



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

**PRINCIPAIS IMPACTOS NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES A PARTIR
DO USO DO GEOGEBRA: UMA REVISÃO DA LITERATURA**

LUIS PAULO NASCIMENTO DE ASSUMPCÃO

RIO DE JANEIRO - RJ

2024

LUIS PAULO NASCIMENTO DE ASSUMPÇÃO

PRINCIPAIS IMPACTOS NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES A PARTIR DO
USO DO GEOGEBRA: UMA REVISÃO DA LITERATURA

Monografia apresentada à
Universidade Federal do Rio de
Janeiro (UFRJ) como requisito
necessário para obtenção do grau
de Licenciado em Matemática

Orientação: Prof. Dr. Fernando
Celso Villar Marinho

RIO DE JANEIRO - RJ

2024

LUIS PAULO NASCIMENTO DE ASSUMPÇÃO

**PRINCIPAIS IMPACTOS NA APRENDIZAGEM DE FUNÇÕES A PARTIR
DO USO DO GEOGEBRA: UMA REVISÃO DA LITERATURA**

Monografia apresentada à
Universidade Federal do Rio de
Janeiro (UFRJ) como requisito
necessário para obtenção do grau
de Licenciado em Matemática

Aprovada em 12/12/2024

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fernando Celso Villar Marinho (Orientador)
Colégio de Aplicação da UFRJ (CAp-UFRJ)

Prof. Dr. Agnaldo da Conceição Esquinhalha
Instituto de Matemática - UFRJ

Prof. Dr. Rodrigo Cardoso dos Santos
Colégio de Aplicação da UFRJ (CAp-UFRJ)

Rio de Janeiro, 2024

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a Deus e a toda a minha família, especialmente aos meus pais e à minha irmã, que sempre me apoiaram e estiveram ao meu lado.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus não apenas pelo apoio em toda a minha trajetória escolar e acadêmica, mas também pela oportunidade de estudar nesta importante Universidade.

Sou grato a toda a minha família, especialmente aos meus pais, Luis Antônio e Regina Cássia, e à minha irmã Ana Luisa, que sempre me apoiaram, me encorajaram e se orgulham dos meus planos profissionais, inclusive a honra de exercer a profissão que forma todas as outras, inspirando os jovens a construir seu futuro.

Agradeço também a todos os que já me ajudaram, desde a educação infantil até o momento, como professores, monitores, amigos e colegas, inclusive às pessoas que atuam em áreas administrativas, como direções e secretarias que já precisei consultar.

Por fim, agradeço ao Professor Doutor Fernando Villar, professor de matemática do Colégio de Aplicação da UFRJ (CAp-UFRJ), que atuou comigo lá e foi meu orientador neste trabalho, contribuindo para minha formação.

Muito obrigado por tudo!

RESUMO

Este trabalho é uma revisão de literatura sobre o uso do software matemático Geogebra no ensino de funções, avaliando seu impacto na aprendizagem de estudantes da educação básica. Diante da importância das tecnologias digitais nos dias atuais e do conceito de função no estudo da matemática, o Geogebra se destaca por ser dinâmico, gratuito e acessível, promovendo metodologias que favorecem a interação e a aprendizagem ativa em um ambiente colaborativo. Os autores consultados concordam sobre seus efeitos na aprendizagem e no desempenho escolar, com experiências de alunos que corroboram essa visão. Além disso, propostas de métodos de avaliação são apresentadas para medir precisamente esses impactos. Ao analisar diversos trabalhos e documentos sobre o tema, verifica-se que abordam competências relativas à de problemas, conexões entre conceitos e conversões entre tipos de representação de funções, propondo avaliações que trabalhem essas competências.

Palavras-chave: Matemática; Geogebra; Ensino; Aprendizagem; Funções

ABSTRACT

This paper is a literature review of basic education students. Given the importance of digital technologies today and the concept of function in the study of mathematics, Geogebra stands out for being dynamic, free and accessible, promoting methodologies that favor interaction and active learning in a collaborative environment. The authors consulted agree about its effects on learning and school performance, with student experiences that corroborate this view. In addition, proposals for evaluation methods are presented to accurately measure these impacts. When analyzing various works and documents on the topic, it is clear that they address skills related to problem solving, connections between concepts and conversions between types of function representation, proposing assessments that work on these skills.

Keywords: Mathematics; Geogebra; Teaching; Learning; Functions

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Logotipo do Geogebra	13
Figura 2 - Tela principal do Geogebra	14
Figura 3 - Representações algébrica e geométrica no Geogebra	15
Figura 4 - Configurações de um controle deslizante	16
Figura 5 - Geogebra com os pontos da sequência marcados	42
Figura 6 - Geogebra com a reta que passa pelos pontos marcados	42
Figura 7 - Trecho 1 do rastro do vértice da parábola	44
Figura 8 - Trecho 2 do rastro do vértice da parábola	45
Figura 9 - Trecho 3 do rastro do vértice da parábola	45
Figura 10 - Trecho 4 do rastro do vértice da parábola	46
Figura 11 - Item “a” da atividade 3 no Geogebra	48
Figura 12 - Item b da atividade 3 no Geogebra	49
Figura 13 - Itens c e d da atividade 3 no Geogebra	49
Figura 14 - Item “a” da atividade 4 no Geogebra	51
Figura 15 - Item b da atividade 4 no Geogebra	52
Figura 16 - Item c da atividade 4 no Geogebra	52

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
1.1 Apresentação, contextualização e justificativas	9
1.2 Objetivo geral e objetivos específicos	11
1.3 Estrutura do trabalho	11
2. REFERENCIAL TEÓRICO	13
2.1 Sobre o Geogebra	13
2.2 Teorias de aprendizagem	18
3. METODOLOGIA	22
4. RESULTADOS	33
4.1 Vantagens do Geogebra em relação às aulas tradicionais, bem como seus impactos na aprendizagem de funções e no desempenho escolar	33
4.2 Métodos de avaliação capazes de avaliar o impacto do software no aprendizado de funções	36
4.3 Análise dos métodos de avaliação	39
4.4 Sugestões de atividades	41
5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	53
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
REFERÊNCIAS	59

1. INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação, contextualização e justificativas

Este trabalho é uma revisão de literatura, onde são determinados os impactos do software matemático Geogebra no ensino de funções para a educação básica, considerando suas funcionalidades e potencialidades, que podem ser exploradas para que a aprendizagem seja significativa e proveitosa.

Pode-se justificar sua produção, por fatos claramente observados na realidade: As tecnologias digitais no ensino são muito importantes e indispensáveis nos dias atuais, visto que avançam cada vez mais rápido e influenciam cada vez mais a vida das pessoas, possibilitando comunicações e transmissões de informações de forma rápida e em tempo real, a longas distâncias, além de facilitar a vida da sociedade em todos os aspectos, não apenas na comunicação. Com o passar do tempo, é cada vez mais difícil encontrar ou conhecer alguém que viva sem usar algum tipo de tecnologia, mesmo que não use dispositivos com acesso à internet.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs (Brasil, 1998), as tecnologias de comunicação transmitem informações de diversas formas: Através da leitura, da escrita, e de recursos audiovisuais, além de influenciar nas maneiras como a sociedade as recebe.

Sancho (1998) enfatiza que é difícil que sejam feitas reflexões sobre o tema entre profissionais da educação, justamente por conta da alta velocidade de avanço da tecnologia, que faz com que a educação esteja quase sempre atrasada em relação ao seu estado atual. Entretanto, é necessário que seja persistente a busca por acompanhar sua evolução, fazendo o máximo possível para alinhar a educação com a atual realidade, como buscam os programas, projetos e cursos de formação voltados para o tema.

É importante destacar que os discentes, principalmente os das gerações mais recentes, já nascem em um mundo digital e desconhecem a vida sem tecnologia. Sendo assim, são muito familiarizados com ela e estão constantemente conectados.

Também é importante destacar que os softwares, plataformas e aplicativos podem ser acessados a qualquer momento e em qualquer lugar, desde que seja garantido o acesso às tecnologias digitais e à internet. Através deles, os momentos de trocar ideias e sanar dúvidas não se limitam aos horários e locais das aulas presenciais.

Atualmente, há diversas plataformas por onde são acessíveis, vídeo-aulas e materiais em PDF quando se desejar ou precisar, permitindo também um fácil acesso ao professor para tirar dúvidas. Através desses recursos, é possível que ele acompanhe o progresso de seus alunos e diagnostique suas dificuldades, para em seguida realizar uma intervenção pedagógica personalizada. Os PCNs (Brasil, 1998) confirmam que, com o uso correto de tecnologias, há uma maior proximidade entre eles.

Na atualidade, o ensino tradicional tende a não despertar o interesse no aprendizado, principalmente da matemática. Sendo assim, as tecnologias digitais são grandes aliadas no processo de ensino-aprendizagem da disciplina, tornando as aulas mais interessantes e motivadoras, possibilitando uma participação ativa e criando diversas formas de abordagem dos conteúdos.

Os PCNs (Brasil, 1998) ao citar as finalidades para os quais o computador pode ser utilizado, afirmam que pode ser transmissor de informações, auxiliador na construção do conhecimento, instrumento capaz de desenvolver a autonomia e executor de diversas atividades, sendo também capaz de se adaptar a diferentes ritmos de aprendizagem.

Entretanto, deve haver um equilíbrio nas aulas com tecnologia para evitar o excesso. Borba e Penteado (2001) citam, entre as opiniões de docentes sobre seu uso, que ela pode causar dependência nos alunos, isto é, uma incapacidade de resolução de qualquer problema sem dispor de um computador ou um dispositivo móvel. Ou seja, ela possui suas vantagens mas também pode trazer consequências negativas se não utilizada corretamente, com cuidado e planejamento.

Os mais diversos recursos tecnológicos permitem que os alunos desenvolvam habilidades, mudando a função do professor que, segundo Carvalho (2021), passa a ser um mediador e facilitador. A Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018) defende que as aulas de matemática devem ser dadas com uso de tecnologias digitais, levando em conta as realidades e vivências cotidianas dos discentes, mostrando a disciplina como uma ferramenta a ser utilizada em diversos contextos.

Quanto ao conceito de função, ele possui diversas representações (algébrica, gráfica, tabular, entre outras) e sua exploração é fundamental para promover o pensamento matemático, segundo os PCNs (Brasil, 1998). Além disso, é um conceito essencial que está presente em quase toda a matemática e é aplicado em diversas áreas. Muitos fenômenos da realidade são descritos e modelados por funções matemáticas, que ajudam a interpretar e resolver diversos

problemas. Por isso, a função foi o conceito escolhido.

Quanto à escolha do Geogebra, se deve ao fato de ser um software dinâmico, gratuito e facilmente acessível, possuindo inúmeras vantagens, além de disponibilizar materiais, exercícios e simulações.

1.2 Objetivo geral e objetivos específicos

Este trabalho tem como principal objetivo verificar, com base na literatura recente sobre o tema, se o Geogebra tende a despertar o interesse dos estudantes na aprendizagem de funções e contribuir para uma aprendizagem significativa.

Entre os objetivos específicos, busca responder a três perguntas de pesquisa: Quais são as vantagens didáticas do Geogebra sobre os métodos tradicionais de ensino de funções? Quais são seus impactos na aprendizagem do tema e no desempenho escolar? Quais métodos de avaliação permitem avaliar com precisão esses impactos?

Respondendo a essas três perguntas, busca-se gerar reflexões a respeito dos impactos que o software pode trazer para a aprendizagem, havendo a possibilidade de compará-lo com outras possíveis ferramentas de ensino de matemática que podem ser mais familiares, como réguas, compassos, transferidores, calculadoras comuns e também outros softwares, criando meios de combinar diferentes recursos se necessário. Também visa gerar reflexões sobre questões importantes que devem ser consideradas nas avaliações da aprendizagem e como elas geralmente são feitas de modo a obter informações que refletem bem os impactos causados.

Este trabalho também pode ser útil como um meio de se obter informações sobre o que a literatura recente diz sobre o tema e sobre temas relacionados, conscientizando os professores sobre a necessidade das tecnologias digitais na educação, além de propor uma ferramenta de ensino que pode trazer inúmeros benefícios e ajudar a trabalhar importantes habilidades propostas por documentos que norteiam a prática docente, com todas essas informações fundamentais reunidas em uma única obra.

1.3 Estrutura do trabalho

Este trabalho é dividido em quatro capítulos principais: Referencial teórico, metodologia, resultados e discussão dos resultados. O capítulo 2, sobre o referencial teórico, é dividido em duas seções: A primeira fala sobre o Geogebra, abordando sua estrutura, principais recursos e formas de exploração, e a segunda aborda teorias de aprendizagem que se alinham com seus efeitos, discutindo

autores da educação que dialogam com documentos importantes como a BNCC e os PCNs.

O capítulo 3 é a metodologia, que aborda a realização da pesquisa, explicando a seleção dos trabalhos utilizados e a coleta de dados, além de apresentar quadros com informações principais sobre cada um. O capítulo 4 trata dos resultados, transmitindo as ideias centrais dos trabalhos consultados, e dialogando-as entre si para responder às três perguntas de pesquisa. Ele é dividido em quatro seções: A primeira analisa as vantagens do Geogebra sobre o ensino tradicional e seus impactos na aprendizagem de funções, a segunda propõe métodos de avaliação para mensurar esses impactos, fundamentando-se nos trabalhos consultados. A terceira analisa os métodos de avaliação aplicados por aqueles que realizaram atividades práticas, de modo a gerar reflexões a respeito de quais métodos podem ser combinados para avaliar bem a aprendizagem, e a quarta trata de sugestões de atividades que podem ser realizadas com o software, baseadas em recomendações de artigos.

O capítulo 5 é a discussão dos resultados, que dialoga as respostas às perguntas de pesquisa com os documentos que norteiam a prática docente, e também com as teorias dos autores educacionais discutidos no referencial teórico.

Por fim, são apresentadas as considerações finais e as referências. Segue o próximo capítulo, sobre o referencial teórico.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Sobre o Geogebra

O Geogebra é um software criado pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter em 2001, em sua tese de doutorado, para facilitar e dinamizar o ensino da matemática. Seu nome, como se pode claramente perceber, é a junção das palavras “Geometria” e “Álgebra”. Pode ser baixado gratuitamente em diversos dispositivos e sistemas operacionais, incluindo uma versão online e mobile, sendo acessível através do site www.geogebra.org. Com milhões de usuários em todo o mundo, está disponível em diversos idiomas, incluindo o português brasileiro (PT-BR).

Figura 1 - Logotipo do Geogebra



Fonte: Google imagens

É de fácil utilização e possui uma interface que apresenta diversos comandos, cujos nomes já dizem intuitivamente quais são suas funções. A apresentação ao usuário também é intuitiva, facilitando seu uso. Sancho (1998) define "software educativo" como todo programa informático criado com o objetivo de ser usado para o ensino-aprendizagem. Como o Geogebra é um programa criado com essa finalidade, é um software educativo.

