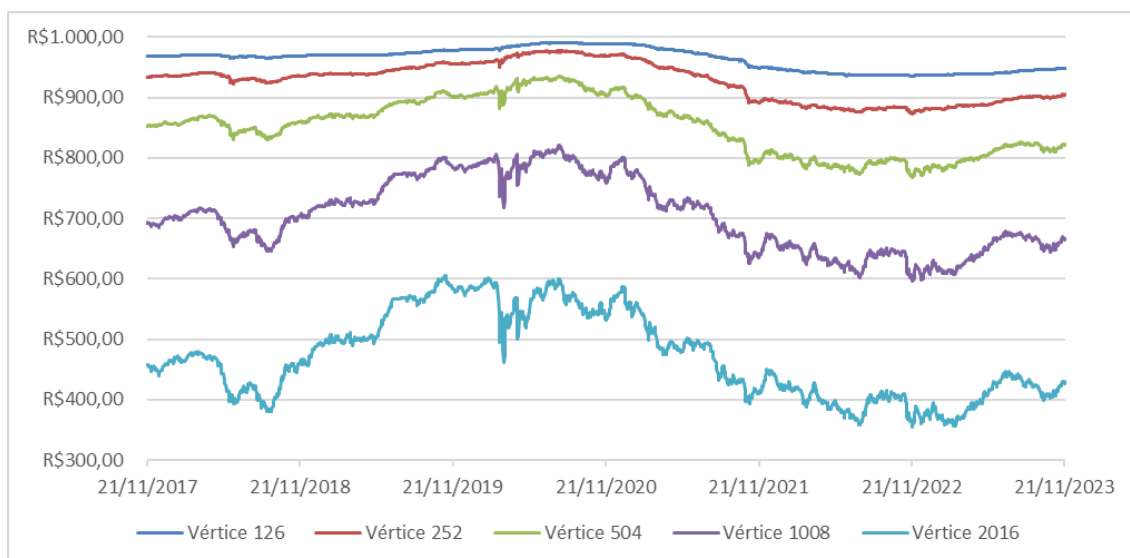
Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Figura 4 - 2: Preço da taxa de câmbio Dólar



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Figura 4 - 3: Preço dos vértices da ETTJ Pré-fixada



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

O portfólio de renda fixa foi calculado com uma média ponderada dos cinco vértices (126 DU, 252 DU, 504 DU, 1008 DU e 2016 DU) dia após dia em igual peso (20% para cada vértice). Isso pode ser feito visto que, para efeito de simplificação, foi simulado que os títulos sintéticos de cada vértice se renovam a cada dia, então a *duration* da carteira não se reduz a cada dia que passa como seria no caso em que o investidor mantivesse os títulos por um período maior que um dia ou até o vencimento. A *duration* representa o prazo médio de um título para que o investidor desse título tenha o retorno do capital investido. Esta forma de se calcular pode não ser perfeitamente realista por desconsiderar custos de transição ao recompor o portfólio, mas pode ser considerada por capturar os efeitos da mudança de preços nos títulos de renda-fixa dia após dia devido às mudanças nas taxas de juros de mercado.

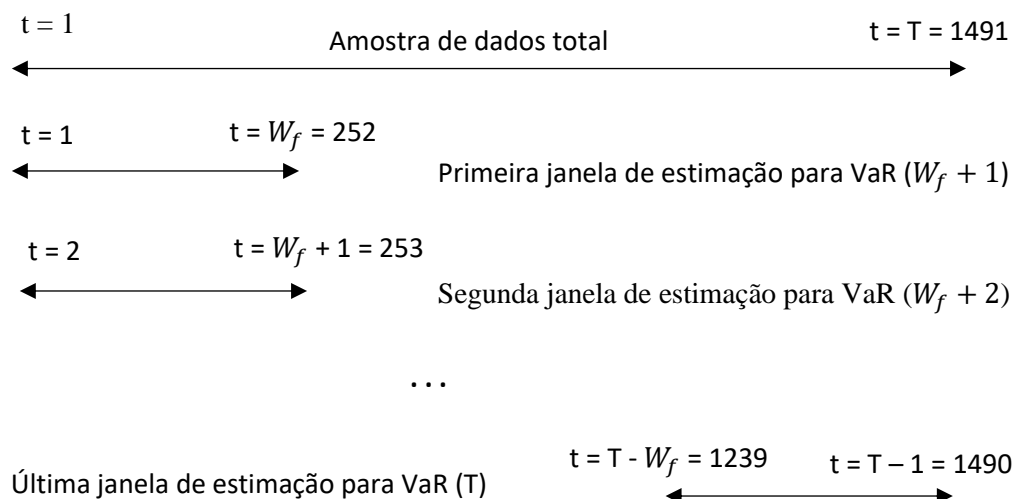
Em síntese, os retornos de cada série de preços foram calculados para os três mercados diferentes (retorno geométrico diário para a taxa pré-fixada e retorno discreto diário para os outros dois) totalizando três amostras de retornos em dias úteis com 1491 valores, partindo de 21/11/2017 até 24/11/2023. Esses retornos foram, então, utilizados como insumos para o cálculo de risco nos modelos distintos de VaR e CVaR.

3.2 - Implementação dos Testes para os Modelos de VaR

O objetivo do *backtest* é, como visto na revisão da literatura, analisar como um modelo de previsão de risco performou no passado. Sendo assim, ele é útil para avaliar se o modelo funciona como o esperado e comparar diferentes modelos.

A janela de tempo para a estimação do risco (W_f) corresponde ao número de observações de retornos consideradas para gerar uma previsão de risco. Neste trabalho, foram utilizadas janelas de estimação com 252 dias úteis, dado que é uma convenção comum no mercado financeiro considerar que há 252 dias úteis em um ano. Sendo assim, a primeira previsão de risco ocorre para o dia útil 253 da amostra de dados total de tamanho T utilizando os 252 dias anteriores como insumo para a previsão. Para fazer a segunda previsão, a janela de estimação é deslocada para a direita avançando um dia e assim por diante. Uma ilustração do método pode ser observada a seguir:

Figura 4 - 4: Ilustração do método de *Backtesting*



Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Como os retornos de todo o período na amostra de dados total são conhecidos, é possível comparar as previsões de risco com o retorno real observado. Na prática, o risco está sendo calculado diariamente e, como os primeiros 252 dias úteis são utilizados para o primeiro cálculo de risco, a primeira previsão de risco surge no dia 29/11/2018 ($t = 253$). A partir desta data até o fim da amostra no dia 24/11/2023 ($t = T = 1491$), toda nova previsão de risco diária pode ser comparada com o retorno real no dia, totalizando 1239 dias úteis ($T - 252$) de comparações. Se o retorno em um dia particular fica abaixo do VaR calculado, é dito que houve uma violação (ou exceção) do limite do VaR. Essas comparações entre o risco calculado e o valor que se verificou na realidade são registradas

em um vetor de dados em que o valor 1 é atribuído caso ocorra uma violação e o valor 0 caso não ocorra.

Em posse do vetor de violações obtido no processo de *backtesting*, aplica-se os testes estatísticos de Kupiec e Christoffersen nesse vetor para analisar a eficácia dos modelos de risco. O nível de confiança para validar o teste é o mesmo utilizado para se calcular o VaR. Os resultados dos testes podem ser vistos no capítulo Teste Empírico.

3.3 - Implementação dos Testes para os Modelos de CVaR

Como descrito por Castro e Candido (2018): “A elicitabilidade é a propriedade de previsões serem avaliadas e classificadas. Em geral, uma medida de risco invariante a lei pega uma distribuição probabilística e transforma-a em uma previsão pontual”. O CVaR, por não ser elicitável gerou desconfiança no passado sobre a sua capacidade de ser testável como uma medida de risco. Esta é uma métrica condicionada a outra, portanto não pode ser extraída de forma direta. Segue-se que: “[...] para que uma estatística possa ser testável, é necessária que ela seja elicitável” (CASTRO, 2018).

No entanto, Emmer et al. (2014) demonstram que o CVaR é condicionalmente elicitável e, portanto, pode ser condicionalmente testável. Como afirmado por Acerbi e Szekely (2014), o fato de uma medida ser ou não elicitável não condiciona esta medida a ser testável. “A elicitabilidade permite comparar de uma maneira natural diferentes modelos que preveem uma estatística nas mesmas exatas sequências de eventos [...]. Mas isso diz respeito à seleção de modelo, não ao teste de modelo. Refere-se a uma classificação relativa, não a uma validação absoluta.” (Acerbi e Szekely, 2014).

