

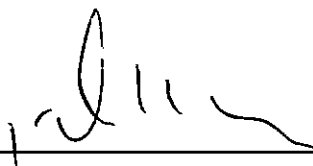
UMA APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

A PROBLEMAS DE CONTACTO

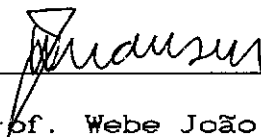
José Geraldo Motter

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

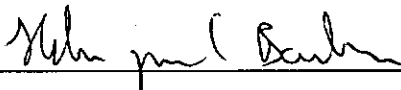
Aprovada por:



Prof. José Cláudio de Faria Telles, Ph.D.
(Presidente)



Prof. Webe João Mansur, Ph. D.



Prof. Hélio José Correa Barbosa, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Novembro de 1991

MOTTER, JOSÉ GERALDO

Uma aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Problemas de Contacto [Rio de Janeiro], 1991

IX, 81 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.SC., Engenharia Civil, 1991)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Elementos de Contorno. I. COPPE/UFRJ

II. Título (série)

AGRADECIMENTOS

A todos os professores da COPPE-UFRJ que de alguma maneira contribuíram para tornar possível a realização desse trabalho, especialmente ao Prof. José Carlos de Faria Telles pela orientação e ao Prof. Webe João Mansur pelo incentivo.

Ao colega Prof. Roberto José de Medeiros pela ajuda e incentivo ao longo desses anos.

A todos aqueles colegas da turma que, com sua amizade e apoio ao longo deste curso de Pós-Graduação, tornaram mais fácil a execução desta tarefa, especialmente ao José Ernesto Malaghini e Roberto Fingolo, companheiros de trabalho com o MEC.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS (M.Sc.)

UMA APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
A PROBLEMAS DE CONTACTO

José Geraldo Motter

Novembro de 1991

Orientador: José Cláudio de Faria Telles

Programa: Engenharia Civil

O presente trabalho diz respeito ao desenvolvimento de um programa computacional para o cálculo, através do Método de Elementos de Contorno de problemas em duas dimensões, de estado plano de tensão ou deformação, entre dois corpos elásticos com forças de atrito atuando na superfície de contacto.

Foi implementada a solução fundamental do semi-plano que facilita enormemente a análise de problemas de contacto em meios semi-infinitos.

São feitas aplicações para alguns problemas práticos e as soluções encontradas com o MEC são comparadas com as soluções analíticas sempre que possível.

ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF
SCIENCE (M. Sc.)

ONE APPLICATION OF BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR
CONTACT PROBLEMS

NOVEMBER 1991

Thesis Supervisor : José Cláudio de Faria Telles

Department : Civil Engineering

This work is concerned with the development of a computer program for evaluation of 2-D plane strain or plane stress contact problems between two elastic bodies with frictional forces on the contact surfaces, by means of the boundary element method.

The half-plane fundamental solution is implemented in order to efficiently improve the solution of contact problems involving semi-infinite media.

INDICE GERAL

Capitulo I - Introdução	
I.1. - Introdução Geral.....	1
I.2. - Objetivos da tese.....	3
Capitulo II - O Método dos Elementos de Contorno	
II.1. - Introdução.....	4
II.2. - Soluções Fundamentais.....	5
Capitulo III - Formulação do MEC para problemas de contacto bidimensional	
III.1. - Considerações Gerais.....	13
III.2. - Condições de contacto.....	15
III.3. - Condições na interface do contacto.....	16
III.3.1. - Contacto com atrito.....	16
III.3.1.1. - Região de adesão.....	16
III.3.1.2. - Região de deslramento.	17
III.3.2. - Contacto sem atrito.....	17
Capitulo IV - Formulação da matriz de coeficientes das equações.	
IV.1. - Introdução.....	18
IV.2. - Contacto com atrito.....	19
IV.2.1. - Região de adesão.....	19

VIII

IV.2.1. - Região com deslização.....	22
--------------------------------------	----

Capitulo V - Determinação da região de contacto

V.1. - Introdução.....	28
V.2. - Método do incremento de carga.....	30
V.3. - Fluxograma.....	32

Capitulo VI - Aplicações numéricas

VI.1. - Exemplos clássicos

VI.1.1. - Contacto entre dois cilindros idênticos.....	35
VI.1.2. - Contacto de um cilindro sobre uma fundação.....	40
VI.1.3. - Contacto de um bloco sobre uma fundação.....	45

VI.2. - Utilização da solução do semiplano

VI.2.1. - Contacto de um cilindro sobre uma fundação.....	50
VI.2.2. - Contacto de um bloco sobre uma fundação.....	52
VI.2.3. - Contacto de um bloco encravado em um semiplano.....	54

Capitulo VII - Conclusões.....	57
--------------------------------	----

Apendice A - Integração Analítica para o Elemento Linear	59
---	----

Apendice B - Distância entre dois nós.....	71
Apendice C - Entrada de Dados do Programa.....	75
Referencias bibliográficas.....	79

Capitulo I

INTRODUÇÃO

I.1. Introdução Geral

Uma importante classe de problemas da mecânica estrutural é aquela que diz respeito aos esforços atuantes em corpos em contacto que não estão rigidamente vinculados.

O primeiro a formular e resolver o problema de contacto entre dois corpos foi HERNICH RUDOLPH HERTZ [1] em 1881. Desde então muitos trabalhos tem sido publicados sobre esse tema. Soluções analíticas foram apresentadas para alguns casos, mas a aplicação destas soluções à engenharia é muito limitada, pois dependem grandemente da geometria e condições de carregamento, e nas situações reais é muito difícil encontrar um modelo para o qual a solução exata seja aplicável.

O advento dos computadores facilitou o tratamento de diversos problemas de engenharia por métodos numéricos, sendo o mais conhecido o Método dos Elementos Finitos.

No caso dos problemas de contacto uma grande dificuldade é que a área de contacto é, a priori, desconhecida. Isso exige um procedimento iterativo para a solução do problema e no caso de atrito, um método incremental que permita acompanhar a variação da área de contacto com a variação do carregamento aplicado, uma vez que a área de contacto final é desconhecida, o que acarreta uma não-linearidade no problema.

Muitos procedimentos numéricos para análise de contacto foram baseados no Método dos Elementos Finitos - veja-se por exemplo Fredriksson [2] e Okamoto and Nakazawa [3], entre outros.

No entanto para este tipo de problema é mais conveniente o Método dos Elementos de Contorno (MEC) uma vez que o mesmo possui o sistema de equações algébricas menor que os outros métodos, dado que a discretização restringe-se ao contorno apenas, o que possibilita uma redução de tempo e custo para a preparação dos dados geométricos e resolução do sistema, além da possibilidade de lidar diretamente com as superfícies de contacto.

Vários trabalhos já foram realizados usando o MEC, dentre os quais podemos citar, entre outros, Anderson et al [4], Anderson [5], [6], [7] e Karami [8].

I.2. Objetivos da tese

O objetivo desse trabalho é o estudo de problemas bidimensionais (estado plano de tensão e deformação) de contacto em regime elástico utilizando o MEC.

Serão resolvidos alguns problemas sem atrito e outros com atrito, utilizando-se da solução fundamental de Kelvin e também da solução do semiplano (Melan) desenvolvida por Telles.

Na elaboração do programa usou-se elementos lineares e para resolver problemas de descontinuidades foi implementado o elemento interpolado para nós duplos e nós pertencentes aos eixos de simetria da região de contacto.

Capítulo II

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

II.1. Introdução

Para se encontrar as tensões e deslocamentos no domínio de um corpo que tem as condições de contorno e carregamento prescritas, existem as equações diferenciais de equilíbrio de tensões e compatibilidade entre os deslocamentos. As soluções dessas equações normalmente só podem ser encontradas para casos particulares de geometria e carregamento.

Os métodos numéricos surgiram para resolver esses problemas a partir de aproximações no contorno ou no domínio, com um erro aceitável.

No caso do MEC as equações originais são transformadas em equações integrais envolvendo apenas o contorno. Estas equações são obtidas de uma relação de reciprocidade (tal como o teorema de Betti) entre a solução do problema e uma Solução Fundamental da equação original.

O contorno é discretizado através de

elementos que aproximam os deslocamentos e as forças de superfície segundo funções de interpolação e são obtidas as equações integrais para os vários pontos através da integração sobre cada elemento, obtendo-se o sistema final de equações que, uma vez resolvido, fornece os valores das incógnitas no contorno.

Em função dos valores do contorno, determinam-se as incógnitas para os pontos internos desejados. Maiores informações sobre o MEC podem ser encontradas em Brebbia [9] e Brebbia, Telles e Wrobel [10].

II.2. Soluções fundamentais

O MEC utiliza para problemas de elasticidade bidimensional sem consideração das forças de volume, a conhecida equação de Somigliana:

$$u_i(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi, x) u_j(x) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, x) p_j(x) d\Gamma \quad (\text{II.1.})$$

onde,

u_j = componentes de deslocamentos em cada ponto do contorno Γ

p_j = componentes das forças de superfície em cada ponto do contorno Γ

u_{ij}^* = solução fundamental para deslocamento

p_{ij}^* = solução fundamental para força de superfície

ξ = ponto-fonte (ponto onde se pretende calcular os deslocamentos e tensões)

x = ponto-campo (ponto pertencente ao contorno, sobre o qual se efetuam as integrações indicadas)

Serão considerados neste trabalho dois tipos de soluções fundamentais, de acordo com a região Ω^* e Γ^* envolvida (fig. II.1.)

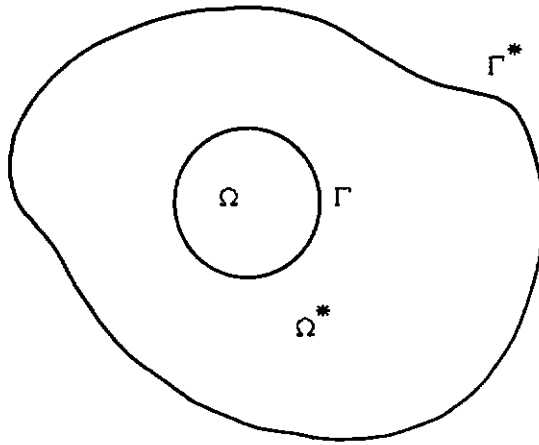


Fig. II.1. Corpo $\Omega + \Gamma$ localizado no interior da região $\Omega^* + \Gamma^*$

O primeiro tipo, é chamada solução fundamental de Kelvin, onde Ω^* é considerado ser um meio elástico infinito e, conseqüentemente, Γ^* também é considerado no infinito. As expressões para os deslocamento e forças de superfície são já conhecidas e dadas por:

$$u_{ij}^* = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \ln r \delta_{ij} - r_{,i} r_{,j} \right]$$

$$p_{ij}^* = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2 r_{,i} r_{,j} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i) \right\}$$

onde r é a distância entre o ponto fonte ξ e o ponto campo x .

O segundo tipo de solução fundamental adotado corresponde ao problema do semiplano. Neste caso a região de Kelvin é subdividida por uma linha horizontal infinita $\bar{\Gamma}$ e apenas a parte inferior é considerada como sendo $\Omega^* + \Gamma^*$. Portanto a região de interesse é apenas um plano semi-infinito, com a parte superior de Γ^* sendo representada por $\bar{\Gamma}$. A região $\Omega + \Gamma$ é sempre assumida pertencente a esse semiplano e a reta $x_1=0$ é considerado como sendo a superfície $\bar{\Gamma}$, que é considerada livre de forças de superfície (fig. II.2.).

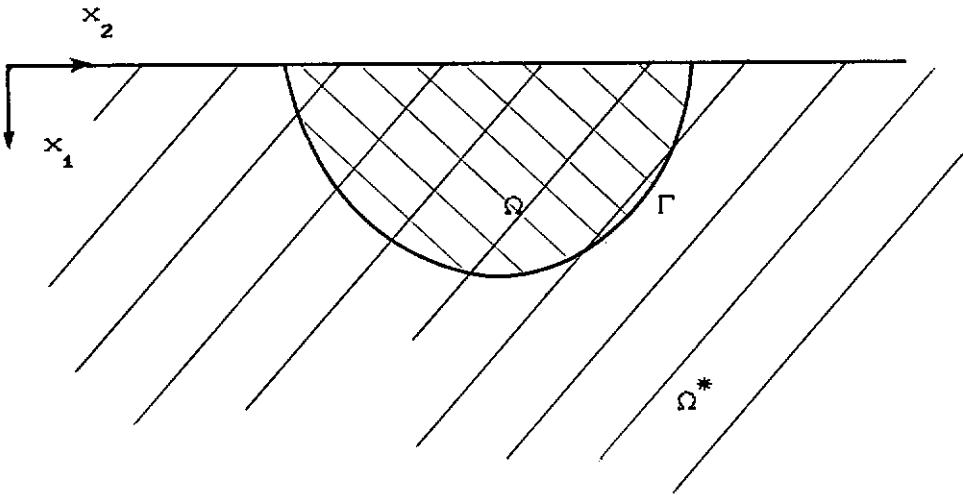


Fig. II.2. - Corpo $\Omega + \Gamma$ localizado no interior do semiplano

A distribuição dos esforços devido a um carregamento pontual aplicado em um semiplano isotrópico foi apresentada por Melan [11]. A completa solução do problema de Melan, junto com sua aplicação ao MEC foi apresentada por Telles e Brebbia [12].

A solução fundamental de Melan pode ser representada adicionando-se à solução fundamental de Kelvin (que representaremos por $()^k$), uma parte complementar $()^c$ que é função das coordenadas da imagem do ponto-fonte com respeito à superfície do semiplano. Portanto a solução fundamental do semiplano será dada por:

$$()^* = ()^k + ()^c$$

As expressões da solução complementar para u_{ij}^* correspondente ao deslocamento na direção j devido à

força unitária atuando na direção i , são:

$$u_{11}^c = K_d \left\{ -[8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)] \ln R + \frac{[(3-4\nu)R_1^2 - 2c\bar{x}]}{R^2} + \frac{4c\bar{x}R_1^2}{R^4} \right\}$$

$$u_{12}^c = K_d \left\{ \frac{(3-4\nu)r_1 r_2}{R^2} - \frac{4c\bar{x}R_1 r_2}{R^4} - 4(1-\nu)(1-2\nu)\theta \right\}$$

$$u_{21}^c = K_d \left\{ \frac{(3-4\nu)r_1 r_2}{R^2} - \frac{4c\bar{x}R_1 r_2}{R^4} - 4(1-\nu)(1-2\nu)\theta \right\}$$

$$u_{22}^c = K_d \left\{ -[8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)] \ln R + \frac{[(3-4\nu)r_2^2 - 2c\bar{x}]}{R^2} - \frac{4c\bar{x}r_2^2}{R^4} \right\}$$

onde, conforme a fig. II.3., temos:

$$\theta = \arctg(R_2/R_1)$$

$$r = (r_i r_i)^{1/2}$$

$$R = (R_i R_i)^{1/2}$$

$$r_i = x_i(x) - x_i(\xi)$$

$$R_i = x_i(x) - x_i(\xi')$$

$$c = x_1(x) \geq 0$$

$$\bar{x} = x_1(\xi) \geq 0$$

$$K_d = 1 / [8\pi G(1-\nu)]$$

G = módulo de elasticidade transversal

ν = coeficiente de Poisson

ξ - ponto fonte

x - ponto campo

ξ' - imagem de ξ

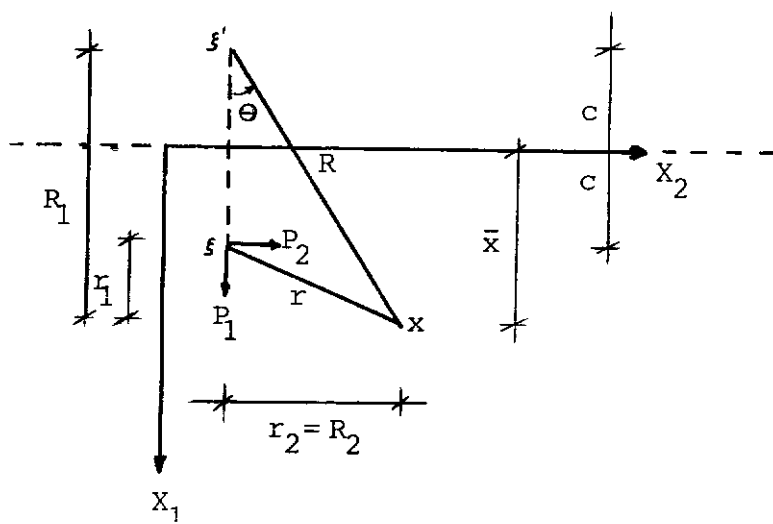


Fig. II.3. - Definição das grandezas para o semiplano

Para encontrar as expressões para p_{ij}^c deve-se lembrar que

$$p_{ij}^c = \sigma_{jki}^c n_k$$

onde σ_{jki}^c será dado por:

$$\sigma_{111}^c = -K_s \left\{ \frac{(3\bar{x} + c)(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2R_1(R_1^2 + 2c\bar{x}) - 4\bar{x}r_2^2(1-2\nu)}{R^4} - \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{R^6} \right\}$$

$$\sigma_{121}^c = -K_s r_2 \left\{ -\frac{(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[\bar{x}^2 - 2c\bar{x} - c^2 + 2\bar{x}R_1(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1^2}{R^6} \right\}$$

$$\sigma_{221}^c = -K_s \left\{ \frac{(\bar{x} + 3c)(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[R_1(r_2^2 + 2c^2) - 2cr_2^2 + 2\bar{x}r_2^2(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{R^6} \right\}$$

$$\sigma_{112}^c = -K_s r_2 \left\{ \frac{(1-2\nu)}{R^2} - \frac{2[c^2 + 6c\bar{x} - \bar{x}^2 - 2\bar{x}R_1(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}r_2^2}{R^6} \right\}$$

$$\sigma_{122}^c = -K_s \left\{ \frac{(c + 3\bar{x})(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[R_1(r_2^2 + 2c\bar{x}) - 2\bar{x}R_1^2(1-2\nu)]}{R^4} - \frac{16c\bar{x}R_1r_2^2}{R^6} \right\}$$

$$\sigma_{222}^c = -K_s r_2 \left\{ \frac{3(1-2\nu)}{R^2} + \frac{2[r_2^2 - 4c\bar{x} - 2c^2 - 2\bar{x}R_1(1-2\nu)]}{R^4} + \frac{16c\bar{x}R_1^2}{R^6} \right\}$$

onde,

$$K_s = 1 / [4\pi(1-\nu)]$$

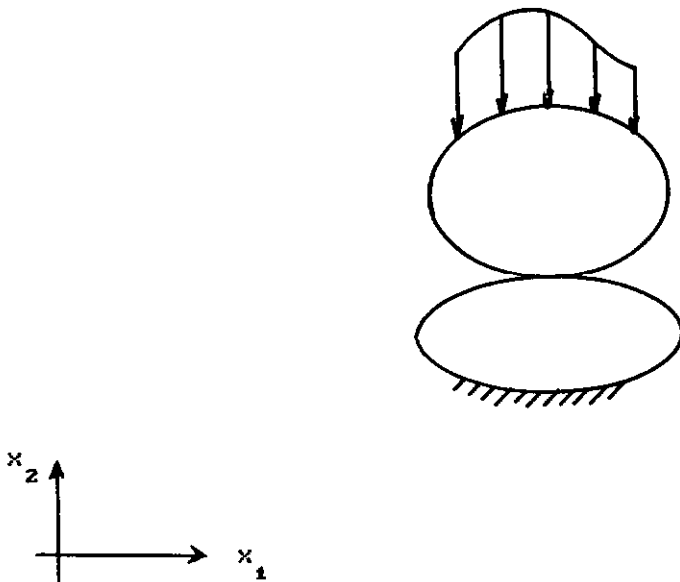
O uso da solução fundamental do semiplano torna desnecessária a discretização do contorno situado em $x_1 = 0$ livre de forças de superfície ($p_j = 0$), sendo os deslocamentos e esforços nesta parte calculados como pontos internos. No caso de problemas de contacto, só é necessário discretizar a superfície que poderá entrar em contacto. Esse procedimento além de gerar um sistema de equações menor, também evita qualquer aproximação numérica sobre a superfície livre.

Capítulo III

FORMULAÇÃO DO MEC PARA PROBLEMAS DE
CONTACTO BIDIMENSIONAL

III.1. Considerações gerais

Sejam os corpos C^A e C^B limitados por superfícies cilíndricas. Os traços das superfícies de contorno no plano (x_1, x_2) são as curvas Γ^A e Γ^B respectivamente. A geometria e todas as quantidades variáveis são independentes da coordenada x_3 . O problema é portanto considerado um problema plano no sistema (x_1, x_2) .

Fig. III.1. Corpos C^A e C^B em contacto

Os objetivos principais são determinar a extensão e localização da superfície de contacto e as cargas que através dela são transferidas de um corpo para o outro.

Para cada corpo isoladamente, é possível escrever o sistema:

$$\underset{\sim}{H}^i \underset{\sim}{u}^i = \underset{\sim}{G}^i \underset{\sim}{p}^i \quad (\text{III.1})$$

onde i é o identificador do corpo.

No MEC, para cada ponto nodal da discretização, devemos conhecer duas das quatro componentes u_1, u_2, p_1, p_2 e através do sistema (III.1) determinar as outras duas.

Nos pontos pertencentes às superfícies de contacto, todas as oito componentes (quatro de cada corpo) são, a priori, desconhecidas. Teóricamente tem-se, em cada conjunto de dois pontos nodais equivalentes na superfície de contacto, oito incógnitas, quando deveriam existir apenas quatro.

As chamadas "condições de contacto" irão resolver tal questão uma vez que estarão relacionando deslocamentos e forças de superfície dos dois corpos. Através dessas condições, os dois conjuntos de equações de (III.1) serão acoplados e poderão ser resolvidos simultaneamente.

III.2. - CONDIÇÕES DE CONTACTO

A região prevista para o contacto está dividida em:

1. Região de separação: é a região onde de início não há contacto, mas poderá haver como resultado do carregamento aplicado.

2. Região de contacto: é a região onde há contacto entre os corpos. Dependendo da existência ou não do atrito, essa região pode ser dividida em contacto com atrito e contacto sem atrito.

2.1. Contacto com atrito: no caso da existência de atrito, o valor da força de superfície tangencial não pode exceder um certo limite que depende do tipo de atrito considerado. Neste trabalho, considera-se que a força de atrito atuando na superfície de contacto segue os critérios de Coulomb para atrito. De acordo com os esforços atuantes na região de contacto com atrito, podemos dividi-la em:

2.1.1. Região de adesão: é a região onde o valor da força de superfície tangencial é menor ou igual ao valor limite da força de atrito.

2.1.2. Região de deslizamento: onde o valor da força de superfície tangencial encontrado é maior que o valor limite da força de atrito.

2.2. Contacto sem atrito: se não há atrito, deslizamentos tangenciais entre as superfícies de contacto podem ocorrer livremente. Neste caso não existem esforços tangenciais.

III.3. - CONDIÇÕES NA INTERFACE DO CONTACTO

Na discretização da região de contacto, os elementos equivalentes nos dois corpos devem ter o mesmo comprimento. A cada nó do corpo C^A existe o correspondente nó no corpo C^B . A esses nós correspondentes chamamos de "par de nós".

Para um par de nós correspondentes na região de contacto, tem-se as seguintes condições:

1. Contacto com atrito:

1.1. Região de adesão

As forças de superfície tem o mesmo valor e sinais opostos e os deslocamentos são iguais. Portanto:

$$\begin{aligned}
 p_t^A + p_t^B &= 0 \\
 p_n^A + p_n^B &= 0 \\
 u_t^A - u_t^B &= 0 \\
 u_n^A - u_n^B &= 0
 \end{aligned}
 \tag{III.2}$$

onde:

p_t = força de superfície tangencial no nó do corpo indicado,

p_n = força de superfície normal no nó do corpo indicado,

u_t = deslocamento tangencial do nó do corpo indicado e,

u_n = deslocamento normal do nó do corpo indicado.

1.2. Região de deslizamento

As forças de superfície tem o mesmo valor e sinais opostos. Além disso, para um dado nó, existe uma relação entre a força de superfície normal e a tangencial, que é dada pela relação de Coulomb:

$$\begin{aligned} p_t^A + p_t^B &= 0 \\ p_n^A + p_n^B &= 0 \\ p_t^A &= \pm \mu p_n^A \\ p_t^B &= \pm \mu p_n^B \end{aligned} \tag{III.3}$$

onde μ é o coeficiente de atrito.

Sabe-se que os deslocamentos entre os nós dos dois corpos são diferentes, uma vez que existe um deslizamento entre eles.

2. Contacto sem atrito

É o caso anterior, quando valor de μ é nulo:

$$\begin{aligned} p_t^A + p_t^B &= 0 \\ p_n^A + p_n^B &= 0 \\ p_t^A &= p_t^B = 0 \end{aligned} \tag{III.4}$$

Capitulo IV

FORMULAÇÃO DA MATRIZ DE COEFICIENTES DAS
EQUAÇÕES

IV.1. Introdução

De acordo com a equação (III.1):

$$\begin{array}{r} H^A u^A = G^A p^A \\ \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \\ H^B u^B = G^B p^B \\ \sim \quad \sim \quad \sim \quad \sim \end{array}$$

tem-se para os dois corpos duas equações matriciais que podem ser combinadas da forma:

$$\begin{bmatrix} [H]^A & \vdots \\ \hline & [H]^B \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} [G]^A & \vdots \\ \hline & [G]^B \end{bmatrix} p \quad (IV.1)$$

faltando ainda inserir neste sistema as condições de contacto e transformá-lo na forma padrão de resolução de sistemas:

$$\begin{array}{r} A x = b \\ \sim \quad \sim \quad \sim \end{array}$$

onde,

x é o vetor das incógnitas e

b consiste de um vetor com todos os valores conhecidos multiplicados pelos correspondentes elementos da matriz.

IV.2. Contacto com atrito

IV.2.1. Região de adesão

Na primeira iteração para encontrar a solução do problema, assume-se que todos os pares de nó em contacto estão unidos, isto é, não há deslocamento relativo entre eles.

Pode-se escrever as equações (III.2) para os corpos A e B usando o referencial cartesiano global:

$$\begin{aligned} u_i^A + x_i^A &= u_i^B + x_i^B \\ p_i^A + p_i^B &= 0 \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} u_i^B &= u_i^A + (x_i^A - x_i^B) \\ p_i^B &= -p_i^A \end{aligned} \tag{IV.2.}$$

Subdividindo o contorno Γ de cada corpo, tem-se: Γ_p contorno com forças prescritas, Γ_u contorno com deslocamentos prescritos e Γ_c contorno da região de contacto. Portanto,

$$\Gamma = \Gamma_p + \Gamma_u + \Gamma_c \tag{IV.3}$$

Neste caso, a equação (IV.1.) pode ser dividida da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} H_u^A & H_p^A & H_c^A & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & H_u^B & H_p^B & H_c^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}^A \\ u^A \\ u_c^A \\ \bar{u}^B \\ u^B \\ u_c^B \end{bmatrix} =$$

(IV.4.)

$$= \begin{bmatrix} G_u^A & G_p^A & G_c^A & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & G_u^B & G_p^B & G_c^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^A \\ \bar{p}^A \\ p_c^A \\ p^B \\ \bar{p}^B \\ p_c^B \end{bmatrix}$$

onde:

\bar{u}^A = deslocamentos prescritos no corpo A

u^A = deslocamentos a serem determinados do corpo A, fora da região de contacto

u_c^A = deslocamentos do corpo A na região de contacto

\bar{u}^B = deslocamentos prescritos do corpo B

u^B = deslocamentos a serem determinados do corpo B, fora da região de contacto

u_c^B = deslocamentos do corpo B na região de contacto

\bar{p}^A = forças de superfície prescritas do corpo A

p^A = forças de superfície a serem determinadas do corpo A, fora da região de contacto

p_c^A = forças de superfície do corpo A na região de contacto

\bar{p}^B = forças de superfície prescritas do corpo B

p^B = forças de superfície a serem determinadas do corpo B,
fora da região de contacto

p_c^B = forças de superfície do corpo B na região de contacto

Substituindo os valores encontrados em (IV.2.) e rearranjando os termos, de forma a colocar todas as incógnitas do lado esquerdo, pode-se escrever (IV.4.) da seguinte maneira:

$$\left[\begin{array}{cccccc} -G_u^A & H_p^A & H_c^A & 0 & 0 & -G_c^A \\ \hline 0 & 0 & H_c^B & -G_u^B & H_p^B & G_c^B \end{array} \right] \begin{bmatrix} p^A \\ u^A \\ u_c^A \\ p^B \\ u^B \\ p_c^A \end{bmatrix} = \quad (IV.5.)$$

$$= \left[\begin{array}{cccccc} -H_u^A & G_p^A & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -H_u^B & G_p^B & -H_c^B \end{array} \right] \begin{bmatrix} \bar{u}^A \\ \bar{p}^A \\ \bar{u}^B \\ \bar{p}^B \\ (x_i^A - x_i^B) \end{bmatrix}$$

que é o sistema de equações que permite o calculo das incógnitas. Neste sistema de equações, todos os termos do lado direito são conhecidos.

IV.2.2. Região com deslizamento.

As equações (III.3) estão no referencial local. Antes da montagem da matriz, convém transformá-las para o referencial global. Sejam p_x e p_y as forças de superfície no referencial global e p_t e p_n as forças de superfície no referencial local. A relação que existe entre essas forças de superfície pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} p_t \\ p_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_c & \text{sen}\theta_c \\ \text{sen}\theta_c & -\cos\theta_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} \quad (\text{IV.6.})$$

onde θ_c é o angulo formado entre x_1 e a direção tangencial, conforme indicado na fig. IV.1. É chamado de ângulo de contacto (veja-se Apendice B).

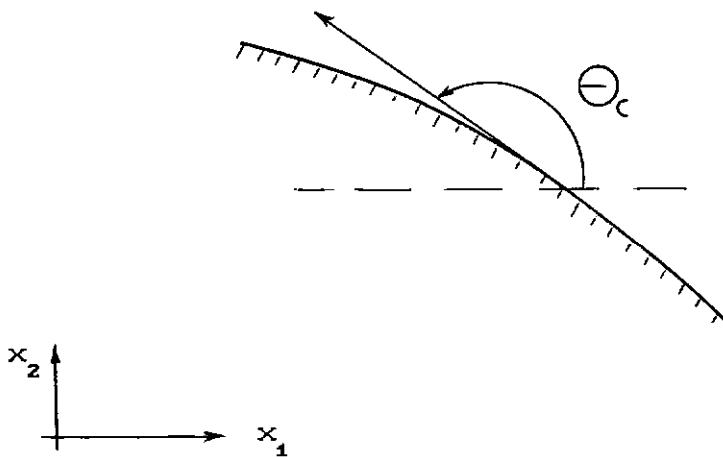


Fig. IV.1. - Angulo θ_c

Haverá deslizamento se $| p_t / p_n | \geq \mu$, ou seja,

$$p_t \geq \pm \mu p_n \quad (\text{IV.7})$$

Em coordenadas globais:

$$p_x = p_t \cdot \cos \theta_c + p_n \cdot \text{sen } \theta_c \quad (\text{IV.8})$$

$$p_y = p_t \cdot \text{sen } \theta_c - p_n \cdot \cos \theta_c$$

Substituindo os valores de (IV.7.), chega-se a uma expressão que relaciona p_x com p_y para a situação de deslizamento iminente:

$$p_x = \frac{\pm \mu \cdot \cos \theta_c + \text{sen } \theta_c}{-\cos \theta_c \pm \mu \cdot \text{sen } \theta_c} p_y = \mu_g \cdot p_y \quad (\text{IV.9})$$

onde,

$$\mu_g = \frac{\pm \mu \cdot \cos \theta_c + \text{sen } \theta_c}{-\cos \theta_c \pm \mu \cdot \text{sen } \theta_c} \quad (\text{IV.10})$$

O sinal de μ na equação (IV.10) é obtido da relação entre p_t e p_n no passo anterior.

Considera-se que o deslocamento entre um par de nós de contacto efetua-se na direção tangencial local. Portanto, pode-se escrever a seguinte relação em coordenadas locais:

$$\begin{aligned} u_t^A &= u_t^B + \Delta u_d \\ u_n^A &= u_n^B \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

onde Δu_d é o deslizamento entre os nós.

Em coordenadas globais, essas relações ficam:

$$u_x^A + x^A = u_x^B + x^B + \Delta u_d \cdot \cos \theta_c \quad (\text{IV.12})$$

$$u_y^A + y^A = u_y^B + y^B + \Delta u_d \cdot \text{sen } \theta_c \quad (\text{IV.13})$$

De (IV.12), tem-se:

$$\Delta u_d = (u_x^A - u_x^B + x^A - x^B) / \cos \theta_c \quad (\text{IV.14})$$

Levando esse valor a (IV.13), tem-se,

$$u_y^B = u_y^A + (y^A - y^B) + (u_x^B - u_x^A) \cdot \text{tg } \theta_c + (x^B - x^A) \cdot \text{tg } \theta_c \quad (\text{IV.15})$$

que dará o valor de u_y^B em termos de u_y^A , u_x^A e u_x^B .