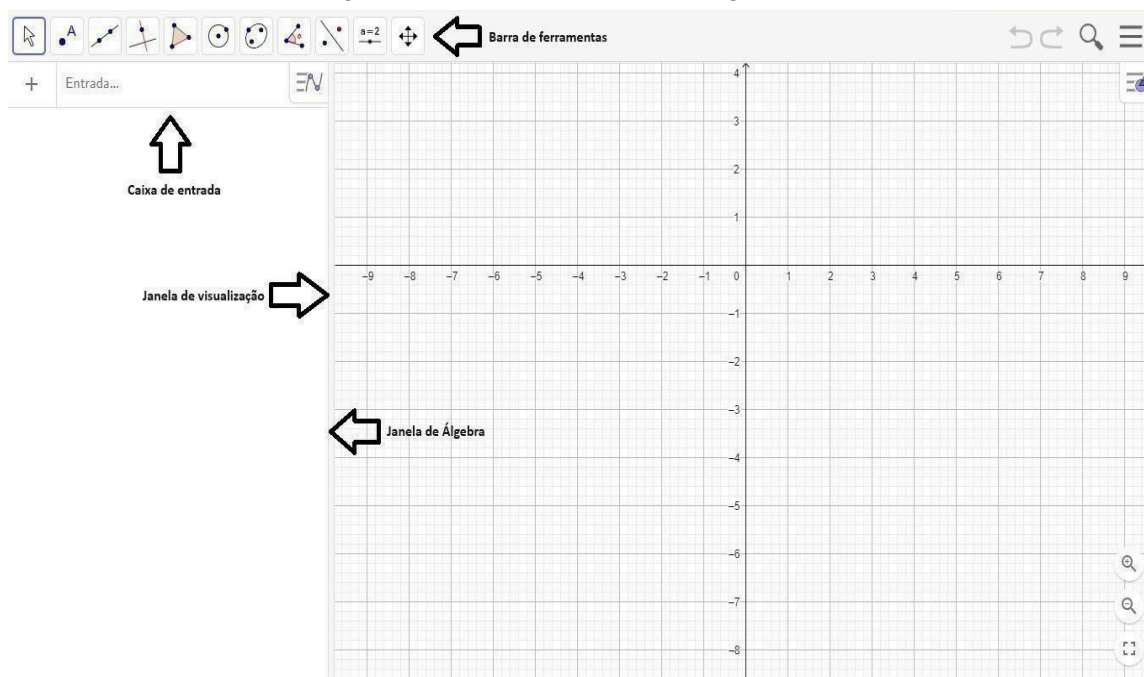
Também é possível afirmar que é um programa de simulação, pois a autora define os programas de simulação como sendo programas que:

[...] reproduzem na tela do computador, de forma artificial, fenômenos e leis naturais, oferecendo ao aluno um **ambiente exploratório** que lhe permita levar à cabo uma **atividade de pesquisa**, manipulando determinados parâmetros e comprovando as consequências do desempenho [...] apresentam situações nas quais o usuário pode **tomar decisões** e comprovar logo em seguida as consequências da opção selecionada (Sancho, 1998, p.171)

O Geogebra mostra na tela os fenômenos e leis que ocorrem nos objetos, permitindo ao usuário estudá-los de forma exploratória, verificando dinamicamente quais são as consequências das ações realizadas sobre eles, através da experimentação e da pesquisa. A autora destaca que nos programas de simulação, o aluno é mais ativo no processo de ensino-aprendizagem.

Segue uma imagem da tela principal do software:

Figura 2 - Tela principal do Geogebra



Fonte: Autor

A imagem mostra os nomes das suas regiões. Seguem as funções de cada uma:

Barra de ferramentas: Disponibiliza ferramentas e comandos, entre eles figuras, objetos para se construir e medidas para se determinar, como distâncias, áreas, medidas de ângulos, entre outras. Cada ícone, ao ser clicado, dá origem a diversas opções de comandos cujas funções são intuitivas pela imagem e pelo título. Ao clicar no comando, o software exibe uma frase que informa quais ações o usuário deve realizar para usá-lo. Por exemplo, ao clicar no comando “Círculo dados centro e um de seus pontos”, aparece na tela a frase “Selecione o centro e depois, um ponto do círculo”.

Caixa de entrada: É onde se insere equações e coordenadas de objetos, como pontos e vetores, para que seja mostrada sua representação geométrica.

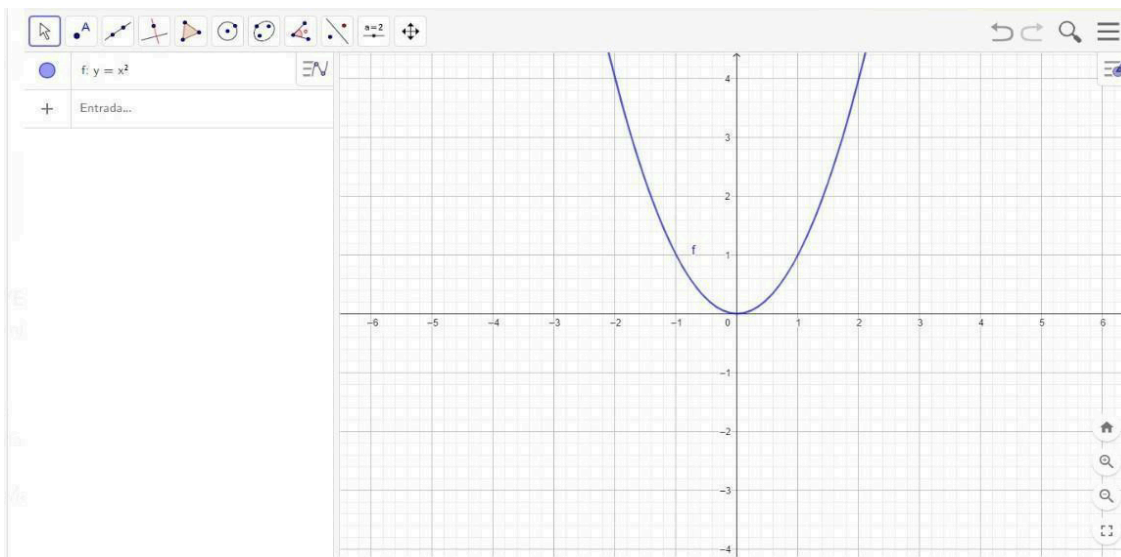
Janela de Álgebra: É a região que mostra a forma algébrica dos objetos construídos e as medidas de alguns deles (Por exemplo, comprimento, área e ângulo) quando são determinadas com recursos disponibilizados.

Janela de Visualização: É a região que representa o plano cartesiano, mostrando visualmente objetos geométricos que são construídos como pontos, vetores, retas, polígonos, círculos, gráficos, entre outros, para serem estudados. Esses objetos podem ser movimentados dinamicamente, facilitando a

compreensão e a visualização.

Na janela de Álgebra e na Janela de Visualização, temos a representação algébrica e a geométrica de um mesmo objeto, respectivamente. Essas representações se relacionam entre si.

Figura 3 - Representações algébrica e geométrica no Geogebra



Fonte: Autor

Na imagem acima, vemos uma representação geométrica da parábola de equação $y=x^2$ em azul, na Janela de Visualização, e sua equação na Janela de Álgebra, com um pequeno círculo de mesma cor ao lado. O objeto e o círculo que o representa na janela da Álgebra têm sempre a mesma cor, que pode facilmente ser alterada nas configurações. Ao clicar neste círculo, é possível esconder e exibir o objeto na janela de visualização.

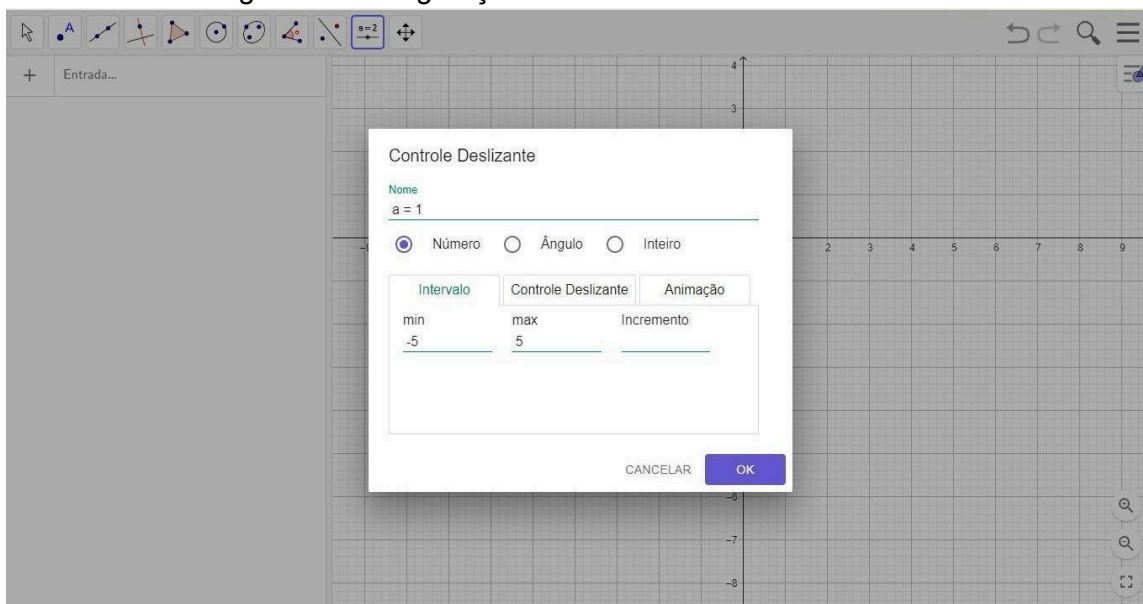
Ao criar-se um objeto digitando sua equação na caixa de entrada, automaticamente é criada sua representação geométrica na Janela de Visualização e vice-versa. O mesmo objeto pode ser criado através de recursos da barra de ferramentas. As representações algébrica e geométrica têm uma correspondência. Ao se modificar uma delas, a outra também se modifica para mantê-la.

Um dos principais recursos utilizados nas aulas de funções são os controles deslizantes, que permitem modificar valores de parâmetros em uma equação, a fim de verificar suas influências no gráfico, permitindo estudar melhor as relações entre as representações algébrica e geométrica. Eles podem ser criados através de um recurso na barra de ferramentas.

Ao clicar no recurso “Controle deslizante”, aparecem configurações com

opções a serem escolhidas, como se pode ver na imagem a seguir:

Figura 4 - Configurações de um controle deslizante



Fonte: Autor

Ao clicar na opção “OK”, é criado um controle deslizante a partir delas. Seguem explicações dessas opções e o que cada uma determina:

Abaixo da palavra “nome”, em verde, temos uma igualdade entre uma variável e uma constante. Trata-se da variável que será criada e modificada pelo controle, e o valor que ela assumirá inicialmente. Ambos podem ser modificados antes de criá-lo: Basta apagar e reescrever como se deseja.

Logo abaixo, temos 3 opções:

1. **Número:** Impõe que a variável assumira valores quaisquer que não representam nada específico, desde que obedeçam às restrições das configurações
2. **Ângulo:** Impõe que a variável assumira medidas de ângulos
3. **Inteiro:** Impõe que a variável assumira valores inteiros

Abaixo, temos mais 3 opções:

1. **Intervalo:** Nele, determinamos o valor mínimo que a variável poderá assumir, seu valor máximo, e seu incremento, isto é, de quanto em quanto aumentará ou diminuirá ao deslizá-lo.
2. **Controle deslizante:** Nele, determinamos se o controle será fixo ou aleatório. Controle fixo é aquele em que, ao apertar o play, os valores se modificam numa

mesma direção, isto é, aumentando ou diminuindo continuamente. Já o aleatório, como o nome sugere, é aquele em que se modificam de forma aleatória, oscilando de uma maneira qualquer dentro do intervalo (entre o mínimo e o máximo). Também se pode determinar se será um controle horizontal ou vertical.

3. Animação: Nele, é possível determinar a velocidade com que deslizará ao apertar o play, atribuindo-a a um valor. Quanto maior for esse valor, mais rápido, e quanto menor, mais devagar.

Também é possível determinar como os valores irão variar, e para isso, há mais 4 opções:

3.1 Crescente: Sempre aumentando

3.2 Decrescente: Sempre diminuindo

3.3 Oscilando: Oscilando entre aumentar e diminuir

3.4 Crescente (Uma vez): Sempre aumentando até chegar ao máximo, e depois parando

Uma vez criado o controle, sua variável já assume o valor inicial determinado. Ao digitar, na caixa de entrada, uma equação que a contenha, é criado na janela de visualização o gráfico correspondente. Ao alterar os valores, ele também se altera, conforme os valores que estão assumindo. A partir disso, é possível estudar os efeitos causados.

Além desse, o Geogebra oferece diversos outros recursos para estudar funções, como por exemplo, a reflexão em relação a uma reta para funções inversas. O gráfico da inversa de uma função é o reflexo de seu gráfico em relação à reta de equação $y=x$. Essa propriedade pode ser verificada refletindo os gráficos e observando a sobreposição. Também é possível marcar pontos sobre um deles e verificar que a reflexão é um ponto sobre o outro.

Outro recurso interessante que pode ser explorado é a opção “Exibir Rastro”, selecionada nas configurações de um objeto pela Janela de Álgebra. É um recurso que mostra o rastro que um objeto deixa ao se movimentar na Janela de Visualização. Com ele, é possível verificar propriedades de funções e seus gráficos. Por exemplo, quando é criada uma parábola genérica de equação $y=ax^2+bx+c$ e é movimentado o controle deslizante do parâmetro b , a trajetória do vértice também é uma parábola.

No estudo da trigonometria e das funções trigonométricas, é possível

verificar seus gráficos usando a definição no círculo trigonométrico. Por exemplo, pode-se criar um ponto P que está no círculo e em função dele, um ponto Q com coordenadas x e y, como sendo a medida do ângulo associado em radianos e seu cosseno, respectivamente, através de recursos intuitivos do software. Movendo o ponto P ao longo do círculo, é possível visualizar a trajetória do ponto Q, que estará sobreposta ao gráfico de $y = \cos x$, mostrando de forma experimental o significado do gráfico de uma função trigonométrica.

No Geogebra, é bem simples verificar graficamente, conceitos próprios do estudo de funções, como por exemplo, o próprio conceito de função, e também os conceitos de injetividade e sobrejetividade, através de intersecções com retas verticais e horizontais. Ao conectar a representação gráfica desses conceitos com a representação tabular, eles são aprendidos significativamente.

Nas aulas, os alunos podem receber instruções de ações a serem realizadas nele, para verificar o que ocorre: Por exemplo, tabelar pontos a partir da forma algébrica de uma função e depois esboçar o gráfico, digitar equações com parâmetros e movimentar os controles deslizantes, utilizar recursos como raízes, pontos de máximo e mínimo, retas tangentes, entre outros, para verificar e estudar propriedades. Esses são alguns exemplos de recursos que podem ser explorados.

Segue a próxima seção, que trará teorias de aprendizagem para dialogar com os resultados dos trabalhos pesquisados, de modo a contribuir para este estudo.

2.2 Teorias de aprendizagem

Para este estudo, é essencial entender o que é uma aprendizagem significativa. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) afirmam que é uma aprendizagem que se relaciona com os conhecimentos prévios do aprendiz ao conectar informações antigas com novas, facilitando a aquisição de novos conhecimentos. Essa conexão o prepara para futuras aprendizagens, aumentando a capacidade de retenção e raciocínio. Assim, a integração de novos conteúdos com o que já se sabe é essencial para uma aprendizagem duradoura e eficaz.

Para os autores, as novas informações têm menos chances de serem esquecidas futuramente, e mais chances de serem retidas durante anos, contribuindo para um bom desempenho. Freire (1996) afirma:

[...] nas condições de **verdadeira aprendizagem** os educandos vão se transformando em reais sujeitos da **construção e da reconstrução do saber** ensinado, ao lado do educador, igualmente sujeito do processo

(Freire, 1996, p.28)

O autor defende que a verdadeira aprendizagem envolve reflexões, compreensões e capacidade de explicar com as próprias palavras, não se limitando à memorização de textos sem compreensão. E não somente isso, o aluno ensina e aprende simultaneamente, juntamente com o professor. Ambos ensinando e aprendendo.

Para ele, o papel do professor é estimular a autonomia do aluno, incentivando-o a buscar conhecimento de forma crítica e reflexiva, indo além do conhecimento superficial. Ele deve valorizar suas experiências, promovendo uma relação colaborativa onde há uma construção conjunta do saber. Além disso, deve ajudar os alunos a construir sua compreensão dos significados, em vez de apenas transmitir informações.

A aprendizagem defendida por Freire (1996) também é definida por Ausubel, Novak e Hanesian (1980), e é chamada de "aprendizagem por descoberta", sendo aquela em que o aprendiz, ao invés de receber diretamente o conteúdo, o descobre antes de integrá-lo em sua estrutura cognitiva.

