



ANÁLISE ESTRUTURAL DE PAINÉIS CURVADOS REFORÇADOS SOB CARREGAMENTO DE PRESSÃO EXTERNA UNIFORME

André Luiz Ramalho Marinho

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Oceânica, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Oceânica.

Orientador: Theodoro Antoun Netto

Rio de Janeiro
Outubro de 2017

ANÁLISE ESTRUTURAL DE PAINÉIS CURVADOS REFORÇADOS SOB
CARREGAMENTO DE PRESSÃO EXTERNA UNIFORME

André Luiz Ramalho Marinho

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM
CIÊNCIAS EM ENGENHARIA OCEÂNICA.

Examinada por:

Prof. Theodoro Antoun Netto, Ph.D.

Prof. Segen Farid Estefen, Ph.D.

Prof. Luciana Loureiro da Silva Monteiro, D.Sc.

Dr. Flávio Antoun Netto, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

OUTUBRO DE 2017

Marinho, André Luiz Ramalho

Análise Estrutural de Painéis Curvados Reforçados sob Carregamento de Pressão Externa Uniforme/ André Luiz Ramalho Marinho. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XXVIII, 142 p.: il.; 29,7 cm.

Orientador: Theodoro Antoun Netto

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ COPPE/ Programa de Engenharia Oceânica, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 138-142.

1. Painéis curvados reforçados. 2. Carregamento de pressão externa. 3. Colapso. I. Netto, Theodoro Antoun. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Oceânica. III. Título.

À minha mãe,
Rita Ramalho,
pelo amor e luta.

AGRADECIMENTOS

Ao meu amigo, 1T (RM2-EN) Celso Capute, pela valiosa ajuda nas atividades que envolveram corte e solda.

Aos meus amigos do corpo técnico do LTS, Marcos Pedreira, Antônio Robson, Luciano Crespo, Renan Lima, Ricardo Oliveira e Lucas Lopes, pela dedicação na realização dos testes experimentais.

Aos meus amigos da América do Sul, Eldred Villacres, Katherine Beltrán, Carlos Quispe, Jose Parraga e Victor Palma, pelas dicas acadêmicas e agradável convívio.

Ao meu orientador técnico, CMG (EN) Flávio Antoun Netto, pelas orientações no sentido de atender as demandas da Marinha Brasil.

Ao meu orientador acadêmico, Prof. Theodoro Antoun Netto, pelos desafios propostos, pela serenidade nos conselhos e, sobretudo, por ter acreditado em mim.

À Marinha do Brasil, por ter me concedido a oportunidade de me dedicar de forma exclusiva às atividades deste estudo.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

ANÁLISE ESTRUTURAL DE PAINÉIS CURVADOS REFORÇADOS SOB
CARREGAMENTO DE PRESSÃO EXTERNA UNIFORME

André Luiz Ramalho Marinho

Outubro/2017

Orientador: Theodoro Antoun Netto

Programa: Engenharia Oceânica

O comportamento de painéis curvados reforçados sob carregamento de pressão externa uniforme é investigado neste estudo por meio de testes experimentais e simulações numéricas baseadas no método de elementos finitos. Os testes experimentais realizados nesta investigação compreendem ensaios de tração, medições de imperfeições e testes hiperbáricos. A verificação da acurácia do modelo numérico é efetuada através da correlação numérico-experimental. Os resultados decorrentes de simulações numéricas lineares e elastoplásticas são apresentados na análise paramétrica e no estudo de casos. São verificadas na análise paramétrica as influências dos parâmetros geométricos na pressão de colapso, enquanto que o estudo de casos examina o carregamento crítico de painéis curvados reforçados encontrados em situações reais. Ao final, conclusões baseadas nos resultados numéricos e experimentais são apresentadas, assim como sugestão de trabalhos futuros.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

STRUCTURAL ANALYSIS OF REINFORCED CURVED PANELS UNDER
UNIFORM EXTERNAL PRESSURE LOADING

André Luiz Ramalho Marinho

October/2017

Advisor: Theodoro Antoun Netto

Department: Ocean Engineering

The behavior of reinforced curved panels under uniform external pressure loading is investigated in this study through experimental tests and numerical simulations based on the finite element method. The experimental tests carried out in this investigation cover tensile testings, imperfection measurement and hyperbaric tests. The accuracy of the numerical model is verified in light of experimental results. The results from linear and elastoplastic numerical simulations are presented in the parametric analysis and in the case study. The parametric analysis verifies the influence of geometric parameters on the collapse, while the study case examines the critical pressure of full scale reinforced curved panels. Finally, conclusions based on numerical and experimental results are presented, as well as suggestions for future works.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	8
2.1	Estabilidade Elastica de Anéis Finos Circulares.....	8
2.2	Cascas Cilíndricas Circulares	12
2.3	Cascas Cilíndricas Reforçadas	16
2.4	Flambagem Inelástica de Cascas Cilíndricas sob Carregamento Hidrostático	18
2.5	Instabilidade Elástica de Reforços	19
2.6	Imperfeições Geométricas	20
2.6.1	Falta de Circularidade.....	21
2.6.2	Inclinação dos Reforços.....	22
2.6.3	Imperfeições em Modelos Numéricos	23
2.7	Tensões Residuais	24
2.7.1	Soldagem	24
2.7.2	Conformação	24
2.8	Aspectos Gerais de Painéis Curvados Reforçados.....	25
2.9	Equações Constitutivas	30
2.10	Método de Elementos Finitos.....	36
2.10.1	Método de Comprimento de Arco	40
3	TESTES EXPERIMENTAIS	43
3.1	Processo de Fabricação dos Painéis e Aparatos.....	43
3.2	Mapeamento da Superfície dos Painéis	47
3.3	Ensaio de Tração	57
3.3.1	Chapa de Aço 1	64
3.3.2	Chapa de Aço 2	66
3.3.3	Chapa de Aço 3	67

3.4	Testes Hiperbáricos.....	69
4	MODELO NUMÉRICO	79
4.1	Descrição do Modelo	79
4.2	Simulações Numéricas Preliminares	84
4.2.1	Conclusões Parciais	94
4.3	Correlação Numérico-Experimental	96
5	ANÁLISE PARAMÉTRICA	103
5.1	Influência da Razão L_f/L_b	104
5.2	Análise da Influência do Ângulo de Abertura	109
5.3	Análise da Influência das Imperfeições	117
6	ESTUDO DE CASOS.....	119
6.1	Cilindros Reforçados	121
6.2	Casos do Cilindro Reforçado 1	123
6.3	Casos do Cilindro Reforçado 2	128
7	CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE ESTUDOS FUTUROS	134
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	138

LISTA DE FIGURAS

Figura 1-1 – Plataforma TLP (Tension Leg Platform) (MODEC, 2015).....	1
Figura 1-2 – Plataforma SPAR (Wikipedia Spar Platform, 2008)	1
Figura 1-3 – “U-boat” da Primeira Guerra Mundial (U Boat Net, 2007).....	2
Figura 1-4 – Casco resistente de um “U-boat” da Segunda Guerra Mundial (Wikipedia U-Boat, 2006).....	2
Figura 1-5 – Malha de elementos finitos de um casco resistente e descontinuidades geométricas (GANNON, 2010).....	3
Figura 1-6 – Submarino bélico com casco resistente cilíndrico (Cryptome, 2012).	4
Figura 1-7 – DSV Alvin: casco resistente esférico (Wikipedia DSV Alvin, 2005)	5
Figura 1-8 – Seção de um submarino em construção (Defense Industry, 2010).....	5
Figura 1-9 – Escotilhão.	6
Figura 2-1 Representação dos deslocamentos após a deformação.	8
Figura 2-2 - Elemento infinitesimal de uma casca cilíndrica.	12
Figura 2-3 - Equilíbrio de forças.	13
Figura 2-4 - Equilíbrio de momentos.	13
Figura 2-5 - Aspecto ampliado de imperfeições em cascas cilíndricas (MACKAY, 2007).	21
Figura 2-6 – Inclinação dos reforços (KENDRICK, 1970).....	22
Figura 2-7 - Tensão de flexão devido a uma inclinação inicial axissimétrica - Pressão Aplicada de 568 Psi (VAUGHAN, 1963).	22
Figura 2-8 - Tensão de flexão devido a uma inclinação inicial senoidal - Pressão Aplicada de 568 Psi (VAUGHAN, 1963).....	23
Figura 2-9 – Imperfeições geométricas medidas a partir de uma casca cilíndrica (SHENCK e SHUELLER, 2007)	23
Figura 2-10 – “Overbend”, “Springback” e tensão residual (KENDRICK, 1970).	24

Figura 2-11 – Distribuição da tensão residual ao longo de um reforço (KENDRICK, 1970).....	24
Figura 2-12 – Estrutura discretizada da ponte Confluences (TRAN, DOUTHE, et al., 2014).....	25
Figura 2-13 – Efeito da curvatura na resistência ao colapso (carregamento axial) (RAMBERG, LEVY e FIENUB, 1944).....	26
Figura 2-14 – Parâmetros geométricos de uma chapa curvada reforçada (TRAN, DOUTHE, et al., 2014).....	26
Figura 2-15 – Tensão do primeiro modo de flambagem em função do parâmetro de curvatura Z (TRAN, DOUTHE, et al., 2014).....	27
Figura 2-16 Aspecto de flambagem linear elástica de acordo com o parâmetro Z (SILVESTRE, SILVA e MARTINS, 2016).....	27
Figura 2-17 Comparação do estudo analítico com resultados numéricos (SILVESTRE, SILVA e MARTINS, 2016).	27
Figura 2-18 Resposta de painéis planos a cargas explosivas (ARIFURRAHMAN, GUNAWAN, et al., 2017).....	28
Figura 2-19 Resposta de painéis curvados a cargas explosivas (ARIFURRAHMAN, GUNAWAN, et al., 2017).....	28
Figura 2-20 Aspecto das imperfeições ao longo do comprimento do painel (REIS, SILVA, et al., 2015).....	28
Figura 2-21 Simulação numérica elastoplástica com diferentes amplitudes de imperfeições (REIS, SILVA, et al., 2015).....	28
Figura 2-22 Geometria utilizada por Grunitz (2003).....	29
Figura 2-23 Cordão de solda no modelo de Grunitz (2003).....	29
Figura 2-24 Deflexão adimensionalizada para 4 tipos de revestimento (JAEHONG, NGUYEN e THANG, 2016)	30

Figura 2-25 Deflexão adimensionalizada para 4 parâmetros de imperfeição (JAEHONG, NGUYEN e THANG, 2016)	30
Figura 2-26 -Encruamento istrópico.....	35
Figura 2-27 -Encruamento cinemático.	35
Figura 2-28 - Método do comprimento de arco proposto por Riks (1972).	42
Figura 3-1 - O Berço.....	43
Figura 3-2 - Concepção em software CAD (SOLIDWORKS™).	43
Figura 3-3 – Vista 1 do Berço com os grampos de fixação.....	44
Figura 3-4 - Vista 2 do Berço com os grampos de fixação.	44
Figura 3-5- Gabarito de solda dos painéis composto de fatias e aparatos de fixação. ...	45
Figura 3-6 - Gabarito de solda com as cascas cilíndricas componentes e cavernas posicionadas.	45
Figura 3-7 Painel montado pronto para a soldagem.....	46
Figura 3-8 Painel pronto para ser montado com dispositivo para evitar empenamento.	46
Figura 3-9 Soldador conduzindo a soldagem e utilizando os equipamentos de proteção individual pertinentes.	47
Figura 3-10 Esquema de alternância dos cordões de solda.	47
Figura 3-11 Primeiro passe (solda autógena).	47
Figura 3-12 Aspecto final do cordão de solda.....	47
Figura 3-13 Braço de varredura FARO®.....	48
Figura 3-14 Tripé de apoio FARO®.....	48
Figura 3-15 Conjunto de aparatos para varredura FARO®.....	48
Figura 3-16 Mapeamento com ruídos e pontos indesejáveis - painel reforçado 1.	49
Figura 3-17 Nuvem de pontos após o processo de eliminação de ruídos e pontos indesejáveis painel reforçado 1.....	49

Figura 3-18 Mapeamento com ruídos e pontos indesejáveis - painel reforçado 2.	49
Figura 3-19 Nuvem de pontos após o processo de eliminação de ruídos e pontos indesejáveis painel reforçado 2.....	49
Figura 3-20 Mapeamento com ruídos e pontos indesejáveis - painel reforçado 3.	50
Figura 3-21 Nuvem de pontos após o processo de eliminação de ruídos e pontos indesejáveis painel reforçado 3.....	50
Figura 3-22 Mapeamento com ruídos e pontos indesejáveis - painel sem reforço 1.....	50
Figura 3-23 Nuvem de pontos após o processo de eliminação de ruídos e pontos indesejáveis painel sem reforço 1.....	50
Figura 3-24 Mapeamento com ruídos e pontos indesejáveis - painel sem reforço 2.....	50
Figura 3-25 Nuvem de pontos após o processo de eliminação de ruídos e pontos indesejáveis painel sem reforço 2.....	50
Figura 3-26 Comparação entre o mapeamento (azul) e o painel perfeito (vermelho) – painel reforçado 1.	51
Figura 3-27 Superfície parametrizada decorrente do mapeamento – painel reforçado 1.	51
Figura 3-28 Painel mapeado com adição de cavernas perfeitas - painel reforçado 1.....	52
Figura 3-29 Comparação entre o mapeamento (azul) e o painel perfeito (vermelho) – painel reforçado 2.	52
Figura 3-30 Superfície parametrizada decorrente do mapeamento – painel reforçado 2.	53
Figura 3-31 Painel mapeado com adição de cavernas perfeitas - painel reforçado 2.....	53
Figura 3-32 Comparação entre o mapeamento (azul) e o painel perfeito (vermelho) – painel reforçado 3.	53
Figura 3-33 Superfície parametrizada decorrente do mapeamento – painel reforçado 3.	54
Figura 3-34 Painel mapeado com adição de cavernas perfeitas - painel reforçado 3.....	54

Figura 3-35 Comparação entre o mapeamento (azul) e o painel perfeito (vermelho) – painel sem reforço 1.	54
Figura 3-36 Superfície parametrizada decorrente do mapeamento – painel sem reforço 1.	55
Figura 3-37 Comparação entre o mapeamento (azul) e o painel perfeito (vermelho) – painel sem reforço 2.	55
Figura 3-38 Superfície parametrizada decorrente do mapeamento – painel sem reforço 2.	55
Figura 3-39 Distribuição normal em função de a dos painéis reforçados.....	56
Figura 3-40 Distribuição normal em função de a dos painéis sem reforços.	56
Figura 3-41 Geometria dos corpos de prova (ASTM E8, 2011)	58
Figura 3-42 Extensômetro mecânico clip-on gauge.	58
Figura 3-43 Extensômetro elétrico uniaxial.	59
Figura 3-44 Extensômetro elétrico biaxial.	59
Figura 3-45 Ponte de Wheatstone.....	60
Figura 3-46 Corpos de prova instrumentados com os extensômetros elétricos.	61
Figura 3-47 - Vista 1 do corpo de prova instrumentado com extensômetro mecânico e acoplado a Instron® 8802.....	61
Figura 3-48 - Vista 2 do corpo de prova instrumentado com extensômetro mecânico e acoplado a Instron® 8802.....	61
Figura 3-49 – Diagrama tensão-deformação para materiais com ponto de escoamento descontínuo (ASTM E8, 2011).....	62
Figura 3-50 – Curva tensão-deformação verdadeira e o fenômeno de empescoamento (CALLISTER JR., 2007).....	62
Figura 3-51 Sentido de laminação da chapa e posicionamento dos elementos do painel.	64

Figura 3-52 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova longitudinal. .	64
Figura 3-53 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova circunferencial.	64
Figura 3-54 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova calandrado....	65
Figura 3-55 Curvas tensão verdadeira-deformação logarítmica de todos os corpos de prova e a aproximação de Ramberg-Osgood aplicada.	65
Figura 3-56 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova 01.	66
Figura 3-57 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova 02.	66
Figura 3-58 Curvas tensão-deformação verdadeira e curva ajustada com base na aproximação de Ramberg-Osgood.	67
Figura 3-59 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova 01.	68
Figura 3-60 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova 02.	68
Figura 3-61 Curvas tensão-deformação verdadeira e curva ajustada com base na aproximação de Ramberg-Osgood.	68
Figura 3-62 Câmara hiperbárica.	69
Figura 3-63 Aplicação da resina 5 Minute™ Epoxy.	70
Figura 3-64 Aplicação da resina Plastic Steel Putty.	71
Figura 3-65 Vedação com massa plástica adesiva e borracha vulcanizada.	71
Figura 3-66 Manta de borracha.	71
Figura 3-67 Detalhe dos extensômetros elétricos.	72
Figura 3-68 Painel instrumentado com extensômetros elétricos com aplicação de resina isolante.	72
Figura 3-69 Célula de carga, recipiente de retenção e conectores externos.	73
Figura 3-70 - Conjunto Berço-painel com o conector.	73
Figura 3-71 - Arranjo do conjunto Berço-painel dentro da câmara hiperbárica.	73

Figura 3-72 Parâmetros geométricos dos painéis.	74
Figura 3-73 Detalhe dos parâmetros geométricos referentes às cavernas dos painéis reforçados.	74
Figura 3-74 Painel reforçado 1 antes do teste.	76
Figura 3-75 Painel reforçado 1 colapsado.	76
Figura 3-76 Painel reforçado 3 antes do teste.	76
Figura 3-77 Painel reforçado 3 colapsado.	76
Figura 3-78 Painel sem reforço 2 antes do teste.	76
Figura 3-79 Painel sem reforço 2 colapsado.	76
Figura 4-1 – Geometria básica.	79
Figura 4-2 Aspecto geral da malha do modelo.	79
Figura 4-3 – Elemento SHELL181™ (ANSYS, 2013).	80
Figura 4-4 – Análise de sensibilidade da malha.	81
Figura 4-5 – Elemento HSFLD242™ (ANSYS, 2013).	82
Figura 4-6 - Duto discretizado com elementos sólidos e hidrostáticos (SAKAKIBARA, KYRIAKIDES e CORONA, 2008).	83
Figura 4-7 - Malha composta pelos elementos SHELL181™ e HSFLD242™.	83
Figura 4-8 - Malha composta somente pelo elemento SHELL181™.	83
Figura 4-9 – Tensão verdadeira X deformação plástica AISI 1020 (SNIADDECKI, 2012).	85
Figura 4-10 - Pressão de colapso linear P_c de painéis sem reforços.	85
Figura 4-11 - Pressão de colapso linear de modelos reforçados.	86
Figura 4-12 - Colapso entre cavernas.	86
Figura 4-13 - Colapso global.	87
Figura 4-14 - Instabilidade das cavernas.	87

Figura 4-15 – Pressão de colapso com modelos constitutivos elásticos e elastoplásticos.	87
Figura 4-16 – Curvas pressão de carregamento-deslocamento (pós-colapso).	88
Figura 4-17 - Pressão de colapso P_c de painéis reforçados.	88
Figura 4-18 – Curvas pressão de carregamento P-deslocamento.	89
Figura 4-19 - Curvas pressão de carregamento P-deslocamento.....	89
Figura 4-20 – Curva P_c X L_f para diferentes condições de contorno.....	90
Figura 4-21 - Curva carregamento- deslocamento para diferentes condições de contorno.	90
Figura 4-22 - Curva Tensão X Deformação bilinear do MAT-1.....	91
Figura 4-23 - P_c X L_f material: AISI 1020 e MAT-1.	91
Figura 4-24 - Curva carregamento- deslocamento considerando AISI 1020 e MAT-1.	92
Figura 4-25 - P_c X L_f variando h_w	92
Figura 4-26 Curva carregamento- deslocamento variando h_w	93
Figura 4-27 - P_{cd} / P_c X n_{cir} para diferentes espessuras e condições de contorno.....	94
Figura 4-28 - P_{cd} / P_c X μ para diferentes espessuras e condições de contorno.	94
Figura 4-29 Apresentação esquemática da posição dos extensômetros elétricos no painel reforçado 2.....	96
Figura 4-30 Correlação numérico-experimental – G2 Long.	97
Figura 4-31 Correlação numérico-experimental – G3 Long.	97
Figura 4-32 Correlação numérico-experimental – G3 Trans.....	97
Figura 4-33 Apresentação esquemática da posição dos extensômetros elétricos no painel sem reforço 2.	98
Figura 4-34 Correlação numérico-experimental Gage 1.	98
Figura 4-35 Correlação numérico-experimental Gage 2.	98

Figura 4-36 Correlação numérico-experimental Gage 3.	99
Figura 4-37 Apresentação esquemática da posição dos extensômetros elétricos no painel reforçado 3.	100
Figura 4-38 Correlação numérico-experimental do extensômetro 2 transversal (Gage 2).	100
Figura 4-39 Correlação numérico-experimental do extensômetro 2 longitudinal (Gage 2).	100
Figura 4-40 Correlação numérico-experimental do extensômetro 3 transversal (Gage 3).	101
Figura 4-41 Correlação numérico-experimental do extensômetro 3 longitudinal (Gage 3).	101
Figura 4-42 Correlação numérico-experimental do extensômetro 1 transversal (Gage 1).	101
Figura 4-43 Correlação numérico-experimental do extensômetro 4 transversal (Gage 4).	101
Figura 5-1 Solução elastoplástica para diferentes valores de $LfLb$ (painéis engastados).	104
Figura 5-2 Solução elastoplástica para diferentes valores de $LfLb$ (painéis simplesmente apoiados).	104
Figura 5-3 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $LfLb=1/6$	104
Figura 5-4 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $LfLb=1/6$	104
Figura 5-5 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $LfLb=1/6$	104
Figura 5-6 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $LfLb=1/6$	104

Figura 5-7 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $LfLb=1/8$	105
Figura 5-8 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $LfLb=1/8$	105
Figura 5-9 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $LfLb=1/8$	105
Figura 5-10 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $LfLb=1/8$	105
Figura 5-11 Deformação plástica circunferencial na casca cilíndrica - $LfLb=1/6$ (engastado).	107
Figura 5-12 Deformação plástica circunferencial nas cavernas - $LfLb=1/6$ (engastado).	107
Figura 5-13 Deformação plástica longitudinal na casca cilíndrica - $LfLb=1/6$ (engastado).	107
Figura 5-14 Deformação plástica longitudinal nas cavernas - $LfLb=1/6$ (engastado).	107
Figura 5-15 Deformação plástica circunferencial na casca cilíndrica - $LfLb=1/4$ (simplesmente apoiado).	108
Figura 5-16 Deformação plástica circunferencial nas cavernas - $LfLb=1/4$ (simplesmente apoiado).	108
Figura 5-17 Deformação plástica longitudinal na casca cilíndrica - $LfLb=1/4$ (simplesmente apoiado).	108
Figura 5-18 Deformação plástica longitudinal nas cavernas - $LfLb=1/4$ (simplesmente apoiado).	108
Figura 5-19 Solução elastoplástica para diferentes valores θ (engastados).	109
Figura 5-20 Solução elastoplástica para diferentes valores θ (simplesmente apoiados).	109

Figura 5-21 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $\theta=20^\circ$	110
Figura 5-22 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $\theta=20^\circ$	110
Figura 5-23 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $\theta=30^\circ$	110
Figura 5-24 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $\theta=30^\circ$	110
Figura 5-25 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $\theta=40^\circ$	110
Figura 5-26 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $\theta=40^\circ$	110
Figura 5-27 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $\theta=50^\circ$	111
Figura 5-28 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $\theta=50^\circ$	111
Figura 5-29 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $\theta=60^\circ$	111
Figura 5-30 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $\theta=60^\circ$	111
Figura 5-31 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $\theta=20^\circ$	111
Figura 5-32 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $\theta=20^\circ$	111
Figura 5-33 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $\theta=30^\circ$	112
Figura 5-34 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $\theta=30^\circ$	112

Figura 5-35 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $\theta=40^\circ$	112
Figura 5-36 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $\theta=40^\circ$	112
Figura 5-37 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $\theta=50^\circ$	112
Figura 5-38 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $\theta=50^\circ$	112
Figura 5-39 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $\theta=60^\circ$	113
Figura 5-40 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $\theta=60^\circ$	113
Figura 5-41 Deformação plástica circunferencial na casca cilíndrica - $\theta=60^\circ$ (engastado).	115
Figura 5-42 Deformação plástica circunferencial nas cavernas - $\theta=60^\circ$ (engastado)..	115
Figura 5-43 Deformação plástica longitudinal na casca cilíndrica - $\theta=60^\circ$ (engastado).	115
Figura 5-44 Deformação plástica longitudinal nas cavernas - $\theta=60^\circ$ (engastado).....	115
Figura 5-45 Deformação plástica circunferencial na casca cilíndrica - $\theta=60^\circ$ (simplesmente apoiado).....	115
Figura 5-46 Deformação plástica circunferencial nas cavernas - $\theta=60^\circ$ (simplesmente apoiado).	115
Figura 5-47 Deformação plástica longitudinal na casca cilíndrica - $\theta=60^\circ$ (simplesmente apoiado).	116
Figura 5-48 Deformação plástica longitudinal nas cavernas - $\theta=60^\circ$ (simplesmente apoiado).	116
Figura 5-49 Deformação plástica circunferencial - $\theta=30^\circ$ (engastado).	116

Figura 5-50 Deformação plástica longitudinal - $\theta=30^\circ$ (engastado).....	116
Figura 5-51 Solução elastoplástica para diferentes valores μ (painéis engastados).....	117
Figura 5-52 Solução elastoplástica para diferentes valores μ (painéis simplesmente apoiados).....	117
Figura 6-1 Curva tensão-deformação de aço de alta resistência utilizada nos modelos numéricos.	120
Figura 6-2 Flambagem linear do cilindro reforçado 1.....	122
Figura 6-3 Flambagem linear do cilindro reforçado 2.....	122
Figura 6-4 Caso A engastado visto a partir casca da cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).....	123
Figura 6-5 Caso A engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).....	123
Figura 6-6 Caso B engastado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).....	123
Figura 6-7 Caso B engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).....	123
Figura 6-8 Caso C engastado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).....	124
Figura 6-9 Caso C engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).....	124
Figura 6-10 Caso A simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento longitudinal).....	124
Figura 6-11 Caso A simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).....	124
Figura 6-12 Caso B simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento longitudinal).....	124

Figura 6-13 Caso B simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).....	124
Figura 6-14 Caso C simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento longitudinal).	125
Figura 6-15 Caso C simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).....	125
Figura 6-16 Comparação da relação P/P_c de casos engastados com cilindro reforçado 1.	125
Figura 6-17 Comparação da relação P/P_c de casos simplesmente apoiados com cilindro reforçado 1.....	125
Figura 6-18 Comparação da relação p/P_{c01} de casos engastados com cilindro reforçado 1.	126
Figura 6-19 Comparação da relação p/P_{c01} de casos simplesmente apoiados com cilindro reforçado 1.....	126
Figura 6-20 Deformação plástica radial para o caso B engastado.....	127
Figura 6-21 Deformação plástica radial para o caso B engastado (detalhe dos flanges e almas).	127
Figura 6-22 Deformação plástica radial para o caso B simplesmente apoiado.	127
Figura 6-23 Deformação plástica longitudinal para o caso B simplesmente apoiado (detalhe dos flanges e almas).....	127
Figura 6-24 Caso A engastado visto a partir casca da cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).....	128
Figura 6-25 Caso A engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).....	128
Figura 6-26 Caso B engastado visto a partir casca da cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).....	129

Figura 6-27 Caso B engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).....	129
Figura 6-28 Caso C engastado visto a partir casca da cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).....	129
Figura 6-29 Caso C engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).....	129
Figura 6-30 Caso A simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).	129
Figura 6-31 Caso A simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).....	129
Figura 6-32 Caso B simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).	130
Figura 6-33 Caso B simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).....	130
Figura 6-34 Caso C simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).	130
Figura 6-35 Caso C simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).....	130
Figura 6-36 Comparação da relação P/P_c de casos engastados com cilindro reforçado 2.	131
Figura 6-37 Comparação da relação p/P_c de casos simplesmente apoiados com cilindro reforçado 2.....	131
Figura 6-38 Comparação da relação P/P_{co} de casos engastados com cilindro reforçado 2.	131
Figura 6-39 Comparação da relação P/P_{co} de casos simplesmente apoiados com cilindro reforçado 2.....	131
Figura 6-40 Deformação plástica longitudinal para o caso C engastado.	132

Figura 6-41 Deformação plástica longitudinal para o caso C engastado (detalhe dos flanges e almas).....	132
Figura 6-42 Deformação plástica longitudinal para o caso C simplesmente apoiado..	133
Figura 6-43 Deformação plástica longitudinal para o caso C simplesmente apoiado (detalhe dos flanges e almas).....	133

LISTA DE TABELAS

Tabela 3-1 Raio médio, desvio padrão, $\Delta 1$ e $\Delta 2$ com as respectivas coordenadas, dos painéis reforçados.	56
Tabela 3-2 Raio médio, desvio padrão, $\Delta 1$ e $\Delta 2$ com as respectivas coordenadas, dos painéis sem reforços.	57
Tabela 3-3 Dimensões dos corpos de prova (mm).	58
Tabela 3-4 Dados técnicos do extensômetro mecânico (INSTRON, 2007).	59
Tabela 3-5 Resumo das propriedades mecânicas da chapa de aço 1.	65
Tabela 3-6 Parâmetros obtidos através da aproximação de Ramberg-Osgood para a chapa de aço 1.	66
Tabela 3-7 Resumo das propriedades mecânicas do ensaio de tração 2.	67
Tabela 3-8 Parâmetros obtidos através da aproximação de Ramberg-Osgood para o ensaio de tração 2.	67
Tabela 3-9 Resumo das propriedades mecânicas do ensaio de tração 3.	69
Tabela 3-10 Parâmetros obtidos através da aproximação de Ramberg-Osgood para o ensaio de tração 3.	69
Tabela 3-11 Dados técnicos da câmara hiperbárica.	70
Tabela 3-12 Especificações técnicas 5 Minute TM Epoxy (DEVCON, 2012).	70
Tabela 3-13 Informações técnicas da resina Plastic Steel Putty (DEVCON, 2012).	70
Tabela 3-14 Dados técnicos da célula de carga modelo 1630-03C (PIEZOTRONICS, 2015).	73
Tabela 3-15 Valores dos parâmetros geométricos comuns a todos os painéis testados.	74
Tabela 3-16 Valores dos parâmetros geométricos das cavernas dos painéis reforçados.	75
Tabela 3-17 Correlação painel-chapa de aço, propriedades mecânicas e resultados decorrentes do mapeamento.	75
Tabela 3-18 Pressão de colapso dos painéis.	76

Tabela 4-1 - Modelos simulados nos estágios iniciais.	84
Tabela 4-2 - Propriedades mecânicas AISI 1020 (KUTZ, 2002).	84
Tabela 4-3 - Propriedades mecânicas do MAT-1.	91
Tabela 4-4 Correlação da posição dos extensômetros com os raios médios verificados no mapeamento das superfícies.	102
Tabela 5-1 Valores de P_c , P_{co} e adimensionais.	105
Tabela 5-2 – Deformações elásticas e plásticas máximas observadas no limiar do colapso.	107
Tabela 5-3 - Valores de P_c , P_{co} e adimensionais.	113
Tabela 5-4 - Deformações elásticas e plásticas máximas observadas no limiar do colapso.	114
Tabela 5-5 - Valores de P_c , P_{co} e adimensionais.	117
Tabela 5-6 - Deformações elásticas e plásticas máximas observadas no limiar do colapso.	118
Tabela 6-1 Relação $LfLb$ dos casos.	119
Tabela 6-2 Parâmetros geométricos dos cilindros reforçados.	121
Tabela 6-3 Pressão de colapso dos cilindros reforçados.	122
Tabela 6-4 Resultados numéricos para os casos em análise.	126
Tabela 6-5 Resultados numéricos para os casos em análise.	132

LISTA DE SÍMBOLOS

- a_m : raio da superfície média da casca cilíndrica;
- a_{gc} : raio do centro de gravidade do reforço;
- A e I : Área e momento de inércia da seção transversal, respectivamente;
- $A_1 = 1 - \frac{1-E_t/E_s}{4(1-\nu_p^2)K^2Q} [(2 - \nu_p) - (1 - 2\nu_p)k]^2$;
- $A_2 = 1 - \frac{1-E_t/E_s}{4(1-\nu_p^2)K^2Q} [(1 - 2\nu_p) - (2 - \nu_p)k]^2$;
- $A_{12} = 1 + \frac{1-E_t/E_s}{4\nu_p(1-\nu_p^2)K^2Q} [(2 - \nu_p) - (1 - 2\nu_p)k][(1 - 2\nu_p) - (2 - \nu_p)k]$;
- $C_1 = \sqrt{\frac{A_1A_2 - \nu_p^2A_{12}^2}{1-\nu_p^2}}$.
- E_s : módulo secante obtido da curva tensão-deformação do material;
- E_t : módulo tangente obtido da curva tensão-deformação do material;
- f : razão entre a tensão média na direção axial e a tensão média circunferencial entre cavernas;
- $k = f^{-1}$;
- $K^2 = 1 - k + k^2$;
- $L_{eff} = \frac{2}{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}} \sqrt{a_m h}$
- p_{cr}^{el} : pressão de elástica de flambagem;
- p_{cr}^i : pressão inelástica de flambagem;
- $Q = 1 + \frac{1-E_t/E_s}{4\nu_p(1-\nu_p^2)K^2} \{ [(2 - \nu_p) - (1 - 2\nu_p)k]^2 - 3(1 - \nu_p^2) \}$;
- $u, v, e w$: deslocamentos no sentido x, y e z , respectivamente;
- $\alpha = \sqrt[4]{\frac{3\left(\frac{A_2}{A_1} - \nu_p^2 \frac{A_{12}^2}{A_1^2}\right)}{a_m^2 h^2}}$;
- $\alpha 2 = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_m^2 t_p^2}}$;
- β : ângulo de rotação do modelo deformado;
- $\Phi = 1,23 \frac{\sqrt{a_m h}}{L}$;
- $\nu_p = \frac{1}{2} - \frac{E_s}{E} \left(\frac{1}{2} - \nu \right)$;

1 INTRODUÇÃO

A utilização de cascas cilíndricas, reforçadas ou não, é encontrada em diversas áreas tais como construção civil, indústria *offshore*, aeroespacial e automotiva. Nas estruturas dedicadas às atividades *offshore*, é muito comum encontrarmos cascas cilíndricas projetadas para suportar carregamentos e para prover flutuabilidade às plataformas destinadas à perfuração e produção de petróleo. Plataformas do tipo *TLP* (*Tension-Leg Platform*) e *SPAR* são exemplos de estruturas que utilizam cascas cilíndricas como suporte estrutural e provedores de flutuabilidade (Figura 1-1e Figura 1-2).



Figura 1-1 – Plataforma TLP (*Tension Leg Platform*) (MODEC, 2015).



Figura 1-2 – Plataforma SPAR (Wikipedia Spar Platform, 2008)

Com o início da exploração marítima do petróleo, estudos e testes experimentais se intensificaram em busca de explicações e resultados mais precisos a respeito da flambagem de casca cilíndricas sob carregamento compressivo axialmente aplicado devido ao seu próprio peso, levando em consideração os carregamentos hidrostáticos decorrentes da interação entre o meio (água do mar) e a estrutura. De posse do conjunto de resultados produzidos pela comunidade científica, normas têm sido elaboradas objetivando a exposição de fórmulas que auxiliam na tomada de decisões nas fases iniciais de projetos. A precisão dos critérios adotados pelas normas na previsão do colapso de cascas cilíndricas é baseada na comparação de extensos bancos de dados levantados através dos últimos anos. Não raramente, critérios adotados por uma norma são comparados com outras de forma a manter um entendimento uniforme.

Ainda dentro do contexto marítimo, áreas não relacionadas com a exploração econômica também possuem aplicações práticas de cascas cilíndricas buscando o mesmo objetivo da indústria *offshore*, ou seja, geometrias que proporcionam flutuabilidade e resistência a carregamentos externos. O surgimento dos *U-boats* (Figura 1-3e Figura 1-4) na Primeira Guerra Mundial despertou a atenção dos principais estrategistas para a eficiência dos submarinos em um cenário de beligerância marítimo. A principal vantagem dos submarinos em relação aos navios de superfície é a capacidade de se manter oculto. Os métodos de detecção de submarinos por navios de superfície na Primeira Guerra eram deficientes, resultando em um prejuízo de 11 milhões de toneladas de navios mercantes e outras centenas de toneladas de navios de guerra aliados.

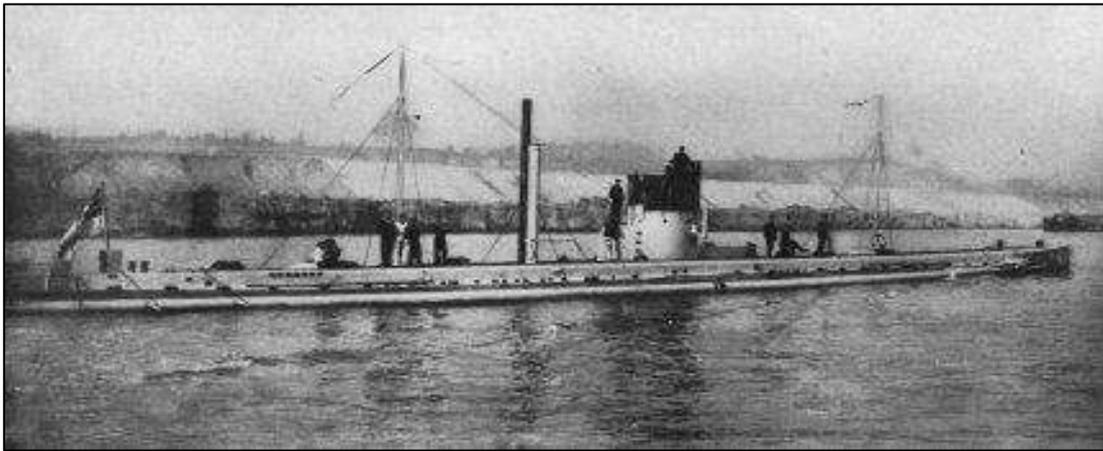


Figura 1-3 – “U-boat” da Primeira Guerra Mundial (U Boat Net, 2007).

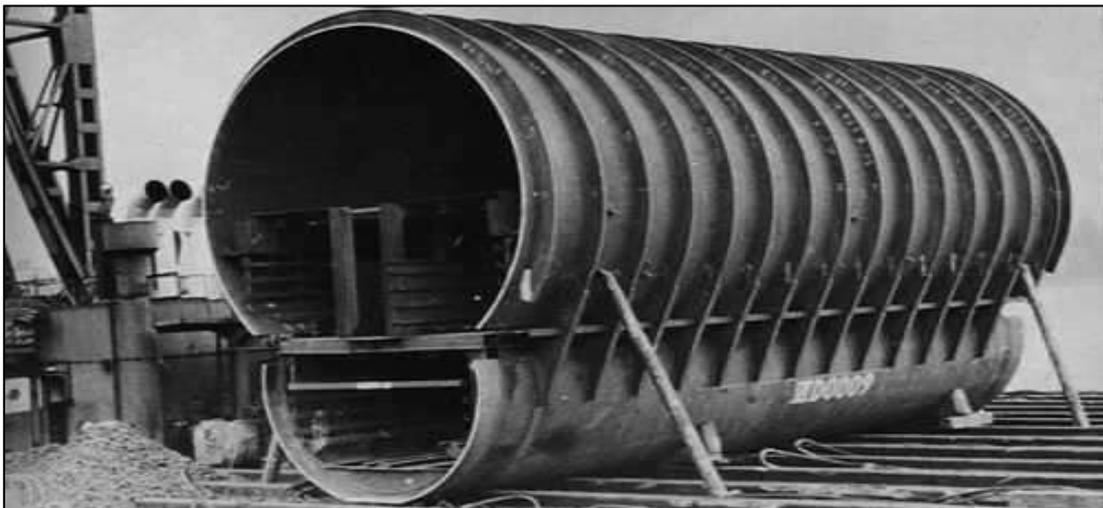


Figura 1-4 – Casco resistente de um “U-boat” da Segunda Guerra Mundial (Wikipedia U-Boat, 2006).

Após a Segunda Guerra, estudos sobre o comportamento do casco resistente de submarinos produziram trabalhos e referências que são citadas até hoje em publicações que transcorrem a respeito de cascas cilíndricas reforçadas sob carregamento hidrostático.

Com o surgimento do *método de elementos finitos* no final da década de 1950, e o seu reconhecimento como uma poderosa ferramenta de simulação numérica no início da década de 1960, foi possível a solução numérica das equações diferenciais que governam o comportamento de estruturas complexas. Além de transpor a barreira do conservadorismo das soluções encontradas, o método de elementos finitos permitiu uma abordagem mais segura em relação às geometrias complexas, conforme o exemplo apresentado na Figura 1-5. Atualmente, é imprescindível a utilização do método de elementos finitos em estudos que envolvem análise estrutural devido à complexidade das geometrias e a economia de tempo de trabalho oferecida pelo método.