As forças de superfície na região de contacto serão calculadas todas em função de p_y^A , uma vez que:

$$\begin{aligned} p_x^A &= \mu p_y^A \\ p_x^B &= - p_x^A \\ p_y^B &= - p_y^A \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Portanto, a equação (IV.1) será dividida no caso de contacto com atrito e deslizamento da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} H_u^A & H_p^A & H_{cx}^A & H_{cy}^A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_u^B & H_p^B & H_{cx}^B & H_{cy}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u^A \\ u^A \\ u_{cx}^A \\ u_{cy}^A \\ -u^B \\ u^B \\ u_{cx}^B \\ u_{cy}^B \end{bmatrix} = \quad (IV.17)$$

$$= \begin{bmatrix} G_u^A & G_p^A & G_{cx}^A & G_{cy}^A & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_u^B & G_p^B & G_{cx}^B & G_{cy}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^A \\ -p^A \\ p_{cx}^A \\ p_{cy}^A \\ p^B \\ -p^B \\ p_{cx}^B \\ p_{cy}^B \end{bmatrix}$$

onde,

u_{cx} = deslocamento dos nós da região de contacto na direção x

u_{cy} = deslocamento dos nós da região de contacto na direção y

p_{cx} = forças de superfície nos nós da região de contacto na direção x

p_{cy} = forças de superfície nos nós da região de contacto na direção y

Substituindo os valores de (IV.15) e (IV.16)

e rearranjando os termos de forma a deixar as incógnitas do lado esquerdo, vem:

$$\begin{bmatrix} -G_u^A & H_p^A & H_{cx}^A & H_{cy}^A & 0 & 0 & 0 & -G_{cy}^A - \mu_d G_{cx}^A \\ 0 & 0 & -\text{tg}\theta_c H_{cy}^B & H_{cy}^B & -G_u^B & H_p^B & M & G_{cy}^B + \mu_d G_{cx}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^A \\ u^A \\ u_{cx}^A \\ u_{cy}^A \\ p^B \\ u^B \\ u_{cx}^B \\ p_{cy}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -H_u^A & G_p^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_u^B & G_p^B & -H_{cy}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u^A \\ -p^A \\ -u^B \\ -p^B \\ N \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

onde,

$$M = H_{cx}^B + \text{tg}\theta_c \cdot H_c^B$$

$$N = (y^A - y^B) + (x^B - x^A) \cdot \text{tg}\theta_c$$

No caso particular de $\cos\theta_c = 0$, a equação (IV.15) não pode ser resolvida. Para este caso pode-se utilizar as seguintes relações:

$$u_x^B = u_x^A + (x^A - x^B)$$

$$p_y^A = \mu p_x^A$$

$$p_x^B = -p_x^A$$

$$p_y^B = -p_y^A$$

(IV.19)

Neste caso, o valor de μ_a é dado por:

$$\mu_a = \frac{-\cos \theta_c + \mu \sin \theta_c}{\sin \theta_c + \mu \cos \theta_c} = \mu \quad (\text{IV.20})$$

E a equação (IV.2) fica:

$$\begin{bmatrix} -G_u^A & H_p^A & H_{cx}^A & H_{cy}^A & 0 & 0 & -G_{cx}^A - \mu_a G_{cy}^A & 0 \\ 0 & 0 & H_{cx}^B & 0 & -G_u^B & H_p^B & G_{cx}^B + \mu_a G_{cy}^B & H_z^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^A \\ u^A \\ u_{cx}^A \\ u_{cy}^A \\ p^B \\ u^B \\ p_{cx}^A \\ u_{cy}^B \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -H_u^A & G_p^A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -H_u^B & G_p^B & -H_{cy}^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -u^A \\ -p^A \\ -u^B \\ -p^B \\ (x^A - x^B) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

Capítulo V

DETERMINAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTACTO

V.1. Limites da região de contacto

Após a solução do sistema de equações, o tamanho da região de contacto assim como as condições de cada par de nós deve ser verificada.

Para encontrar a superfície de contacto correta, deve-se analisar o comportamento da força de superfície normal e dos deslocamentos na região em contacto.

No caso de haver forças de superfície normais positivas (no sistema de referência local) - fig. V.1., nestes pontos a área de contacto deve ser aberta e o par de nós deve passar a estar separado. Neste caso a superfície de contacto será diminuída.

Caso haja em algum ponto uma interpenetração entre os dois corpos - fig. V.2. -, o que implica numa incompatibilidade geométrica, neste local os nós devem passar à condição de contacto, evitando interpenetração.

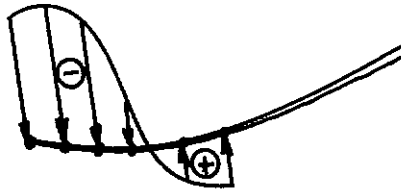


Fig. V.1. - Superfície de contacto maior do que a real

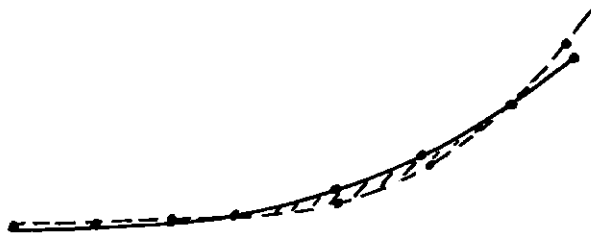


Fig. V.2. - Superfície de contacto adotada menor que a real

A solução correta deve comportar-se conforme a fig. V.3. , onde tem-se apenas de forças de superfície normais negativas, sem interpenetração em nenhum ponto.

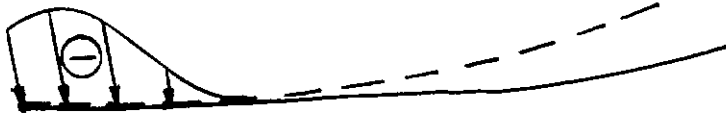


Fig. V.3. - Superfície de contacto correta

Após a determinação da área de contacto, o valor da força de superfície tangencial de cada par de nós é comparado com o da força de superfície normal. Se a razão entre esses dois valores for maior do que o coeficiente de atrito de Coulomb, isto significa que ocorrerá um deslizamento relativo entre os nós, e esse par de nós deve passar à condição de deslizamento. Assim,

$$p_t \leq \mu p_n$$

portanto, $\frac{p_t}{p_n} \leq \mu$

Por outro lado, um par de nós na condição de deslizamento deverá passar à condição de adesão sempre que o deslocamento relativo encontrado entre os nós seja nulo.

V.2. Incremento de carga

Nos problemas de contacto quase sempre aparecerá

uma não linearidade quando houver atrito, o que faz com que tenhamos que resolvê-los através de um método incremental. Isso é feito aplicando-se o carregamento por etapas e assumindo - como é razoável - que entre duas etapas sucessivas as condições de contacto se mantêm constantes. Evidentemente isso será tanto mais exato quanto menor for o incremento de carregamento efetuado em cada etapa.

Essa atualização do carregamento pode ser feita basicamente de duas maneiras:

a) calculando-se a quantidade de carga necessária para fazer com que mais um par de nós mude a sua condição de contacto, baseados na relação linear carregamento-deslocamento. Encontra-se um fator de atualização α^m para o m -ésimo passo que fará com que algum par de nós mude a sua condição - isso pode ocorrer com o aumento/diminuição da área ou com a mudança adesão/deslizamento. O carregamento para o próximo passo será dado por

$$P_{m+1} = P_m + \alpha \Delta P$$

onde,

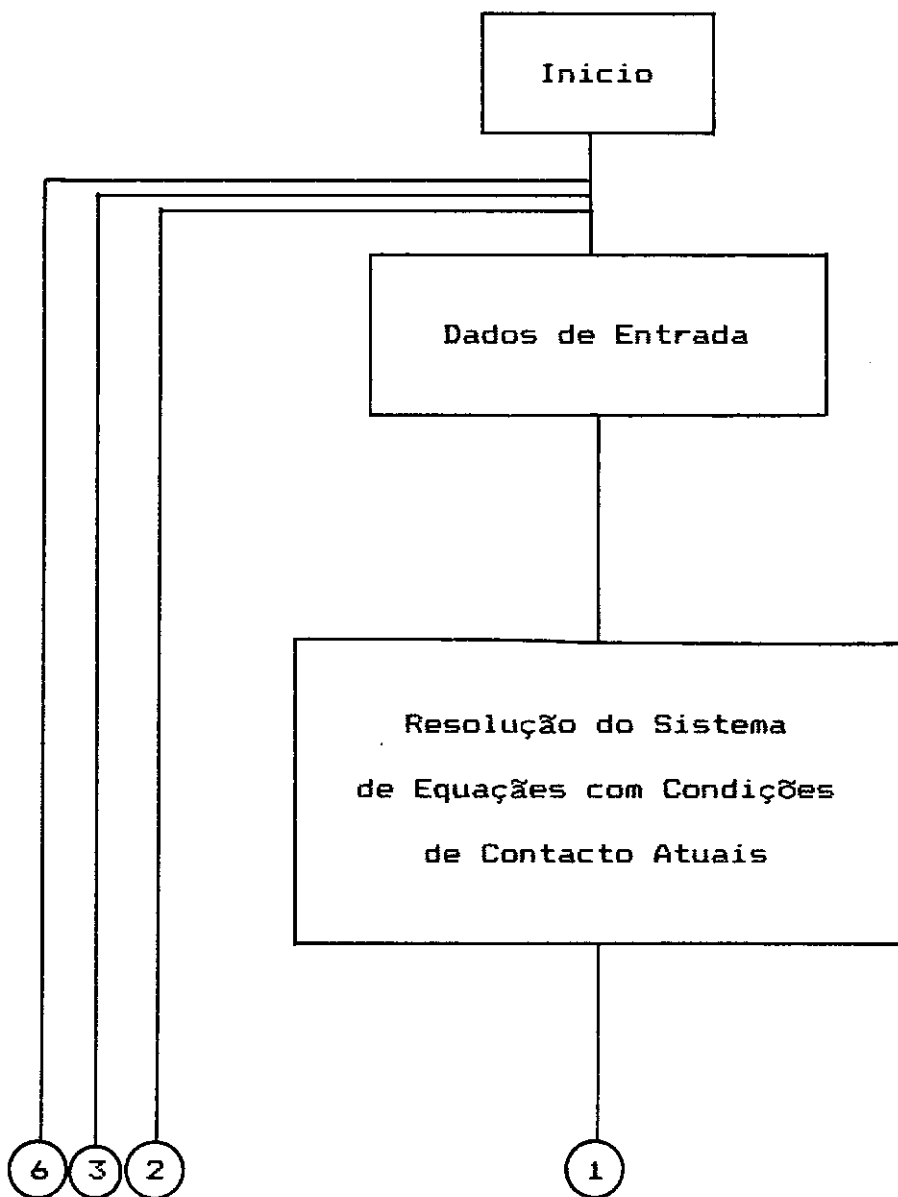
$$\Delta P = P_m - P_{m-1}$$

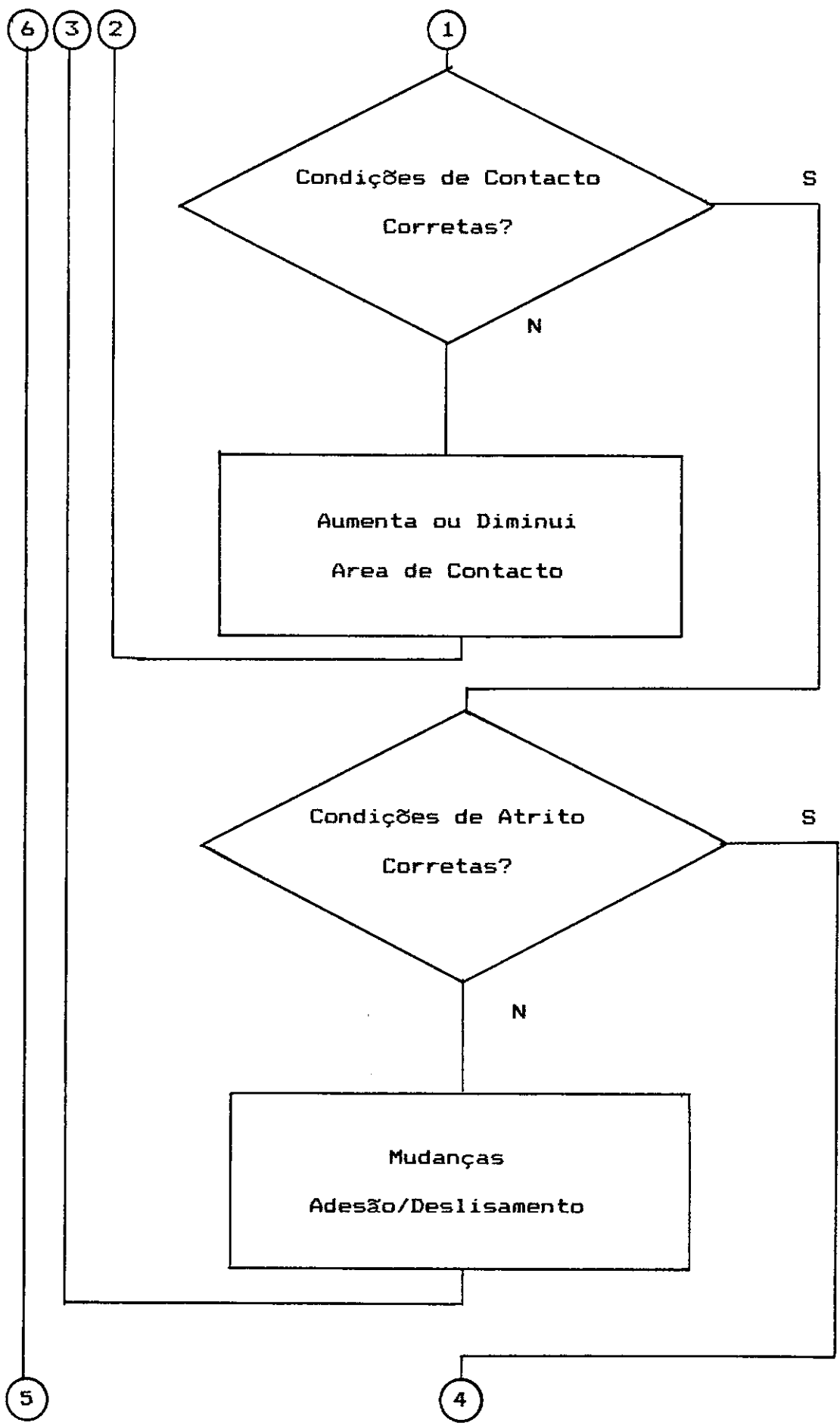
b) outra maneira de atualizar o carregamento é através de uma quantidade fixa de carga que é acrescentada em cada etapa, até que se complete o carregamento total. Assim, por exemplo, pode-se usar um incremento de 5% da carga total em cada acréscimo de carregamento. Essa foi a forma utilizada nos exemplos deste trabalho, uma vez que desta maneira conseguiu-se convergência satisfatória e um número

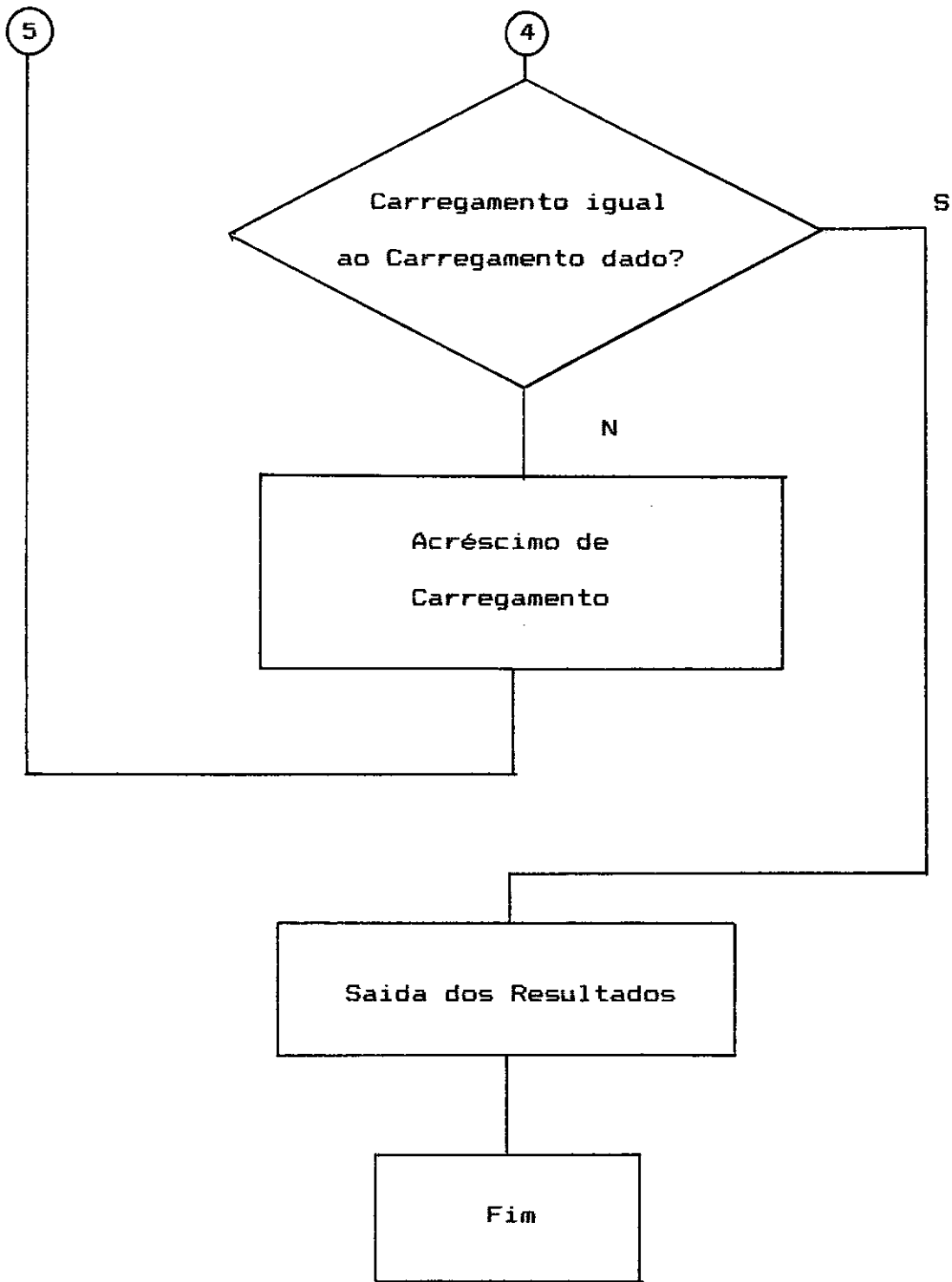
de iterações menor, o que implica em menor tempo computacional.