Estes enfatizam que a motivação influencia a concentração e o esforço. As tecnologias e a aprendizagem ativa despertam essa motivação, melhorando a qualidade da aprendizagem. Para que esta seja potencializada, o docente deve ensinar de forma que o discente domine o conteúdo e o material estudado, já que:

[...] se o material aprendido significativamente for dominado melhor desde o início, um **maior número** de significados incorporados estará disponível em **qualquer época** posterior quando a memorização for testada (Ausubel, Novak e Hanesian, 1980, p.125)

Eles argumentam que a colaboração em grupo pode melhorar o desempenho dos alunos ao combinar ideias e promover discussões, o que resulta em soluções mais eficazes para problemas complexos. Esse trabalho em equipe aumenta a confiança dos alunos e a probabilidade de respostas corretas, além de permitir uma avaliação mais rica da aprendizagem. A interação social também estimula a motivação e o engajamento, contribuindo para um aprendizado mais significativo.

A motivação é considerada pelos autores como algo fundamental para a aprendizagem significativa, sendo tanto seu efeito quanto sua causa. Como é um efeito, não é necessário aguardar sua ocorrência para iniciar uma atividade. Como é uma causa:

Deve-se fazer uso completo dos interesses e motivações existentes sem se deixar limitar por eles [...] elevar ao máximo o impulso cognitivo por meio da ativação da curiosidade intelectual, usando material que arrebatou a atenção e organizando as aulas de modo a garantir uma aprendizagem bem sucedida (Ausubel, Novak e Hanesian, 1980, p.359)

Eles destacam que isso pode ser estimulado quando o conteúdo é considerado relevante. Os PCNs (Brasil, 1998) mencionam uma maneira natural de se mostrar a relevância do conteúdo: ensinando sobre como conceitos matemáticos surgiram naturalmente a partir de aplicações práticas de povos da antiguidade, nos contextos em que viviam:

A própria História da Matemática mostra que ela foi construída como resposta a perguntas provenientes de diferentes origens e contextos, motivadas por problemas de ordem prática (divisão de terras, cálculo de créditos), por problemas vinculados a outras ciências (Física, Astronomia), bem como por problemas relacionados a investigações internas à própria Matemática. (Brasil, 1998, p.40)

Gráficos de funções, como os exponenciais, representam imagens já conhecidas pelos discentes: Gráficos que representam a propagação de doenças. Isso aumenta a relevância do tema e favorece um aprendizado significativo e duradouro. Ausubel, Novak e Hanesian (1980) ressaltam que a relevância impacta na retenção das informações.

A BNCC (Brasil, 2018) enfatiza a interpretação e adaptação de conhecimentos pelos alunos na resolução de problemas, destacando que enunciados podem ser ambíguos, exigindo interpretação e escolha de estratégias adequadas. A aprendizagem deve ocorrer em diversos contextos, conectando conceitos e refletindo sobre mudanças nos enunciados. É essencial analisar a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções, construindo uma argumentação consistente. Essa abordagem desenvolve a capacidade dos alunos de aplicar conhecimentos de forma autônoma e crítica.

Essas são maneiras de exercitar diversas competências, entre elas a compreensão de conceitos. Para avaliar esta adequadamente, é aconselhável que se peça ao aluno que identifique semelhanças e diferenças entre conceitos semelhantes (Sancho, 1998). De acordo com a autora:

Na maioria dos profissionais da educação já existe a consciência de que **cada pessoa é diferente das outras**, que cada uma tem suas **necessidades próprias**, seus objetivos pessoais, um estilo cognitivo determinado, que cada pessoa usa as estratégias de aprendizagem que lhe são mais positivas, possui um ritmo de aprendizagem específico, etc (Sancho, 1998, p.185)

Isso deve ser considerado ao ensinar e avaliar cada aluno, pois eles são diferentes e precisam de intervenções pedagógicas específicas. A autora enfatiza que as avaliações devem ter enunciados claros e objetivos, classificados por nível de dificuldade, tema e assunto, aumentando a compreensão e segurança nas respostas.

Segundo Ausubel, Novak e Hanesian (1980), as avaliações devem ser cuidadosas para evitar respostas memorizadas sem compreensão. Os PCNs

(Brasil, 1998) afirmam que a avaliação apenas por reprodução é ineficaz, devendo as atividades propor aplicações de conceitos em diversos contextos e considerar o nível de habilidade do aluno, para evitar frustrações e aumentar a motivação.

Essas são as principais teorias que sustentam os resultados deste trabalho.

Segue o próximo capítulo: A metodologia de pesquisa.

3. METODOLOGIA

Para este trabalho, foram consultadas literaturas dos últimos dez anos (de 2013 a 2023) sobre o uso do Geogebra no ensino de funções e temas relacionados que poderiam ser úteis (como tecnologias na educação, metodologias ativas, resolução de problemas no ensino de matemática, entre outros), para obter informações sobre o que tem sido produzido sobre esses temas e selecionar trabalhos utilizados nas bibliografias, para complementar as teorias.

Como base de dados, foi utilizado o Google Acadêmico. A pesquisa se iniciou no dia 21/06/2024. Primeiramente, digitou-se a string de busca “Geogebra” + “Matemática” + “função” - “ensino de geometria”, restringindo para os documentos escritos no período em questão. Apareceram 7210 resultados. Em seguida, filtrou-se as configurações de busca para “artigos de revisão”, e o número de resultados caiu para 80.

Após a seleção, primeiramente se obteve seis artigos e uma dissertação. Após adicionar trabalhos complementares posteriormente, buscando alguns no site do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), foram incluídas mais dissertações na pesquisa. Todo o processo é explicado a seguir.

Como critério de exclusão, foram excluídos os trabalhos que, analisando o título e o resumo ou apenas o título, já era possível perceber que fugiam completamente do tema ou eram voltados para o ensino de matemática superior. Restaram dez trabalhos.

Na sequência, verificou-se que alguns deles eram dissertações que permitiam responder às perguntas de pesquisa, com objetivos e metodologia claros, e outros eram artigos publicados em revistas científicas revisadas por pares, que utilizam critérios rigorosos para aprovação, a fim de garantir a qualidade e a veracidade das pesquisas, às cegas. Além disso, todas as palavras-chave tinham relação com o tema ou se referiam a algo que poderia ser interessante para a pesquisa. Assim, foram primeiramente mantidos os dez trabalhos.

Após cada um ser lido na íntegra, verificou-se que de três deles, um tratava de avaliação de softwares educativos em geral para o ensino de matemática, mencionando apenas uma vez o Geogebra. Outro tratava do uso de tecnologias em geral no ensino de funções exponenciais e logarítmicas, com poucas informações relevantes para este trabalho. E outro tratava de tecnologias em

geral no ensino de matemática, com grande foco na história delas. Como possuem poucas contribuições para este trabalho e objetivos pouco relacionados, não foram considerados.

Portanto, sobraram sete trabalhos. Seguem quadros com as principais informações sobre cada um, como título, autor, ano, tipo de trabalho, palavras-chave, metodologia, objetivo e conclusões:

T1:

Título/autor/ano/tipo de trabalho	Palavras-chave
A resolução de problemas como metodologia de ensino de matemática na educação básica: uma revisão sistemática de literatura Padovani et.al (2022) Artigo	Ensino tradicional, Resolução de problemas, Ensino de matemática

Metodologia e objetivo	Conclusões
Foram revisados 16 artigos sobre o uso de TDICs e propostas de ensino com resolução de problemas na educação básica, comparando com métodos tradicionais nos últimos 10 anos. A análise foi feita com base na técnica de análise de conteúdo, interpretando os resultados e destacando seus aspectos. O objetivo foi investigar os efeitos das abordagens de resolução de problemas no ensino da matemática	A implementação de recursos tecnológicos favorece práticas educativas em sala de aula e o desenvolvimento das habilidades de resolução de problemas, estimulando o interesse em aprender matemática e contribuindo para um melhor desempenho em diferentes áreas do conhecimento

T2:

Título/autor/ano/tipo de trabalho	Palavras-chave
Instrumentos de Avaliação da Aprendizagem Matemática: Contribuições e Convergências de uma Revisão Integrativa Freitas, Manfredo e Cunha (2022) Artigo	Avaliação da aprendizagem, Instrumentos avaliativos, Ensino de matemática, Revisão integrativa

Metodologia e objetivo	Conclusões
<p>Trata-se de uma pesquisa qualitativa que analisou artigos sobre avaliação em matemática publicados no periódico Educação Matemática em Revista (EMR) de 1993 a 2021, selecionando 24 artigos que propõem avaliações mais inclusivas e significativas, desmistificando a ideia de que a matemática não é acessível a todos. O objetivo foi propor avaliações diferentes da tradicional e que não fossem excludentes, focadas apenas na memorização de procedimentos</p>	<p>A avaliação deve ser formativa, ocorrendo ao longo de todo o ano letivo, sem atribuir notas. Deve também utilizar diferentes instrumentos e interações entre professor e aluno, além de envolver metacognição e autoavaliação, com o objetivo de promover a aprendizagem e melhorá-la</p>

T3:

Título/autor/ano/tipo de trabalho	Palavras-chave
<p>O uso da modelagem matemática com o GeoGebra no ensino de funções trigonométricas: uma revisão bibliográfica Brandão, Carvalho e Amaral (2022) Artigo</p>	<p>Modelagem matemática, GeoGebra, Funções trigonométricas</p>

Metodologia e objetivo	Conclusões
<p>Trata-se de uma revisão de literatura, com análise de publicações de 2012 a 2022 em plataformas como Google acadêmico, Scielo, CAPES e Redalyc, excluindo trabalhos que não eram artigos originais de pesquisa. O objetivo foi detalhar as influências da Modelagem Matemática com o GeoGebra no ensino de funções</p>	<p>A implementação das TICs nas aulas de matemática é muito relevante. Além disso, a modelagem matemática favorece a aprendizagem e mostra aplicações da matemática no cotidiano, motivando os discentes a buscarem soluções aplicáveis e eficientes para o objeto de estudo. Do mesmo modo, o Geogebra contribui muito para a aprendizagem da matemática, facilitando as visualizações geométricas e gráficas, além de estimular a participação ativa</p>

T4:

Título/autor/ano/tipo de trabalho	Palavras-chave
O uso das tecnologias digitais no ensino remoto da matemática e aprendizagem da função afim, segundo Raymond Duval: Revisão sistemática da literatura Oliveira e Brandt (2022) Artigo	Ensino remoto, Tecnologias digitais, Função afim, Teoria dos registros de representação semiótica

Metodologia e objetivo	Conclusões
Trata-se de uma pesquisa exploratória, com foco na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Primeiramente, foi realizada uma pesquisa por teses e dissertações de 2017 a 2021. Em seguida, houve uma análise dos trabalhos, que foram divididos em categorias com base na repetição de palavras-chave. O objetivo foi investigar as contribuições das tecnologias digitais para a aprendizagem de função afim no Ensino Fundamental	Durante o ensino remoto, o uso de tecnologias digitais foi essencial para o ensino da matemática, mas também trouxe desafios quanto à qualidade da internet e à disponibilidade de computadores. A mudança para esse modelo de ensino permitiu a construção de conhecimentos significativos através de recursos tecnológicos, destacando a importância da teoria do TRRS nas atividades cognitivas

T5:

Título/autor/ano/tipo de trabalho	Palavras-chave
Software Geogebra no ensino de funções: Revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT Pereira (2018) Dissertação	Ensino, Funções Elementares, Geogebra

Metodologia e objetivo	Conclusões
Trata-se de uma revisão de dissertações do PROFMAT de 2016 a 2018. Foi uma pesquisa qualitativa exploratória analisando, para cada dissertação analisada, objetivos, fundamentação teórica, metodologia e resultados. O objetivo foi relacionar o Geogebra com o estudo de funções elementares, conhecer metodologias utilizadas e recomendar seu uso no ensino de funções	O Geogebra é uma ferramenta que ajuda a compreender conceitos matemáticos de forma visual e prática, estimulando a imaginação e a criatividade. Permite criar quizzes com respostas imediatas e compartilhar materiais escritos, vídeos e livros interativos, facilitando o acesso ao conhecimento em qualquer lugar

T6:

Título/autor/ano/tipo de trabalho	Palavras-chave
Uma análise do ensino de funções a partir de uma revisão integrativa de literatura sobre o estilo de aprendizagem de Kolb e metodologias de ensino Alves e Menezes (2023) Artigo	Ensino de função, Estilo de aprendizagem de Kolb, Metodologia de ensino, Revisão integrativa

Metodologia e objetivo	Conclusões
O estudo analisou artigos e dissertações sobre o Estilo de Aprendizagem de Kolb. Para a pesquisa, foram utilizadas palavras-chave específicas e bases de dados como CAPES, Google Scholar e Scielo, excluindo trabalhos repetidos ou que não se encaixavam no seu objetivo. O objetivo foi investigar a influência dos Estilos, das Metodologias de Ensino e das tecnologias no ensino de funções	Os estilos de aprendizagem e as metodologias de ensino são importantes para o desenvolvimento cognitivo e para a transformação da educação. É essencial reconhecer que os estudantes têm diferentes estilos de aprendizagem, o que pode influenciar no seu processo. Os professores devem se interessar em aplicar recursos tecnológicos e utilizar elementos conceituais em suas aulas e planejamento

T7:

Título/autor/ano/tipo de trabalho	Palavras-chave
Uma revisão sistemática sobre metodologias ativas no ensino da matemática: Aprendizagem ativa, protagonismo dos estudantes Carvalho (2021) Artigo	Educação, Exatas, Curriculares, Conteúdos

Metodologia e objetivo	Conclusões
Artigos de 2020 a junho de 2021 foram pesquisados nas bases de dados Scielo e Google Acadêmico, selecionando apenas os escritos em português sobre a aplicação de metodologias ativas no ensino de matemática. O objetivo foi analisar a importância dessas metodologias para o ensino da matemática na Educação Básica, mais precisamente no Ensino Fundamental	Atualmente, as metodologias ativas no ensino estão progredindo e estimulando as competências emocionais dos discentes, tornando-os protagonistas do seu próprio aprendizado. O professor deve considerar seus valores sociais ao aplicar técnicas de aprendizagem ativa, mesclando-as com métodos tradicionais de acordo com o conteúdo lecionado, para atingir mais alunos de forma eficaz

Estes são os trabalhos primeiramente selecionados no Google Acadêmico. Seguem quadros com as informações sobre os que foram citados por eles, e que também foram utilizados:

Rev1:

Título/autor/ano/tipo de trabalho/trabalho que o citou	Palavras-chave
Aplicações do Geogebra no ensino das funções polinomiais de primeiro e segundo grau Silva (2018) Dissertação citada por T5	Software, Geogebra, Ensino de matemática, Tecnologias aplicadas ao ensino

Metodologia e objetivo	Conclusões
Foram formados 2 grupos de 20 alunos os quais receberam diferentes métodos de ensino: um fez um MiniCurso de Geogebra e o outro teve aulas de monitoria sem uso de tecnologia. Os alunos responderam a questionários sobre a importância da matemática em suas vidas, o uso do Geogebra e conhecimentos sobre funções. O objetivo foi destacar a importância de recursos tecnológicos no desenvolvimento cognitivo dos alunos e no suporte aos professores	Os recursos do Geogebra melhoram a compreensão dos conceitos e promovem a autonomia. As aulas com o software são mais estimulantes do que as tradicionais, tornando o aprendizado mais agradável. No entanto, a monitoria teve resultados menos satisfatórios, com os alunos considerando-a ineficaz devido à metodologia semelhante às aulas regulares

Rev2:

Título/autor/ano/tipo de trabalho/trabalho que o citou	Palavras-chave
Ensino e aprendizagem de funções trigonométricas por meio do software Geogebra aliado à modelagem matemática Melo e Fireman (2016) Artigo citado por T3	Ensino e aprendizagem, Geogebra, Modelagem matemática, Funções trigonométricas

Metodologia e objetivo	Conclusões
Trata-se de uma sequência didática de ensino de funções trigonométricas que foi dividida em 5 etapas, incluindo análise do conhecimento dos alunos, oficina sobre o Geogebra, análise dos parâmetros das funções, modelagem matemática, modelagem da altura da maré e porcentagem de visualização da lua em suas fases. O objetivo foi destacar a importância da matemática no dia-a-dia, utilizando o Geogebra e a modelagem matemática	O Geogebra é utilizado na modelagem matemática das funções seno e cosseno, trazendo benefícios como aproximação de áreas do conhecimento, despertando o interesse dos alunos e melhorando a compreensão dos conceitos. A pesquisa é relevante para a Educação Matemática, mostrando novas possibilidades de ensino e esperando sua disseminação entre os professores

