

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA



FELIPE COLAR AIZIC

O CÁLCULO DIFERENCIAL E A LINEARIDADE LOCAL: UMA ABORDAGEM
NO CONTEXTO DAS TECNOLOGIAS

RIO DE JANEIRO
2023

FELIPE COLAR AIZIC

O CÁLCULO DIFERENCIAL E A LINEARIDADE LOCAL: UMA ABORDAGEM
NO CONTEXTO DAS TECNOLOGIAS

Monografia de final do curso apresentada no
Curso de Licenciatura em Matemática da
UFRJ como requisito para obtenção do grau
de LICENCIADO em Matemática.

Orientador: Agnaldo da Conceição Esquincalha

RIO DE JANEIRO

2023

FELIPE COLAR AIZIC

O CÁLCULO DIFERENCIAL E A LINEARIDADE LOCAL: UMA ABORDAGEM
NO CONTEXTO DAS TECNOLOGIAS

Monografia de final do curso apresentada no
Curso de Licenciatura em Matemática da
UFRJ como requisito para obtenção do grau
de LICENCIADO em Matemática.

Aprovado em 15 de dezembro de 2023

BANCA EXAMINADORA:

Agnaldo da Conceição Esquinca
Doutorado em Educação Matemática
(PUC-SP)

Rodrigo Cardoso dos Santos
Doutorado em Ensino e História da
Matemática e da Física
(UFRJ)

Márcio Vieira de Almeida
Doutorado em Educação Matemática
(PUC-SP)

Dedico este trabalho aos meus pais que me apoiaram nesse caminho, à minha namorada que esteve me incentivando durante cada momento de minhas realizações acadêmicas e à todos que torcem por mim.

AGRADECIMENTOS

À CNPq, pela bolsa de Iniciação Científica, sem a qual este trabalho não teria sido realizado.

Ao meu orientador Agnaldo Esquincalha, pelas oportunidades e por todo auxílio e ajuda durante esse trabalho.

Ao Instituto de Matemática da UFRJ pelo investimento e apoio.

Ao docente Victor Giraldo por todo ensinamento e por despertar meu interesse obstinado pela conexão entre a matemática pura e a educação, bem como foi feito nesse trabalho. Esse trabalho é uma inspiração do que aprendi com ele.

Ao docente Thiago Hartz por aumentar minha paixão e interesse pela matemática pura, que foi essencial na maturidade desse trabalho e no meu desenvolvimento acadêmico.

Ao docente e coordenador Gerard Grimberg, pelas dicas e detalhes evidenciados no escopo desse trabalho.

Aos meus pais, por todo o apoio e amor incondicional.

À minha namorada por estar ao meu lado em todo momento e por me incentivar a sempre buscar mais academicamente.

*“Só é ancestral aquilo que é contemporâneo;
que não é sujeito às vicissitudes do tempo
porque funda a própria ideia de temporalidade.”*

L. A. Simas

RESUMO

O objetivo deste trabalho é refletir sobre algumas práticas docentes em torno do ensino de Cálculo, sobretudo no ensino de derivadas, promovendo uma abordagem com foco na geometria e concatenando suas devidas problematizações, incluindo a possibilidade do uso de tecnologias digitais. O trabalho fundamentou-se teoricamente em reflexões sobre o ensino de Cálculo, particularmente no ensino de derivadas, evidenciando que sua abordagem ainda costuma ser dotada de técnicas e concentrada no uso de fórmulas, com pouca exploração dos conceitos. A partir disso, buscamos proporcionar uma abordagem problematizada para o conceito de derivadas, a partir da noção de melhor aproximação linear, almejando uma compreensão visual, por meio do *software* GeoGebra, onde foram desenvolvidas duas atividades investigativas com graduandos nas áreas da Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM). A primeira atividade, sobre magnificação local, consiste em aproximar uma função na vizinhança de um ponto e observar que ela se parece muito com uma reta. A segunda atividade, sobre melhor aproximação local, consiste em buscar qual é a melhor reta que tem esse papel. Por meio dessas atividades e das experimentações dos alunos com o GeoGebra, eles puderam refletir sobre a construção do conceito de derivada. Os resultados obtidos apontam que as atividades contribuíram para uma resignificação dos conceitos que eles conheciam de Cálculo I, além de conduzir um ambiente de descobertas e tornando o ensino mais dinâmico e significativo.

Palavras-chave: Tecnologias, Educação Matemática, Derivadas.

ABSTRACT

The objective of this work is to reflect on some teaching practices around the teaching of Calculus, especially in the teaching of derivatives, promoting an approach focused on geometry and concatenating its appropriate problematizations, including the possibility of using digital technologies. The work was theoretically based on reflections on the teaching of Calculus, particularly in the teaching of derivatives, showing that its approach is still usually technical and focused on the use of formulas, with little exploration of the concepts. Based on this, we sought to provide a problematized approach to the concept of derivatives, based on the notion of best linear approximation, aiming for a visual understanding, using the GeoGebra software, where two investigative activities were developed with undergraduates in the areas of Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM). The first activity, on local magnification, consists of approximating a function in the vicinity of a point and observing that it looks very much like a line. The second activity, on best local approximation, consists of finding the best line for this purpose. Through these activities and the students' experiments with GeoGebra, they were able to reflect on the construction of the concept of derivative. The results obtained indicate that the activities contributed to a reframing of the concepts they knew from Calculus I, as well as creating an environment of discovery and making teaching more dynamic and meaningful.

Keywords: Technologies, Mathematics Education, Derivatives.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Círculo Vicioso	13
Figura 2 – Melhor Aproximação Linear de um Parabolóide Elíptico	21
Figura 3 – Magnificação local I	22
Figura 4 – Magnificação local II	23
Figura 5 – Magnificação local III	23
Figura 6 – Magnificação local IV	24
Figura 7 – Magnificação local V	24
Figura 8 – Magnificação local VI	25
Figura 9 – Magnificação local VII	25
Figura 10 – Melhor aproximação I	26
Figura 11 – Melhor aproximação II	27
Figura 12 – Melhor aproximação III	27
Figura 13 – Algoritmo babilônico do cálculo das raízes quadradas	31
Figura 14 – Função derivável, mas não diferenciável em $(0, 0)$	34

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Experimento do Aluno 1	38
Tabela 2 – Experimento do Aluno 2	39
Tabela 3 – Experimento do Aluno 3	40
Tabela 4 – Experimento do Aluno 4	41
Tabela 5 – Experimento do Aluno 5	42
Tabela 6 – Experimento do Aluno 6	43
Tabela 7 – Experimento do Aluno 7	44
Tabela 8 – Experimento do Aluno 8	46
Tabela 9 – Experimento do Aluno 9	47
Tabela 10 – Experimento do Aluno 10	48
Tabela 11 – Experimento do Aluno 11	49

LISTA DE SÍMBOLOS

\in	Pertence
\subset	Subconjunto
\forall	Quantificador “Para todo”
\mathbb{N}	Conjunto dos números naturais
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	Classe das n -uplas de números (x_1, \dots, x_n) , com $x_k \in \mathbb{R} \forall k \in [1, n] \cap \mathbb{N}$
$f : A \rightarrow B$	Função f cujo domínio é A e o contradomínio é B
$x \mapsto f(x)$	A cada x é associado uma imagem $f(x)$
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	Limite da função $f(x)$ quando x tende a x_0
\Rightarrow	Operação lógica “implicação”
\Leftrightarrow	Operação lógica “equivalência” ou “se, e somente se”
ρ	Letra grega “rho”
δ	Letra grega “delta”
ε	Letra grega “épsilon”
ψ	Letra grega “psi”
σ	Letra grega “sigma”
Ω	Letra grega maiúscula “ômega”
$\mathcal{L}(V, W)$	Conjunto das transformações lineares de V em W .
$ x $	Módulo de x , definida como $ x = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
$\ x\ $	Norma de x , quando $x \in \mathbb{R}^n$, definida como $\ x\ = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$
$\overset{\circ}{X}$	Interior do conjunto X .
X'	Conjunto dos pontos de acumulação de X .
$f'(x)$	Derivada da função $f(x)$
$\frac{\partial f}{\partial x}$	Derivada parcial da função f em relação à variável x

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
2	A IMPORTÂNCIA DO USO DE TECNOLOGIAS NO EN- SINO E APRENDIZAGEM	15
2.1	TRANSFORMAÇÃO DO CONHECIMENTO E QUEBRA DE PA- RADIGMAS	15
2.2	A TECNOLOGIA NA PERSPECTIVA DO ENSINO DE DERIVADAS	17
3	PROPOSTA METODOLÓGICA - UMA CONSTRUÇÃO . .	19
3.1	MOTIVAÇÕES	19
3.2	MAGNIFICAÇÃO LOCAL	22
3.3	MELHOR APROXIMAÇÃO	26
3.4	DIFERENCIABILIDADE EM \mathbb{R}	28
3.5	DIFERENCIABILIDADE EM \mathbb{R}^N	31
4	APLICAÇÕES DOS EXPERIMENTOS E ALGUNS RESUL- TADOS	36
5	CONCLUSÕES	51
	REFERÊNCIAS	53

1 INTRODUÇÃO

Em geral, as abordagens que envolvem o ensino de derivadas, sejam nas disciplinas de cálculo ou análise, articulam um viés mais algébrico, que frequentemente se limitam a uma linha de ensino roteirizada, conduzida em uma cultura de reprodução automatizada. Um dos problemas centrais da reprodução automática é a falta de reflexões do ponto de vista do ensino, onde os conceitos não são problematizados e viram uma espécie de “jogo de linguagem”, sem articulação com as interpretações e seus significados, conduzindo os alunos ao imediatismo e superficialidade, que são encontradas nas fórmulas e procedimentos. Concomitante a isso, buscando explorar uma proposta com foco na geometria para o ensino de derivadas, de forma a envolver sentido em sua construção, evidenciaremos a importância de envolver o uso de tecnologias para a exploração das derivadas, permeando uma abordagem que buscará uma generalização mais natural. Com base nisso, além de prescrever as etapas de construção, pensamento e reflexão, o ponto crucial será centralizar as abordagens de ensino, elaborando materiais digitais que sintetizem essas discussões, de forma geral a abrangente.

O ensino de conceitos e procedimentos matemáticos pode ser abordado de diversas maneiras. No entanto, a relação professor-aluno costuma estar subordinada a convenções muitas das vezes inexplicáveis, as quais se propagam e são reproduzidas e mantidas em torno de um saber, impactando no ensino, o que constitui um contrato didático, definido por Brousseau (1986):

Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos que são esperados pelo professor... Esse contrato é o conjunto de regras que determinam, uma pequena parte explicitamente mas sobretudo implicitamente, o que cada parceiro da relação didática deverá gerir e aquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro. (Brousseau, 1986, p.50)

Em geral, a prática pedagógica presente na Matemática é baseada em parte, no contrato didático que se refere a um procedimentalismo: enunciar as definições e fornecer exemplos e exercícios, onde espera-se que o aluno entenda as definições, minuciosamente, compreenda os exemplos e use os mesmos de base para reproduzir nos exercícios. Desta forma, o saber fica implícito ou a cargo do estudante e as regras e os procedimentos sobressaem. Essa é uma prática que costuma ser frequente no ensino de Cálculo Diferencial, onde enuncia-se a definição de derivadas usando limites, em sequência, partem para as regras operatórias e os exercícios se baseiam, sobretudo, em “determine as derivadas”, “derive a função”, o que envolve uma esfera anti-didática preenchida de procedimentos, macetes e fórmulas que não são sequer entendidas, do ponto de vista conceitual, metodologia que vem a ser chamada de “Paradigma do Exercício”, por Skovsmose (2001).

Essa forma de ensino baseada no procedimentalismo não deveria ser majoritária na prática docente, uma vez que pode gerar um círculo vicioso, pois assim como os alunos se evanescem de conhecimento científico (aquele saber que é obtido por meio de critérios como a experimentação e comprovações científicas), os mesmos poderão reproduzir o que lhes foi atribuído no processo de aprendizagem, dotado de conhecimento empírico (segundo a Filosofia, é aquele conhecimento que adquirimos no dia-a-dia através do senso comum, dispensando a necessidade de comprovação científica). Em prol da mudança desses paradigmas, é importante que o educador desenvolva ou faça uso de metodologias de ensino diferenciadas para atender os estudantes, uma vez que eles não detêm os mesmos conhecimentos nem aprendem da mesma forma e no mesmo espaço de tempo.

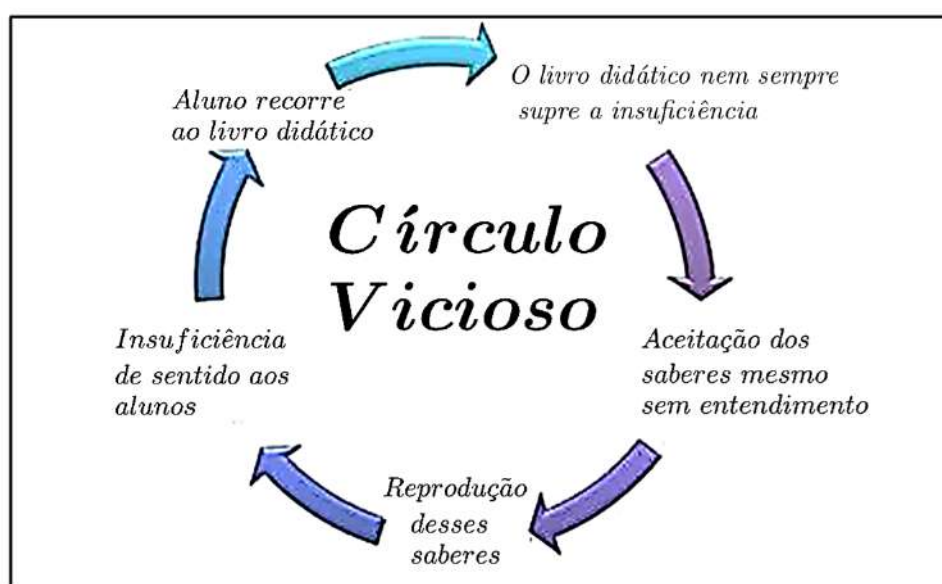
A matemática, segundo Giraldo (2018), é enxergada geralmente como uma ciência exata, isto é, uma ciência validadora das certezas absolutas e não possui espaço para o erro, assim como é vista como uma ciência do rigor, então seu ensino, para muitos, deve ser rigoroso. Essas são visões da Matemática ainda muito frequentes num modelo que costuma ser genericamente chamado de escola tradicional, que valoriza o ensino universalista, desconsiderando a vivência dos alunos, o que vem a ser chamado de Educação Bancária por Freire (1978). A educação, nesse contexto, é compreendida como uma forma de “transmissão” do conhecimento do docente para os estudantes que são considerados desprovidos de conhecimento. A desconstrução desse ensino tradicionalista deve ser central na tentativa de mudança de paradigma na educação e na tentativa de melhoria pedagógica, na qual os professores precisam desafiar o “Paradigma do Exercício”, movimento que deve ser enfrentado segundo Skovsmose (2001), promovendo uma reflexão sobre as práticas docentes. Freire (1996) destaca a importância da reflexão na prática docente:

o que se precisa é possibilitar que, voltando-se sobre si mesma, através da reflexão sobre a prática, a curiosidade ingênua, percebendo-se como tal, se vá tornando crítica. Por isso, na formação permanente dos professores, o momento fundamental na formação permanente dos professores é o da reflexão crítica sobre a prática. É pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem, que se pode melhorar a próxima prática (Freire, 1996, p.43).