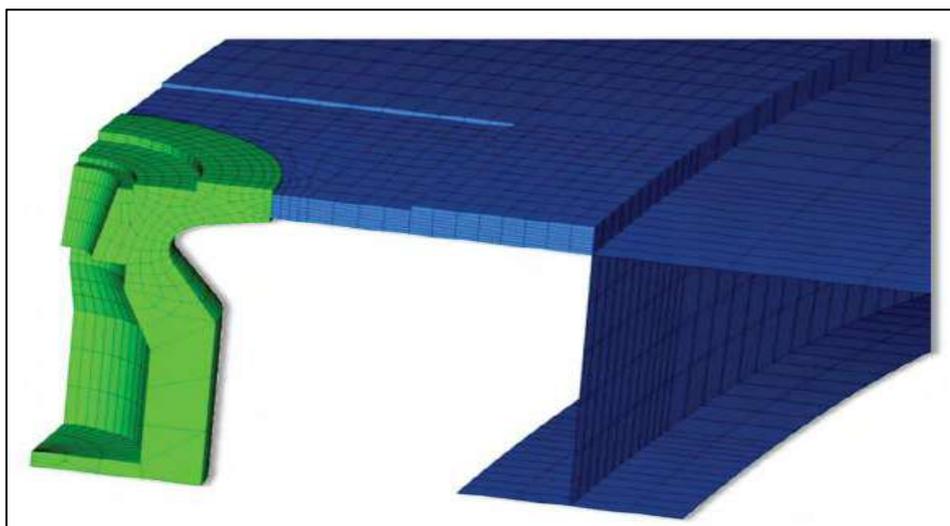


Figura 1-5 – Malha de elementos finitos de um casco resistente e discontinuidades geométricas (GANNON, 2010).

Igualmente ao que é adotado para navios de superfície, a metodologia baseada em uma espiral de projeto também é adotada para submarinos. Uma das áreas mais sensíveis da espiral de projeto de submarinos é o arranjo de equipamentos a bordo devido à restrição de espaço. Os problemas oriundos do arranjo de equipamentos se estendem para os períodos de manutenção, pois alguns equipamentos necessitam ser retirados de bordo para verificação ou substituição. Dentre tais equipamentos, se destacam aqueles que possuem dimensões elevadas tais como motores e geradores que não podem ser extraídos das escotilhas convencionais de formato circular e tamanho reduzido. A solução imediata

adotada foi o corte do casco no sentido circunferencial e a divisão do meio em duas partes. Entretanto, tal medida é prejudicial à integridade do casco na região do corte, pois tende a reduzir a espessura e inserir imperfeições geométricas. A solução que atualmente é utilizada por algumas marinhas é a concepção de uma escotilha com duas extremidades longitudinais paralelas ao eixo axial principal, e outras duas acompanhando a silhueta circunferencial da seção transversal. Esta estrutura é denominada escotilhão, podendo ser encontrado outros termos tais como “*softpatch*” ou “*Dutch-breach*”. Além do contorno externo, o escotilhão mantém a continuidade das cavernas, portanto, este dispositivo se trata de um painel curvado reforçado sob carregamento hidrostático. Para pequenas deformações e cascas cilíndricas com raio de curvatura muito maior que a espessura, o carregamento hidrostático pode ser facilmente considerado como um carregamento normal e uniforme, sem prejuízo à precisão dos resultados, pois a variação da direção do vetor normal à superfície deformada em relação à superfície não deformada é desprezível.

Submarinos utilizados tanto para pesquisa (Figura 1-7) como para fins bélicos (Figura 1-6) possuem cascos projetados para resistirem à pressão hidrostática. Ambos os tipos possuem geometrias idênticas a uma casca fina, sendo que os submersíveis destinados à pesquisa possuem, na grande maioria das vezes, formato esférico, ao passo que submarinos de guerra possuem um aspecto cilíndrico. A diferença dos formatos se deve ao fato que os submarinos de guerra necessitam atender exigências hidrodinâmicas e de volume que tornam a utilização de um casco esferoidal totalmente inviável.

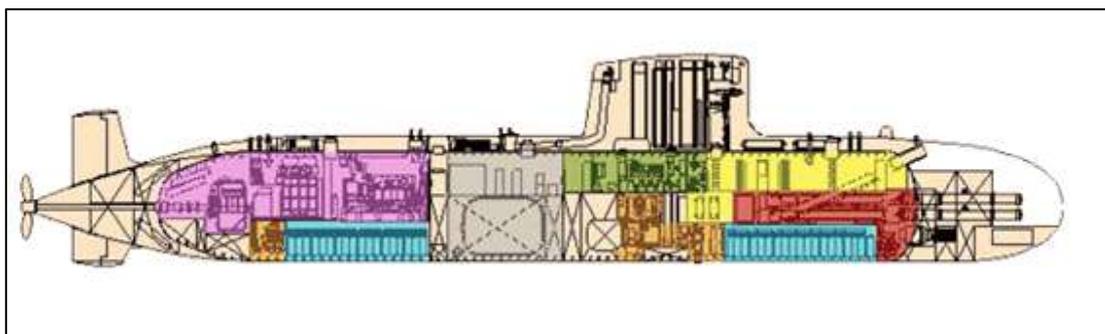


Figura 1-6 – Submarino bélico com casco resistente cilíndrico (Cryptome, 2012).

O casco resistente é composto de seções e subseções que variam de raio e comprimento de acordo com a classe do submarino. Os equipamentos são arranjados a bordo durante sua fase de construção, e cada subseção ou seção é “recheada” com equipamentos separadamente (Figura 1-8).

clássica que modelam analiticamente o comportamento estrutural de anéis finos circulares e cascas cilíndricas sem reforços e cascas reforçadas com cavernas.



Figura 1-9 – Escotilhão.

O conjunto bibliográfico transcorre, também a respeito dos fatores, decorrentes do processo construtivo, que causam decréscimo da capacidade de resistir ao carregamento hidrostático, tais como o desvio de circularidade e a presença de tensões residuais. Adicionalmente, de forma a nortear os testes experimentais (ensaios de tração) e as simulações numéricas, este capítulo apresenta de forma geral as teorias relativas a modelos constitutivos e os princípios que estruturam o método de elementos finitos.

O Capítulo 3 deste estudo descreve os testes experimentais que englobam os ensaios de tração, testes hiperbáricos e mapeamentos das superfícies dos painéis fabricados. A descrição envolve a apresentação detalhada da utilização das ferramentas, aparatos e insumos para a condução das atividades experimentais, assim como a exposição dos resultados obtidos. No Capítulo 4, são apresentados os principais tópicos a respeito da simulação numérica baseada no método de elementos finitos utilizada para obtenção dos resultados de interesse desta investigação. A influência dos principais parâmetros geométricos é investigada no Capítulo 5. A exposição dos resultados da análise paramétrica é representada por meio de curvas de equilíbrio elastoplástico, tabelas contendo as deformações verificadas, e figuras ilustrando a distribuição dos esforços nas cascas cilíndricas e cavernas. O Capítulo 6 se dedica ao estudo de casos reais encontrados nos meios operativos que respaldam grande parte das conclusões e sugestões de estudos expostas no Capítulo 7.

O objetivo deste estudo é investigar a influência das condições de contorno e parâmetros geométricos no carregamento de pressão externa uniforme que leva ao colapso de painéis

curvados reforçados. A investigação leva em conta simulações numéricas linearizadas, ou seja, pequenas deformações e material linear, e simulações numéricas não lineares que levam em conta grandes deformações e materiais com tensão de escoamento definida. A motivação que legitima o objetivo deste estudo é encontrada na demanda de submersíveis bélicos por diversos países, inclusive o Brasil, para fins de defesa. Embora exista a necessidade da investigação desde o término da Segunda Guerra Mundial, as opções encontradas na literatura que tratam diretamente do assunto são escassas e, na maioria das vezes, classificadas para restringir o acesso. O conhecimento pleno da interação de uma placa curvada reforçada com uma casca cilíndrica igualmente reforçada é parte do conjunto de informações que precisam ser de domínio pleno de uma nação para garantir a autossuficiência na concepção, detalhamento e construção de submarinos.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo sobre painéis curvados reforçados demanda de forma geral fundamentos teóricos a respeito de anéis finos e cascas finas. As referências elencadas neste Capítulo que tratam diretamente do comportamento estrutural das geometrias clássicas se inclinam em direção à obtenção do carregamento crítico de colapso. De forma a preencher a lacuna deixada pelas referências que tratam somente da estabilidade elástica, a abordagem bibliográfica apresenta fórmulas oriundas de normas consagradas que levam em conta a não linearidade dos materiais, ou seja, estabilidade inelástica. Em seguida, referências que tratam a respeito dos fatores que levam ao decréscimo da capacidade de resistir ao colapso são apresentadas de forma a ressaltar a principal fonte de inserção de imperfeições e tensões residuais, isto é, o processo construtivo. Igualmente importante à formulação consagrada de anéis finos e cascas finas, trabalhos recentes que transcorrem de geometrias análogas à painéis curvados são citados com o intuito de posicionar esta investigação em torno das demandas atuais. Adicionalmente, de forma a auxiliar o desenvolvimento das atividades experimentais e simulações numéricas deste trabalho, referências ligadas à discussão sobre equações constitutivas e o método de elementos finitos são apresentadas de forma resumida.

2.1 ESTABILIDADE ELÁSTICA DE ANÉIS FINOS CIRCULARES

A determinação das relações cinemáticas de um anel fino circular leva em consideração uma seção transversal simétrica ao plano do anel, onde o raio a é muito maior que a espessura h . As flexões devido ao carregamento ocorrem somente no plano do anel. O sistema de coordenadas é o polar e representado pelas variáveis r e θ . E, auxiliariamente, z representa a distância de qualquer ponto no anel à linha neutra. A Figura 2-1 ilustra os deslocamentos após a deformação.

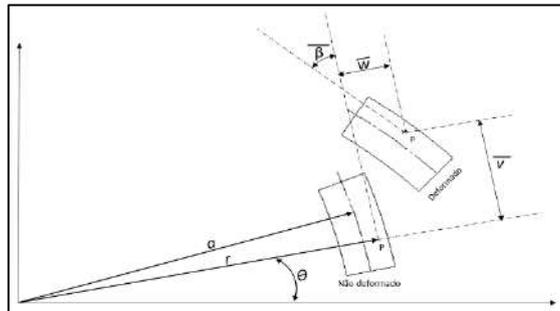


Figura 2-1 Representação dos deslocamentos após a deformação.

As relações cinemáticas de um anel fino circular, particularizando para coordenadas polares, é conforme o seguinte (SANDERS, 1963):

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + zk \quad 2.1$$

$$\varepsilon = \frac{v' + w}{a} + 1/2 \beta^2 \quad 2.2$$

$$k = \frac{\beta'}{a} \quad 2.3$$

$$\bar{v} = v + z\beta \quad 2.4$$

$$\bar{w} = w \quad 2.5$$

As variáveis enfatizadas por uma barra referem-se aos pontos localizados fora da linha neutra, e os termos discriminados por uma linha (por exemplo: β') são as derivadas do termo original em relação a θ . As hipóteses gerais são as mesmas adotadas para placas e cascas cilíndricas, ou seja, segmentos de reta normais à linha neutra permanecem retas, normais e não variam a extensão. Tais hipóteses são conhecidas como *aproximação de Love-Kirchhoff*. Algumas assunções no desenvolvimento das equações que representam as relações cinemáticas possibilitam a eliminação de termos quadráticos e, conseqüentemente, a simplificação das equações (BRUSH e ALMROTH, 1975).

A energia potencial total V é a soma da energia de deformação U e da energia potencial Ω do carregamento aplicado. As parcelas V , U e Ω podem ser escritas da seguinte forma (BRUSH e ALMROTH, 1975):

$$V = U + \Omega \quad 2.6$$

$$U = \frac{Ea}{2} \int \varepsilon^2 d\theta + \frac{Ela}{2} \int k^2 d\theta \quad 2.7$$

$$\Omega = qa \int_0^{2\pi} \left[w + \frac{1}{2a} (v^2 - uw' + v'w + w^2) \right] d\theta \quad 2.8$$

Onde q é o carregamento hidrostático por unidade de comprimento. Para que haja o equilíbrio, V tem que ser estacionário. Portanto, o integrando F originado da substituição das Equações 2.7 e 2.8 na Equação 2.6 deve satisfazer as equações de Euler conforme o seguinte:

$$\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial v'} = 0 \quad 2.9$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial w'} + \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{\partial F}{\partial w''} = 0 \quad 2.10$$

As Equações 2.9 e 2.10 podem ser simplificadas inserindo a força normal N e o momento fletor M :

$$N = EA\varepsilon \quad 2.11$$

$$M = EI\kappa \quad 2.12$$

Rearranjando as Equações 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12, as equações de equilíbrio para um anel fino circular sob carregamento hidrostático é conforme o seguinte (BRUSH e ALMROTH, 1975):

$$\left[\frac{v' + w}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{v - w'}{a} \right)^2 \right]' + \frac{I}{Aa^2} \left(\frac{v - w'}{a} \right)'' - \left[\frac{v' + w}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{v - w'}{a} \right)^2 \right] \frac{v - w'}{a} - \frac{qa}{EA} \frac{v - w'}{a} = 0 \quad 2.13$$

$$\frac{I}{Aa^2} \left(\frac{v - w'}{a} \right)''' - \left[\frac{v' + w}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{v - w'}{a} \right)^2 \right] - \left\{ \left[\frac{v' + w}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{v - w'}{a} \right)^2 \right] \frac{v - w'}{a} \right\} - \frac{qa}{EA} \frac{(v' + w)}{a} = \frac{qa}{EA} \quad 2.14$$

A busca de uma condição de equilíbrio adjacente é baseada na adição de pequenos incrementos aos deslocamentos nas equações de equilíbrio de forma a obter um sistema de equações distinto que permite realizar a análise de estabilidade. Os incrementos de deslocamentos radiais e circunferenciais são descritos, respectivamente, como w_1 e v_1 . Os deslocamentos radiais e circunferenciais no limiar da instabilidade são, respectivamente, descritos como w_0 e v_0 . Portanto, os deslocamentos em uma possível condição adjacente são conforme o seguinte:

$$v \rightarrow v_0 + v_1 \quad 2.15$$

$$w \rightarrow w_0 + w_1 \quad 2.16$$

A solução trivial nos revela que os deslocamentos circunferenciais no limiar da instabilidade v_0 é nulo, e

$$w_0 = -\frac{a^2}{EA} q. \quad 2.17$$

Substituindo as Equações 2.15, 2.16 e 2.17 nas Equações de equilíbrio 2.13 e 2.14, descartando os termos que somente possuem a solução trivial w_0 e os elementos quadráticos e de ordem superior em v_1 e w_1 devido a sua baixa magnitude numérica, obtemos o seguinte sistema de equações de estabilidade de um anel fino circular sob carregamento hidrostático (BRUSH e ALMROTH, 1975):

$$EAa^2(v_1' + w_1)' + EI(v_1 + w_1)'' = 0 \quad 2.18$$

$$EAa^2(v_1' + w_1) - EI(v_1 + w_1)''' + qa^3(w_1'' + w_1) = 0 \quad 2.19$$

A solução para as Equações 2.18 e 2.19 deve satisfazer a característica periódica da geometria em θ . Portanto,

$$v_1 = B \sin n\theta \quad 2.20$$

$$w_1 = C \cos n\theta \quad 2.21$$

Substituindo as soluções propostas nas Equações de estabilidade (Eq. 2.18 e 2.19), obtemos a seguinte matriz para a obtenção da solução não-trivial:

$$\begin{vmatrix} n^2 \left(1 + \frac{I}{Aa^2}\right) & n \left(1 + n^2 \frac{I}{Aa^2}\right) \\ n \left(1 + n^2 \frac{I}{Aa^2}\right) & \left(1 + n^4 \frac{I}{Aa^2}\right) - (n^2 - 1) \frac{qa}{EA} \end{vmatrix} = 0. \quad 2.22$$

Considerando o termo I/Aa^2 muito menor que a unidade, chega-se a:

$$q = (n^2 - 1) \frac{EI}{a^3} \quad n=2,3,4,\dots \quad 2.23$$

Logo, a minimização da Equação 2.23 nos leva a:

$$q_{crit} = 3 \frac{EI}{a^3}. \quad 2.24$$

Anéis sob carregamento uniforme foi pioneiramente tratado por *Bresse* em 1859, tendo a sua clássica solução conforme a Equação 2.24 desenvolvida por *Lévy* em 1884. Na solução desenvolvida nos parágrafos anteriores, o carregamento é considerado constantemente normal à superfície do anel, ou seja, a direção muda conforme a deformação. Entretanto, existem casos em que o carregamento permanece direcionado para o centro do anel, comumente chamado de *Dead Loading*, e o processo de obtenção da solução de estabilidade é o mesmo para o caso do carregamento hidrostático clássico. A única diferença entre os dois casos é o trabalho realizado pelo carregamento Ω e, conseqüentemente, na expressão final da energia potencial total V . Os autovalores obtidos

do determinante da matriz de coeficientes do sistema de equações adjacentes são (BRUSH e ALMROTH, 1975)

$$q = \frac{(n^2 - 1)^2 EI}{(n^2 - 2) a^3}, \quad n = 2,3,4 \dots \quad 2.25$$

Portanto,

$$q_{crit} = 4.5 \frac{EI}{a^3}. \quad 2.26$$

2.2 CASCAS CILÍNDRICAS CIRCULARES

As teorias clássicas a respeito de placas e cascas são baseadas nas hipóteses de *Love-Kirchhoff*, isto é, após a deformação gerada pelo carregamento as linhas que eram normais à superfície média, permanecem normais e com o mesmo comprimento. Desta forma é possível calcular as deformações ao longo da espessura em termos das deformações que ocorrem na superfície média. Portanto, são negligenciadas todas as deformações e tensões transversais à superfície e seus efeitos atribuídos ao coeficiente de *Poisson*. Assim, transforma-se uma análise tridimensional em bidimensional sem prejuízos significantes à acurácia dos resultados.

Considerando um elemento infinitesimal conforme a Figura 2-2, temos as seguintes expressões para as forças internas (TIMOSHENKO, 1961):

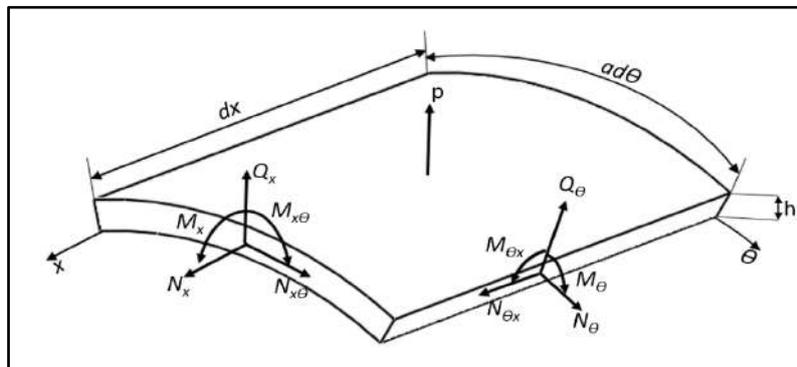


Figura 2-2 - Elemento infinitesimal de uma casca cilíndrica.

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz \quad 2.27$$

$$N_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_\theta dz \quad 2.28$$

$$N_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz \quad 2.29$$

$$N_{\theta x} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{\theta x} dz \quad 2.30$$

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{a}\right) dz \quad 2.31$$

$$Q_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_{\theta z} dz \quad 2.32$$

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_x \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz \quad 2.33$$

$$M_\theta = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\sigma}_\theta z dz \quad 2.34$$

$$M_{x\theta} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{x\theta} \left(1 + \frac{z}{a}\right) z dz \quad 2.35$$

$$M_{\theta x} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{\tau}_{\theta x} z dz \quad 2.36$$

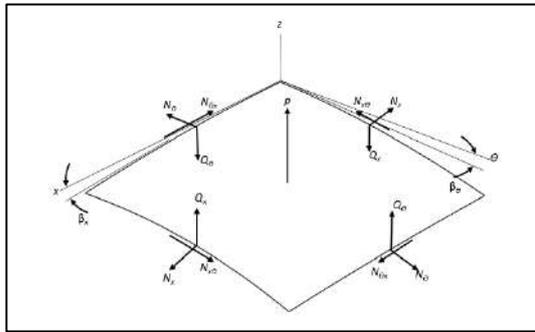


Figura 2-3 - Equilíbrio de forças.

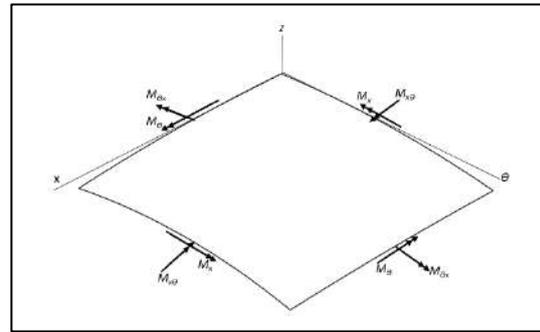


Figura 2-4 - Equilíbrio de momentos.

O somatório de forças e momentos (Figura 2-3 e Figura 2-4) é conforme o seguinte (TIMOSHENKO, 1961):

$$aN_{x,x} + N_{x\theta,x} = 0 \quad 2.37$$

$$aN_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} = 0 \quad 2.38$$

$$a^2 M_{x,xx} + 2a M_{x\theta,x\theta} + M_{\theta,\theta\theta} - a N_\theta - a^2 N_x \beta_{x,x} - a N_{x\theta} (a \beta_{\theta,x} + \beta_{x,\theta}) - a N_\theta \beta_{\theta,\theta} = -pa^2 \quad 2.39$$

Termos com subscritos acompanhados por vírgula significa a derivada parcial do que está à direita da vírgula em relação ao que está à esquerda. As equações constitutivas para uma casca fina são (BRUSH e ALMROTH, 1975):

$$N_x = C(\epsilon_x + \nu\epsilon_\theta) \quad 2.40$$

$$M_x = D(k_x + \nu k_\theta) \quad 2.41$$

$$N_\theta = C(\epsilon_\theta + \nu\epsilon_x) \quad 2.42$$

$$M_\theta = D(k_\theta + \nu k_x) \quad 2.43$$

$$N_{x\theta} = C \frac{1-\nu}{2} \gamma_{x\theta} \quad 2.44$$

$$M_{x\theta} = D(1-\nu)k_{x\theta} \quad 2.45$$

$$C = Eh/(1-\nu^2) \quad 2.46$$

$$D = Eh^3/[12(1-\nu^2)] \quad 2.47$$

E, ainda, as relações cinemáticas são conforme as equações a seguir (BRUSH e ALMROTH, 1975):

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2}\beta_x^2 \quad 2.48 \quad k_x = \beta_{x,x} \quad 2.49$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{v_{,\theta} + w}{a} + \frac{1}{2}\beta_\theta^2 \quad 2.50 \quad k_\theta = \frac{\beta_{\theta,\theta}}{a} \quad 2.51$$

$$\gamma_{x\theta} = \left(\frac{u_{,\theta}}{a} + v_{,x} \right) + \beta_x \beta_\theta \quad 2.52 \quad k_{x\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{x,\theta}}{a} + \beta_{\theta,x} \right) \quad 2.53$$

$$\beta_x = -w_{,x} \quad 2.54 \quad \beta_\theta = -\frac{w_{,\theta}}{a} \quad 2.55$$

A substituição das Equações 2.48 a 2.55 (relações cinemáticas) e das Equações 2.40 a 2.47 (relações constitutivas) nas Equações de equilíbrio de forças e momentos (Equações 2.37, 2.38 e 2.39) forma o seguinte sistema acoplado de equações em função dos deslocamentos u , v e w (DONNEL, 1976):

$$aN_{x,x} + N_{x\theta,\theta} = 0 \quad 2.56$$

$$aN_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} = 0 \quad 2.57$$

$$D\nabla^4 w + \frac{1}{a}N_\theta - \left(N_x w_{,xx} + \frac{2}{a}N_{x\theta} w_{,x\theta} + \frac{1}{a^2}N_\theta w_{,\theta\theta} \right) = p \quad 2.58$$

$$\nabla^4 w \equiv w_{,xxxx} + \frac{2}{a^2}w_{,xx\theta\theta} + \frac{1}{a^4}w_{,\theta\theta\theta\theta} \quad 2.59$$

D e C é definido como a *rigidez à flexão* e *rigidez à alongação*, respectivamente (DONNEL, 1976). As Equações 2.56 a 2.59 são aplicadas em análises de cascas cilíndricas finas para pequenas e grandes deformações (BRUSH e ALMROTH, 1975).

A não linearidade das equações de equilíbrio pode ser contornada através de hipóteses que linearizam o problema. Levando-se em consideração que os deslocamentos radiais w no limiar da instabilidade são axissimétricos, podemos afirmar que as derivadas de w em relação a θ são nulas, ou seja:

$$w_{,\theta} = 0. \quad 2.60$$

Adicionalmente, em regiões distantes das extremidades, é razoável assumir que as deformações são predominantemente de membrana. Portanto, as deformações decorrentes da flexão podem ser descartadas, sendo assim:

$$w_{,x} = 0 \quad 2.61$$

Substituindo as hipóteses citadas (Equações 2.60 e 2.61) nas Equações 2.56, 2.57 e 2.58, obtém-se o seguinte:

$$aN_{x,x} + N_{x\theta,\theta} = 0 \quad 2.56$$

$$aN_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} = 0 \quad 2.57$$

$$N_{\theta} = pa \quad 2.62$$

Percebe-se que a única mudança feita foi na Equação 2.58 do sistema original de equações de equilíbrio. O novo sistema de equações de equilíbrio é linear e estaticamente determinado. Porém, a linearização que resultou na equação 2.62 pode inserir erros significantes na solução quando as deformações decorrentes da flexão não são desprezíveis. Um grau intermediário de linearização da equação original pode ser feito descartando os termos que possuem derivadas de segunda ordem ou superiores não associadas ao parâmetro de rigidez à flexão D , ou seja:

$$aN_{x,x} + N_{x\theta,\theta} = 0 \quad 2.56$$

$$aN_{x\theta,x} + N_{\theta,\theta} = 0 \quad 2.57$$

$$D\nabla^4 w + \frac{1}{a}N_{\theta} = p \quad 2.63$$

Considerando as novas relações cinemáticas e constitutivas, pode ser estabelecido um novo sistema de equações desacopladas conforme o seguinte (DONNEL, 1976):

$$\nabla^4 u = -\frac{\nu}{a}w_{,xxx} + \frac{1}{a^3}w_{,x\theta\theta} \quad 2.64$$

$$\nabla^4 v = -\frac{2+\nu}{a^2}w_{,xx\theta} - \frac{1}{a^4}w_{,\theta\theta\theta} \quad 2.65$$

$$D\nabla^8 w + \frac{1-\nu^2}{a^2}Cw_{,xxxx} = \nabla^4 p \quad 2.66$$

A investigação a respeito de uma possível configuração adjacente é a mesma utilizada na obtenção das equações de estabilidade de um anel fino circular. Os incrementos de deslocamentos podem ser tanto adicionados às equações de equilíbrio (critério de

equilíbrio adjacente) quanto à formulação do equilíbrio a partir do critério da energia potencial mínima. Em ambos os passos, todos os termos resultantes que contêm somente a solução trivial u_0 , v_0 , w_0 e p são descartados, assim como os termos quadráticos e de ordem superior em u_1 , v_1 e w_1 ; e seus incrementos associados da forma, por exemplo, N_{x1} . Os incrementos também são aplicados nas relações constitutivas e cinemáticas, resultando no seguinte sistema de equações de equilíbrio (DONNEL, 1976):

$$aN_{x1,x} + N_{x\theta1,\theta} = 0 \quad 2.67$$

$$aN_{x\theta1,x} + N_{\theta1,\theta} = 0 \quad 2.68$$

$$D\nabla^4 w_1 + \frac{1}{a}N_{\theta1} - \left(N_{x0}w_{1,xx} + \frac{2}{a}N_{x\theta0}w_{1,x\theta} + \frac{1}{a^2}N_{\theta0}w_{1,\theta\theta} \right) = 0 \quad 2.69$$

Além da forma acoplada, o sistema de equações pode se apresentar em uma forma parcialmente desacoplada (DONNEL, 1976):

$$\nabla^4 u_1 = -\frac{v}{a}w_{1,xxx} + \frac{1}{a^3}w_{1,x\theta\theta} \quad 2.70$$

$$\nabla^4 v_1 = -\frac{2+v}{a^2}w_{1,x\theta\theta} - \frac{1}{a^4}w_{1,\theta\theta\theta} \quad 2.71$$

$$D\nabla^8 w_1 + \frac{1-v^2}{a^2}Cw_{1,xxx} - \nabla^4 \left(N_{x0}w_{1,xx} + \frac{2}{a}N_{x\theta0}w_{1,x\theta} + \frac{1}{a^2}N_{\theta0}w_{1,\theta\theta} \right) = 0 \quad 2.72$$

2.3 CASCAS CILÍNDRICAS REFORÇADAS

As abordagens clássicas para a obtenção das equações de equilíbrio e estabilidade de cascas cilíndricas reforçadas se baseiam principalmente no critério de energia potencial total mínima e na verificação de uma configuração adjacente. A energia devido às deformações pode ser dividida em energia de deformação na casca cilíndrica U e energia de deformação nos reforços V . Portanto:

$$U_T = U_e + U_b + \sum_{r=1}^N (V_e)_r + \sum_{r=1}^N (V_b)_r + W_p \quad 2.73$$

Os índices e e b estão associados às deformações de membrana e flexão, respectivamente. A contribuição dos reforços é computada através da somatória da quantidade de reforços N .

A solução proposta para a obtenção da pressão de colapso entre reforços é conforme o seguinte (KENDRICK, 1970):

$$u(x, \theta) = A \cos n(\theta + \varepsilon) \cos(m\pi x/L_f) \quad 2.74$$

$$v(x, \theta) = B \operatorname{sen} n(\theta + \varepsilon) \operatorname{sen}(m\pi x/L_f) \quad 2.75$$

$$w(x, \theta) = C \operatorname{sen} n(\theta + \varepsilon) \operatorname{sen}(m\pi x/L_f) \quad 2.76$$

A solução proposta para o colapso global é (KENDRICK, 1970):

$$u(x, \theta) = A_1 \cos n\theta \cos(m\pi x/L_f) \quad 2.77$$

$$v(x, \theta) = B_1 \operatorname{sen} n\theta \{1 - \cos(2m\pi x/L_f)\} + B_2 \operatorname{sen}(n\theta) \quad 2.78$$

$$w(x, \theta) = C_1 \cos n\theta \{1 - \cos(2m\pi x/L_f)\} + B_2 \cos(n\theta) \quad 2.79$$

Onde n é o número de ondas circunferenciais; m , o número de meiaondas senoidais; ε , a defasagem circunferencial dos lóbulos em função de n ; e L_f , o espaçamento entre cavernas. Os deslocamentos decorrem da solução de um problema de autovetor (coeficientes A , B e C) e autovalor. Cada iteração passa por um processo de minimização envolvendo os valores de n , m e o autovalor, sendo o último definido adimensionalmente como (KENDRICK, 1970):

$$\varphi = pa(1 - \nu^2)/Eh \quad 2.80$$

Os valores decorrentes da minimização de φ são de certa forma conservadores, uma vez que a solução proposta não satisfaz o sistema de equações diferenciais originados da minimização da variação da energia total armazenada.

A introdução de elementos reforçadores eleva a pressão de colapso de uma casca cilíndrica, isto se deve, principalmente, ao fato que tais estruturas tendem a reter a circularidade da casca cilíndrica. e uma maior pressão é necessária para gerar o colapso. Diante deste mesmo conceito de retenção de circularidade, as extremidades também são estruturas que induzem ao aumento na pressão de colapso, pois estas experimentam deslocamentos radiais nulos em casos reais e em experimentos de ordem acadêmica.

A formulação analítica clássica considera a casca cilíndrica simplesmente apoiada em relação às extremidades. A influência de condições engastada de contorno no carregamento de colapso deve ser verificada levando se em consideração o comprimento L da casca cilíndrica. A restrição à rotação fora do plano dos reforços não representa

acrécimo de acurácia ao resultado, pois a rigidez à rotação e à flexão fora do plano é reduzida. (MACKAY, 2007).

A pressão de colapso pode ser calculada através da discriminação da contribuição da rigidez da casca cilíndrica e dos reforços, separadamente, conforme a Equação 2.81 (BRYANT, 1954).

$$p_{cn} = (Eh/a)\lambda^4/(n^2 - 1 + \lambda^2/2) (n^2 + \lambda^2)^2 \quad 2.81$$

$$+ (n^2 - 1)EI_c/aa_g^2L_f$$

Os resultados decorrentes da abordagem utilizando o método de energia e aqueles oriundos da Equação 2.81 apresentaram-se próximos o bastante para que normas tais como *BSI*, *ECCS* e *DPA* adotassem a utilização de p_{cn} em suas publicações.

Estruturas com reforços não igualmente espaçados não demandam maiores investigações, pois a utilização de um espaçamento médio é aceitável, ao passo que estruturas com reforços com rigidez à rotação distintos solicitam uma averiguação específica para a determinação da pressão de colapso. (REYNOLDS e BLUMENBERG, 1961).

2.4 FLAMBAGEM INELÁSTICA DE CASCAS CILÍNDRICAS SOB CARREGAMENTO HIDROSTÁTICO

Os resultados oriundos de métodos analíticos que consideram tão somente o material experimentando a região elástica revelam-se conservadores quando a estrutura apresenta um conjunto de tensões de abrangência global acima da tensão de escoamento. A substituição de modelos constitutivos linearizados por aqueles oriundos, por exemplo, de uma curva tensão-deformação busca a aquisição de resultados mais precisos e próximos da realidade. Normalmente, os parâmetros do material retirados de ensaios de tração que simulam a região plástica são o módulo de elasticidade tangente E_t e secante E_s .

Fórmulas aproximadas que possuem uma adequada precisão têm sido adicionadas às diversas normas de forma a disponibilizar uma ferramenta prática de decisão na fase inicial de projeto de cascas cilíndricas reforçadas e geometrias análogas.

O cálculo da pressão crítica elástica p_{cr}^{el} para a flambagem axissimétrica entre cavernas pode ser expresso através da Equação 2.82 (GERMANISCHER LLOYD, 2008):

$$p_{cr}^{el} = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E \frac{h^2}{a_m^2} \left\{ \left[\frac{2L}{\pi L_{eff}} \right]^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{\pi L_{eff}}{2L} \right]^2 \right\} \quad 2.82$$

Observando o comportamento elastoplástico do material, temos que (GERMANISCHER LLOYD, 2008):

$$p_{cr}^i = \frac{2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} E_s \frac{h^2}{a_m^2} C_1 \left\{ \left[\frac{\alpha L}{\pi} \right]^2 + \frac{1}{4} \left[\frac{\pi}{\alpha L} \right]^2 \right\} \quad 2.83$$

A análise do comportamento axissimétrico de colapso da geometria foi inicialmente abordada considerando o material como perfeitamente plástico, entretanto, conforme a teoria da plasticidade foi evoluindo, abordagens mais precisas foram sendo implementadas (REYNOLDS, 1960).

A pressão de flambagem assimétrica, ou seja, com formação de lóbulos circunferenciais, é obtida através da seguinte fórmula (GERMANISCHER LLOYD, 2008):

$$p_{cr}^{el} = \frac{2\pi^2 E f}{3\Phi(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{a_m} \right)^2 \frac{a_m h / L^2}{3 - 2\Phi(1-f)} \quad 2.84$$

$$p_{cr}^i = p_{cr}^{el} \frac{1-\nu^2}{1-\nu_p^2} \left[\frac{E_t}{E} \left(1 - \frac{3\Phi}{4} \right) + \frac{E_s}{E} \frac{3\Phi}{4} \right] \quad 2.85$$

2.5 INSTABILIDADE ELÁSTICA DE REFORÇOS

A instabilidade dos reforços é análoga à flambagem lateral-torsional de colunas sob carregamento compressivo. A principal diferença é a presença adicional de tensões de flexão e da restrição à rotação entre casca cilíndrica e reforços.

O reforço pode colapsar devido à flambagem global da casca cilíndrica prevista em projeto ou apenas localmente. Uma análise limite de eficiência de um reforço sugere que o reforço mais eficiente seria aquele em que todo material que o compõe estivesse concentrado no flange e ligado à casca cilíndrica através de uma alma extremamente fina. A submissão, porém, de estruturas com espessuras reduzidas a carregamentos compressivos favorece à instabilidade. O colapso do flange, portanto, é tratado como sendo uma falha que precisa ser evitada, ao passo que o colapso da alma é uma falha que precisa ser evitada e prevista, pois possibilita a minimização do material na alma e maximiza a rigidez do reforço (KENDRICK, 1970).

Assim como para o cálculo da pressão crítica de colapso global e entre cavernas, o método de energia é uma alternativa analítica para a definição das equações diferenciais de equilíbrio e pressão crítica de instabilidade de reforços. Logo, a energia total armazenada V pelo reforço é conforme a Equação 2.86 (KENDRICK, 1970).

$$V = -2\pi r_d q_c w_1 + U_{ew} + U_{bw} + U_{ef} + U_{bf} + U_p \quad 2.86$$

Onde r_d é o raio até a superfície mais interna da casca cilíndrica, q_c o carregamento por unidade de comprimento circunferencial do reforço, w_1 o deslocamento radial após a flambagem, e U_p a energia de deformação associada à rotação do casco em relação ao reforço.

Os índices b e e designam a energia armazenada devido à flexão e ao alongamento (membrana), respectivamente. Os elementos dos reforços, ou seja, alma e flange, estão, respectivamente, identificados pelos índices w e f . A condição de simples apoio dos reforços em relação à casca cilíndrica favorece a formação de lóbulos circunferenciais, ao passo que modelos engastados tendem a ter um comportamento oposto (MORANDI, FAULKNER e DAS, 1996).

O termo w_1 na Equação 2.86 é um obstáculo na aquisição prática da pressão de instabilidade dos reforços. A Equação 2.87, entretanto, possui todas variáveis que inerentemente estão estabelecidas nas fases iniciais de projeto (KENDRICK, 1970).

$$\sigma_{crit} = EI_z / A_f r_d z_1 \quad 2.87$$

Onde I_z é o segundo momento de inércia da área transversal do reforço em relação ao eixo de simetria, z_1 a distância do centroide da seção transversal do reforço à junção do reforço com a casca cilíndrica e A_f a área da seção transversal.

2.6 IMPERFEIÇÕES GEOMÉTRICAS

Os possíveis estados de equilíbrio apresentados são aqueles que possuem ou não deformações axissimétricas. O estado de deformação não axissimétrico é oriundo do estado axissimétrico no limite da flambagem, no qual uma pequena perturbação gera deslocamentos de magnitude não determinada. Entretanto, estruturas reais não possuem em sua geometria, no caso de cascas cilíndricas, uma seção transversal perfeitamente circular, e um desvio inicial de circularidade cresce conforme o carregamento aumenta. Diante disso, torna-se necessário o completo entendimento no que diz respeito à evolução

do desvio da circularidade em função do carregamento, de modo a estabelecer padrões de tolerância no processo de fabricação. No caso particular de cascas cilíndricas reforçadas, o processo de fabricação também insere imperfeições que geram desvios do plano de projeto dos reforços.

2.6.1 Falta de Circularidade

As imperfeições em cascas cilíndricas são comumente associadas à falta de circularidade da seção transversal. As imperfeições geométricas são prejudiciais à resistência da casca cilíndrica devido à adição de tensões de flexão às tensões circunferências axissimétricas, que favorece, portanto, o escoamento precoce do material e o comportamento não linear de grandes deslocamentos da estrutura. A falta de circularidade w_0 pode ser estimada como tendo o mesmo formato da solução colapsada conforme a Equação 2.88 (KENDRICK, 1953).

$$w_0 = C_0 \cos n\theta \operatorname{sen}(\pi x/L_f) \quad 2.88$$

As cascas cilíndricas reais, contudo, não possuem imperfeições exatamente iguais à forma flambada da estrutura que, alternativamente, podem ser representadas através de uma série de *Fourier*, ou seja, a combinação de várias formas do modo de flambagem da casca cilíndrica.

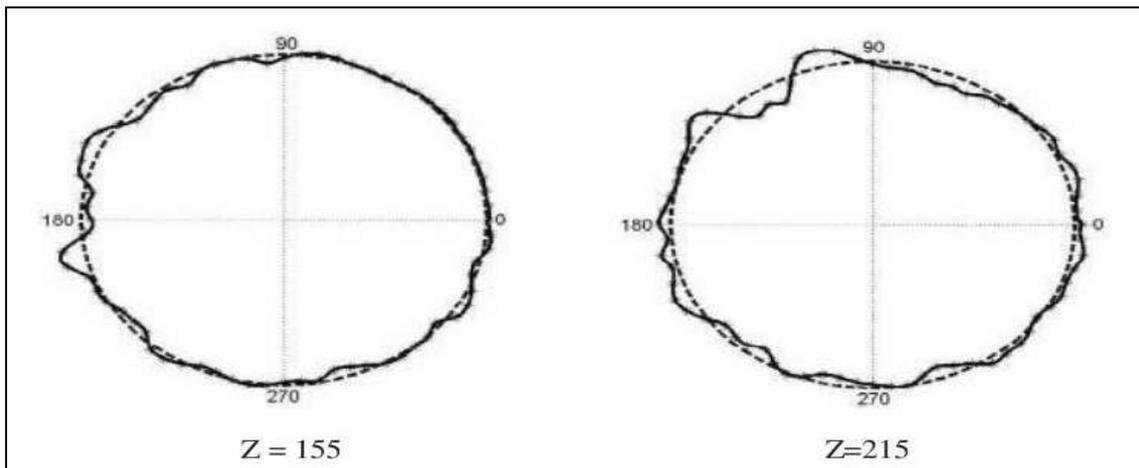


Figura 2-5 - Aspecto ampliado de imperfeições em cascas cilíndricas (MACKAY, 2007).