Rev3:

Título/autor/ano/tipo de trabalho/trabalho que o citou	Palavras-chave
<p>Funções: Propostas para o ensino na educação básica através do software Geogebra e da resolução de problemas Cunha (2017) Dissertação citada por T5</p>	<p>Funções, Geogebra, Educação básica, Resolução de problemas</p>

Metodologia e objetivo	Conclusões
<p>Foram elaboradas diversas atividades dinâmicas e interessantes de elaborar desenhos, combinando trechos de gráficos de funções, além de 8 aplicações interdisciplinares em situações cotidianas. Ao final de cada situação, são propostas 3 atividades, além de comentários sobre os assuntos explorados. O objetivo foi apresentar metodologias diferenciadas para melhorar a compreensão dos conceitos e aumentar a motivação no estudo das funções</p>	<p>É importante mostrar as aplicações das funções em diversas áreas do conhecimento, sugerindo atividades contextualizadas para auxiliar os professores, e incentivar os alunos a trazerem situações do cotidiano que as envolvam. Isso melhora a qualidade do ensino e é um ótimo recurso para professores</p>

Rev4:

Título/autor/ano/tipo de trabalho/trabalho que o citou	Palavras-chave
<p>Investigação do uso de ambientes gráficos no ensino de funções elementares no ensino médio: Explorando o software Geogebra Ramos (2018) Dissertação citada por T5</p>	<p>Ambientes gráficos, Aprendizagem, Ensino, Funções</p>

Metodologia e objetivo	Conclusões
Foi realizada uma intervenção em 4 etapas, com carga horária de 24 horas/aula, onde houve uma revisão bibliográfica, sequências didáticas, aplicações de questionários e análise dos dados coletados. O objetivo era avaliar a percepção da qualidade do ensino com uso do Geogebra, discutir os fatores determinantes de sua adaptação ao estudo de funções e identificar suas contribuições no Ensino Médio	A utilização das TICs na educação aumenta a motivação para aprender, facilitando a compreensão de conceitos. O uso de softwares específicos melhorou a percepção dos discentes e tornou os cálculos mais acessíveis, alcançando os objetivos

Rev5:

Título/autor/ano/tipo de trabalho/trabalho que o citou	Palavras-chave
O inventário de estilos de aprendizagem de David Kolb e os professores de ciências e matemática: Diálogo sobre o método de ensino Assunção e Nascimento (2019) Artigo citado por T6	Estilos de aprendizagem, Ensino de ciências e matemática, David Kolb, Diálogo

Metodologia e objetivo	Conclusões
Esta pesquisa investigou o ensino de ciências e matemática, em Recife e Pernambuco, entrevistando alunos do terceiro ano do ensino médio e professores. Os dados foram coletados através de questionários para avaliar as habilidades dos alunos e identificar o estilo de aprendizagem predominante, além de analisar a reciprocidade entre modos de aprender e ensinar. O objetivo foi estudar as opiniões dos professores sobre as diferenças na forma de aprender	Os professores não possuem conhecimento prático das diferenças individuais na forma de aprender, o que afeta as relações de ensino e aprendizagem no Brasil, especialmente nas disciplinas ciências e matemática. Isso contribui para uma percepção negativa delas

Rev6:

Título/autor/ano/tipo de trabalho/trabalho que o citou	Palavras-chave
<p>O uso do software Geogebra como ferramenta de apoio no ensino das funções afim e quadrática</p> <p>Sousa (2016)</p> <p>Dissertação citada por T5</p>	<p>Geogebra, Ensino de Matemática, Funções Afins, Funções Quadráticas</p>

Metodologia e objetivo	Conclusões
<p>A pesquisa analisou a habilidade computacional e os conhecimentos prévios dos participantes, com foco em funções afim e quadráticas. Também utilizou o Geogebra para construir gráficos e oferecer orientações. O objetivo foi fornecer um material de consulta para alunos e professores interessados em aprimorar sua prática ou aprofundar seus conhecimentos sobre o tema</p>	<p>Os resultados mostraram que o Geogebra teve impactos positivos, melhorando a visualização das funções e aumentando o engajamento. Recomenda-se que os professores o incorporem em suas aulas, visto que é facilitador e motivador na construção do conhecimento</p>

Rev7:

Título/autor/ano/tipo de trabalho/trabalho que o citou	Palavras-chave
<p>Uma aplicação do Geogebra no ensino de função quadrática</p> <p>Barbosa (2018)</p> <p>Dissertação citada por T5</p>	<p>Educação, Metodologia, Laboratório de Matemática, Geogebra</p>

Metodologia e objetivo	Conclusões
<p>Trata-se de um estudo com 4 turmas do primeiro ano do ensino médio, que avaliou o uso do Geogebra em sala de aula em três etapas, para verificar sua importância na aprendizagem de matemática e física. Foram aplicadas avaliações diagnósticas, seguidas de sequências didáticas e uma avaliação final.</p>	<p>O acompanhamento do professor no projeto de matemática resultou em melhorias nos rendimentos acadêmicos dos alunos, que se mostraram mais comprometidos com os estudos em diversas disciplinas. A escola teve melhorias nos índices, com redução das reprovações e integração do projeto de</p>

O objetivo foi melhorar a compreensão das funções quadráticas e o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos, aumentando sua participação	monitoria em todas as matérias. Aulas tradicionais foram importantes para introduzir conceitos antes de serem trabalhados com softwares
---	---

Uma vez selecionados, foram extraídos trechos relevantes durante a leitura, e foi possível reunir informações que permitem refletir sobre as três perguntas de pesquisa com todos estes trabalhos. Os trechos foram comparados para identificar semelhanças nas respostas de diferentes autores, especialmente nas experiências de quem realizou atividades práticas. Isso possibilitou diálogos entre eles, alinhando-se às visões sobre aprendizagem significativa. Assim, foi possível não apenas reunir informações para refletir sobre as questões, mas também alcançar os objetivos do trabalho de forma satisfatória.

Seguem os resultados que, com base na bibliografia pesquisada, reúnem informações que ajudam a refletir sobre essas três questões: Quais são as vantagens didáticas do Geogebra sobre os métodos tradicionais de ensino de funções? Quais são seus impactos na aprendizagem do tema e no desempenho escolar? Quais métodos de avaliação permitem avaliar com precisão esses impactos?

4. RESULTADOS

4.1 Vantagens do Geogebra em relação às aulas tradicionais, bem como seus impactos na aprendizagem de funções e no desempenho escolar

Uma das vantagens do Geogebra em relação às aulas tradicionais, é que além do estudante deixar de ser um receptor de informações que apenas ouve, ele é construtor do próprio conhecimento, desenvolvendo o senso crítico e reflexivo (Carvalho, 2021) tendo sua capacidade intelectual valorizada (Pereira, 2018).

Isso o prepara para viver em sociedade e exercer a cidadania, lidando com questões desafiadoras do cotidiano. Para isso, é necessário ser reflexivo, crítico e habilidoso na resolução de problemas. O Geogebra contribui para isso, tornando as aulas dinâmicas e promovendo interações sobre os conteúdos, além de estimular aspectos emocionais dos discentes (Carvalho, 2021), gerando entusiasmo e ansiedade para responder questões.

Em aulas com tecnologias digitais, costuma ocorrer uma falta de recursos que gera uma necessidade de atividades em grupos, onde os membros compartilham um mesmo dispositivo. Sendo assim, os discentes se tornam mais envolvidos e participativos, não vendo a passagem do tempo. O professor interfere menos nas atividades e geralmente se manifesta apenas para tirar dúvidas caso surjam.

As tecnologias digitais, em especial o Geogebra, podem agilizar os cálculos e auxiliar na resolução de problemas (Brandão, Carvalho e Amaral, 2022; Padovani et.al, 2022; Silva, 2018), não apenas modelando problemas do cotidiano, mas também possibilitando novas formas de pensar e agir. Por conta de suas funcionalidades, ele faz com que o discente seja mais autônomo para verificar fatos e ideias, principalmente geométricas.

Nas atividades propostas por Sousa (2016), verifica-se que seu uso pode aumentar tanto a precisão ao esboçar gráficos quanto a chance de acerto em um exercício ou atividade em que o esboço é necessário, evitando erros causados por falta de domínio de conhecimentos matemáticos. Com o software, é possível digitar uma equação e obter sua representação gráfica, o que facilita o aprendizado de conceitos.

Durante a resolução de problemas, o educando exercita funções cognitivas como criatividade, inteligência e raciocínio, estimulando sua autonomia, seu senso investigativo e seu raciocínio lógico, o que melhora o desempenho e a qualidade da aprendizagem, através de respostas rápidas e objetivas (Ramos, 2018).

Confirma-se que o Geogebra permite o estudo de conceitos e propriedades de funções de forma dinâmica e experimental, verificando conjecturas e identificando erros durante o processo de resolução de exercícios, caso hajam. O software torna os alunos mais motivados em relação às ciências exatas, uma vez que elas ficam mais tangíveis e próximas do cotidiano, potencializando a aprendizagem e melhorando os resultados (Silva, 2018). Quando é combinado com a modelagem matemática, conecta teoria e prática, o que também potencializa a aprendizagem. De acordo com Padovani et.al (2022):

O uso de metodologias ativas e especialmente da resolução de problemas no processo ensino-aprendizagem pode favorecer o envolvimento dos alunos em situações de ensino, possibilitando diferentes formas de demonstrar **autonomia, criatividade, participação e colaboração**. (Padovani et.al, 2022, p.56)

Os autores destacam que as tecnologias melhoram a capacidade de formulação, compreensão, e elaboração de estratégias, despertando o interesse pela matemática. Ramos (2018) diz, sobre o Geogebra:

A utilização desse software no estudo das funções elementares é de grande aplicabilidade, uma vez que é **acessível, gratuito, de fácil manuseio e facilitador** no que diz respeito à construção de gráficos sendo tratado assim como um recurso que possibilita a diminuição de certas deficiências enfrentadas na área da matemática. (Ramos, 2018, p.53)

Isto é, ele possui inúmeras vantagens que facilitam o aprendizado de funções, diminuem as deficiências em matemática e tornam sua aprendizagem mais prazerosa, principalmente quando estimula a interação e a troca de conhecimentos. Pesquisas mostram que ele também permite testar hipóteses e validar conjecturas, já que permite construir e movimentar imagens de forma dinâmica (Pereira, 2018; Melo e Fireman, 2016).

Pereira (2018) cita diversos recursos que podem ser utilizados como Planilhas de Cálculo, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculos Simbólicos. Isso mostra que o Geogebra torna a aprendizagem de funções e da matemática em geral mais ampla, possibilitando um estudo mais aprofundado.

Não apenas isso. Também permite explorar a imaginação e a criatividade, além de conectar a matemática com a realidade. Cunha (2017) mostra que nele é possível construir desenhos de paisagens e de árvores, combinando gráficos de diversos tipos de função.

As autoras Oliveira e Brandt (2022), que tratam das funções afim, defendem que a aula tradicional aborda apenas a passagem da forma algébrica para a geométrica, gerando dificuldades com o inverso:

Na análise das pesquisas mapeadas, constatou-se que a maioria dos estudantes da Educação Básica apresenta dificuldades em articular as diferentes representações da função afim, em especial, a conversão do registro gráfico para o algébrico, algo que ocorre devido à forma de abordagem desse objeto matemático (Oliveira e Brandt, 2022, p.18)

Elas mostram que o Geogebra pode sanar essa dificuldade, quando são observadas as transformações que ocorrem nos gráficos ao movimentar os controles deslizantes. Trabalhar com várias representações de um mesmo objeto melhora sua compreensão, melhorando também a modelagem e a resolução de problemas (Oliveira e Brandt, 2022). No caso de funções, fica mais simples perceber que a função em si não é sua equação e nem seu gráfico, mas um conjunto de pares ordenados.

Através do Geogebra, é possível ver a conexão da matemática com outras áreas do conhecimento: Temos como exemplo a arte, como é mostrado por Cunha (2017), e as ciências da natureza. Ao exercitar, nas aulas de funções trigonométricas com os controles deslizantes, conceitos como período e amplitude, pode-se verificar suas aplicações em fenômenos periódicos e cíclicos, como por exemplo, as ondas sonoras, as alturas das marés e as fases lunares (Melo E Fireman, 2016). Isso torna a disciplina mais acessível.

Finalmente, os conceitos estudados passam a ter mais sentido e serem plenamente entendidos quando o educando é capaz de os aplicar na resolução de problemas complexos. Pode-se ver claramente que com o Geogebra, a aprendizagem da matemática ocorre de forma mais significativa, isto é, traz mais sentido aos conteúdos e conceitos estudados. Através de construções de desenhos com uso de gráficos, o Geogebra estimula o raciocínio e deixa os discentes engajados na tarefa de cumprir um desafio (Cunha, 2017), mostrando que é possível explorar a criatividade dos docentes para elaborar atividades que despertem o interesse e a participação ativa.

Além disso, pode-se concluir que ele facilita o aprendizado de conceitos cujo aprendizado pode não ser tão simples com o ensino tradicional, já que pelo vocabulário próprio da matemática que geralmente os alunos não dominam, aprender diretamente pelo professor pode ser mais difícil.

Segue a próxima seção, que discutirá métodos de avaliação que avaliam precisamente o impacto do software no aprendizado de funções, baseando-se nos autores que abordam o tema.

4.2 Métodos de avaliação capazes de avaliar o impacto do software no aprendizado de funções

Nesta seção, são apresentados métodos de avaliação aplicados por diferentes autores e suas conclusões. A partir deles, é possível criar ideias de avaliação que determinam precisamente os efeitos do software na aprendizagem.

No ensino de funções, é possível avaliar se cada tópico foi realmente aprendido, a fim de garantir a precisão dos resultados no processo. Barbosa (2018) e Silva (2018) sugerem exercícios que exercitem vários aspectos das funções simultaneamente, conectando diferentes informações.

Silva (2018), em sua prática, aplicou listas de exercícios a dois grupos: Um que aplicou o software Geogebra no estudo de funções afim e quadráticas, e outro que foi apenas submetido a uma monitoria de matemática, sem uso de tecnologias digitais. Os exercícios avaliavam diferentes competências e após serem corrigidos para os dois grupos, foram calculados os percentuais de acerto considerando as competências trabalhadas. Em seguida, eles foram ordenados em ordem crescente. Na sequência, foram calculadas variáveis estatísticas sobre as pontuações, como média e desvio padrão, que foram comparadas entre os dois grupos através de testes estatísticos.

Houve uma diferença significativa nas opiniões de cada grupo sobre os métodos: O que utilizou o Geogebra considerou que o software permite compreender melhor os mecanismos de construção de gráficos e as suas relações com os coeficientes da função. Já o que foi submetido à monitoria considerou as aulas não-atrativas, não muito diferentes das tradicionais e ineficientes.

Para verificar se essas opiniões costumam ocorrer em casos semelhantes, pode-se aplicar questionários em diferentes turmas onde foi dado o mesmo estilo de aula. Caso a turma tenha utilizado o software, deve se questionar a respeito das influências dos parâmetros nos gráficos, e também sobre as opiniões a respeito de seu uso em comparação com métodos tradicionais, bem como suas funcionalidades e as contribuições que pode trazer (Silva, 2018; Ramos, 2018).

Nas turmas que utilizariam o software, é possível praticar os conhecimentos sobre os efeitos dos parâmetros, como mostra Melo e Fireman (2016). Os autores propuseram atividades para praticá-los, onde se deveria ajustar uma função trigonométrica a um conjunto de pontos. A turma participou ativamente do processo de ensino-aprendizagem, debatendo questões cotidianas importantes:

O momento foi enriquecido por debates que surgiam durante as

modelagens como as discussões de qual o melhor dia e horário para tomar banho de mar, dada a altura da onda medida pela função encontrada para a altura da maré; se neste dia iríamos ter maré alta ou baixa e melhor dia de pesca observando ainda a altura da maré e as respectivas fases lunares via funções obtidas. (Melo e Fireman, 2016, p. 24)

A partir das linhas de raciocínio executadas durante as resoluções, foi possível avaliar se aprenderam bem conceitos relativos a funções trigonométricas e as influências dos parâmetros nos gráficos.