Percebemos, sob todos esses aspectos, a importância de que as práticas pedagógicas sejam oportunidades para o desenvolvimento da reflexão crítica dos alunos, para que possibilite sentidos e significados ao aprendido. No entanto, tais práticas pedagógicas precisam ser contextualizadas para que possam produzir sentidos e significados ao aprendido, que podem ser potencializadas à exploração de todos os elementos da forma mais dinâmica possível, fugindo do ensino geralmente tradicional e sem reflexão sobre o saber científico, como exemplifica a literatura da área quanto ao ensino de derivadas nos cursos de cálculo. No entanto, essa exploração tende a ser mais difícil caso os professores não tenham vivenciado as possibilidades dessas interações dinâmicas em sua experiência discente.

Essa dinâmica educacional é, na maioria das vezes, um desafio “circular”, pois trata-se de um coletivo de ensino e aprendizagem, entre o docente e os discentes, não necessariamente como uma hierarquia, uma vez que os professores tendem a aprender muito com os alunos. No entanto, quando a exploração dos conceitos não é promovida de maneira problematizada e os alunos se deparam com a falta de clareza nos conceitos, muitas vezes recorrem a materiais de apoio como livros didáticos em busca de respostas. Contudo, essa fonte nem sempre consegue suprir totalmente as lacunas, levando à aceitação de conhecimentos mesmo sem entendimento profundo. Esse processo, por sua vez, resulta na reprodução desses saberes de maneira superficial, perpetuando a insuficiência de sentido aos alunos, entrando em um círculo vicioso.

Figura 1 – Círculo Vicioso



Fonte: Autor

Dessa óptica, o círculo vicioso pode ser interrompido por mudanças na prática pedagógica de matemática, principiando uma transformação de direcionamento nas abordagens do ensino que privilegie a reflexão e o pensamento crítico. Da mesma maneira, entendemos que essa mudança de direcionamento requer também uma reflexão sobre a importância das abordagens do ensino, que é cercada de flexibilidade do conhecimento e uma multiplicidade de conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares. Essa flexibilidade do conhecimento é descrita por Llinares e Sánches (1996):

A ideia da flexibilidade do conhecimento do professor deve ser entendida como a habilidade que devem possuir os estudantes para professor de modificar o significado associado aos conceitos matemáticos em relação às características das tarefas traçadas e/ou às características do sistema de representação empregado. Este é um aspecto do conhecimento do professor que determina sua capacidade para ajudar os alunos a construir sua compreensão das ideias matemáticas (McDiarmid et al, 1989) e a caracterizar os processos de negociação dos significados associados aos diferentes modos de representação utilizados (Llinares e Sánches, 1996, p. 109).

Na prática pedagógica, essa negociação de significados associados aos diferentes modos de representação utilizados nem sempre é presente, como muitas das vezes ocorre na apresentação do conceito de derivadas. Por exemplo, o conceito e a manipulação na definição de derivadas usando limites costuma ser aparente ou privilegia seu significado? É possível construir alguma atividade que privilegie mais os elementos conceituais da derivada?

Nesse ponto de vista, esse trabalho irá tentar, em algum sentido, conduzir uma abordagem e atividades que busquem fugir do círculo vicioso utilizado em um paradigma tradicional e privilegie metodologias de ensino que envolvam o exercício de reflexão e explicita uma visão global do conceito de derivadas, por meio das tecnologias digitais.

Para isso, no capítulo seguinte, iremos introduzir discussões baseadas em pesquisas científicas que trazem o potencial das tecnologias digitais no ensino. No capítulo 3, faremos uma construção do conceito de derivadas, reflexões e possíveis generalizações, concomitante à atividades construídas no GeoGebra para serem aplicadas aos alunos, de modo a “naturalizar” a definição de diferenciabilidade. No capítulo 4, iremos evidenciar os testes feitos com alguns alunos, que nos coloca em um posicionamento de analisar possíveis melhoras e ideias de levar tais propostas para a sala de aula.

2 A IMPORTÂNCIA DO USO DE TECNOLOGIAS NO ENSINO E APRENDIZAGEM

2.1 TRANSFORMAÇÃO DO CONHECIMENTO E QUEBRA DE PARADIGMAS

A tecnologia, de modo geral, pode ser uma grande aliada do processo educacional. Com ela, o ensino pode incorporar um ponto de vista mais factual, sendo um possível influenciador na transformação do conhecimento empírico no conhecimento científico, quebrando diversos paradigmas impostos na matemática. O contato que a tecnologia pode ter com a realidade pode tornar o ambiente mais instigante ao aluno que quer aprender, além de ser uma metodologia que, de alguma forma, pode desvirtuar o procedimentalismo frequente nas aulas de matemática, uma vez que estimula a interação e o aluno se torna um ator da aprendizagem. A utilização de materiais visuais é um dos pontos mais altos do uso de tecnologias no ensino de matemática. Tendo isso em vista, buscaremos nessa seção, argumentar que a tecnologia pode ser uma boa ferramenta para conduzir sentido no ensino de derivadas, de forma geométrica, uma vez que essa ferramenta pode potencializar visualizações nas construções muitas das vezes não perceptíveis aos esboços em um quadro, por exemplo, onde será possível construir diversos materiais digitais para o conceito de derivadas.

Quando tratamos de tecnologias para o ensino, surgem diversas questões sobre métodos e práticas no ambiente de aprendizagem. O docente possui um papel de se adaptar a diversas mudanças conjunturais para atender demandas de alunos que estão inteiramente ligados com o ambiente tecnológico. Segundo Skovsmose (2000):

trabalhar com ambientes diferenciados de aprendizagem, em especial no âmbito da investigação, gera um grau elevado de incerteza, que não deve ser eliminada, mas enfrentada. A inquietude nos meus últimos anos de profissão, fez-me, além de buscar um entendimento maior do que seja essa forma diferenciada em lidar com o ensino da matemática, buscar subsídios para apoiar novas práticas dentro do processo ensino e aprendizagem com meus alunos (Skovsmose, 2000, p.17).

É evidente que os métodos usuais de ensino possuem sua importância e não precisam ser deixados de lado. No entanto, há de se verificar que a adoção de abordagens tecnológicas no ambiente de ensino não se motiva por uma tentativa de substituição dos métodos de ensino e muito menos substituir o papel do professor, mas sim, auxiliar o professor na prática docente, buscar construir um sentido visual e interativo, instigando também a construção, produção e criatividade dos alunos, onde o papel do professor continua sendo fundamental para que essa implementação da tecnologia seja de forma adequada e realmente produza mais significação para os conceitos e entendimentos matemáticos. Segundo Freire (1996), ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção.

Como elucidado, um dos pontos cruciais que a tecnologia pode inferir na aprendizagem é a transformação do conhecimento empírico no conhecimento científico, pois ela é capaz de captar um dos principais sentidos nos processos de ensino e aprendizagem, que é a oportunidade de experimentar a construção do conhecimento, que depende diretamente de como os conteúdos são dispostos para os alunos e de sua metodologia, onde o objetivo é que o aluno produza sentidos e significados ao que está sendo apresentado. Segundo Borba (2002):

Eu gosto de pensar que a informática não melhora e nem piora o ensino, ela transforma o ensino e transforma a aprendizagem e ela transforma a forma como as pessoas produzem conhecimento. A gente vê que a utilização da informática possibilita que argumentos visuais sejam utilizados com muito mais frequência, porque é uma característica da mídia informática (Borba, 2002, p.135).

As tecnologias, de modo geral proporcionam novas relações e novas formas de aprender, ampliando a interação e a relação com a linguagem matemática, sendo um dos causadores na quebra de paradigmas impostos sobre a matemática que prevalecem, em sua maioria, sob o ensino tão tradicionalista e tecnicista presente em grande escala. O uso das ferramentas tecnológicas em culminância à mudança de conhecimento produz três grandes pautas que são fundamentais para construir tendências na educação, que são: a aprendizagem ativa, colaborativa e significativa.

A aprendizagem ativa, segundo Silberman (1996), tem como principal objetivo fazer com que o aluno aprenda com a prática, e não somente assistindo ao professor ministrar a aula em forma de palestra, como costuma ser feito tradicionalmente. Contudo, é importante salientar que, para que a aprendizagem ativa ocorra de forma eficiente e funcional, é necessário que o aluno tenha em mãos ferramentas para alcançar o conhecimento de forma hábil. A aprendizagem colaborativa, segundo Dillenbourg (1999), está na troca de conhecimentos entre os estudantes, quando juntos buscam o aprendizado. Para que essa seja potencializada, a interação entre os alunos deve ser otimizada. A aprendizagem significativa, segundo Ausubel (1963), consiste na conexão entre os conhecimentos novos, que se espera que o aluno adquira com seu conhecimento prévio, conectando as ideias e conceitos dessa forma, impedindo que os novos conhecimentos sejam desenvolvidos de forma isolada.

No contexto dessas abordagens supracitadas, a tecnologia pode impor, sobre a aprendizagem ativa, um método de disponibilidade de ferramentas de pesquisa, busca e experimentação, que podem potencializar o aprendizado, ao alcance do aluno. Sobre a aprendizagem colaborativa, a tecnologia aparece como uma plataforma para os alunos trocarem e construir conhecimentos, possibilitando que, juntos, os alunos cheguem ainda mais longe. Sobre a aprendizagem significativa, a tecnologia se dá, além das formas já comentadas, oferecendo maneiras de buscar conceitos que enfatizem essa conexão entre o assunto a ser estudado e o conhecimento prévio do aluno.

Diante das perspectivas ressaltadas, é imprescindível a importância de utilizar a tecnologia para o ambiente de ensino e aprendizagem de matemática, uma vez que queremos transformar a forma de conhecimento que, como elucidado, é característico de uma aprendizagem ininteligível, e ela pode ser capaz de produzir sentidos e diversas outras formas de aprendizagem que foram explicitadas. Borba e Penteado (2001) afirmam que além de trazer a visualização para o centro de aprendizagem matemática, as novas mídias, como os computadores com *softwares* gráficos e calculadoras gráficas, permitem que o aluno experimente bastante, de modo semelhante ao que faz em aulas experimentais de biologia e de física.

Antes de mostrar que esses ambientes gráficos são essenciais para o ensino de derivadas, vamos apresentar um pouco sobre o ambiente ao qual desenvolveremos a proposta metodológica, que será o GeoGebra.

O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino, que reúne geometria, álgebra, cálculo, gráficos e estatística em uma aplicação fácil de utilizar. É uma comunidade em rápida expansão de milhões de localizados em praticamente todos os países. Tornou-se líder no fornecimento de *software* de matemática dinâmica, apoiando a ciência, tecnologia, engenharia e matemática (STEM) educação e inovações no ensino e aprendizagem em todo o mundo. Nele, é possível realizar construções geométricas, inserir equações e coordenadas de forma direta. Na plataforma podemos utilizar ferramentas que construam retas, ângulos, circunferências, gráficos de funções, aproximações, onde não há perda dos vínculos geométricos, o que permite que o usuário faça uma grande quantidade de experimentações, observando diversos efeitos gráficos e algébricos.

2.2 A TECNOLOGIA NA PERSPECTIVA DO ENSINO DE DERIVADAS

O uso de tecnologias, segundo Junior (2015), tem proporcionado oportunidades de observar e experimentar o que está acontecendo com alguns fenômenos, possibilitando a visualização e a múltipla representação das informações. A visualização gráfica proporcionada pelos *softwares* é de suma importância no processo de ensino e aprendizagem, pois ela permite conectar os significados e os conceitos presentes nas teorias e podem ser utilizados para auxiliar ou até mesmo aclarar o conteúdo.

Na perspectiva do ensino de derivadas, a sua construção é essencialmente esteada na noção de melhor aproximação afim, que consiste em aproximar uma função, localmente, por meio de uma função polinomial do primeiro grau. No entanto, pesquisas apontam para a tendência de que esse processo não fique evidente no ponto de vista da visualização estática, como nos quadros. De maneira geral, como apresentamos, o ensino de cálculo prioriza os processos de construção e avaliação formal, onde os alunos derivam funções sem serem capazes de dar um sentido mais amplo às noções envolvidas, pois priorizam somente o algebrismo do conceito, enquanto a exploração analítica fica sem exploração. Segundo Barbosa (2004),

no modelo tradicional do ensino de matemática, que valoriza, em excesso, a função de memorização e o rigor de regras, fórmulas, teoremas, demonstrações, situados no campo da abstração, que o aluno não está acostumado, gerando um certo tipo de contaminação científica tanto na aprendizagem do aluno como na prática pedagógica do professor. (Barbosa, 2004, p.39)

Diversas vezes os alunos acabam decorando as regras de derivação, porém não possuem facilidade em utilizar as ferramentas e os conceitos matemáticos para resolver determinada situação-problema. Segundo Silva (1994),

Um dos caminhos que pode ensejar maior produtividade no processo de ensino e aprendizagem no Cálculo Diferencial e Integral I pode estar na diversificação das formas de abordagem de cada tema a ser apresentado, a partir do que se adapta a cada um destes, da condição intrapessoal e interpessoal de cada docente, do nível de aprofundamento desejável, etc. Assim, algumas opções viáveis podem ser encontradas, além da resolução de problemas que constituem a própria essência da Matemática, por meio da explicitação dos seus conceitos e de suas teorias através da história; e para estas podem tornar-se um meio bastante estimulador, tanto para o professor como para o aluno, criando-se uma atmosfera que facilite a compreensão do saber matemático pelo contato com sua gênese e etapas de seu desenvolvimento; além disso, fazer uso da experimentação, das aplicações e do uso da computação (Silva, 1994, p.6).

Baseando-se nessas diversas metodologias, vamos aderir aos recursos tecnológicos, pois ela pode proporcionar um ambiente investigativo, interativo e dinâmico, onde eles podem descobrir e desvendar o conhecimento específico com o auxílio do professor, de maneira a abranger a possibilidade de ensino para o além da lousa. De acordo com Palis (1995), as tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Cálculo é de suma importância, onde algumas mudanças na qualidade do aprendizado dos alunos tornam-se evidentes, pois eles participam mais ativamente das aulas ou trabalhos apoiados em computadores, seguindo o curso mais de perto e fazendo mais perguntas do que em ambientes de ensino tradicionais. Como destaca Silva (1994, p. 7)

O Cálculo, por sua própria natureza de trabalhar com aproximações, é um dos mais adequados para a utilização de computador em experimentação, propiciando uma (re)descoberta dos seus conceitos. Infelizmente, esta ferramenta de trabalho atualmente não é utilizada pelos professores. Uns, por não a aceitarem como método de validação de uma verdade matemática, outros por desconhecerem a sua utilidade.

Dessa forma, o uso de *softwares* apresenta-se como uma opção favorável para a aprendizagem de Cálculo, pois ela oportuniza a exploração, visualização gráfica e a discussão de conceitos geométricos de forma dinâmica, que é de extrema importância no processo educacional, pois permite engajar conceitos e significados que podem ser incorporados à solução simbólica de problemas e ao aprendizado mais significativo.

3 PROPOSTA METODOLÓGICA - UMA CONSTRUÇÃO

3.1 MOTIVAÇÕES

Geralmente, aprendemos em cálculo que a derivada de $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $x_0 \in D$ é o coeficiente angular da reta tangente à curva do gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$, e dizemos que f é derivável em $x_0 \in D$ se, e somente se o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe e é finito.

No entanto, os cursos de cálculo tendem a adotar estratégias que são fortemente caracterizadas por simplificações teóricas dos conceitos tratados, onde o conceito de derivada por exemplo fica restrito a ser o coeficiente angular da reta tangente. Do ponto de vista matemático, isso não pode ser tomado como definição de derivada, pois uma definição formal necessita de conceitos precedentes, uma vez que é constituída de uma lógica dedutiva, isto é, só podemos definir um novo objeto usando conceitos brevemente já construídos. Porém, a noção de tangência no sentido do cálculo infinitesimal é estabelecido pelo limite da razão incremental, ou seja, não é um conceito anterior ao de derivada para que sua definição possa se basear logicamente. No sentido pedagógico, os alunos tendem a se referir ao sentido de tangência pré-definido na educação básica, que leva como referencial situações globais, onde tangenciar costuma ser sinônimo de possuir um único ponto de interseção, o que não condiz com a noção de tangência do Cálculo e nos leva a comparar as situações geométricas globais com os comportamentos analíticos locais como campos diferentes ao nosso sentido de tangência.