Sendo assim, como foram executados dois testes diferentes (Kupiec e Christoffersen) para o VaR, este estudo escolheu seguir com a realização de dois testes – os Testes I e II de Acerbi e Szekely – para o CVaR. Cada teste, quando executado em uma amostra de dados específica, gera uma estatística, respectivamente Z_1 e Z_2 . É importante esclarecer que cada uma dessas estatísticas possui uma distribuição própria e, então, ao variar de um modelo para outro, a distribuição de probabilidade associada a essas estatísticas se modifica. Por isso, para se obter o p-valor de uma realização específica, é necessário executar uma simulação de Monte Carlo, ou seja, simular aleatoriamente a distribuição de uma estatística com base em uma distribuição conhecida. Por esse motivo, não foi possível testar o CVaR pelo método histórico.

Gerar um p-valor para 1491 realizações (como feito para o *backtest* do VaR) utilizando muitas iterações para a simulação de Monte Carlo de cada uma dessas realizações é uma tarefa computacionalmente pesada, por isso optou-se por uma simplificação para se testar o CVaR. Como solução aplicou-se um modelo de risco que utiliza os dados relativos aos retornos de um ano para gerar uma previsão de risco para o ano seguinte. Foram realizados testes para distribuição normal e para as distribuições t-student com 4 e 10 graus de liberdade. Por exemplo, os retornos de 2018 geram uma previsão de VaR e CVaR que é utilizada em 2019 e assim por diante, até 2023. Como a amostra de dados em 2017 é pequena, esta foi ignorada. Cada ano, então, se executa uma simulação de Monte Carlo que gera 5000 realizações simuladas de Z_1 e Z_2 para cada uma das distribuições citadas. Em posse dessas, pode-se obter uma estatística de corte e um p-valor para avaliar se as estatísticas Z_1 e Z_2 calculadas efetivamente no ano seguinte rejeitam a hipótese nula de que o modelo de previsão de risco é adequado. Além disso, foram executados testes apenas utilizando o VaR com nível de confiança α de 95% devido à baixa taxa de violações de VaR que foram encontradas ao se aplicar o método acima para um α de 99%, produzindo testes pouco significativos para o CVaR, já que este é condicionado ao VaR.

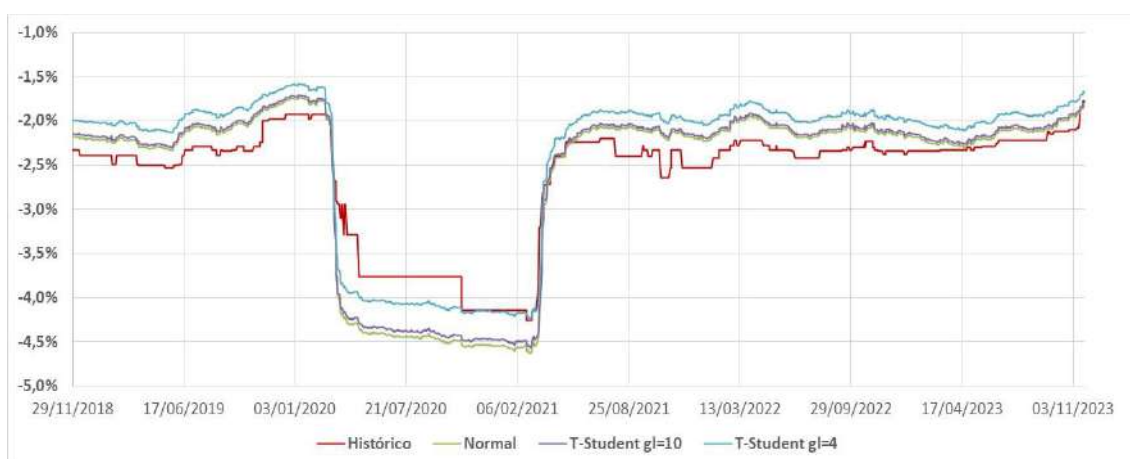
É importante salientar que esta simplificação gera resultados muito menos precisos que o *backtesting* de VaR, cujo modelo permite atualizar a previsão de risco diariamente. No caso do CVaR, a previsão de risco se mantém por um ano antes de ser atualizada e, portanto, é esperado que não reflita tão bem a realidade. Este teste parte do pressuposto de que as características do ativo em análise se manterão inalteradas a cada ano para o ano seguinte, o que não necessariamente é verdade. Entretanto, mesmo com essa simplificação, espera-se que o resultado dos *backtests* forneça informações úteis que possam permitir uma comparação entre os diferentes modelos de risco. Os resultados podem ser vistos no capítulo a seguir.

4 - Teste Empírico: Resultados e Discussão

4.1 - Resultados VaR

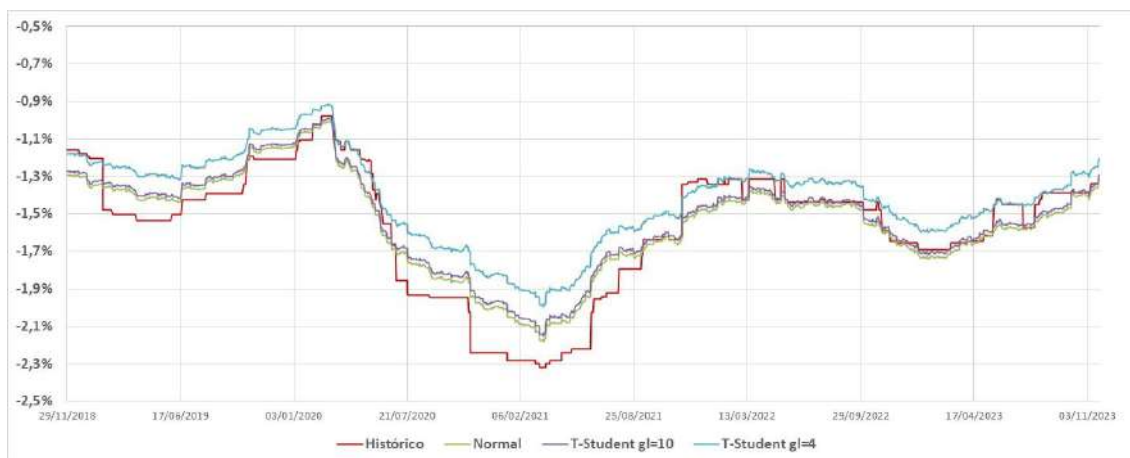
Nas figuras 5-1, 5-2 e 5-3, pode-se visualizar os modelos de risco de VaR calculados para o Ibovespa, Dólar e ETTJ Pré-fixada para o nível de confiança de 95%, respectivamente. Pode-se notar que os modelos parametrizados por curva normal e T-Student com 10 graus de liberdade se comportam de maneira semelhante. Os modelos parametrizados em geral se ajustam de forma mais suave que o modelo por método histórico, que apresenta um movimento mais errático.

Figura 5 - 1: Modelos de VaR para o Índice Ibovespa ($\alpha = 95\%$)



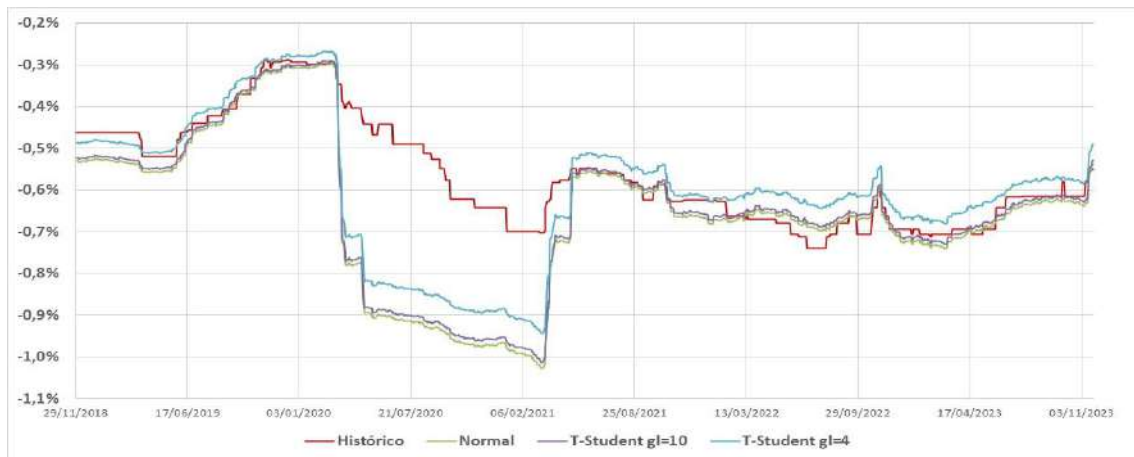
Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Figura 5 - 2: Modelos de VaR para o Dólar ($\alpha = 95\%$)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