Nas aulas de qualquer tipo de função, é sempre possível utilizar problemas contextualizados para avaliar a aprendizagem. Cunha (2017) sugere o uso de diferentes tipos de funções em situações da vida real, como para avaliar o sistema de transporte mais vantajoso, escolher a proposta de emprego mais vantajosa, buscar o sucesso e evitar prejuízos em vendas, entre outros exemplos.

Semelhantemente a outros autores, Barbosa (2018) aplicou, em sua experiência, uma avaliação diagnóstica de problemas contextualizados e determinou quantos acertaram todas as questões, quantos erraram todas, quantos acertaram uma, quantos acertaram duas e assim sucessivamente.

O autor aplicou uma avaliação diagnóstica inicial que visava determinar os conhecimentos prévios para em seguida aplicar uma intervenção pedagógica e atividades para se realizar posteriormente. Ele descreve a terceira etapa da experiência, que ocorreu após a intervenção:

“Na terceira etapa, foi realizada outra avaliação diagnóstica que mostrou um crescimento de **confiança** e **participação** dos estudantes com o assunto, vários estudantes começaram a tentar resolver as questões e a questionar certas ideias entre si.” (Barbosa, 2018, p.32)

Tem-se aqui outra maneira de avaliar os efeitos do Geogebra na aprendizagem: Aplicando uma avaliação diagnóstica antes de iniciar as atividades com o software, e outra após seu término para verificar quais competências e habilidades foram adquiridas. Isso foi feito tanto por ele quanto por Ramos (2018).

Quando os discentes vêem aplicações da matemática em diversas situações da realidade, isso os motiva a buscar soluções por conta própria, simulando uma situação real que podem vivenciar. Assim, é mais fácil avaliar o conhecimento adquirido, principalmente quando é necessário aplicar diversos tipos de conhecimento sobre funções.

Após aplicar-se questionários avaliativos que avaliam competências e a qualidade da aprendizagem, também pode-se aplicar mais um questionário a respeito de como foi a experiência com o Geogebra e o que se percebeu sobre suas contribuições. Uma maneira de determiná-las é através de afirmações para se avaliar de 4 maneiras: “discordo totalmente”, “discordo parcialmente”,

“concordo parcialmente” e “concordo totalmente” (Ramos, 2018). Barbosa (2018) sugere uma pergunta simples que pode ser feita: “Por que o Geogebra melhorou a minha aprendizagem?”

Quanto à avaliação de conhecimentos de conteúdo, é importante o professor conhecer os estilos de aprendizagem de Kolb (Acomodador, Convergente, Assimilador e Divergente) e considerá-los na aplicação de questionários que avaliam competências, determinando o estilo de aprendizagem de cada aluno. Isso ajuda a elaborar questões adequadas para obter uma avaliação precisa. De acordo com Assunção e Nascimento (2016):

As informações obtidas sobre o **perfil do aluno**, de **como ocorre a sua aprendizagem**, ajudam na melhora da didática do professor aumentando a reciprocidade entre seu modo de ensinar e os modos de aprender do aluno. (Assunção e Nascimento, 2016, p.17)

Na pesquisa de Freitas, Manfredo e Cunha (2022), sobre as avaliações de matemática, verifica-se que elas devem ocorrer durante todo o período letivo e não apenas em dias de avaliações escritas que valem nota, além de ocorrer simultaneamente ao ensino e à aprendizagem, através de atividades propostas. Portanto, quando levantamos a ideia de uma reciprocidade entre os modos do educador ensinar e do educando aprender, incluímos também a avaliação.

É importante considerar a forma do aluno aprender, e também considerar e valorizar o que ele já sabe, como por exemplo, os conhecimentos matemáticos sobre funções, se a avaliação não utilizar o Geogebra, e os recursos do software, caso seja usado (Sousa, 2016). O ensino deve sempre partir da realidade dos discentes, considerando suas habilidades e competências (Carvalho, 2021).

Sousa (2016) mostra exercícios de esboçar gráficos de funções afim no mesmo plano cartesiano, que tenham o mesmo coeficiente angular ou o mesmo coeficiente linear, a fim de verificar a influência de cada um. O autor comparou o desempenho de dois grupos de alunos do Ensino Médio: Um que utilizou o Geogebra e outro que não. O que utilizou teve mais facilidade em executar as atividades, já que o uso facilitou a construção dos gráficos e a visualização dos efeitos dos parâmetros.

Quanto à avaliação da aprendizagem, os autores propõem avaliações diagnósticas antes e depois de intervenções com o software, comparando também desempenhos entre turmas que o utilizaram e outras que não utilizaram, além de utilizar exercícios que conectem diferentes informações e conceitos. Além disso, devem ser levados em conta os diferentes estilos de aprendizagem, avaliando a turma em todos os momentos, não apenas em dias de avaliações escritas que valem nota, sendo a avaliação algo prazeroso e sem pressões.

Resumidamente, são essas as reflexões sobre as três questões de pesquisa deste trabalho. Segue a próxima seção, que mostra em quadros os métodos de avaliação mais utilizados e quais trabalhos utilizam cada um, permitindo analisar as relações entre eles e suas frequências de utilização, evidenciando quais devem ser combinados para uma boa análise não apenas dos desempenhos, mas também de suas causas.

4.3 Análise dos métodos de avaliação

Seguem quadros que fornecem panoramas gerais sobre os métodos de avaliação de cada trabalho:

Uso de laboratório	Problemas contextualizados
Rev1, Rev4, Rev6 e Rev7	Rev1, Rev2 e Rev7
Conexões dos conceitos entre si e suas aplicações	Avaliações a priori e a posteriori
Rev2 e Rev7	Rev 4 e Rev7
Comparações de desempenhos entre grupos	Contagens de números de acertos
Rev1, Rev4 e Rev6	Rev6 e Rev7
Análises estatísticas	Pesquisa de opinião
Rev1 e Rev6	Rev1, Rev2, Rev4 e Rev6
Análise das obtenções de competências	Análise dos perfis dos alunos
Rev1 e Rev4	Rev1, Rev4 e Rev6

Analisando a quantidade de trabalhos que aplicaram cada um dos métodos, os mais utilizados foram o uso de laboratório e a pesquisa de opinião, ambos em quatro trabalhos, com Silva (2018) e Ramos (2018) os utilizando. Isso sugere que um ambiente laboratorial com computadores pode tornar a aprendizagem mais interessante, especialmente ao realizar uma pesquisa de opinião, onde a maioria dos discentes demonstra melhor desempenho e maior interesse pelo conteúdo, o que ocorreu na maioria dos casos.

Três trabalhos utilizaram problemas contextualizados, comparações de desempenhos e análise de perfis dos alunos. Silva (2018) aplicou os três métodos, enquanto Ramos (2018) e Sousa (2016) focaram apenas em comparações de desempenhos e análise de perfis. A combinação da análise de perfis com a pesquisa de opinião (Silva, 2018; Ramos, 2018), pode relacionar as opiniões dos alunos com suas afinidades em relação ao conteúdo e às metodologias, além de aspectos como realidade socioeconômica e experiências anteriores.

Como os três trabalhos investigam os perfis dos alunos, fica evidente que considerá-los é importante para uma boa avaliação e um ensino personalizado. Como Silva (2018) e Ramos (2018) utilizaram laboratórios e comparações de desempenhos, é importante utilizar métodos de ensino distintos com grupos de alunos distintos e comparar tanto seus desempenhos quanto suas opiniões sobre os métodos a que foram submetidos e o conteúdo, bem como sua contextualização na realidade.

As avaliações a priori e a posteriori, assim como as análises estatísticas, foram utilizadas em apenas dois trabalhos, indicando que, embora sejam métodos interessantes de avaliação, não são tão essenciais quanto outros mais comuns. É provável que comparar desempenhos entre grupos distintos de alunos seja uma alternativa mais eficaz do que avaliar o mesmo antes e depois do uso do software. Além disso, parece que na maioria dos casos, não há necessidade de procedimentos estatísticos como cálculo de médias e representações gráficas.

Os outros métodos utilizados por dois trabalhos tratam de avaliação por competências, entre elas a compreensão e aplicação de conceitos, e contagem de números de acertos. Isso evidencia que há uma maior importância em comparar desempenhos e métodos de ensino sobre o foco em competências específicas, podendo cada competência ser trabalhada em períodos de aula distintos. Os trabalhos mostram que o entendimento de conceitos é a mais importante e deve ser exercitada frequentemente.

Segue a próxima seção, que trará sugestões de atividades que podem ser realizadas nas aulas de funções com uso do software.

4.4 Sugestões de atividades

Nesta seção, são apresentadas quatro atividades que podem ser realizadas em aulas de funções com o Geogebra, de modo a exercitar o raciocínio, a verificação de conjecturas e também, a contextualização do conteúdo na realidade. As atividades são inspiradas em outras sugeridas por Gotzinger (2010) e Rezende, Pesco e Bortolossi (2012). As duas primeiras atividades permitem estudar de forma experimental propriedades das funções e as relações entre as representações algébrica, tabular e geométrica.

Atividade 1:

A atividade a seguir permite exercitar a verificação do coeficiente angular de uma função afim em sua forma tabular, os padrões que ocorrem nas coordenadas de pontos e suas relações com a forma algébrica. A BNCC (Brasil, 2018) propõe essas competências, e também a capacidade de relacionar diferentes registros do conceito de função. Por isso foi escolhida como uma boa atividade a ser proposta.

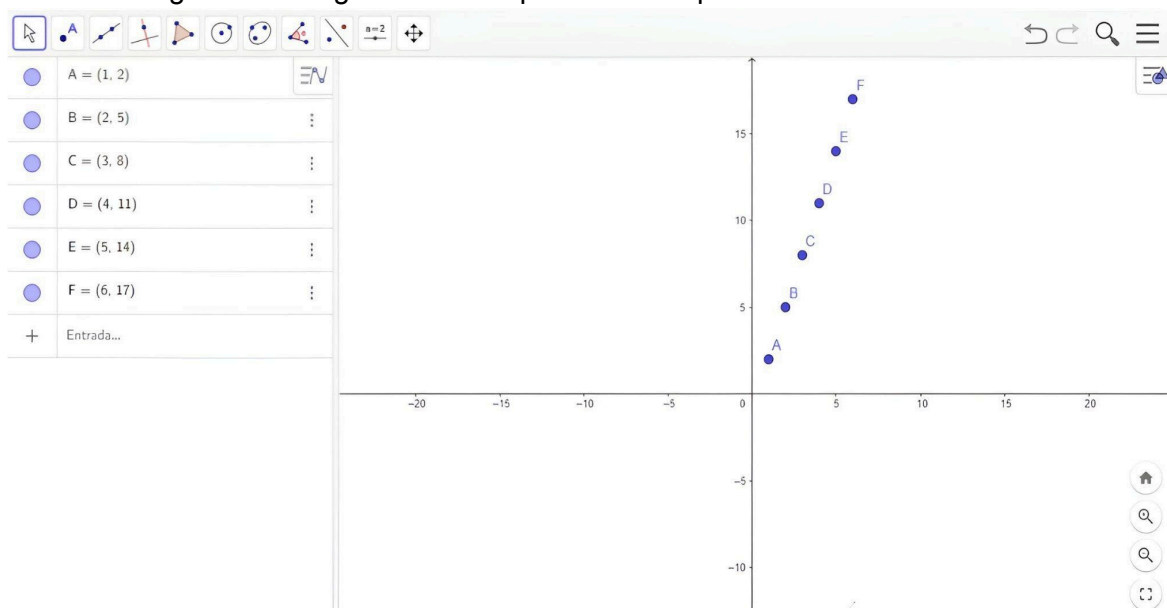
Nela, solicita-se que os alunos criem sequências de pontos tais que a abscissa é a sequência dos números naturais até determinado valor, e a ordenada segue uma progressão aritmética. Por exemplo:

(1,2), (2,5), (3,8), (4,11), (5,14), (6,17)

Pode-se observar que a sequência das abcissas é (1,2,3,4,5,6), isto é, os números naturais de 1 a 6, e a sequência das ordenadas é (2,5,8,11,14,17), uma progressão aritmética de primeiro termo igual a 2 e razão igual a 3.

Uma vez criadas diferentes sequências de pontos com essa característica, solicita-se que sejam marcados no Geogebra, digitando suas coordenadas na caixa de entrada, e que se verifique como estão posicionados entre si. Recomenda-se que todos os de uma mesma sequência criada possuam a mesma cor, para facilitar a análise.

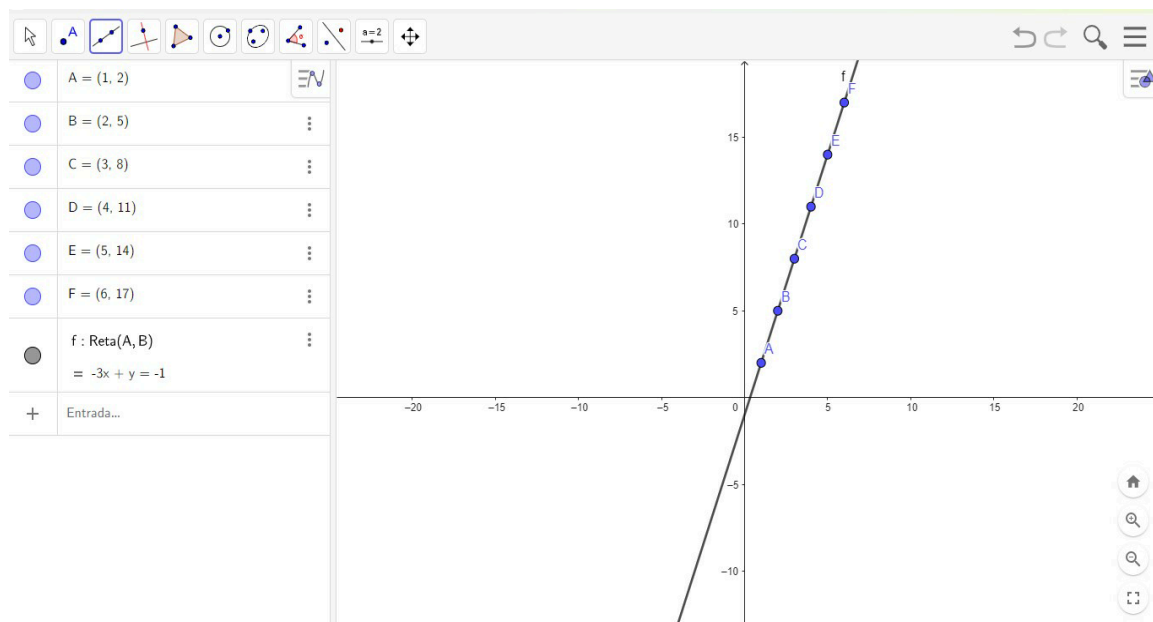
Figura 5 - Geogebra com os pontos da sequência marcados



Fonte: Autor

Os alunos perceberão que estão alinhados, isto é, existe uma reta que passa por todos eles. Ao utilizar o recurso “Reta” da barra de ferramentas, para construir a que passa por dois dos pontos, perceberão que também passará pelos outros.

Figura 6 - Geogebra com a reta que passa pelos pontos marcados



Fonte: Autor

Também se pode verificar isso algebricamente, uma vez que todos os pontos satisfazem à equação da reta, que é informada na janela de álgebra: $-3x+y=-1$.

Realizando essa experiência com diferentes sequências, primeiramente se suspeitará que os pontos sempre estarão alinhados. Para provar essa conjectura, sugere-se que os alunos sejam divididos em grupos e discutam entre si sobre como prová-la algebricamente. Em seguida, pode se iniciar uma discussão, com cada grupo contando como chegou, algebricamente, a essa conclusão.

Assim, eles aprenderão uns com os outros sobre como prová-la, e diversas maneiras de fazer isso, discutindo entre si. Uma delas é partindo de um formato genérico de todas as sequências possíveis: $(1,a)$, $(2,a+r)$, $(3,a+2r)$, $(4,a+3r)$, com “a” sendo o primeiro termo da progressão e “r” a razão, e verificando que a função que relaciona a abscissa à ordenada é dada por $f(x) = a+(x-1)r$, que é uma função afim.