Dessa maneira, a definição comumente utilizada nos cursos de Cálculo que se acomodam às intencionalidades tecnicistas que atravessam essas abordagens simplificadoras, pode ser limitadora em certo sentido.

Dessa forma, para conduzir a construção, é necessário motivá-la. Uma observação que pode ser iniciada é que as funções afins (funções da forma $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = ax + b$; $a, b \in \mathbb{R}$) são das funções mais simples a serem manipuladas. Portanto, estudar o comportamento de funções mais complexas pode ser analisado aproximando tal função por uma reta que mais se pareça com a função em determinada vizinhança. Será que existe uma única reta que fará esse papel de maneira mais eficiente, isto é, será que existe uma única reta que melhor aproxima uma função, quando olhamos uma vizinhança de um ponto?

De acordo com Carvalho, Giraldo e Tall (2002), a imagem conceitual é a estrutura cognitiva total na mente de um aluno relacionada a certo conceito matemático na mente de um indivíduo, constituída de todas as imagens mentais, representações visuais, descrições

verbais e impressões associadas a um dado conceito, enquanto a unidade cognitiva é cada porção da estrutura cognitiva associada a um dado conceito, na qual um indivíduo é capaz de forçar atenção de uma vez, podendo ser símbolos, fatos específicos ou genéricos relacionados ao conceito em questão, passos de um argumento, teoremas, e assim por diante. Já uma imagem conceitual rica provém da construção de uma ampla gama de correlações e conexões entre unidades cognitivas.

Desta forma, a possibilidade de construção para a pergunta da existência de uma reta que melhor aproxima uma função na vizinhança de um ponto levará em conta a noção mais intuitiva para o aluno, uma vez que a imagem conceitual definida por Tall (1981) difere da definição matemática, na qual a capacidade de recordação da definição formal não está unicamente associada a imagem conceitual rica. Sendo assim, as ideias que constituem os desdobramentos de um conceito não se encontram nas definições, mas sim nas imagens intuitivas associadas, segundo Cornu (1991).

A noção de derivada pode ser atrelada a diversos contextos e diversas maneiras de ser enunciada, como exemplificado por Artigue (1991), podendo ser o limite da razão

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

quando $h \rightarrow 0$, podendo ser a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em x_0 , a inclinação da reta que melhor aproxima f na vizinhança de x_0 , o coeficiente do termo de ordem 1 na expansão da série de Taylor de f em torno de x_0 , o resultado da aplicação das regras usuais de derivação, sabendo-se as derivadas das funções elementares, a inclinação de uma porção magnificada do gráfico de f na vizinhança do ponto x_0 .

Todas essas noções de derivada possuem a sua relevância e não há aquela que possa ser melhor definida, mas sim aquela que gera uma melhor imagem conceitual e aquela que pode ser mais facilmente generalizada em outros contextos. Cada representação das evidenciadas anteriormente explicita alguns aspectos conceituais, mas ao mesmo tempo oculta outros.

Tall (1989) define um organizador genérico como um ambiente que possibilita ao estudante manipular exemplos e contra-exemplos de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados. Dessa forma, fundamenta a noção de raiz cognitiva como aquela que faz sentido para o estudante no estágio em questão e possibilita expansões cognitivas para construções formais e desenvolvimentos teóricos subsequentes.

Nessa perspectiva, o conceito de limite não faz sentido para os estudantes em geral, na perspectiva de um curso inicial para a graduação. De maneira contrária, essa noção se impõe como uma intuição contrária à percepção humana, que pode ser evidenciada pela evolução histórica. Assim, a definição formal de limite não se caracteriza como uma boa raiz cognitiva para o conceito de derivada, pois não satisfaz a primeira propriedade descrita por Tall, ou seja, a conceituação deve tender a se colocar como um objeto no

desenvolvimento cognitivo dos estudantes, e não como um ponto de partida, como geralmente ocorre e pôde ser evidenciado na literatura da área.

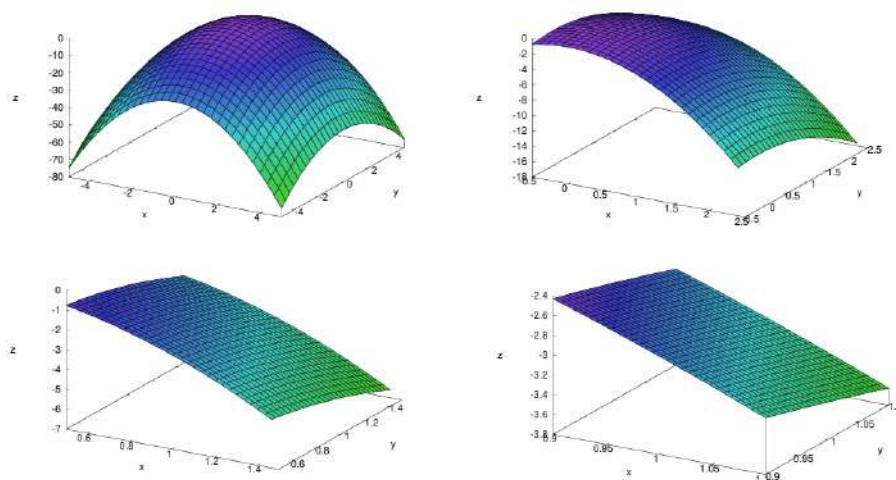
Para isso, vamos nos basear na noção de *local straightness* de Tall, que se baseia na ideia de que as curvas diferenciáveis estudadas nos cursos iniciais de cálculo tendem a se parecer com uma reta quando são magnificadas na vizinhança de um ponto, e a derivada vem a ser apresentada como o coeficiente angular dessa reta. Ou seja, em busca de formalizar a ideia, buscaremos entender que a motivação é encontrar a reta que melhor aproxima a função na vizinhança de um ponto dado, de tal modo que elas tendam a se confundir quanto maior for a magnificação.¹

A noção de que um objeto curvo pareça linear quando olhado de muito perto é uma perspectiva familiar. Segundo Neri e Cabral (2009),

Consideremos a Terra. Durante muitos milhares de anos, pensou-se que a superfície terrestre era plana. A razão é que o planeta era visto de muito perto. Só quando nos afastamos dele, vemos que na realidade a sua superfície é mais parecida com uma esfera do que com um plano. Diz-se que Aristóteles reparou isso vendo a sombra da Terra sobre a Lua durante um Eclipse. De certa forma, Aristóteles precisou recorrer à imagem da Terra vista da Lua para poder perceber que a Terra não é plana. Ora, se a Terra parece (ou parecia) plana, significa que existe um plano que se parece muito com a Terra, certo? Na verdade, sabemos que não é um plano, mas sim vários planos. Para um habitante de Tóquio, o plano que mais parece com a Terra não é o mesmo para nós. Isto nos indica que esta noção de aproximação é local, isto é, dependendo do ponto onde nos colocamos percebemos de modo diferente o objeto simples (reta, plano, etc) que mais se parece com o objeto original (curva, esfera, etc) (Neri, Cabral, 2009, p.117).

Por exemplo, observemos um parabolóide elíptico se parecendo com um plano ao darmos *zoom* em um ponto da curva.

Figura 2 – Melhor Aproximação Linear de um Parabolóide Elíptico



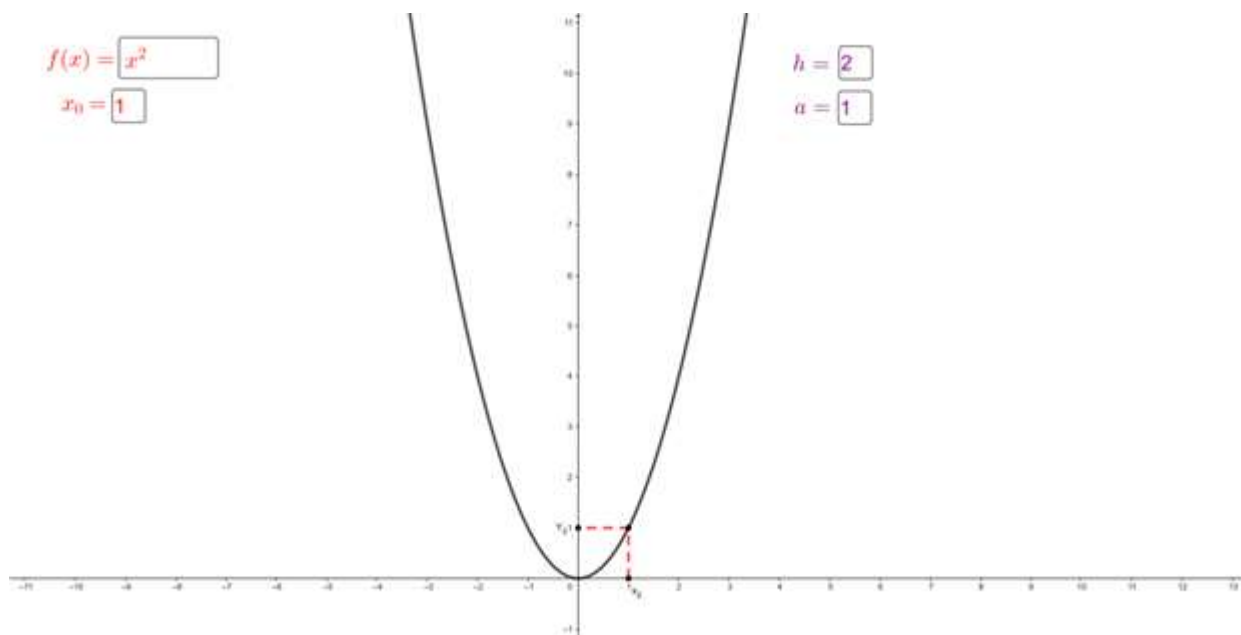
¹ Para melhores discussões sobre esses tópicos, ver *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada*, de Victor Giraldo (2004), em [14].

Desta forma, para nos situarmos inicialmente em \mathbb{R} pelo contexto de Cálculo I, podemos pensar em uma função qualquer e tentar aproximá-la por uma reta na vizinhança de um ponto qualquer x_0 . Vamos elucidar essas construções nas seções seguintes.

3.2 MAGNIFICAÇÃO LOCAL

Baseando-se nessa fundamentação, uma maneira alternativa de construir essas noções (evidentemente usando a tecnologia já explicitada) é observar, inicialmente, o comportamento gráfico determinado pelas escalas utilizadas.

Figura 3 – Magnificação local I



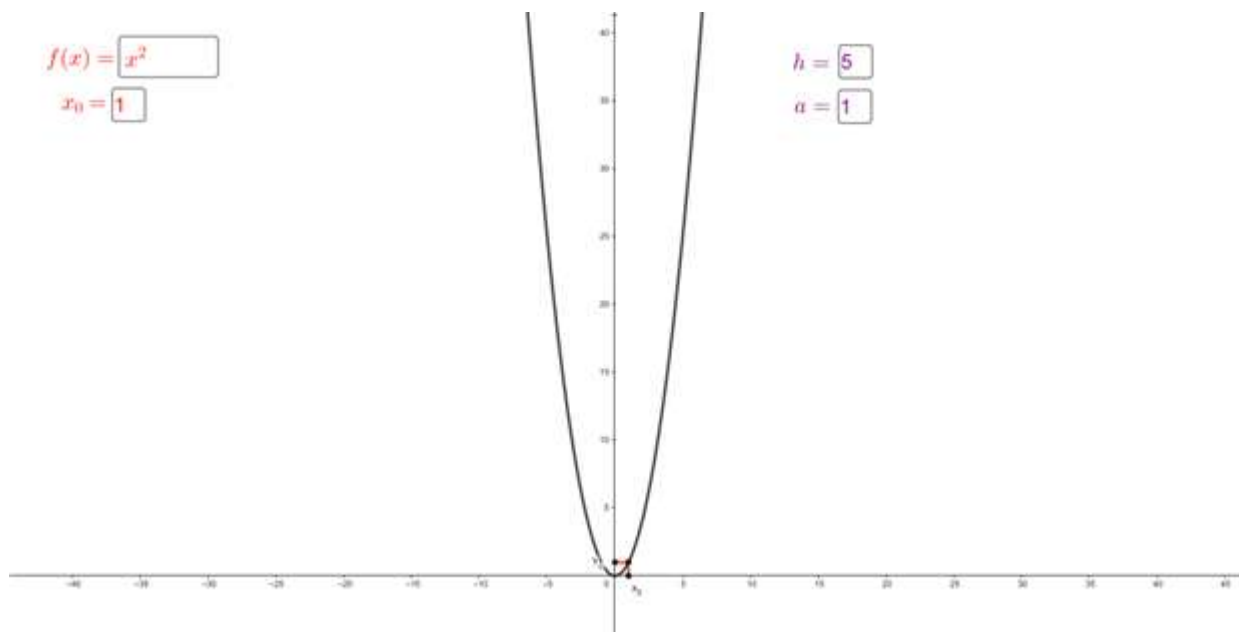
Fonte: GeoGebra

Na figura acima, utilizamos no GeoGebra um material² que permite que coloquemos uma função qualquer $f(x)$, um ponto x_0 qualquer, a que é o coeficiente angular da reta na forma $r(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$ e h que magnifica f em torno de x_0 . É evidente que quando h aumenta, a função fica visualizada cada vez mais de longe, onde os detalhes não são explícitos.

² Material originalmente produzido por Victor Giraldo, durante a disciplina de Análise II do Programa de Pós Graduação em Ensino de Matemática.

Link para o material: [Materiais digitais](#)

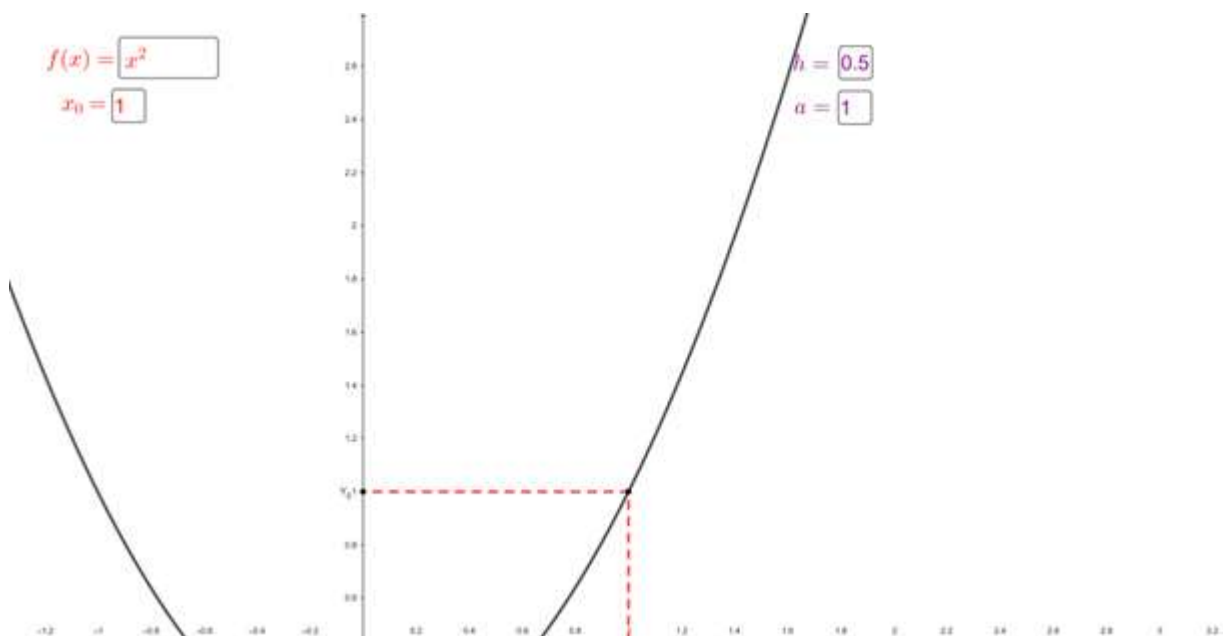
Figura 4 – Magnificação local II



Fonte: GeoGebra

No entanto, à medida que h diminui, a função fica visualizada cada vez mais perto, onde os detalhes locais ficam aparentes.