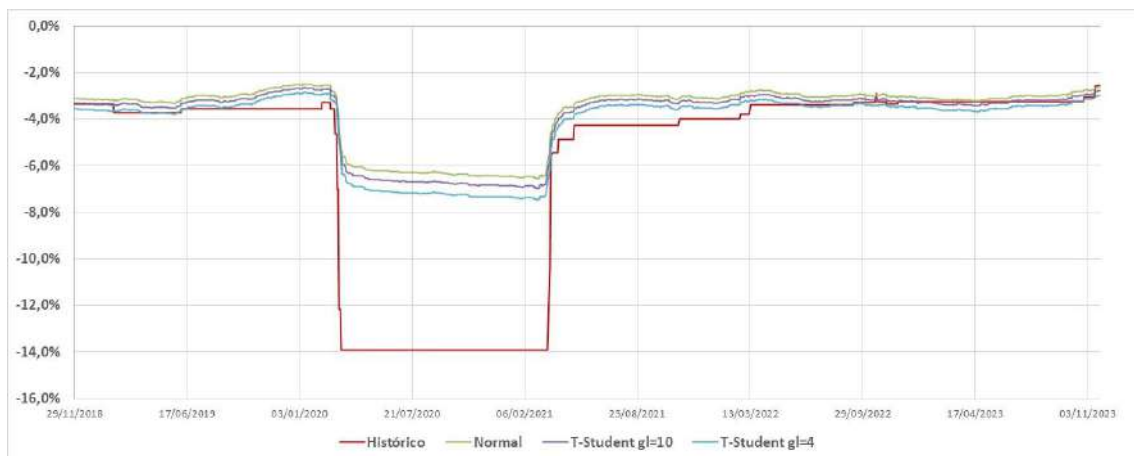
Figura 5 - 3: Modelos de VaR para a ETTJ Pré-fixada ($\alpha = 95\%$)



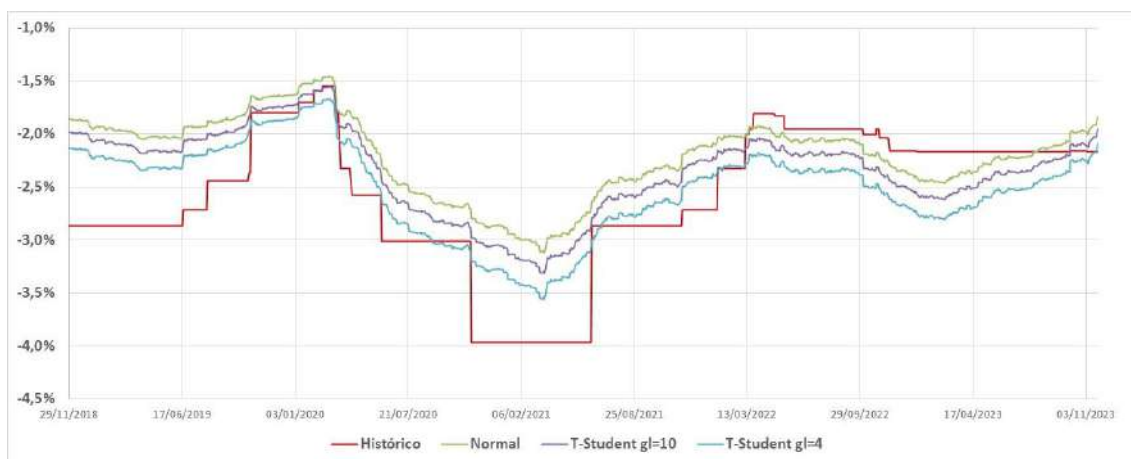
Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Do mesmo modo, nas figuras 5-4, 5-5 e 5-6, pode-se visualizar os modelos de risco de VaR calculados para o Ibovespa, Dólar e ETTJ Pré-fixada, respectivamente, porém agora calculados para o nível de confiança de 99%.

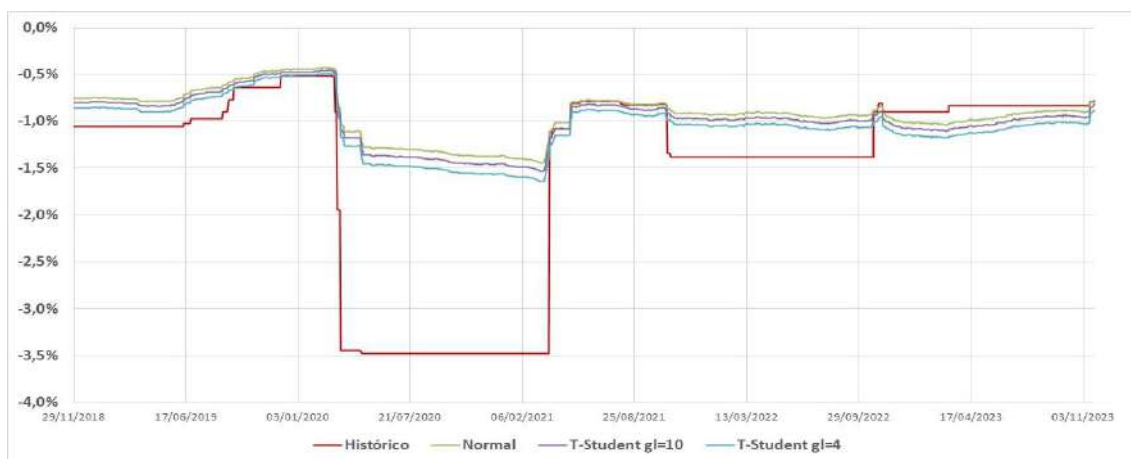
Figura 5 - 4: Modelos de VaR para o Índice Ibovespa ($\alpha = 99\%$)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Figura 5 - 5: Modelos de VaR para o Dólar ($\alpha = 99\%$)

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Figura 5 - 6: Modelos de VaR para a ETTJ Pré-fixada ($\alpha = 99\%$)

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Nas tabelas 5-1, 5-2, 5-3 e 5-4, pode-se observar o resumo dos resultados dos testes para o VaR histórico e para o VaR paramétrico (curva normal, t-student com 10 graus de liberdade e t-student com 4 graus de liberdade), nos três diferentes ativos (Ibovespa, Dólar e ETTJ Pré-fixada) utilizando dois níveis de confiança distintos (95% e 99%).

Tabela 5 - 1: Resultados dos testes para o VaR Histórico

	VaR Histórico					
	Ibovespa		Dólar		ETTJ Pré-fixada	
	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
Exceções	48	9	58	12	59	12
Exceções (%)	3,87%	0,73%	4,68%	0,97%	4,76%	0,97%
Estatística de teste - Cobertura Incondicional	3,5725	1,0354	0,2706	0,0125	0,1501	0,0125
P-Valor Kupiec	0,0587	0,3089	0,6029	0,9109	0,6984	0,9109
Resultado Kupiec	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado
Estatística de teste - Independência	1,6971	3,5798	2,6782	0,0000	0,0010	2,5236
Estatística de teste - Cobertura Condicional	5,2697	4,6152	2,9489	0,0125	0,1512	2,5361
P-Valor Christoffersen	0,0717	0,0995	0,2289	0,9938	0,9272	0,2814
Resultado Christoffersen	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 5 - 2: Resultados dos testes para o VaR Paramétrico (Normal)

	VaR Paramétrico (Normal)					
	Ibovespa		Dólar		ETTJ Pré-fixada	
	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
Exceções	59	20	59	11	41	14
Exceções (%)	4,76%	1,61%	4,76%	0,89%	3,31%	1,13%
Estatística de teste - Cobertura Incondicional	0,1501	3,9810	0,1501	0,1637	8,4247	0,2028
P-Valor Kupiec	0,6984	0,0460	0,6984	0,6858	0,0037	0,6525
Resultado Kupiec	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Aprovado
Estatística de teste - Independência	2,4588	7,9806	1,1955	0,0000	0,2254	1,9878
Estatística de teste - Cobertura Condicional	2,6089	11,9616	1,3457	0,1637	8,6501	2,1906
P-Valor Christoffersen	0,2713	0,0025	0,5103	0,9214	0,0132	0,3344
Resultado Christoffersen	Aprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Aprovado

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 5 - 3: Resultados dos testes para o VaR Paramétrico (T-Student com 10 graus de liberdade)

	VaR Paramétrico (T-Student gl = 10)					
	Ibovespa		Dólar		ETTJ Pré-fixada	
	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
Exceções	59	16	61	10	44	12
Exceções (%)	4,76%	1,29%	4,92%	0,81%	3,55%	0,97%
Estatística de teste - Cobertura Incondicional	0,1501	0,9730	0,0154	0,4986	6,0642	0,0125
P-Valor Kupiec	0,6984	0,3239	0,9012	0,4801	0,0138	0,9109
Resultado Kupiec	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Aprovado
Estatística de teste - Independência	2,4588	10,4665	0,9267	0,0000	0,0836	2,5236
Estatística de teste - Cobertura Condicional	2,6089	11,4395	0,9421	0,4986	6,1478	2,5361
P-Valor Christoffersen	0,2713	0,0033	0,6243	0,7794	0,0462	0,2814
Resultado Christoffersen	Aprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Aprovado