Uma maneira de se obter valores mais precisos para as tensões de flexão é através do estabelecimento de um aspecto de imperfeição bidimensional utilizando série de *Fourier*. Onde cada termo da série estaria associado a um valor de tensão de flexão, e que a tensão

de flexão para um determinado modo é a superposição das tensões encontradas para aquele modo (KENDRICK, 1953).

2.6.2 Inclinação dos Reforços

As tensões de flexões originadas do desvio do reforço em relação ao plano de projeto são analisadas considerando o formato imperfeito do reforço com um aspecto senoidal no sentido circunferencial. A Figura 2-5 exemplifica o aspecto da seção transversal de um reforço com desvio do plano original. A obtenção da influência da inclinação do reforço na tensão de flexão é obtida através da integração numérica de equações diferenciais que governam a deflexão da alma (VAUGHAN, 1963).

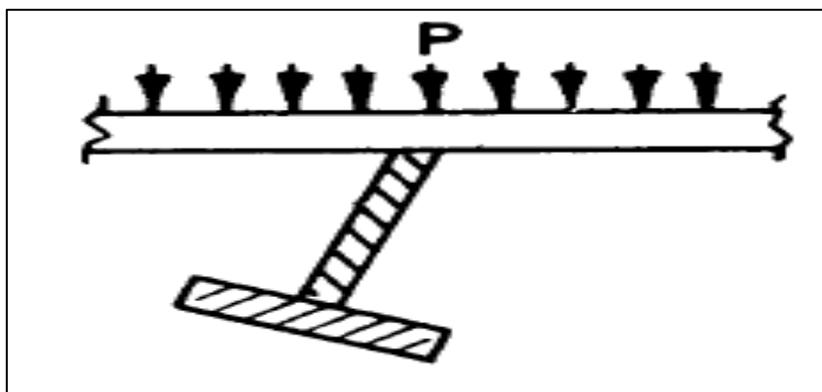


Figura 2-6 – Inclinação dos reforços (KENDRICK, 1970).

Desvios do plano original do projeto que não possuem um aspecto senoidal, ou seja, axissimétrico, são menos favoráveis à aparição das tensões de flexão quando comparados aos que possuem desvios não axissimétricos ou senoidais (VAUGHAN, 1963) conforme pode ser verificado na Figura 2-7 e Figura 2-8. Em casos práticos, o desvio máximo encontrado em estruturas deste tipo é da ordem da espessura da alma (KENDRICK, 1970).

Distance along web (in.)	Initial web tilt (in.)	Web deformation under pressure (in.)	Mean stresses (psi)		Bending stresses (psi)	
			Radial	Circumferential	Radial	Circumferential
0	0	0	-6229	-41,343	62,892	18,868
1-84	0-184	0-018	-5603	-41,968	41,162	11,508
3-68	0-368	0-062	-4943	-42,628	18,973	4338
5-52	0-552	0-119	-4247	-43,325	-1,668	-1027
7-36	0-736	0-176	-3511	-44,060	-19,291	-7168

Figura 2-7 - Tensão de flexão devido a uma inclinação inicial axissimétrica - Pressão Aplicada de 568 Psi (VAUGHAN, 1963).

Distance along web (in.)	Initial web tilt (in.)	Web deformation under pressure (in.)	Mean stresses (psi)		Bending stresses (psi)	
			Radial	Circumferential	Radial	Circumferential
0	0	0	-6229	-41,343	78,408	23,522
1.84	0.184	0.022	-5603	-41,968	47,558	13,162
3.68	0.368	0.075	-4943	-42,628	16,314	3020
5.52	0.552	0.138	-4247	-43,325	-12,273	-5908
7.36	0.736	0.195	-3511	-44,060	-35,852	-12,881

Figura 2-8 - Tensão de flexão devido a uma inclinação inicial senoidal - Pressão Aplicada de 568 Psi (VAUGHAN, 1963).

2.6.3 Imperfeições em Modelos Numéricos

As imperfeições em modelos numéricos podem ser categorizadas em imperfeições *características* e *medidas*. As imperfeições características são derivadas de configurações pessimistas e relativamente simples de serem modeladas, pois adquirem a forma colapsada da estrutura cilíndrica decorrente ou de análises linearizadas, ou de análises elastoplásticas (MACKAY, 2007).

As imperfeições medidas são adicionadas aos modelos através da interpolação dos pontos nodais adjacentes aos pontos de medição. As interpolações necessárias podem ser realizadas através de uma série de *Fourier*. Quanto mais coeficientes na série, maior será a precisão de sua representação no modelo numérico (MACKAY, 2007).

As imperfeições características podem assumir o aspecto do colapso de modelos analíticos conforme a Equação 2.88. As imperfeições originadas de análises linearizadas são mais conservadoras do que aquelas oriundas de análises elastoplásticas (MACKAY, 2007). A Figura 2-9 apresenta um exemplo de representação de imperfeições medidas.

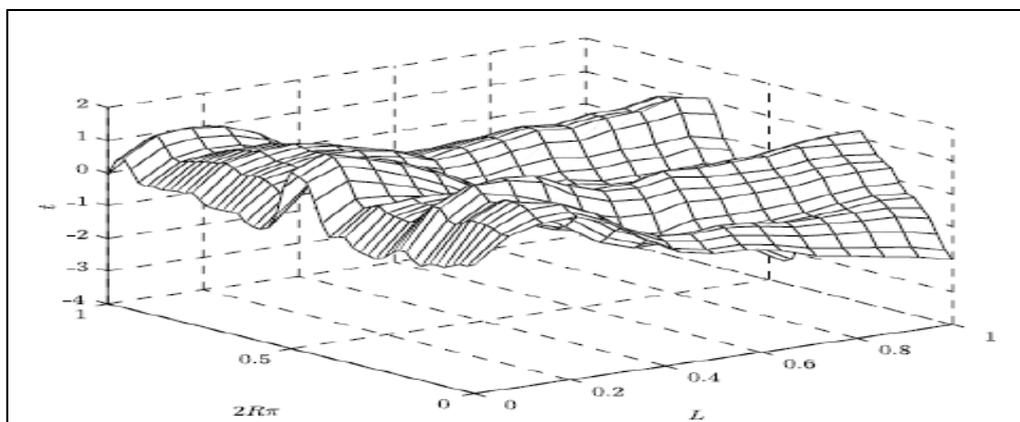


Figura 2-9 – Imperfeições geométricas medidas a partir de uma casca cilíndrica (SHENCK e SHUELLER, 2007)

2.7 TENSÕES RESIDUAIS

Os diversos processos de manufatura inevitavelmente inserem modificações tanto nas características médias quanto no equilíbrio interno de forças e momentos do material. As tensões residuais, portanto, decorrem das alterações mencionadas e estão relacionadas com os processos de soldagem e conformação a frio.

2.7.1 Soldagem

O processo de soldagem insere tensões residuais durante o estágio de resfriamento e contração do material na região soldada. A reação à contração é naturalmente composta de esforços de tração na região soldada, ao passo que nas regiões que não sofreram adição de energia a reação observada é de ordem compressiva. A magnitude das tensões de tração e compressão durante o período de resfriamento é muito maior que a tensão de escoamento do material, que leva, portanto, o material a experimentar a região elastoplástica, e causa o surgimento de tensões residuais devido à busca do material pela nova configuração de equilíbrio.

2.7.2 Conformação

A conformação a frio nada mais é do que o curvamento de uma placa até um raio de curvatura desejável considerando o retorno elástico (*springback*). A Figura 2-10 e a Figura 2-11 apresenta, respectivamente, a soma algébrica dos esforços internos e a distribuição simplificada observada ao longo da seção transversal de uma casca cilíndrica reforçada. Em ambas Figuras, o material não possui encruamento após o alcance da tensão de escoamento, ou seja, material perfeitamente plástico.

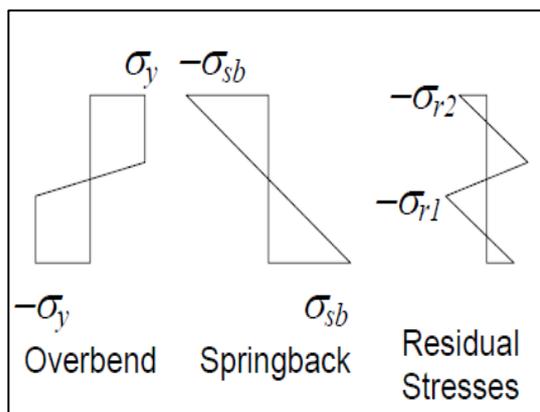


Figura 2-10 – “Overbend”, “Springback” e tensão residual (KENDRICK, 1970).

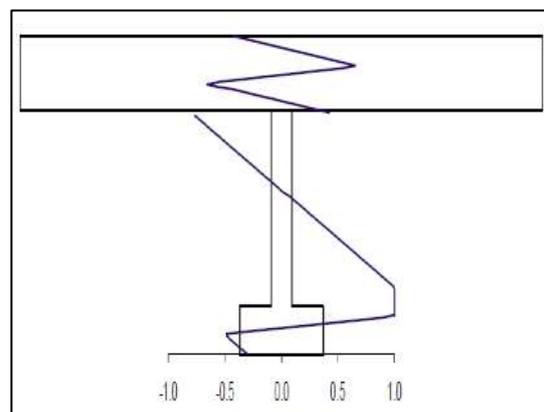


Figura 2-11 – Distribuição da tensão residual ao longo de um reforço (KENDRICK, 1970).

A plastificação do material durante o processo de conformação a frio, portanto, é o objetivo a ser alcançado e não um efeito colateral. Ao se descarregar elasticamente, o material gera um momento oposto em sinal em relação ao momento de flexão aplicado para a conformação (*overbend*). A tensão residual é a soma algébrica da tensão originada do momento gerado pelo retorno elástico e momento de flexão.

2.8 ASPECTOS GERAIS DE PAINÉIS CURVADOS REFORÇADOS

Diversas estruturas utilizadas na área de *offshore* e aviação lançam mão de painéis curvados reforçados para comporem suas estruturas operativas. A demanda estética usualmente encontrada no setor da construção civil exige, na grande maioria das vezes, a utilização de painéis curvados, embora os custos com as fases de projeto e fabricação sejam maiores. Algumas utilizações mais específicas demandam a utilização de painéis curvados para viabilizar a manutenção de componentes que operam dentro de cascas cilíndricas como, por exemplo, escotilhões de cascos resistentes de submarinos.

A utilização de reforços em estruturas compostas de chapas finas revela-se vantajosa sob o ponto de vista estrutural e econômico. Na grande maioria das estruturas cilíndricas, a adição de material para a concepção dos reforços é justificada pelo patamar de diminuição dos níveis de tensões globais e pela capacidade de resistir à instabilidade. A ponte *Confluences* mostrada na Figura 2-12 é um exemplo de utilização de painéis curvados reforçados na construção civil.

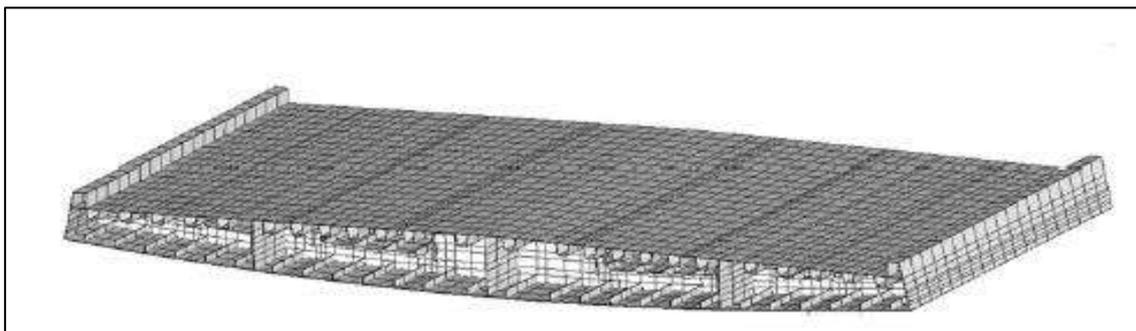


Figura 2-12 – Estrutura discretizada da ponte *Confluences* (TRAN, DOUTHE, et al., 2014)

Experimentos conduzidos no final da década de 40 submeteram placas curvadas a carregamento axial com um único reforço na mediana entre as extremidades. Os resultados mostraram que os reforços, assim como a influência do raio de curvatura, contribuem para o aumento da resistência à instabilidade (BATDORF e

SCHILDRCROUT, 1948). Os resultados obtidos serviram de validação para os estudos desenvolvidos previamente por Gall (1930) e Lundquist (1933). A Figura 2-13 expõe curvas tiradas de experimentos realizados por Ramberg, Levy e Fienub (1944), onde $\sigma_{av}^Z/\sigma_{av}^{plate}$ é a razão entre as tensões críticas de flambagem da placa curvada e da placa plana e Z_d , o coeficiente de curvatura em função dos parâmetros geométricos.

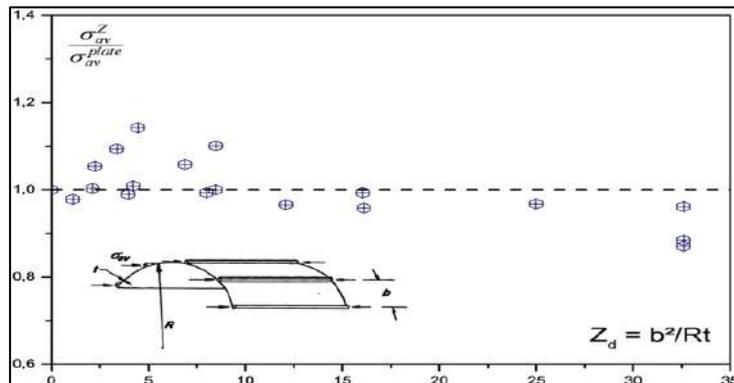


Figura 2-13 – Efeito da curvatura na resistência ao colapso (carregamento axial) (RAMBERG, LEVY e FIENUB, 1944).

A Figura 2-15 apresenta os resultados de Tran, Douthe, *et al* (2014) que revelaram a influência do parâmetro Z nos valores da tensão crítica de flambagem e no número de lóbulos circunferenciais da forma colapsada. Tran, Douthe, *et al* (2014) utilizaram parâmetros geométricos de curvatura de ordem global e local (Figura 2-14) para chegar aos resultados expostos na Figura 2-15 que associa simultaneamente os maiores valores do parâmetro Z com a faixa mais elevada de tensão de colapso e maiores quantidades de lóbulos circunferenciais.

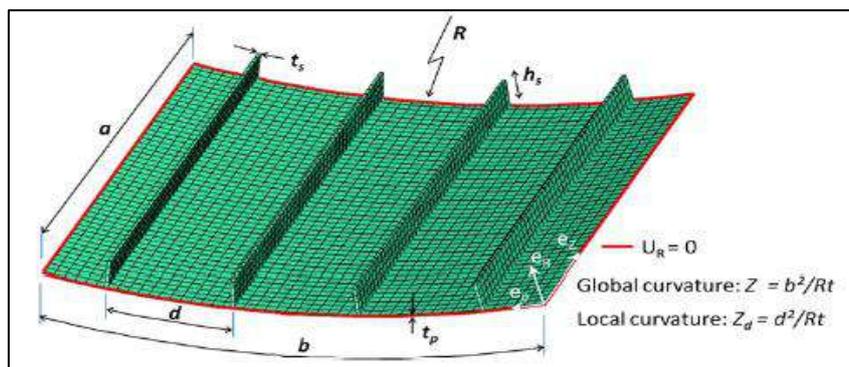


Figura 2-14 – Parâmetros geométricos de uma chapa curvada reforçada (TRAN, DOUTHE, et al., 2014).

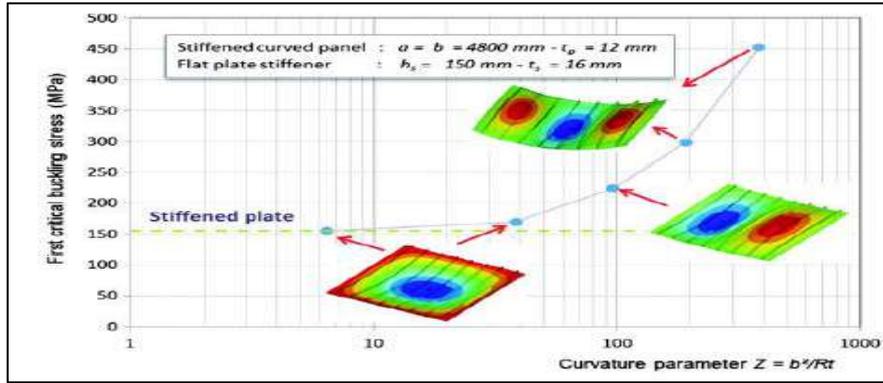


Figura 2-15 – Tensão do primeiro modo de flambagem em função do parâmetro de curvatura Z (TRAN, DOUTHE, et al., 2014).

A importância do parâmetro Z também é examinada no estudo de Silvestre, Silva *et al* (2016), onde é apresentada uma proposta analítica para a determinação da pressão linear elástica de colapso de painéis curvados sob carregamento axial. A formulação analítica foi confrontada com resultados numéricos conforme descrição constante na Figura 2-16 e Figura 2-17.

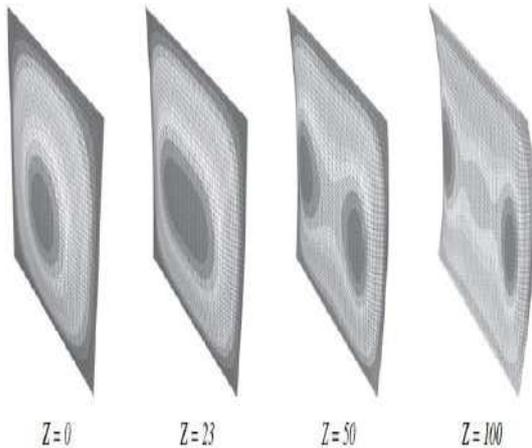


Figura 2-16 Aspecto de flambagem linear elástica de acordo com o parâmetro Z (SILVESTRE, SILVA e MARTINS, 2016).

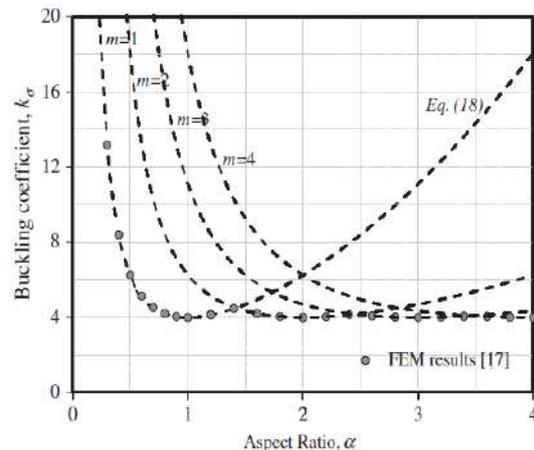


Figura 2-17 Comparação do estudo analítico com resultados numéricos (SILVESTRE, SILVA e MARTINS, 2016).

Dentro do contexto militar, Arifurrahman, Gunawan, *et al* (2017) realizou estudos paramétricos baseados em simulações numéricas para investigar o comportamento estrutural de painéis planos e curvados, reforçados e não reforçados, submetidos a cargas explosivas. A parametrização da investigação fundamentou-se na variação da distância da fonte explosiva e magnitude, configuração dos reforçadores e curvatura da casca cilíndrica. Amostras dos resultados numéricos obtidos por Arifurrahman, Gunawan, *et al* (2017) são exibidas na Figura 2-18 (painéis planos) e Figura 2-18 (painéis curvados).

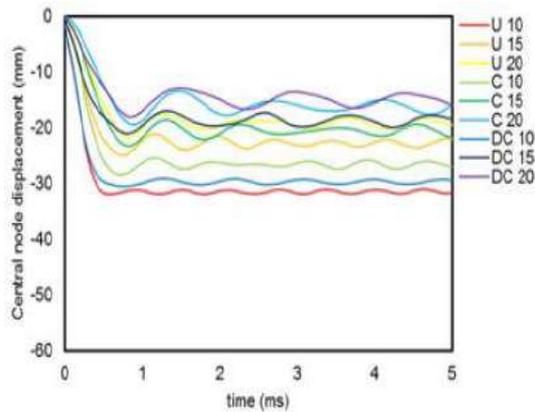


Figura 2-18 Resposta de painéis planos a cargas explosivas (ARIFURRAHMAN, GUNAWAN, et al., 2017).

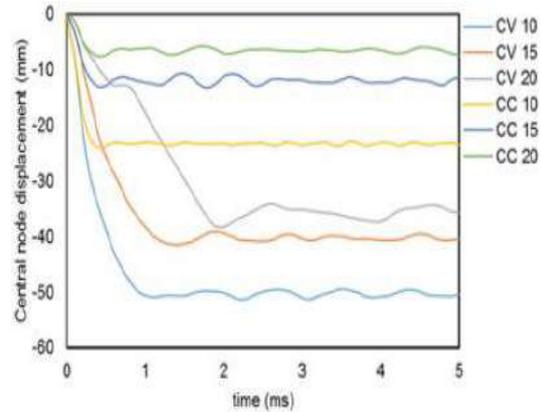


Figura 2-19 Resposta de painéis curvados a cargas explosivas (ARIFURRAHMAN, GUNAWAN, et al., 2017).

Reis, Silva, *et al* (2015) investigou a sensibilidade a imperfeições de painéis curvados por meio de um estudo paramétrico numérico baseado na amplitude e forma dos desvios iniciais em relação à geometria perfeita. O estudo verificou vários tipos de imperfeições como, por exemplo, a exibida na Figura 2-20, onde as amplitudes foram normalizadas ao longo do comprimento. A verificação do colapso dos painéis foi feito por simulações numéricas elastoplásticas conforme a curva mostrada na Figura 2-21.

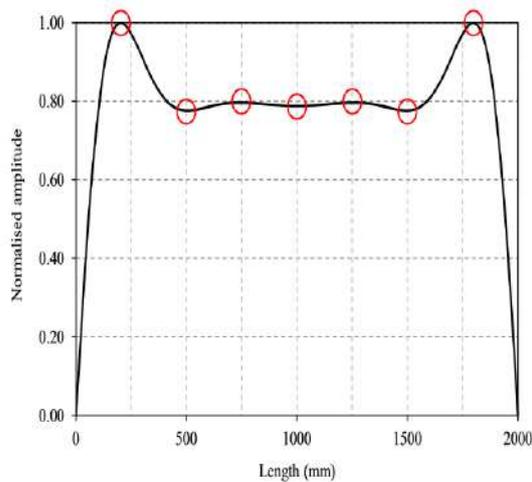


Figura 2-20 Aspecto das imperfeições ao longo do comprimento do painel (REIS, SILVA, et al., 2015).

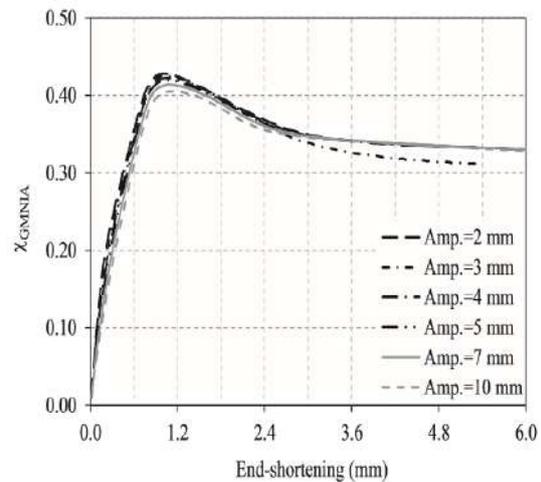


Figura 2-21 Simulação numérica elastoplástica com diferentes amplitudes de imperfeições (REIS, SILVA, et al., 2015).

A conclusão de Reis, Silva, *et al* (2015) foi que a redução da curvatura de painéis curvados leva a uma menor sensibilidade às imperfeições, assim como a falta de precisão nas normas usualmente utilizadas devido à alta sensibilidade a imperfeições em relação a cilindros reforçados em geral.

Igualmente úteis na construção de estruturas sob carregamento hidrostático, calotas esféricas possuem investigações que elucidam a influência do raio de curvatura no comportamento estrutural de cascas finas. Grunitz (2003) em seu estudo examina a influência das depressões nos cordões de solda circunferências na pressão de flambagem de calotas engastada e simplesmente apoiadas sob pressão uniforme. A geometria utilizada nos modelos numéricos é descrita na Figura 2-22, o cordão de solda inserido no estudo é conforme a Figura 2-23.

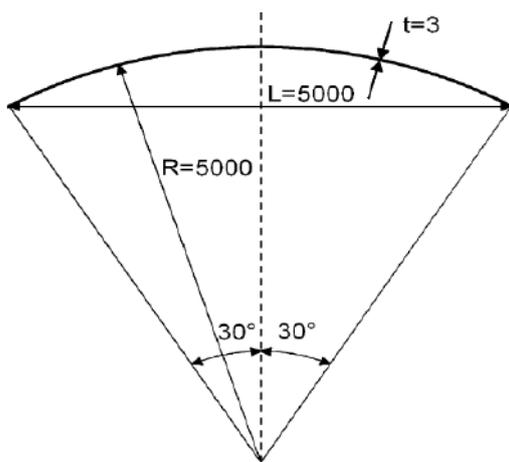


Figura 2-22 Geometria utilizada por Grunitz (2003).

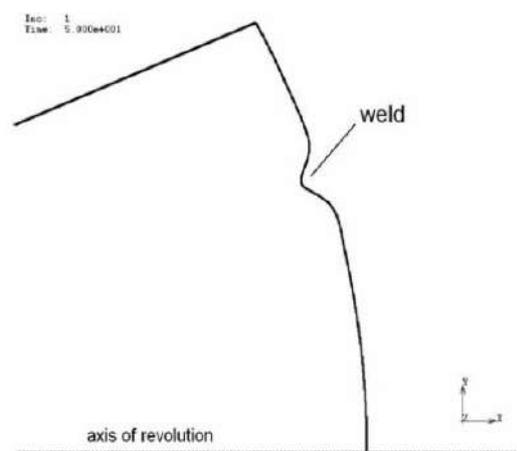


Figura 2-23 Cordão de solda no modelo de Grunitz (2003).

A pressão de colapso elastoplástica dos modelos forma comparadas com a pressão de flambagem linear elástica de modelos com cordões de solda em várias posições. O autor concluiu que as depressões causam um decréscimo significativo na capacidade de resistir ao colapso, assim como a necessidade de resultados experimentais para a validação dos resultados numéricos.

Jaehong, *et al* (2016) investigou o comportamento de painéis curvados cerâmicos revestidos com materiais direcionalmente alterados em relação às propriedades mecânicas (Figura 2-24 e Figura 2-25). O estudo utiliza as condições de casca fina de Kirchhoff-Love e as relações cinemáticas de von Karman para examinar o caminho de solução não linear sob carregamento de pressão externa. A Figura 2-24 exhibe a solução de painéis sob carregamento de pressão externa para 4 tipos de revestimento indicado pelo parâmetro ζ . A Figura 2-25 apresenta a solução obtida por Jaehong, *et al* (2016) para geometrias imperfeitas referenciadas pelo parâmetro κ .

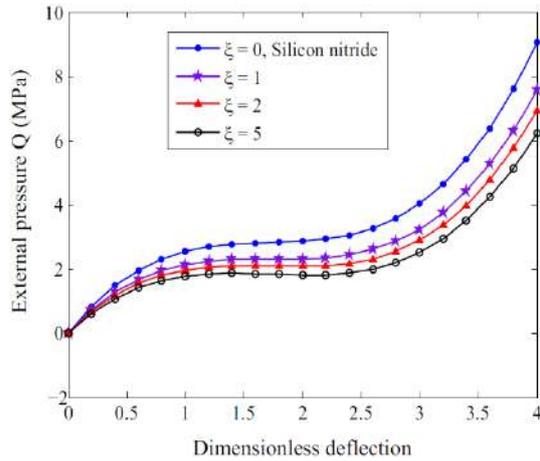


Figura 2-24 Deflexão adimensionalizada para 4 tipos de revestimento (JAEHONG, NGUYEN e THANG, 2016)

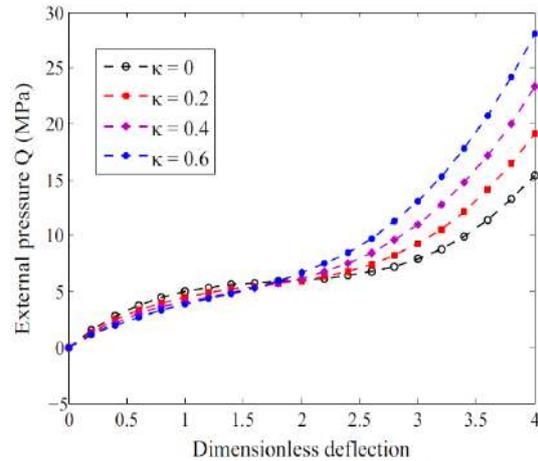


Figura 2-25 Deflexão adimensionalizada para 4 parâmetros de imperfeição (JAEHONG, NGUYEN e THANG, 2016)

O estudo concluiu que os parâmetros de imperfeição têm um significativo efeito nas curvas elastoplásticas da pressão externa em função da deflexão para painéis curvados finos fabricados com revestimentos cujas as propriedades mecânicas são direcionamente alteradas. Adicionalmente às imperfeições, a investigação concluiu que as relações paramétricas de ordem geométrica, tais como raio-espessura, comprimento circunferencial-espessura e comprimento longitudinal-raio, influenciam de sobremaneira no ponto limite das curvas elastoplásticas.

2.9 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Modelo constitutivo ou relação constitutiva é o conjunto de equações que correlacionam duas quantidades físicas e específicas de um determinado material. Em análise estrutural, as quantidades físicas correlacionadas por meio das *equações constitutivas* são as tensões e deformações. As tensões são associadas ao carregamento e arranjadas em equações chamadas de *equações de equilíbrio*, enquanto que as *relações cinemáticas* expressam a relação entre deformação e deslocamento. A *lei de Hooke* é a pioneira e mais elementar descrição de um modelo constitutivo. A versão generalizada da lei de *Hooke* integra tensão e deformação por intermédio do módulo de elasticidade E , também conhecido como *módulo de Young*, e o coeficiente de *Poisson* ν .

A lei de *Hooke* na forma generalizada origina-se da derivada da densidade de energia de deformação W em relação às deformações ϵ , ou seja,

$$\partial\sigma = \partial W/\partial\varepsilon. \quad 2.89$$

A Equação 2.89 gera 8 equações e 81 coeficientes que são reduzidos a 6 e 21, respectivamente, ao considerar a imaterialidade das derivadas e a simetria da matriz do modelo constitutivo. Adicionalmente, maiores reduções podem ser efetuadas ao considerar a independência direcional das propriedades mecânicas. O material é considerado isotrópico quando possui as propriedades mecânicas independentes em relação aos 3 eixos ortogonais que definem o sistema de coordenadas. A lei de *Hooke* generalizada para materiais isotrópicos, portanto, é

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk}. \quad 2.90$$

As constantes que compõe a Equação 2.90 são conhecidas como *constantes de Lamé* e definidos conforme o seguinte:

$$\mu = E/2(1 + \nu), \quad 2.91$$

$$\lambda = \nu E/(1 + \nu)(1 - 2\nu). \quad 2.92$$

A formulação das equações constitutivas do material possui a sua fronteira de precisão definida pela *tensão de escoamento* σ_y . Os fundamentos da plasticidade encontrados na literatura buscam a definição das equações constitutivas com parâmetros que definem o comportamento *elastoplástico* do material. Embora o estudo da plasticidade haja um ramo que trata do assunto ao nível das estruturas cristalinas, a abordagem fenomenológica permanece como a melhor opção para o uso em simulações numéricas. Durante os estágios iniciais de desenvolvimento da plasticidade, duas vertentes de análise surgiram; *a teoria de deformação total* e *a teoria de deformação incremental*. A abordagem da teoria de deformação total proposta por Hencky em 1924 é expressa da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij} = (k\sigma_{kk}/3)\delta_{ij} + \psi\sigma_{ij}^d. \quad 2.93$$

Onde k e ψ são escalares, e σ_{ij}^d a matriz das tensões desviadoras definida por:

$$\sigma_{ij}^d = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}. \quad 2.94$$

A parcela $-\frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}$ é definida como a matriz das *tensões hidrostáticas* σ_{ij}^h . A teoria de deformação total é bastante prática devido à facilidade matemática e recomendável em problemas onde o carregamento é proporcional. Entretanto, condições de carregamento não proporcionais demandam o uso da teoria incremental para a resolução de problemas de engenharia. A teoria de deformação incremental apoia-se sobre a definição do *critério*

de escoamento, da teoria de fluxo, da teoria de encruamento e das condições de carregamento-descarregamento.

O critério de escoamento define a região elástica no espaço de tensões. A partir do critério de escoamento, é definida a *função de escoamento* do material que pode ser representada graficamente por meio de uma *superfície de escoamento*. A versão reduzida da superfície de escoamento para espaço de tensões bidimensionais é denominada *local de escoamento*.

Autores como Bridgman (1952) e Crossland (1954) conduziram experimentos que mostraram a reduzida contribuição das tensões hidrostáticas na definição na função de escoamento. Assim, a expressão

$$f(\sigma_{ij}^d) = k^2 \quad 2.95$$

retrata com aceitável precisão a superfície de escoamento do material. A função de escoamento pode ser escrita em função das invariantes de σ_{ij}^d que são J_1, J_2 e J_3 . J_1 , por definição, é nulo. A contribuição de J_3 é reduzida para materiais metálicos (GOULD, 2013). Portanto, a Equação 2.95 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$f(J_2) = k^2. \quad 2.96$$

O critério de escoamento de *Mises* adota a forma mais simples da função de escoamento, ou seja,

$$-J_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^d \sigma_{ij}^d = k^2. \quad 2.97$$

Para um estado plano de tensão com a presença exclusiva de tensões normais, o local de escoamento é

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = k^2 = \sigma_y^2. \quad 2.98$$

O critério de escoamento de *Mises* permite estabelecer o parâmetro k com apenas um simples ensaio de tração. Outro critério conhecido é o *critério de Tresca* que considera a ocorrência do escoamento decorrente do alcance da tensão máxima de cisalhamento. Funções de escoamento com descontinuidades e o menor grau de conservadorismo em relação ao critério de *Mises* inibem a utilização do critério de *Tresca* para a determinação da superfície de escoamento.

A descrição do incremento de deformação plástica após o limite de escoamento é dada pela teoria de fluxo. Assim como para a função de escoamento, as tensões hidrostáticas

são descartadas para a determinação da direção e magnitude do incremento de deformação plástica. A *equação de Prandl-Reuss* define os incrementos de deformação como sendo

$$d\varepsilon_{ij} = (1/9K)d\sigma_{kk}\delta_{ij} + (1/2\mu)d\sigma_{ij}^d + d\lambda\sigma_{ij}^d. \quad 2.99$$

Onde K é conhecido como *módulo volumétrico*, e definido pela expressão

$$K = (1/3)[E/(1 - 2\nu)]. \quad 2.100$$

As parcelas plásticas da Equação 2.99 são correlacionadas da seguinte forma:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda\sigma_{ij}^d. \quad 2.101$$

A Equação 2.101 resulta do trabalho de Hill (1950), e expressa a coincidência direcional da matriz de deformação plástica e da matriz de tensão desviadora. O material experimenta a região plástica quando o escalar $d\lambda$ é positivo. A definição da superfície de escoamento pelo critério de escoamento de *Mises* é condição suficiente para garantir a sua perpendicularidade em relação aos incrementos de deformação plástica. A teoria de fluxo vinculada à superfície de escoamento é conhecida como *teoria de fluxo associada*. De forma generalizada, os incrementos de deformação plástica podem ser escritos da seguinte forma:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \partial g / \partial \sigma_{ij}. \quad 2.102$$

Onde g define o *potencial plástico* que a direção de ε_{ij}^p está associada. Materiais geotécnicos possuem a função g desvinculada da superfície de escoamento f , portanto possuem teoria de fluxo *não associada*.

Os casos mais simples para o cálculo de $d\lambda$ são encontrados na classe de materiais conhecidos como *perfeitamente plásticos*. Materiais deste tipo não produzem alteração da superfície de escoamento, embora experimentem incrementos de deformação plástica. Experimentos que prescrevem deformação e envolvem materiais de encruamento reduzido lançam mão da aproximação *perfeitamente plástica* para a definição da superfície de escoamento.

O *postulado de Drucker* tem se mostrado a condição suficiente para garantir a estabilidade na região plástica. O material é estável, de acordo com o postulado de *Drucker*, quando o trabalho realizado por um agente externo, que aplica lentamente um conjunto adicional de forças, em relação ao deslocamento que produz, é positivo. A primeira afirmação do

Postulado, considerando σ_{ij} um estado de tensão qualquer sobre a superfície de escoamento, resulta em:

$$\dot{\sigma}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p \geq 0 \text{ ou } d\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^p \geq 0. \quad 2.103$$

A segunda asserção do Postulado conceitua o material como estável quando o trabalho líquido realizado por um agente externo em relação ao ciclo de aplicação e remoção é positivo, se ocorrido deformação plástica durante o ciclo. Considerando σ_{ij}^* um estado de tensão arbitrário na região elástica, a interpretação para esta segunda afirmativa leva a:

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)\dot{\varepsilon}_{ij}^p dt \geq 0 \text{ ou } (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*)d\varepsilon_{ij}^p \geq 0. \quad 2.104$$

O Postulado permite afirmar que a superfície de escoamento é convexa. A convexidade garantida ao longo de toda superfície assegura, também, que toda a superfície é regular, e a direção dos incrementos da deformação plástica independe do caminho percorrido pelo carregamento na região linear.

Ao contrário dos materiais perfeitamente plásticos, materiais que manifestam certo grau de encruamento produzem diferentes superfícies de escoamento ao longo do caminho plástico percorrido no espaço de tensões. As características geométricas das superfícies de escoamento subsequentes são definidas pela teoria de encruamento que se subdividem em *encruamento isotrópico* e *encruamento cinemático*.

O encruamento isotrópico produz superfícies de escoamento subsequentes com o mesmo centro e expandidas em relação à superfície de escoamento anterior conforme mostrado na Figura 2-26. A variação do parâmetro k contido na Equação 2.96 define a expansão da superfície de escoamento no decorrer dos incrementos de deformação plástica. Carregamentos que observam certa ciclicidade dependem, ainda, do histórico de deformações plásticas para a definição das superfícies de escoamento e subsequentes expansões. A forma genérica que expressa, portanto, a função de escoamento é

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, k) = 0. \quad 2.105$$

O encruamento cinemático assume que a superfície de escoamento translada sem expansões nem rotações conforme mostrado na Figura 2-27. A regra de encruamento proposta por Prager (1955) foi introduzida para estimar os resultados de deformação plástica que levam em consideração o *efeito Bauschinger*. A expressão, portanto, para a superfície de escoamento que encrua de forma cinemática é:

$$f(\sigma_{ij}, \alpha_{ij}, k) = 0.$$

2.106

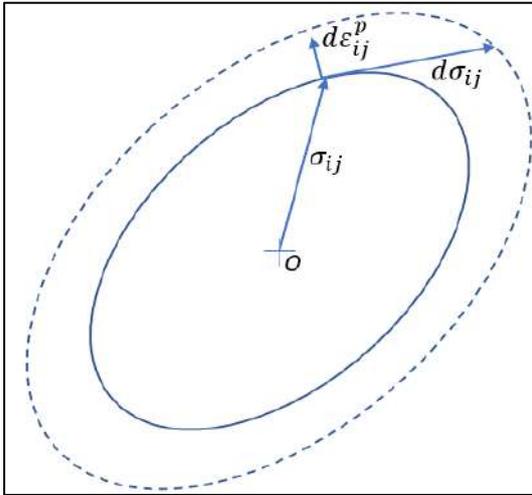


Figura 2-26 -Encruamento isotrópico.

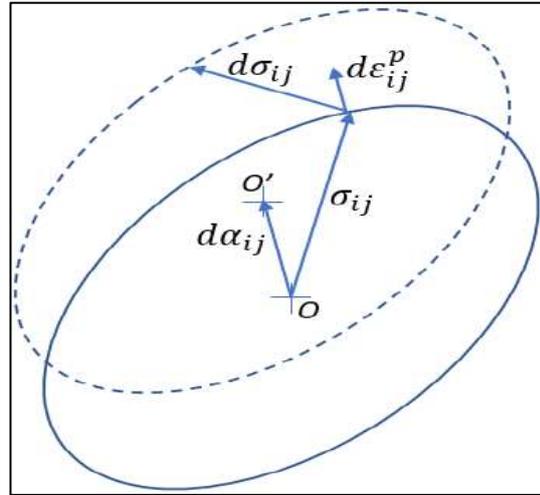


Figura 2-27 -Encruamento cinemático.