O coeficiente angular dessa função é r, isto é, a razão da progressão. Ou seja, a inclinação da reta que passa pelos pontos é igual ao valor que é somado à ordenada ao somar uma unidade à abscissa.

Esta atividade pode ser usada para trabalhar a competência EM13MAT501 da BNCC (Brasil, 2018), que trata de percepção de padrões em coordenadas de pontos e sua representação algébrica. Nela, ao montar uma tabela com as coordenadas e representar os pontos no plano cartesiano, primeiramente se suspeita que estão alinhados. Ao expressar algebricamente a ordenada em função da abscissa, chega-se à conclusão de que é uma função afim, o que confirma a hipótese.

Uma atividade semelhante pode ser aplicada para outros tipos de função. Para as funções afim, a BNCC (Brasil, 2018) cita, entre suas competências, que os discentes devem ser capazes de associá-las com progressões aritméticas (PA) para deduzir fórmulas, identificar propriedades e resolver problemas.

Nesta atividade, exploram-se habilidades que, segundo ela, promovem o pensamento algébrico, que envolve a capacidade de expressar ideias em diferentes linguagens, convertendo textos em português sobre situações-problema em linguagem matemática e representando conceitos através de diversos registros.

Atividade 2:

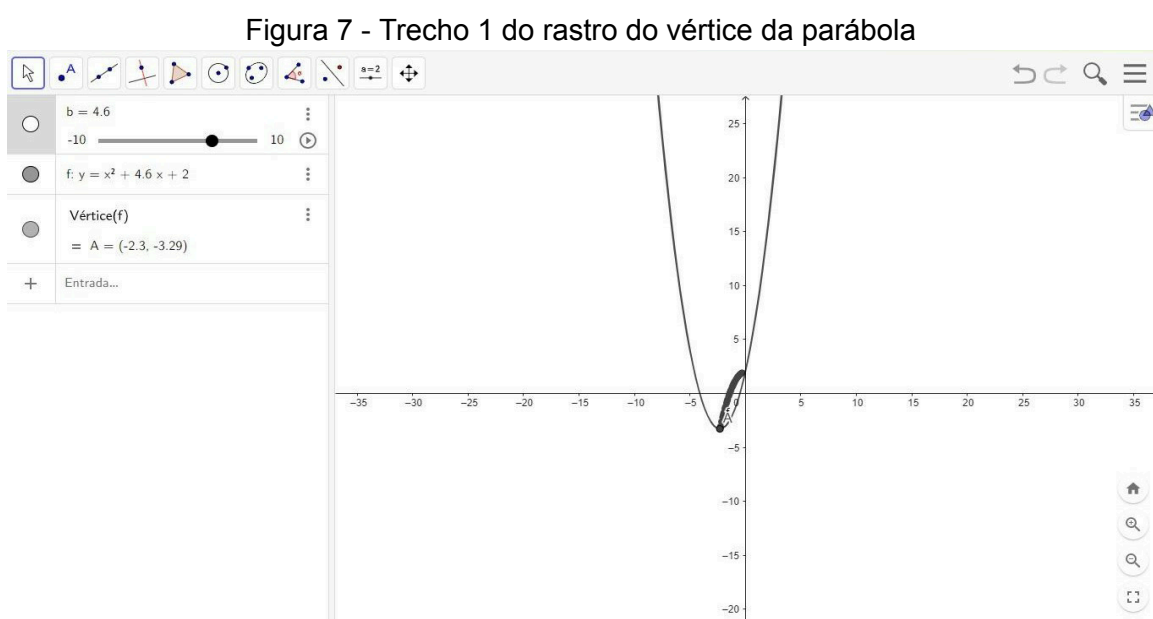
A atividade a seguir busca exercitar as propriedades dos coeficientes de uma função quadrática, com foco especial no coeficiente b, que não é muito bem compreendido. Ela permite deduzir intuitivamente sua propriedade, a partir das do rastro parabólico do vértice. Assim, os discentes exercitam seu raciocínio e a

capacidade de conectar informações. Por isso, foi escolhida como uma boa atividade a ser proposta, principalmente por facilitar o entendimento do coeficiente b .

Seu objetivo é mostrar que ao inserir no Geogebra uma função quadrática com os coeficientes “ a ” e “ c ” fixos e o coeficiente “ b ” variável, a trajetória do vértice da parábola ao se alterar o coeficiente b também será uma parábola. Além disso, essa parábola sempre tem a concavidade invertida e o eixo y como eixo de simetria.

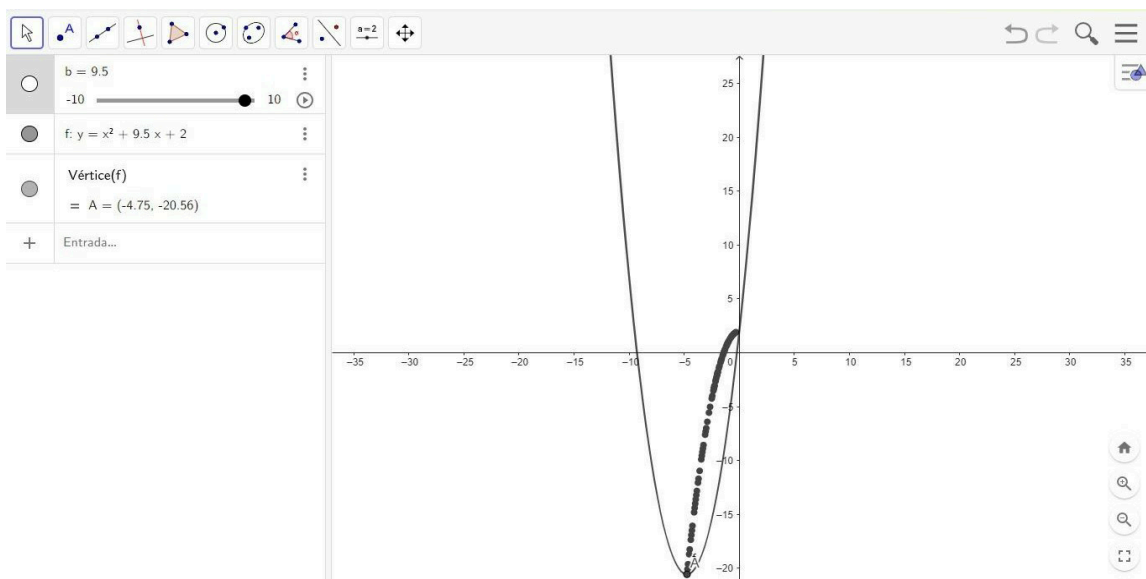
Inicialmente, solicita-se que os alunos digitem na caixa de entrada uma função do 2º grau com apenas os coeficientes “ a ” e “ c ” fixos, por exemplo, $y=x^2+bx+2$ ($a=1$ e $c=2$). Em seguida, que usem o recurso “Otimização” da barra de ferramentas para marcar o vértice da parábola (que nesse caso, será um ponto de mínimo). Uma vez marcado, suas coordenadas aparecerão na Janela de Álgebra. Depois solicita-se que vão às suas configurações e marquem a opção “Exibir Rastro”, para que a sua trajetória ao mover o controle deslizante do coeficiente b , seja marcada. Em seguida, solicita-se que o movimentem e verifiquem que o rastro deixado também será uma parábola.

Seguem 4 imagens que mostram a trajetória já descrita pelo vértice quando o valor de b está em um determinado valor, no controle deslizante, ao movimentá-lo primeiro para a direita e depois para a esquerda:



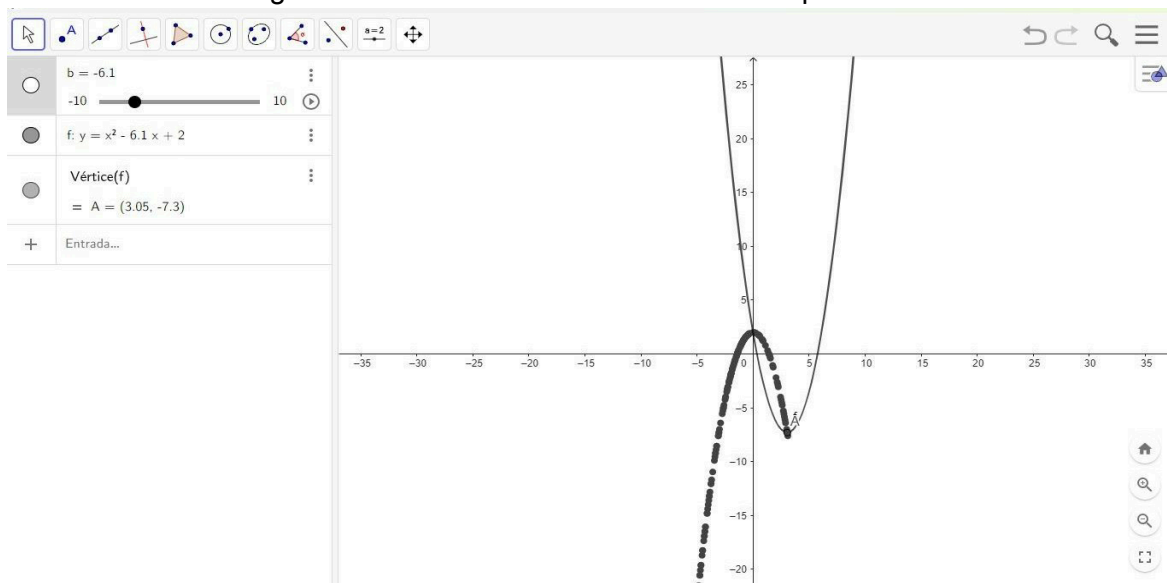
Fonte: Autor

Figura 8 - Trecho 2 do rastro do vértice da parábola



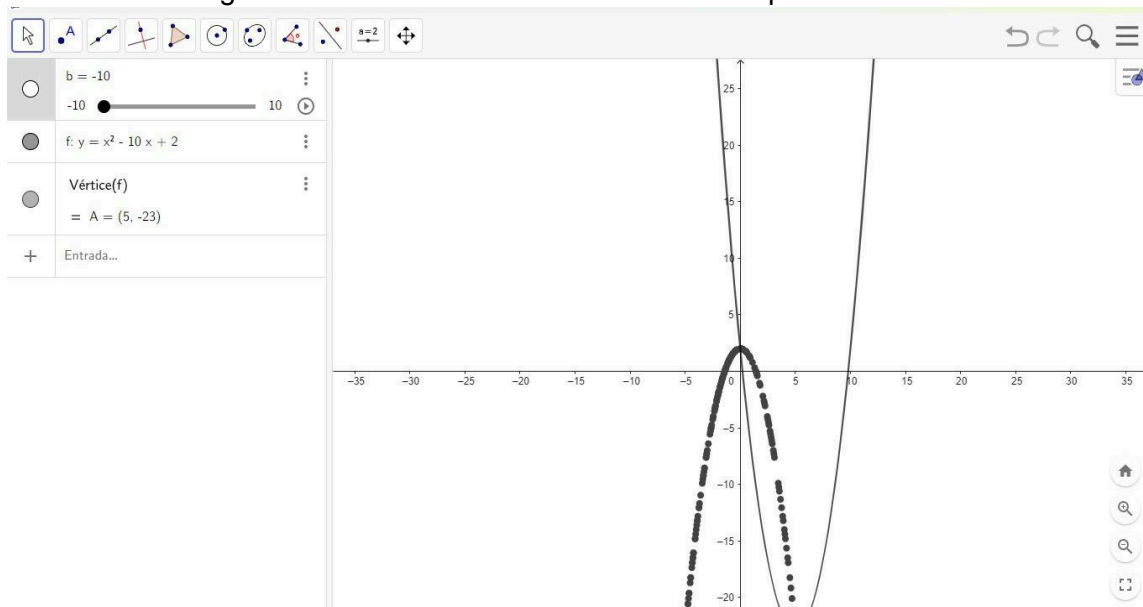
Fonte: Autor

Figura 9 - Trecho 3 do rastro do vértice da parábola



Fonte: Autor

Figura 10 - Trecho 4 do rastro do vértice da parábola



Fonte: Autor

Isso parece sugerir que é uma parábola. Ao repetir esse procedimento com diferentes equações do mesmo tipo, por exemplo $y = -2x^2 + bx + 3$, e com parábolas de concavidades diferentes (Tanto para cima quanto para baixo), será visto que as trajetórias dos vértices serão parábolas com concavidades invertidas, e simétricas em relação ao eixo y.

Da mesma forma que na atividade anterior, pode-se sugerir que os alunos sejam divididos em grupos e discutam entre si sobre o por quê isso aconteceu com todas as equações digitadas, procurando formas de concluir algebricamente que sempre ocorre. Depois o professor e toda a turma discutem, aprendendo com as discussões, da mesma forma que na atividade anterior.

Uma forma de provar essa conjectura, é utilizar as fórmulas das coordenadas dos vértices:

$$x = -\frac{b}{2a} \text{ e } y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Nelas, pode-se isolar a variável b na equação do x (Já que é o coeficiente que não é constante na função) e substituir na equação do y , para escrevê-lo em função de x e dos outros coeficientes (no caso, a e c). A função obtida descreve a trajetória do vértice ao modificar o valor do coeficiente b , uma vez que é obtida a partir das equações de suas coordenadas. Essa função será dada por:

$$y = -ax^2 + c$$

Pode-se perceber que é uma função do 2º grau. Portanto, seu gráfico é uma

parábola. Como a variável x aparece apenas uma vez, e elevada ao quadrado, significa que é uma função par, ou seja, uma função tal que $f(x)=f(-x)$ para todo x real (uma vez que elevar números simétricos ao quadrado tem o mesmo resultado). Graficamente isso é uma simetria em relação ao eixo y . E como o coeficiente do termo quadrático é $-a$, isto é, o coeficiente do termo quadrático da função inicial com sinal invertido, significa que a concavidade é invertida. Assim, ficam provadas as conjecturas dadas inicialmente.

Pode-se sugerir que depois os alunos repitam a atividade, porém com o coeficiente “ a ” variável e os outros dois fixos, para que verifiquem e provem que a trajetória do vértice será uma reta.

As próximas duas atividades são atividades de problemas contextualizados que buscam exercitar a capacidade de relacionar os dados fornecidos e os dados pedidos por um problema com as variáveis de uma função, interpretando seus significados, além de relacionar o conteúdo trabalho com questões importantes do cotidiano. Sendo assim, elas podem desenvolver os sentidos crítico e reflexivo.

Atividade 3:

O problema a seguir trata do estudo do comportamento da temperatura de um forno, que quando é previsto, pode ajudar a planejar o preparo de uma receita culinária. Por isso, foi escolhido como uma boa sugestão de problema a ser abordado nas aulas de função quadrática. O Geogebra pode facilitar sua resolução. Segue o problema:

A temperatura ($T(t)$) de um forno em graus Celsius é dada pela função $T(t) = -2t^2+12t+20$, onde “ t ” é o tempo em horas.

- a) Qual será a temperatura do forno após 1 hora?
- b) Em que momentos a temperatura será de 36 graus Celsius?
- c) Em que momento a temperatura começará a diminuir?
- d) Qual a temperatura máxima?

Sugere-se que os alunos sejam divididos em grupos, utilizando o software para resolver o problema e discutindo sobre a sua interpretação. No seu caso, temos que a função dada é a temperatura de um forno em função do tempo. Isto é, a temperatura, sendo uma variável dependente, é uma variável que depende do tempo. E o tempo é uma variável independente.