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 5 - 4: Resultados dos testes para o VaR Paramétrico (T-Student com 4 graus de liberdade)

	CVaR Paramétrico (T-Student gl = 4)					
	Ibovespa		Dólar		ETTJ Pré-fixada	
	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 99\%$
Exceções	76	11	71	9	52	12
Exceções (%)	6,13%	0,89%	5,73%	0,73%	4,20%	0,97%
Estatística de teste - Cobertura Incondicional	3,1381	0,1637	1,3318	1,0354	1,7752	0,0125
P-Valor Kupiec	0,0765	0,6858	0,2485	0,3089	0,1827	0,9109
Resultado Kupiec	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado
Estatística de teste - Independência	1,6087	14,8472	0,6028	0,0000	0,2109	2,5236
Estatística de teste - Cobertura Condicional	4,7467	15,0109	1,9346	1,0354	1,9860	2,5361
P-Valor Christoffersen	0,0932	0,0006	0,3801	0,5959	0,3705	0,2814
Resultado Christoffersen	Aprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado

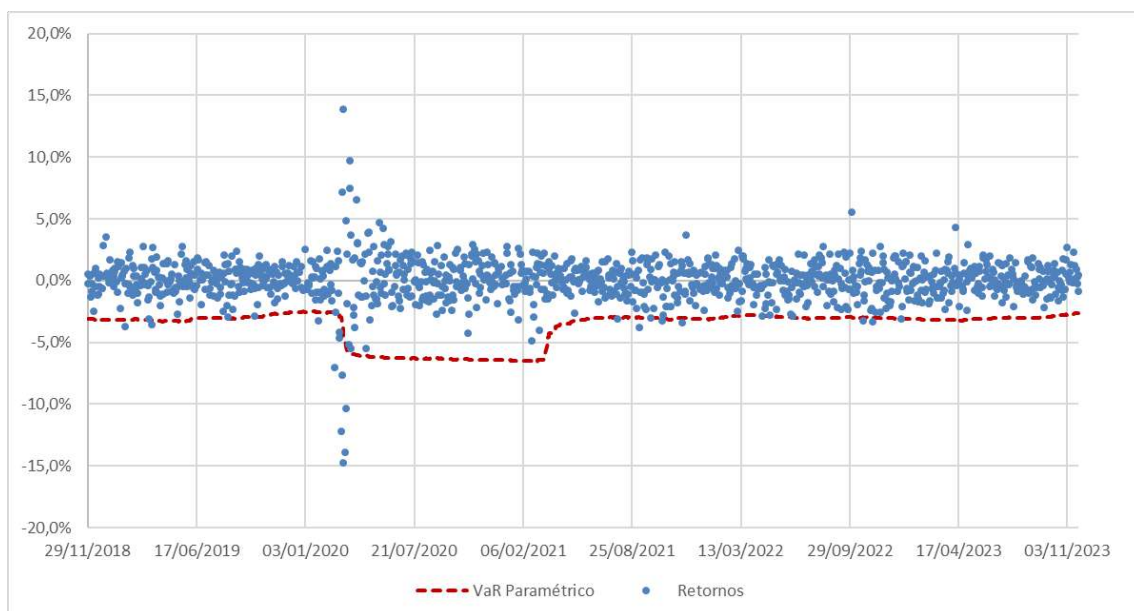
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Nota-se que nenhum teste falhou para o modelo de VaR histórico. As hipóteses nulas de Kupiec e de Christoffersen não foram rejeitadas em nenhum mercado tanto para um nível de confiança de 95% quanto 99%. Ocorreu no mínimo uma reprovação em outros modelos que utilizaram parametrização. Além disso, a taxa de exceções se

aproxima muito do valor esperado para no método histórico (5% para um nível de confiança de 95% e 1% para um nível de confiança de 99%) indicando que esse método é o que mostra melhores resultados entre os quatro apresentados.

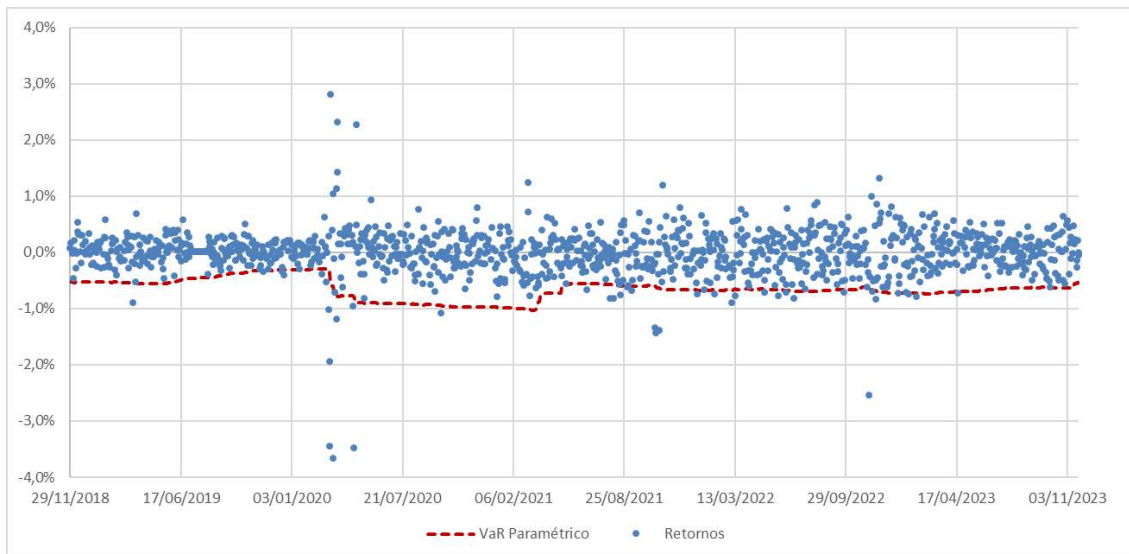
Para o caso do VaR parametrizado por uma curva normal, a hipótese nula de independência das violações foi rejeitada para o Ibovespa ao nível de confiança de 99%. Embora a taxa de violações neste caso (1,61%) não tenha ficado tão longe do esperado (1%) a ponto de falhar no teste de cobertura incondicional, sequências de violações ocorridas no início da pandemia do Covid-19 em março de 2020 elevaram suficientemente a estatística do teste de independência para que o modelo falhasse no teste de Christoffersen. Ocorreram, por exemplo, 3 violações seguidas em 05/03/2020, 06/03/2020 e 09/03/2020. Este resultado em particular pode ser visto na figura 5-7.

Figura 5 - 7: VaR parametrizado por curva normal ($\alpha = 99\%$, Ibovespa)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

O teste de Kupiec falhou para o caso do VaR parametrizado por curva normal na ETTJ Pré-fixada ao nível de confiança de 95%. A taxa de violações neste caso (3,31%) ficou bem abaixo do esperado (5%), o que significa que o modelo está superestimando o risco, sendo excessivamente conservador. Este resultado em particular pode ser visto na figura 5-8.

Figura 5 - 8: VaR parametrizado por curva normal ($\alpha = 95\%$, ETTJ Pré-fixada)

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

O modelo parametrizado pela distribuição t-student com 10 graus de liberdade operou de forma similar ao da curva normal, tendo falhado nos mesmos casos. Entretanto, a parametrização pela t-student com 4 graus de liberdade parece ter modelado melhor o caso da ETTJ Pré-fixada ao nível de confiança de 95% do que as suas contrapartes parametrizadas, fazendo com que a taxa de violações seja mais próxima do valor esperado.

4.2 - Resultados CVaR

Nas tabelas 5-5 até 5-9, pode-se observar o resumo dos resultados dos testes para o CVaR nos anos de 2019 a 2023, nos três ativos diferentes (Ibovespa, Dólar e ETTJ Pré-fixada) utilizando, como explicado anteriormente, apenas o nível de confiança de 95%. Nos casos em que foi observado apenas uma violação de VaR, optou-se por desconsiderar este resultado, colocando-se uma “ressalva” nos resultados ao invés de um “aprovado” ou “reprovado”.