V.3. FLUXOGRAMA

Pode-se visualizar melhor o procedimento adotado através do fluxograma resumido mostrado a seguir:







CAPITULO VI

APLICAÇÕES DO MEC AOS PROBLEMAS DE CONTACTO

VI.1.1. Contacto de dois cilindros identicos

Algumas soluções analíticas foram encontradas para problemas de contacto envolvendo corpos de formato simples.

Um dos exemplos para o caso bidimensional, refere-se a dois corpos cilíndricos de mesmo raio com um carregamento cuja linha de ação passa pelos centros dos cilindros (fig. VI.1.).

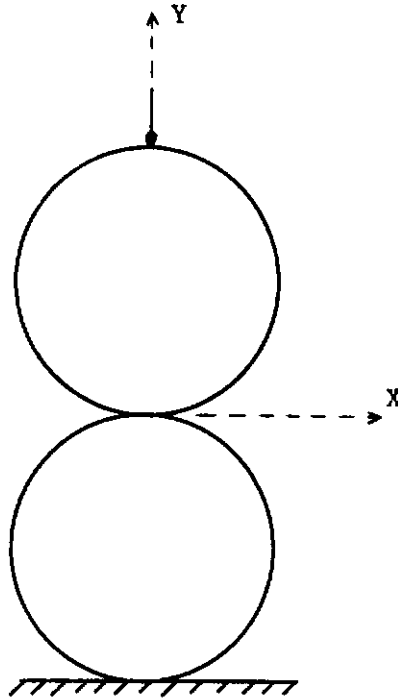


Fig. VI.1. - Contacto de dois cilindros idênticos

Os resultados obtidos, de acordo com a teoria de Hertz, são:

- Para a área de contacto (fig. VI.2.):

$$a = \sqrt{(4 W \bar{R} / \pi E^*)}$$

- Para a força de superfície máxima no centro do contacto:

$$P_{\max} = \sqrt{(W E^* / \pi \bar{R})}$$

onde,

W = carregamento aplicado por unidade de comprimento

$$1 / E^* = (1 - \nu_1^2) / E_1 + (1 - \nu_2^2) / E_2$$

$$1 / \bar{R} = 1 / R_1 + 1 / R_2$$

E ainda:

$$P = P_{\max} \cdot \sqrt{(1 - (x^2 / a^2))}$$

onde,

P = distribuição de pressão na superfície de contacto.

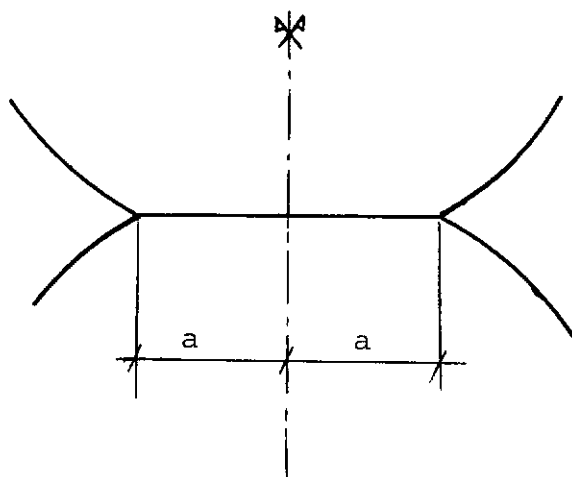


Fig. VI.2. - Definição da largura "a" de contacto

O exemplo foi resolvido para dois cilindros de raio $R = 8$, tirando-se vantagem da simetria

existente no problema, discretizando-se apenas metade dos cilindros (fig. VI.3.). Usando elementos lineares com a dimensão começando com 0,1 para a área de contacto até um comprimento máximo de 1,0 para a área sem contacto e sem carregamento, num total de 61 elementos para cada cilindro.

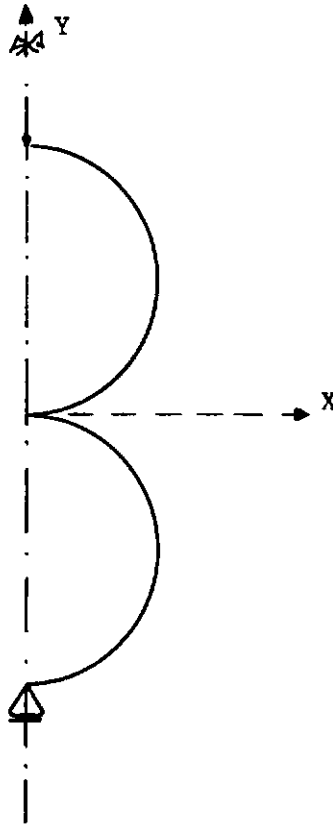


Fig. VI.3. - Superfície a ser discretizada.

Utilizando para os materiais dos corpos os valores de $E_1 = E_2 = 1000$ e $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$, resolveu-se o problema para vários valores de carregamento e comparou-se o resultado com o obtido pela solução de Hertz.

A comparação dos resultados é mostrada

na tabela I e na fig. VI.4. Convém observar que os resultados obtidos por Hertz para o caso de $P = 250$ são:

$$a = 1,52$$

$$P_{\max} = 104,6$$

Contacto sem atrito		Contacto com atrito ilimitado		
x	Esforço Normal	x	Esforço Normal	Esforço Tangencial
0,0	103,8	0,0	103,8	0,000
0,1	105,6	0,1	105,6	0,000
0,2	104,3	0,2	104,3	0,002
0,3	103,2	0,3	103,2	0,002
0,4	101,4	0,4	101,4	0,003
0,5	99,3	0,5	99,3	0,004
0,6	96,6	0,6	96,6	0,005
0,7	93,2	0,7	93,2	0,006
0,8	89,2	0,8	89,2	0,007
0,9	84,5	0,9	84,5	0,009
1,0	78,8	1,0	78,8	0,010
1,1	72,1	1,1	72,1	0,012
1,2	64,1	1,2	64,1	0,015
1,3	53,7	1,3	53,7	0,020
1,4	41,9	1,4	41,9	0,021
1,5	9,3	1,5	9,3	0,069

Tabela 1 - Esforços normal e tangencial na área de contacto de dois cilindros idênticos, submetidos a uma força $P = 250$.

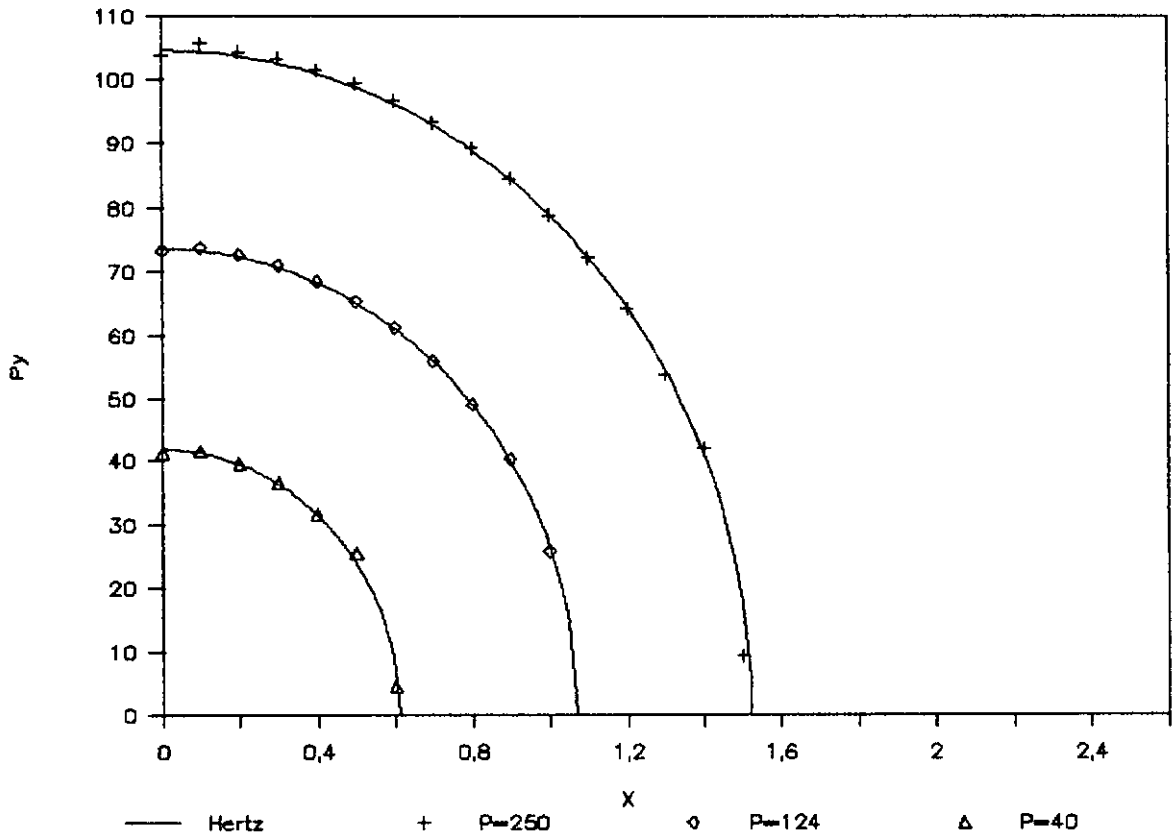


Fig. VI.4. - Variação de σ_y ao longo da superfície de contacto para diversos valores de carregamento atuante ($\mu = 0$).

VI.1.2. Contacto de um cilindro sobre uma fundação.

Outro clássico exemplo de contacto entre dois corpos é o que trata do cilindro apoiado sobre uma fundação

rígida (fig. VI.5.).

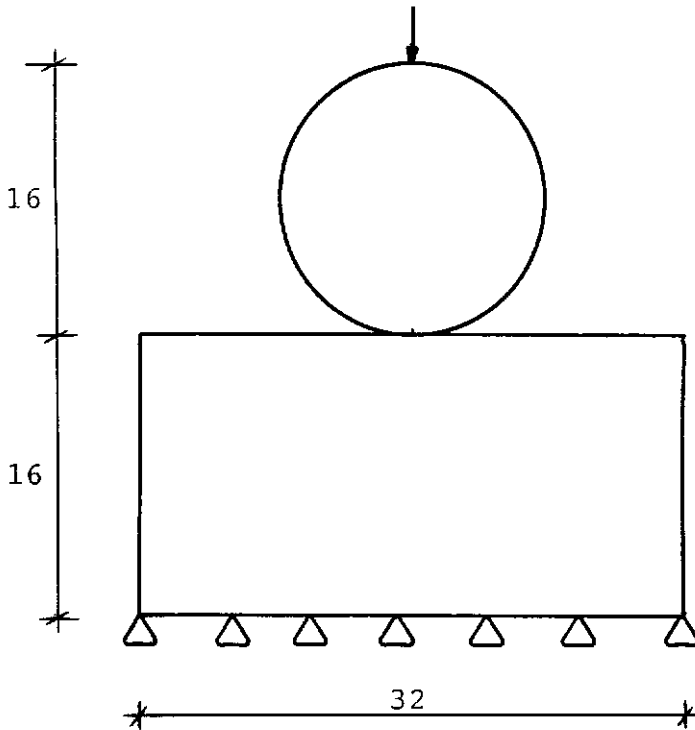


Fig. VI.5. - Cilindro sobre fundação rígida

Também aqui, na resolução do problema foi discretizada apenas metade da estrutura, utilizando-se as propriedades de simetria.

Foram usados 75 elementos lineares no cilindro de raio $R = 8$ e 42 na fundação, com comprimento variando de 0,1 a 0,04 na área de contacto até um máximo de 4,0 na região não carregada (fig. VI.6.). O valor da carga utilizada foi de 240.

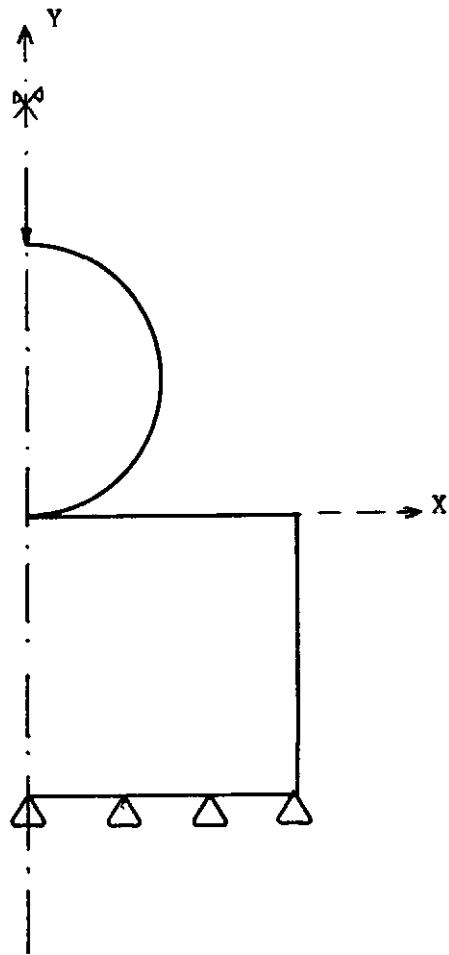


Fig. VI.6. - Superfície a ser discretizada

O exemplo foi resolvido inicialmente considerando-se $E_1 = 1000$. Os resultados obtidos estão na tabela 2 e na figura VI.7. Os resultados obtidos, de acordo com a teoria de Hertz, para uma força $P = 240$ são:

$$a = 1,49$$

$$P_{\max} = 102,4$$

Contacto sem atrito		Contacto com atrito ilimitado		
x	Esforço Normal	x	Esforço Normal	Esforço Tangencial
0,0	98,4	0,0	100,1	0,3
0,1	98,9	0,1	100,6	1,4
0,2	98,1	0,2	99,7	2,8
0,3	97,0	0,3	98,6	4,3
0,4	95,4	0,4	96,9	5,7
0,5	93,3	0,5	94,9	7,1
0,6	90,8	0,6	92,2	8,5
0,7	87,6	0,7	89,0	10,0
0,8	83,9	0,8	85,2	11,5
0,9	79,6	0,9	80,7	13,0
1,0	74,5	1,0	75,3	14,5
1,1	68,5	1,1	68,9	16,2
1,2	61,4	1,2	61,4	18,2
1,29	52,7	1,29	51,9	20,5
1,34	47,3	1,34	45,9	22,2
1,39	41,5	1,39	38,7	25,0
1,44	33,9	1,44	31,8	26,2
1,48	28,4	1,48	5,8	56,4

Tabela 2 - Esforços normal e tangencial na região de contacto de um cilindro sobre uma fundação rígida, sob a ação de uma força $P = 240$.