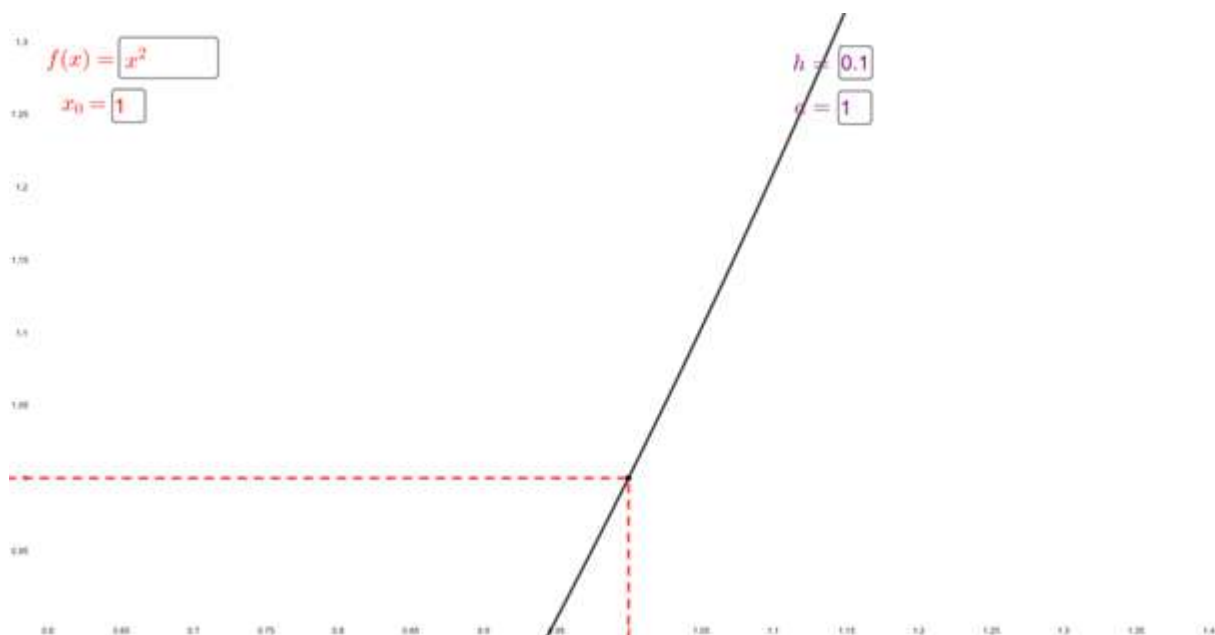
Figura 5 – Magnificação local III



Fonte: GeoGebra

Quando h vai se aproximando de 0, a curva vai tendendo a ser visualizada como uma reta.

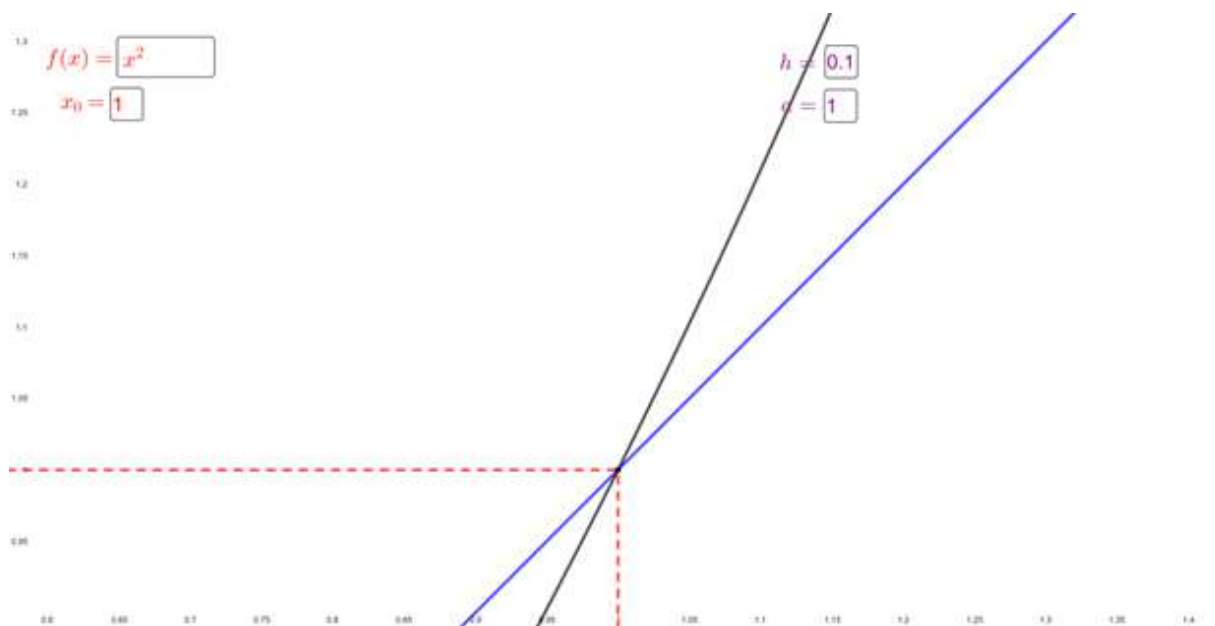
Figura 6 – Magnificação local IV



Fonte: GeoGebra

Agora podemos nos fazer a seguinte pergunta: será que a reta de equação $a(x - x_0) + f(x_0)$ é uma boa aproximação para f ? Nesse caso, tomando $a = 1$, teremos a reta $r(x) = x$. Vamos explicitá-la na figura:

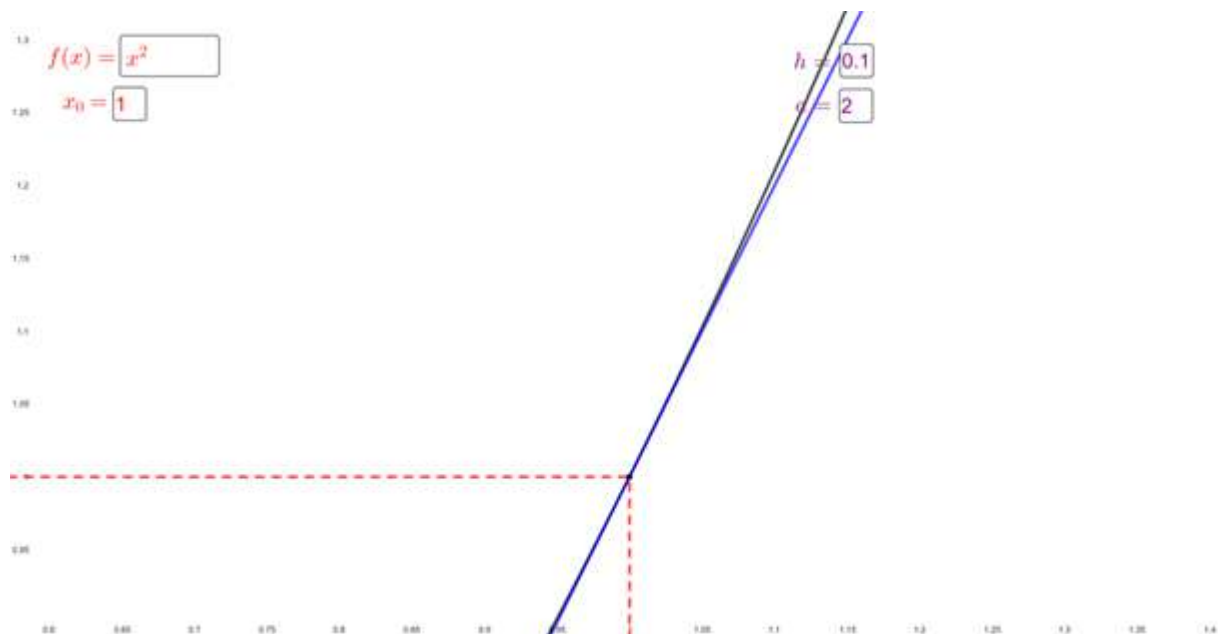
Figura 7 – Magnificação local V



Fonte: GeoGebra

Podemos perceber que a reta azul não é uma boa aproximação para f na vizinhança de x_0 , pois quando f é magnificada, tomando $h = 0.1$, elas não tendem a se confundir, é necessário que r mude a inclinação. Por exemplo, tomando $a = 2$, teremos $r(x) = 2x - 1$.

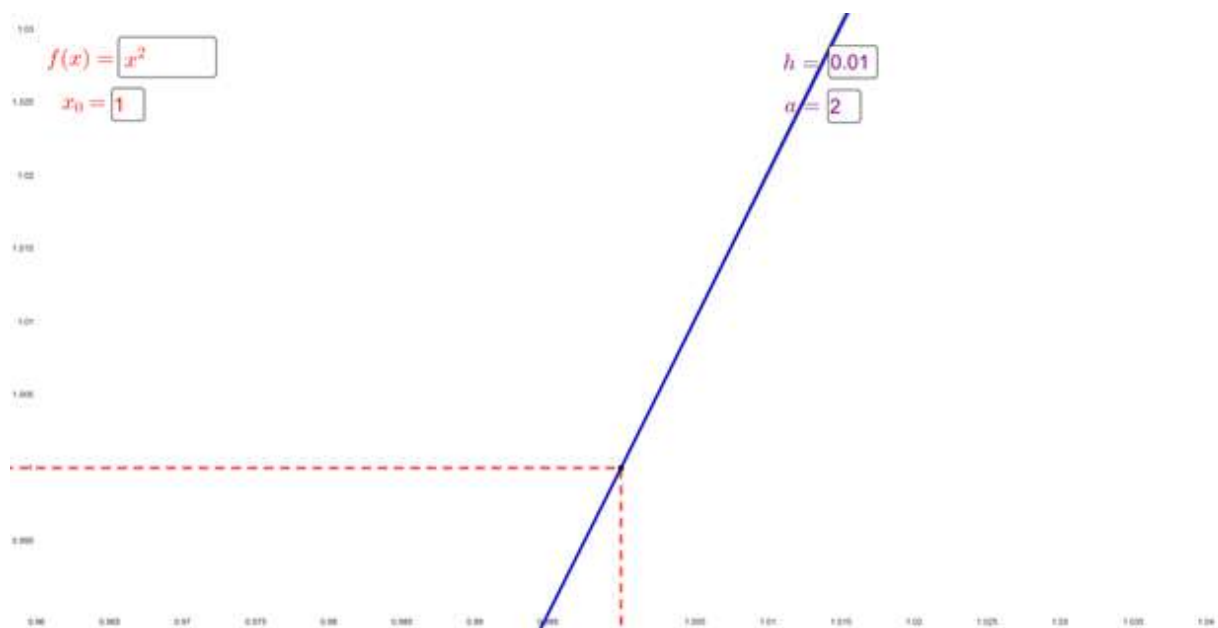
Figura 8 – Magnificação local VI



Fonte: GeoGebra

É evidente que o erro entre as funções é bem menor do que quando $a = 1$. Se tomarmos h menor ainda, as curvas vão tendendo cada vez a se confundirem mais.

Figura 9 – Magnificação local VII



Fonte: GeoGebra

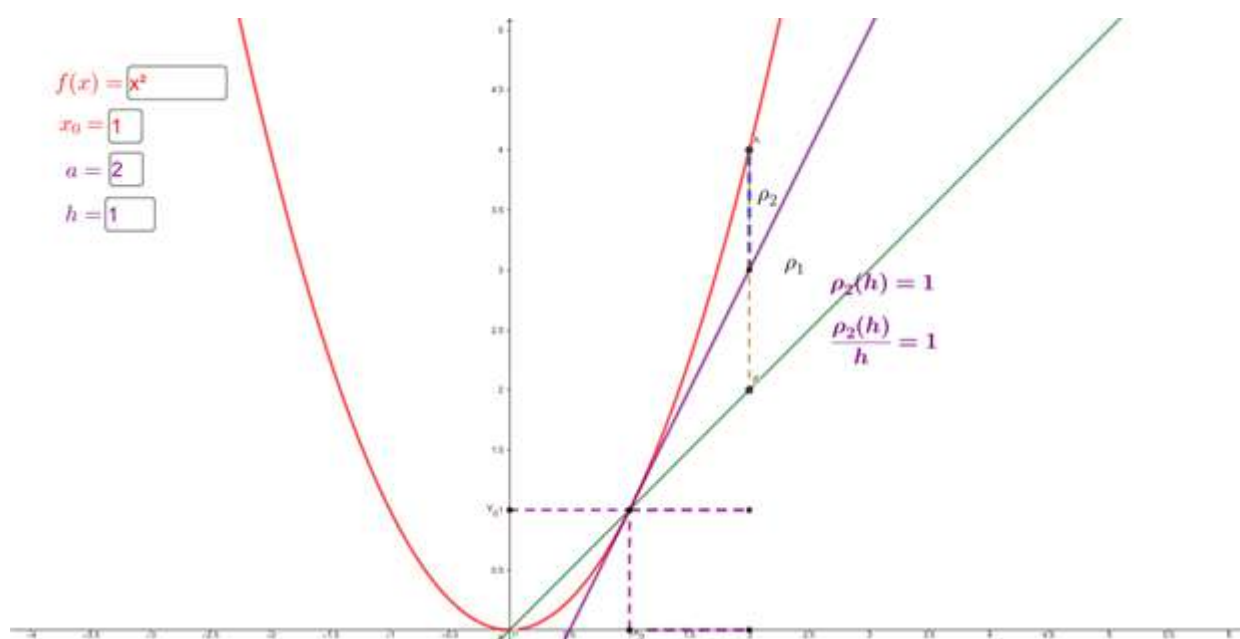
Dessa forma, a reta $r(x) = 2x - 1$ parece uma boa aproximação para f no ponto $(1, 1)$.

Esse material pode trazer uma evidência concreta aos alunos, quanto à percepção de que h deve ser pequeno para que possamos analisar localmente a função, ele pode escolher f e x_0 quaisquer e o objetivo dele tende a ser investigar qual deve ser o valor de a para o qual $r(x)$ e f tendam a se confundir, nessa magnificação.

3.3 MELHOR APROXIMAÇÃO

Um outro material pode ser capaz de explorar a fundo qual é a reta que melhor aproxima f , mostrando a razão entre o erro ρ e h .