Tabela 5 - 5: Resultados dos testes para os modelos de CVaR em 2019

2019	CVaR Paramétrico (Normal)			CVaR Paramétrico (T-Student gl = 10)			CVaR Paramétrico (T-Student gl = 4)		
	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada
	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$
Exceções	9	9	1	9	9	1	9	11	2
Exceções (%)	3,63%	3,63%	0,40%	3,63%	3,63%	0,40%	3,63%	4,44%	0,81%
Estatística de teste (Z1)	0,0274	-0,0306	0,3367	-0,0172	-0,0736	0,2791	-0,0663	-0,1584	-0,0400
P-Valor (Z1)	0,2856	0,7088	0	0,5544	0,8652	0,0036	0,7068	0,9568	0,6064
Estatística de teste (Z2)	-0,2543	-0,2964	-0,8922	-0,2867	-0,3276	-0,8968	-0,3223	-0,2534	-0,8452
P-Valor (Z2)	0,9148	0,9568	1	0,944	0,9658	1	0,9528	0,918	0,9988
Resultado (Z1)	Aprovado	Aprovado	Ressalva	Aprovado	Aprovado	Ressalva	Aprovado	Aprovado	Aprovado
Resultado (Z2)	Aprovado	Aprovado	Ressalva	Aprovado	Aprovado	Ressalva	Aprovado	Aprovado	Aprovado

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 5 - 6: Resultados dos testes para os modelos de CVaR em 2020

2020	CVaR Paramétrico (Normal)			CVaR Paramétrico (T-Student gl = 10)			CVaR Paramétrico (T-Student gl = 4)		
	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada
	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$
Exceções	33	39	34	34	39	35	38	40	37
Exceções (%)	13,25%	15,66%	13,65%	13,65%	15,66%	14,06%	15,26%	16,06%	14,86%
Estatística de teste (Z1)	0,9797	0,3209	1,1903	0,8578	0,2640	1,0525	0,6475	0,1883	0,8770
P-Valor (Z1)	0	0	0	0	0,0044	0	0,0048	0,0768	0,0028
Estatística de teste (Z2)	4,2474	3,1377	4,9816	4,0734	2,9595	4,7701	4,0284	2,8179	4,5783
P-Valor (Z2)	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Resultado (Z1)	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Aprovado	Reprovado
Resultado (Z2)	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado	Reprovado

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 5 - 7: Resultados dos testes para os modelos de CVaR em 2021

2021	CVaR Paramétrico (Normal)			CVaR Paramétrico (T-Student gl = 10)			CVaR Paramétrico (T-Student gl = 4)		
	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada
	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$
Exceções	1	5	3	1	5	3	1	6	3
Exceções (%)	0,40%	2,02%	1,21%	0,40%	2,02%	1,21%	0,40%	2,43%	1,21%
Estatística de teste (Z1)	-0,1526	-0,0439	0,1349	-0,1889	-0,0862	0,0865	-0,2288	-0,1608	0,0333
P-Valor (Z1)	1	0,7996	0,0116	1	0,9132	0,1048	0,9974	0,9664	0,3226
Estatística de teste (Z2)	-0,9314	-0,6129	-0,7243	-0,9343	-0,6300	-0,7361	-0,9376	-0,5923	-0,7490
P-Valor (Z2)	1	0,9994	1	1	0,9998	1	0,9996	0,9962	0,9988
Resultado (Z1)	Ressalva	Aprovado	Reprovado	Ressalva	Aprovado	Aprovado	Ressalva	Aprovado	Aprovado
Resultado (Z2)	Ressalva	Aprovado	Aprovado	Ressalva	Aprovado	Aprovado	Ressalva	Aprovado	Aprovado

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 5 - 8: Resultados dos testes para os modelos de CVaR em 2022

2022	CVaR Paramétrico (Normal)			CVaR Paramétrico (T-Student gl = 10)			CVaR Paramétrico (T-Student gl = 4)		
	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada
	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$
Exceções	17	14	12	17	15	12	20	20	14
Exceções (%)	6,80%	5,60%	4,80%	6,80%	6,00%	4,80%	8,00%	8,00%	5,60%
Estatística de teste (Z1)	-0,0647	0,0368	0,0934	-0,1038	-0,0241	0,0501	-0,1710	-0,1321	-0,0384
P-Valor (Z1)	0,9114	0,2228	0,0336	0,9656	0,606	0,1818	0,9787915	0,9145658	0,6134454
Estatística de teste (Z2)	0,2721	0,1613	0,0497	0,2189	0,1711	0,0081	0,3263	0,3886	0,0770
P-Valor (Z2)	0,0616	0,174	0,3724	0,1066	0,1604	0,4792	0,0596	0,0278	0,4202
Resultado (Z1)	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado
Resultado (Z2)	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Reprovado	Aprovado

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Tabela 5 - 9: Resultados dos testes para os modelos de CVaR em 2023

2023	CVaR Paramétrico (Normal)			CVaR Paramétrico (T-Student gl = 10)			CVaR Paramétrico (T-Student gl = 4)		
	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada
	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$	$\alpha = 95\%$
Exceções	3	3	3	4	3	4	7	6	5
Exceções (%)	1,33%	1,33%	1,33%	1,78%	1,33%	1,78%	3,11%	2,67%	2,22%
Estatística de teste (Z1)	-0,0458	0,0304	-0,1646	-0,1251	-0,0129	-0,2074	-0,2223	-0,1898	-0,2521
P-Valor (Z1)	0,821	0,255	1	0,9872	0,5408	1	0,997	0,9896	0,9994
Estatística de teste (Z2)	-0,7455	-0,7252	-0,7772	-0,6889	-0,7368	-0,7182	-0,5161	-0,5679	-0,6676
P-Valor (Z2)	1	1	1	0,9996	0,9998	0,9996	0,9916	0,9942	0,9974
Resultado (Z1)	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado
Resultado (Z2)	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado	Aprovado

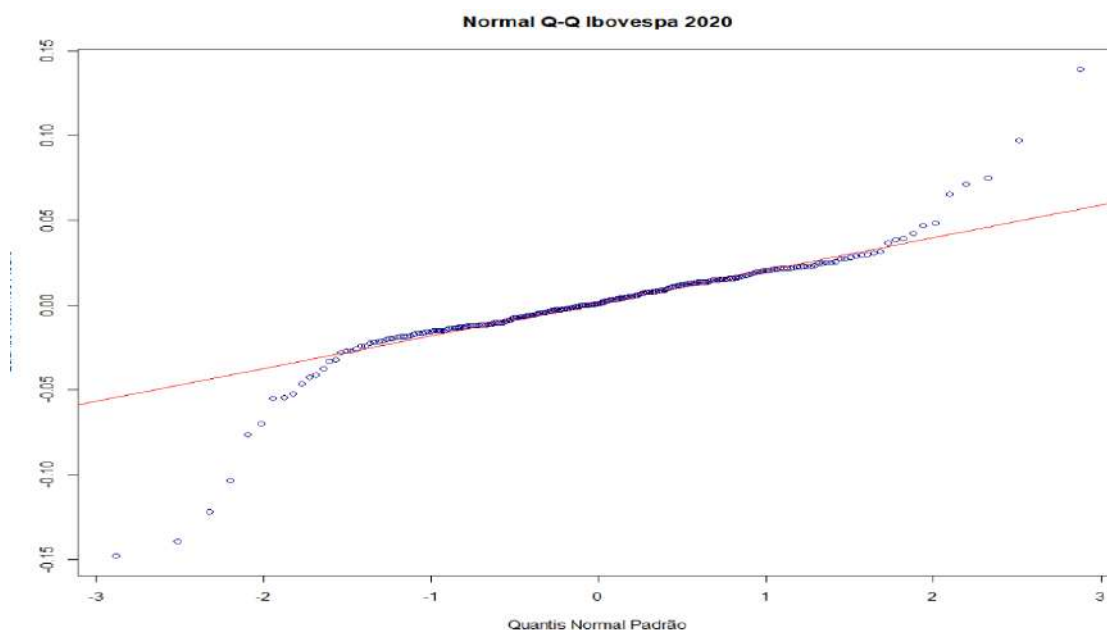
Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

Observa-se um fenômeno comum a todos os modelos e que mostra uma limitação da simplificação utilizada para o *backtesting* do CVaR: no ano de 2020, as taxas de violações de VaR se apresentaram muito mais elevadas que o seu valor esperado de 5%. Evidentemente, isso se deve ao fato de 2020 ter sido o primeiro ano da pandemia de Covid-19, o qual apresentou uma alta taxa de retornos extremos negativos e, com isso, uma modelagem de VaR a partir de dados do ano anterior (2019) subestima muito o risco para o ano de 2020. Isso torna a análise dos modelos para esse ano irrelevante, já que o modelo de VaR não é satisfatório. É interessante destacar, no entanto, que o Teste I nesse ano foi aprovado no caso da modelagem t-student (4 graus de liberdade) para o dólar. Tal resultado é possível, uma vez que, como elucidado anteriormente, esse teste é insensível ao número de violações de VaR.