Onde α_{ij} é a posição central da superfície de escoamento em relação ao eixo de coordenadas. Prager (1955) sugeriu a evolução de α_{ij} linearmente dependente dos incrementos de deformações plásticas de acordo com o seguinte:

$$d\alpha_{ij} = c d\varepsilon_{ij}^p. \quad 2.107$$

Analogamente, Ziegler (1955) propôs adicionar ao correlacionamento a própria posição α_{ij} , isto é,

$$d\alpha_{ij} = d\mu(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}). \quad 2.108$$

Ao contrário da constante c da Equação 2.107, $d\mu$ varia conforme a evolução do carregamento na região plástica. A Equação 2.107 é recomendável para materiais que possuem um aspecto bilinear na relação tensão-deformação do material. Materiais modelados a partir de curvas tensão-deformação não lineares demandam a utilização da Equação 2.108, pois a relação linear entre α_{ij} e ε_{ij}^p não traduz com aceitável precisão o caminho de descarregamento.

O parâmetro $d\lambda$ é determinado pela condição de consistência proposta por Prager (1949), de acordo com a seguinte igualdade:

$$df = (\partial f / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} + (\partial f / \partial \varepsilon_{ij}^p) d\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad 2.109$$

ou

$$df = (\partial f / \partial \sigma_{ij}) d\sigma_{ij} + (\partial f / \partial \alpha_{ij}) d\alpha_{ij} = 0. \quad 2.110$$

Aplicando a regra de consistência aliada à relação linear de mostrada na Equação 2.107, é possível chegar a:

$$d\lambda = \frac{(\partial f / \partial \sigma_{km}) d\sigma_{km}}{c(\partial f / \partial \sigma_{ij})(\partial f / \partial \sigma_{ij})} \quad 2.111$$

A utilização da teoria de fluxo leva a seguinte expressão para os incrementos de deformação plástica:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{(\partial f / \partial \sigma_{ij})(\partial f / \partial \sigma_{km}) d\sigma_{km}}{c(\partial f / \partial \sigma_{ij})(\partial f / \partial \sigma_{ij})} \quad 2.112$$

2.10 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Os problemas de engenharia demandam modelagens matemáticas solucionáveis. A modelagem de problemas envolve em grande parte a construção de um sistema de equações diferenciais cuja solução somente é possível para modelos matemáticos relativamente simples. A obtenção da solução a partir de um *sistema contínuo*, ou seja, um modelo baseado na interpretação original do modelo físico, se apresenta, portanto, inviável na maioria dos casos de engenharia. A dificuldade em obter formas fechadas de solução analítica pode ser contornada por meio da transformação do sistema contínuo em um *sistema discretizado*. Esta alternativa é o conceito fundamental utilizado pelo método de elementos finitos.

O método de elementos finitos é largamente utilizado em análises de problemas de engenharia que envolvem variáveis de ordem estruturais tais como deslocamento e força. Dentre as especificidades do método de elementos finitos, existe a estratégia numérica de obtenção de solução baseada nos deslocamentos. A formulação geral do método de elementos finitos baseado nos deslocamentos consiste na utilização do *princípio dos deslocamentos virtuais* que é equivalente ao uso do *método de Ritz* para minimizar a energia potencial do sistema. Este princípio estabelece que o equilíbrio para qualquer deslocamento virtual reduzido e compatível imposto a um corpo em seu estado de equilíbrio, o trabalho interno virtual é igual ao trabalho externo virtual. As deformações virtuais resultam dos deslocamentos virtuais por meio das relações cinemáticas, embora

não tenha sido mencionada esta dependência na definição. A relação de igualdade estabelecida pelo princípio dos deslocamentos virtuais é conforme a Equação 2.113 (BATHE, 2006).

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\tau} dV = \int_V \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{f}^B dV + \int_V \bar{\mathbf{U}}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS + \sum_i \bar{\mathbf{U}}^{iT} \mathbf{R}_C^i \quad 2.113$$

Onde $\bar{\mathbf{U}}$ é a matriz coluna dos deslocamentos virtuais e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é a matriz coluna das deformações virtuais correspondentes. \mathbf{f}^B , \mathbf{f}^{S_f} e \mathbf{R}_C são os carregamentos externos respectivamente de volume, de superfície e pontuais. $\boldsymbol{\tau}$ é a matriz que representa as tensões decorrentes das deformações virtuais $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

O sistema de equações originado do método de elementos finitos baseado nos deslocamentos correlaciona carregamento externo com deslocamentos por meio do estabelecimento de coeficientes que são em função da geometria e das características do material. A Equação 2.113, portanto, não representa o modelo discretizado para a solução de um sistema contínuo genérico.

O processo de discretização inicia-se com a determinação da matriz de interpolação \mathbf{H} e a matriz \mathbf{B} que representa relação deslocamento-deformação e surge da diferenciação e combinação apropriada das linhas da matriz \mathbf{H} . A relação tensão-deformação é comumente representada pela matriz \mathbf{C} . Os deslocamentos $\mathbf{u}(x, y, z)$, deformações $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)$ e tensões $\boldsymbol{\tau}(x, y, z)$, sendo assim, medidos dentro de um elemento m em função dos deslocamentos nodais $\hat{\mathbf{U}}$ verificados, são:

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{U}}, \quad 2.114$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{U}} \quad 2.115$$

$$\boldsymbol{\tau}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{C}^{(m)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} + \boldsymbol{\tau}^{I(m)}. \quad 2.116$$

Onde $\boldsymbol{\tau}^{I(m)}$ é a tensão inicial do elemento m . Analogamente, os carregamentos externos de volume $\mathbf{f}^{b(m)}$ e de superfície $\mathbf{f}^{S_f(m)}$ sobre o elemento m são discretizados da seguinte forma:

$$\mathbf{f}^{b(m)} = \mathbf{H}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{b(m)} \quad 2.117$$

$$\mathbf{f}^{S_f(m)} = \mathbf{H}^{S_f(m)T} \boldsymbol{\tau}^{S_f(m)}. \quad 2.118$$

O resultado da substituição das Equações 2.114 a 2.118 na Equação 2.113 é

$$KU = R \quad 2.119$$

O vetor carregamento R é a composição dos carregamentos de volume R_B , de superfície R_S , das forças pontuais R_C e das forças internas R_I , ou seja,

$$R = R_B + R_S - R_I + R_C. \quad 2.120$$

Onde

$$R_B = \sum_m \mathbf{f}^{b(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{r}^{b(m)} dV^{(m)}, \quad 2.121$$

$$R_S = \sum_m \mathbf{f}^{S_f(m)} = \sum_m \int_{S_f^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{r}^{S_f(m)} dV^{(m)} \mathbf{e} \quad 2.122$$

$$R_I = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^I dV^{(m)}. \quad 2.123$$

A matriz de rigidez global K é

$$K = \sum_m K^{(m)} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)}. \quad 2.124$$

A Igualdade 2.119 representa o sistema de equações para o equilíbrio estático, pois a aplicação do carregamento independe do tempo. Representações físicas que demandam a simulação de carregamentos dinâmicos necessitam considerar as acelerações e velocidades nodais para a correta discretização de um sistema contínuo. As equações de elementos finitos para carregamentos dinâmicos possuem termos adicionais que representam a contribuição da massa e do amortecimento de acordo com o seguinte:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R. \quad 2.125$$

Onde M é a matriz de massa, e C é a matriz de amortecimento. Os novos graus de liberdade \ddot{U} e \dot{U} são, respectivamente, as acelerações e velocidades nodais. Similarmente à discretização dos carregamentos externos de superfície e de volume, a matriz de massa é composta de termos da matriz de interpolação e dependente do escalar que expressa o peso específico do material. A matriz de amortecimento não é usualmente concebida à nível de elemento, pois o efeito dissipativo do sistema está associado à frequência do movimento observado. Portanto, a construção do efeito de amortecimento é modelada a nível global, e comumente obtida através da combinação linear das matrizes de rigidez e massa.

A unicidade da solução de um sistema de equações idealizado pelo método de elementos finitos é garantida por intermédio do estabelecimento das *condições de contorno*. Condições de contorno são classificadas em *essenciais* e *naturais*. As prescrições de deslocamentos correspondem às condições de contorno essenciais, enquanto que as condições de contorno naturais são representadas pela prescrição de forças e momentos.

O sistema de equação de equilíbrio originado da discretização do contínuo exige a simulação numérica para a obtenção de uma solução suficientemente próxima da solução exata. Consequentemente, observações quanto à acurácia dos resultados e à convergência em direção à solução exata são pertinentes. Um modelo de elementos finitos se exhibe de forma adequada quando a convergência da solução aproximada à solução exata ocorre conforme o número de elementos aumenta. A acurácia da solução depende de vários fatores dentre os quais se destaca o grupo de erros oriundos da interpolação à nível de elemento das variáveis que compõem a solução.

A convergência do modelo de elementos finitos é garantida quando as *exigências de completude e compatibilidade* são atendidas. Um elemento é considerado completo quando as funções que representam o deslocamento simulam adequadamente os deslocamentos de corpo rígido e do estado de deformação estático. A compatibilidade do conjunto de elementos é assegurada no momento em que é garantida a continuidade dentro dos elementos e nas linhas que representam as fronteiras entre elementos.

A convergência garantida ao atender o critério de completude e compatibilidade é conhecida como *convergência monotônica*, pois garante que quanto maior o grau de refinamento de uma malha maior é a acurácia dos resultados. O critério de completude não é um fator que dificulta a construção das malhas e geralmente é atendido sem maiores dificuldades. Entretanto, para análises tridimensionais de estruturas complexas, o critério de compatibilidade é difícil de ser atendido. Desta forma, a *convergência não monotônica* é uma opção para simulações numéricas, embora o ônus do tempo maior de processamento tenha que ser pago. O negligenciamento do critério de compatibilidade força ao atendimento do critério de completude a nível global para convergir, ou seja, o conjunto de elementos que formam a malha devem representar de forma satisfatória o estado de deformação constante. Estudos realizados por Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2013) desenvolveram métodos para verificar a completude do arranjo geral de elementos baseada em uma amostra qualquer de elementos de uma determinada malha.

Sistemas de equações originados da Equação 2.119 que se apresentam na forma linear são solucionados através de métodos diretos tais como eliminação *Gaussiana* e decomposição de *Cholesky*, ao passo que sistemas de equações não lineares demandam técnicas iterativas como, por exemplo, o método de *Newton-Raphson* e de *comprimento de arco*.

2.10.1 Método de Comprimento de Arco

O método de elementos finitos envolve inevitavelmente a solução de extensos sistemas de equações não lineares quando se busca a solução precisa de modelos complexos. Métodos analíticos que estabelecem o estudo incremental do caminho de equilíbrio conseguem ser reproduzidos em simulações de elementos finitos, pois cada novo passo de carga apresenta um novo sistema de equações a resolver.

Primordialmente, a análise de estabilidade de uma estrutura consiste do cálculo dos *pontos críticos* ao longo do caminho de equilíbrio, que podem ser classificados em *pontos limite* e *pontos de bifurcação*. O conceito físico de ponto limite é conhecido como o fenômeno de *snap-through*. O método de *Newton-Raphson* é uma opção para a obtenção do caminho de equilíbrio, porém apresenta dificuldade de convergência no ponto limite. Esta restrição impacta severamente em qualquer análise de estabilidade, pois a identificação do ponto limite é o objetivo primário na maioria das simulações numéricas de ordem estrutural.

Outro ponto crítico a ser verificado em uma análise detalhada de estabilidade é o *ponto de bifurcação* onde se observa o desvio do caminho de equilíbrio primário para um caminho secundário. Os pontos de bifurcação são estimados por meio de sistemas de equações que envolvem a determinação de autovalores e autovetores.

A abordagem primária para solucionar o problema de convergência foi a introdução de técnicas que adotam a prescrição tanto de carregamento quanto de deslocamento. Outras técnicas também foram adotadas tais como a inserção de molas artificiais e a modificação das equações de equilíbrio na iminência do ponto limite. Apesar da diversidade das abordagens, as suas aplicações se apresentaram restritas a um determinado tipo de problema. O *método do comprimento de arco* desenvolvido por Riks (1972) se tornou a técnica de solução numérica mais utilizada em análise de elementos finitos, pois, devido

a sua característica generalizada, permitiu o surgimento de diversos estudos análogos em diferentes áreas.

A estratégia numérica do método do comprimento de arco implica na adição de uma equação em função de um parâmetro de controle η ao sistema de equações original. O sistema de equações modificado apresenta somente singularidades ou pontos críticos nos pontos de bifurcação, que permite, portanto, a convergência nas adjacências do ponto limite.

Riks (1972) definiu a superfície que contém a solução do passo de carga corrente conforme o seguinte:

$$f_0(\mathbf{t}, \rho, \eta) = \frac{\partial \rho_1}{\partial \eta} (\rho - \rho_1) + \frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \eta} (\mathbf{t} - \mathbf{t}_1) - (\eta - \eta_1) = 0 \quad 2.126$$

A Equação 2.126 representa um plano no espaço $\rho - \mathbf{t}$ distante $(\eta - \eta_1)$ do ponto com coordenadas (ρ_1, \mathbf{t}_1) , e com normal caracterizada pelos componentes $\frac{\partial \rho_1}{\partial \eta}$ e $\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial \eta}$. O plano f_0 refere-se à primeira tentativa para a obtenção do ponto subsequente, portanto

$$f_\alpha(\mathbf{t}, \rho, \eta) = 0 \quad 2.127$$

representa todos os planos estimados que intersectam a curva solução, ou seja,

$$\alpha = 0, 1, 2 \dots (M - 1), \quad 2.128$$

onde M é o número total de iterações. Os parâmetros ρ e \mathbf{t} estão associados ao carregamento e à configuração cinemática, respectivamente. Os parâmetros ρ_1 , \mathbf{t}_1 e η_1 decorrem do ponto previamente obtido. O parâmetro ρ é função do parâmetro de controle η , logo a seguinte representação é pertinente:

$$f_\alpha(\mathbf{t}, \rho, \eta) = f_\alpha(\mathbf{q}, \eta). \quad 2.129$$

A relação

$$\frac{\partial f_\alpha(\mathbf{q}, \eta)}{\partial \mathbf{q}} \Delta \mathbf{q} + f_\alpha(\mathbf{q}, \eta) = 0 \quad 2.130$$

decorre do método de Newton-Raphson, onde

$$\mathbf{q}^{(i+1)} = \mathbf{q}^{(i)} + \Delta \mathbf{q}^{(i)} \quad 2.131$$

$$i = 1, 2 \dots M.$$

2.132

O método iterativo descrito na Equação 2.130 estabelece uma aproximação inicial $\mathbf{q}^{(1)}$ e resolve o sistema de forma a obter $\Delta \mathbf{q}$. A Equação 2.131 atualiza a solução corrente, e um novo processo é iniciado até a solução estimada atingir uma proximidade pré-estabelecida em relação à solução exata.

A proposta de Riks (1972) para a obtenção da solução é apresentada na Figura 2-28. O método de comprimento de arco adequa-se satisfatoriamente a curvas sem descontinuidades, e efetivamente converge para a solução desde que a variação do parâmetro η permaneça reduzido e não haja tentativa de obtenção de pontos de bifurcação.

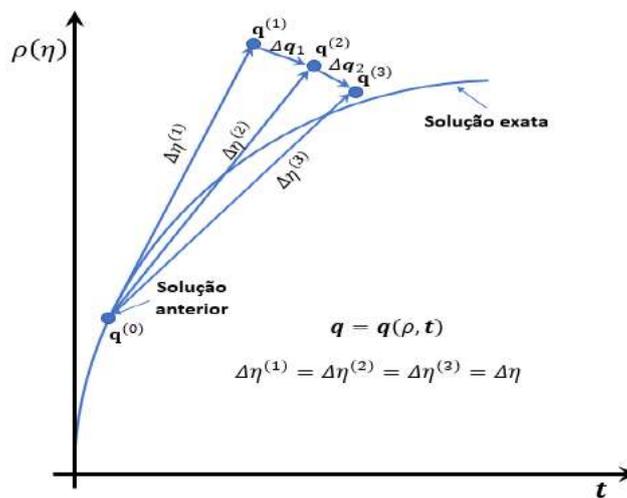


Figura 2-28 - Método do comprimento de arco proposto por Riks (1972).

O Método recebe esta denominação porque, ao longo da obtenção do caminho de equilíbrio, η se aproxima do “comprimento do arco” descrito pela curva solução do sistema. Detalhes sobre a variação de η durante o processo iterativo entre dois pontos é apresentado em Riks (1972), assim como a estratégia ponto a ponto de cálculo de autovetores e autovalores para a aquisição dos pontos de bifurcação.

3 TESTES EXPERIMENTAIS

Os testes experimentais conduzidos no Laboratório de Tecnologia Submarina (LTS) tiveram o objetivo de verificar a pressão de colapso de painéis curvados (enrijecidos ou simples) sob carregamento hidrostático. As geometrias foram selecionadas, observando casos práticos, de acordo com as relações entre raio e espessura, e, também, entre raio e comprimento total. Além disso, o estudo levou em consideração geometrias que permitissem a viabilidade no que tange ao custo de fabricação, assim como no que diz respeito às especificações técnicas dos aparatos e equipamentos utilizados. Foram submetidas ao total 5 painéis à câmara hiperbárica, sendo 2 deles sem qualquer tipo de reforço. Igualmente de caráter experimental, e, também, conduzidos nas instalações do LTS, os ensaios de tração serviram para verificar o modelo constitutivo do material utilizado na fabricação dos painéis. E, completando as atividades experimentais, foi realizado o mapeamento das superfícies de forma a obter as imperfeições inseridas pelo processo de fabricação.

3.1 PROCESSO DE FABRICAÇÃO DOS PAINÉIS E APARATOS

O primeiro aparato a ser fabricado foi uma estrutura em aço *AISI-1020* com dimensões bem mais robustas do que a dos painéis a serem testados de forma a manter a estanqueidade da superfície interna do painel e das cavernas. Para fins de referência no texto desta dissertação, tal estrutura será denominada “*Berço*” (Figura 3-1, Figura 3-3 e Figura 3-4). A ferramenta *CAD* (*Computer-Aided Design*) utilizada para a concepção do Berço foi o *SOLIDWORKS™* na sua versão 2013, conforme exibido na Figura 3-2.



Figura 3-1 - O Berço.

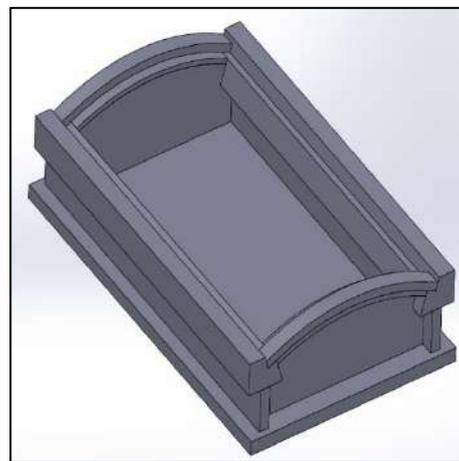


Figura 3-2 - Concepção em software CAD (*SOLIDWORKS™*).

O Berço possui no seu acabamento interno extremidades projetadas para apoiar o painel, fixando três parâmetros geométricos dos modelos testados: o raio a , o ângulo θ que forma o arco e o comprimento total L . Adicionalmente, foram projetados grampos com o mesmo tipo de material do Berço, com o intuito de restringir durante a execução do experimento rotações indesejáveis e, conseqüentemente, garantir a estanqueidade do volume interno.

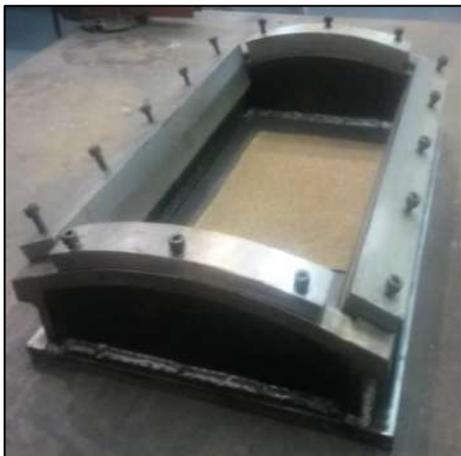


Figura 3-3 – Vista 1 do Berço com os grampos de fixação.



Figura 3-4 - Vista 2 do Berço com os grampos de fixação.

O segundo aparato fabricado foi o gabarito de solda dos painéis. O gabarito de solda é composto de fatias que possuem a face de sustentação dos painéis com curvatura igual aos painéis testados e espessura fixada em 0.5 polegada (12.7 mm). As cavernas fabricadas foram posicionadas no gabarito de solda entre duas fatias adjacentes de forma a obter o espaçamento entre cavernas L_f desejado, conforme mostrado na Figura 3-5. A casca cilíndrica de um único painel foi construída a partir de várias cascas cilíndricas menores com comprimento igual ao espaçamento entre cavernas L_f , descontado da espessura da caverna h (Figura 3-6). Para que houvesse a garantia do correto posicionamento das cascas cilíndricas componentes dos painéis em relação às cavernas durante o processo de soldagem, foram concebidos aparatos secundários de fixação compostos de grampos e 4 hastes rosqueadas. Os grampos foram rosqueados às fatias do gabarito de solda, e atuaram como dispositivos de restrição dos itens dos painéis (cavernas e cascas componentes) no sentido circunferencial. As hastes rosqueadas garantiram a fixação entre as fatias integrantes do gabarito de solda e uma restrição adicional às cavernas em relação às possíveis rotações durante a adição de calor do processo de soldagem. Em geral, o método de fabricação dos painéis adotado minimizou a adição de

imperfeições tais como falta de circularidade, principalmente na região das cavernas, e inclinações indesejáveis das cavernas em relação à casca cilíndrica.



Figura 3-5- Gabarito de solda dos painéis composto de fatias e aparatos de fixação.



Figura 3-6 - Gabarito de solda com as cascas cilíndricas componentes e cavernas posicionadas.

A completa montagem do painel para o início da solda é exibida na Figura 3-7 e Figura 3-8. As deformações plásticas causadas pela adição de calor inerente do processo de soldagem foram minimizadas através de acessórios fixados ao painel através de parafusos. Dentre os acessórios, se destacou o dispositivo que enrijeceu o conjunto e minimizou o empenamento ao longo da direção longitudinal conforme mostrado na Figura 3-8.

A presença dos dispositivos de travamento não foi o único artifício para evitar as deformações durante o processo de soldagem. Foi necessário verificar qual o processo de soldagem mais adequada para uma chapa de espessura de 3.175 mm. Usualmente, esta

espessura classifica a chapa como *chapa fina* e o processo mais adequado e disponível foi o *TIG* (Tungsten Inert Gas), onde é usado um eletrodo de tungstênio não consumível protegido da contaminação atmosférica por meio de imersão em um gás inerte (argônio ou hélio).



Figura 3-7 Painel montado pronto para a soldagem.



Figura 3-8 Painel pronto para ser montado com dispositivo para evitar empenamento.

A condução das atividades de soldagem requer especial atenção quanto a segurança do trabalho, portanto não foi negligenciado a utilização de equipamentos de proteção individual, conforme mostrado na Figura 3-9. Além da escolha do processo de soldagem, os passes de soldagem e local de aplicação foram igualmente importantes para minimizar as deformações. Os passes se iniciaram do centro para a periferia da chapa com alternância das cavernas de acordo com o apresentado na Figura 3-10. O primeiro passe foi dado sem adição de material conhecido como soldagem autógena (Figura 3-11). Após o primeiro passe, os demais passes seguiram a mesma lógica do primeiro passe, porém com adição de material. Ao término dos passes, os cordões de solda passaram por um processo de esmerilhamento para minimizar as imperfeições causadas pela adição de material ficando com o aspecto final conforme mostrado na Figura 3-12.

O processo de fabricação dos painéis teve de forma complementar atenção à adição de calor durante o processo de soldagem através da adoção da menor combinação de tensão

e amperagem dos equipamentos. Desta forma, a zona térmica afetada foi minimizada para que os resultados decorrentes dos ensaios de tração pudessem de maneira satisfatória calibrar o modelo constitutivo das simulações numéricas. Entretanto, nenhum processo de fabricação está livre da inserção de imperfeições, e o mapeamento das superfícies foi realizado de forma a verificar a magnitude dos desvios em relação às dimensões nominais.



Figura 3-9 Soldador conduzindo a soldagem e utilizando os equipamentos de proteção individual pertinentes.



Figura 3-10 Esquema de alternância dos cordões de solda.



Figura 3-11 Primeiro passe (solda autógena).

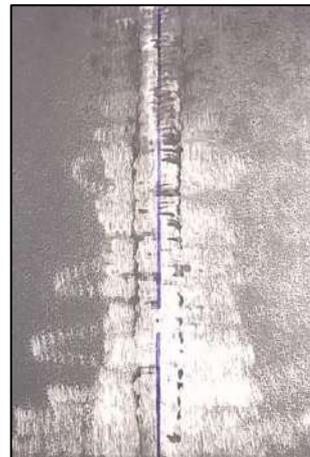


Figura 3-12 Aspecto final do cordão de solda.

3.2 MAPEAMENTO DA SUPERFÍCIE DOS PAINÉIS

Conforme mencionado no Capítulo 2, as imperfeições geométricas inseridas pelo processo de fabricação provocam redução da capacidade de cascas finas cilíndricas de resistir ao colapso. As verificações das imperfeições dos painéis fabricados para este estudo foram efetuadas através de um dispositivo que realiza o mapeamento da superfície por meio da emissão de um feixe de laser. O dispositivo tem o aspecto de “braço” (Figura

3-13) e permite ao usuário varrer as partes de interesse de uma determinada peça. O fabricante do dispositivo se denomina *FARO*[®] o qual possui software próprio para gerenciar as informações obtidas da varredura. O braço pode ser apoiado a uma base rígida ou a um tripé (Figura 3-14). A peça a ser mapeada precisa estar em uma base rígida de forma a minimizar qualquer tipo de perturbação o qual pode inserir erros a leitura.



Figura 3-13 Braço de varredura FARO[®].



Figura 3-14 Tripé de apoio FARO[®].



Figura 3-15 Conjunto de aparatos para varredura FARO[®].

A Figura 3-15 mostra o conjunto de aparatos necessário para a execução da leitura. Adicionalmente à base rígida, a peça a ser mapeada necessita ser restringida no plano paralelo à mesa para evitar perturbações acidentais. Neste caso, o dispositivo de restrição foi um eletroímã. Este dispositivo é importante quando a peça possui deformações excessivas que podem causar instabilidade momentânea do conjunto.

Após o mapeamento, a nuvem de pontos geradas foram submetidas ao software *MESHLAB*[®] para realizar a filtragem dos pontos indesejáveis ou ruídos. Os ruídos foram causados basicamente por regiões das superfícies não favoráveis à reflexão do feixe de laser. O problema pode ser minimizado por meio da aplicação de tinta branca ou qualquer outro acabamento que garanta a uniformização da superfície. Os dados indesejáveis se resumiram à leitura da base de apoio.

O conjunto de figuras compreendido entre a Figura 3-16 e a Figura 3-25 é apresentado a seguir de forma ordenada de forma a permitir a comparação entre a nuvem de pontos logo após o mapeamento e a nuvem de pontos após o processo de retirada de pontos indesejáveis e ruídos.

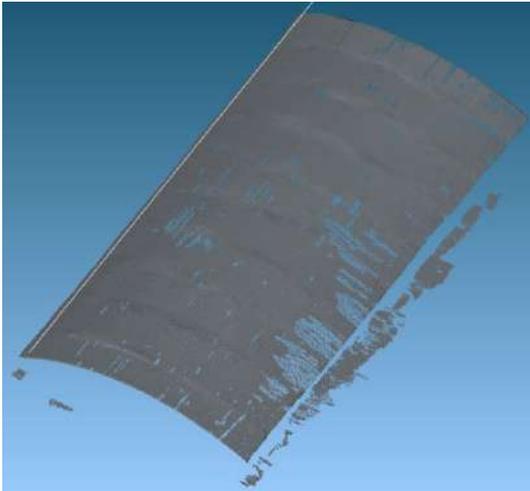


Figura 3-16 Mapeamento com ruídos e pontos indesejáveis - painel reforçado 1.

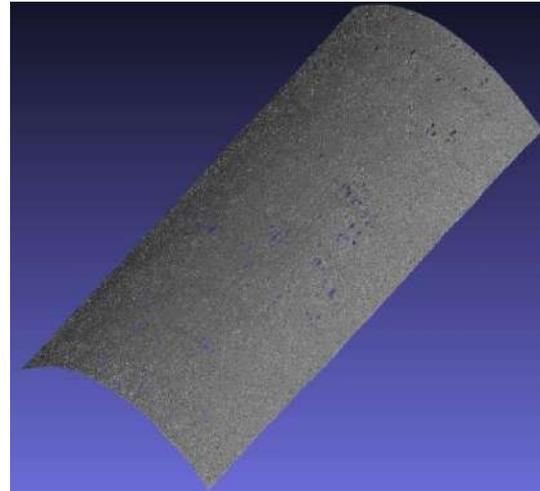


Figura 3-17 Nuvem de pontos após o processo de eliminação de ruídos e pontos indesejáveis painel reforçado 1.

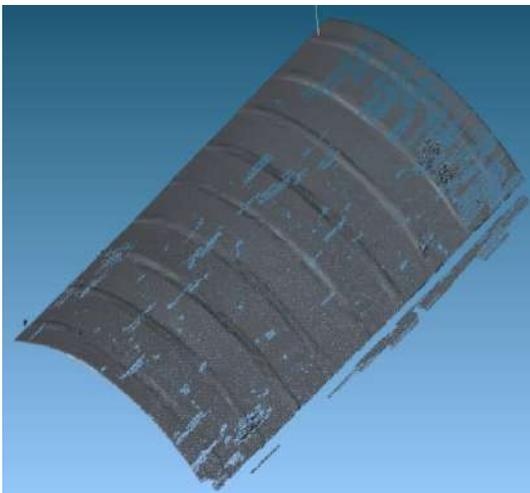


Figura 3-18 Mapeamento com ruídos e pontos indesejáveis - painel reforçado 2.

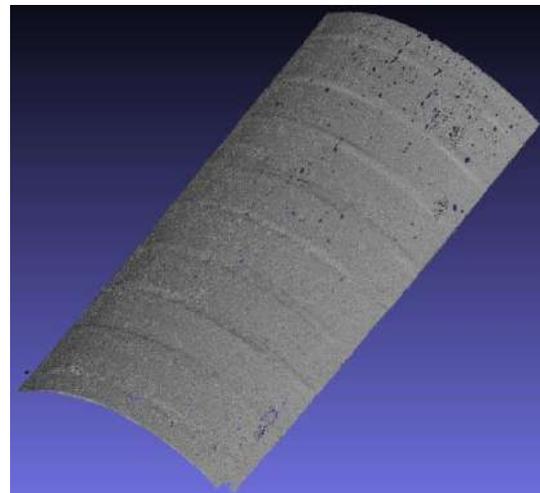


Figura 3-19 Nuvem de pontos após o processo de eliminação de ruídos e pontos indesejáveis painel reforçado 2.

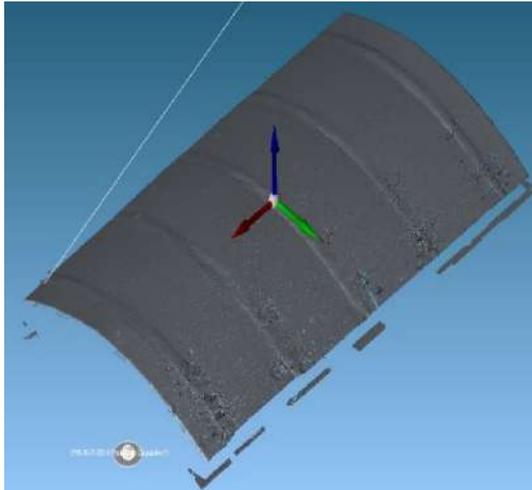


Figura 3-20 Mapeamento com ruídos e pontos indesejáveis - painel reforçado 3.

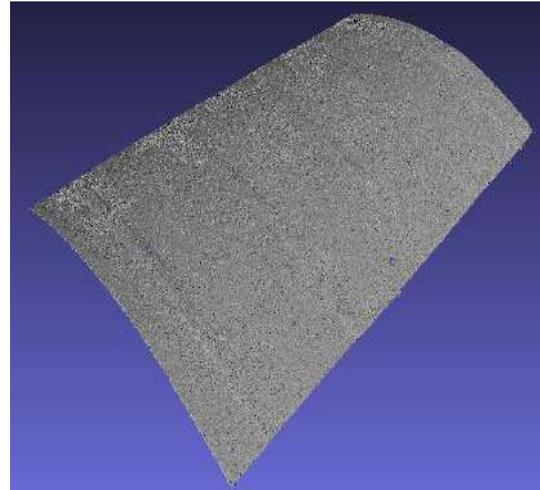


Figura 3-21 Nuvem de pontos após o processo de eliminação de ruídos e pontos indesejáveis painel reforçado 3.

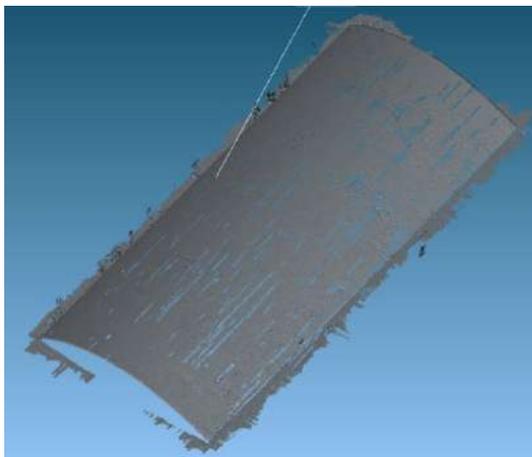


Figura 3-22 Mapeamento com ruídos e pontos indesejáveis - painel sem reforço 1.

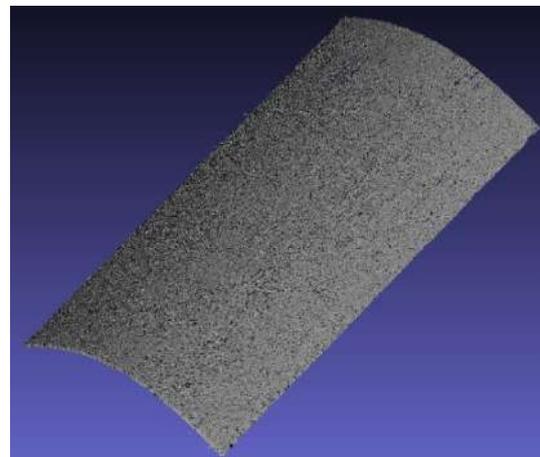


Figura 3-23 Nuvem de pontos após o processo de eliminação de ruídos e pontos indesejáveis painel sem reforço 1.

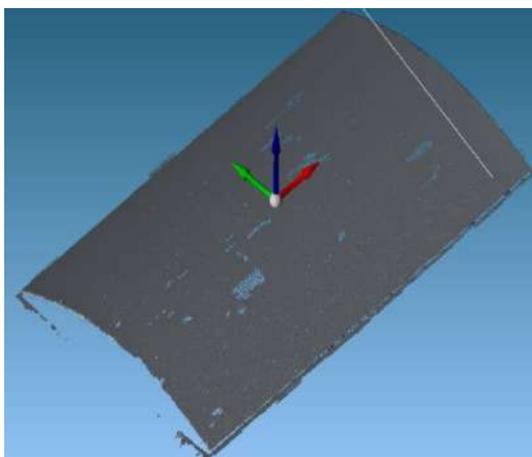


Figura 3-24 Mapeamento com ruídos e pontos indesejáveis - painel sem reforço 2.

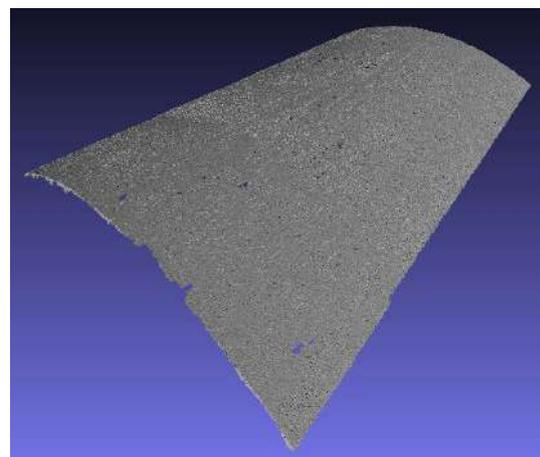


Figura 3-25 Nuvem de pontos após o processo de eliminação de ruídos e pontos indesejáveis painel sem reforço 2.

Após o processo de filtragem, as nuvens de pontos foram submetidas ao MATLAB® com o objetivo de gerar uma superfície parametrizada em função de termos independentes. A direção longitudinal dos painéis foi identificada como o eixo x e a circunferencial, eixo y. A superfície gerada, portanto, possui o eixo z em função de x e y, ou seja, $z = f(x, y)$. As superfícies foram ajustadas por polinômios de 5º grau, e o domínio da função $f(x, y)$ foi estabelecido através de medições tiradas diretamente dos painéis. De forma a enfatizar a presença de imperfeições, são apresentadas a seguir os pontos decorrentes da obtenção da superfície parametrizada que representa a geometria mapeada (azul) e os pontos originados de uma geometria perfeita (vermelho) para o painel reforçado 1 (Figura 3-26). A superfície parametrizada decorrente do mapeamento é conforme a Figura 3-27.

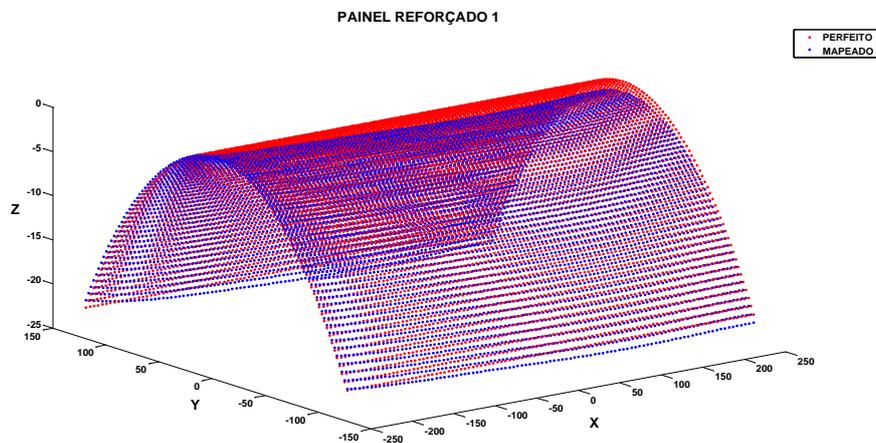


Figura 3-26 Comparação entre o mapeamento (azul) e o painel perfeito (vermelho) – painel reforçado 1.

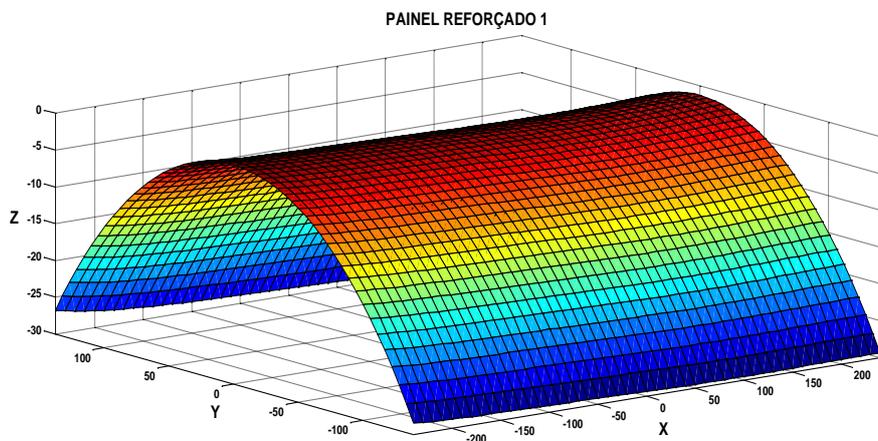


Figura 3-27 Superfície parametrizada decorrente do mapeamento – painel reforçado 1.

O método construtivo adotado para os painéis conseguiu assegurar o mínimo desvio do plano original e da perpendicularidade em relação à casca cilíndrica. Portanto, as cavernas foram adicionadas aos modelos mapeados como sendo perfeitas e seguindo a silhueta imperfeita da casca. A Figura 3-28 mostra a adição de cavernas perfeitas ao mapeamento do painel reforçado 1.