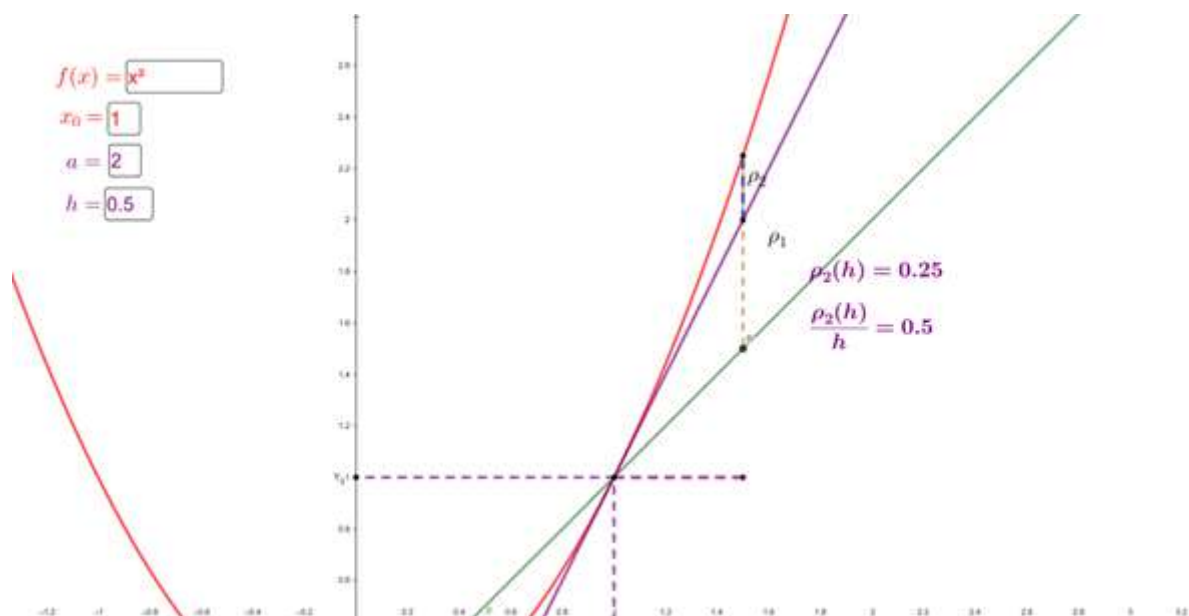
Figura 10 – Melhor aproximação I



Fonte: GeoGebra

Nessa figura, temos os mesmos parâmetros $f(x)$, x_0 , a e h . No entanto, dessa vez temos uma reta roxa e uma reta verde, ambas candidatas a melhor aproximação linear local. Chamamos de ρ_1 o erro entre a função f e a reta verde, e chamamos de ρ_2 o erro entre a função f e a reta roxa. Seja g_1 a reta verde e g_2 a reta roxa. Por construção, nosso erro pode ser escrito como $\rho_1 = f(1 + h) - g_1(1 + h)$ e $\rho_2 = f(1 + h) - g_2(1 + h)$. Podemos perceber que $\rho_2 < \rho_1$, quando $h = 1$. Agora, vamos tomar h menor.

Figura 11 – Melhor aproximação II

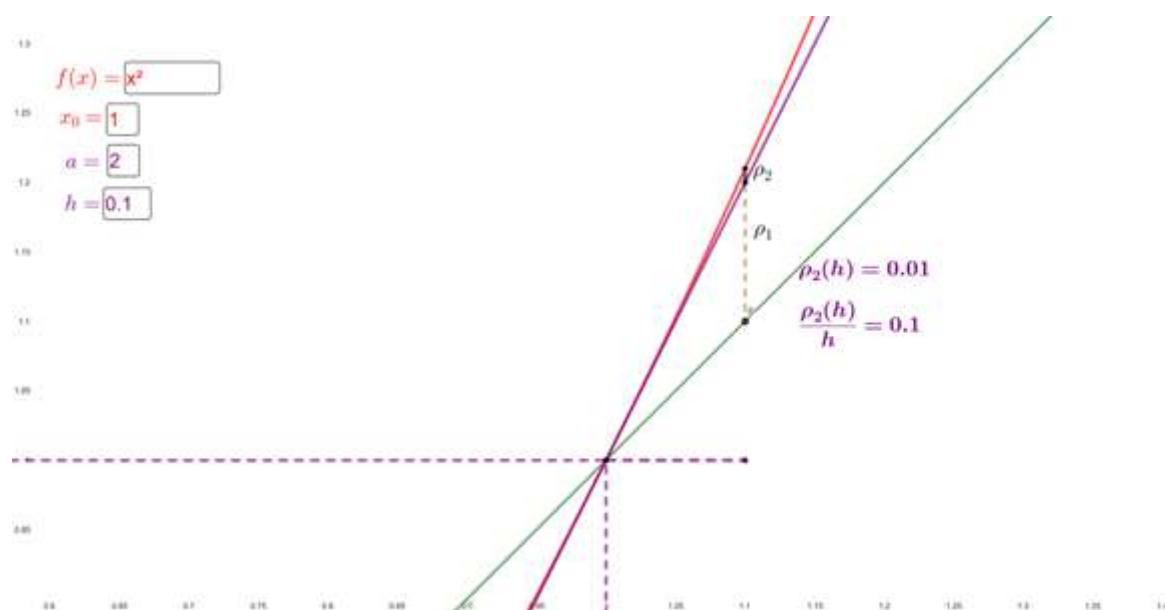


Fonte: Geogebra

Ao diminuirmos h para 0.5, podemos observar $\rho_2 < \rho_1$ e, além disso, ρ_2 vai ficando cada vez menor. Na Figura 9, podemos ver que $\rho_2(h) = \frac{\rho_2(h)}{h} = 1$. Quando diminuirmos para $h = 0.5$, temos na Figura 10, $\rho_2(h) = 0.25$ e $\frac{\rho_2(h)}{h} = 0.5$.

Tomando h cada vez mais próximo de 0:

Figura 12 – Melhor aproximação III



Fonte: GeoGebra

Podemos ver que quando $h = 0.1$, ρ_2 é tão pequeno que g_2 vai começando a se confundir

com a curva f , enquanto ρ_1 ainda é muito grande. Logo, evidentemente a reta roxa é uma melhor aproximação para f , quando comparada com a reta verde. Além disso, podemos observar que $\rho_2(h) = 0.01$ enquanto $\frac{\rho_2(h)}{h} = 0.1$. Dessa forma, é perceptível que $\rho_2(h)$ tende a ir a 0 mais rápido do que h . Ao dividirmos $\rho(h)$ por h , estamos comparando o erro (uma diferença) com a unidade h . Assim, a magnificação local fornece uma representação para o fato de que se a é a inclinação da reta que melhor aproxima f na vizinhança de x_0 , então $\rho_2(h)$ tende a 0 mesmo quando comparada com h .

3.4 DIFERENCIABILIDADE EM \mathbb{R}

Vamos tentar generalizar e formalizar essa ideia. Seja uma função f e seja $x_0 \in (a, b) \subset \mathbb{R}$. Seja $g(x) = ax + b$ a reta que melhor aproxima f na vizinhança de x_0 . Como g intercepta f no ponto $(x_0, f(x_0))$, então temos que $g(x_0) = ax_0 + b$. Como $g(x_0) = f(x_0)$, então

$$f(x_0) = ax_0 + b \Rightarrow b = f(x_0) - ax_0$$

Logo,

$$g(x) = ax + f(x_0) - ax_0 \Rightarrow g(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$$

Dessa forma, a ideia de g ser a melhor aproximação afim de f na vizinhança de x_0 consiste no erro $\rho = f(x) - g(x)$ tender a 0 mais rápido do que $h = x - x_0$, ou seja, $g(x)$ se aproxima de $f(x)$ mais rápido do que x se aproxima de x_0 , o que explica o fato de g e f se confundirem quando magnificadas. Ou seja, a razão $\frac{\rho(h)}{h}$ tende a 0 se ao escolhermos uma precisão qualquer $\varepsilon > 0$, obtivermos um $\delta > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} \right| < \varepsilon$$

Pela notação de limite, temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0$$

Se isso ocorre, dizemos que f é **diferenciável** em x_0 e $a(x - x_0) + f(x_0)$ é a reta que **melhor aproxima** f na vizinhança de x_0 . Tomando $x - x_0 = h$, podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - ah - f(x_0)}{h} = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a = f'(x_0)$$

em que $a \in \mathbb{R}$ é o coeficiente angular da reta que melhor aproxima f na vizinhança de x_0 .

Definição 3.4.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então f é diferenciável em $x_0 \in \overset{\circ}{D}$ se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - ah - f(x_0)}{h} = 0$$

Neste caso, o número $a \in \mathbb{R}$ é dito derivada de f em x_0 e denotado por $a = f'(x_0)$.

A reta $r(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$ é a melhor aproximação linear local de f , na vizinhança de x_0 .

$\rho(x) = f(x) - [a(x - x_0) + f(x_0)]$ é o resto.

$\varphi(x) = \frac{\rho(x)}{x - x_0}$ é o resto relativo.

Isto é, $f(x) = r(x) + \rho(x)$, em que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\rho(x)}{x - x_0} = 0$

Essa definição apresenta o sentido em que $r(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ é a melhor aproximação linear local de f em torno de x_0 . Isto é, sabemos que qualquer reta na forma $r'(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$ intercepta f em $(x_0, f(x_0))$, portanto, em algum sentido r' aproxima f , isto é, desde que f seja contínua em x_0 , teremos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \rho(x) = 0$$

No entanto, apenas para um único valor de $a \in \mathbb{R}$, $a = f'(x_0)$, vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\rho(x)}{x - x_0} = 0$$

Ou seja, os valores de $f(x)$ e $r(x)$ ficam arbitrariamente próximos em relação à $x - x_0$, isto é, ficam “muito mais próximos” entre si do que x e x_0 .

Nos cursos de Cálculo, muitas das vezes como evidenciado, apresenta-se a noção de derivada como f sendo derivável em $x_0 \in \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}$ se o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe e é finito, ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f . Em \mathbb{R} , essas definições são equivalentes.

Teorema 3.4.1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a.$

Demonstração.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - [a(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - a = 0 \\ \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \end{aligned}$$

□

Observemos um exemplo que utiliza, em sua essência, a noção de derivada como melhor aproximação afim.³

Exemplo 1. *Um modo eficiente de determinar a raiz quadrada de um número real é o chamado algoritmo babilônico de cálculo de aproximações de raízes quadradas. Seja $p > 0$ o número cuja raiz quadrada desejamos aproximar. O algoritmo consiste nas seguintes etapas:*

(i) *escolha um número qualquer $r > 0$ e;*

(ii) *construa a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de termo geral $a_1 = r$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{p}{a_n} \right)$.*

O número a_n é uma estimativa para \sqrt{p} com um erro menor do que $|a_{n-1} - a_n|$.⁴

Vamos trazer uma interpretação desse algoritmo por meio do cálculo numérico, para justificar sua legitimidade. Essa justificativa consiste em aproximar a solução $f(x) = 0$, onde $f(x) = x^2 - p$, pela solução de $g(x) = 0$, onde g é a melhor aproximação afim de f na vizinhança de $x_0 = a_n$.

De fato, como $g(x)$ é a melhor aproximação afim de f na vizinhança de $x_0 = a_n$, então $g(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Temos que $f'(x_0) = 2x_0 = 2a_n$ e $f(x_0) = f(a_n) = a_n^2 - p$.

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow 2a_n(x - a_n) + a_n^2 - p = 0 \Leftrightarrow 2a_nx - a_n^2 - p = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{p}{a_n} \right)$$

Além disso, como $g(x)$ é a melhor aproximação afim de f na vizinhança de x_0 , temos que

$$\frac{f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} \approx 0$$

Como queremos aproximar a solução $f(x) = 0$, então

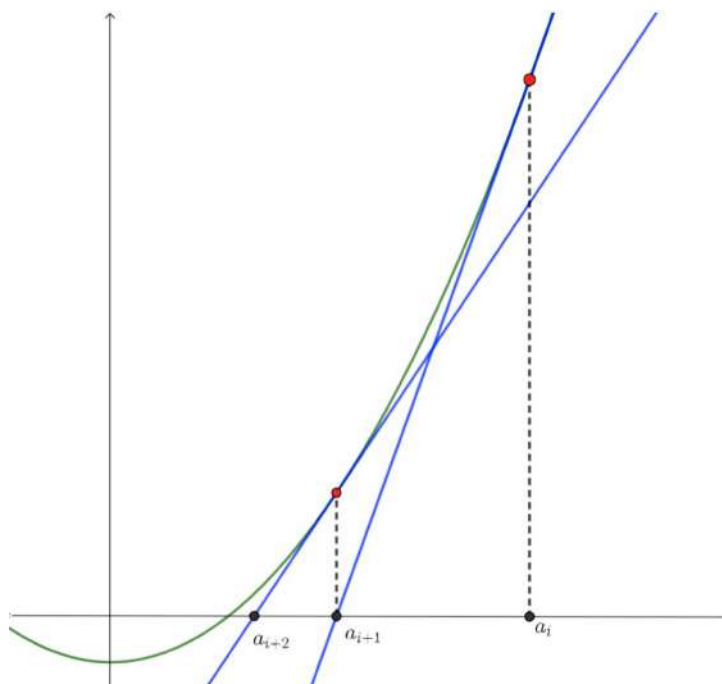
$$f'(x_0) \approx \frac{-f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow x - x_0 \approx \frac{-f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x \approx x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = a_n - \frac{a_n^2 - p}{2a_n} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{p}{a_n} \right)$$

Percebamos que $f(x) = 0$ tem uma solução aproximada para x que coincide com $g(x) = 0$, onde g é a melhor aproximação de f na vizinhança de $x_0 = a_n$, como queríamos mostrar.

³ Tal exemplo foi retirado de uma questão da prova de Cálculo III, do Thiago Hartz durante o período de 2022.1

⁴ Para detalhes como a convergência de a_n e estimativa do erro, ver Rocha (1999) em [22]

Figura 13 – Algoritmo babilônico do cálculo das raízes quadradas



Fonte: Márcio Vieira

3.5 DIFERENCIABILIDADE EM \mathbb{R}^N

O Teorema 3.4.1 nos mostra que os dois projetos de diferenciabilidade em \mathbb{R} mesmo que diferentes, são algebricamente equivalentes. Quando apresentamos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = a,$$

o projeto que é comumente apresentado nos cursos de cálculo, obtemos a inclinação da reta que fornece a melhor aproximação linear local de f como limite da variação média da função na vizinhança de um ponto. Já quando apresentamos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - ah - f(x)}{h} = 0,$$

estamos dizendo que a diferença entre a função e sua melhor aproximação linear local

$$\psi(h) = f'(x)h + f(x)$$

tende a 0 com taxa superior à h (variação da variável independente).

Podemos nos perguntar se podemos estender esses dois projetos, algebricamente equivalentes, para contextos mais genéricos, como para várias variáveis reais. O primeiro projeto comentado depende da estrutura algébrica do domínio da função, por envolver uma divisão. Por exemplo, se tivermos uma função vetorial de variável real $\sigma : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tal definição faz sentido e teremos

$$\psi(h) = f'(x)h + f(x)$$

como o subespaço que melhor aproxima o gráfico de f na vizinhança de $(x, f(x))$, ou seja, o espaço tangente de f no ponto.

No entanto, se quisermos generalizar esse projeto para uma função vetorial de variável vetorial, na forma $\Omega : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, devemos procurar por uma função linear da mesma espécie de Ω , isto é, uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, que será representada por uma matriz $n \times m$. Dessa forma, é evidente que não é possível que um limite vetorial resulte em uma matriz, o que elimina as possibilidades de adaptar o primeiro projeto.