O fenômeno ocorrido em 2020 também causa problemas para a estimação de risco em 2021 já que, ancorada a essa simplificação, a modelagem de risco, ao utilizar dados de 2020, cria uma superestimação de risco para o ano seguinte. Sendo assim, as taxas de violações em 2021 ficaram muito abaixo do valor esperado, orbitando valores mais próximos de 1% ou 2% ao invés de 5%. Inusitadamente, em 2023, o número de violações também ficou bem abaixo do esperado, o que torna os anos de 2019 e de 2022 os anos mais promissores para se avaliar a eficácia dos modelos de CVaR, uma vez que esses testes exigem um bom modelo de VaR.

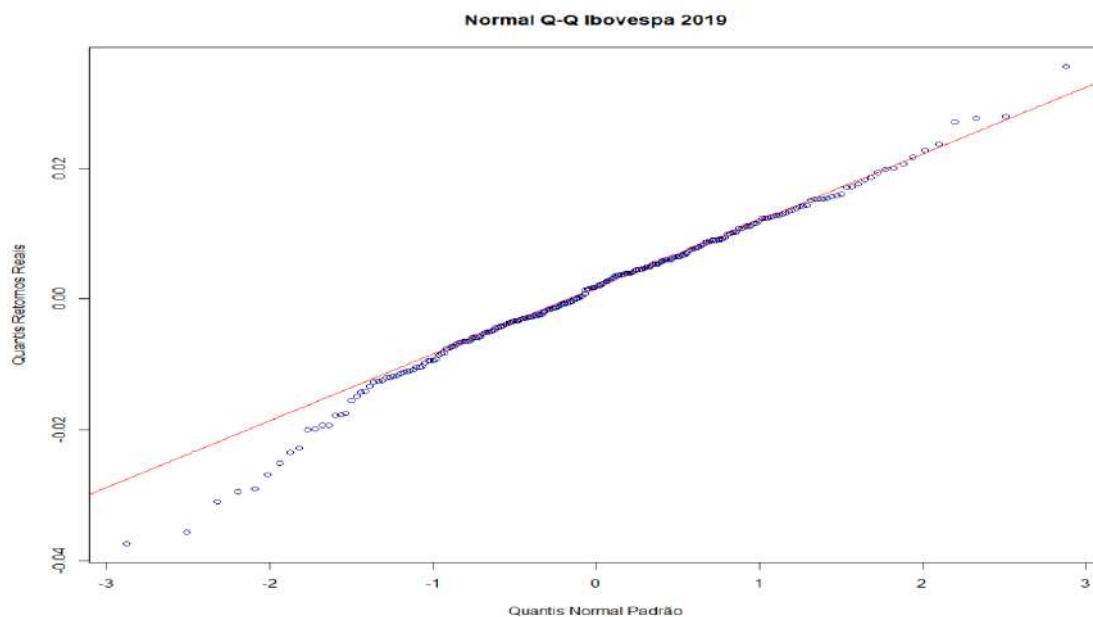
A figura 5-9 mostra um gráfico quantil a quantil (QQ Plot) dos retornos do Ibovespa no ano de 2020 contra uma distribuição normal padrão. O lado esquerdo abaixo da linha vermelha indica uma cauda pesada de retornos negativos e o lado direito acima da linha vermelha indica uma cauda pesada de retornos positivos. O p-valor de um teste Jarque-Bera para esta distribuição é zero, o que corrobora com a tese de que uma modelagem por curva normal nessa distribuição é inadequada. Para efeito de comparação, as figuras 5-10 e 5-11 mostram os gráficos quantil a quantil (QQ Plot) para o Ibovespa comparados à distribuição normal padrão, nos anos de 2019 e 2022, respectivamente. Mesmo em amostras como a de 2022, que não tem a hipótese nula de normalidade rejeitada pelo teste Jarque-Bera, é comum observar uma cauda esquerda elevada na distribuição.

Figura 5 - 9: Gráfico QQ Plot dos retornos do Ibovespa em 2020 x Curva Normal Padrão



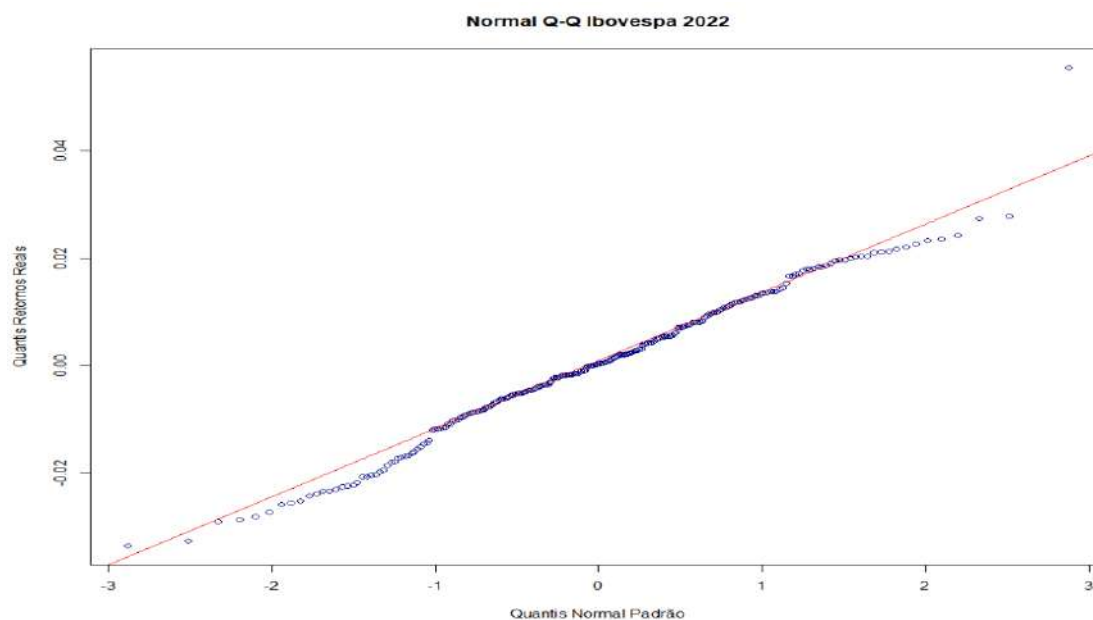
Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Figura 5 - 10: Gráfico QQ Plot dos retornos do Ibovespa em 2019 x Curva Normal Padrão



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Figura 5 - 11: Gráfico QQ Plot dos retornos do Ibovespa em 2022 x Curva Normal Padrão



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

A tabela 5-10 mostra os p-valores do teste Jarque-Bera para todas as distribuições de retornos de 2018 a 2023.

Tabela 5 - 10: Teste Jarque-Bera para todas as distribuições de retornos ano a ano

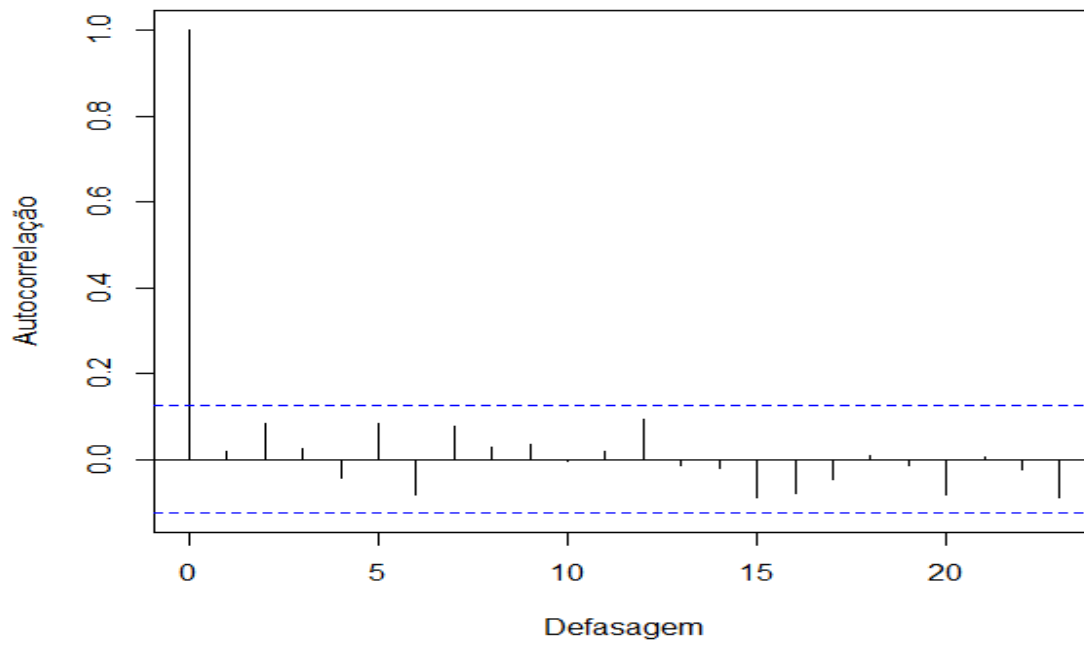
	Teste Jarque-Bera		
	P-Valor		
	Ibovespa	Dólar	ETTJ Pré-fixada
2018	0,3804	0,0000	0,0000
2019	0,0005	0,2400	0,0000
2020	0,0000	0,0000	0,0000
2021	0,0007	0,1142	0,0000
2022	0,2214	0,0429	0,0000
2023	0,2483	0,0049	0,1975