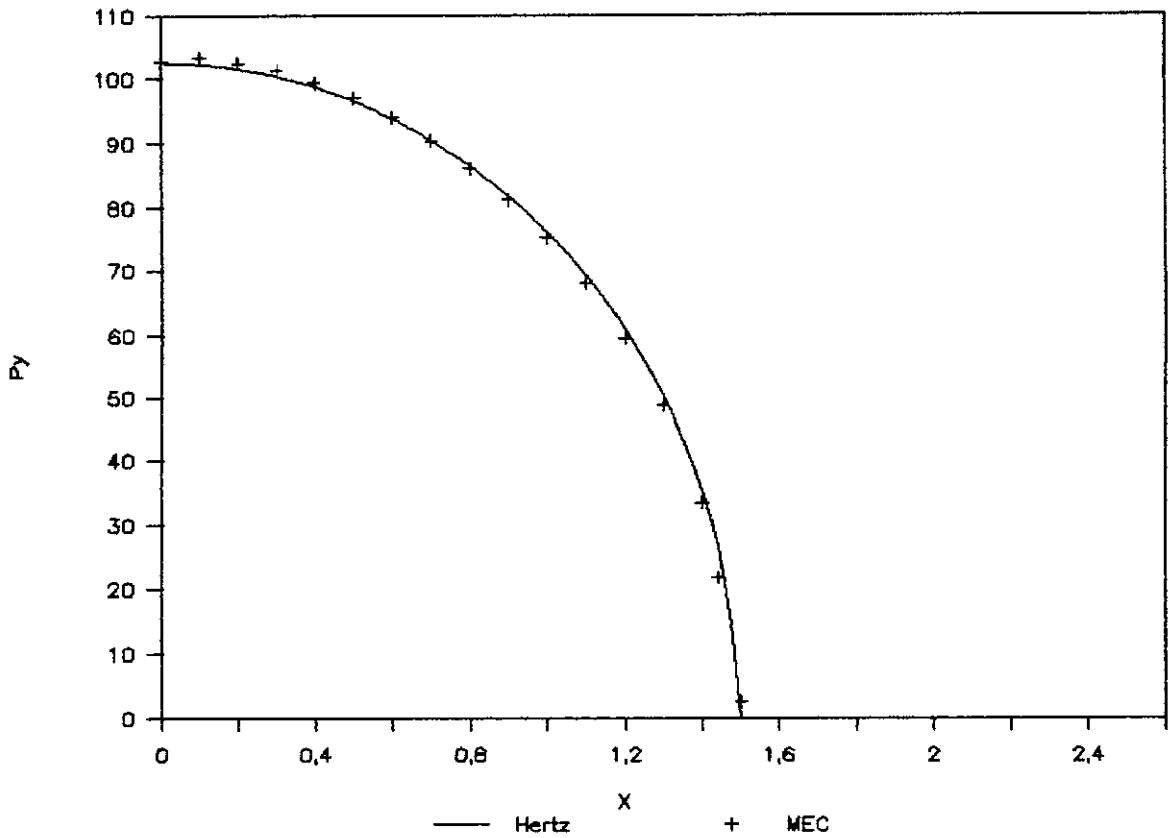


Fig. VI.7. Variação de σ_y ao longo da superfície de contacto ($\mu = 0$)

Resolvendo esse exemplo para um coeficiente de atrito $\mu = 0,8$, encontra-se o resultado mostrado na fig. VI.8., onde se nota a variação da força tangencial na superfície de contacto. Observa-se que neste caso a região de adesão fica compreendida no intervalo $0 \leq x \leq 1,2$ e a região de deslizamento no intervalo $1,2 < x \leq a$.

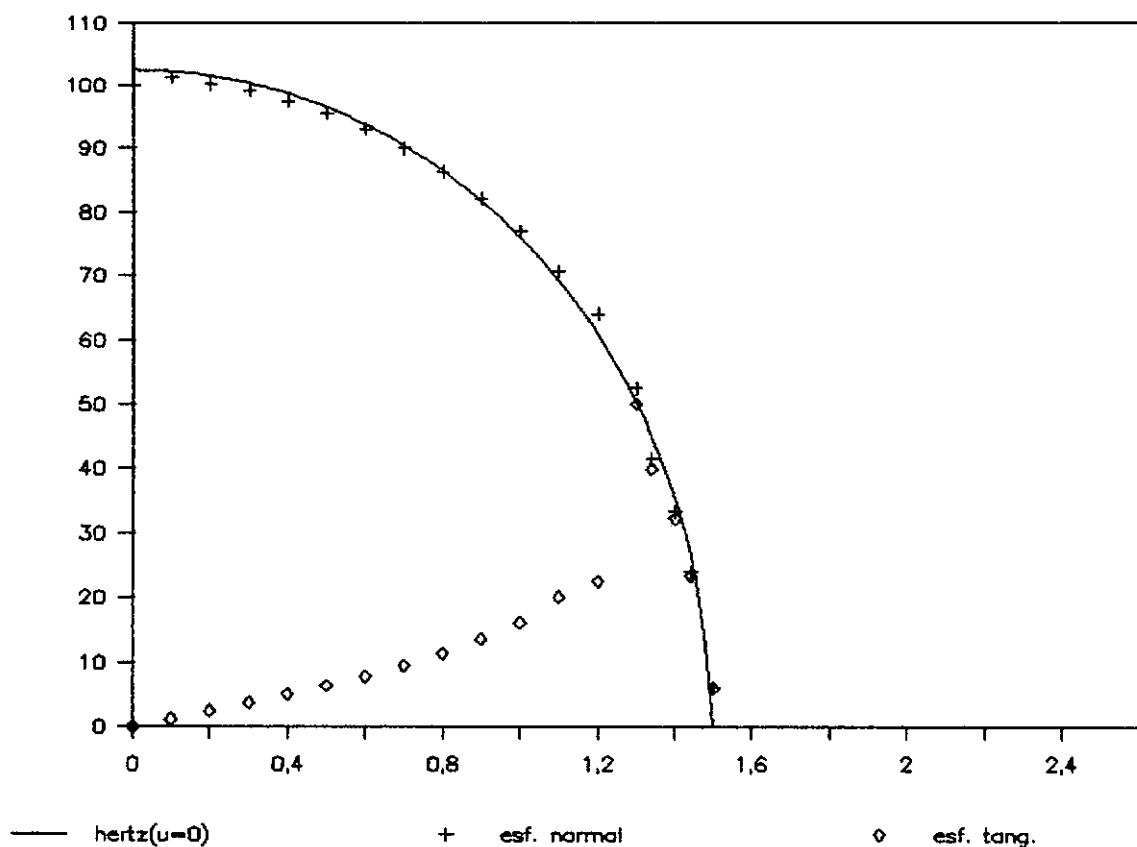


Fig. VI.8. - Variação de σ_x e σ_y ao longo da superfície de contacto para $\mu = 0,8$.

VI.1.3. Contacto de um bloco sobre uma fundação.

O exemplo analisado consiste de um bloco elástico sobre uma fundação (fig. VI.9.)

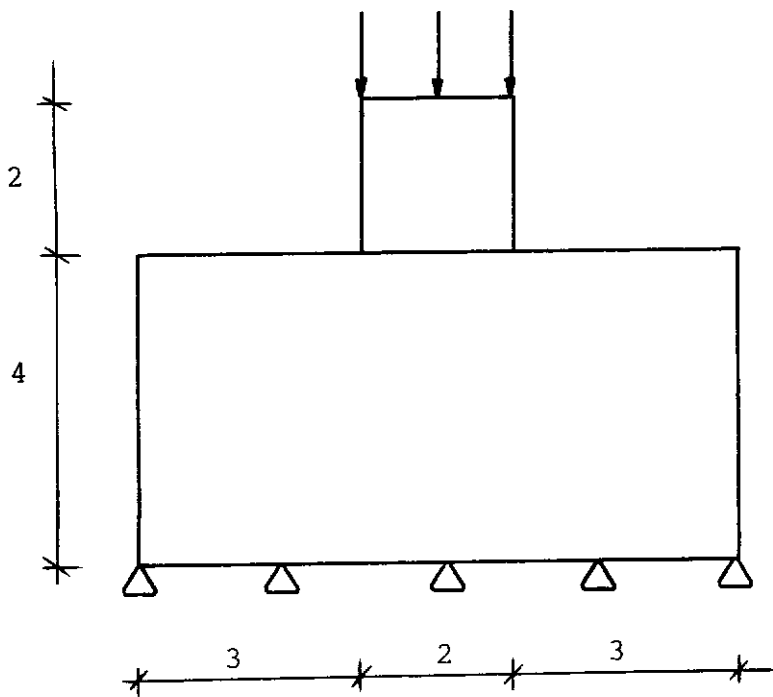


Fig. VI.9. - Bloco sobre fundação

Para a solução do problema, usando a simplificação devido à simetria, foram utilizados 11 elementos na região de contacto e um total de 20 elementos no bloco e 28 elementos na fundação (fig. VI.10.).

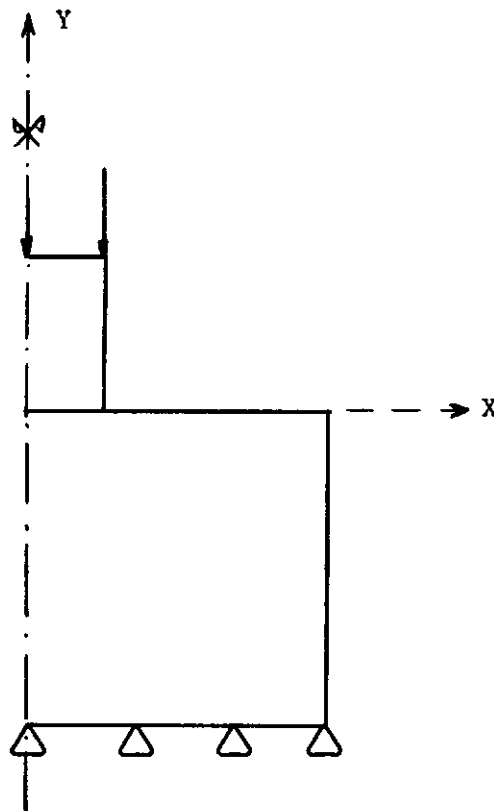


Fig. VI.10. - Superfície a ser discretizada

O exemplo foi resolvido em primeiro lugar considerando o coeficiente de atrito nulo. O deslocamento normal na região de contacto para o estado plano de tensão foi comparado com a solução exata encontrada por Okubo [13], e com a solução encontrada com o Método dos Elementos Finitos por Ohte [14], e é mostrado na fig. VI.11.

Também foram encontradas as tensões normais ao longo da superfície de contacto para diversas relações dos módulos de elasticidade longitudinal (fig. VI.12.), sendo o resultado comparado com a solução analítica dada

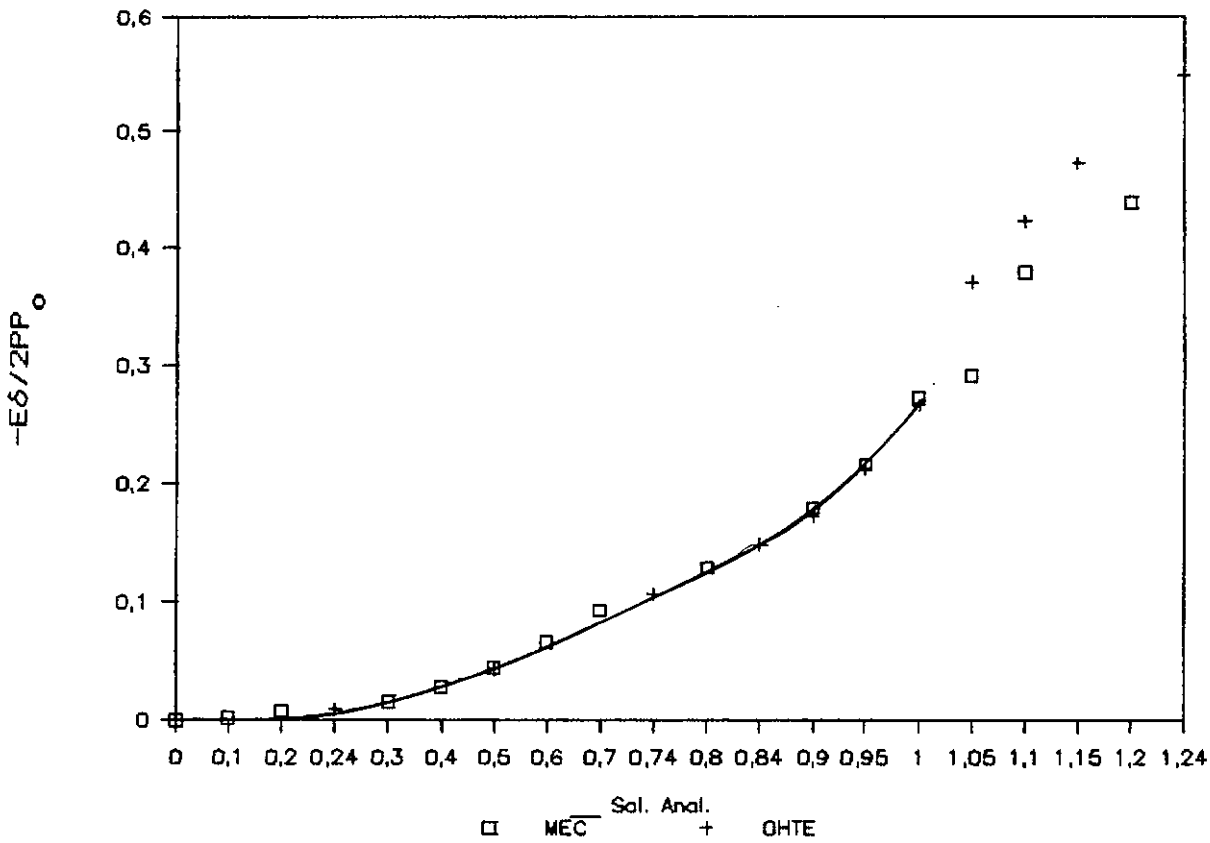


Fig. VI.11. - Variação do deslocamento ao longo da superfície de contacto.

por Timoshenko [15], onde o módulo de elasticidade longitudinal do bloco é considerado infinito.

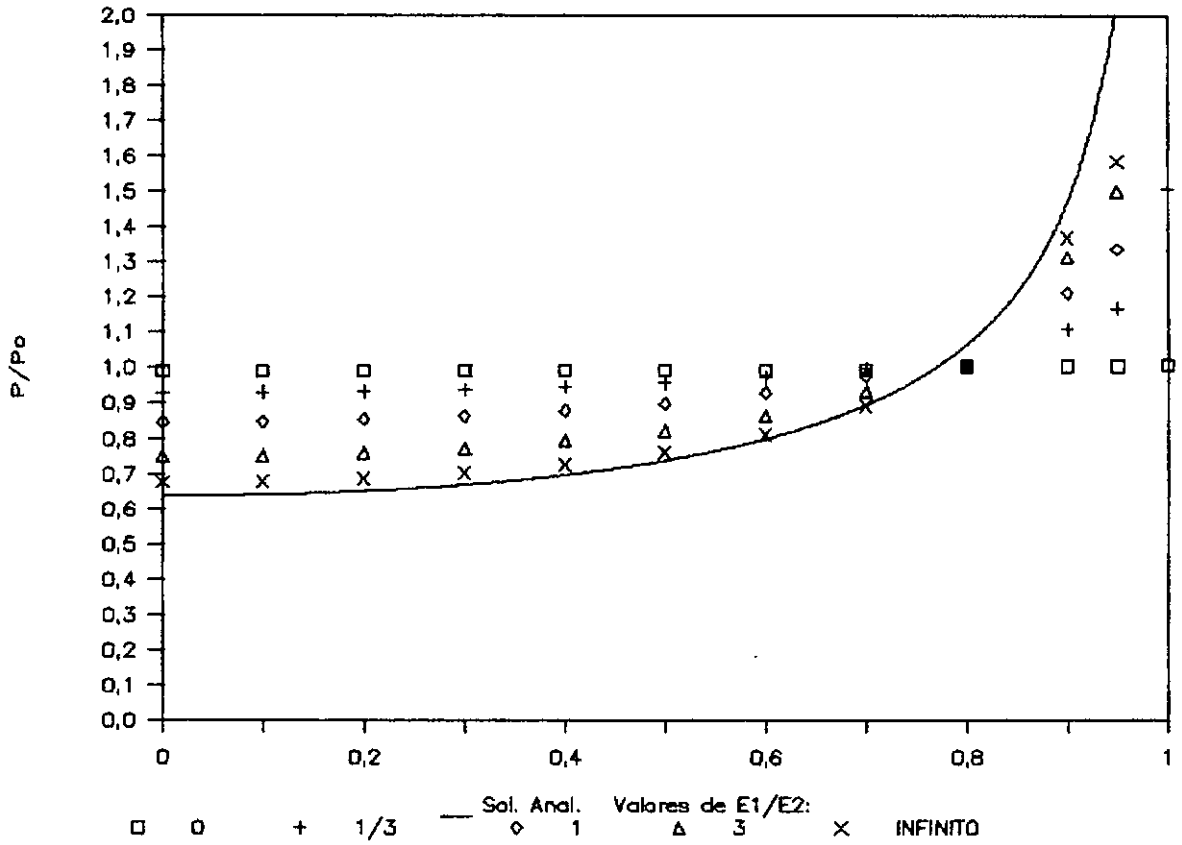


Fig. VI.12. - Variação de σ_y ao longo da superfície de contacto para diversas relações entre os módulos de elasticidade longitudinal do bloco (E_1) e da fundação (E_2).