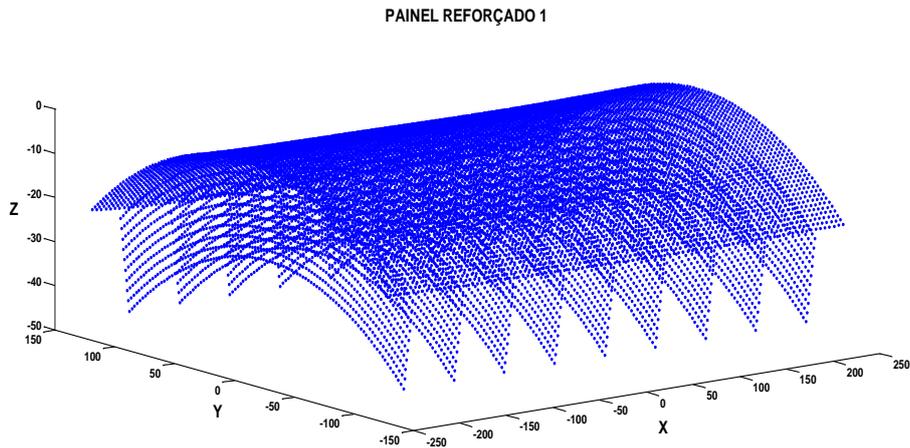


Figura 3-28 Painel mapeado com adição de cavernas perfeitas - painel reforçado 1.

A partir da posição de cada ponto, foi possível definir a numeração dos nós e a sua conectividade para a criação da malha de elementos finitos. A mesma sequência de atividades realizada para o painel reforçado 1 foi feita para os demais painéis conforme mostrado no conjunto de figuras compreendido entre a Figura 3-29 e Figura 3-38.

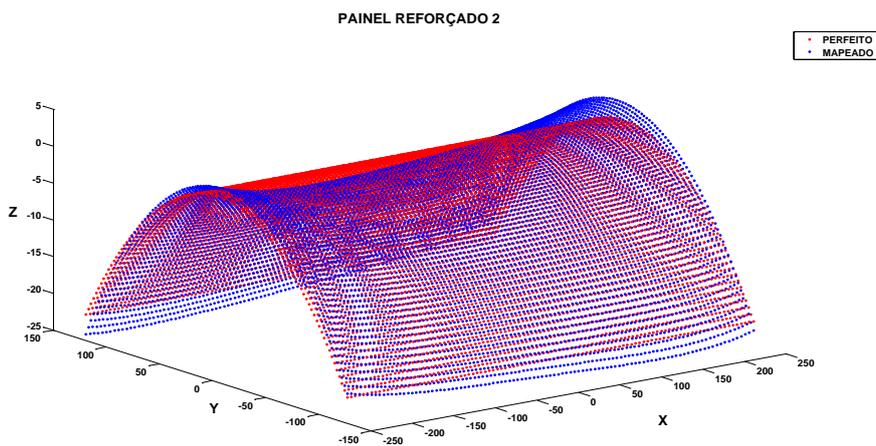


Figura 3-29 Comparação entre o mapeamento (azul) e o painel perfeito (vermelho) – painel reforçado 2.

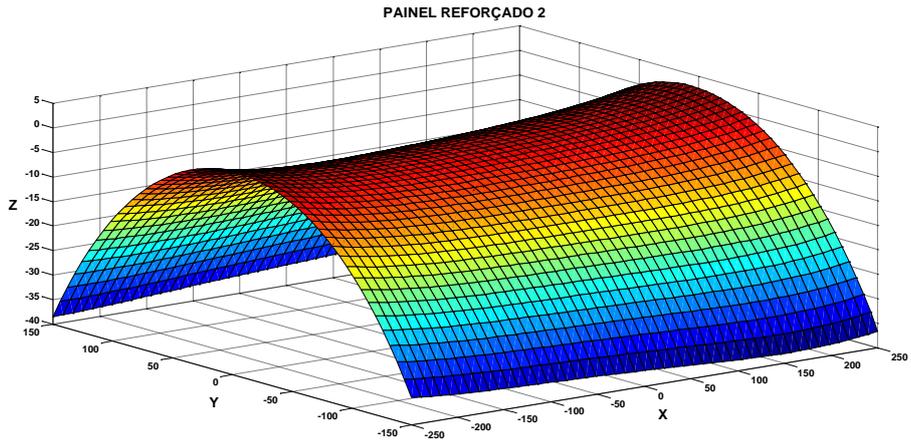


Figura 3-30 Superfície parametrizada decorrente do mapeamento – painel reforçado 2.

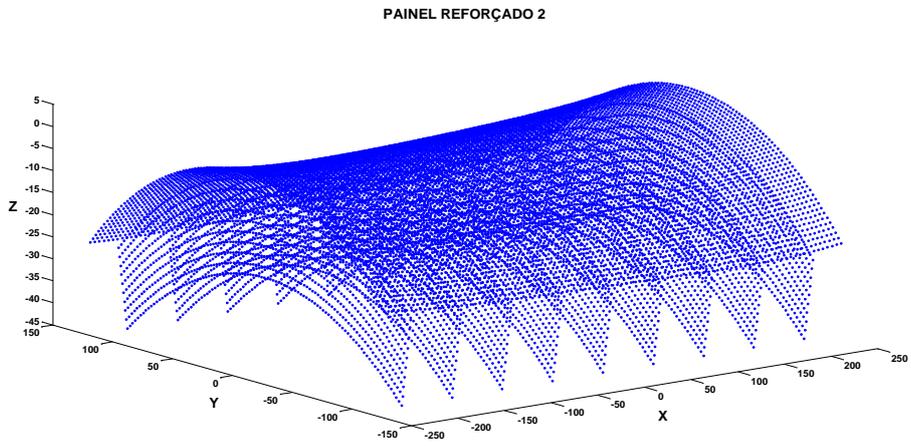


Figura 3-31 Painel mapeado com adição de cavernas perfeitas - painel reforçado 2.

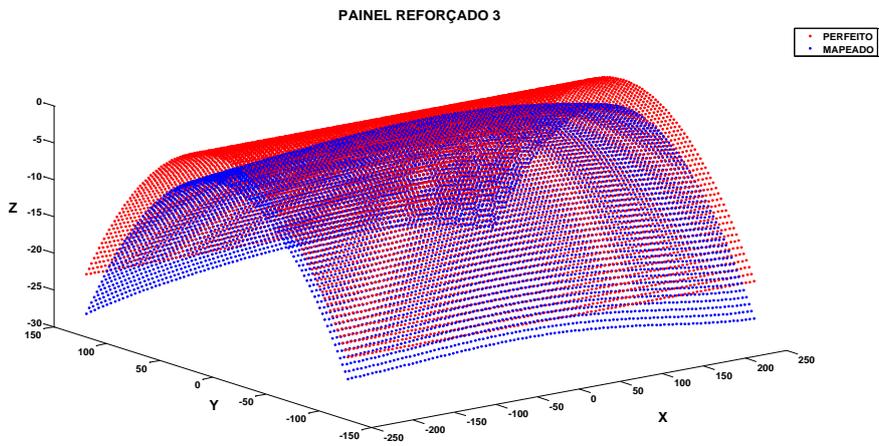


Figura 3-32 Comparação entre o mapeamento (azul) e o painel perfeito (vermelho) – painel reforçado 3.

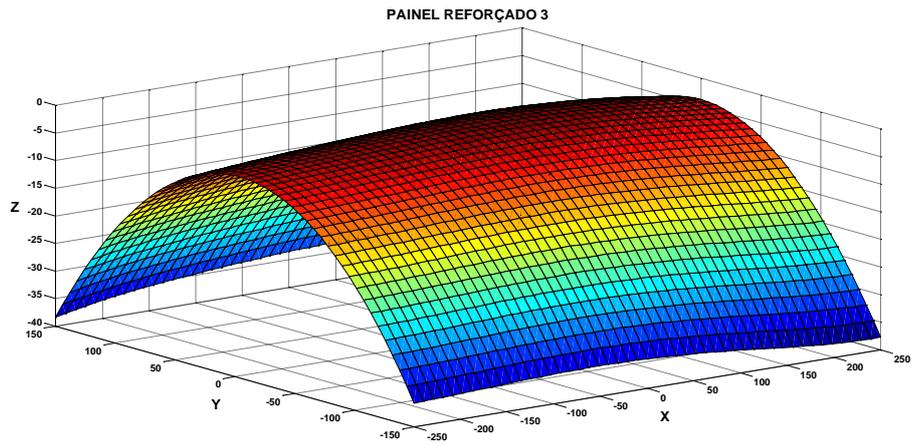


Figura 3-33 Superfície parametrizada decorrente do mapeamento – painel reforçado 3.

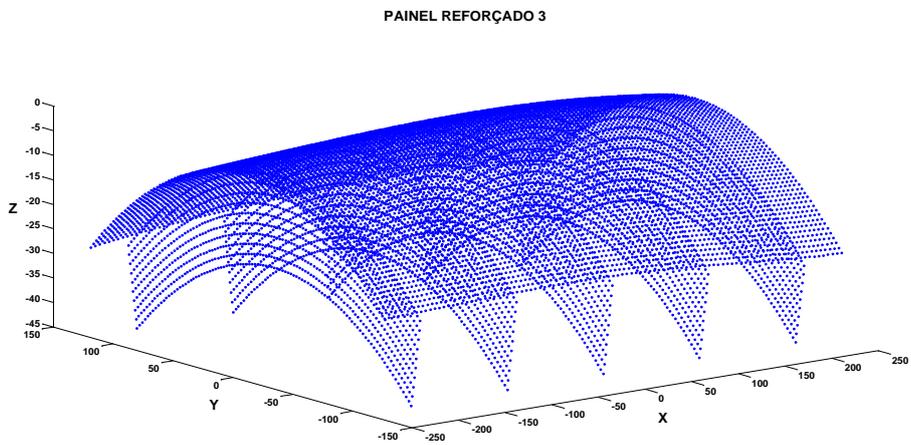


Figura 3-34 Painel mapeado com adição de cavernas perfeitas - painel reforçado 3.

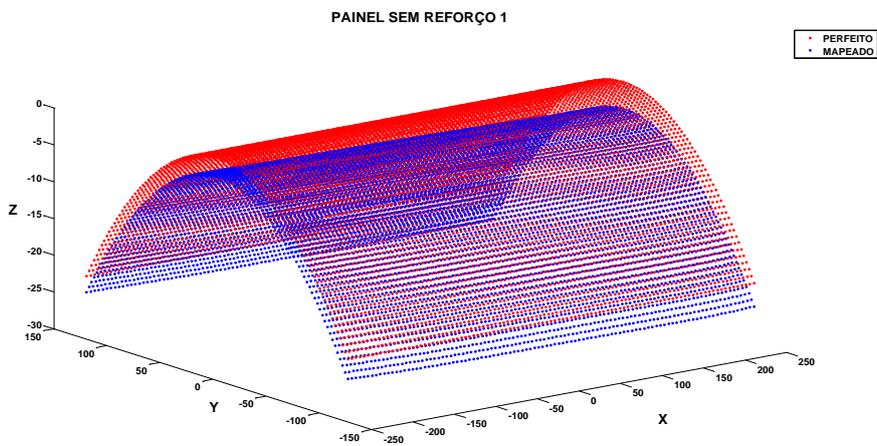


Figura 3-35 Comparação entre o mapeamento (azul) e o painel perfeito (vermelho) – painel sem reforço 1.

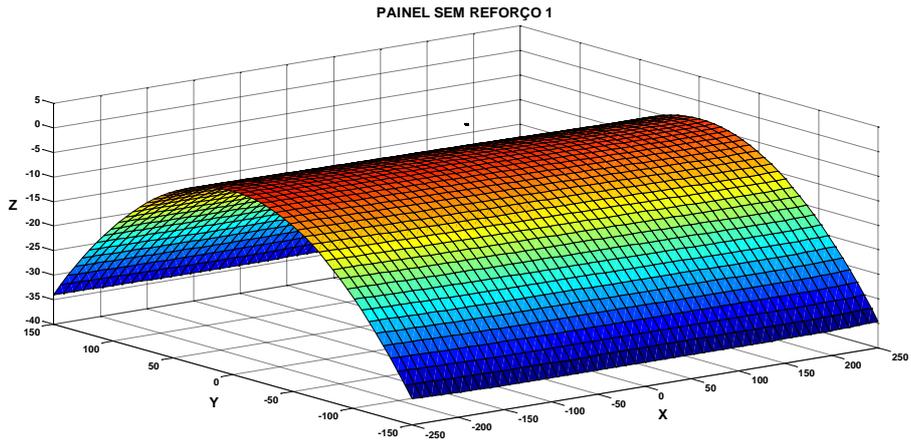


Figura 3-36 Superfície parametrizada decorrente do mapeamento – painel sem reforço 1.

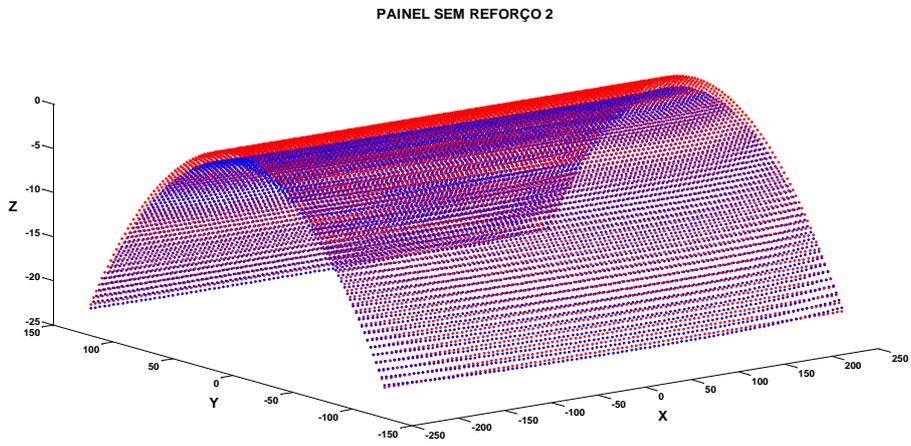


Figura 3-37 Comparação entre o mapeamento (azul) e o painel perfeito (vermelho) – painel sem reforço 2.

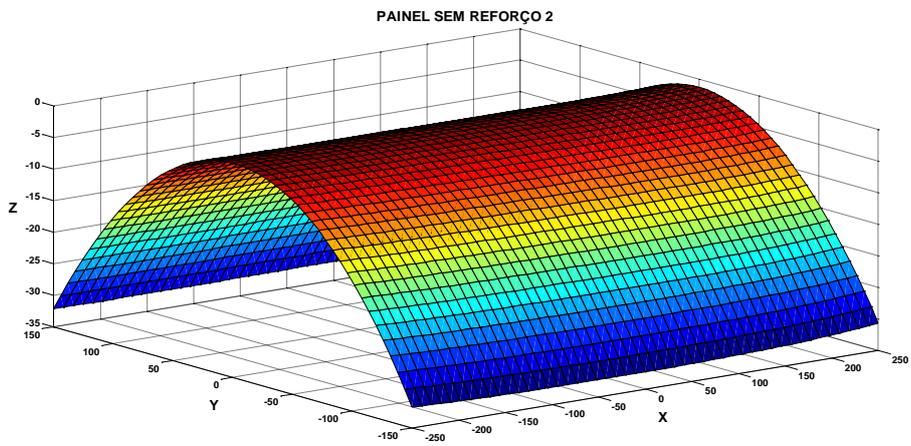


Figura 3-38 Superfície parametrizada decorrente do mapeamento – painel sem reforço 2.

A verificação do grau de correlação das superfícies parametrizadas obtidas com os pontos medidos foi realizada através do cálculo de R^2 (*R-quadrado*), cuja expressão que o caracteriza é

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i \hat{d}_i^2}{\sum_i \bar{d}_i^2}. \quad 3.1$$

As variáveis da somatória \hat{d} e \bar{d} são, respectivamente, o desvio da medição em relação à superfície parametrizada obtida, e o desvio da medição em relação à média. Todos os painéis geraram superfícies parametrizadas com R^2 maiores que 99.57%, o que indica uma boa correlação entre o mapeamento dos painéis e as superfícies parametrizadas decorrentes do ajuste polinomial. A distribuição normal dos painéis mapeados $\Phi_{\mu,\sigma}$ em função dos raios verificados a é apresentada na Figura 3-39 e Figura 3-40, onde μ é a média, e σ , o desvio padrão de a .

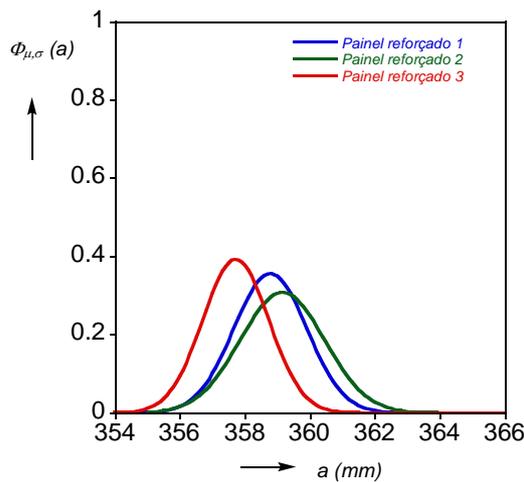


Figura 3-39 Distribuição normal em função de a dos painéis reforçados.

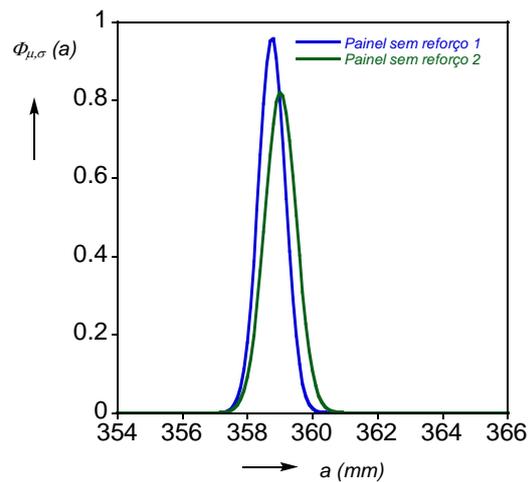


Figura 3-40 Distribuição normal em função de a dos painéis sem reforços.

Os valores de μ e σ , assim como os valores máximos e mínimos de a e respectivas coordenadas no domínio $X Y$, são mostrados na Tabela 3-1 e Tabela 3-2.

Tabela 3-1 Raio médio, desvio padrão, Δ_1 e Δ_2 com as respectivas coordenadas, dos painéis reforçados.

	Painel reforçado 1	Painel reforçado 2	Painel Reforçado 3
Raio médio μ (mm)	358.78	359.15	357.72
Desvio padrão σ	1.12	1.297	1.016
Δ_1 (%)	1.987	2.07	2.49
Coordenadas X-Y - Δ_1 (mm)	(32.71,27.48)	(-187.89,69.08)	(-19.01,124.29)
Δ_2 (%)	-5.53	-7.73	3.76
Coordenadas X-Y - Δ_2 (%)	(-157.91,-91.28)	(-182.30,-56.75)	(-186.46,111.13)

Tabela 3-2 Raio médio, desvio padrão, Δ_1 e Δ_2 com as respectivas coordenadas, dos painéis sem reforços.

	Painel sem reforço 1	Painel sem reforço 2
Raio médio μ (mm)	358.76	359.02
Desvio padrão σ	0.416	0.487
Δ_1 (%)	0.477	0.521
Coordenadas X-Y - Δ_1 (mm)	(240.87,112.93)	(241.39,-133.04)
Δ_2 (%)	-0.334	0.822
Coordenadas X Y - Δ_2 (%)	(-241.34,-37.22)	(242.72,51.63)

A distribuição normal em função de a permite identificar globalmente as ocorrências dos desvios em relação ao raio médio medido e ao raio nominal de fabricação dos painéis. Todos os painéis foram fabricados com raio nominal igual a 360 mm. Os valores de Δ_1 e Δ_2 referem-se à diferença normalizada do raio máximo e mínimo verificado, respectivamente, em relação ao raio médio μ . Os painéis reforçados apresentaram maiores dispersões em relação à média dos raios observados quando comparados com os painéis sem reforços. A dispersão dos dados em relação à média é representada pelo desvio padrão. A reduzida dispersão do mapeamento dos painéis sem reforços pode ser, também, constatada através da reduzida diferença entre o raio máximo e mínimo em relação à mesma diferença observada para os painéis com reforços. Uma média menor dos raios indica uma maior resistência ao colapso quando os painéis em comparação possuem a mesma dispersão. Uma maior dispersão dos dados observados indica uma quantidade maior de raios diferentes da média, e, conseqüentemente, maior ocorrência de imperfeições e favorecimento ao colapso. A ocorrência dos máximos e mínimos dos raios nos painéis reforçados se deu em regiões aleatórias das superfícies, ao passo que nos painéis sem reforços, os maiores desvios foram observados nas adjacências das extremidades circunferenciais.

3.3 ENSAIOS DE TRAÇÃO

Os ensaios de tração conduzidos neste estudo serviram para verificar as propriedades mecânicas dos materiais utilizados na fabricação dos painéis. Além do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson, os ensaios de tração permitiram o estabelecimento da superfície de escoamento e do grau de encruamento. A verificação das características elásticas em direções ortogonais foi simplificada por meio da fabricação de no mínimo dois corpos de provas por material utilizado. Devido ao caráter monotônico do carregamento aplicado aos corpos de prova, o encruamento da superfície de escoamento é do tipo isotrópico para fins de simulações numéricas. A geometria e as dimensões dos corpos de prova são conforme a Figura 3-41 e a Tabela 3-3,

respectivamente. As tolerâncias foram minimizadas para mitigar a influência de imperfeições nos resultados.

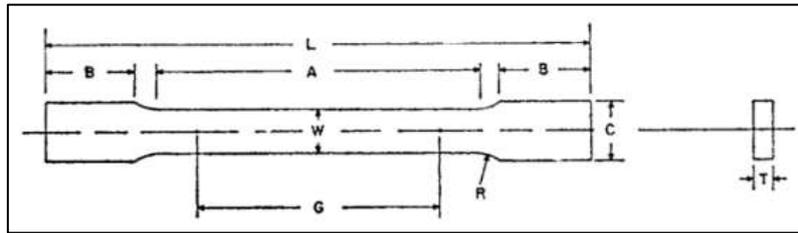


Figura 3-41 Geometria dos corpos de prova (ASTM E8, 2011)

Tabela 3-3 Dimensões dos corpos de prova (mm).

L	240
A	64
B	77
W	12.5
G	60
C	20
T	3.175
R	14

A instrumentação dos corpos de prova foi realizada por meio de extensômetros mecânicos (*clip-on gauges*) e extensômetros elétricos (*strain gauges*), ambos são mostrados na Figura 3-42, Figura 3-43 e Figura 3-44. Extensômetros mecânicos são dispositivos que possuem em seu interior transdutores de medição que transformam a variação de comprimento em sinal elétrico. O comprimento de referência é normalmente referenciado na literatura como *gauge length*. Para os testes realizados, o comprimento de referência foi de 25 mm. Os dados técnicos referentes ao extensômetro mecânico são apresentados na Tabela 3-4.



Figura 3-42 Extensômetro mecânico clip-on gauge.

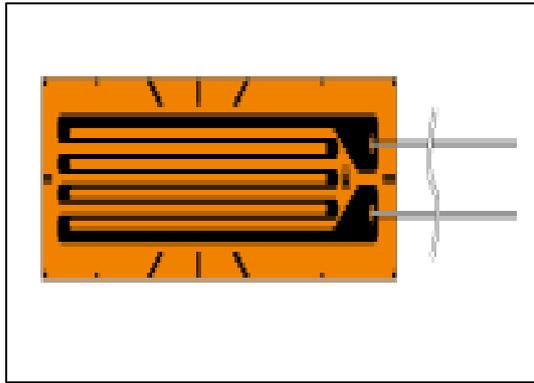


Figura 3-43 Extensômetro elétrico uniaxial.

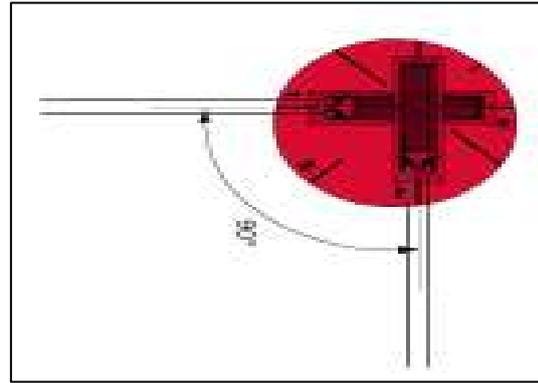


Figura 3-44 Extensômetro elétrico biaxial.

Tabela 3-4 Dados técnicos do extensômetro mecânico (INSTRON, 2007).

Altura	52 mm
Peso	0.0056 Kg
Largura	39 mm
Comprimento de Referência	25 mm
Espessura do Corpo de Prova	0 - 12.5 mm
Largura do Corpo de Prova	0 - 40 mm
Tipo de Análise	Monotônica
Temperatura de Operação	-100 a 200 °C
Deformação Máx/Min	+/- 10%

Extensômetros elétricos (*strain gauges*) baseiam-se na variação de resistência elétrica do material submetido a tração ou compressão. Basicamente, quando condutores elétricos se tornam maiores em comprimento e menores em largura (carga de tração), a resistência elétrica aumenta. O oposto é válido para cargas de compressão. A seguinte igualdade vale para relacionar a variação de resistência elétrica ΔR com a deformação ε :

$$\frac{\Delta R}{R} = K_S \frac{\Delta L}{L} = K_S \varepsilon. \quad 3.2$$

Onde K_S é o coeficiente relacionado com a sensibilidade do extensômetro elétrico, e L , o comprimento do condutor. O esquema de circuito usualmente utilizado para medir a variação da resistência dos extensômetros elétricos, e, conseqüentemente, a variação da tensão, é a ponte de *Wheatstone*, de acordo com o esquema exibido na Figura 3-45. O circuito é composto de dois conjuntos de resistores. O conjunto de referência composto pelos resistores R4 e R3 (Figura 3-45) permanece fixo durante a aquisição de dados, enquanto que o conjunto compreendido pelo resistor R2 e o extensômetro elétrico R1 varia. O desbalanceamento resistivo entre os dois conjuntos ocasiona a variação de tensão na saída do circuito. A relação entre a tensão de alimentação (*bridge voltage*) E e a tensão de saída e_o (*output voltage*) é conforme a Equação 3.3.

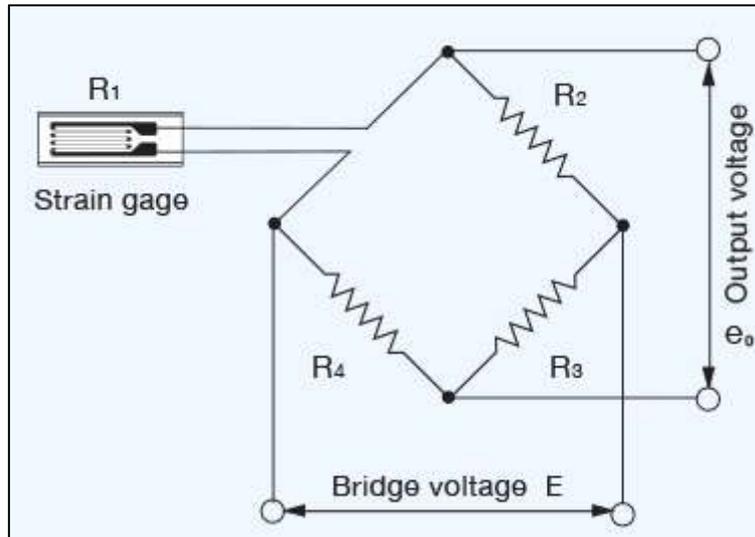


Figura 3-45 Ponte de Wheatstone.

O estabelecimento da relação entre tensão de saída e deformação a seguir leva em consideração que o circuito está inicialmente balanceado. O balanceamento perfeito do circuito se mostra muito difícil de ocorrer na prática, porém a tensão inicial devido ao desbalanceamento nos ensaios de tração se apresentou muito menor que a tensão de polarização. Portanto, a abordagem considerando a Equação 3.3 não gera erros significativos.

$$e_o = \frac{(R_1 R_3) - (R_2 R_4)}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} E \quad 3.3$$

Considerando $R_1=R_2=R_3=R_4=R$, e que a variação de resistência ΔR é muito menor que R , temos a Equação 3.4.

$$\varepsilon = \frac{4e_o}{K_s A E} \quad 3.4$$

O sistema de aquisição de dados utilizado comumente demanda o ajuste da magnitude das tensões a serem interpretadas. O fator de amplificação é representado pela variável A no denominador da Equação 3.4. Os corpos de prova instrumentados com os extensômetros elétricos são conforme mostrados na Figura 3-46. O dispositivo utilizado para a realização dos testes de tração foi a Instron® 8802 instrumentada com uma célula de carga de 250 KN . A Figura 3-47 e a Figura 3-48 exibe o conjunto Instron® 8802, corpo de prova e extensômetro mecânico.



Figura 3-46 Corpos de prova instrumentados com os extensômetros elétricos.

As curvas decorrentes dos resultados obtidos dos ensaios de tração possuem o aspecto conforme a Figura 3-49. Os principais parâmetros de identificação são os limites inferior e superior de escoamento, os quais são identificados pelas abreviaturas *UYS* (*Upper Yield Strength*) e *LYS* (*Lower Yield Strength*), respectivamente. A elongação a partir do limite superior até o início do encruamento efetivo *YPE* (*Yield Point Elongation*) também caracteriza as curvas experimentais. Este fenômeno de descontinuidade no diagrama tensão-deformação é conhecido como *Banda de Lüderes*. Aços com baixos teores de carbono e ligas de alumínio e magnésio submetidos a testes de tração apresentam este tipo de curva.



Figura 3-47 - Vista 1 do corpo de prova instrumentado com extensômetro mecânico e acoplado a Instron® 8802.



Figura 3-48 - Vista 2 do corpo de prova instrumentado com extensômetro mecânico e acoplado a Instron® 8802.

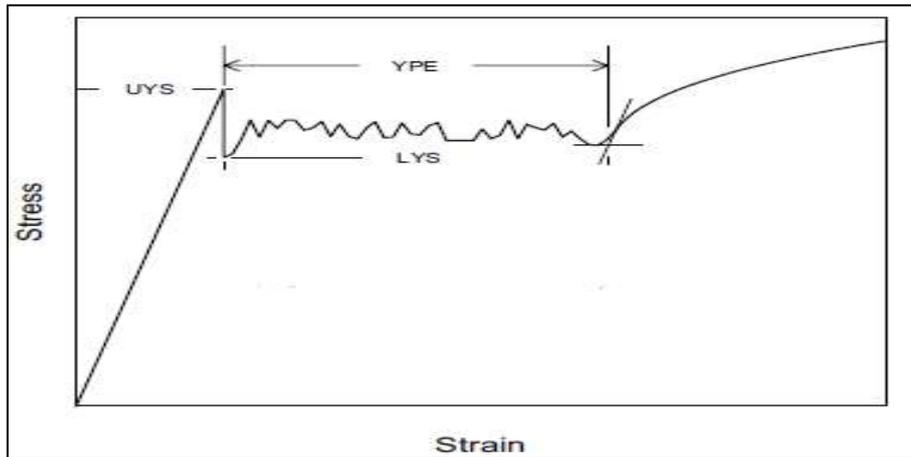


Figura 3-49 – Diagrama tensão-deformação para materiais com ponto de escoamento descontínuo (ASTM E8, 2011).

Após o início do processo de encruamento decorrente da permanência do carregamento, existe outro ponto a ser destacado, o qual se caracteriza pela redução acentuada da área da seção transversal conhecida como *empescoçamento* (Figura 3-50). O aparecimento do empescoçamento em materiais dúcteis está associado com a instabilidade local da geometria do corpo de prova. A não homogeneidade do material em análise é representada por porosidades e inclusões e causa a concentração excessiva de deformação. As curvas *tensão-deformação de engenharia* são obtidas considerando a área da seção transversal constante ao longo do ensaio.

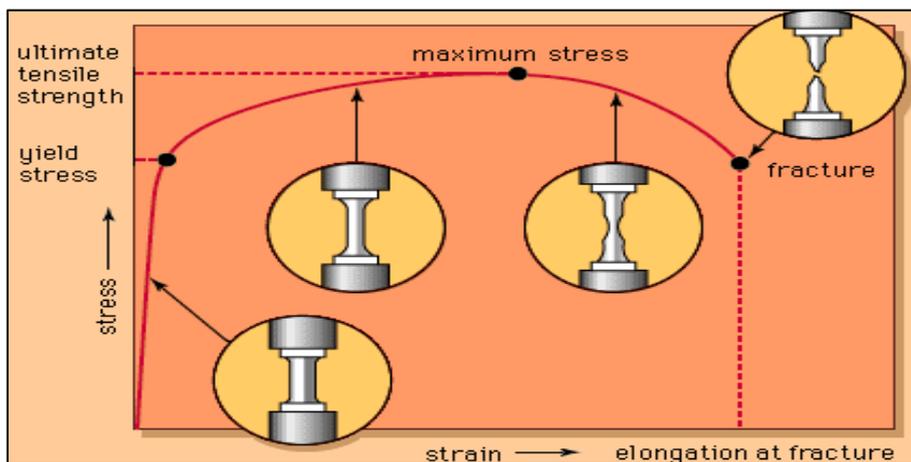


Figura 3-50 – Curva tensão-deformação verdadeira e o fenômeno de empescoçamento (CALLISTER JR., 2007).

Devido às grandes deformações ocorridas na região plástica, curvas tensão-deformação considerando a alteração da seção transversal se apresentam mais precisas. Levando-se em consideração que a região plástica é analisada incrementalmente ($d\epsilon_p = dL/L$), as

deformações plásticas ε_p , as deformações de engenharia e , o comprimento corrente L e o comprimento inicial L_0 se relacionam conforme a Equação 3.5.

$$\varepsilon_p = \ln \frac{L}{L_0} = \ln(e + 1) \quad 3.5$$

A tensão verdadeira σ_v em função da tensão de engenharia σ_e e da deformação de engenharia e é dada na Equação 3.6.

$$\sigma_v = \sigma_e(1 + e) \quad 3.6$$

As curvas *tensão verdadeira-deformação verdadeira logarítmica* ($\sigma_v - \varepsilon_p$) não são eficazes como modelos constitutivos a partir do ponto de início de empençamento.

A análise da região elástica é fundamental para determinação do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν . Os módulos de elasticidade E dos corpos de prova foram extraídos a partir do ajuste numérico de curvas utilizando o software *MATLAB™*. A verificação do coeficiente de Poisson ν foi realizada a partir da confrontação das deformações transversais com as deformações longitudinais observadas a partir dos corpos de prova instrumentados com extensômetros biaxiais elétricos.

O ajuste da curva para a obtenção da curva tensão-deformação a ser utilizada nos modelos numéricos decorre da proposta de Ramberg e Osgood (1943) expressa pela Equação 3.7.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \left[1 + \frac{3}{7} \left(\frac{\sigma}{\sigma_p} \right)^{n-1} \right] \quad 3.7$$

Onde σ_p é a tensão de proporcionalidade do material, e n é o parâmetro de encruamento.

A seguir são apresentados os resultados dos ensaios de tração. No total, foram testados 3 chapas de aço carbono diferentes. Os corpos de prova retirados da *chapa de aço 1* possuem uma descrição mais detalhada das direções, pois a logística de fornecimento e fabricação permitiu identificar o sentido de laminação da chapa. Os corpos de prova da *chapa de aço 2* e *3* não tiveram o mesmo grau de detalhamento, os quais se restringiram somente à extração em direções ortogonais. Os resultados são apresentados por meio de curvas tensão-deformação de engenharia e verdadeiras, e, adicionalmente, por tabelas que resumem as propriedades mecânicas do material.

3.3.1 Chapa de Aço 1

Para a chapa de aço 1, os corpos de provas foram identificados de acordo com a sua direção em relação ao sentido de laminação conforme indicada na Figura 3-51. Os corpos de provas alinhados com a direção longitudinal e circunferencial são identificados neste estudo por *LONG* e *CIRC*, respectivamente, acompanhados de um numeral de ordenamento. Um terceiro tipo de corpo de prova, indicado neste estudo por *CAL*, foi fabricado com base no alinhamento ao sentido longitudinal da chapa (Figura 3-51), porém extraídos após a conformação da chapa.

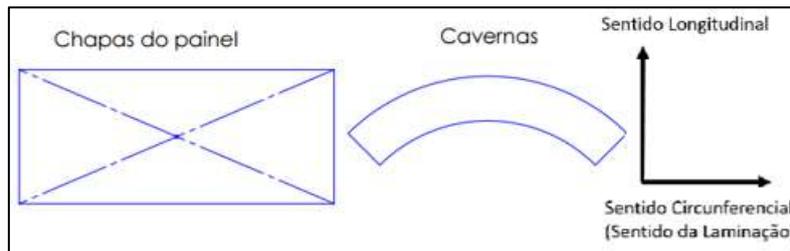


Figura 3-51 Sentido de laminação da chapa e posicionamento dos elementos do painel.

O conjunto de figuras compreendido entre a Figura 3-52 e a Figura 3-55 exibe as curvas tensão-deformação de engenharia e verdadeira dos corpos de provas e a curva ajustada com base na aproximação de Ramberg-Osgood.

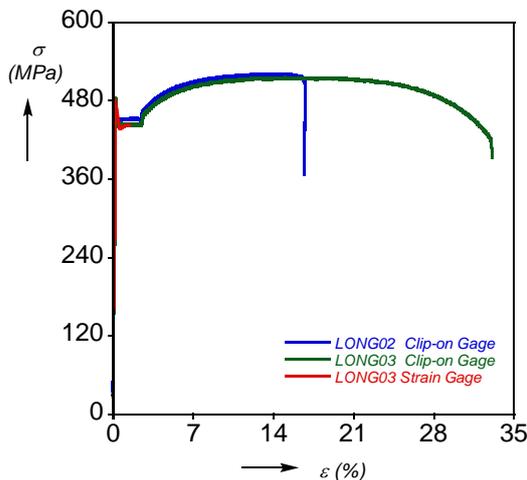


Figura 3-52 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova longitudinal.

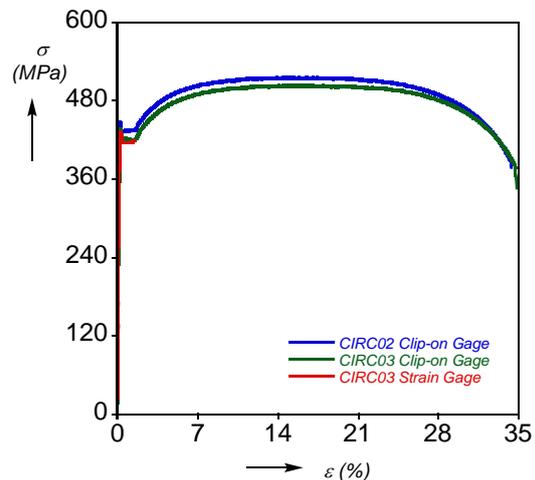


Figura 3-53 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova circunferencial.

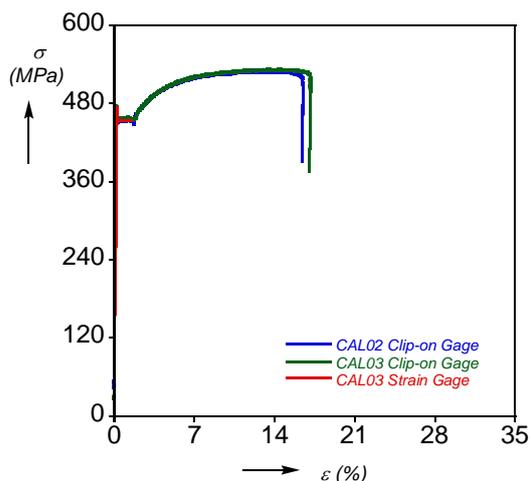


Figura 3-54 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova calandrado.

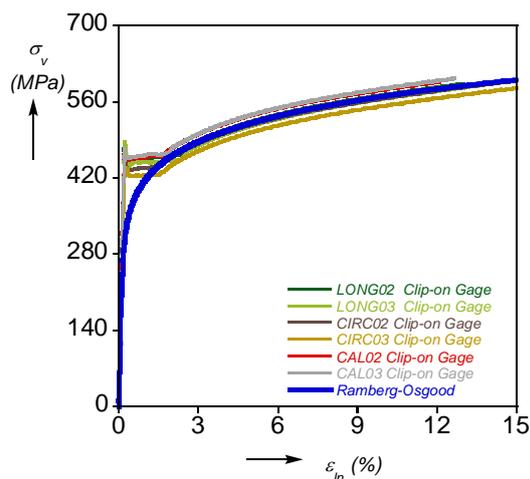


Figura 3-55 Curvas tensão verdadeira-deformação logarítmica de todos os corpos de prova e a aproximação de Ramberg-Osgood aplicada.

A Tabela 3-5 apresenta os parâmetros verificados que caracterizam as propriedades mecânicas do material ensaiado. O coeficiente de Poisson não variou de forma significativa e está reportado na tabela que exhibe os parâmetros de ajuste de curvas sugerida por Ramberg-Osgood (Tabela 3-6). Os extensômetros elétricos não apresentaram resultados na região plástica porque não se mantiveram intactos ou se descolaram do corpo de prova logo após o alcance do limite superior da tensão de escoamento (UYS). Apesar disso, as correlações obtidas na região elástica se apresentaram de forma bem menos dispersas quando comparadas com os pontos obtidos a partir do extensômetro mecânico.