Fonte: Elaborado pelo autor (2024)

A respeito do teste Jarque-Bera, pode-se observar que apenas algumas amostras específicas não rejeitam a hipótese nula de normalidade dos retornos ao se analisar ano a ano. Dentre os anos analisados, parece que os anos de 2022 e 2023 são os que mais se comportam, de forma geral, com uma distribuição normal. Para a ETTJ Pré-fixada, apenas o ano de 2023 não rejeitou a hipótese nula de normalidade. Essa é provavelmente a razão dos Teste de Kupiec e Christoffersen terem reprovado os modelos normal e t-student (10 graus de liberdade) para a ETTJ Pré-fixada, enquanto o modelo t-student (4 graus de liberdade) foi aprovado. A distribuição t-student com uma menor quantidade de graus de liberdade tem a vantagem de modelar melhor o efeito extremo de caudas pesadas.

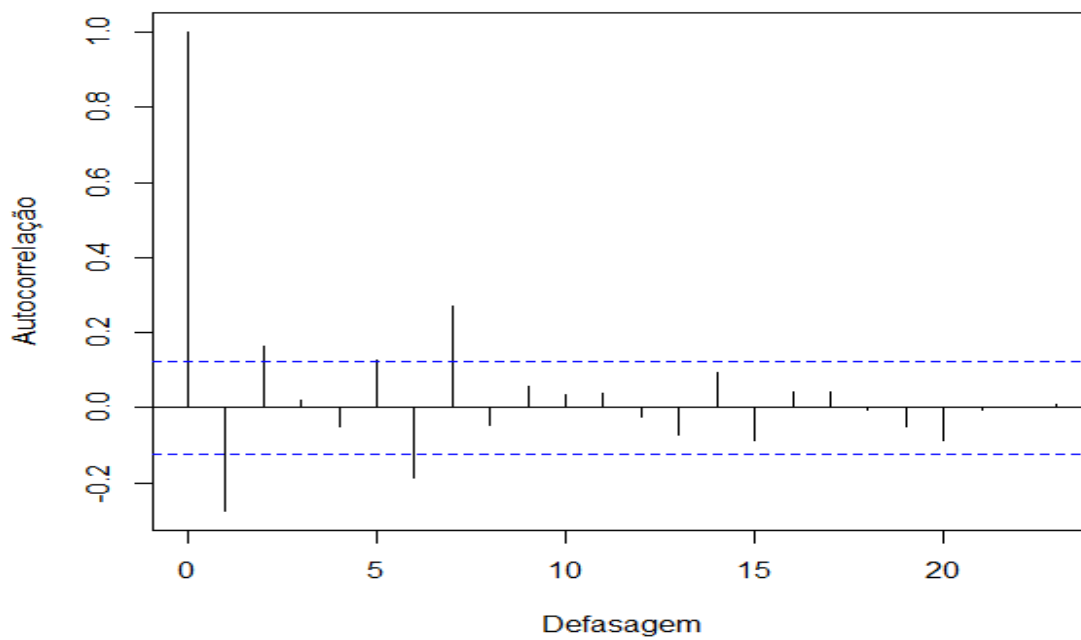
Alguns testes foram executados em busca de evidências de autocorrelação nas séries de retornos. Porém, a conclusão foi de que, em geral, não foram detectadas evidências a respeito disso, exceto no caso dos quadrados dos retornos para o Ibovespa no ano de 2020. A defasagem utilizada nos testes é diária. Como exemplo, a figura 5-12 mostra o dólar em 2020, que apresenta um padrão comum observado na maioria das séries, com valores de autocorrelação com módulo inferior a 0,2. A figura 5-13 mostra a função de autocorrelação para o Ibovespa em 2020, ainda com poucos indícios que apontem algo neste sentido. Entretanto, na figura 5-14, observa-se claramente evidências de autocorrelação no quadrado dos retornos para o Ibovespa em 2020.

Figura 5 - 12: Função de autocorrelação dos retornos para o Dólar (2020)



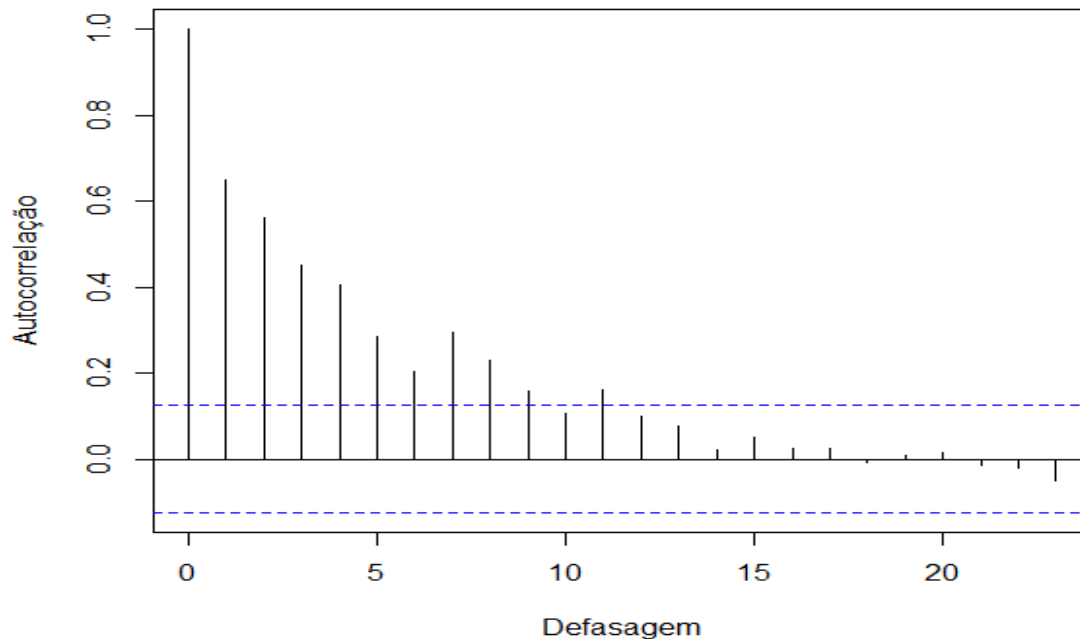
Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Figura 5 - 13: Função de autocorrelação dos retornos para o Ibovespa (2020)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Figura 5 - 14: Função de autocorrelação do quadrado dos retornos para o Ibovespa (2020)



Fonte: Elaborado pelo autor a partir de dados da Comdinheiro (2024)

Ressalta-se que os gráficos referentes aos outros anos se assemelharam com o padrão observado na figura 5-12, não indicando evidências de autocorrelação. Os três exemplos citados foram meramente escolhidos para relatar os padrões observados sem a necessidade de listar uma grande quantidade de gráficos.

Mesmo supondo, então, que os resultados do *backtesting* nos anos de 2019 e 2022 sejam os mais adequados para se comparar os modelos de CVaR, ainda assim é inconclusivo que haja um modelo paramétrico de CVaR que seja incontestavelmente superior aos demais. Assim como no caso do VaR, observa-se que a t-student de 4 graus de liberdade parece modelar melhor o caso da ETTJ Pré-fixada, porém o Teste II de Acerbi e Szekely falhou em modelar o Dólar neste modelo no ano de 2022. Além disso, ao se utilizar o modelo por curva normal, que é aprovado na maioria dos casos, ocorreu uma reprovação no Teste I de Acerbi e Szekely para a ETTJ Pré-fixada em 2022.

5 – Considerações Finais

Foi realizada, como era o objetivo do trabalho, uma análise exploratória das métricas de risco conhecidas como Value-at-Risk (VaR) e Conditional Value-at-Risk (CVaR), de forma a identificar pontos fortes e fracos, assim como avaliar a sua eficiência e sua consistência em medir o risco. Para isso, uma importante contribuição deste trabalho foi a de testar essas métricas em uma grande variedade de modelos diferentes e aplicados a diferentes mercados. Afinal, um modelo específico poderia funcionar bem em um mercado, porém falhar totalmente em outro.