Variando o coeficiente de atrito temos uma pequena variação na tensão normal (fig. VI.13.).

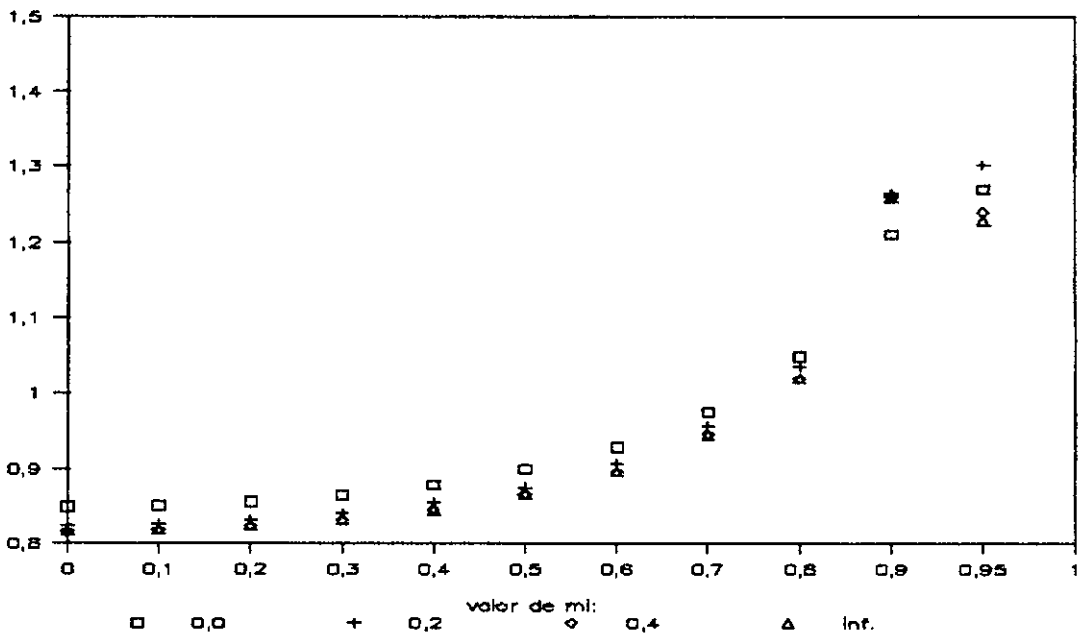


Fig. VI.13. - Variação de σ_y ao longo da superfície de contacto para diversos valores do coeficiente de atrito.

VI.2. Solução do semiplano

VI.2.1. Contacto de um cilindro sobre uma fundação rígida.

Utilizando a solução do semiplano, os resultados encontrados para o exemplo do cilindro sobre a fundação são dados na fig.VI.14. Foi utilizada $E_1 = 1000$.

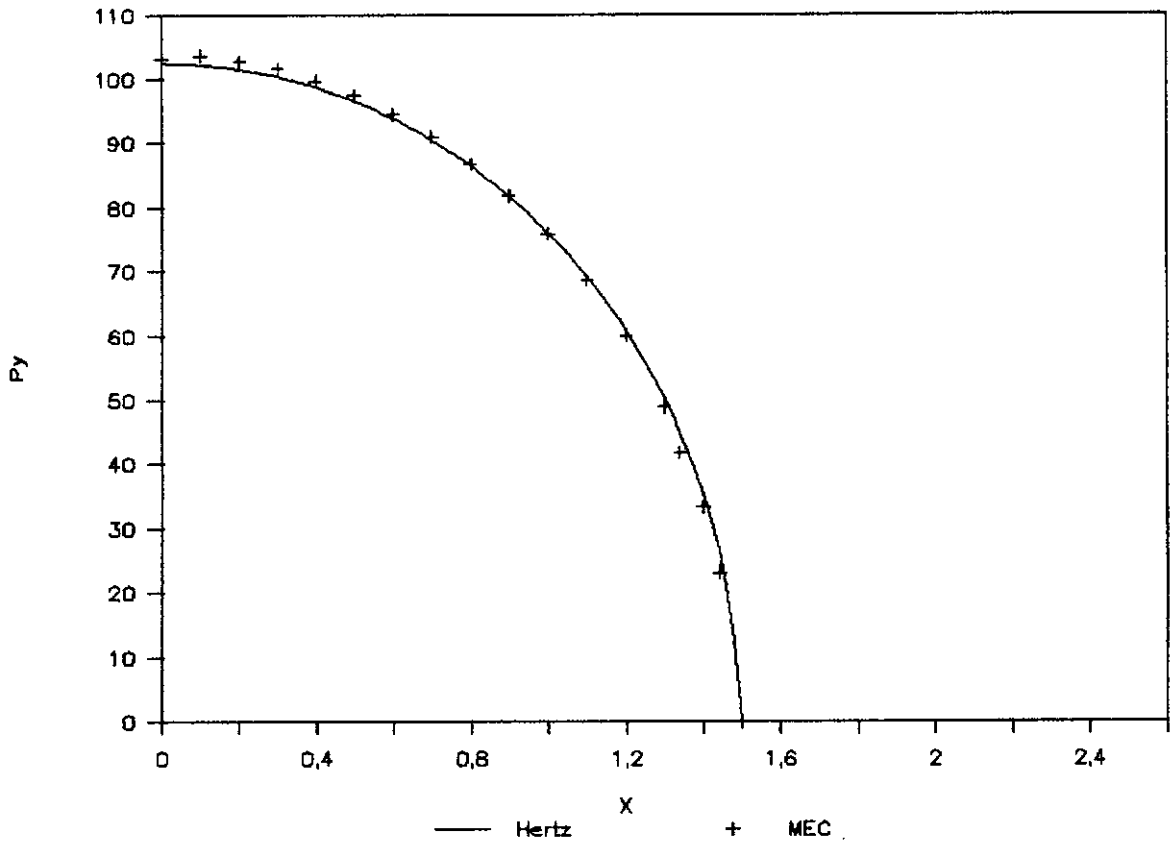


Fig. VI.14. - Variação de σ_1 ao longo da superfície de contacto para $P = 240$ ($\mu = 0$)

Observa-se que neste caso só foi necessário discretizar os pontos da possível região de contacto da fundação, uma vez que o restante da superfície do semiplano onde se realiza o contacto já tem incluída a condição de forças de superfície nulas (fig. VI.15.)

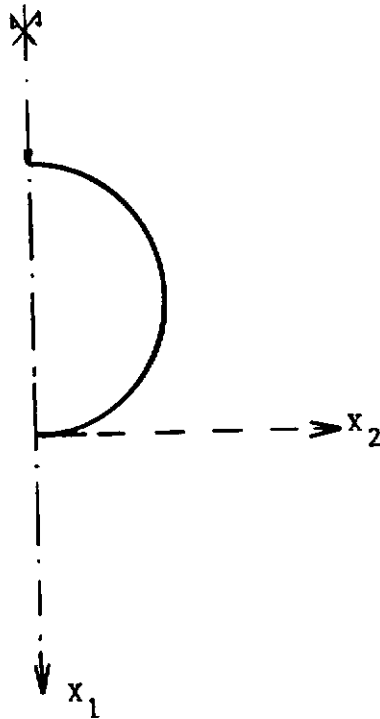


Fig. VI.15. - Superfície a ser discretizada no caso da utilização da solução do semiplano.

VI.2.2. Contacto de um bloco sobre uma fundação.

O exemplo VI.1.3. resolvido com a utilização da formulação do semiplano, apresenta os resultados da fig. VI.17.

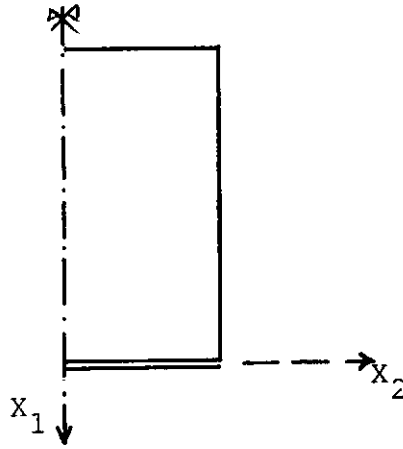


Fig. VI.16. - Superfície a ser discretizada no caso de um bloco sobre uma superfície, utilizando a solução do semiplano.

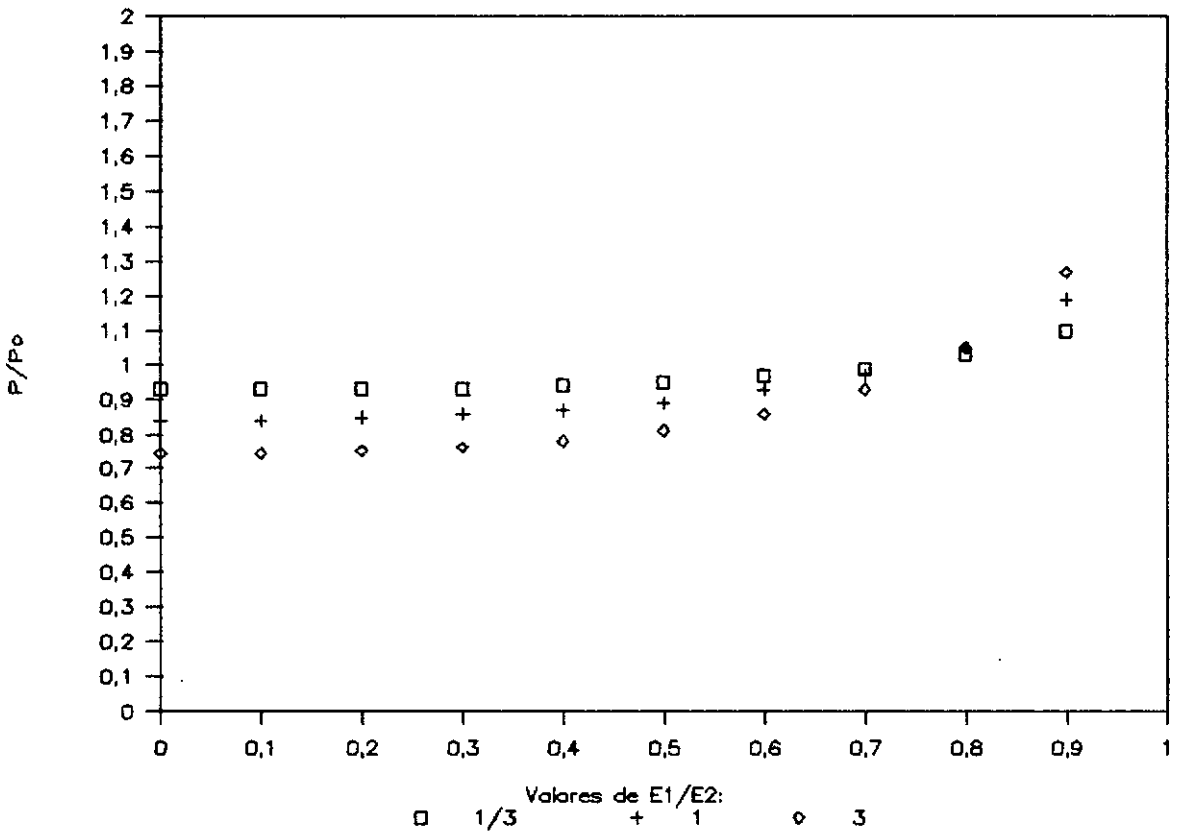


Fig. VI.17. - Variação de σ_1 ao longo da superfície de contacto para diversas relações entre os módulos de elasticidade longitudinal.

VI.2.3. Contacto de um bloco encravado em um semi-espço

Neste caso, pode-se calcular os esforços e deslocamentos discretizando-se apenas a superfície de contacto (fig. VI.18.) no semi-espço onde está apoiada a fundação..

No exemplo resolvido, a carga atuante vale $P = 100$, os módulos de elasticidade são $E_1 = 2100$ e $E_2 = 210$. Foram usados 12 elementos na superfície de contacto e, a princípio, apenas a superfície horizontal foi considerada em contacto. Para $\mu = 0$, obtém-se os resultados mostrados na fig. VI.19. para os esforços na superfície de contacto horizontal. Para a superfície de contacto vertical, os valores das tensões normais estão representados na fig. VI.20.

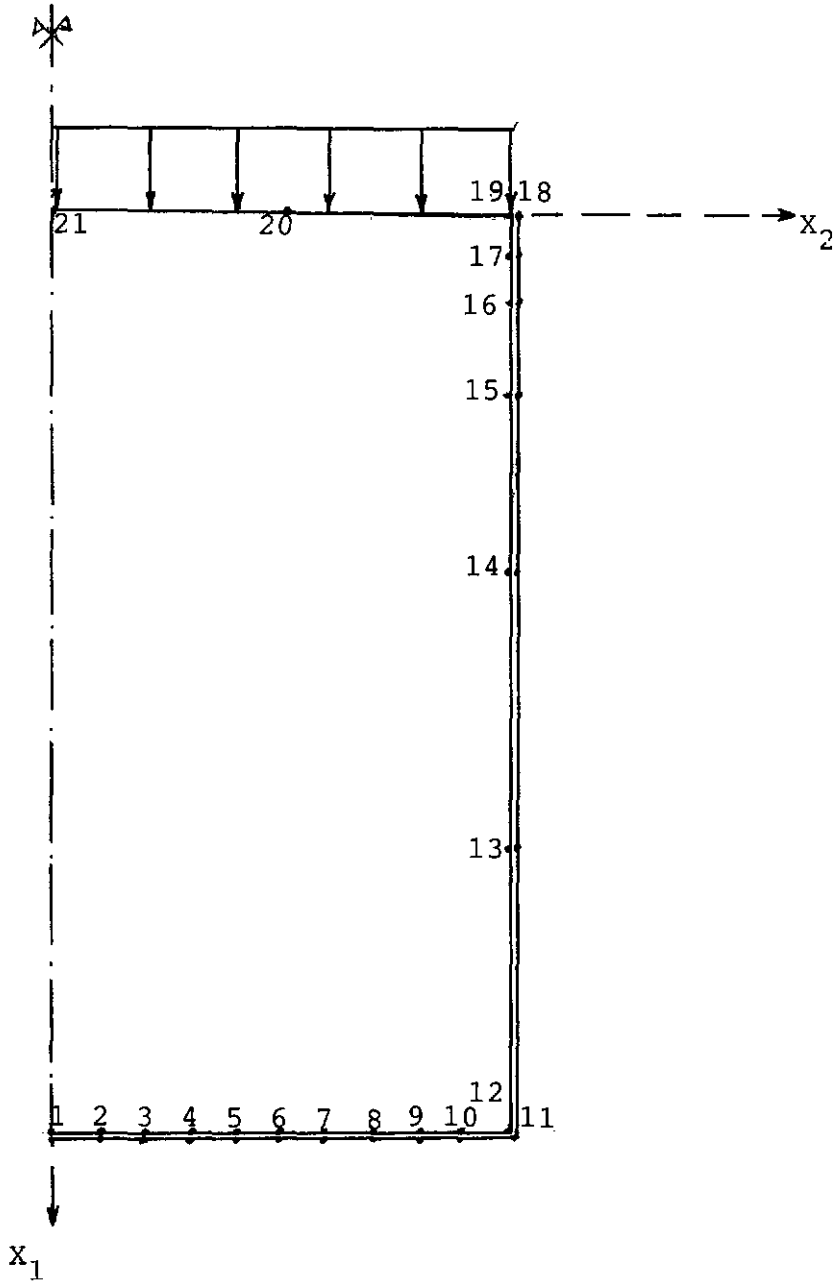


Fig. VI.18. - Superfície a ser discretizada no caso de um bloco encaixado em um semi-espaço, utilizando-se das simplificações devido à simetria.