No entanto, o segundo projeto de derivada, o que construímos nesse trabalho em \mathbb{R} faz sentido, se adaptarmos alguns detalhes. Por exemplo, o domínio de Ω é um subconjunto de \mathbb{R}^m , então h é um vetor e tal divisão não faz sentido. No entanto, como no caso unidimensional o limite é 0, então o limite da divisão por h é igual ao da divisão por $|h|$. Isso nos motiva à seguinte definição:

Definição 3.5.1. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e seja $x \in \overset{\circ}{U}$. Dizemos que f é diferenciável em x se existe uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - Ah - f(x)}{\|h\|} = 0$$

Isto é, se definirmos $\rho(h) = f(x+h) - Ah - f(x)$, teremos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho(h)}{\|h\|} = 0$$

Dizemos que a derivada de f em x_0 é a transformação linear $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ que melhor aproxima f em torno de x_0 . Além disso, teremos que $\psi(x) = A(x - x_0) + f(x_0)$ é a melhor aproximação linear local. Assim, o espaço tangente pode ser escrito como

$$\begin{cases} \psi_1(x) = a_{11}(x_1 - x_{01}) + \cdots + a_{1m}(x_m - x_{0m}) + f_1(x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_n(x) = a_{n1}(x_1 - x_{01}) + \cdots + a_{nm}(x_m - x_{0m}) + f_n(x_0) \end{cases}$$

Com isso, concluímos que

$$f(x) = \psi(x) + \rho(x)$$

em que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\rho(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

Podemos mostrar que se f é diferenciável em x_0 , então a matriz A que procuramos é

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}(x_0) \end{pmatrix}$$

Agora, suponha que queiramos estudar a variação da função f restrita a uma dada direção do domínio, a partir de um ponto fixado $x \in \overset{\circ}{U}$. Para isso, fixemos um vetor

$u \in \mathbb{R}^m$. A reta no \mathbb{R}^m que passa por x e tem u como vetor diretor é representada parametricamente por $x + tu$. Podemos considerar a função que representa a restrição de f a esta reta:

$$\begin{aligned} f_u: I_u \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\rightarrow f(x + tu) \end{aligned}$$

em que I_u é um intervalo aberto da reta, escolhido de tal forma que $t \in I_u \Rightarrow x + tu \in U$. Observe que certamente $0 \in I_u$, pois $x \in \mathring{U}$. Além disso, $f_u(0) = f(x)$. Isso nos motiva a seguinte definição.

Definição 3.5.2. *A derivada direcional de f no ponto x na direção do vetor u é a derivada de f_u em $t = 0$. Neste caso, usamos a seguinte notação:*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = f'_u(0)$$

As derivadas direcionais são, desta forma, transformações lineares de $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, que serão representadas por matrizes coluna, e portanto identificadas com vetores do \mathbb{R}^n . Como f_u tem domínio em \mathbb{R} , então estes vetores, caso existam, podem ser calculados diretamente pelo limite:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f_u(0+t) - f_u(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}$$

Definição 3.5.3. *Seja $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e seja $x \in \mathring{U}$. Dizemos que f é derivável em x se, e somente se, f possui derivada direcional em todas as direções em x .*

Vamos mostrar que ser diferenciável implica em ser derivável, mas a recíproca não é verdadeira, isto é, se f é diferenciável em x , então f tem derivada direcional em todas as direções em x , mas se f possui derivada direcional em todas as direções em x , não necessariamente f é diferenciável em x .

Teorema 3.5.1. *Se $f: U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x \in \mathring{U}$, então $\frac{\partial f}{\partial u}(x)$ existe $\forall u \in \mathbb{R}^m$ e vale*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x) = f'(x)u$$

Demonstração. Seja $A = f'(x)$. Suponhamos $t > 0$, sem perda de generalidade. Seja

$$\rho(tu) = f(x + tu) - [A(tu) + f(x)]$$

Então

$$A(tu) = f(x + tu) - f(x) - \rho(tu)$$

Logo

$$Au = \frac{1}{t}A(tu) = \frac{f(x + tu) - f(x) - \rho(tu)}{t} = \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} - \frac{\rho(tu)}{t}$$

Como $A = f'(x)$, então $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\rho(tu)}{\|tu\|} = 0$. Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} = Au$$

O caso $t < 0$ é análogo. □

Vejam agora que a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 2. Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{cases} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Dado $u = (a, b) \in \mathbb{R}^2$:

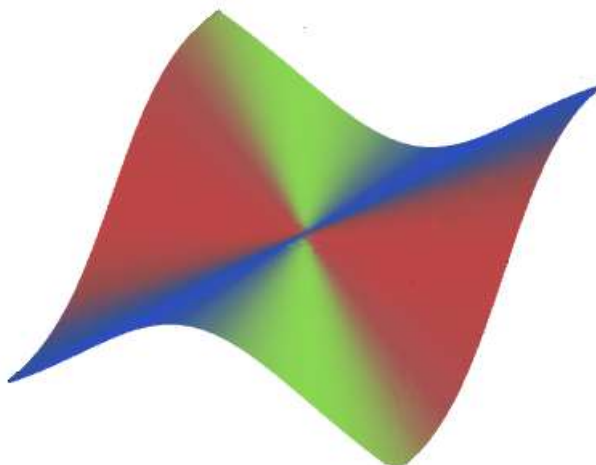
$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(a, b)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(ta, tb)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 a^2 b}{t^3(a^2 + b^2)} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}$$

Mas se f fosse diferenciável em $(0, 0)$, valeria

$$f'(0, 0)u = \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0)$$

O que é um absurdo, pois $f'(0, 0)$ não seria uma transformação linear. Logo, f não é diferenciável.

Figura 14 – Função derivável, mas não diferenciável em $(0, 0)$



Fonte: Autor

Ou seja, $f(x, y)$ tem derivada parcial em todas as direções, mas não pode ser aproximada por uma função afim na vizinhança de $(0, 0)$.

Observemos que a definição de diferenciabilidade em várias variáveis mantém o projeto de diferenciabilidade que apresentamos para o caso unidimensional, onde a diferença entre a função e sua melhor aproximação linear local tende a 0 com taxa superior à variação da variável independente, isto é, a função pode ser interpretada, localmente, como uma função afim mais um resto que tende a 0 mais rápido do que x tende à x_0 , em módulo neste caso. Além disso, como mostramos, ela aparenta ser um caso mais genérico, uma vez que toda função diferenciável é derivável, mas nem toda derivável é diferenciável.

Dessa forma, essa maneira de enunciar a definição de derivada (de funções diferenciáveis) como a melhor aproximação afim na vizinhança de um ponto dado cumpre o papel de generalizar o conceito e cumpre o papel da raiz cognitiva defendido por Tall, uma vez que é mais intuitivo e familiar para os alunos, do que atrelar ao conceito puro de limite (como por exemplo, tomar o limite das retas secantes para tender à reta tangente). Além disso, ela cumpre o papel de minimizar os problemas matemático-formais e pedagógicos, uma vez que não toma afirmações autorreferentes e preservam a interpretação local do sentido de derivada.

Nessa seção, buscamos mostrar que ela também cumpre o papel de “naturalidade” no sentido de generalizar o conceito de derivada para várias variáveis, como transformação linear. De acordo com Florit (2017), muitas das vezes é uma boa ideia guiar a mente começando onde a intuição nos deixou. Florit, em [10], busca construir a noção de Topologia de maneira mais geral e frutífera, que sejam fiéis à primeira ideia intuitiva, ambos relacionados à formalização, buscando a noção de que tal construção não limita o aluno a avançar nos conceitos topológicos. Tentamos fazer essa analogia aqui, onde a noção de diferenciabilidade que construímos, no contexto de cálculo 1, é buscando que ela seja mais intuitiva e genérica para os demais cálculos, de modo que o aluno seja capaz de, com esse conceito em cálculo 1, generalizar a noção de diferenciabilidade em contextos mais amplos. Em outras palavras, “você poderia ter inventado a diferenciabilidade”.

4 APLICAÇÕES DOS EXPERIMENTOS E ALGUNS RESULTADOS

O material que apresentamos no GeoGebra foi testado em duas circunstâncias. Inicialmente, para validação do material, testamos o material sem supervisão. Na segunda circunstância, buscamos validar a eficiência do material e da teoria, com um olhar mais prático e crítico, feito sob supervisão. No primeiro caso, foi testado com 7 alunos que cursaram Cálculo I. Dentre eles, 3 são de Engenharia (de Produção e Mecânica) e os outros 4 são da Licenciatura em Matemática. Foram enviados os dois materiais do GeoGebra e um questionário/guia para eles seguirem os passos do experimento e responderem alguns questionamentos específicos.

Em geral, no experimento I, inicialmente foi pedido para descrever como foi a definição de derivada no curso de Cálculo I. Em seguida, no GeoGebra sob o arquivo de Magnificação Local, deveria escolher uma função $f(x)$ e um x_0 , podendo manter os que já estavam sugestivos na tela. Em seguida, o objetivo era realizar uma investigação com h , ou seja, alterar seus valores e descobrir o que estava acontecendo. Logo depois, o objetivo era tomar valores de h que tornasse a função f parecida com uma reta localmente. Esse ponto foi interessante, pois alguns alunos escolheram h muito grande, de maneira com que fosse dado um “*zoom out*”, isto é, o efeito de afastar, fazendo com que a curva parecesse uma reta vertical, que não era o objetivo da investigação, mas abre espaço para diversas discussões conceituais que podem ser colocadas, em especial em sala de aula. Depois de tomar h pequeno, próximo de zero, o aluno deveria habilitar a reta $r(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$, já disponível no GeoGebra e determinar se é uma boa aproximação para f e descrever o que o próprio entende como uma boa aproximação. Caso não considere uma boa aproximação, o próximo passo seria encontrar um valor a (mesmo que aproximado), que tornaria f e r tão próximas a ponto de se confundirem. Por fim, aumentar o valor de h de modo que percebam que a reta que se confundia com a curva quando olhada de perto, é a reta tangente no ponto escolhido quando olhada de longe.

Já no experimento II, de melhor aproximação afim, inicialmente foram pedidas as mesmas coisas do experimento I (inserir uma função f , inserir x_0 e tomar valores de h que façam com que f se pareça com uma reta, localmente). Logo após, o aluno consegue observar duas retas $r(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$ e $p(x) = x$, podendo ele, alterar $p(x) = x$ ou até acrescentar retas novas. Ele deveria dizer se ele considera alguma delas uma boa aproximação para f . Em seguida, lhe foi explicado que r é uma reta candidata a aproximar f , enquanto p é uma reta arbitrária. O pontilhado azul representava o erro de aproximação pela reta r , enquanto o pontilhado dourado representava o erro de aproximação pela reta p . O objetivo nesse momento era o aluno mudar os valores de h e investigar o que iria acontecendo com esses erros. Em seguida, dizer qual das duas retas representava o menor erro. Nesse momento, o objetivo do trabalho era mostrar para o aluno o erro dentre duas

retas candidatas, em que uma tem o menor erro que a outra, fazendo o aluno perceber que quanto menor for o erro, mais chance de aproximar a função. Nesse momento ele descartaria a reta p (que exceto alterações, teria um erro grande). A partir daí, o aluno deveria descrever o que ele acha que deve acontecer para que a reta escolhida seja a melhor aproximação da função e, em seguida, ir mudando os valores de a de modo que o erro seja cada vez menor. Nesse momento, ele irá fazer um procedimento análogo com o experimento I, porém tendo mais suportes para a precisão (como o pontilhado azul e a expressão escrita na tela $\rho_2(h)$, que representava esse erro). Em seguida, o próximo passo seria encontrar um valor de a de modo que r seja uma boa aproximação para f e que identifique a diferença de precisão nessa tentativa de encontrar o valor de a no experimento I e no II. Após tudo isso, foi-lhes fornecido uma construção que segue as seguintes etapas, para que eles pudessem ver a definição de derivadas via limites, porém substanciada na construção dos materiais. Inicialmente o aluno deveria concordar que o erro $\rho_2(h)$ pudesse ser escrito da seguinte maneira:

$$\rho_2(h) = f(x_0 + h) - r(x_0 + h)$$

Ao concordar, deveria tomar valores de h cada vez menores e descrever o que acontecia com a razão $\frac{\rho_2(h)}{h}$. Deveria perceber que essa razão continua tendendo a 0. Depois disso, a construção foi feita:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2(h)}{h} &= \frac{f(x_0 + h) - r(x_0 + h)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - [a(x_0 + h - x_0) + f(x_0)]}{h} = \\ &= \frac{f(x_0 + h) - ah - f(x_0)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a \end{aligned}$$

Quando $h \rightarrow 0$, vemos que $\frac{\rho_2(h)}{h} \rightarrow 0$. Logo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a = 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a$$

A última pergunta era se o aluno reconhecia essa definição e, caso sim, de acordo com a investigação deveria descrever quais sentidos ela fornece para ele, que foram ou não, presentes no curso de Cálculo I.

O objetivo dessa pergunta final era criar uma percepção a esse novo projeto de derivada, que a interpretação sob coeficiente angular da reta tangente é, além disso, o coeficiente angular da melhor aproximação afim, como previa o objetivo do material.

Dessa maneira, vamos explicitar as respostas e observações dos alunos, na íntegra, escritas em documento livre. Buscamos com esses experimentos observar a qualidade do material quanto à aprendizagem significativa e quanto à reflexão de novos pensamentos sobre o conceito de derivada, à luz do que aprenderam em Cálculo I.

Tabela 1 – Experimento do Aluno 1

Experimentos	E1	E2
Aluno 1	<p>Sou de Engenharia Mecânica. Em cálculo I, a derivada foi definida como a taxa de variação de uma função e uma aproximação a ela em um determinado ponto, usando-se consecutivas retas secantes e, posteriormente o limite da taxa de variação. Para o experimento 1, escolhi $f(x) = x^2$ e $x_0 = 2$. Ao alterar h, percebi que altera a forma como vejo o gráfico, quanto maior for h, maior parte da função consigo enxergar, logo a parábola parece mais fina, até se parecer com uma linha. Para que f parecesse uma reta, usei $h = 0.15$. Habilitei a reta $r(x)$ e não a considero uma boa aproximação para f. Usando $a = 4.18$, obtém-se uma boa aproximação local. Ao aumentar $h = 1$, por exemplo, percebe-se que a aproximação da reta r com a função f só é boa em pequenos intervalos, assim como a derivada, só vale como aproximação local. Conforme aumentamos o intervalo, aumentamos também o erro entre as duas funções.</p>	<p>Para o experimento II, escolhi a função $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. Para que f parecesse uma reta, usei $h = 0.01$. Entre as retas roxa e verde, a roxa é uma aproximação melhor para tal valor de h. Conforme aumentamos o valor de h, os erros da reta roxa ficam cada vez maiores que os da reta verde. Quando vamos diminuindo, aparentemente, a partir de $h = 1$, erro da reta roxa diminui bastante, até se aproximar de zero. Para que a reta roxa seja uma boa aproximação de f, precisamos delimitar um intervalo pequeno. A reta verde definitivamente não é uma boa aproximação. É perceptível que para cada unidade aumentada de a, $\rho_2(h)$ tem seu valor decrescido em 0.01. Tomando $a = 2$, temos o menor erro, logo a melhor aproximação. Comparando com a reta aproximada no experimento I, conclui-se que essa aproximação é bem melhor visualmente, pois no experimento 2 podemos usar uma função que descreve o erro entre f e r, logo torna-se mais fácil do que usar um valor calculado visualmente. Concordo com a expressão da razão e percebi que a razão entre $\rho_2(h)$ e h diminui até que atinge um valor mínimo quando $h = 0.01$, pois o programa só usa duas casas decimais. Isso explica por que a função de erro é mostrada como 0, mas ainda assim a razão desta por h é 0.01. Tal fato mostra que o erro é um valor menor que 0.01, mas que quando dividido por esse, gera um valor com mais casas decimais que consegue ser lido. Em seguida, concordo com a construção feita para chegar na definição de derivada. Por meio da investigação e mudança dos parâmetros da função, pôde-se perceber de uma forma mais leve e fluida o conceito de derivada, pois é possível ver na prática o erro indo para zero, ou seja, a razão mencionada subtraída do valor de a tendendo a 0. Logo, é mais fácil de entender que a derivada, calculada tomando o limite mostrado, é uma ótima forma de aproximar a função localmente a partir de um ponto x_0.</p>