Todos os modelos, então, foram testados no mercado brasileiro de ações (Índice Ibovespa), no mercado de câmbio (taxa de câmbio Dólar-Real) e no mercado de renda fixa (títulos pré-fixados). Tanto o VaR, como o CVaR foram testados a partir de modelos paramétricos para curva gaussiana normal, curva t-student com 10 graus de liberdade e curva t-student com 4 graus de liberdade. Para o VaR, também foi testado o modelo a partir do método histórico, o qual foi o que apresentou maior sucesso, porém não pôde ser reproduzido diretamente para o cálculo do CVaR. Além disso, os modelos foram testados em nível de significância de 95% e 99% para o VaR e 95% para o CVaR. Considera-se mérito do trabalho também em aplicar diferentes metodologias de *backtesting* para se obter resultados que permitissem avaliar os modelos de risco. Para o VaR foram aplicados os testes de Kupiec e Christoffersen. No caso do CVaR, foram aplicados os testes I e II de Acervi e Szekely.

O método histórico do VaR não apresentou falhas em nenhum teste aplicado aos diferentes mercados. Portanto, considera-se que utilizar esse método, associado a uma atualização diária de dados e com informação dos retornos de mercado dos últimos 252 dias úteis mostrou-se bastante eficiente na previsão de risco. O método paramétrico normal do VaR com nível de confiança de 99% falhou no Teste de Christoffersen no mercado de ações provavelmente devido a uma inércia de perdas observada no primeiro ano da pandemia do Covid em 2020, contudo, passou no teste de Kupiec, que não é sensível a inércia de retornos.

De modo geral, os métodos paramétricos de VaR e CVaR funcionaram bem, exceto no caso de prever o risco no mercado de renda fixa. Neste último caso, apenas a parametrização por uma distribuição t-student de 4 graus de liberdade teve maior sucesso dentre os três tipos de parametrização. Tudo indica que, no mercado de renda fixa, uma

modelagem por curva normal no período analisado é inadequada. Uma distribuição t-student consegue captar melhor um efeito de caudas pesadas na distribuição do que uma normal. Este provavelmente é o motivo pelo qual essa modelagem alcançou maior sucesso nesse mercado. Como a t-student de 10 graus de liberdade se assemelha muito mais a uma curva normal do que a de 4 graus, a de 10 graus pode ter sido insuficiente neste propósito.

Ao considerar-se apenas os resultados dos testes de CVaR isoladamente, é difícil extrair conclusões sobre qual modelo é melhor. É possível que o fato de terem sido feitas simplificações, esses testes se tornaram muito menos precisos que os de VaR (inclusive anos como de 2020 e 2021 tiveram que ser descartados dessa análise em específico). Entretanto, como citado acima, o fenômeno da renda fixa também foi observado neste caso. Um gestor ou investidor talvez tenha mais sucesso em modelar o risco neste caso com uma curva t-student de poucos graus de liberdade do que com uma curva normal. Para todos os outros mercados analisados, a curva normal modelou bem, apesar das distribuições de retorno nunca se assemelharem perfeitamente a uma curva normal.

Outra questão que se pode extrair também dos resultados, refere-se à importância de uma atualização constante de dados para um modelo de risco. Atualizar os dados diariamente funcionou melhor do que obter uma medida de risco e utilizá-la por um grande período de tempo sem a atualizar.

É importante salientar que medidas de risco em geral não levam em consideração eventos extremos chamados de "cisnes negros", que podem causar perdas muito maiores do que as previstas pelo modelo. Cisnes negros são, por definição, imprevisíveis. Uma das críticas de Nicholas Taleb em seu livro "A Lógica do Cisne Negro" (2008) é de que cálculos tradicionais de risco, baseados em modelos estatísticos que pressupõem eventos futuros consistentes aos que foram observados em séries históricas, falham em não levar em consideração adequadamente a ocorrência de eventos raros, mas de alto impacto. Todos os dados do passado não são suficientes para modelar o comportamento futuro caso aconteça algo que nunca ocorreu antes. Os dados seriam sempre insuficientes para prever o risco em um evento extremo desses.

Porém, mesmo que, por definição, cisnes negros sejam impossíveis de se prever, não há de se abandonar a capacidade de criar modelos para prever o futuro. A medição de risco é importante para fornecer uma compreensão objetiva dos riscos que permeiam

o mundo e, mais especificamente para o propósito deste trabalho, os mercados financeiros. Sem isso, as decisões seriam menos eficientes. Um gestor ou investidor com maior capacidade de prever riscos consegue minimizar perdas e aproveitar oportunidades com sucesso muito maior.

A partir dos resultados obtidos com este trabalho, considera-se promissora a possibilidade de aperfeiçoar o *backtesting* de CVaR se utilizando de janelas móveis com atualização diária como foi feito no caso do VaR. Seria interessante, ainda, testar outros tipos de parametrização para os modelos de risco, como o GARCH, por exemplo. Além disso, pode-se testar a possibilidade de se modelar o risco utilizando janelas com períodos de dados diferentes além de 252 úteis, de forma a identificar o que funciona melhor.

6 - Referências Bibliográficas:

- ACERBI, Carlo; SZEKELY, Balazs. **Backtesting Expected Shortfall**: Introducing Three Model-independent, Non-parametric Back-test methodologies for Expected Shortfall. *Risk*, v. 27, n. 11, p. 76-81, 2014.
- ARTZNER, Philippe et al. **Coherent measures of risk**. *Mathematical finance*, v. 9, n. 3, p. 203-228, 1999.
- BANCO DE COMPENSAÇÕES INTERNACIONAIS. **Acordo de Basileia II**. Basel: Banco de Compensações Internacionais, 2004.
- BANCO DE COMPENSAÇÕES INTERNACIONAIS. **Acordo de Basileia III**. Basel: Banco de Compensações Internacionais, 2010-2022.
- BELLINI, Tiziano. **Stress Testing and Risk Integration in Banks: A Statistical Framework and Practical Software Guide (in Matlab and R)**. Londres, Reino Unido: Elsevier, 2017.
- BERGER, Bruno Romano. **Gerenciamento de risco em períodos de crise: mensuração do VaR em títulos públicos**. TCC (Graduação) – Curso de Ciências Econômicas, Instituto de Economia, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11422/2115>. Acesso em: 10 dez. 2023.
- BERNSTEIN, Peter Lewyn. **Desafio aos Deuses: A Fascinante História do Risco**. Tradução de Waltensir Dutra. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1998.
- BRASIL. **Tesouro Direto**. Secretaria do Tesouro Nacional, 2023. Disponível em: <https://www.tesourodireto.com.br/mercado-de-titulos-publicos.htm>. Acesso em: 11 dez. 2023.
- CASTRO, Leonardo Nascimento; CANDIDO, Osvaldo. **Backtesting para o Expected Shortfall do Trading Book: Uma Avaliação das Metodologias**. *Brazilian Review of Finance*, v. 16, n. 1, p. 123-155, 2018.
- CHRISTOFFERSEN, Peter. **Evaluating Interval Forecasts**. *International Economic Review*, v.39, n.4, p. 841-862, 1998.
- DANÍELSSON, Jón. **Financial Risk Forecasting: The Theory and Practice of Forecasting Market Risk with Implementation in R and Matlab**. John Wiley & Sons Ltd., 2011.
- DOWD, Kevin. **Measuring Market Risk**. Chichester, Reino Unido: John Wiley & Sons, 2002.
- EMMER, Susanne.; KRATZ, Marie; TASCHE, Dirk. **What is the Best Risk Measure in Practice?** ESSEC Business School, Paris, France, 2014.
- JORION, Philippe. **Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk**. 3 ed. New York, USA, McGraw-Hill, 2007.
- KATO, Fernando Hideki. **Análise de Carteiras em Tempo Discreto**. Dissertação (Mestrado em Administração) - Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.
- KUPIEC, Paul. **Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Management Models**. *Journal of Derivatives*, v.3, n. 2, p. 73–84, 1995.

MARKOWITZ, Harry. **Portfolio Selection**. The Journal of Finance, v. 7, n. 1, p. 77-91, março de 1952.

ROCCIOLETTI, Simona. **Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall**. Wiesbaden, Alemanha: Springer Gabler, 2015.

ROCKAFELLAR, Ralph Tyrrell et al. **Optimization of Conditional Value-at-Risk**. Journal of risk, v. 2, p. 21-42, 2000.

ROMAN, Diana; MITRA, Gautam. **Portfolio Selection Models: A Review and New Directions**. Wilmott journal: the international journal of innovative quantitative finance research, v. 1, n. 2, p. 69-85, 2009.

TALEB, Nassim Nicholas. **A Lógica do Cisne Negro: o impacto do altamente improvável**. Rio de Janeiro: Best Seller, 2008.