Tabela 3-5 Resumo das propriedades mecânicas da chapa de aço 1.

GAGE/CORPO DE PROVA	MÓDULO DE ELASTICIDADE (GPa)	TENSÃO DE PROPORCIONALIDADE (MPa)	TENSÃO LIMITE SUPERIOR - UYS (MPa)	TENSÃO LIMITE INFERIOR - LYS (MPa)	ELONGAÇÃO DO PONTO DE ESCOAMENTO - YPE (%)
<i>CORPO DE PROVA: DIREÇÃO LONGITUDINAL CHAPA PLANA</i>					
CLIP-ON GAGE 03	212.46	367.72	485.56	441.04	2.268
CLIP-ON GAGE 02	222.274	369.82	483.59	447.11	2.176
STRAIN GAGE 03	218.12	369.11	481.99	439.78	-
<i>CORPO DE PROVA: DIREÇÃO CIRCUNFERENCIAL CHAPA PLANA</i>					
CLIP-ON GAGE 03	193.751	338.49	438.18	421.61	1.2015
CLIP-ON GAGE 02	210.05	347.64	449.35	431.09	1.4284
STRAIN GAGE - 03	207.42	332.55	434.12	418.4	-
<i>CORPO DE PROVA: DIREÇÃO LONGITUDINAL CHAPA CALANDRADA</i>					
CLIP-ON GAGE 03	226.11	368.87	476.31	452.23	1.718
CLIP-ON GAGE 02	228.86	369.74	474.26	449.2	1.4485
STRAIN GAGE 03	210.47	360.52	473.74	450.25	-

Tabela 3-6 Parâmetros obtidos através da aproximação de Ramberg-Osgood para a chapa de aço 1.

Módulo de elasticidade E (Gpa)	212
Coefficiente de Poisson	0.276
Tensão de proporcionalidade σ_p (Mpa)	357
Tensão de escoamento $\sigma_{0.2\%}$ (Mpa)	440
Parâmetro de encruamento n .	8

Os módulos de elasticidades verificados para os corpos de prova apresentaram um limite inferior de 8.82% e um limite superior de 7.69%, quando comparados com o módulo de elasticidade obtido pelo ajuste proposto por Ramberg-Osgood. Os corpos de provas longitudinais LONG apresentaram um nível da tensão limite superior UYS maior que os demais corpos de prova com uma diferença de 11.84% em comparação com a menor UYS dos corpos de prova circunferenciais CIR.

3.3.2 Chapa de Aço 2

Os corpos de prova da chapa de aço 2 foram instrumentados com extensômetros elétricos biaxiais em ambas superfícies. Os resultados das deformações na direção longitudinal dos extensômetros elétricos se sobrepuseram e foi escolhido somente uma das superfícies para a descrição. As curvas tensão-deformação de engenharia e verdadeira, e a curva ajustada com base na aproximação de Ramberg-Osgood são apresentadas na Figura 3-56, Figura 3-57 e Figura 3-58. Os parâmetros referentes às propriedades mecânicas do material são apresentados na Tabela 3-7. Os parâmetros da curva ajustada com base na proposta de Ramberg-Osgood e o coeficiente de Poisson verificado para o material são exibidos na Tabela 3-8.

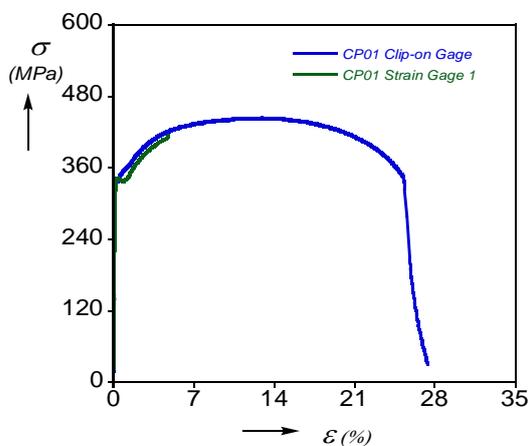


Figura 3-56 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova 01.

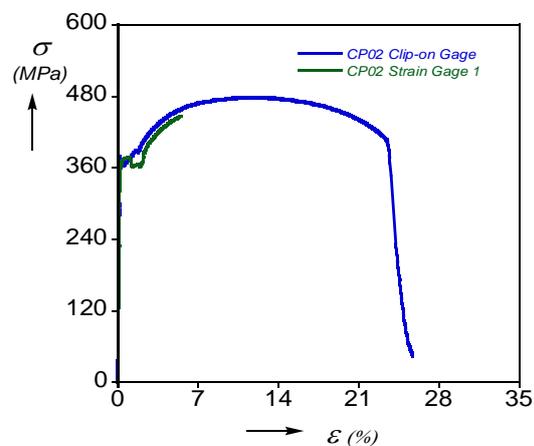


Figura 3-57 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova 02.

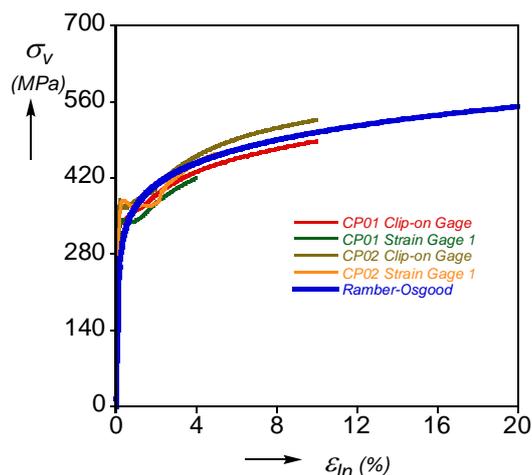


Figura 3-58 Curvas tensão-deformação verdadeira e curva ajustada com base na aproximação de Ramberg-Osgood.

Tabela 3-7 Resumo das propriedades mecânicas do ensaio de tração 2.

GAGE/CORPO DE PROVA	MÓDULO DE ELASTICIDADE (GPa)	TENSÃO DE PROPORCIONALIDADE (MPa)	TENSÃO LIMITE SUPERIOR - UYS (MPa)	TENSÃO LIMITE INFERIOR - LYS (MPa)	ELONGAÇÃO DO PONTO DE ESCOAMENTO - YPE (%)
<i>CORPO DE PROVA 01</i>					
CLIP-ON GAGE	211.87	314.12	345.56	335.04	0.179
STRAIN GAGE	210.94	289.34	343.99	334.78	0.642
<i>CORPO DE PROVA 02</i>					
CLIP-ON GAGE	212.56	312.49	379.38	358.37	0.412
STRAIN GAGE	211.93	293.55	377.52	356.89	0.769

Tabela 3-8 Parâmetros obtidos através da aproximação de Ramberg-Osgood para o ensaio de tração 2.

Módulo de elasticidade E (Gpa)	210
Coefficiente de Poisson	0.277
Tensão de proporcionalidade σ_p (Mpa)	304
Tensão de escoamento $\sigma_{0.2\%}$ (Mpa)	352
Parâmetro de encruamento n .	8

Os extensômetros elétricos deste ensaio de tração permaneceram executando a leitura das deformações em um patamar maior do que o verificado para os ensaios da chapa de aço 1. Entretanto, os corpos de prova do primeiro conjunto de ensaios atingiram deformações maiores do que os corpos de prova dos ensaios da chapa de aço 2.

3.3.3 Chapa de Aço 3

Os corpos de prova retirados da chapa de aço 3 foram instrumentados com extensômetros elétricos em ambas superfícies, entretanto em uma das superfícies foi instalado um

extensômetro uniaxial na direção longitudinal, e na outra superfície, foi utilizado um extensômetro biaxial. Analogamente aos ensaios da chapa de aço 2, os resultados das deformações na direção longitudinal dos extensômetros elétricos se sobrepuseram e somente a leitura do extensômetro biaxial foi considerado. As curvas tensão-deformação de engenharia e verdadeira, e a curva ajustada com base na aproximação de Ramberg-Osgood são apresentadas na Figura 3-59, Figura 3-60 e Figura 3-61.

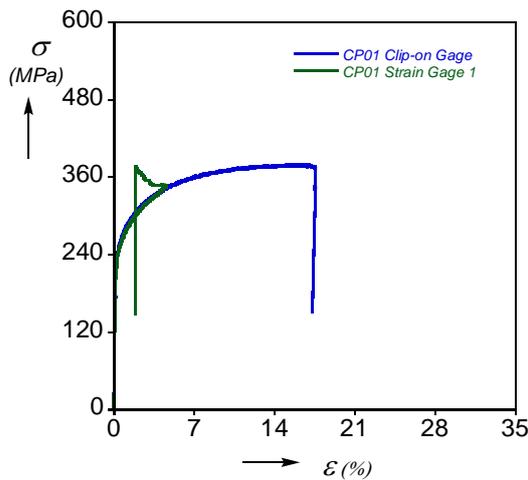


Figura 3-59 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova 01.

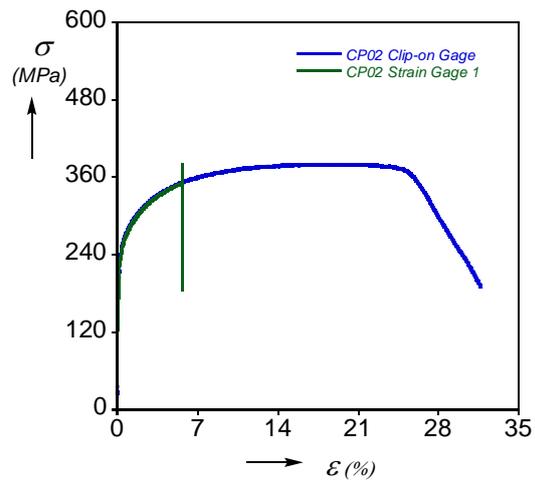


Figura 3-60 Curvas tensão-deformação de engenharia – corpo de prova 02.

Os parâmetros referentes às propriedades mecânicas do material são apresentados na Tabela 3-9. Os parâmetros da curva ajustada com base na proposta de Ramberg-Osgood e o coeficiente de Poisson verificado para o material são exibidos na Tabela 3-10.

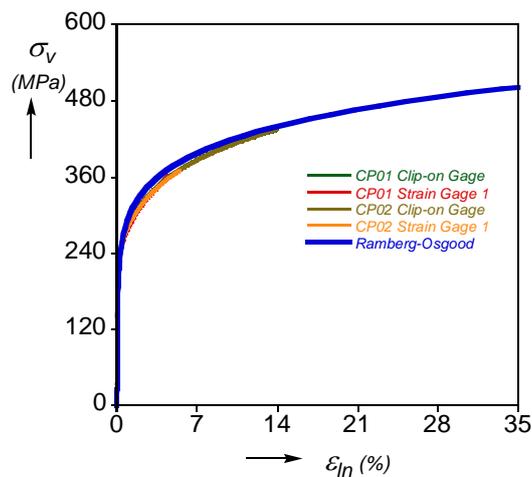


Figura 3-61 Curvas tensão-deformação verdadeira e curva ajustada com base na aproximação de Ramberg-Osgood.

Tabela 3-9 Resumo das propriedades mecânicas do ensaio de tração 3.

GAGE/CORPO DE PROVA	MÓDULO DE ELASTICIDADE (GPa)	TENSÃO DE PROPORCIONALIDADE (MPa)	TENSÃO LIMITE SUPERIOR - UYS (MPa)	TENSÃO LIMITE INFERIOR - LYS (MPa)	ELONGAÇÃO DO PONTO DE ESCOAMENTO - YPE (%)
<i>CORPO DE PROVA 01</i>					
CLIP-ON GAGE	173.09	178.89	-	-	-
STRAIN GAGE	188.13	181.78	-	-	-
<i>CORPO DE PROVA 02</i>					
CLIP-ON GAGE	172.32	177.23	-	-	-
STRAIN GAGE	183.27	180.94	-	-	-

Tabela 3-10 Parâmetros obtidos através da aproximação de Ramberg-Osgood para o ensaio de tração 3.

Módulo de elasticidade E (Gpa)	180
Coeficiente de Poisson	0.271
Tensão de proporcionalidade σ_p (Mpa)	181
Tensão de escoamento $\sigma_{0.2\%}$ (Mpa)	235
Parâmetro de encruamento n .	7

As máximas deformações obtidas pelos corpos de prova deste ensaio de tração atingiram a mesma ordem de grandeza do ensaio de tração 2. Os extensômetros elétricos permaneceram executando a leitura até a deformação de 7%.

3.4 TESTES HIPERBÁRICOS

Os testes hiperbáricos foram realizados na câmara hiperbárica horizontal, mostrada na Figura 3-62, localizada nas instalações do LTS. A Tabela 3-11 mostra os dados geométricos e de operação da câmara hiperbárica.



Figura 3-62 Câmara hiperbárica.

Tabela 3-11 Dados técnicos da câmara hiperbárica.

Diâmetro interno (mm)	380
Comprimento (mm)	5000
Pressão (psi)	7500
Temperatura de operação (°C)	Ambiente

Antes de submeter o painel à câmara, foi necessário a garantir a estanqueidade do conjunto. Inicialmente, foi adotado a utilização de uma resina de secagem rápida conhecida como *5 Minute™ Epoxy* da *Devcon™* cujas especificações técnicas são apresentadas na Tabela 3-12. O aspecto após a aplicação é mostrado na Figura 3-63.

Tabela 3-12 Especificações técnicas *5 Minute™ Epoxy* (DEVCON, 2012).

Tensão de cisalhamento máxima (psi)	1900
Resistência ao impacto (ft.lb/in ²)	5.5
Temperatura de operação (°F)	-40 a 200
Dureza (<i>SHORE D</i>)	85



Figura 3-63 Aplicação da resina *5 Minute™ Epoxy*.

Apesar da facilidade de manuseio e do tempo de cura reduzido, a utilização deste tipo de resina mostrou-se muito onerosa para a condução dos experimentos posteriores. A alternativa encontrada foi a utilização da resina *Plastic Steel Putty* da *Devcon™* cujas características técnicas são mostradas na Tabela 3-13. A Figura 3-64 mostra a aplicação da resina antes da realização do teste de pressão.

Tabela 3-13 Informações técnicas da resina *Plastic Steel Putty* (DEVCON, 2012).

Tensão de cisalhamento máxima (psi)	2800
Tensão de compressão máxima (psi)	8260
Dureza (<i>SHORE D</i>)	85
Temperatura máxima (°F)	120 (molhado), 250 (seco)
Tensão de flexão máxima (psi)	5600



Figura 3-64 Aplicação da resina Plastic Steel Putty.

Apesar do esforço empreendido para garantir a estanqueidade do conjunto, ambas resinas não obtiveram sucesso. Entretanto, foi verificado que os painéis submetidos aos testes permaneciam sob carregamento até o momento em que o vazamento atingia uma certa magnitude que não era mais possível adicionar pressão à câmara. Em seguida, foi testada alternativamente a utilização de massa plástica adesiva em conjunto com revestimento de borracha vulcanizada (Figura 3-65). A adoção deste novo conjunto de vedação não garantiu a estanqueidade, porém obteve sucesso na manutenção do carregamento sobre o painel testado. A solução, então, convergiu para a utilização de uma manta de borracha de 5 mm de espessura (Figura 3-66), cujo processo de adesão ao Berço envolveu a utilização de um produto a base de cloroplano.



Figura 3-65 Vedação com massa plástica adesiva e borracha vulcanizada.



Figura 3-66 Manta de borracha.

Diante da inviabilidade de garantir a vedação do conjunto e obter a curva da pressão de carregamento em função do volume deslocado, a utilização de extensômetros elétricos para obter as deformações em pontos de interesse no painel foi a solução adotada. Os painéis foram instrumentados com extensômetros de forma análoga aos corpos de prova dos ensaios de tração (Figura 3-67). A necessidade de manter os extensômetros isolados da água da câmara hiperbárica levou a utilização de uma cobertura feita de resina conforme mostrado na Figura 3-68.



Figura 3-67 Detalhe dos extensômetros elétricos.



Figura 3-68 Painel instrumentado com extensômetros elétricos com aplicação de resina isolante.

Em todos os testes, o conjunto Berço-painel foi preenchido internamente com água de forma a permitir a leitura do deslocamento de volume devido à deformação do painel, embora não houvesse a possibilidade de garantir a estanqueidade. A conexão com o exterior foi realizada por meio de um conector que ejetou água direto para um recipiente (Figura 3-70). A leitura do volume de água foi realizada por intermédio de uma célula de carga acoplada ao recipiente. A célula de carga transforma o esforço gerado pelo peso da água deslocada em sinais elétricos que permitem o acompanhamento da evolução do volume deslocado em função da pressão aplicada na câmara. O conjunto composto de célula de carga, recipiente de retenção e conectores externos são mostrados na Figura 3-69. A célula de carga utilizada, cujo fabricante é a *PCB PIEZOTRONICSTM*, possui as informações técnicas de acordo com o constante na Tabela 3-14. O arranjo do conjunto Berço-painel dentro da câmara hiperbárica pode ser visualizado na Figura 3-71.



Figura 3-69 Célula de carga, recipiente de retenção e conectores externos.

Tabela 3-14 Dados técnicos da célula de carga modelo 1630-03C (PIEZOTRONICS, 2015).

Carga de operação máxima (N)	222
Sensibilidade (mV/V)	2
Resistência interna (Ohm)	350
Tensão de polarização (V)	10 DC



Figura 3-70 - Conjunto Berço-painel com o conector.



Figura 3-71 - Arranjo do conjunto Berço-painel dentro da câmara hiperbárica.

Todos os painéis testados na câmara hiperbárica possuíram em comum os seguintes parâmetros geométricos (Figura 3-72): o raio a e a espessura h da casca cilíndrica, comprimento total L_b e o ângulo de abertura θ . Os parâmetros geométricos específicos dos painéis reforçados, ou seja, espaçamento entre cavernas L_f , o espaçamento entre a

caverna mais afastada do centro e a extremidade circunferencial L_{f1} , a altura das cavernas h_w e a espessura das cavernas t_w , são exibidos na Figura 3-73. Os valores dos parâmetros geométricos comuns a todos os painéis são apresentados na Tabela 3-15, enquanto que os valores referentes às cavernas dos painéis reforçados são exibidos na Tabela 3-16.

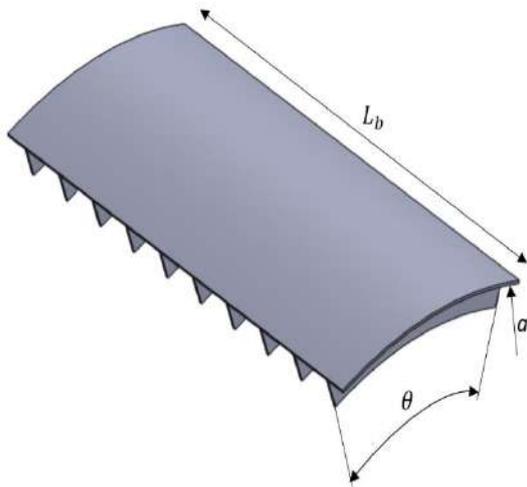


Figura 3-72 Parâmetros geométricos dos painéis.

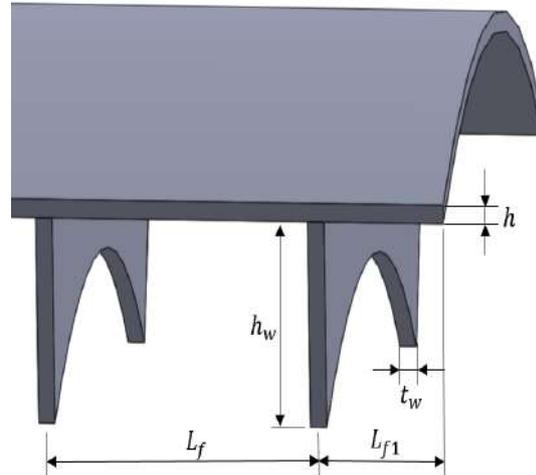


Figura 3-73 Detalhe dos parâmetros geométricos referentes às cavernas dos painéis reforçados.

Conforme comentado na descrição dos ensaios de tração realizados, foram utilizados 3 tipos de chapas de aço para a fabricação dos painéis. A Tabela 3-17 correlaciona os painéis com as chapas de aço utilizadas, e descreve, novamente, as propriedades mecânicas relevantes, de forma a possibilitar a comparação entre os painéis testados. A Tabela 3-17 exhibe, ainda, o raio médio e o desvio padrão observado durante o processo de mapeamento para verificação das imperfeições. A Tabela 3-18 expõe as pressões de colapso verificadas em cada painel por ocasião dos testes hiperbáricos.

Tabela 3-15 Valores dos parâmetros geométricos comuns a todos os painéis testados.

Raio da casca cilíndrica a (mm)	360
Ângulo de abertura θ ($^\circ$)	40
Espessura da casca cilíndrica h (mm)	3.18
Comprimento total L_b (mm)	485

Raio da casca cilíndrica destacado na Figura 3-72 e Tabela 3-15 se refere ao raio nominal no plano médio da espessura da chapa designado para fabricação. Os valores que representam a espessura da casca cilíndrica e cavernas são aproximações para milímetros de especificações comerciais disponibilizadas em polegadas. A altura fabricada inicialmente de cada caverna contempla a espessura da casca cilíndrica. Os aspectos dos painéis antes da realização do teste e após o teste dos painéis reforçados 1 e 3 e do painel

sem reforço 2 são apresentados no conjunto de compreendido entre a Figura 3-74 e Figura 3-79.

Tabela 3-16 Valores dos parâmetros geométricos das cavernas dos painéis reforçados.

	Painel reforçado 1	Painel reforçado 2	Painel reforçado 3
Número de cavernas	9	9	5
Espaçamento entre cavernas L_f (mm)	51.18	51.18	102.35
Espaçamento entre caverna e extremidade circunferencial L_{f1} (mm)	37.8	37.8	37.8
Espessura da caverna t_w (mm)	3.18	6.35	6.35
Altura da caverna h_w (mm)	30	24	24
Momento de inércia da caverna (mm^4)	7155	7315	7315

Tabela 3-17 Correlação painel-chapa de aço, propriedades mecânicas e resultados decorrentes do mapeamento.

	Painel reforçado 1	Painel reforçado 2	Painel reforçado 3	Painel sem reforço 1	Painel sem reforço 2
Chapa de aço	1	2	3	1	3
Módulo de elasticidade E (GPa)	212	210	180	212	180
Coefficiente de Poisson ν	0.276	0.277	0.271	0.276	0.271
Tensão de escoamento $\sigma_{0.2\%}$ (MPa)	440	352	235	440	235
Parâmetro de encruamento n - Ramberg-Osgood	8	8	7	8	7
Raio médio - mapeamento (mm)	358.78	359.15	357.72	358.76	359.02
Desvio Padrão - mapeamento	1.12	1.297	1.016	0.416	0.487

Tabela 3-18 Pressão de colapso dos painéis.

	<i>Painel reforçado 1</i>	<i>Painel reforçado 2</i>	<i>Painel reforçado 3</i>	<i>Painel sem reforço 1</i>	<i>Painel sem reforço 2</i>
<i>Pressão de colapso (psi)</i>	642.15	574.52	215.28	91.25	69.94



Figura 3-74 Painel reforçado 1 antes do teste.



Figura 3-75 Painel reforçado 1 colapsado.



Figura 3-76 Painel reforçado 3 antes do teste.



Figura 3-77 Painel reforçado 3 colapsado.

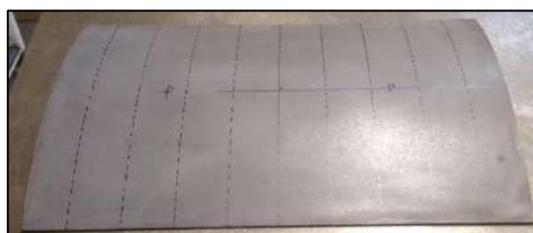


Figura 3-78 Painel sem reforço 2 antes do teste.



Figura 3-79 Painel sem reforço 2 colapsado.

As diferenças das propriedades mecânicas das chapas de aço ensaiadas foram confirmadas nos testes hiperbáricos por meio da diferença da pressão de colapso de cada painel. A chapa de aço 1 apresentou nos ensaios de tração maiores valores da tensão de escoamento e módulo de elasticidade quando comparada às demais chapas, esta superioridade se externalizou com uma maior pressão de colapso do painel reforçado 1 em relação ao painel reforçado 2. Cabe ressaltar que a diferença dos parâmetros geométricos entre o painel reforçado 1 e o painel reforçado 2 foi a alteração da geometria

das cavernas. Entretanto, como pode ser verificado na Tabela 3-16, o momento de inércia permaneceu em um mesmo patamar. As diferenças das propriedades mecânicas da chapa de aço 1 e 3 se apresentaram por meio da superioridade da pressão de colapso do painel sem reforço 1 em relação à pressão de colapso do painel sem reforço 2.

Os resultados oriundos do mapeamento das superfícies dos painéis foram confirmados, também, com as pressões de colapso observadas nos painéis testados. O painel sem reforço 1 possui uma geometria imperfeita menos susceptível ao colapso em comparação ao painel sem reforço 2, pois o raio médio verificado no mapeamento foi menor que o observado para o painel sem reforço 2. Além disso, a dispersão obtida dos raios médios sobre a superfície cilíndrica do painel sem reforço 1 foi menor que a dispersão dos raios médios sobre a superfície cilíndrica do painel sem reforço 2. Esta inferioridade em relação à dispersão indica que o painel tem os raios médios sobre a superfície mais agrupados ao redor do raio médio global, isto é, menor ocorrência de imperfeições. A confirmação dos resultados do mapeamento foi igualmente atestada nos painéis com reforços. O painel reforçado 1 apresentou raio médio global e dispersão, representada pelo desvio padrão, menor que o painel reforçado 2, isto é, o painel reforçado 1 exibiu uma superfície cilíndrica imperfeita menos inclinada ao colapso em comparação à superfície do painel reforçado 2.

O aspecto de colapso dos painéis sem reforços indica de forma mais acentuada as condições contorno imposta pelo Berço. Nas extremidades circunferenciais ocorreram deslocamentos no sentido longitudinal e rotações ao longo do eixo circunferencial com atenuação em direção às extremidades longitudinais. Ainda em relação à extremidade circunferencial, os deslocamentos na direção radial foram insignificantes quando comparados aos deslocamentos longitudinais, e os deslocamentos circunferenciais foram nulos. Nas extremidades longitudinais, os deslocamentos longitudinais e radiais foram nulos ou insignificantes. Foi verificado, porém, que houve deslocamentos circunferenciais em uma magnitude bem menor do que aquelas verificadas na direção longitudinal das extremidades circunferenciais. As rotações ao longo das extremidades longitudinais ocorreram em menor magnitude do que aquelas averiguadas ao redor das extremidades circunferenciais.

Os painéis reforçados 1 e 2 apresentaram instabilidade entre as cavernas, ao passo que o painel reforçado 3 apresentou um colapso global. As extremidades dos painéis reforçados

seguiram em menor magnitude os deslocamentos constatados para os painéis simples. As cavernas dos painéis reforçados 1 e 2 permaneceram intactas, enquanto que as cavernas do painel reforçado 3 apresentaram deslocamentos característicos de um colapso global.

Devido à dificuldade na manutenção da vedação dos painéis em relação ao Berço, não houve a queda característica de pressão por ocasião do colapso conforme vai ser visto na seção dedicada à correlação numérico-experimental. Os valores apresentados na Tabela 3-18, portanto, são aproximações baseadas no aspecto característico de colapso, ou seja, a constatação de grandes deformações para pequenos acréscimos de pressão.

4 MODELO NUMÉRICO

O modelo numérico desenvolvido se destinou a simular numericamente o comportamento estrutural de painéis curvados sob carregamento de pressão externa uniforme utilizando o método de elementos finitos.

4.1 DESCRIÇÃO DO MODELO

O modelo foi construído utilizando o programa computacional de elementos finitos ANSYS™ na sua versão 15.0. O programa possui ferramentas de concepção de geometrias, conhecidas como ferramentas CAD (*Computer-Aided Design*), e recursos CAE (*Computer-Aided Engineering*) para desenvolvimento do modelo numérico.

Para o caso dos painéis reforçados, a geometria básica para a inserção das malhas foi composta de uma casca cilíndrica com comprimento igual ao espaçamento entre reforços e de um único reforço como mostrado na Figura 4-1. A malha inicial foi associada à geometria básica e, em seguida, copiada na direção longitudinal para formar a malha final (Figura 4-2).

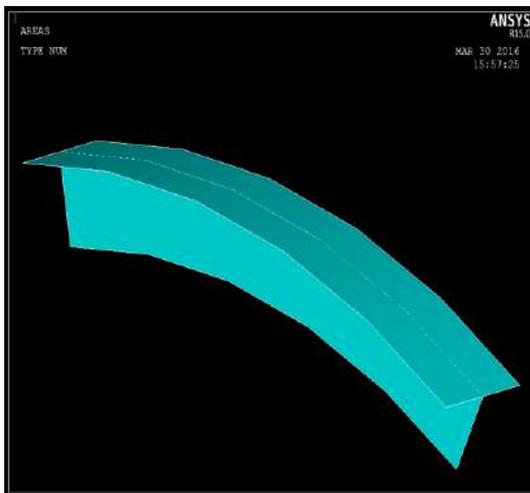


Figura 4-1 – Geometria básica.

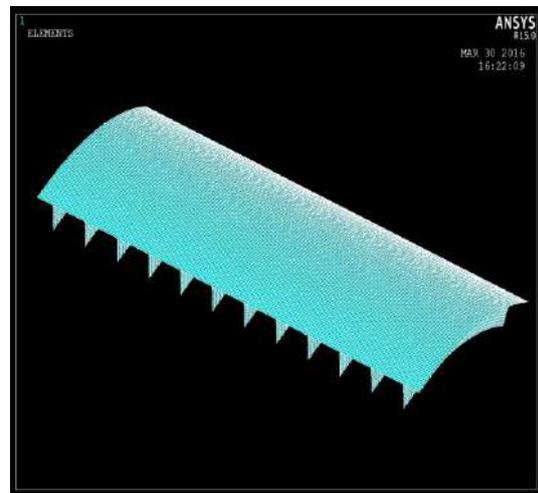


Figura 4-2 Aspecto geral da malha do modelo.

A razão entre o raio de curvatura e a espessura dos painéis permitiu fazer uso de elementos de casca para o desempenho das simulações. O uso de elementos de casca demanda menos alocação de memória do que o emprego de elementos tridimensionais convencionais ou, como são usualmente conhecidos, *elementos sólidos*. O número reduzido de nós possibilita, ainda, sem depreciação da acurácia dos resultados, a diminuição do tempo de processamento.

A biblioteca de elementos do ANSYS™ dispõe de vários tipos de elementos de casca. Dentre os elementos disponíveis, foi escolhido o elemento identificado como SHELL181™ para a realização das simulações. O elemento SHELL181™ é um elemento com interpolação linear composto de 4 nós com seis graus de liberdade cada um, ou seja, rotação e deslocamento. É indicado para a análise de cascas finas ou moderadamente espessas. SHELL181™ oferece a possibilidade de descarte das rotações nodais, esta característica se ajusta a casos onde se verifica a predominância dos deslocamentos de membrana.

SHELL181™ encontra emprego em simulações que envolvem não linearidades associadas às geometrias e às relações constitutivas. Conforme mostrado na Figura 4-3, carregamentos de superfície ou pressões podem ser aplicados nas áreas numeradas e envolvidas por um círculo.

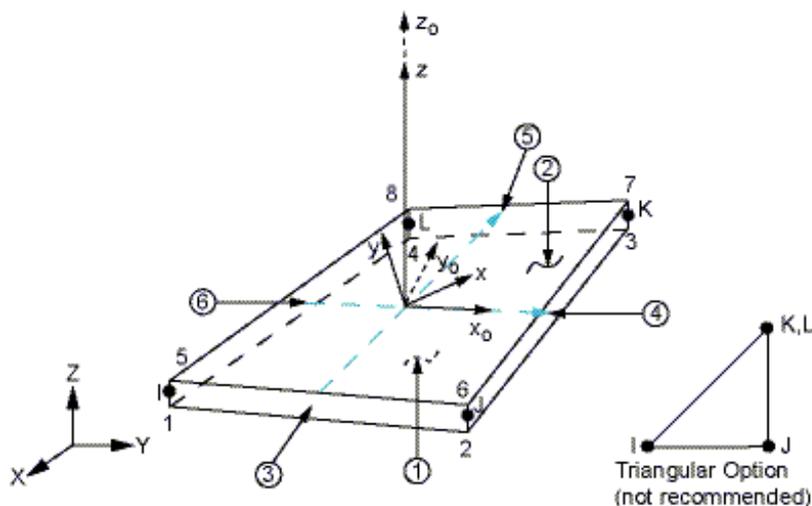


Figura 4-3 – Elemento SHELL181™ (ANSYS, 2013).

O balanceamento entre tempo de processamento e precisão da solução é imprescindível para definir a quantidade de elementos a ser utilizada em uma malha. Quanto mais elementos compoendo a malha, mais acurados são os resultados, embora o tempo demandado para processamento seja maior. O estudo de concordância entre tempo demandado e exatidão da solução foi feito por meio de uma *análise de sensibilidade*. Os parâmetros geométricos utilizados para a realização da análise de sensibilidade foram o número de elementos entre reforços n_{el-ref} na direção longitudinal e a razão entre o número de elementos ao longo do comprimento circunferencial e o ângulo de abertura em graus

$n_{el-circ}$. As variáveis de prescrição, ou seja, n_{el-ref} e $n_{el-circ}$ foram correlacionadas com a pressão de colapso linearizada P_c de um painel reforçado com relação $a/h = 80$ e $L/a = 4\pi/9$. Os pontos decorrentes da análise de sensibilidade são mostrados na Figura 4-4.

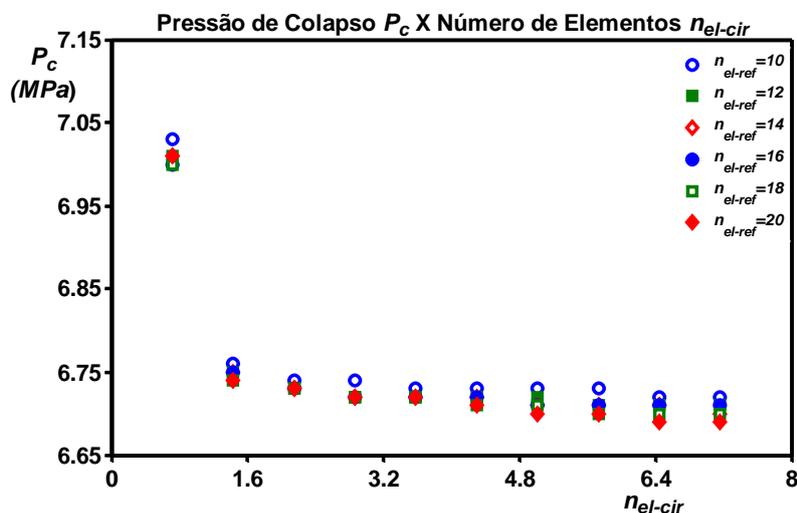


Figura 4-4 – Análise de sensibilidade da malha.

A análise de sensibilidade mostrou que não existe variação significativa da pressão de colapso P_c em função da quantidade de elementos entre reforços para $n_{el-ref} > 10$, o modelo, entretanto, mostrou-se sensível à distribuição de elementos ao longo da seção circunferencial n_{el-cir} . Com base no resultado apresentado na Figura 4-4, as simulações numéricas deste estudo foram executadas com $n_{el-ref} = 12$, $n_{el-cir} = 2$ e a quantidade de elementos na altura das cavernas igual a 10.

Apesar da versatilidade do elemento *SHELL181*TM, se observam problemas de convergência durante a obtenção da curva de equilíbrio durante o caminho pós-colapso. Além disso, o tempo de processamento para a obtenção da solução se revela significativo conforme a complexidade do modelo aumenta. A utilização de elementos hidrostáticos em conjunto com elementos de casca se revela mais vantajoso, pois impõe à equação de elementos finitos prescrição de deslocamento ao invés da tradicional prescrição de força, onde se torna necessário o método de comprimento de arco para a obtenção da solução. O elemento hidrostático encontrado na biblioteca do *ANSYS*TM é o *HSFLD242*TM. O elemento *HSFLD242*TM (Figura 4-5) é utilizado para modelar fluidos que estão enclausurados por estruturas sólidas, e se adequa a problemas envolvendo interação fluido-sólido. O elemento não computa variação de pressão hidrostática dentro do vaso

onde está contido o fluido, assim como possíveis efeitos de superfície livre. A interação fluido-sólido ocorre em conjunto com elementos sólidos ou estruturais a serem utilizados no modelo por intermédio do compartilhamento dos nós que possuem graus de liberdade em comum.

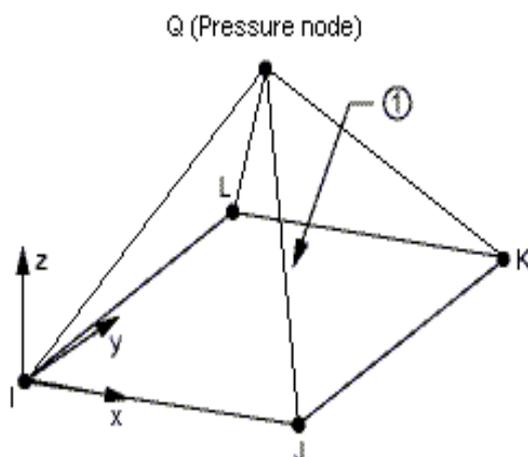


Figura 4-5 – Elemento HSFLD242™ (ANSYS, 2013).

Os nós I , J , K e L são os nós que compartilham os mesmos graus de liberdade do elemento que representa o meio sólido. O nó Q é comumente conhecido como *nó de pressão* (*pressure node*) e possui somente pressão hidrostática como grau de liberdade. Adicionalmente, os efeitos decorrentes da compressibilidade do líquido a ser modelado podem ser levados em consideração, ao passo que a viscosidade é descartada. O carregamento aplicável ao elemento pode ser temperatura ou vazão de massa de fluido a ser inserido ou retirado do vaso delimitante. A utilização de elementos hidrostáticos é recorrente quando se trata de modelagem numérica em elementos finitos de cascas cilíndricas. Sakakibara, Kyriakides e Corona (2008), em estudo para investigar o efeito de corrosão interna ou defeitos ocasionados por erosão no colapso de dutos sob pressão externa, através do software de elementos finitos *ABAQUS™*, utilizou elementos sólidos (*C3D8™*) e elementos hidrostáticos (*F3D4™*) para composição da malha discretizante. O vaso delimitante (*cavity*) pode ser observado na Figura 4-6.

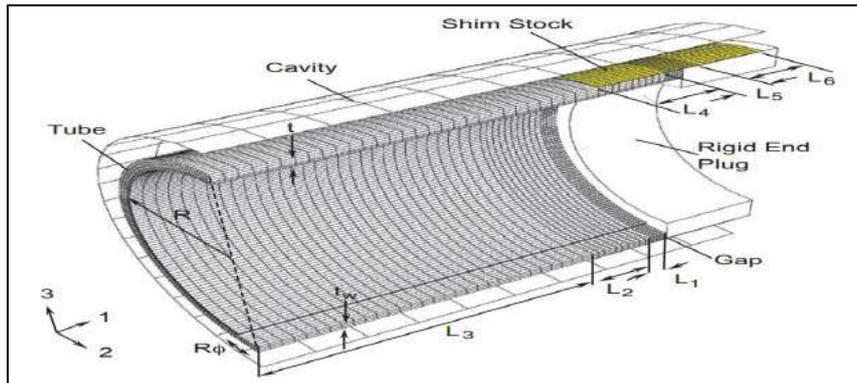


Figura 4-6 - Duto discretizado com elementos sólidos e hidrostáticos (SAKAKIBARA, KYRIAKIDES e CORONA, 2008)

O aspecto da malha de elementos finitos composta de elementos hidrostáticos *HSFLD242TM* e estruturais *SHELL181TM* é conforme a Figura 4-7. O conjunto composto dos elementos estruturais que representam a casca e o vaso delimitante é mostrado na Figura 4-8.

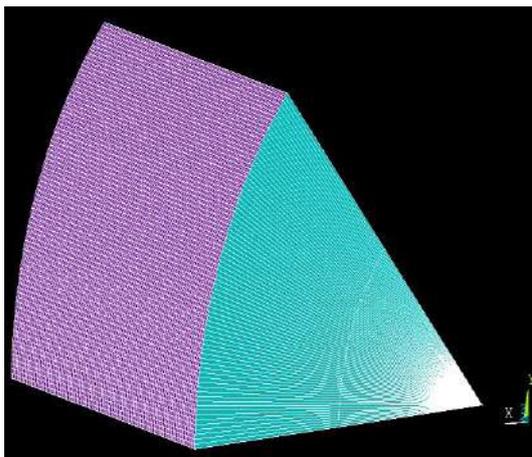


Figura 4-7 - Malha composta pelos elementos *SHELL181TM* e *HSFLD242TM*.