Tabela 2 – Experimento do Aluno 2

Aluno 2	<p>Sou de Engenharia de Produção. Em Cálculo I, aprendi que a derivada é o coeficiente angular da reta tangente a uma curva num ponto. Para o experimento I, escolhi $f(x) = x^2$ e $x_0 = 4$. Ao alterar h, percebi que para h pequeno, os números dos eixos coordenados ficam mais próximos entre si, enquanto para h grande, os números dos eixos coordenados ficam cada vez mais distantes. Habilitei a reta $r(x)$ e não considero uma boa aproximação. Uma boa aproximação é quando a reta fica parecida com o gráfico, quando h é pequeno. Usando $a = 8$, a reta azul fica sobreposta na preta. Ao aumentar h, a reta azul toca a curva em $x_0 = 4$. Pude perceber que a reta tangente é também a reta que faz uma boa aproximação da função quando h é pequeno.</p>	<p>Para o experimento II, escolhi $f(x) = x^3 + 9$ e $x_0 = 2$. Reescrevi a reta verde como $p(x) = x + 9$, para que ficasse visível. Tomei h pequeno e percebi que nenhuma das duas retas são boas aproximações para f. Conforme diminuimos o valor de h, o erro é mais preciso (vai diminuindo). É evidente que a reta roxa possui o menor erro. Para que a reta roxa seja a melhor aproximação para a função, o erro não deve existir (deve ser zero). Assim, a reta roxa tem maior chance de aproximar f. Tomando $a = 12$, a reta roxa é uma boa aproximação para f. No experimento I, usei como base apenas a sobreposição das retas. No experimento II, além disso, observei a ausência do erro. Dessa forma, considero o experimento II mais preciso. Em seguida, concordo com toda construção feita. É evidente que à medida que $h \rightarrow 0$, a razão entre o erro e h vai ficando cada vez mais pequena. Pela construção desenvolvida, entendi que ela parte do princípio de comparar o erro em relação ao h, que ainda é muito pequeno, e ele consiste em buscar a melhor aproximação. Logo, a derivada consiste na inclinação da reta que melhor aproxima, que também é a reta tangente como aprendi em Cálculo.</p>
---------	--	--

Dados da pesquisa

Tabela 3 – Experimento do Aluno 3

Aluno 3	<p>Sou de Engenharia Mecânica. O entendimento de derivada no meu curso de Cálculo I foi que a derivada se denomina a taxa de variação de uma variável em relação a outra, também geometricamente é interpretada como a reta tangente da função em um ponto específico. Para o experimento I, escolhi $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. Ao diminuir o valor de h, a função se assemelha a uma reta. Habilitei a reta $r(x)$ e não considero uma boa aproximação. Tomando $a = 2$, a reta parece aproximar bem a função. Ao aumentar o valor de a, estamos aumentando a inclinação da reta, ou seja, a derivada, e se esse valor for bem próximo da derivada da função, as duas funções se assemelham localmente, já que ao dar o zoom, diminuindo o valor de h, é possível ver com precisão a taxa de variação de uma função em um certo local, e tentar achar uma aproximação para aquela função localmente.</p>	<p>Para o experimento II, mantive f e x_0. Tomei h pequeno e concluí que nenhuma das duas retas são boas aproximações para f. Ao diminuir o valor de h, é possível notar o valor dos erros cada vez menores. É visível também que o erro da reta roxa é menor que o da reta verde. Quando a inclinação da reta for a mesma que a derivada da função no ponto, a aproximação parece ser a melhor. Assim, a reta roxa tende a aproximar melhor f, do que a reta verde. Tomando $a = 2$, o erro $\rho_2(h)$ zera. A diferença do experimento 1 e 2 é que no experimento 1, o erro era mais visual do que algébrico, mas introduzindo uma fórmula que demonstre o erro é mais preciso ver qual o valor de a para que as funções se assemelhem quase que perfeitamente. Concordo com a construção feita e percebo que quando h fica cada vez menor, a razão $\rho_2(h)/h$ vai diminuindo em módulo. Concordo com a construção feita. Sobre ela, entendo que é a definição formal de derivada. Esse experimento fez uma interação com que o faz de maneira satisfatória, lembrando aspectos de Cálculo 1 que já tinham caído no esquecimento. No experimento II fica bem clara a definição de derivadas por limites, já que quando $h \rightarrow 0$, ou seja, um zoom grande, no ponto x_0 uma função qualquer se aproxima de uma reta localmente, cujo coeficiente angular é derivada. Assim, é possível perceber a noção de derivada algebricamente e intuitivamente pelo experimento feito.</p>
---------	---	--

Dados da pesquisa

Tabela 4 – Experimento do Aluno 4

Aluno 4	<p>Sou de Licenciatura em Matemática. Em Cálculo I, tive duas interpretações de derivada, uma como taxa relacionada e outra com visão geométrica do coeficiente angular da reta tangente à curva. No experimento I, escolhi $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. Alterando os valores de h, percebi que ocorre um zoom. Quando maior o h, menos detalhes são possíveis de ver no GeoGebra, enquanto quanto menor o h, mais detalhes são possíveis de ver. Habilitei a reta $r(x)$ e não considero uma boa aproximação. Para mim, uma boa aproximação seria a reta $2x - 1$. Dessa forma, tomando $a = 2$, r faz uma boa aproximação para f. Aumentando h, percebo que a derivada de uma curva em um ponto dado é o coeficiente angular da reta tangente à curva.</p>	<p>Para o experimento II, mantive f e x_0. A reta roxa parece ser uma melhor aproximação do que a reta verde. Diminuindo h, a curva mais se parece com uma reta e, portanto, o pontilhado vai diminuindo, ou seja, o erro. A reta roxa evidentemente possui o menor erro. Para alguma reta ser a melhor aproximação, deve-se derivar a função para ter o coeficiente angular e depois achar a reta por meio de um ponto que satisfaz a curva. Para que r seja uma melhor aproximação, quanto menor for meu h, mais próximo de 2 deve ser meu a. Concordo com a expressão do erro e, percebo que quando h diminui, a razão vai decrescendo quando tende a 0 pela direita e tende a 0 quando tende a 0 pela esquerda. Logo, tende a 0 quando h tende a 0. Logo, tende a 0 quando h tende a 0. Em geral concordo com a construção, reconheço a definição e também lembro de ter vista de maneira análoga como</p> $f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ <p>.</p>
---------	--	--

Dados da pesquisa

Tabela 5 – Experimento do Aluno 5

Aluno 5	<p>Sou de Licenciatura em Matemática. Em cálculo I, aprendi a derivada como a taxa de variação de uma função $f(x)$ em relação a x. Escolhi $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. Mexendo em h, percebi que quanto maior h, menor a concavidade/abertura, tendendo a uma reta. Habilitei $r(x)$. Não considero uma boa aproximação, para isso ela deveria ter uma inclinação maior. É evidente que quanto maior o valor de a, maior a confusão entre as duas. Utilizando o conceito de derivadas por limites, percebemos que, inserindo h como 1, quanto maior o x, menor a diferença.</p>	<p>Para o experimento II, mantive f e x_0. Quanto maior o h, mais os erros vão aumentando, quanto menor o h, menor os erros. A reta roxa evidentemente possui o menor erro. Para a reta roxa ser uma melhor aproximação, precisamos aumentar o coeficiente angular e, isso funciona para $a = 2.5$ aproximadamente. Concordo com a construção. Quando h diminui, a razão vai diminuindo também. Pude perceber que a definição exposta é a definição de derivadas usando limites, onde o passo fornece um entendimento melhor do conceito.</p>
---------	--	---

Dados da pesquisa

Tabela 6 – Experimento do Aluno 6

Aluno 6	Sou de Licenciatura em Matemática. Em Cálculo I, não prestei muita atenção, mas lembro da definição de ser a taxa de variação da função. Tomei $f(x) = x^2$ e $x_0 = 10$. Tomando h grande, a função se aproxima do eixo y . Ela cresce/diminui menos. Habilitei $r(x)$ e não considero uma boa aproximação. Tomando h grande, as retas se confundem. Assim, a reta r se sobrepõe à $f(x) = x^2$. Essa pode ser a taxa de variação da função $f(x)$.	Para o experimento II, mantive f e x_0 . Tomei $h = 100$, para parecer uma reta. Quando diminuimos h , o erro diminui e é evidente que a reta roxa tem menor erro. Para que uma reta ser a melhor aproximação, o coeficiente linear da reta roxa deve diminuir. Acredito que a reta roxa seja a melhor candidata. Tomei $a = 2000$ para funcionar. A aproximação do experimento II parece mais precisa. Concordo com a construção e observo a definição de derivada quando h tende a 0. Os sentidos que tiro da definição me foram apresentados em Cálculo I.
---------	---	--

Dados da pesquisa

Tabela 7 – Experimento do Aluno 7

Aluno 7	<p>Sou de Licenciatura em Matemática. A definição que vi no curso de Cálculo I foi que a derivada é a equação da reta tangente, sendo que hoje sei que não é toda a equação, mas apenas o valor do coeficiente angular da reta tangente aplicado em um determinado ponto. Para o experimento I, escolhi $f(x) = x^3$ e $x_0 = 2$. Conforme eu fui aumentando o valor de h, a função se aproximava de uma reta vertical e conforme eu diminuía o valor de h, a função estava tendendo a uma reta (função polinomial de grau 1). A princípio, não achei r uma boa aproximação. Acredito que uma boa aproximação de f dependa do ponto, pois como escolhi uma função polinomial de grau 3, a imagem $f(x)$ varia muito em pequenos intervalos de x, a função azul não pareceu uma boa aproximação. Ao aplicar $a = 12$, percebo que a reta azul se torna muito próximo de f a ponto de confundi-las. Aumentando h, temos que f e a reta azul estão muito próximas uma da outra apenas em uma vizinhança de x_0. Em Cálculo I eu não tive a oportunidade de refletir sobre as interpretações do resultado da derivada, apenas aprendi métodos para resolver contas e achar valores nas provas</p>	<p>Para o experimento II, escolhi $f(x) = x^3$ e $x_0 = 2$. Tomei $h = 0.1$ para que f se aproximasse de uma função polinomial de grau 1. A princípio, as retas roxa e verde não são boas aproximações. Quando $a = 12$, a reta roxa se aproxima de f numa vizinhança de $f(2)$. Sobre o erro, quando $a = 12$ e $h = 0.01$ por exemplo, o pontilhado azul tende a desaparecer, pois f e a reta roxa, conforme h tende a 0, estão se confundindo. Dessa forma, eu acredito que a reta roxa possa ser uma boa aproximação para f, desde que seu coeficiente angular seja um valor que faça parecer uma reta próxima à f (localmente) e h tenda a 0. Quando $a = 12$ e $h = 0.1$, por exemplo, $\rho_2(0.1) = 0.07$. Isso mostra que o erro é muito pequeno quando a situação se aproxima do descrito na proposição. Para $f(x) = x^3$, quando $x = 2$, $f(2) = 8$, existem infinitas retas que passem pelo ponto $(2, 8)$, porém somente uma passa por esse ponto e, localmente se aproxima muito de f, que é a reta $r(x) = 12x - 16$. Eu sei que o coeficiente angular é igual a 12, porque já conheço o conceito de derivada e soube fazer a conta, porém não consigo explicar como chego neste valor de outra maneira. Concordo com a expressão do erro e percebo que quando h tende a 0, a razão também tende a 0, pois é uma divisão de algo muito pequeno por algo muito pequeno, ou seja, o numerador diminui muito mais rápido que o denominador. Devido a construção feita, vejo que a definição que chegamos é a conhecida de derivada. Na disciplina de Cálculo I eu não tive a oportunidade de refletir sobre o significado de derivada e através desse experimento, por construções, testagens de valores e consequências, vemos que a derivada tem o significado de uma aproximação de f através da função polinomial de grau 1, em um determinado ponto.</p>
---------	--	--

Diante dos experimentos, é perceptível que todos gostaram do material e a maioria aparentou ser capaz de refletir e entender que o passo a passo o levava a compreender o projeto de derivada exposto, o de melhor aproximação afim. No entanto, dois alunos, mesmo experimentando o material ficaram presos à definição que já conheciam de derivadas e não aproveitaram o produto como deveriam, uma vez que não produziram novos conhecimentos para a aprendizagem. Um deles, inclusive, buscou conectar puramente o resultado proposto com o resultado que já conheciam, fazendo uma certa confusão.

Outro fator de suma importância foi o fato de um aluno interpretar a visão de transformar f em uma reta ao distanciar, ou seja, entendeu a reta como a reta vertical, que não era o intuito e não produziria nenhum sentido do ponto de vista de derivada, somente da mudança de perspectiva. Nesse passo, apresenta-se de extrema importância que o material seja apresentado aos alunos com o auxílio do professores para designar os passos, de modo que não confundam ainda mais os alunos ou não produza sentido para eles. Novamente se evidencia a importância e a problematização do material digital não substituir o professor, mas sim, como sendo um auxílio para produzir um sentido mais visual e uma aprendizagem mais significativa, ativa e colaborativa.

Mediante a esses dados, o material passou por um segundo momento de teste, feito sob supervisão. Nessa etapa, o roteiro foi semelhante ao primeiro momento de teste, porém desta vez conduzido de maneira mais livre, isto é, sequenciado de acordo com a especificidade dos alunos, de maneira particular e não preso a uma sequência rígida. Nesta etapa, o material foi testado com 4 alunos, também nas áreas STEM, sendo 3 alunos da Licenciatura em Matemática e 1 de Ciências da Computação. Uma aluna da Licenciatura em Matemática e um aluno de Ciências da Computação ainda não haviam feito a disciplina de Cálculo I, então em certo sentido, a apresentação do material e do conceito de derivada como melhor aproximação afim foi o primeiro contato que eles tiveram com derivada. As respostas evidenciadas dos alunos na primeira etapa dos testes são advindas dos próprios alunos, onde para evidenciar o propósito, destacamos as principais partes. Nessa segunda etapa, como foi uma proposta mais dinâmica e livre, colhemos os principais resultados observados durante o experimento, porém os dados são observacionais, e não diretamente redigidos pelos alunos em si.