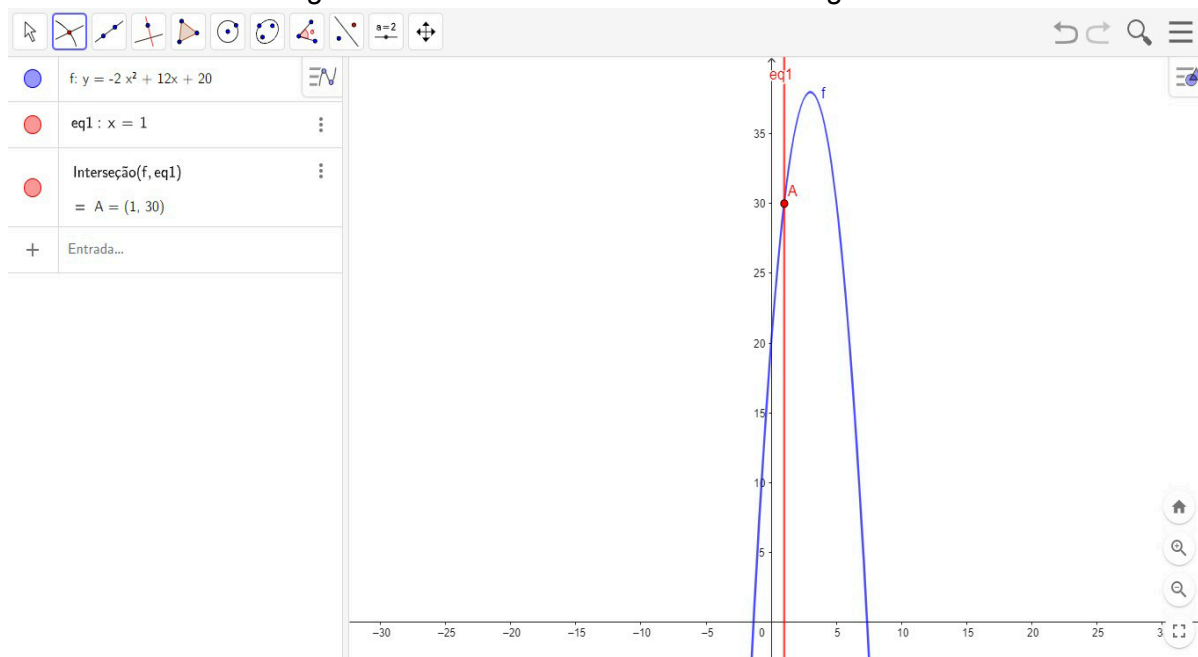
Logo, a variável x será o tempo e a variável y a temperatura, sendo

$y = -2x^2 + 12x + 20$ a função a ser digitada na caixa de entrada. Para responder cada item com uso do Geogebra, basta converter o que é pedido para a linguagem geométrica.

Pode-se claramente perceber que os itens a e b fornecem a coordenada x de um ponto pedindo a coordenada y correspondente ou vice-versa. Portanto, para respondê-los, basta determinar as intersecções de uma reta vertical e de uma horizontal com o gráfico. No caso dos itens c e d, deve-se determinar as coordenadas do ponto de máximo, já que é nele que a temperatura que estava aumentando passa a diminuir.

Para responder ao item a, basta pensar que quando estamos no tempo de 1 hora, significa que $x=1$ na função. Sendo assim, deve-se digitar a equação $x=1$ na caixa de entrada e determinar a intersecção com o gráfico, através do recurso “Intersecção de Dois Objetos”. Sua coordenada y será correspondente à temperatura após 1 hora, ou seja, o valor de y quando $x=1$. Ao aparecerem suas coordenadas na Janela de Álgebra, verifica-se a segunda (Que é sempre a coordenada y), e assim fica determinada a temperatura pedida no item a: 30 graus Celsius.

Figura 11 - Item “a” da atividade 3 no Geogebra

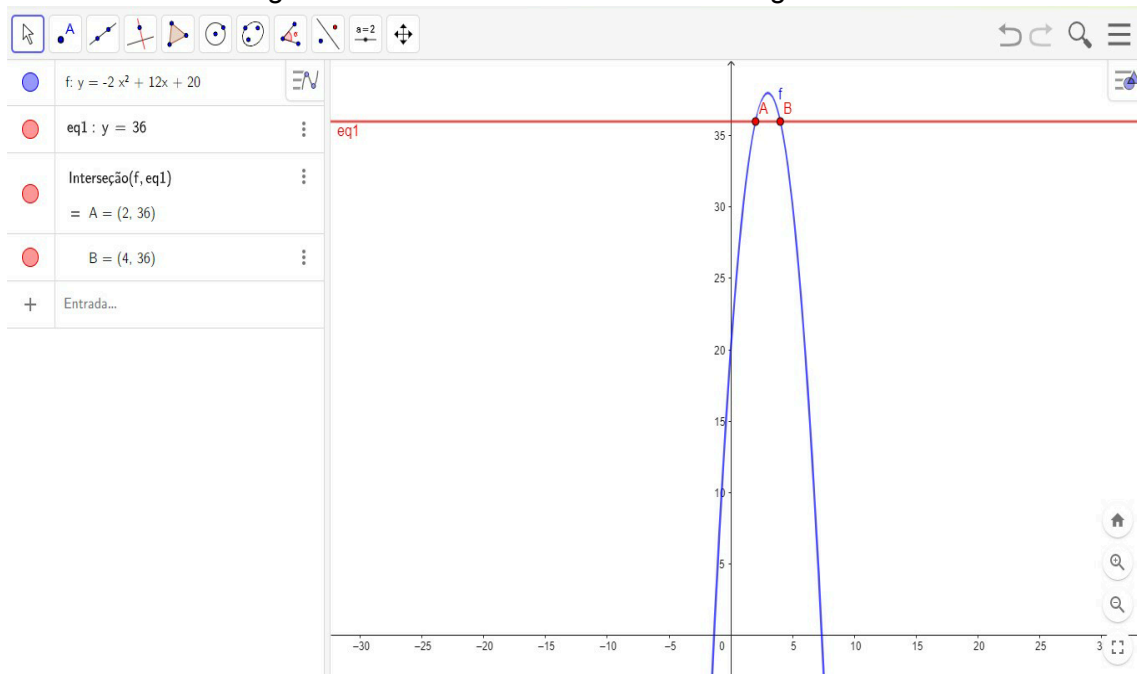


Fonte: Autor

No item b, é fornecida uma temperatura e são pedidos os momentos correspondentes, isto é, para quais valores de x temos $y=36$. Então, basta digitar na caixa de entrada a equação $y=36$ e determinar as intersecções, através do mesmo recurso usado no item a. Ao aparecerem suas coordenadas na Janela de

Álgebra, verifica-se a primeira de cada um (Que é sempre a coordenada x). Desse modo, ficam determinados os momentos pedidos no item b: Após duas horas e após 4 horas.

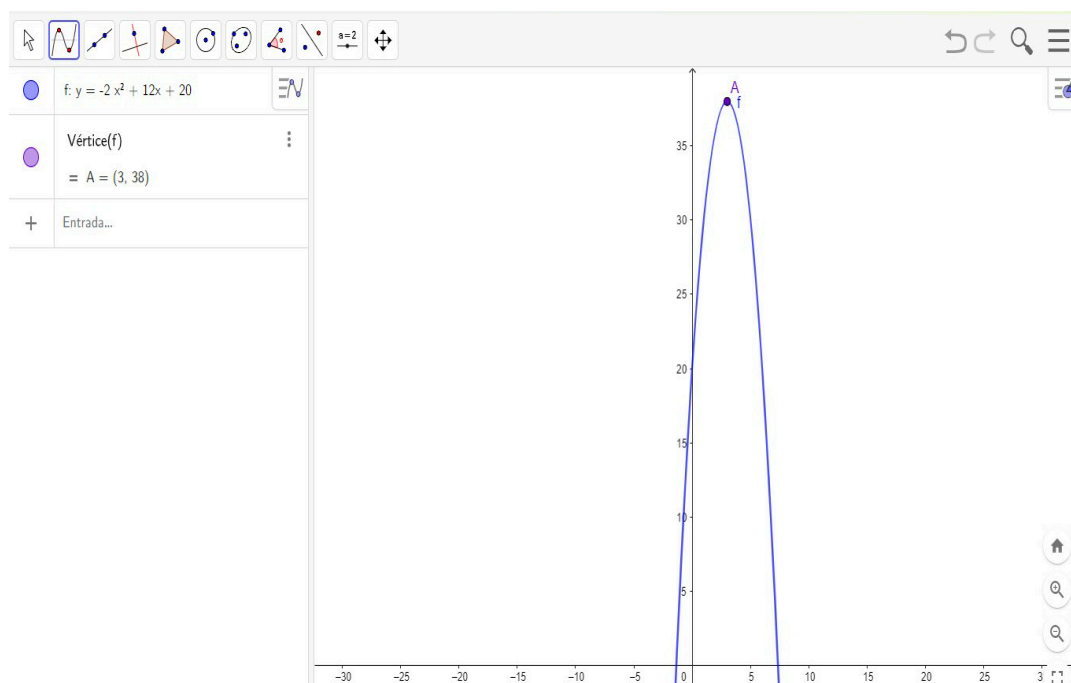
Figura 12 - Item b da atividade 3 no Geogebra



Fonte: Autor

No item c, é pedido o tempo em que a temperatura começa a diminuir. Sabe-se que em uma função, o ponto onde o valor de x deixa de aumentar e passa a diminuir é o ponto de máximo. Portanto, basta determiná-lo através do recurso “Otimização”. Como o item pede o tempo, que corresponde à abscissa, é ela que deve ser determinada na Janela de Álgebra. A partir disso, fica respondido o item c: A temperatura começa a diminuir após 3 horas.

Figura 13 - Itens c e d da atividade 3 no Geogebra



Fonte: Autor

O item d pede a temperatura nesse ponto. Como a temperatura corresponde à ordenada, é ela que deve ser determinada na Janela de Álgebra. E assim, fica respondido o item d: A temperatura máxima é de 38 graus Celsius.

Atividade 4:

O problema a seguir permite estudar a evolução de uma quantia em dinheiro investida, o que pode ajudar a decidir o melhor plano para alcançar um objetivo. A BNCC (Brasil, 2018) propõe que a função exponencial seja abordada em aulas de matemática financeira, promovendo a interpretação e a compreensão das variáveis envolvidas. Assim, o problema foi escolhido como uma boa sugestão para aulas desse tipo de função, sendo o Geogebra um bom recurso para facilitar sua resolução. Segue o problema:

Um investimento inicial de R\$ 5.000,00 é feito em uma conta que rende 5% ao ano, em juros compostos.

- a) Qual será seu valor após 10 anos?
- b) Em quantos anos dobrará de valor?
- c) A partir de que ano os juros aumentarão mais que R\$ 300,00?

Pode-se perceber que é um problema de juros compostos. No estudo do tema, temos a fórmula que relaciona o montante de um investimento (Valor acumulado após uma certa passagem de tempo) com o valor do investimento inicial, a taxa (Percentual que rende a cada unidade de tempo) e por fim, o tempo:

$$M = C * (1 + i)^t$$

Onde M é o montante, C é o capital, i é a taxa e t é o tempo. Já que um valor inicial aumentar em k% equivale a ser multiplicado por 1+k%, ela é facilmente deduzida.

Ao se propor o problema inicial, supõe-se que ela já tenha sido apresentada ou deduzida. No seu caso, a fórmula é dada por:

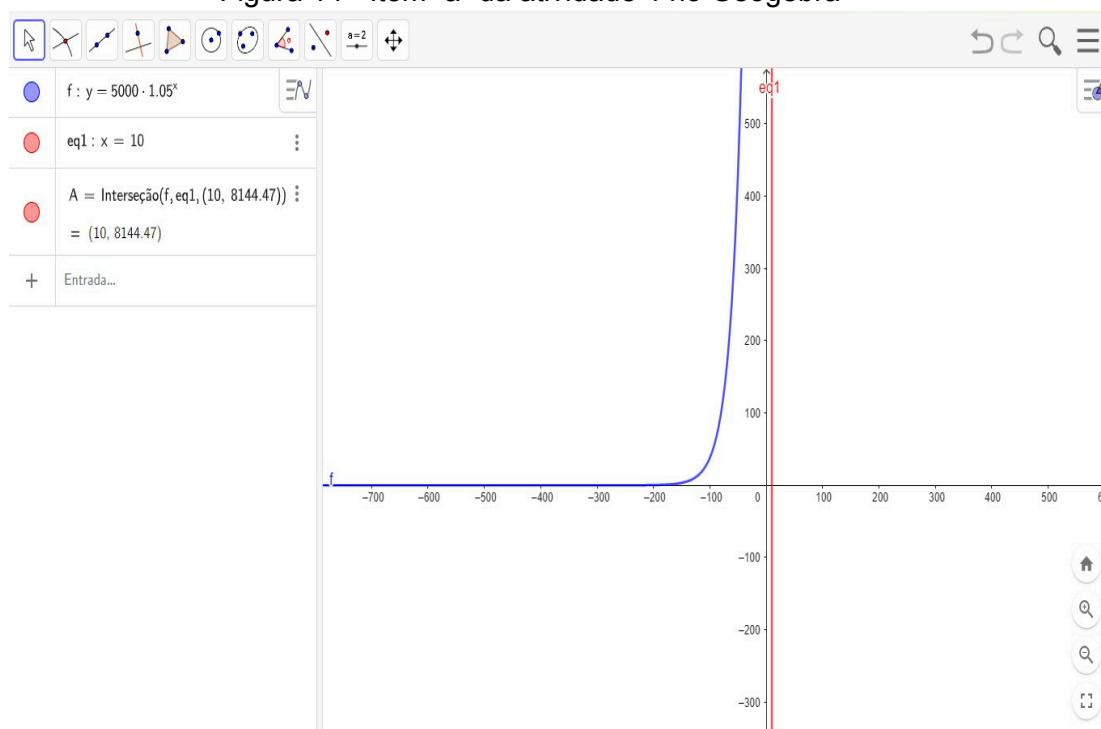
$$M = 5000 * (1,05)^t$$

Como o montante é uma variável dependente que depende do tempo e este, por sua vez, é uma variável independente, temos que a função a ser utilizada é $y=5000*(1,05)^x$. O que o item “a” pede corresponde ao valor de y quando $x = 10$.

Logo, basta digitar na caixa de entrada, primeiramente a equação $y=5000*(1,05)^x$ e depois a equação $x=10$. Em seguida, utilizar o recurso “Intersecção de Dois Objetos” para determinar a intersecção dos 2 gráficos. Quando suas coordenadas aparecerem na janela de álgebra, basta olhar a segunda (Que é a coordenada y).

Assim, fica respondido o item a: Após 10 anos, o valor será aproximadamente igual a R\$ 8.144,47 (Geralmente, as coordenadas de uma função exponencial são números irracionais. Portanto, arredondamos para duas casas decimais, já que estamos trabalhando com quantias em dinheiro).

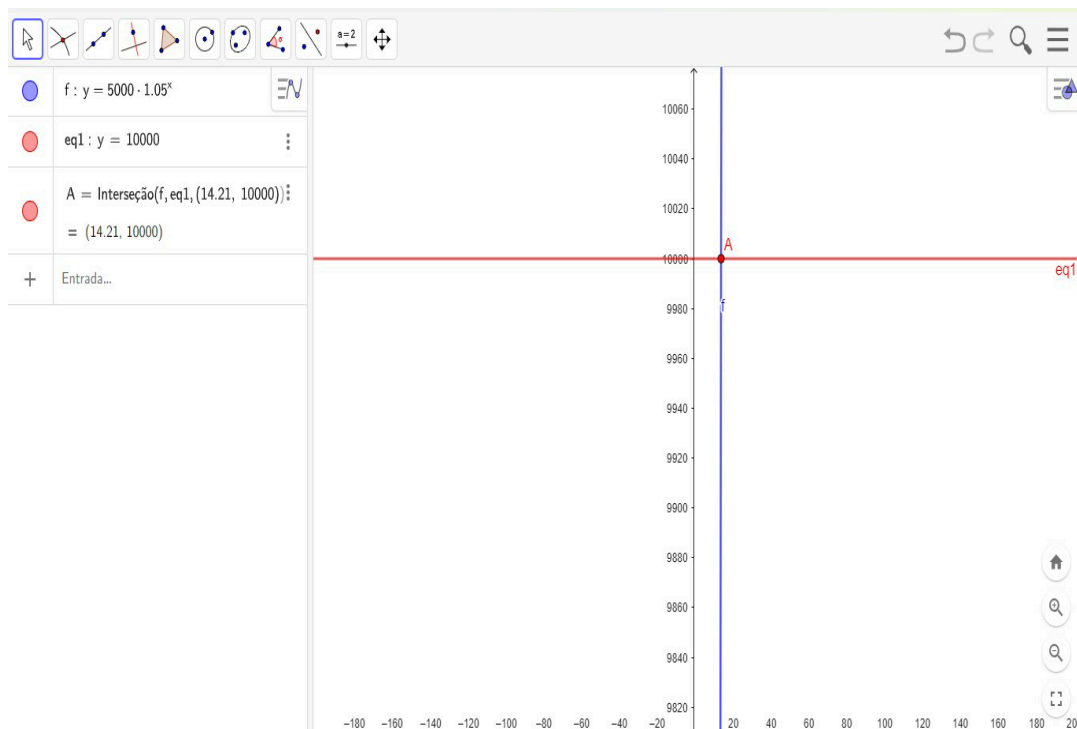
Figura 14 - Item “a” da atividade 4 no Geogebra



Fonte: Autor

Para responder ao item b, utilizamos o fato de que o valor inicial é R\$ 5.000,00. Como dobrará de valor, significa que o montante será de R\$ 10.000,00. Sendo assim, devemos determinar o valor de x tal que $y=10000$, de um modo análogo ao item a. Desse modo, obtém-se que o investimento dobrará de valor após aproximadamente 15 anos.