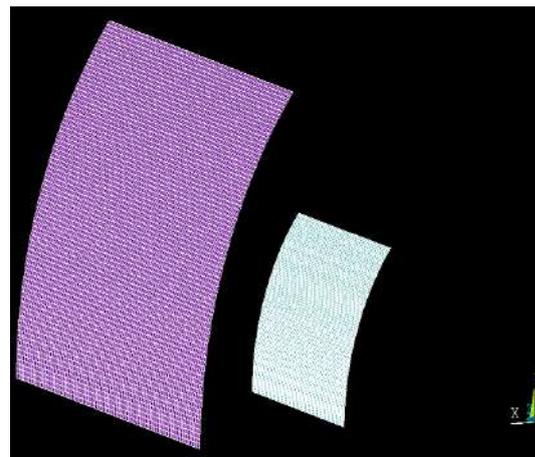


Figura 4-8 - Malha composta somente pelo elemento *SHELL181TM*.

O nó de pressão é compartilhado por todos os elementos hidrostáticos usados para a definição do volume do fluido, e é o ponto onde a aplicação de temperatura e massa de fluido é realizada. Vaso delimitante é rígido para efeitos de análise estrutural e está destacado na cor rosa na Figura 4-8. O fluido está enclausurado entre o vaso delimitante e o painel (cor verde) a ser analisado. Os elementos hidrostáticos que estão abaixo do painel possuem “volume negativo” e não computam adição de massa ou temperatura durante a simulação numérica. A orientação dos eixos dos elementos é primordial para definição dos volumes envolvidos na simulação.

4.2 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS PRELIMINARES

As simulações numéricas preliminares realizadas mostraram-se de grande utilidade para a definição da geometria dos modelos a serem submetidos aos testes experimentais. Inicialmente, os parâmetros utilizados para gerar a geometria foram a razão entre o raio a e a espessura h (a/h), e a relação entre o comprimento L_b e o raio a (L/a). O ângulo θ de abertura do arco foi mantido fixo ao longo de todo o estudo preliminar no valor de 40° . Diante disto, além do ângulo de abertura do arco θ , a razão L_b/a também foi fixada ($L_b/a=4\pi/9$), assim como o valor de L_b ($L_b=500\text{ mm}$). A fixação do valor de L_b está mais relacionada com a restrição no que diz respeito a realização de testes experimentais tendo em vista o tempo disponível para o estudo. As espessuras configuradas nas simulações preliminares foram estabelecidas em conformidade com a disponibilidade das chapas de aço encontradas no mercado. Portanto, o espectro geométrico das cascas dos painéis adotado nos estágios iniciais da simulação preliminares foi conforme a Tabela 4-1.

Tabela 4-1 - Modelos simulados nos estágios iniciais.

$h(\text{mm})$	1.06	1.2	1.5	1.8	2	2.25	2.65	3	3.35	3.75	4.75
a/h	337.83	298.41	238.73	198.95	179.05	159.15	135.13	119.37	106.89	95.49	75.39

O modelo constitutivo utilizado nas simulações numéricas preliminares foi calibrado usando as propriedades mecânicas do aço *AISI 1020* lineares (Tabela 4-2) e plásticas (Figura 4-9), assumindo a superfície de escoamento como função das tensões desviadoras (teoria de fluxo J_2) e encruamento isotrópico.

Tabela 4-2 - Propriedades mecânicas *AISI 1020* (KUTZ, 2002).

Propriedade Mecânica	Sistema Métrico	Sistema Imperial
Tensão Última	394.72 MPa	57249 psi
Tensão de Escoamento	294.74 Mpa	42748 psi
Módulo de Elasticidade	200 GPa	29000 ksi
Coefficiente de Poisson	0.29	0.29
Módulo de Cisalhamento	80 GPa	11600 ksi

Apesar do relativo elevado tempo computacional para o alcance das soluções, a consideração das características não-lineares do material mostrou-se necessária, pois a maioria dos modelos numéricos experimentaram a região plástica.

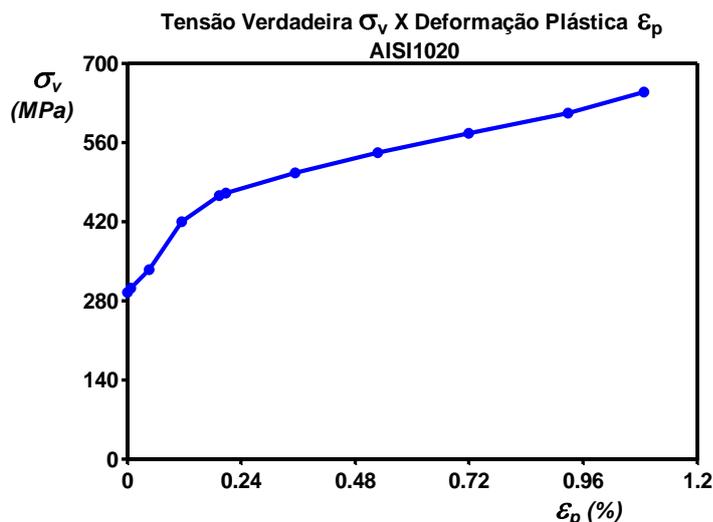


Figura 4-9 – Tensão verdadeira X deformação plástica AISI 1020 (SNIADDECKI, 2012).

Como parâmetro de comparação para as simulações de painéis enrijecidos que se seguiram, foram realizadas análises numéricas com painéis sem reforços. Preliminarmente, resultados considerando o material experimentando exclusivamente o regime elástico e restringindo grandes deformações e rotações foram gerados. A Figura 4-10 nos mostra a pressão de colapso elástica P_c em função da espessura h , considerando extremidades engastadas, de painéis sem reforços e sob carregamento radial.

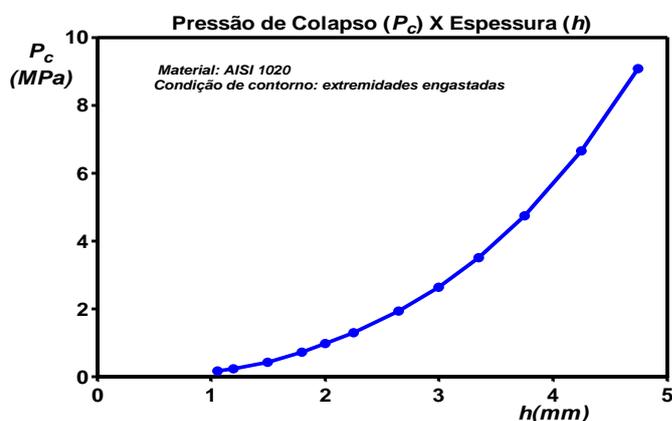


Figura 4-10 - Pressão de colapso linear P_c de painéis sem reforços.

Apesar da fixação de alguns parâmetros geométricos realizada anteriormente, ainda existem geometrias constantes na Tabela 4-1 e Figura 4-10 que podem ser desconsideradas com o objetivo de diminuir o tempo de processamento computacional. Para os casos de interesses, geometrias que possuem a razão a/h entre 70 e 140 aparecem

com mais frequência do que as demais, o que as tornaram, portanto, foco das análises seguintes.

Sucedendo-se aos painéis sem reforços, foram realizadas simulações de painéis com reforços. A Figura 4-11 apresenta curvas que relacionam a pressão de colapso P_c e o espaçamento entre cavernas L_f para espessuras distintas com identificação do modo de colapso. Para painéis com espaçamentos entre cavernas L_f maiores (curvas 7 a 12), o colapso predominante acontece *entre cavernas*. Quando L_f começa a apresentar valores menores ou iguais a 50 mm, *colapsos globais* (curvas 1 e 2) ou *instabilidade das cavernas* (curvas 3 a 6) começam a se pronunciar. Observa-se que os modelos com as cavernas colapsadas são aqueles que possuem menores espessuras ($2,65 \text{ mm} \leq h \leq 3,75 \text{ mm}$). Igualmente ao estabelecido nas simulações cujos resultados são apresentados na Figura 4-10, as extremidades estão engastadas, o carregamento é de pressão, e a altura da caverna h_w igual a 15 mm. Alguns exemplos dos colapsos observados são representados na Figura 4-12, Figura 4-13 e Figura 4-14.

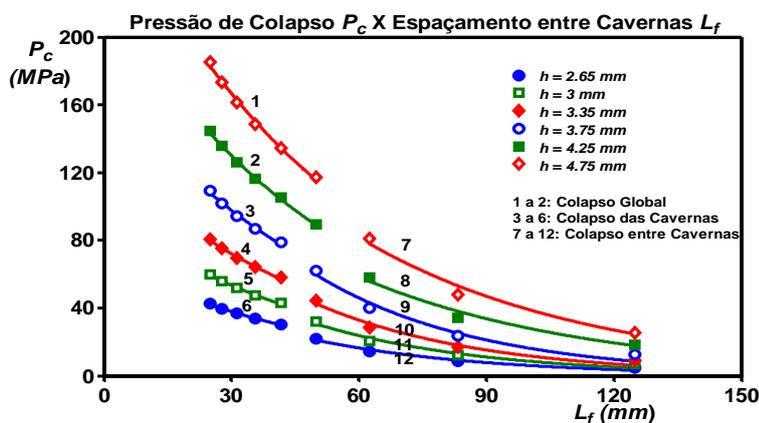


Figura 4-11 - Pressão de colapso linear de modelos reforçados.

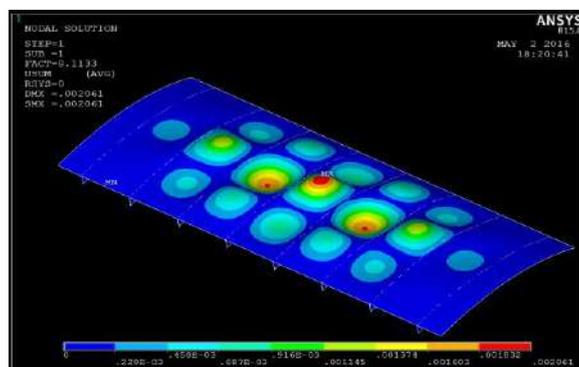


Figura 4-12 - Colapso entre cavernas.

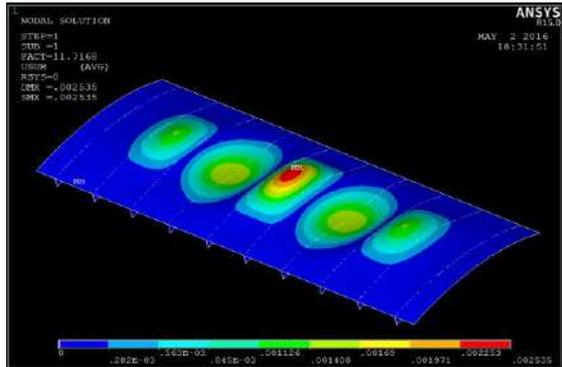


Figura 4-13 - Colapso global.

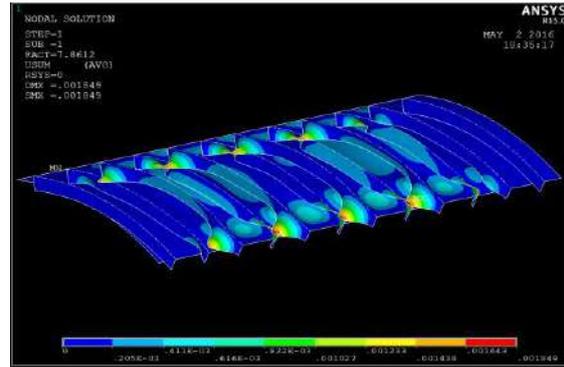


Figura 4-14 - Instabilidade das cavernas.

A análise de estabilidade levando-se em consideração somente o regime linear do modelo constitutivo é o passo inicial e imprescindível para identificar a ordem de grandeza do carregamento que causa o colapso. Entretanto, apesar de necessária, a análise linear não representa com adequada acurácia o comportamento sob carregamento de estruturas em geral, a não ser que o carregamento aplicado gere tensões menores do que a tensão de proporcionalidade do material. A linearização da simulação numérica não permite, ainda, representar o comportamento estrutural após o colapso.

A Figura 4-15 mostra as curvas, para os mesmos painéis sem reforços, levando-se em consideração modelos constitutivos elásticos e elastoplásticos para fins de comparação. As condições de contorno e carregamento são as mesmas utilizadas para os resultados expostos na Figura 4-10.

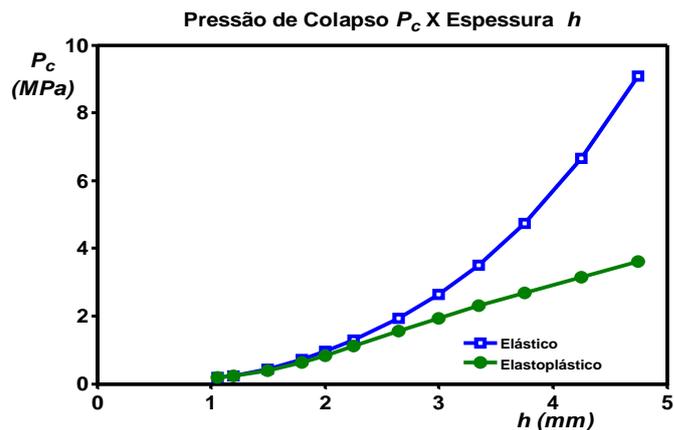


Figura 4-15 – Pressão de colapso com modelos constitutivos elásticos e elastoplásticos.

A Figura 4-15 mostra que para os casos simulados espessuras em torno de 1 mm o colapso acontece na região elástica independentemente do tipo de análise estabelecida, isto é,

linear ou elastoplástica. A pressão de carregamento P em função do deslocamento representada em gráficos a partir deste ponto referem-se ao deslocamento na direção radial do ponto central do painel, ou seja o ponto definido pelo encontro da reta gerada pelos plano de simetria longitudinal e circunferencial com a superfície do painel (centro do painel). A Figura 4-16.é o primeiro exemplo de comportamento pós-colapso onde cada curva representa as espessuras distintas.

Como passo seguinte aos painéis simples, painéis com reforços experimentando a região elastoplásticas foram investigados. A pressão de colapso P_c em função do espaçamento entre cavernas L_f para a mesma abrangência de espessura é mostrada na Figura 4-17. Um exemplo da curva da pressão de carregamento P em função do deslocamento foi obtida estabelecendo uma espessura fixa dos modelos ($h = 3 \text{ mm}$) e variando os espaçamentos entre cavernas L_f (Figura 4-18).

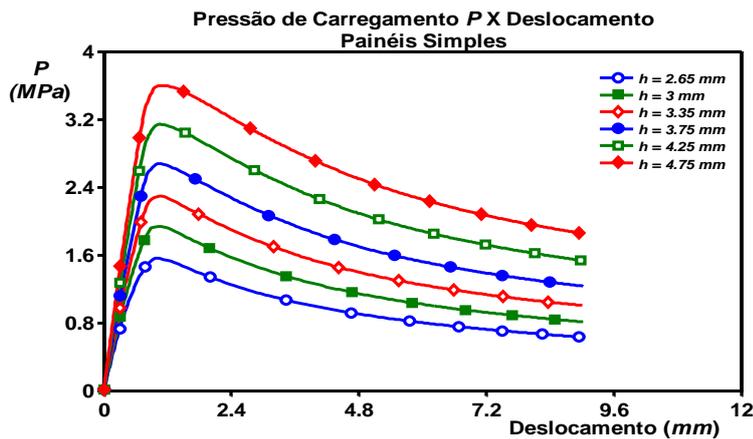


Figura 4-16 – Curvas pressão de carregamento-deslocamento (pós-colapso).

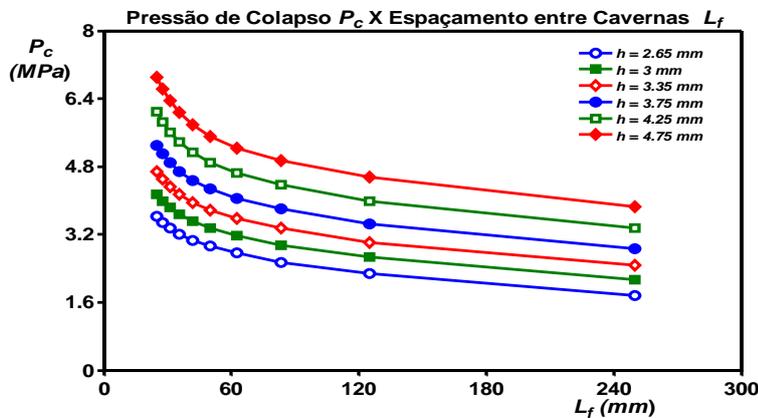


Figura 4-17 - Pressão de colapso P_c de painéis reforçados.

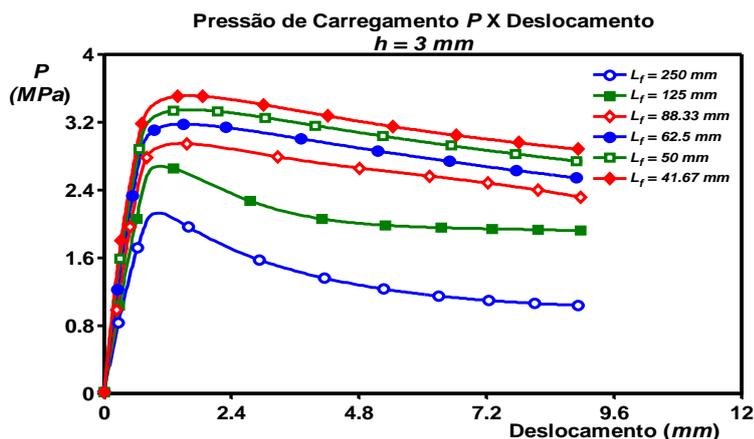


Figura 4-18 – Curvas pressão de carregamento P-deslocamento.

Curvas com diferentes espessuras h e espaçamento entre cavernas fixo ($L_f = 50 \text{ mm}$) foram plotadas na Figura 4-19.

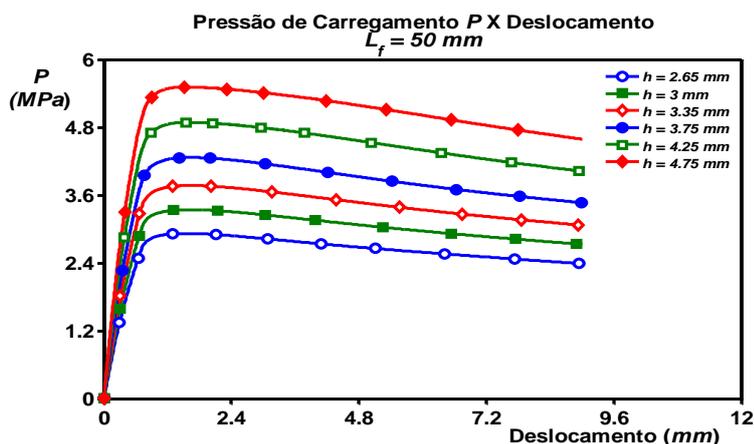


Figura 4-19 - Curvas pressão de carregamento P-deslocamento.

Os resultados apresentados até este ponto da investigação decorrem de modelos com extremidades engastadas. De forma a ampliar o escopo do estudo, resultados aplicando condição de simples apoio nas extremidades foram produzidos e confrontados com os resultados na condição de extremidades engastadas (Figura 4-20 e Figura 4-21). Observando a viabilização da representação gráfica, somente três espessuras foram levadas em consideração, ou seja, $h = 2.65, 3 \text{ e } 4.75 \text{ mm}$.

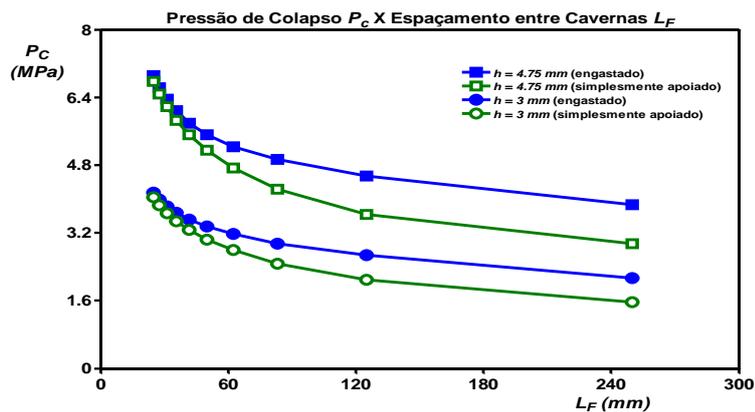


Figura 4-20 – Curva P_c X L_f para diferentes condições de contorno.

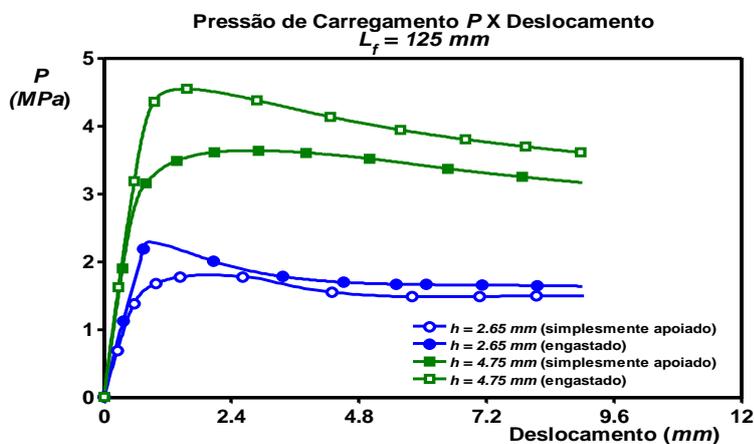


Figura 4-21 - Curva carregamento- deslocamento para diferentes condições de contorno.

Em se tratando de materiais aplicados em estruturas sob pressão hidrostática, o *AISI-1020* possui poucas aplicações devido às suas propriedades mecânicas em razão da relativa baixa tensão de escoamento. Concebeu-se numericamente, portanto, um material fictício, chamado neste estudo de *MAT-1*, que se assemelha às ligas de aço de alta resistência, tais como o *HY-80* e *HY-100*. A característica que confere importância às ligas de alta resistência é a associação de alta resistência com facilidade de fabricação representada por excelente soldabilidade e boa ductibilidade. Outros tipos de materiais, tais como titânio, têm sido pesquisados com intuito atribuir maior resistência ao colapso, porém a dificuldade de implementação de processos construtivos e o custo envolvido impede adoção destes materiais.

Conforme podemos verificar na Figura 4-22, o material proposto apresenta um aspecto *bilinear*, ou seja, duas retas com inclinações distintas que representam região elástica e

plástica. As propriedades mecânicas do *MAT-1* adotadas nas simulações são descritas na Tabela 4-3. As curvas resultantes da pressão de colapso P_c em função do espaçamento entre cavernas L_f e do carregamento P em função do deslocamento comparadas com os resultados utilizando o *AISI-1020* são apresentadas, respectivamente, na Figura 4-23 e Figura 4-24.

Tabela 4-3 - Propriedades mecânicas do *MAT-1*.

Propriedade Mecânica	Sistema Métrico	Sistema Imperial
Tensão de Escoamento	700 Mpa	102 ksi
Módulo de Elasticidade	200 GPa	29000 ksi
Coefficiente de Poisson	0.3	0.3

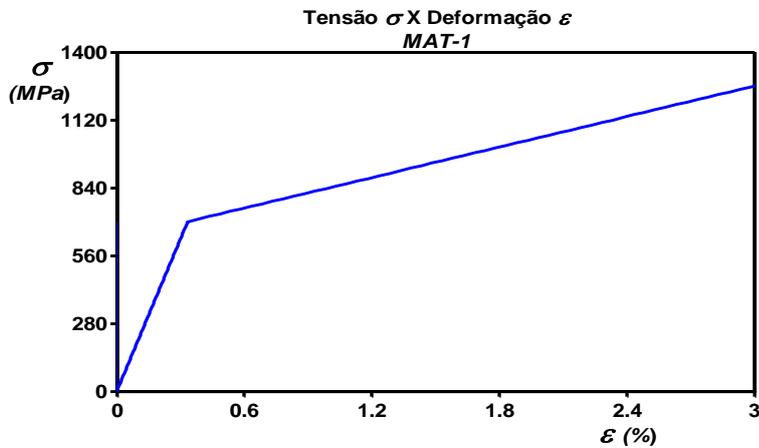


Figura 4-22 - Curva Tensão X Deformação bilinear do *MAT-1*.

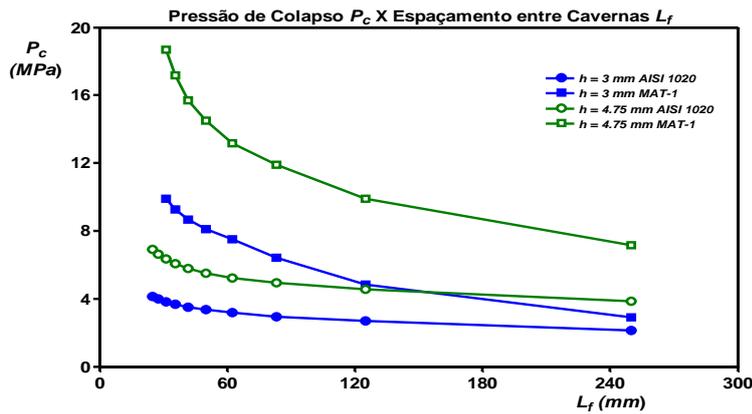


Figura 4-23 - P_c X L_f material: *AISI 1020* e *MAT-1*.

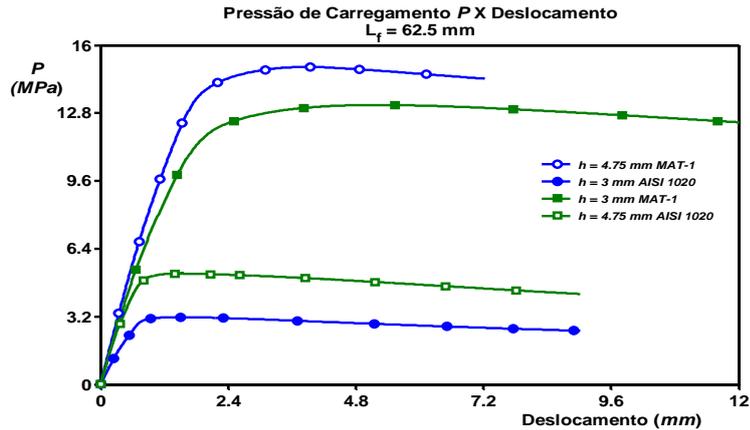


Figura 4-24 - Curva carregamento- deslocamento considerando AISI 1020 e MAT-1.

As simulações numéricas representadas a partir da Figura 4-15 até a Figura 4-24 investigaram a influência de diferentes tipos de modelos constitutivos, condições de contorno e parâmetros geométricos na magnitude da pressão de colapso e no aspecto da solução ao longo do carregamento. Parâmetros geométricos tais como comprimento L_b , ângulo de abertura do painel Θ , e raio de curvatura a foram excluídos da análise. Contudo, simulações envolvendo variações da altura da caverna h_w revelaram-se de interesse devido à viabilidade experimental. Os modelos foram simulados considerando alturas de cavernas $h_w=30$ mm e $h_w=15$ mm, sendo o último a altura considerada para todos os modelos até este ponto do estudo. Ressalta-se, ainda, que as cavernas e a casca possuem a mesma espessura h . Os resultados obtidos podem ser verificados nas Figura 4-25 e Figura 4-26.

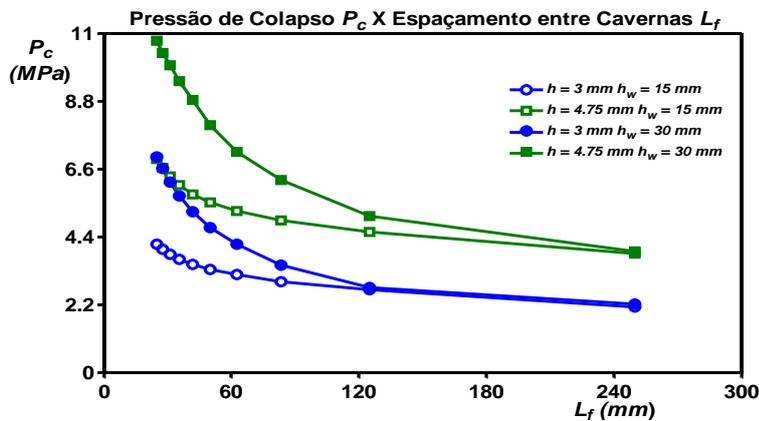


Figura 4-25 - P_c X L_f variando h_w .

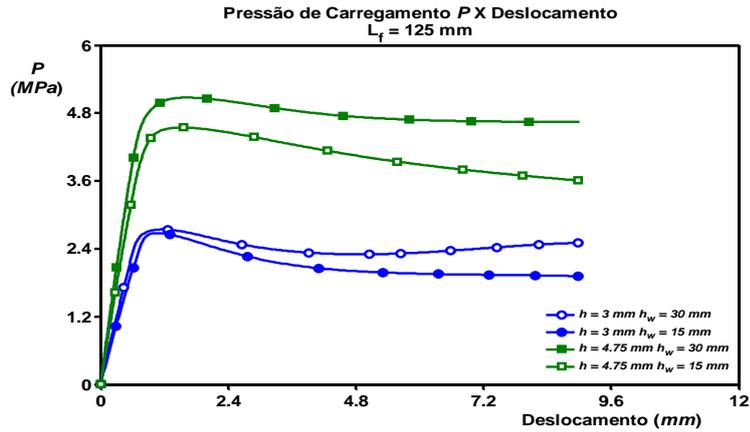


Figura 4-26 Curva carregamento- deslocamento variando h_w .

Conforme apresentado na Seção 2.6, as imperfeições geométricas levam à redução da pressão de colapso. Dentre as imperfeições características listadas na Seção 2.6, a que mais se adequa para uma investigação nesta fase do estudo é a imperfeição assumida. Em decorrência dos resultados linearizados de colapso apresentados, foram assumidas imperfeições com aspecto senoidal em ambos os sentidos, isto é, longitudinal e circunferencial, com os respectivos parâmetros de forma: n (número de meiaondas longitudinais) e n_{cir} (número de lóbulos circunferenciais).

As imperfeições assumidas possuem, ainda, uma atenuação exponencial a medida que se aproximam das extremidades (parâmetros ξ_1 e ξ_2), de forma a estabelecer condições de contornos livre de imperfeições. Aos valores dos parâmetros de atenuação, foram atribuídos valores unitários. A amplitude máxima das imperfeições foi atribuída ao parâmetro μ . As coordenadas ao longo dos eixos principais, ou seja, circunferenciais e longitudinais, são θ e z , respectivamente. Os demais parâmetros são de ordem geométrica e estão descritos no início desta Seção. A Equação 4.1 descreve, portanto, o aspecto das imperfeições assumidas.

$$w_0 = \mu a \left\{ e^{-\xi_1(\theta - \theta/2)^2/\theta^2} e^{-\xi_2(2z)^2/L^2} \text{sen} \left(\frac{n_{cir}\pi\theta}{\theta} \right) \text{sen} [n\pi(z - L/2)/L] \right\} \quad 4.1$$

As simulações realizadas foram focadas na influência dos parâmetros μ e n_{cir} na pressão de colapso. As curvas geradas a partir da análise (Figura 4-27 e Figura 4-28) tiveram a pressão de colapso do modelo imperfeito P_{cd} adimensionalizados pelo valor da pressão de colapso do modelo perfeito P_c .

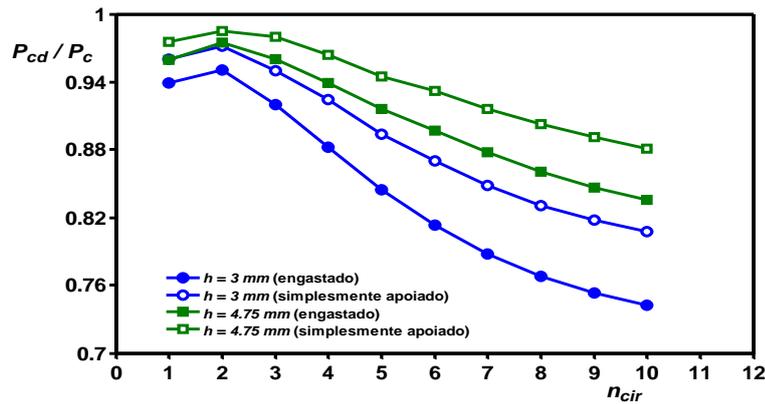


Figura 4-27 - $P_{cd} / P_c \times n_{cir}$ para diferentes espessuras e condições de contorno.

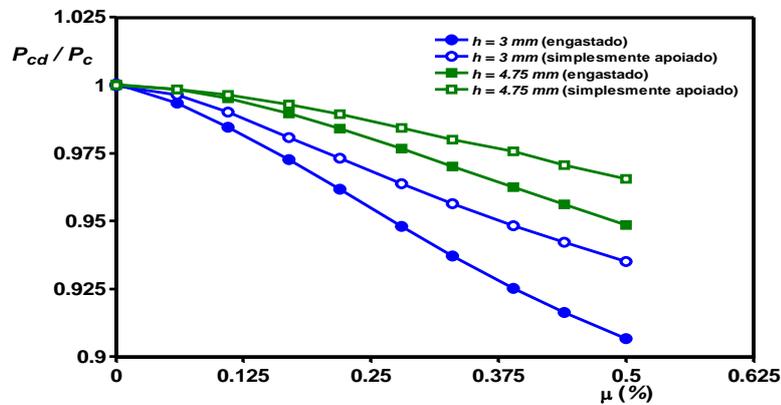


Figura 4-28 - $P_{cd} / P_c \times \mu$ para diferentes espessuras e condições de contorno.

4.2.1 Conclusões Parciais

As simulações numéricas preliminares envolveram parâmetros que levaram em consideração os aspectos geométricos dos candidatos aos testes experimentais, modelos constitutivos de materiais utilizados em casos reais, e condições de contorno que usualmente são utilizados em diversos trabalhos acadêmicos.

Inicialmente, foram simulados modelos experimentando exclusivamente o regime elástico e restringindo grandes deslocamentos e rotações. Neste caso específico, temos que o colapso dos modelos ocorreu devido à bifurcação da solução para uma outra diferente daquela observada nos incrementos de carga iniciais. Para este caso específico, é possível identificar os possíveis tipos de colapso que ocorreram, tais como: colapso entre cavernas (Figura 4-12), colapso global (Figura 4-13) e colapso das cavernas (Figura 4-14). A partir da Figura 4-15 podemos visualizar que as curvas apresentam

descontinuidades devido à mudança do tipo de colapso. Ainda, percebe-se que conforme L_f se aproxima do comprimento total L , a diferença da pressão de colapso P_c entre modelos de diferentes espessuras h diminuem.

A primeira comparação entre modelos experimentando o regime elastoplástico e modelos exclusivamente observando o regime elástico foi feita considerando, inicialmente, painéis sem qualquer reforço. O modelo constitutivo utilizado para a simular o regime elastoplástico decorre do ensaio de tração mostrado na Figura 4-9. Conforme pode ser visto na Figura 4-15, a comparação entre os modelos elásticos e elastoplásticos nos revela uma diferença da pressão de colapso P_c muito menor para espessuras menores quando se compara com os modelos de maiores espessuras. A curva para os modelos considerando o regime elastoplástico mostra um aspecto “retilíneo”, ao passo que se observa uma curva não-linear para os modelos experimentando exclusivamente o regime elástico. Este comportamento demanda maiores investigações direcionadas à determinação das espessuras onde se observa o comportamento não-linear desta curva.

Após a comparação de modelos elásticos e elastoplásticos, foram realizadas análises para verificar a pressão de colapso P_c em função de parâmetros geométricos tais como espaçamento entre cavernas, altura das cavernas e espessura. Além disso, simulações considerando dois diferentes tipos de materiais (AISI 1020 e MAT-1) integraram-se aos demais resultados. Paralelamente, curvas da pressão de carregamento em função do deslocamento foram produzidas levando-se em consideração a mesma variação de parâmetros geométricos e do modelo constitutivo das curvas geradas para a pressão de colapso P_c . Ambos os tipos de curvas apresentaram resultados coerentes conforme o desenvolvimento da análise diversificou os parâmetros de relevância.

Outro grupo de curvas geradas nesta fase preliminar foram as relativas aos modelos imperfeitos. A pressão de colapso dos modelos imperfeitos P_{cd} foram adimensionalizados pela pressão de colapso P_c , e as curvas geradas decorreram da confrontação desta adimensionalização com os parâmetros de imperfeições μ e n_{cir} . As curvas em função do parâmetro μ expressaram o que era esperado, ou seja, maiores amplitudes da falta de circularidade subtraem da estrutura a capacidade de resistir ao colapso. Em se tratando das curvas em relação a n_{cir} , ressalta-se o pronunciamento de um ponto de máximo local, o que revela a necessidade de averiguações de pontos de mínimo local e inflexões para uma faixa maior do domínio da curva apresentada. Os resultados revelam que maiores

espessuras estão menos susceptíveis à depreciação da pressão de colapso, enquanto que os modelos com extremidades engastadas se apresentam mais propensos à diminuição.

4.3 CORRELAÇÃO NUMÉRICO-EXPERIMENTAL

De forma a verificar a acurácia do modelo numérico desenvolvido, este estudo apresenta a correlação numérico-experimental utilizando as leituras obtidas dos extensômetros elétricos utilizados nos testes hiperbáricos. Os testes elencados para correlação são aqueles os quais submeteram os painéis reforçados 2 e 3 e o painel simples 2 à pressão hidrostática. A curva tensão-deformação para a calibração do modelo constitutivo do modelo numérico se origina da Seção 3.3 que descreve os ensaios de tração realizados neste estudo. A associação da chapa de aço com painel testado está descrita na Tabela 3-17. As condições de contorno aplicadas às extremidades circunferenciais restringem os deslocamentos radiais e circunferenciais, e as rotações radiais e circunferenciais. A restrição aplicada à extremidade longitudinal atinge os deslocamentos longitudinais e radiais, e todas as rotações.

O painel reforçado 2 foi instrumentado com 3 extensômetros elétricos biaxiais identificados por *G1*, *G2* e *G3*. Os extensômetros *G1* e *G2* foram posicionados no eixo longitudinal de simetria conforme indicado na Figura 4-29. Os valores de L_b e L_f são apresentados na Tabela 3-15 e Tabela 3-16, respectivamente. L_c é o comprimento da corda formado pelo ângulo de abertura θ do painel. A apresentação esquemática das posições dos extensômetros é apresentada na Figura 4-29.

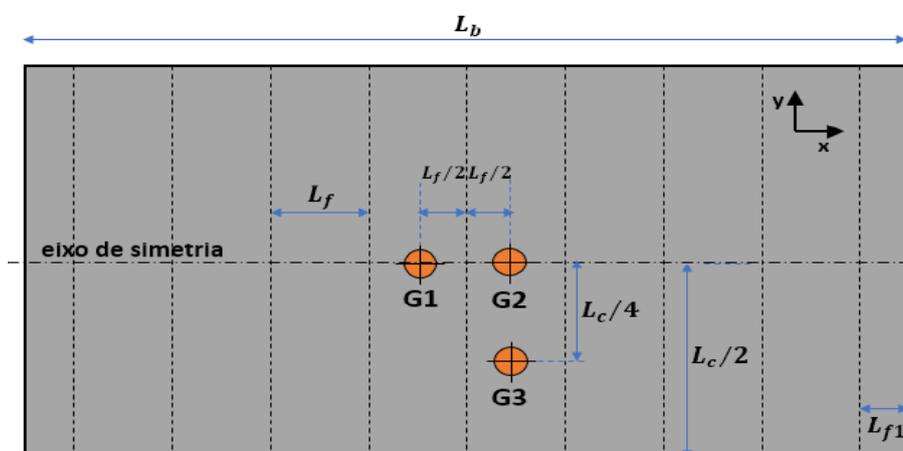


Figura 4-29 Apresentação esquemática da posição dos extensômetros elétricos no painel reforçado 2.

Ao final do teste, foi constatado que o extensômetro G1 não realizou qualquer leitura, enquanto que o extensômetro G2 adquiriu somente a leitura das deformações na direção longitudinal (eixo x). A direção longitudinal e circunferencial (eixo y) está indicada por *Long* e *Trans*, respectivamente nas figuras que expõem as correlações numérico-experimentais (Figura 4-30, Figura 4-31 e Figura 4-32).

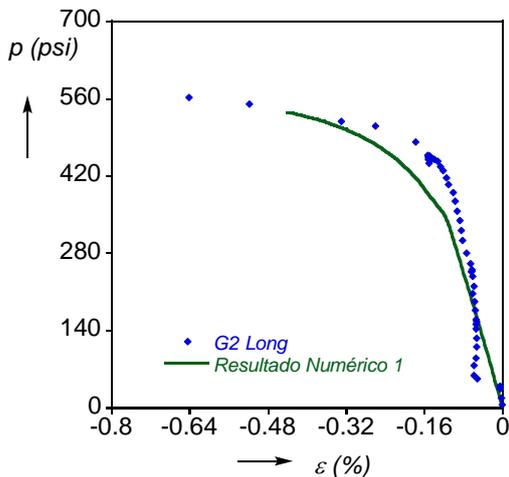


Figura 4-30 Correlação numérico-experimental – G2 Long.