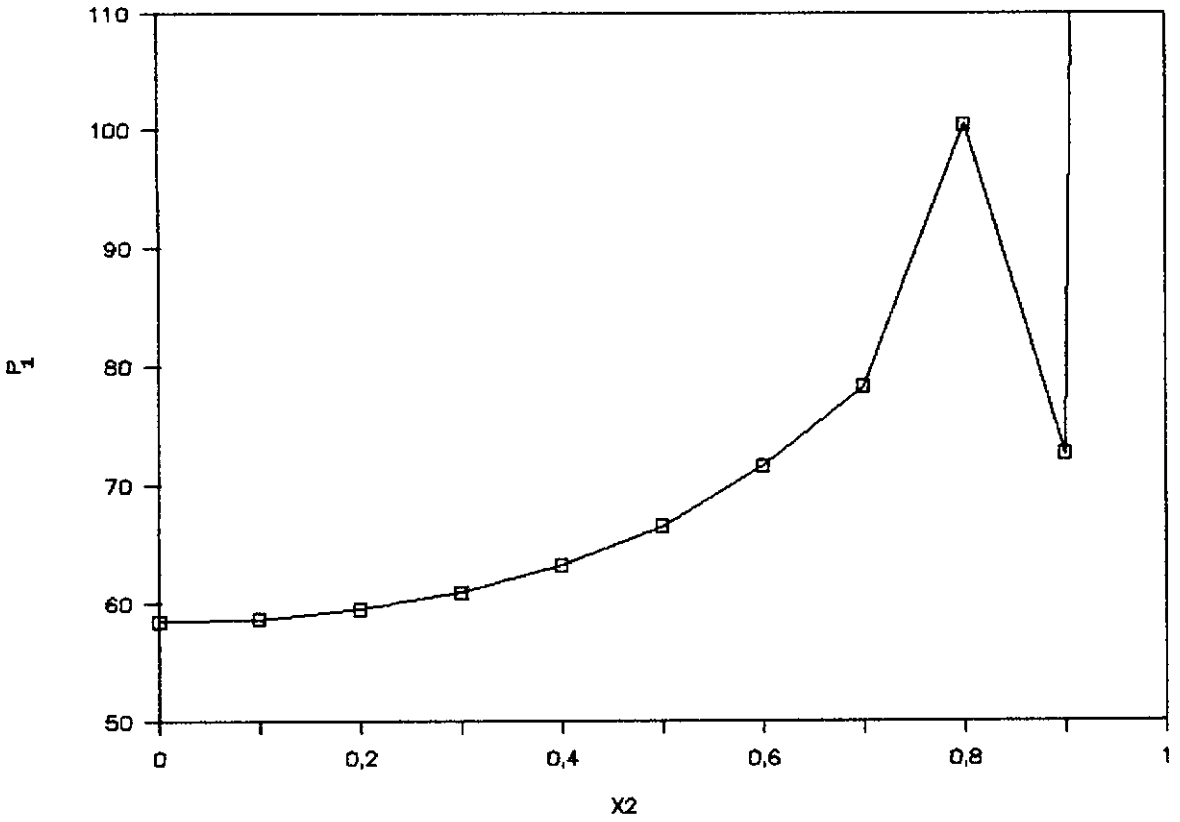


Fig. VI.19. - Variação de σ_1 ao longo da superfície de contacto horizontal.

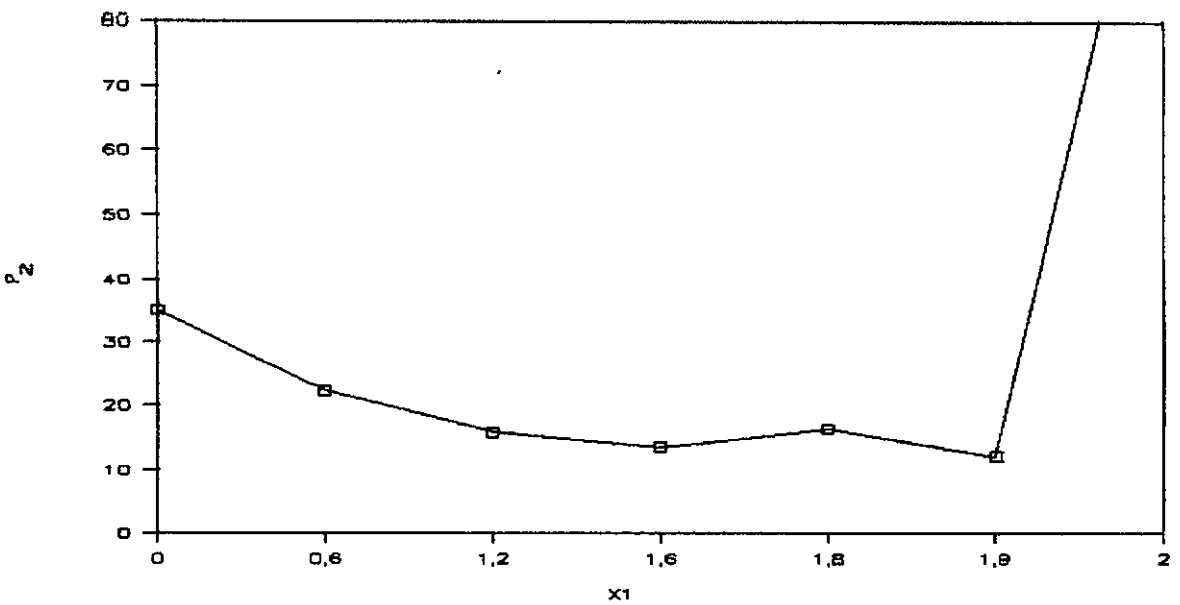


Fig. VI.19. - Variação de σ_2 ao longo da superfície de contacto vertical.

Capítulo VII

CONCLUSÕES

O desempenho do software desenvolvido neste trabalho pode ser considerado satisfatório em função da precisão dos resultados alcançados em comparação com outros resultados já obtidos por outros autores em alguns problemas analisados.

Foi implementada a solução do semiplano que abre um vasto campo de análises de problemas de contacto em meios semi-infinitos e que se mostrou vantajosa pela economia de tempo e trabalho na análise desta classe de problemas.

Também foi utilizado o elemento interpolado (ver Apendice A) para o caso de nós duplos e nós pertencentes aos eixos de simetria na região de contacto, evitando assim o mal condicionamento da matriz A .

A título de sugestão, em continuação a este trabalho pode-se utilizar elementos de ordem superior que devem conduzir a resultados melhores.

Também podem ser implementadas as soluções

de problemas de elasticidade tridimensional e para corpos não-elásticos (não-linearidade no domínio).

Além disso pode-se estudar a implementação de um coeficiente de atrito que seja função do deslizamento entre os nós.

APENDICE A

INTEGRAÇÃO ANALÍTICA PARA ELEMENTOS LINEARES

A.1. Introdução

Para o caso dos nós duplos (cantos), ou nós de simetria na região de contacto, aparecerão singularidades que devem ser evitadas. O procedimento utilizado foi adotar o elemento interpolado que consiste em deslocar o ponto fonte para o interior do mesmo, mantendo a função de interpolação sem alteração. Nesse caso as incógnitas continuam nos pontos extremos do elemento e unicamente o ponto fonte é deslocado para ξ_1 (fig. A.1.). As incógnitas de ξ_1 são expressas em função dos nós extremos u_i e u_{i+1} .

$$u_{\xi_1} = \phi^1(\xi_1) u_i + \phi^2(\xi_1) u_{i+1}$$

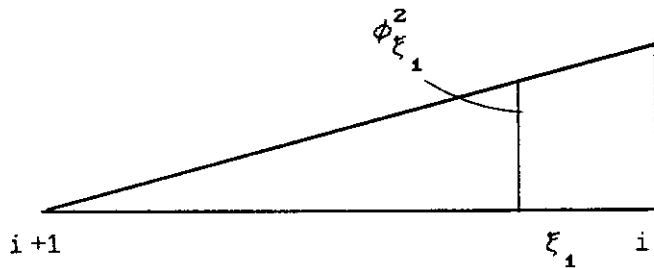
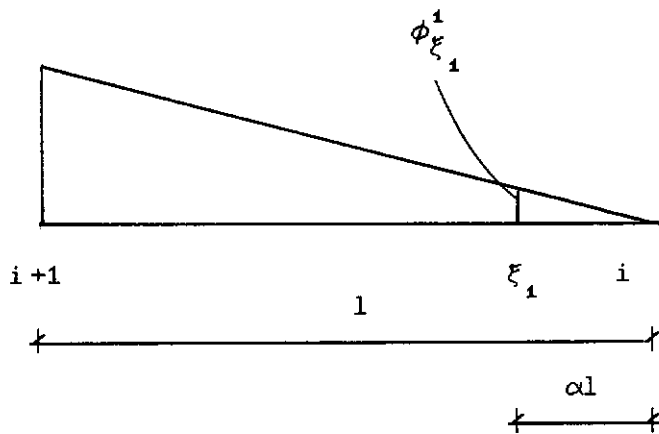


Fig. A.1. - Funções de interpolação para o elemento interpolado

Os resultados encontrados neste capítulo são válidos também para elementos não-interpolados que podem ser vistos como caso particular do elemento interpolado quando se faz $\alpha = 0$.

Para detalhes sobre a montagem das matrizes H e G para o elemento interpolado, veja-se [16].

A.2. - Integração analítica para o elemento linear interpolado quando o ponto fonte pertence ao elemento a ser integrado

1. Submatriz G

A expressão da solução fundamental que deve ser integrada é:

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{-(3 - 4\nu)}{8\pi(1 - \nu)G} \delta_{ij} \ln r + \frac{r_{,i} r_{,j}}{8\pi(1 - \nu)G}$$

Lembrando que o produto $r_{,i} r_{,j}$ permanece constante antes e depois de ξ , podemos chamar:

$$c_1 = \frac{-(3 - 4\nu)}{8\pi(1 - \nu)G}$$

$$c_2 = \frac{r_{,i} r_{,j}}{8\pi(1 - \nu)G}$$

a) Função de interpolação ϕ^i

Supondo o ponto fonte ξ aplicado no nó (2), ele será afastado de uma quantidade αl do nó funcional, e tem-se a situação indicada na fig A.2., onde:

$$a = \alpha$$

$$b = 1 - \alpha \tag{A.1}$$

$$c = \alpha l$$

$$d = (1 - \alpha) l$$

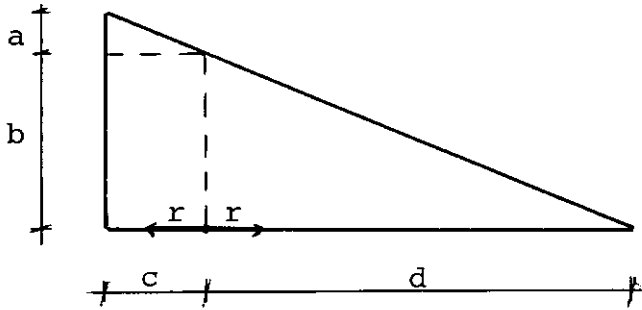


Fig. A.2. - Função de interpolação ϕ^1

Interessa calcular a integral:

$$g_{ij}^z = \int_0^l u_{ij}^*(\xi, x) \phi(\Gamma) d\Gamma \quad (\text{A.2})$$

Chamando de trecho 1 a parte do elemento à direita do ponto fonte, e trecho 2 a parte do elemento à esquerda do ponto fonte, pode-se exprimir a função de interpolação ϕ^1 em termos da variável r , da seguinte maneira:

$$\text{Trecho 1: } \phi^1 = \frac{d - r}{l}$$

$$\text{Trecho 2: } \phi^1 = b + \frac{a}{c} r$$

Tendo em conta que a singularidade está localizada no ponto onde se situa o ponto fonte, pode-se calcular a integral (A.2) dividindo-se o domínio da integração em duas partes, uma à direita e outra à esquerda do ponto fonte.

Parte 1

A integral (A.2) na parte 1 é expressa, em função de r , por

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^2 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^d (c_1 \delta_{ij} \ln r + c_2) \left(\frac{d-r}{1} \right) dr = \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ c_1 \delta_{ij} \left[\frac{1}{1} \left(\int_{\xi}^d d \ln r dr - \int_{\xi}^d r \ln r dr \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{c_2}{1} \left(\int_{\xi}^d d dr - \int_{\xi}^d r dr \right) \right\} = \\
 &= \frac{c_1 \delta_{ij}}{1} \left(d^2 (0,5 \ln d - 0,75) \right) + \frac{c_2}{1} \left(\frac{d^2}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Parte 2

A integral (A.2) na parte 2 é calculada como segue

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^2 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\int_{\xi}^c (c_1 \delta_{ij} \ln r + c_2) \left(b + \frac{a}{c} r \right) dr \right] = \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ c_1 \delta_{ij} \left[b \int_{\xi}^c \ln r dr + \frac{a}{c} \int_{\xi}^c r \ln r dr \right] + \right. \\
 &\quad \left. + c_2 \left[b \int_{\xi}^c dr + \frac{a}{c} \int_{\xi}^c r dr \right] \right\} =
 \end{aligned}$$

$$= c_1 \delta_{ij} c \left[\left(b + \frac{a}{2} \right) \ln c - \left(b + \frac{a}{4} \right) \right] + \\ + c_2 c \left[b + \frac{a}{2} \right]$$

O valor da integral ao longo de todo o elemento será a soma dos valores obtidos para a parte 1, mais os valores obtidos para a parte 2. Pode-se encontrar esse resultado, usando as equações (A.1):

$$g_{ij}^2 = c_1 \delta_{ij} \left[\frac{l^2 (1 - \alpha)^2}{1} (0,5 \ln d - 0,75) + \right. \\ \left. + \alpha l \left[\left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{2} \right) \ln c - \left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{4} \right) \right] \right] + \\ + c_2 \left[\alpha l \left[\left(1 - \alpha \right) + \frac{\alpha}{2} \right] + \frac{l^2 (1 - \alpha)^2}{2 l} \right] = \\ = \frac{c_1 \delta_{ij} l}{2} \left[\alpha (2 - \alpha) \ln c + (1 - \alpha)^2 \ln d + \alpha - \right. \\ \left. - 1,5 \right] + \frac{c_2 l}{2}$$

b) Função de interpolação ϕ^2

A função de interpolação ϕ^2 pode ser expressa em termos da variável r da seguinte maneira:

$$\text{Trecho 1 } \phi^2 = a + \frac{b}{d} r$$

$$\text{Trecho 2 } \phi^2 = \frac{c - r}{1}$$

onde os valores que aparecem na fórmula de ϕ^2 estão descritos na fig. A.3 e na equação (A.1).

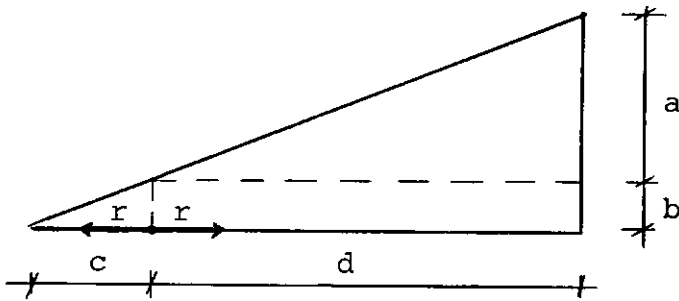


Fig. A.3. - Função de interpolação ϕ^2

A integral (A.2) pode ser calculada:

Parte 1:

$$\begin{aligned}
 g_{ij}^2 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^d (c_1 \delta_{ij} \ln r + c_2) \left(a + \frac{b}{d} r \right) dr \\
 &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[c_1 \delta_{ij} \left(a \int_{\xi}^d \ln r \, dr + \frac{b}{d} \int_{\xi}^d r \ln r \, dr \right) + \right. \\
 &\quad \left. + c_2 \left(a \int_{\xi}^d dr + \frac{b}{d} \int_{\xi}^d r \, dr \right) \right] =
 \end{aligned}$$

$$= c_1 \delta_{ij} \left[\left(a + \frac{b}{2} \right) \ln d - \left(a + \frac{b}{4} \right) \right] + \\ + c_2 \left(ad + \frac{bd}{2} \right)$$

Parte 2:

$$g_{ij}^2 = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\xi}^c (c_1 \delta_{ij} \ln r + c_2) \left(\frac{c-r}{1} \right) dr = \\ = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{c_1 \delta_{ij}}{1} \left(c \int_{\xi}^c \ln r dr - \int_{\xi}^c r \ln r dr \right) + \right. \\ \left. + \frac{c_2}{1} \left(c \int_{\xi}^c dr - \int_{\xi}^c r dr \right) \right] = \\ = \frac{c_1 \delta_{ij} c^2}{1} \left[0,5 \ln c - 0,75 \right] + \frac{c_2 c^2}{2 \cdot 1}$$

Somando-se as parcelas correspondentes às partes 1 e 2 e utilizando as relações dadas pelas equações (A.1), tem-se:

$$g_{ij}^2 = c_1 \delta_{ij} \left[1 (1 - \alpha) \left[\left(\alpha + \frac{1 - \alpha}{2} \right) \ln d - \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\alpha + \frac{1 - \alpha}{4} \right) \right] + \frac{\alpha^2 l^2}{1} (0,5 \ln c - 0,75) \right] + \\ + c_2 \left[\alpha l (1 - \alpha) + \frac{(1 - \alpha) l (1 - \alpha)}{2} + \frac{\alpha^2 l^2}{2 \cdot 1} \right] =$$

$$= \frac{c_1 \delta_{ij} 1}{2} \left[\alpha^2 \ln c + (1 - \alpha^2) \ln d - \alpha - 0,5 \right] + \frac{c_2 1}{2}$$

Analogamente podem ser obtidas as expressões da submatriz G quando temos o ponto fonte situado no nó (1).