Tabela 8 – Experimento do Aluno 8

Aluno 8	<p>O aluno é de Licenciatura em Matemática. O aluno evidencia que não lembra exatamente a definição, mas que tem vagas lembranças sobre ter um limite e ter retas secantes até “ficar” tangente. Para o experimento I, manteve todos os parâmetros $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. Ao alterar os valores de h, percebeu após um tempo que h tinha um papel de se aproximar e de se afastar do gráfico da função. Após compreender esse papel, foi capaz de tomar h pequeno de modo que a parábola se parecesse com uma reta. Ao habilitar a reta, observou que não era uma boa aproximação e foi mexendo no valor de a até parecer que a aproximação tenha sido boa. Estabeleceu que $a = 2$ realmente parece uma boa aproximação e imediatamente conectou tal fato a $f'(1) = 2$. Ao aumentar o valor de h, mesmo já esperando, ficou surpreso com o fato de tal reta ser tangente.</p>	<p>Para o experimento II, manteve f e x_0. Percebeu de maneira imediata a reta que tendia a ser uma melhor aproximação e observou tal fato pelos pontilhados que representavam os erros, alegando que o menor erro representava o “menor tamanho”. Percebeu que o erro diminuía ao tomar h menor e foi observando o comportamento em relação à h, $\rho(h)$ e $\rho(h)/h$. Com uma dinâmica observatória de exemplos concretos, chegamos a conclusão de que $\rho(h)/h$ fica próximo de 0 mais rápido do que h fica próximo de 0. A partir dessa conclusão, fizemos a formalização da noção de diferenciabilidade utilizando limites, que foi bem compreendido. O aluno relata que tal projeto é muito interessante e ficou muito contente de entender o conceito de derivada para o além de fazer contas. Como já havia feito Cálculo II, apresentei o conceito de diferenciabilidade em \mathbb{R}^n. Tal projeto foi compreendido e alguns <i>links</i> foram feitos com alguns conceitos que o aluno resgatou de seu curso de Cálculo II. Por fim, evidenciou que sente muita falta de uma experimentação e apresentação dos conceitos de maneira investigativa.</p>
---------	---	---

Dados da pesquisa

Tabela 9 – Experimento do Aluno 9

Aluno 9	<p>O aluno é de Licenciatura em Matemática. O aluno afirma não lembrar do conceito de derivada, mas afirma saber derivar funções. Para o experimento I, utilizou a função $f(x) = x^2 + 2$ e $x_0 = 1, 5$. Ao alterar os valores de h, observou uma mudança de concavidade na função escolhida. Alterando diversos valores de h, o aluno demandou tempo para colocar valores de h entre 0 e 1, observando apenas valores maiores que 1, até h suficientemente grande. Após ser motivada a colocar h pequeno, conseguiu compreender uma mudança de perspectiva, onde o h era o <i>zoom</i>. Após esse passo, habilitou a reta e observou que a aproximação não era das melhores. Alterando os valores de a, encontrou $a = 3$, de modo que parecesse uma boa aproximação. Ficou surpreso e relatou: “que sorte ter achado o valor de a perfeito”.</p>	<p>Para o experimento II, manteve f e x_0. Observou que a reta roxa tendia a ser uma melhor aproximação e compreendeu que isso se dava tanto de maneira visual, tanto observando as características geométricas e aritméticas do erro. Alterou os valores de h e observou o comportamento de $\rho(h)$ e $\rho(h)/h$, e com algumas explicações, compreendeu a noção de que a melhor aproximação tem, por característica, o erro tender a 0 mais rápido do que h. Por fim, destacou que é muito interessante observar geometricamente tais fatos e que de fato, o projeto é interessante e que é muito difícil observar essas características em uma lousa com desenho a mão livre.</p>
---------	---	---

Dados da pesquisa

Tabela 10 – Experimento do Aluno 10

Aluno 10	<p>O aluno é de Licenciatura em Matemática. Tal aluno ainda não cursou Cálculo I, então não viu ainda o que é derivada. Todo o conceito apresentado no material é novidade. Para o experimento I, manteve todos os parâmetros $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. Observou, ao alterar os valores de h, que para h muito grande, a função parecia uma reta, e para h muito pequeno também, porém para h muito grande a reta ficava vertical. Foi explicado, portanto, que h tem um papel de escala. Em sequência, habilitou a reta $r(x)$ e não achou uma boa aproximação, intuitivamente. Deixando h pequeno, como solicitado, alterou os valores de a de modo que achasse ser uma boa aproximação. Deduziu que isso ocorria para $a \approx 2$.</p>	<p>Para o experimento II, manteve a função $f(x)$ e o ponto x_0. Baseado no experimento anterior, deduziu que a reta roxa era uma aproximação bem melhor. Foi então, alterando os valores de h, observando o pontilhado azul e observou que ele diminui. Em sequência, observou que $\rho(h)$ também diminui, concluindo que o erro vai de fato, diminuindo, se aproximando de 0, quando h se aproxima de 0. Observou também que $\rho(h)/h$ também se aproxima de 0, mas um pouco mais devagar do que $\rho(h)$. Com alguns exemplos numéricos para valores específicos de h, conseguiu compreender que a velocidade em que $\rho(h)$ tende a 0, é mais rápida do que a velocidade que h vai para 0, compreendendo que, de maneira “aproximada”, a expressão $\rho(h)/h \approx 0$. Em sequência, fizemos a substituição de $\rho(h)$ por $f(x) - r(x)$ e o passo que nos leva a $r(x) = a(x - x_0) + f(x_0)$, compreendendo que o material nos exemplifica que</p> $\frac{f(x) - [a(x - x_0) + f(x_0)]}{x - x_0} \approx 0$ <p>Depois de compreender essa caracterização, apresentei rapidamente o conceito de limite, de modo que a noção de diferenciabilidade ficasse bem conceituada e pudesse ser feito o <i>link</i> quando cursasse Cálculo I.</p>
----------	--	---

Dados da pesquisa

Tabela 11 – Experimento do Aluno 11

Aluno 11	<p>O aluno é de Ciências da Computação. Tal aluno ainda não cursou Cálculo I, mas já estudou um pouco e viu a abordagem de taxa de variação. Para o experimento I, manteve todos os parâmetros $f(x) = x^2$ e $x_0 = 1$. Alterando os valores de h, demorou para colocar valores pequenos de h, compreendendo que h tinha um papel de mudar a abertura da parábola, mas foi motivado a colocar valores pequenos de h e observar que h tinha um papel de <i>zoom</i>. Em seguida, habilitou a reta $r(x)$ e não achou uma boa aproximação. Fomos, aos poucos, entendendo o que deveria ser uma boa aproximação. Alterou a para $a = 2$ e disse ser boa. Desde então, o indaguei a colocar valores suficientemente próximos de 2, como 2,001, 1,999, de modo que tomando h suficientemente pequeno, mesmo que a reta ficasse muito próxima, não parecia ser uma aproximação melhor do que $a = 2$. Foi-se, então, motivado ao segundo experimento, que buscava evidenciar o que caracteriza uma aproximação linear ser a melhor.</p>	<p>Para o experimento II, manteve a função $f(x)$ e o ponto x_0, mesmo que durante o experimento, mudássemos x_0 e colocássemos uma função menos regular, para compreender que a noção de melhor aproximação afim ainda é possível e que ela pode responder propriedades locais da função “não regular”, uma vez que a reta é um objeto “simples”. Deduziu, portanto, que a reta roxa era uma melhor aproximação, mas quis alterar a reta verde para que fosse tão próxima quanto a roxa, para que fosse observado a diferença de aproximação pelo erro. Com diversos testes numéricos e observações do comportamento de h, $\rho(h)$ e $\rho(h)/h$, entendeu perfeitamente o que caracteriza uma reta ser a melhor das boas aproximações. O aluno cita: “tive a oportunidade de ter uma outra visão sobre derivadas, com uma abordagem super intuitiva e de fácil entendimento. É muito interessante estudar derivadas com “experimentos”, ir até o GeoGebra, analisar funções e suas relações com algumas retas, alterar coeficientes angulares e perceber, na prática, o que está acontecendo, facilita muito o real entendimento sobre o que é melhor aproximação local e magnificação local. Fiquei espantado ao perceber que, processos que somos instruídos a realizar automaticamente, como derivar sem analisar o comportamento da função, na realidade é algo mais simples e com várias particularidades muito legais de serem observadas. Outro ponto diferencial é que essa abordagem usando diferenciabilidade pode ser estendida de maneira mais natural para várias variáveis. Sendo assim, acredito que essa forma de ensinar é bastante intuitiva e muito divertida para o aluno, porque ele pode realizar testes, ver o comportamento das coisas, deixando de lado a forma maçante e abstrata que há nos dias atuais”.</p>
----------	--	--

Nessa segunda etapa dos experimentos, os alunos também gostaram bastante do material e conseguiram refletir e compreender todos os passos que levam a noção de diferenciabilidade. Diferentemente da etapa I, a condução dinâmica do material com os alunos minimizou o número de interpretações equivocadas, como acontece na etapa I, sem supervisão, e a condução também foi de tal maneira que os alunos não usassem puramente seus conhecimentos de Cálculo I, para que pudessem aproveitar na íntegra o material e os experimentos propostos.

Outro fator que foi significativo, é que nessa etapa, após os experimentos, foi possível formalizar todo o conceito de diferenciabilidade utilizando informações advindas dos materiais, fazendo inclusive a ponte e a equivalência com o projeto de derivada que os alunos aprenderam em Cálculo I, exceto com os alunos que ainda não tinham visto derivadas. Com esses alunos que já cursaram Cálculo I e II, foi interessante fazer a ponte entre a diferenciabilidade em Cálculo I e a diferenciabilidade em Cálculo II, como transformação linear. Essa conexão foi interessante para a percepção de que o projeto tende a ser genérico, com motivações para além do próprio Cálculo de uma Variável.

Em última instância, essa segunda etapa dos experimentos, mesmo que produzida de maneira individual, foi o mais próximo que conduzimos de aplicar em uma sala de aula em uma turma de Cálculo I para observar seu funcionamento a larga escala. No entanto, o objetivo para este trabalho era focar na produção e validação do material, em busca de melhorias tanto teóricas tanto práticas, lapidando sua essência até estar “pronto” para levar para a sala de aula, o que deve ser conduzido em um outro momento, no futuro.

5 CONCLUSÕES

Esse trabalho teve como objetivo refletir sobre algumas problemáticas no ensino de matemática, conduzindo uma forma de pensar e refletir sobre o ensino e tensionando uma forma que priorize a aprendizagem dos alunos, diversificando metodologias de ensino. Além disso, refletir brevemente sobre como tem sido o ensino de derivadas. Depois, trazer um pouco da importância das tecnologias no ensino, promovendo uma tentativa de convencimento de que utilizar materiais digitais para potencializar o ensino de derivadas é uma boa alternativa, uma vez que pode ser uma maneira de fugir do ensino procedimentalista que pouco explora a visualidade e a compreensão de conceitos.

Em conjunto com essas ideias, propomos uma maneira de construir o ensino de derivadas, conduzindo um conteúdo matemático de maneira formal e ao mesmo tempo pensando em qual maneira de produzir sentido aos alunos, buscando que compreendam o entendimento matemático e problematizado. Dessa forma, o objetivo principal do trabalho se coloca como analisar as contribuições que o material criado pelo GeoGebra pode interferir na aprendizagem dos alunos em derivadas, sobretudo, naqueles que já viram esse conteúdo, mas também experimentando como esse conceito é compreendido pelos alunos que nunca viram derivadas, mas irão cursar Cálculo I em algum momento.

Nesse contexto, é importante refletir sobre algumas pautas epistemológicas e didáticas que são discutidas e envolvidas em um mesmo sentido: a reflexão dos saberes e a reflexão de como conduzir os saberes. Mesmo com uma proposta lúdica e bem definida, é importante que os docentes reflitam sobre qual a melhor maneira de estimular a tal produção aos discentes, uma vez que os alunos em geral são de realidades diferentes e aprendem em espaços de tempo diferentes. Isso fica perceptível na análise dos dados, pois aparentemente nenhum aluno teve contato com essa noção de derivada que buscamos construir - a de melhor aproximação afim, e os experimentos tiveram sucesso com todos os alunos na etapa com supervisão, e as respostas da etapa sem supervisão mostraram, com exceção de três alunos⁵, pareceu ter sido bem sucedida. Isso mostra a necessidade de incorporar uma maneira problematizada para esse ensino, mesmo com uma noção bem construída, fica visível que não se deve seguir à risca.

Esperamos que esse trabalho possa motivar o desenvolvimento de outras visões sobre o ensino de derivadas. Além disso, não apenas para o ensino de derivada e também não somente para todo o Cálculo e Análise, esperamos que o trabalho seja capaz de despertar outros olhos para a matemática, de modo que diversos conceitos e significados que são escondidos, privilegiando a maneira mais prática e tradicional (por geralmente ser menos trabalhosa e mais comum), possam ser evidenciados ao pensarmos de maneira

⁵ Os dois que não produziram novos conhecimentos, apenas aplicaram o que já sabiam de derivadas, e o aluno que interpretou aproximação linear local como reta vertical ao dar “*zoom out*”

problematizada, servindo tanto para o ensino tanto para a aprendizagem. Além disso, desejamos que o trabalho seja capaz de motivar novas ideias de pesquisa e discussões, em especial no curso de Licenciatura em Matemática, onde as ideias são mais presentes e que busque motivar a prática docente com o uso de tecnologias, seja na educação básica, seja no ensino superior.

REFERÊNCIAS

- [1] ARTIGUE, M.. *Analysis, Advanced Mathematical Thinking* (TALL, D. O. ed.) Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [2] AUSUBEL, D. P.. *The Psychology of Meaningful Verbal Learning*. New York, Grune and Stratton. 1963.
- [3] BARBOSA, M. A.. *O Insucesso no Ensino e Aprendizagem na Disciplina de Cálculo Diferencial e Integral*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná. 2004.
- [4] BORBA, M. C.. *Coletivos Seres-Humanos-Com-Mídias e a Produção de Matemática*. I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática. 2002.
- [5] BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G.. *Informática e Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autênciã, 2001. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- [6] BROUSSEAU, G.. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 7, n^o 2, Grenoble, 1986.
- [7] CARVALHO, L. M., GIRALDO, V., TALL, D.. *Conflitos Teórico-Computacionais e a Formação da Imagem Conceitual de Derivada*. 2002.
- [8] CORNU, B.. *Limits, Advanced Mathematical Thinking* (TALL, D. O. ed.) Kluwer, Dordrecht, 1991.
- [9] DILLENBOURG, P.. *What do You Mean By “Collaborative Learning”? Collaborative-Learning: cognitive and computational approaches*. Oxford: Elsevier, 1999.
- [10] FLORIT, L.. *You Could Have Invented Topology*. Rio de Janeiro, IMPA, 2017.
- [11] FREIRE, P.. *Pedagogia do Oprimido*.. Rio de Janeiro. Paz e Terra, 1978.
- [12] FREIRE, P.. *Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 1996.
- [13] GIRALDO, V; CARVALHO, L. M.. *Funções e Novas Tecnologias: Algumas perguntas, em “Anais do III Seminário: A Pesquisa em Educação Matemática no Rio de Janeiro”*, SBEM/RJ, 2000.
- [14] GIRALDO, V.. *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada*. Tese de Doutorado. COPPE-UFRJ. 2004.

- [15] GIRALDO, V..*Formação de Professores de Matemática: Para uma Abordagem Problematizada*. Ciência & Cultura, 2018.
- [16] GIRALDO, V.; MATTOS, F. R. P.; CAETANO, P.A.S..*Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [17] GIRALDO, V..*O que é Cálculo? Por que essa fama de difícil?* Ciência Hoje. 2022.
- [18] JUNIOR, J. C. M..*Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a Partir da Visualização com o Uso do Geogebra*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto. 2015.
- [19] LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V..*Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria*. Cuestiones desde la educación matemática. Granada: Comares, 1996.
- [20] NERI, C.; CABRAL, M. A..*Curso de Análise Real*. Rio de Janeiro: UFRJ, 2009.
- [21] PALIS, G. R..*Computadores em Cálculo: uma alternativa que não se justifica por si mesma*. Temas e Debates. Blumenau. 1995.
- [22] ROCHA, D. S..*Resgatando Métodos para o Cálculo de Raízes Quadradas e Raízes Cúbicas*. Caderno da Licença. Niterói. 1999.
- [23] SILBERMAN, M..*Active Learning: 101 strategies do teach any subject*. Massachusetts: Ed. Allyn and Bacon, 1996.
- [24] SILVA, J. F..*Questões Metodológicas do Ensino de Cálculo Diferencial e Integral I*. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Educação. Universidade Federal do Ceará. 1994.
- [25] SKOVSMOSE, O..*Cenários Para Investigação*. Bolema, 2000.
- [26] SKOVSMOSE, O..*Educação Matemática Crítica: A questão da democracia*. Campinas, São Paulo: Papirus, 2001 (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).
- [27] TALL, D. O..*Concept Images, Generic organizers, computers & curriculum change, For the Learning of Mathematics*. 1989.
- [28] TALL, D. O; VINNER, S..*Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with special reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics, (1981).