Figura 15 - Item b da atividade 4 no Geogebra

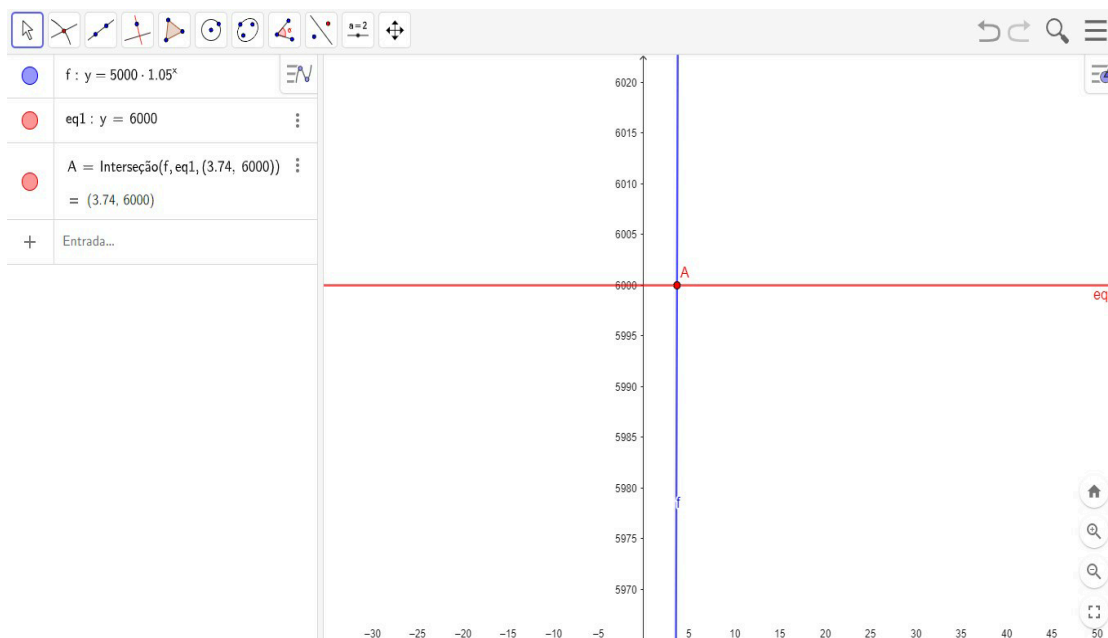


Fonte: Autor

Para responder ao item c, lembramos que a diferença entre o valor do montante em um ano m e seu valor no ano $m+1$ é igual a 5% do seu valor no ano m . Logo, devemos primeiramente responder: 5% de quanto é igual a R\$ 300,00? Para isso, basta resolver a equação $0,05y = 300$, cuja solução é $y = 6000$.

Então, devemos determinar em que instante de tempo o valor do montante é de R\$ 6.000,00, de forma análoga ao item b. Assim, conclui-se que será a partir do 4º ano, que os juros aumentarão mais que R\$ 300,00.

Figura 16 - Item c da atividade 4 no Geogebra



Fonte: Autor

5. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, é mostrado como as competências que, segundo os autores dos trabalhos consultados, o Geogebra traz para a aprendizagem, estão alinhados com as teorias educacionais e com documentos que norteiam a prática docente, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs).

Como já visto, esses trabalhos defendem que o Geogebra estimula os sentidos crítico e reflexivo, e também a habilidade de resolver problemas, que são competências necessárias para a cidadania. Os PCNs (Brasil, 1998) destacam que a aprendizagem é mais eficaz quando desenvolve essas habilidades. Debates e interações são formas de desenvolvê-las.

É uma habilidade da BNCC (Brasil, 2018) que os discentes sejam capazes de raciocinar e argumentar sobre ideias matemáticas e cotidianas, formulando e resolvendo diversos problemas de diferentes contextos, conectando a matemática a outras áreas do conhecimento e ao cotidiano. É uma habilidade a ser explorada e adquirida. Como o Geogebra torna as aulas mais dinâmicas e promove o trabalho colaborativo (Carvalho, 2021), ele trabalha essa habilidade.

O trabalho coletivo e colaborativo é recomendado na busca de soluções para problemas, para que os discentes interajam entre si e cheguem a um consenso sobre as soluções, aprendendo uns com os outros (BNCC, 2018; Ausubel, Novak e Hanesian, 1980; Freire, 1996). Assim como os PCNs (Brasil, 1998), a BNCC (Brasil, 2018) também propõe a habilidade de resolução de problemas, que é uma competência que o Geogebra traz segundo alguns autores, além de agilizar os cálculos.

Ela destaca que a atividade matemática funciona com questionamentos, investigações, demonstrações e contra-exemplos. Para estimular e exercitar tais habilidades, ela afirma que os discentes:

[...] devem mobilizar seu modo próprio de **raciocinar, representar, comunicar, argumentar** e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados (BNCC, 2018, p. 529)

Como o software facilita a compreensão de conceitos e diferentes representações (Ramos, 2018; Oliveira e Brandt, 2022), exercitando funções cognitivas, ele é uma excelente ferramenta para adquirir habilidades importantes.

Todas essas habilidades facilitam o aprendizado de propriedades das funções e seus gráficos, o que é defendido não apenas por Melo e Fireman (2016), mas também pela BNCC (Brasil, 2018) e pelos PCNs (Brasil, 1998). O Geogebra traz essas habilidades através de diversos recursos disponíveis, entre

os principais os controles deslizantes.

A BNCC (Brasil, 2018) afirma que os educandos devem aprender a converter entre os diferentes registros de representação de um mesmo objeto e expressar respostas através deles, em suas resoluções. Segundo ela, a conversão de registros é importante quando alguns aspectos do objeto só podem ser observados e compreendidos através de um deles. Oliveira e Brandt (2022) defendem que o Geogebra ajuda na compreensão e na conversão de diferentes registros do conceito de função. Portanto, ele permite adquirir mais uma competência importante da BNCC (Brasil, 2018).

Além disso, ela propõe competências que exigem a prática de conversões entre registros, para estudar suas características. Elas são exigidas para diversos tipos de função, entre elas a função afim, a função quadrática, e também as funções exponencial e logarítmica, que são inversas uma da outra:

Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. (BNCC, 2018, p. 539)

Essa competência pode ajudar a compreender o conceito de função inversa e como as funções inversas funcionam.

A partir do momento em que se aprende o verdadeiro significado do conceito de função e as conversões entre seus diferentes tipos de representação, adquirem-se as competências EF07MA13 e EF09MA06, que tratam de compreender plenamente a ideia de variável, diferenciando-a da de incógnita, de enxergar as funções como uma dependência entre duas variáveis e utilizar suas diferentes representações para resolver problemas.

Assim como os diversos tipos de representação do conceito de função devem ser explorados no ensino do conteúdo, também o devem ser nas avaliações da aprendizagem (BNCC, 2018), para compreender melhor a linha de raciocínio seguida para resolver os problemas propostos, verificando se tudo foi compreendido plenamente. Não apenas Sousa (2016) enfatiza a importância de reconhecer os conhecimentos prévios dos discentes, mas também a BNCC (Brasil, 2018), que considera essencial a conexão entre as habilidades a serem adquiridas e as já existentes, bem como suas contribuições para futuras aprendizagens.

Resumidamente, podemos concluir que o Geogebra traz diversos benefícios para a aprendizagem, e muitos deles são citados em comum entre diferentes autores, sendo basicamente os mesmos. Como foi observado, todos

eles ajudam a cumprir competências exigidas por documentos importantes como a BNCC (Brasil, 2018) e os PCNs (Brasil, 1998), que propõem o uso de tecnologias e metodologias ativas na educação e os mesmos métodos de avaliação que os autores consultados, além de se alinharem com as visões de Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Freire (1996).

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As diversas teorias presentes nos trabalhos, bem como os contextos em que eles são produzidos, mostram quais são as principais vantagens do Geogebra e seus impactos na aprendizagem, além das maneiras adequadas de os avaliar.

É importante que os docentes estejam sempre abertos a mudanças, se atualizando e buscando conhecimentos sobre tecnologias e softwares educacionais. Devem não apenas conhecer suas funcionalidades, mas também diversas maneiras de explorá-los em suas aulas, utilizando-os como ferramentas capazes de despertar o interesse e potencializar a aprendizagem. Como alguns autores destacam, o professor pode sempre aprender e se atualizar sobre o tema através de grupos e fóruns de discussão online, com colegas de profissão.

As tecnologias e os recursos digitais de aprendizagem devem ser considerados por todos os que atuam na área de educação como recursos indispensáveis que devem ser integrados à realidade escolar, além de serem frequentemente abordados em todos os cursos de formação docente, familiarizando os licenciandos com essas ferramentas. No caso da disciplina de matemática, o Geogebra é um recurso que pode ser abordado e mostrado como um bom auxiliar na prática docente, ensinando como explorar suas funcionalidades nas aulas de diversos tópicos da disciplina. Em especial, nas aulas de funções.

Além disso, a matemática deve ser ensinada de modo que os discentes compreendam plenamente o significado dos conceitos e das soluções dos problemas propostos, vendo a disciplina não como uma invenção, mas como uma ciência que surgiu naturalmente, descrevendo fatos que podem ser vistos de forma empírica. Recursos tecnológicos e aulas experimentais podem contribuir para isso.

Também é importante preparar os futuros docentes para métodos de avaliação que podem aplicar com suas turmas, aprofundando seus conhecimentos não apenas sobre esses métodos, mas também sobre os diferentes estilos de aprendizagem e suas principais características, sendo capazes de identificar os de seus alunos e adaptar seus métodos de ensino para cada um.

Espera-se que este estudo seja útil para incentivar o uso do software Geogebra nas aulas de funções, uma vez que é um software gratuito, fácil de utilizar e com diversas funcionalidades que podem ser exploradas de várias maneiras, possibilitando seu uso também para o estudo de outros tópicos da matemática, em todos os níveis: Fundamental, médio e superior. Além disso, pode trazer diversas contribuições positivas para a aprendizagem e para o desenvolvimento cognitivo.

Também se espera um reconhecimento de que não há mais condições de evitar o uso de qualquer tipo de tecnologia digital na educação, visto que nos dias atuais as tecnologias digitais estão em toda a parte e são utilizadas em todos os âmbitos e atividades da sociedade, devendo estar presentes também na educação. Sendo assim, é importante que sejam produzidos cada vez mais artigos e estudos sobre o tema, de modo a estar sempre conscientizando os profissionais da educação, e tornando-os capazes de utilizar esses recursos de forma benéfica para a aprendizagem.

“Quem ensina aprende ao ensinar, e quem aprende ensina ao aprender”

Paulo Freire

REFERÊNCIAS

Assunção, T.V. y Nascimento, R.R. (2019). O inventário de estilos de aprendizagem de David Kolb e os professores de ciências e matemática: diálogo sobre o método de ensino. *Góndola, Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*, 14(1), 14-34.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Psicologia Educacional*. Trad. Eva Nick e outros. Rio de Janeiro: Interamericana, 1980.

Barbosa, Alan Bruno Lopes. **UMA APLICAÇÃO DO GEOGEBRA NO ENSINO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA.** / Alan Bruno Lopes Barbosa.- 2018. 56 f. : il.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Secretaria da Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

CUNHA, Jaqueline de Fátima Vieira et al. **Funções: propostas para o ensino na educação básica através do software GeoGebra e da resolução de problemas.** 2017.

DE ARAÚJO BRANDÃO FILHO, Manoel; DE MORAIS CARVALHO FILHO, Rothchild Sousa; AMARAL, Fernanda Meneses. O uso da modelagem matemática com o GeoGebra no ensino de funções trigonométricas: uma revisão bibliográfica. *Research, Society and Development*, v. 11, n. 9, p. e18111931931-e18111931931, 2022.

DE CARVALHO BORBA, Marcelo; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e educação matemática.** Autêntica Editora, 2019.

DE CARVALHO, Josimauro Borges. **UMA REVISÃO SISTEMÁTICA SOBRE METODOLOGIAS ATIVAS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: APRENDIZAGEM ATIVA, PROTAGONISMO DOS ESTUDANTES.** *Journal of Education Science and Health*, v. 1, n. 4, p. 1-13, 2021.

DE FREITAS, Cláudio Lopes; MANFREDO, Elizabeth Cardoso Gerhardt;

DA CUNHA, Débora Alfaia. Instrumentos de avaliação da aprendizagem matemática: contribuições e convergências de uma revisão integrativa. Revemop, v. 4, p. e202205-e202205, 2022.

DE MELO, Enaldo Vieira; FIREMAN, Elton Casado. Ensino e aprendizagem de funções trigonométricas por meio do software Geogebra aliado à modelagem matemática. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, v. 7, n. 5, p. 12-30, 2016.

FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. Editora Paz e terra, 2014.

GOMES DE OLIVEIRA, ELIZABETE; FINCK BRANDT, CÉLIA. O USO DAS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO REMOTO DA MATEMÁTICA E APRENDIZAGEM DA FUNÇÃO AFIM, SEGUNDO RAYMOND DUVAL: REVISÃO SISTEMÁTICA DA LITERATURA. RBPG. Revista Brasileira de Pós-Graduação, v. 18, n. 39, 2022.

GÖTZINGER, Hiandra Bárbara; PALOMINO, SEB. Atividades matemáticas sobre funções com o uso do geogebra. Blumenau, UFSC, 2010.

PADOVANI, Patrícia Garcia Souza et al. A resolução de problemas enquanto metodologia de ensino de matemática na educação básica: uma revisão sistemática de literatura. Ensino da Matemática em Debate, v. 9, n. 2, p. 37-61, 2022.

PEREIRA, Alvimar de Jesus Schalcher. Software Geogebra no ensino de funções: revisão da literatura a partir das produções discentes nas dissertações do PROFMAT. 2018.

RAMOS, David Martins. Investigação do uso de ambientes gráficos no ensino de funções elementares no ensino médio: explorando o software GEOGEBRA. 2018.

REZENDE, Wanderley Moura; PESCO, Dirce Uesu; BORTOLOSSI, Humberto José. Explorando aspectos dinâmicos no ensino de funções reais com recursos do GeoGebra. Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo, v. 1, n. 1, p. 74-89, 2012.

SANCHO, Juana M. et al. Para uma tecnologia educacional. Porto Alegre: Artmed, v. 2001, 1998.

SILVA, Enildo Barbosa das Chagas. Aplicações do GeoGebra no ensino das Funções Polinomiais de Primeiro e Segundo Grau. 2018. Tese de Doutorado. UEMA.

Sousa, Arilson Rodrigues de. O uso do software GeoGebra como ferramenta de apoio no ensino das funções afim e quadrática/ Arilson Rodrigues de Sousa. Ilhéus, BA: UESC, 2016.65f. : II