2. Submatriz H

A expressão da solução fundamental que deve ser integrada para a obtenção da submatriz h é:

$$p_{ij}^* (\xi, x) = \frac{(1 - 2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i)}{4 \pi (1 - \nu) r}$$

que pode ser escrita de uma forma simplificada como

$$p_{ij}^* (\xi, x) = \frac{c_3}{r}$$

$$\text{onde : } c_3 = \frac{(1 - 2\nu) (r_{,i} n_j - r_{,j} n_i)}{4 \pi (1 - \nu)}$$

Pode-se observar que $c_3=0$ quando $i=j$ e $|c_3|=1$ quando $i \neq j$. O sinal varia de acordo com a posição de x em relação ao ponto fonte, sendo positivo antes do ponto fonte se $i=1$ e depois do ponto fonte se $i=2$, e negativo nos outros casos.

Fazendo a integração análogamente ao que foi feito no caso da submatriz g, encontramos os seguintes

resultados para a submatriz h:

a) Função de interpolação ϕ^1

$$h_{ij}^2 = c_3 \left[(1 - \alpha) \ln \left(\frac{c}{d} \right) + 1 \right]$$

b) Função de interpolação ϕ^2

$$h_{ij}^2 = c_3 \left[\alpha \ln \left(\frac{c}{d} \right) - 1 \right]$$

A.3. Solução do semi-plano

No caso da solução fundamental do semi-plano, uma vez que já foi feito o cálculo da integração analítica para a solução de Kelvin, seria necessário apenas calcular a expressão da solução complementar.

Para os elementos situados abaixo da superfície do semi-plano a integração pode ser feita numericamente, uma vez que a imagem do ponto-fonte estará fora do elemento. Resta calcular a solução complementar para os elementos situados na superfície do semi-plano. Neste caso os deslocamentos fundamentais e forças de superfície são dados por:

$$u_{11}^* = c_3 \ln r + c_4$$

$$u_{12}^* = -c_5 \theta + c_4$$

$$u_{21}^* = c_5 \theta + c_4$$

$$u_{22}^* = c_3 \ln r + c_4$$

e,

$$p_{ij}^* = - \frac{2}{\pi r} \left\{ r_{,i} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} \right\}$$

onde,

$$c_3 = - \frac{2(1-\nu)}{2\pi G}$$

$$c_4 = \frac{r_{,i} r_{,j}}{2\pi G}$$

$$c_5 = \frac{1-2\nu}{2\pi G}$$

É importante notar que a condição de forças de superfície nulas sobre a superfície do semi-plano é agora garantida pela ocorrência de $\partial r / \partial n$ na expressão de p_{ij}^* (isto é, $\partial r / \partial n = 0$ para $\xi, x \in \bar{\Gamma}$).

Fazendo os cálculos de forma análoga à que foi feita anteriormente, chega-se às seguintes expressões para a submatriz \tilde{G} , supondo o ponto-fonte ξ aplicado no nó

2:

a) Função de interpolação ϕ^1

Para $i = j$, tem-se:

$$g_{ii}^2 = \frac{c_3 l}{2} \left[\alpha (2 - \alpha) \ln c + (1 - \alpha)^2 \ln d + \alpha - 1,5 \right] - \frac{c_4 l}{2}$$

Para $i \neq j$, tem-se:

$$g_{ij}^2 = \frac{c_3 \theta l}{2} \left[4\alpha - 2\alpha^2 - 1 \right] - \frac{c_4 l}{2}$$

b) Função de interpolação ϕ^2

Para $i = j$, tem-se:

$$g_{ii}^2 = \frac{c_3 l}{2} \left[\alpha^2 \ln c + (1 - \alpha^2) \ln d - \alpha - 0,5 \right] - \frac{c_4 l}{2}$$

Para $i \neq j$, tem-se:

$$g_{ij}^2 = - \frac{c_3 \theta l}{2} \left[2 \alpha^2 - 1 \right] - \frac{c_4 l}{2}$$

APENDICE B

DETERMINAÇÃO DA DISTANCIA ENTRE UM PAR DE NÓS

O afastamento normal entre um par de nós é calculado através do produto escalar entre dois vetores: essa técnica é necessária pois a simples distância entre os nós pode, eventualmente, não fornecer-nos a informação correta, como no caso da fig. B.1., onde o afastamento normal entre os dois nós é nulo.



Fig. B.1. - Superfície em contacto: não há separação entre os dois corpos nesta região.

O primeiro vetor é o vetor que vai de um nó

a outro, e o segundo vetor é um vetor normal associado a esse par de nós. Esse segundo vetor (\tilde{n}) é calculado através de um valor médio da média dos vetores normais dos elementos adjacentes a esses nós (fig. B.2.).

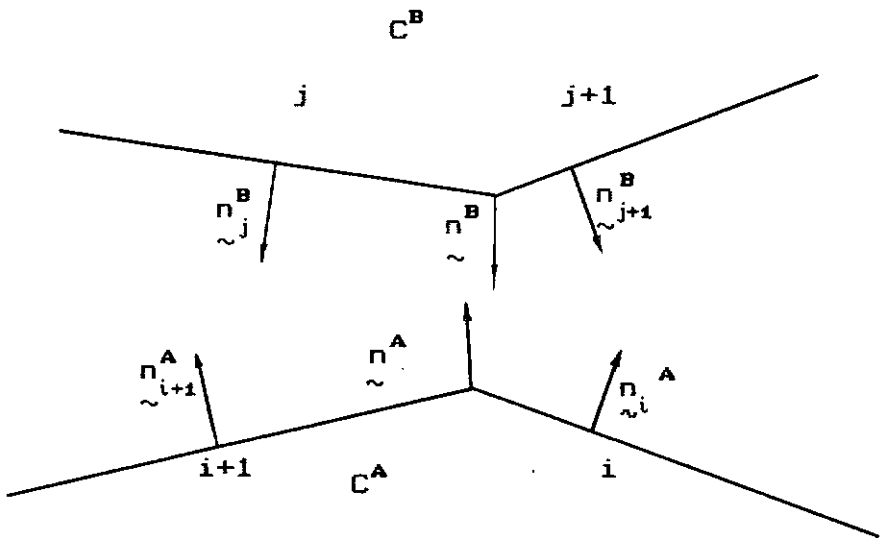


Fig. B.2. - Definição do vetor normal de um par de nós

$$\tilde{n}^B = \frac{n_j^B + n_{j+1}^B}{|n_j^B + n_{j+1}^B|}$$

$$\tilde{n}^A = \frac{n_{i+1}^A + n_i^A}{|n_{i+1}^A + n_i^A|}$$

$$\tilde{n} = \frac{n_{i+1}^A - n_j^B}{|n_{i+1}^A - n_j^B|}$$

onde,

\tilde{n}_i^A = vetor unitário normal do elemento i do corpo A

\tilde{n}_{i+1}^A = vetor unitário normal do elemento $i+1$ do corpo A

\tilde{n}_j^B = vetor unitário normal do elemento j do corpo B

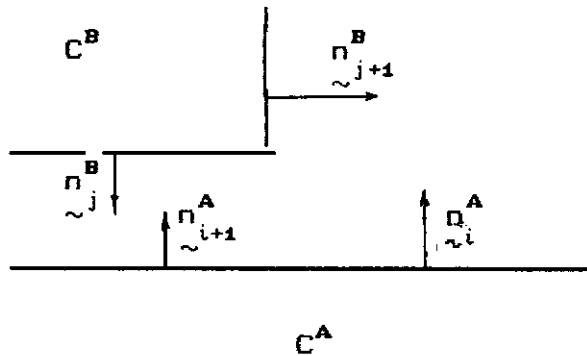
\tilde{n}_{j+1}^B = vetor unitário normal do elemento $j+1$ do corpo B

\tilde{n}^A = vetor unitário normal médio para o nó situado entre os elementos i e $i+1$

\tilde{n}^B = vetor unitário normal médio para o nó situado entre os elementos j e $j+1$

\tilde{n} = vetor unitário normal associado ao par de nós.

No caso em que o ângulo formado entre dois elementos adjacentes seja muito grande, deve-se adotar a normal apropriada e não a normal média (fig. B.3.).



$$\tilde{n}^B = \tilde{n}_j^B$$

$$\tilde{n}^A = \frac{\tilde{n}_{i+1}^A + \tilde{n}_i^A}{|\tilde{n}_{i+1}^A + \tilde{n}_i^A|}$$

Fig. B.3. - Normal para o caso de ângulo grande formado por elementos adjacentes

Os vetores \tilde{n}^A e \tilde{n}^B também servem para definir o sistema de coordenadas locais no nó, definindo o ângulo

θ_c (fig. B.4.).

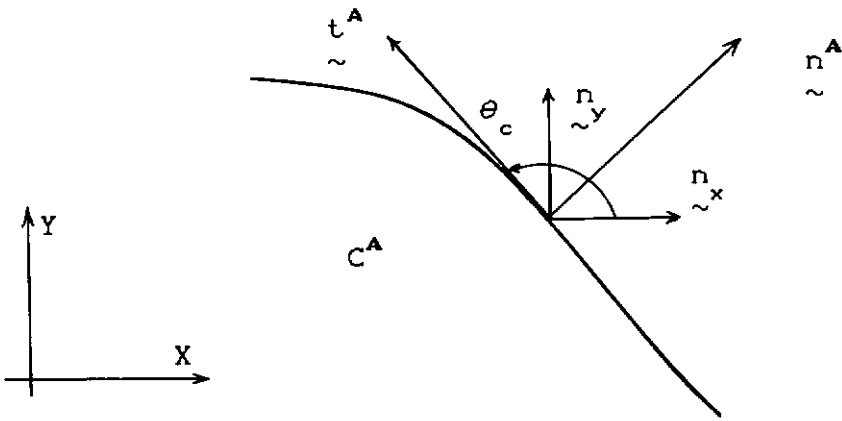


Fig. B.4. - Definição do angulo θ_c

Conforme é mostrado na figura, definido \tilde{n}^A , temos automaticamente a direção de \tilde{t}^A , e o angulo θ_c é o angulo formado entre a direção de \tilde{n}_x e \tilde{t}^A .

APENDICE C

ENTRADA DE DADOS DO PROGRAMA

São os seguintes os dados de entrada que devem ser fornecidos ao programa:

1. Um cartão com o título do programa no formato (20A4)

Todos os demais dados estão no formato livre.

2. Um cartão com os dados gerais do problema:

IPL, IDSYM, RIM, ITT

onde,

IPL = índice do tipo de problema (1=estado plano de tensão, 2=estado plano de deformação)

IDSYM = índice indicativo da simetria

0=caso sem simetria

1=simetria em relação ao eixo x

2=simetria em relação ao eixo y

3=simetria em relação aos eixos x e y

RIM = coeficiente de atrito do problema

ITT = índice do modo de resolução do problema

0=resolvido com iterações

1=resolvido sem iterações

3. Para cada um dos dois corpos, um cartão com

INFB, NE, NN, NI, EV, POV, IHP

INFB = índice do tipo de problema (1=contorno no infinito, 0=caso contrário)

NE = número de elementos

NN = número de nós

NI = número de pontos internos

EV = módulo de Young

POV = coeficiente de Poisson

IHP = índice da solução utilizada (0=Kelvin, 1=sol. do semiplano)

4. Para cada um dos NN(1)+NN(2) nós do contorno:

J, X(J), Y(J), IDN(J), ISYM(J), ICT(J)

J = número do nó

X e Y = coordenadas do nó

IDN = vetor indicador de nó duplo (=0 não há nó duplo, = número do nó com as mesmas coordenadas)

ISYM = vetor que indica se o nó está localizado em algum plano de simetria

0=não localiza-se em nenhum plano de simetria

1=localiza-se no plano normal a y

2=localiza-se no plano normal a x

3=localiza-se na intersecção dos planos de simetria

ICT = vetor indicador do contacto do nó (=0 não estará em contacto, = número do nó com o qual poderá estar em contacto)

5. Para cada um dos $NI(1)+NI(2)$ pontos internos:

J, X(J), Y(J), ISYM(J)

6. Para cada um dos $NE(1)+NE(2)$ elementos:

J, INC(J,1), INC(J,2)

INC = conectividade do elemento

7. Um cartão com os dados gerais das condições de apoio, carregamento e contacto:

NND, NNP, NNC, NNPC

NND = número de nós com deslocamentos prescritos

NNP = número de nós com forças de superfície prescritas

NNC = número de nós do corpo 1 inicialmente em contacto

NNPC = número total de nós do corpo 1 que poderão entrar em contacto

8. Para cada um dos NND nós com deslocamentos prescritos:

K, P(2*K-1), P(2*K), IP(2*K-1), IP(2*K)

K = número do nó

P = vetor auxiliar contendo deslocamentos e forças de superfície prescritas

IP = vetor com índice das condições de contorno

0=forças de superfície prescritas

1=deslocamentos prescritos

2=contacto de adesão

3=contacto de deslizamento

9. Para cada um dos NNP nós com forças de superfície

prescritas:

K, P(2*K-1), P(2*K)

10. Para cada um dos NNC nós em contacto:

K, IP(2*K)

11. Um cartão com os números dos nós inicial e final da superfície de contacto:

NMIN, NMAX

12. Um cartão com os dados da aplicação do carregamento:

DELTA, ALFA

DELTA = percentagem do carregamento total que é inicialmente aplicada

ALFA = percentagem do carregamento total que é acrescentada em cada aumento de carga.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] HERTZ, H., "Miscellaneous Papers" - On the contact of Elastic Solids Translation by Jones, D. E., Macmillan and Co. Ltd., London, 1986
- [2] FREDRIKSSON, B., "Finite Element Solution of Surface non-linearities in structural mechanics with special emphasis to contact and fracture mechanics problems", *Comp. & Struct.*, 6, 1976, 281-290
- [3] OKAMOTO, N., and NAKAZAWA, M., "Finite Element incremental contact analysis with various frictional conditions", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 14, 1979, 331-357
- [4] ANDERSON, T., PERSON, B. G. A., and FREDRIKSSON, B., "The Boundary Element Method Applied to two-dimensional contact problems". Proceedings of the second international seminar on recent advances in Boundary Element Methods, Southampton, Ed. C. A. Brebbia, CML Publications, 1980
- [5] ANDERSON, T., "The Boundary Element Method Applied to two-dimensional contact problems with friction". Proceedings of the third international seminar on recent advances in Boundary Element Methods, Irveni, California, Ed. C. A. Brebbia, Springer Verlag, Berlin, 1981

[6] ANDERSON, T, and PERSON, B. G. A., "The Boundary Element Method applied to two-dimensional contact problems", chapter 5 in "Progress in Boundary Elements", Vol. II, Ed. C. A. Brebbia, Pentech Press, London

[7] ANDERSON, T., "The second generation boundary element contact program", in Proceedings of the fourth international seminar on recent advances in Boundary Element Method, Ed. C. A. Brebbia, Southampton, 1982

[8] KARAMI, G., "A Boundary Element Method for two-dimensional contact problems", Ed. C. A. Brebbia and S. A. Orszag, 1989

[9] BREBBIA, C. A., "The Boundary Element Method for engineers", Petech Press, London, 1978

[10] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. F., and WROBEL, L. C., "Boundary Element Techniques, Theory and Application in Engineering", Springer - Verlag, 1984

[11] MELAN, E., "Der Spannungszustand Der Durch Eine Einzelkraft in Innern Beanspruchten Halbscheibe", Z. Angew. Math. Mech. 12, 343-346, 1932

[12] TELLES, J. C. F., BREBBIA, C. A., "Boundary Element Solution for Half-Plane Problems", Int. J. Solids Struct. 17, 1149-1158, 1981

- [13] OKUBO, H., Trans. Japan Soc. Mech. Engrs., vol. 18, n. 65 (1952-1), p. 58
- [14] DHTE, S., "Finite Element Analysis of Elastic Contact Problems", Bull. J. ASME, 16, 1973, 797 -804
- [15] TIMOSHENKO, S. P., Theory of Elasticity, New York, McGraw-Hill, 1970
- [16] NEVES, A. C., "Resolução de Problemas Viscoelásticos Utilizando o Método dos Elementos de Contorno", Tese M. Sc. - COPPE - RJ, 1988