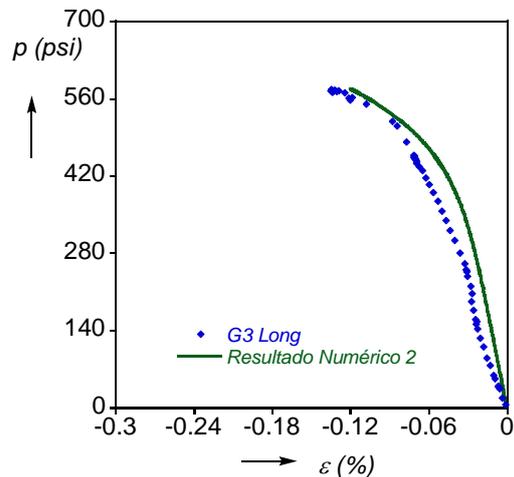


Figura 4-31 Correlação numérico-experimental – G3 Long.

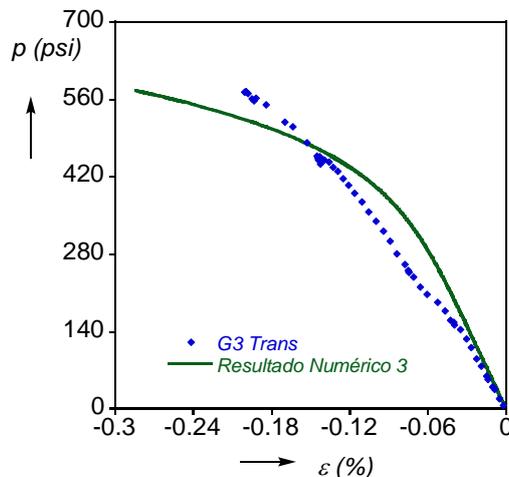


Figura 4-32 Correlação numérico-experimental – G3 Trans.

A magnitude das deformações na direção longitudinal do extensômetro G2 (Figura 4-30) é significativamente maior do que aquela exibida na Figura 4-31 e na Figura 4-32 para o extensômetro G3. A correlação com o extensômetro G2 na direção longitudinal revela uma menor rigidez na região elástica do modelo numérico em relação às deformações adquiridas, porém com uma indicação bem precisa na região plástica. Contrariamente, a correlação com o extensômetro G3 mostra maior rigidez do modelo numérico na região

elástica em comparação com a leitura experimental. Nenhum dos extensômetros permitiu qualquer tipo de correlação na região pós-colapso do teste.

O painel sem reforço 2 foi instrumentado com 3 extensômetros uniaxiais alinhados com a direção circunferencial (eixo y). Todos os extensômetros apresentaram resultados que atestam a aquisição das deformações em função do carregamento durante todo o teste. A apresentação esquemática dos extensômetros é conforme a descrição da Figura 4-33.

As curvas de aquisição dos extensômetros e as respectivas correlações numéricas são apresentadas Figura 4-34, Figura 4-35 e Figura 4-36. Painel sem reforço 2 apresentou de forma mais clara a pressão de colapso por meio dos resultados obtidos dos extensômetros elétricos.

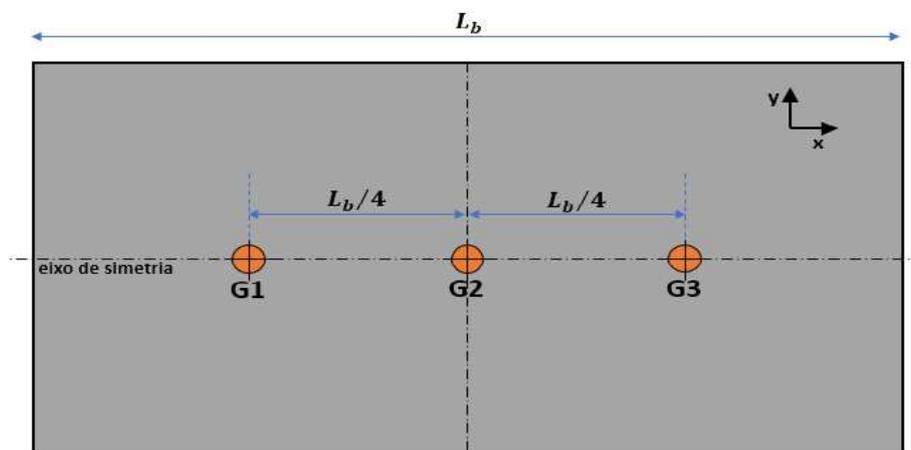


Figura 4-33 Apresentação esquemática da posição dos extensômetros elétricos no painel sem reforço 2.

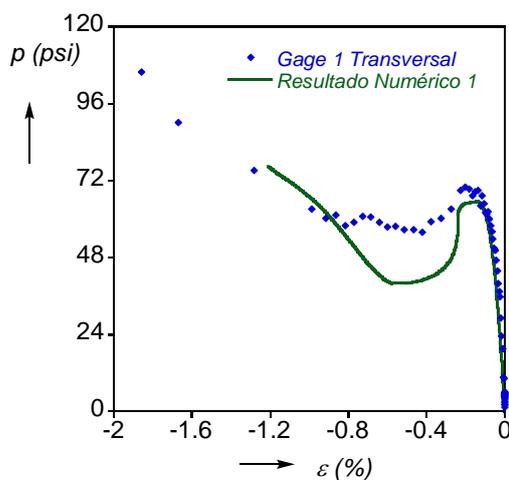


Figura 4-34 Correlação numérico-experimental Gage 1.

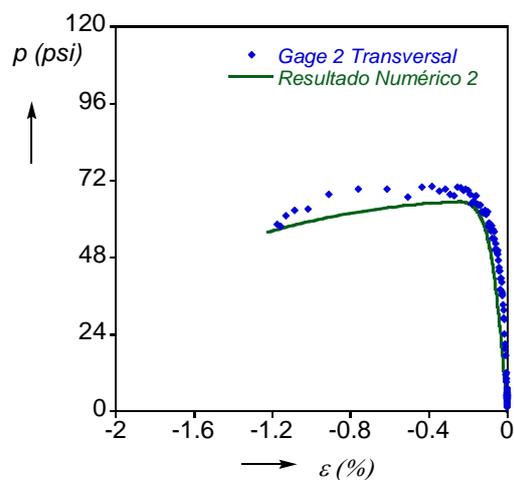


Figura 4-35 Correlação numérico-experimental Gage 2.

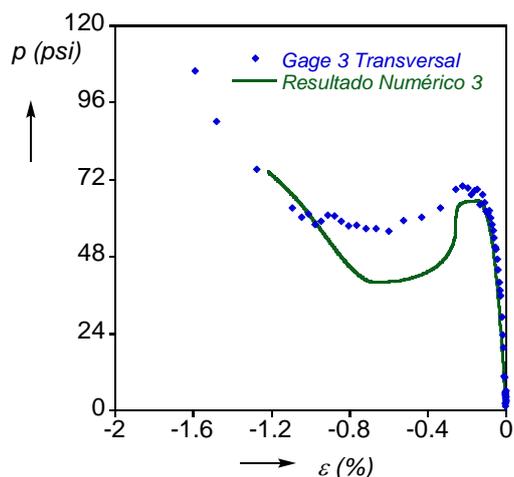


Figura 4-36 Correlação numérico-experimental Gage 3.

A leitura das deformações teve a mesma ordem de grandeza em todos os extensômetros. O modelo numérico não conseguiu representar com precisão adequada a região instável da fase pós-colapso do experimento. Os resultados numéricos na região linear do teste se apresentaram bem próximos dos resultados experimentais em todos os extensômetros. A correlação entre os resultados se mostrou igualmente adequada na região estável do pós-colapso, conforme mostrado na Figura 4-34 e Figura 4-36. O extensômetro G2 (Figura 4-35) não apresentou leitura consistente que pudesse ser aproveitada na correlação no que diz respeito a região estável pós-colapso.

Os resultados numéricos apresentados neste estudo decorrem de simulação quasi-estática utilizando o método do comprimento de arco. A região instável dos resultados numéricos é aquela onde o caminho de solução apresenta decréscimo da carga conforme os deslocamentos aumentam. Os testes hiperbáricos foram conduzidos com prescrição monotônica de pressão, ou seja, qualquer queda repentina de pressão ou aumento excessivo da deformação para pequenas variações de carregamento é o indicativo do colapso dos painéis. No caso do painel sem reforço 2, ocorreu uma notável queda da pressão, conforme pode ser visto na Figura 4-34 e Figura 4-36. Porém, a queda de pressão observada experimentalmente não foi tão acentuada quanto à obtida no modelo numérico, já que o volume de água pressurizada no interior da câmara era bastante superior à variação de volume interno causada pelo colapso do painel.

Cabe ressaltar que a transição do ponto limite de colapso para o ponto de mesmo carregamento com deslocamentos maiores ocorre de forma dinâmica, e é o que caracteriza

o fenômeno de snap-through. Portanto, a diferença na forma de carregamento entre as simulações numéricas e o teste hiperbárico, assim como a representação de um fenômeno dinâmico por meio de uma simulação quasi-estática ocasionaram a discrepância da correlação numérica na região instável do pós-colapso.

O painel reforçado 3 foi instrumentado com 4 extensômetros biaxiais conforme a Figura 4-37. Os extensômetros G1 e G4 não tiveram suas saídas na direção longitudinal acionadas. A leitura de todos os extensômetros se prolongaram após o colapso do painel. A correlação numérico-experimental é apresentada no conjunto de figuras compreendido entre a Figura 4-38e a Figura 4-43.

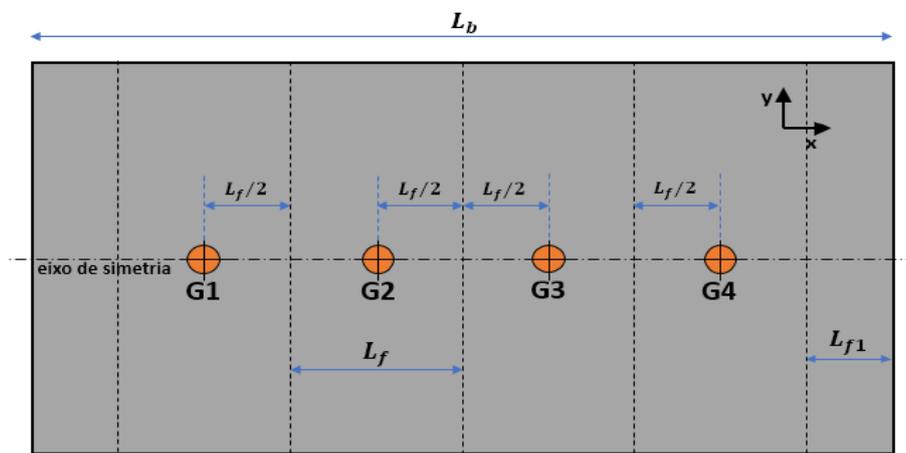


Figura 4-37 Apresentação esquemática da posição dos extensômetros elétricos no painel reforçado 3.

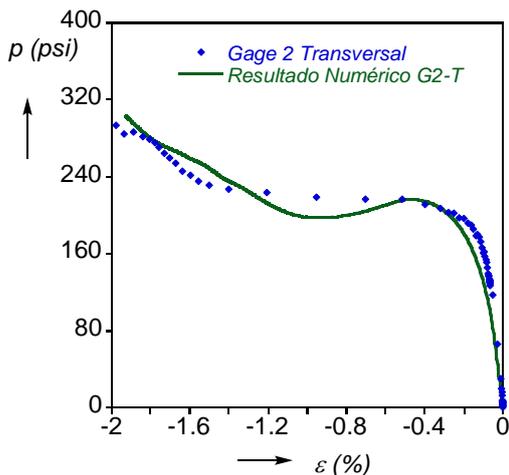


Figura 4-38 Correlação numérico-experimental do extensômetro 2 transversal (Gage 2).

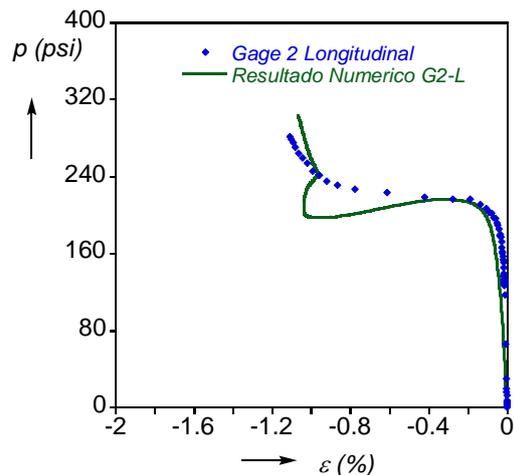


Figura 4-39 Correlação numérico-experimental do extensômetro 2 longitudinal (Gage 2).

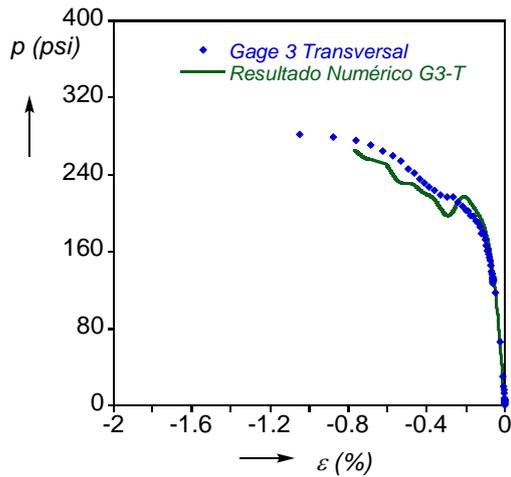


Figura 4-40 Correlação numérico-experimental do extensômetro 3 transversal (Gage 3).

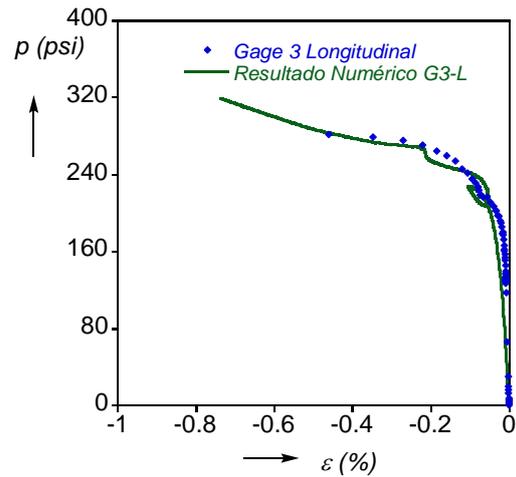


Figura 4-41 Correlação numérico-experimental do extensômetro 3 longitudinal (Gage 3).

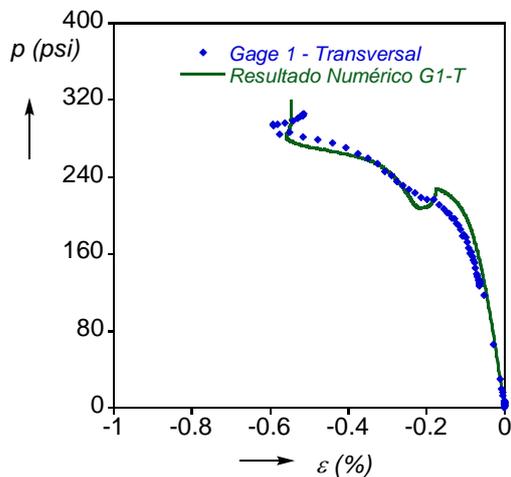


Figura 4-42 Correlação numérico-experimental do extensômetro 1 transversal (Gage 1).

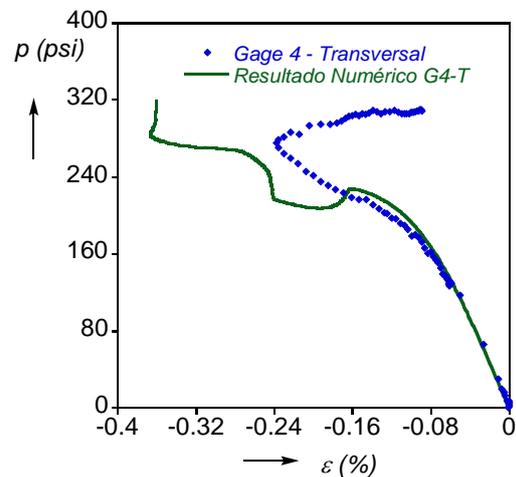


Figura 4-43 Correlação numérico-experimental do extensômetro 4 transversal (Gage 4).

A única curva experimental para o caso do painel reforçado 3 que possui as características clássicas do colapso (ponto limite) é a relacionada com extensômetro G2. As demais curvas possuem um ponto limite de certa forma definido, porém com uma região de pós-colapso instável mínima ou inexistente. A correlação numérico-experimental para todos os casos apresenta-se consistente até o ponto limite, porém com algumas diferenças para cada extensômetro. A correlação numérica com o extensômetro G2 exibe a característica verificada para o painel simples 2, isto é, boa correlação nas regiões estáveis, e distante nas regiões instáveis. Para o extensômetro G3, o modelo numérico apresenta resultados satisfatórios no que diz respeito à correlação na direção longitudinal. Na direção circunferencial, o modelo numérico reproduz a curva com um certo grau de acurácia até o ponto considerado como colapso, após este ponto, a solução numérica tende a divergir.

A correlação numérica com o extensômetro G1 apresenta diferenças nas adjacências do ponto limite e tende a divergir para grandes deformações. A solução numérica para a correlação com extensômetro G4 diverge significativamente após o colapso.

Conforme verificado na seção que trata do mapeamento das superfícies, os painéis fabricados apresentaram imperfeições em relação ao raio nominal. A correlação das imperfeições por meio do raio médio verificado pontualmente com a posição dos extensômetros é apresentada na Tabela 4-4.

Tabela 4-4 Correlação da posição dos extensômetros com os raios médios verificados no mapeamento das superfícies.

Painel	Extensômetro	Raio médio mapeado (mm)
Painel reforçado 2	G1	359.71
	G2	358.94
	G3	359.01
Painel sem reforço 2	G1	358.42
	G2	359.22
	G3	358.70
Painel reforçado 3	G1	358.04
	G2	356.96
	G3	357.55
	G4	358.57

A correlação numérico-experimental realizada por esta investigação revela que o modelo numérico desenvolvido consegue de forma satisfatória reproduzir o comportamento elastoplástico de painéis sob carregamento de pressão externa uniforme. Esta verificação da acurácia dos resultados numéricos foi imprescindível para esta investigação, pois validou o desenvolvimento da análise paramétrica baseada nos parâmetros geométricos de interesse, tais como o ângulo de abertura θ e a relação L_f/L_b , e o estudo de casos envolvendo painéis encontrados em situações reais.

5 ANÁLISE PARAMÉTRICA

A análise paramétrica visa principalmente a verificação da influência dos parâmetros de interesse sobre as pressões de colapso linear P_c e elastoplástica P_{co} . As imperfeições aplicadas aos modelos são definidas a partir do modo de flambagem linear (P_c). P_{co} , por sua vez, decorre da verificação do ponto limite de colapso de geometrias imperfeitas com modelo constitutivo calibrado pela curva tensão-deformação ajustada por meio da proposta de Ramberg-Osgood exibida na Figura 3-55 referente à chapa de aço 1 com ajuste da deformação até 15%. Portanto, os resultados que ultrapassem este valor são reportados *como maiores que 15% (>15%)*, em observância à abrangência dos resultados dos ensaios.

Os parâmetros analisados nesta investigação são: a relação L_f/L_b , o ângulo de abertura θ e o fator de imperfeição μ . $L_f/L_b=1/6$, $\theta=40^\circ$ e $\mu=0.5\%$ são os valores dos parâmetros quando não fazem parte de uma determinada análise paramétrica. As curvas elastoplásticas são geradas a partir da confrontação de P/P_c com u/a , onde u é o deslocamento radial máximo observado, e P , o carregamento discretizado pelos passos de carga. As condições de contorno também são investigadas nas verificações e aplicadas às extremidades dos modelos simulados. A condição engastada restringe os deslocamentos e rotações em todas as direções nas extremidades, enquanto que a condição simplesmente apoiada permite a rotação ao redor do eixo da extremidade onde é aplicada. As definições dos parâmetros geométricos L_f (espaçamento entre cavernas), L_b (comprimento do painel) e θ (ângulo de abertura) são apresentadas na Figura 3-72 e na Figura 3-73.

As tabelas apresentadas em cada análise representam, em coordenadas cilíndricas, os aspectos e magnitude colapso (P_c) e as deformações elásticas ε^{el} e plásticas ε^p no sentido circunferencial (eixo y) e longitudinal (eixo z) dos modelos que possuem resultados de interesse. A direção radial é representada pelo eixo x nas ilustrações. As tabelas complementam as curvas e as figuras, pois detalham numericamente os valores dos carregamentos de flambagem e das deformações máximas para cada valor do parâmetro em análise.

5.1 INFLUÊNCIA DA RAZÃO L_f/L_b

As curvas de P/P_c em função de u/a obtidos da simulação elastoplástica são apresentadas na Figura 5-1 (painéis engastados) e Figura 5-2 (painéis simplesmente apoiados) para diferentes valores de L_f/L_b . A flambagem linear dos painéis com $L_f/L_b=1/6$ e $1/8$ é mostrada a partir da Figura 5-3 até a Figura 5-10.

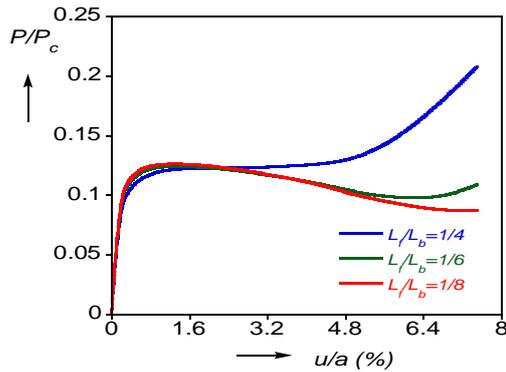


Figura 5-1 Solução elastoplástica para diferentes valores de L_f/L_b (painéis engastados).

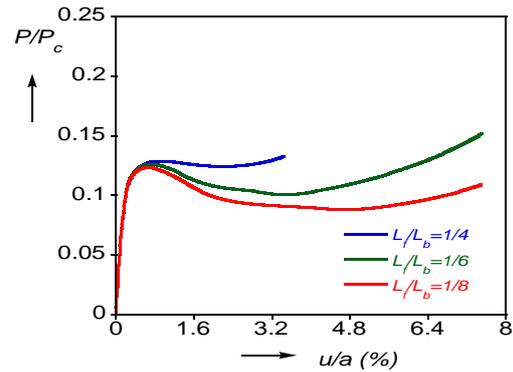


Figura 5-2 Solução elastoplástica para diferentes valores de L_f/L_b (painéis simplesmente apoiados).

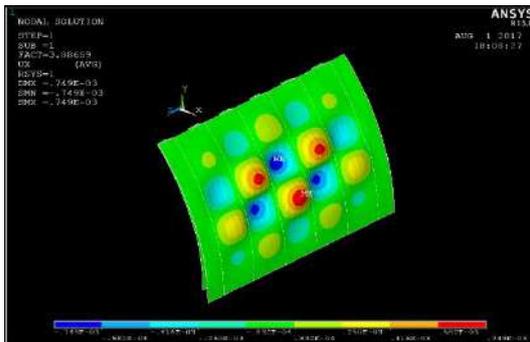


Figura 5-3 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $L_f/L_b=1/6$.

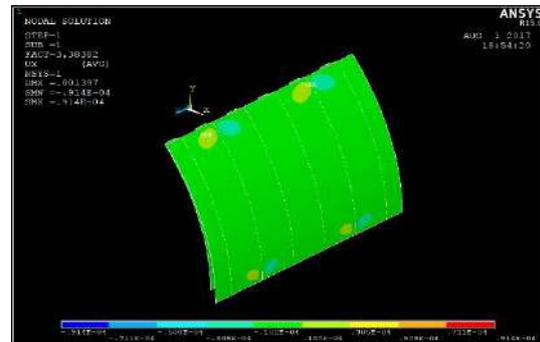


Figura 5-4 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $L_f/L_b=1/6$.

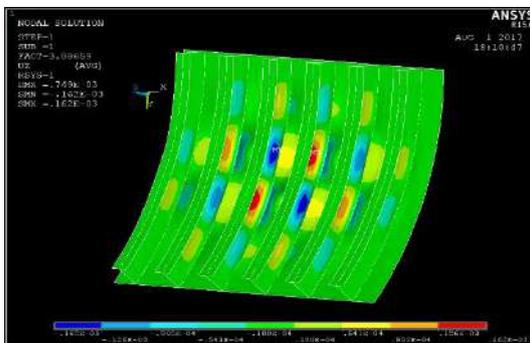


Figura 5-5 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $L_f/L_b=1/6$.

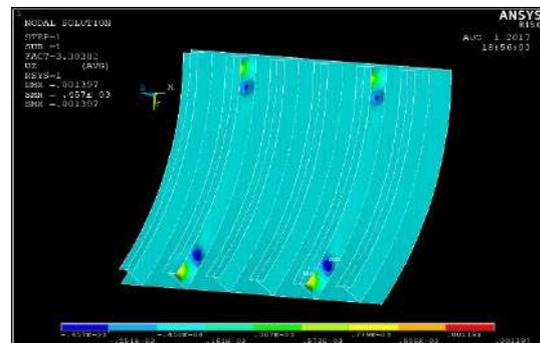


Figura 5-6 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $L_f/L_b=1/6$.

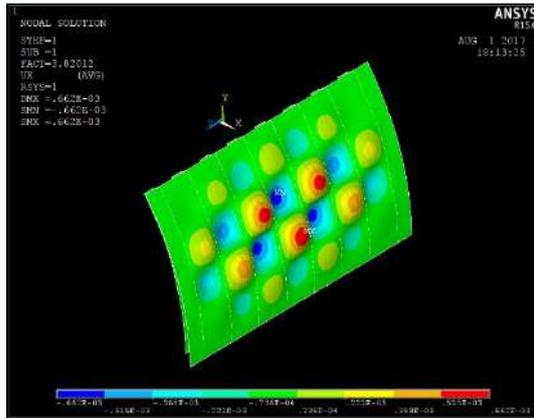


Figura 5-7 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $L_f/L_b=1/8$.

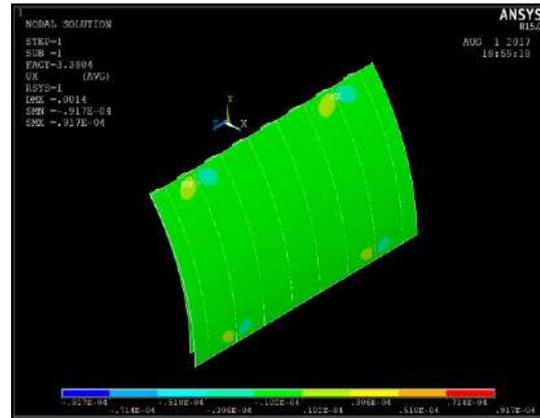


Figura 5-8 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $L_f/L_b=1/8$.

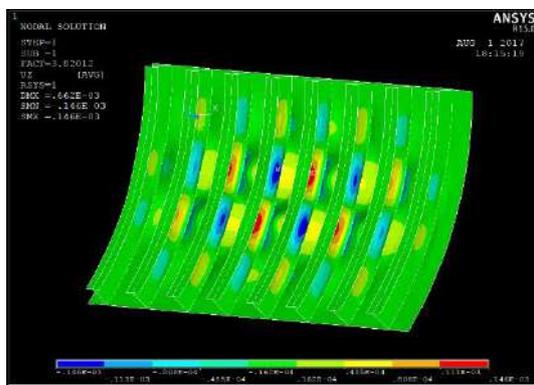


Figura 5-9 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $L_f/L_b=1/8$.

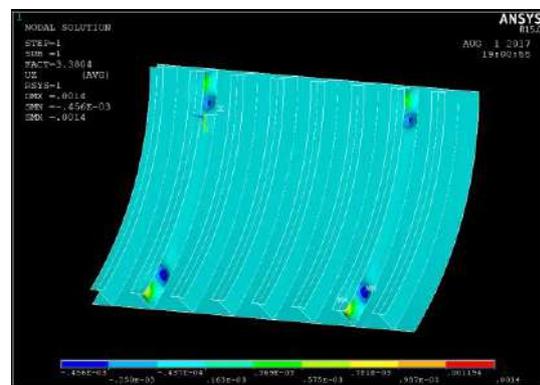


Figura 5-10 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $L_f/L_b=1/8$.

A Tabela 5-1 apresenta os valores de P_c , P_{co} , e os adimensionais P_{co}/P_c e u/a para cada razão L_f/L_b .

Tabela 5-1 Valores de P_c , P_{co} e adimensionais.

L_f/L_b	Painéis engastados			Painéis simplesmente apoiados		
	1/4	1/6	1/8	1/4	1/6	1/8
P_c (MPa)	40.44	38.87	38.19	34.03	33.83	33.80
P_{co} (MPa)	-	4.83	4.82	4.38	4.26	4.17
P_{co}/P_c	-	0.124	0.126	0.129	0.126	0.123
$ u/a _{P_{co}/P_c}$ (%)	-	1.37	1.29	0.923	0.741	0.724

O painel engastado com $L_f/L_b=1/4$ não apresenta o ponto limite que caracteriza o colapso, e, portanto, a pressão de colapso P_{co} é indeterminada para o caso engastado. Os deslocamentos radiais no ponto limite das simulações elastoplásticas para os modelos engastados são maiores do que aqueles verificados para os painéis simplesmente apoiados. Os deslocamentos pós-colapso da região estável das curvas elastoplásticas dos modelos engastados são maiores que os deslocamentos na mesma região da curva para os

modelos simplesmente apoiados. Esta região é importante, pois é para a onde a solução desloca-se dinamicamente após o ponto limite (snap-through). O aumento do parâmetro L_f/L_b leva a redução de P_c e P_{co} para todos os modelos, enquanto que a razão P_{co}/P_c apresenta o comportamento oposto para as extremidades engastadas; ou seja, os modelos engastados tendem a se aproximar do colapso linear conforme a relação L_f/L_b diminui, ao passo que a diminuição da relação nos modelos simplesmente apoiados leva a um afastamento da pressão de colapso elastoplástica em relação à pressão de colapso linear.

Todos os modelos apresentam dois lóbulos circunferenciais ($n=2$) para os deslocamentos radiais e longitudinais após a obtenção da solução linearizada de colapso (Figura 5-3 a Figura 5-10). O aspecto da flambagem linear tem, ainda, as amplitudes dos deslocamentos atenuadas a medida que se aproxima das extremidades. As condições de contorno nas extremidades se mostram decisivas para a identificação do aspecto de flambagem linear. Os painéis engastados colapsam linearmente na região entre cavernas conforme a Figura 5-3 e a Figura 5-7, enquanto que os simplesmente apoiados apresentam instabilidade nas cavernas (Figura 5-6 e Figura 5-10).

Apesar da clareza do tipo de colapso linear que os modelos engastados apresentam, os deslocamentos longitudinais das cavernas, por serem da mesma ordem de grandeza dos deslocamentos radiais na casca cilíndrica, conferem um certo grau de simultaneidade do colapso entre cavernas e da instabilidade das cavernas. Os painéis simplesmente apoiados apresentam com maior distinção a instabilidade das cavernas, pois os deslocamentos radiais aparecem em uma região menor do painel e em uma ordem de grandeza dez vezes menor da magnitude dos deslocamentos longitudinais. A região de ocorrência do desvio do plano principal das cavernas difere, também, de acordo com a condição de contorno adotada. Os modelos engastados apresentam a solução de colapso linear contendo deslocamentos longitudinais na região central (Figura 5-3 e Figura 5-7), ao passo que o desvio do plano nos casos simplesmente apoiados ocorre nas proximidades das extremidades longitudinais (Figura 5-6 e Figura 5-10).

As deformações elásticas e plásticas máximas nas direções circunferenciais e longitudinais no limiar do colapso (ponto limite) da análise elastoplásticas verificadas para os painéis são apresentadas na Tabela 5-2.

Tabela 5-2 – Deformações elásticas e plásticas máximas observadas no limiar do colapso.

L_f/L_b	Painéis engastados			Painéis simplesmente apoiados		
	1/4	1/6	1/8	1/4	1/6	1/8
$ \varepsilon_y^{el} _{max}$ (%)	-	0.252	0.249	0.315	0.314	0.312
$ \varepsilon_y^p _{max}$ (%)	-	3.31	3.09	>15	>15	>15
$ \varepsilon_z^{el} _{max}$ (%)	-	0.228	0.226	0.178	0.181	0.179
$ \varepsilon_z^p _{max}$ (%)	-	2.431	2.28	>15	14.01	13.38

A solução estática no limiar do colapso (ponto limite) para o caso engastado com $L_f/L_b=1/6$ e o caso simplesmente apoiado com $L_f/L_b=1/4$ é exibida no conjunto de figuras compreendido entre a Figura 5-11 e a Figura 5-18.

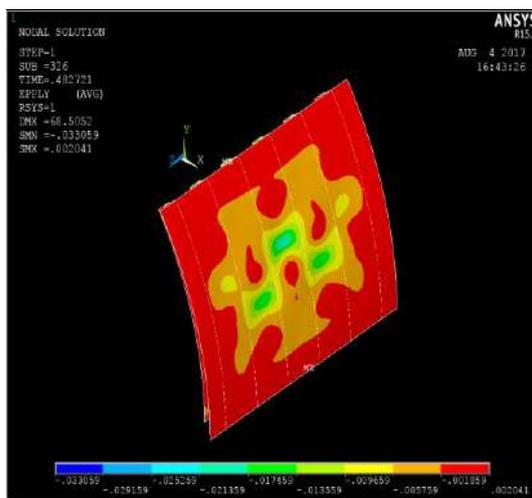


Figura 5-11 Deformação plástica circunferencial na casca cilíndrica - $L_f/L_b=1/6$ (engastado).

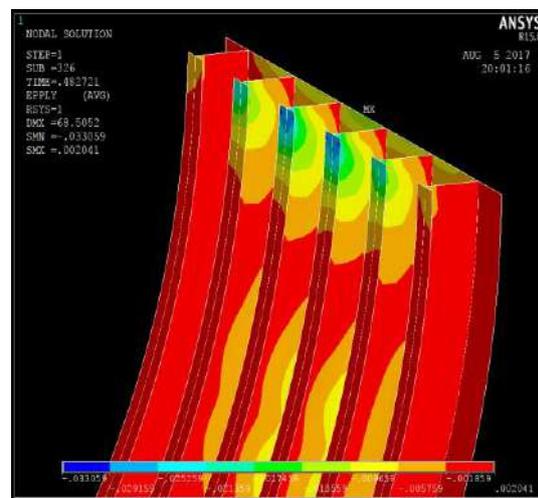


Figura 5-12 Deformação plástica circunferencial nas cavernas - $L_f/L_b=1/6$ (engastado).

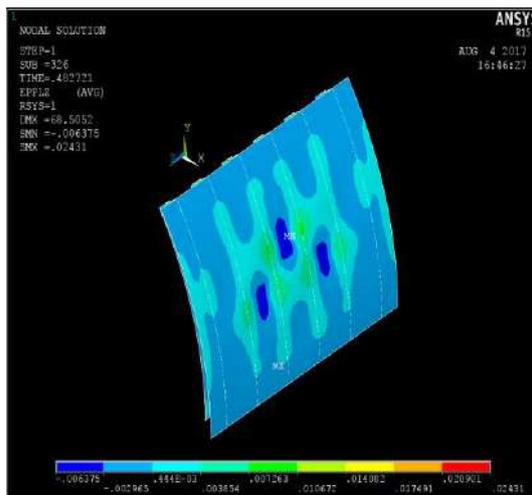


Figura 5-13 Deformação plástica longitudinal na casca cilíndrica - $L_f/L_b=1/6$ (engastado).

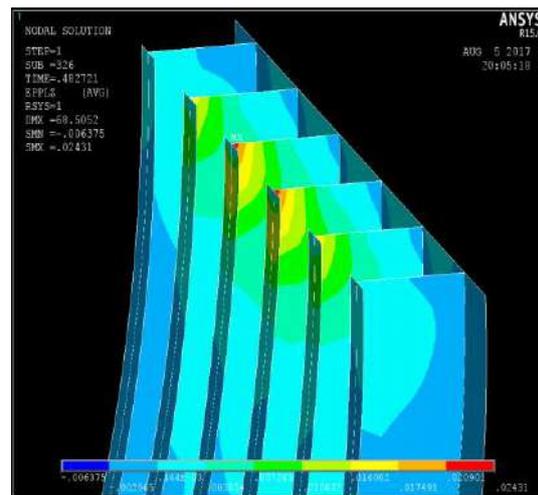


Figura 5-14 Deformação plástica longitudinal nas cavernas - $L_f/L_b=1/6$ (engastado).

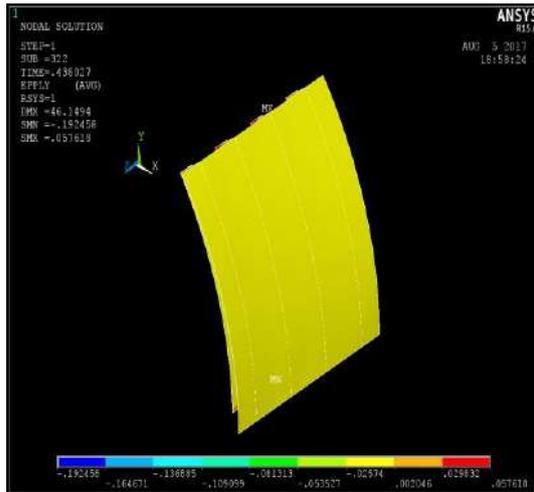


Figura 5-15 Deformação plástica circunferencial na casca cilíndrica - $L_f/L_b=1/4$ (simplesmente apoiado).

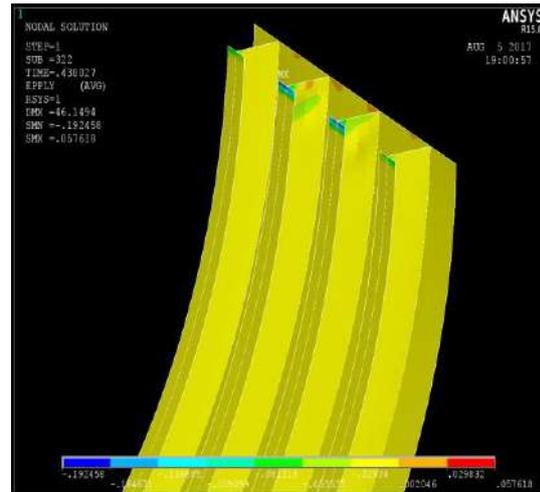


Figura 5-16 Deformação plástica circunferencial nas cavernas - $L_f/L_b=1/4$ (simplesmente apoiado).

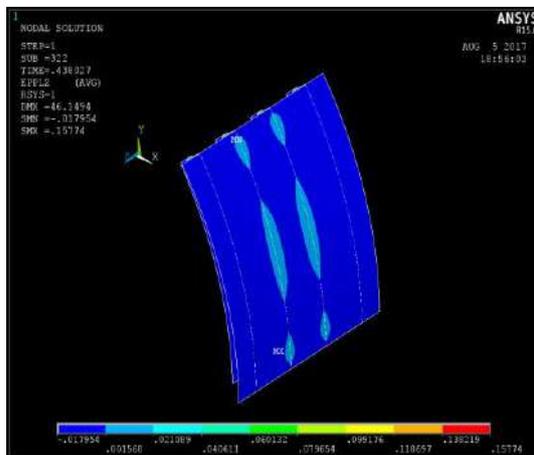


Figura 5-17 Deformação plástica longitudinal na casca cilíndrica - $L_f/L_b=1/4$ (simplesmente apoiado).

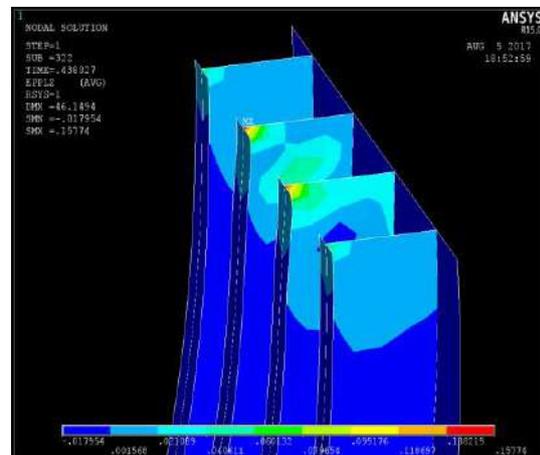


Figura 5-18 Deformação plástica longitudinal nas cavernas - $L_f/L_b=1/4$ (simplesmente apoiado).

Todos os modelos simulados experimentam a região plástica do material no momento do colapso. Os painéis simplesmente apoiados observam deformações plásticas máximas maiores do que as verificadas para os modelos engastados. Em ambas condições de contorno, as deformações plásticas máximas no sentido circunferencial constatadas são maiores do que aquelas no sentido longitudinal. A comparação entre as diferentes condições de contorno se apresentam expressivas, por exemplo, para os modelos com $L_f/L_b=1/6$, as deformações plásticas máximas dos casos simplesmente apoiados superam o valor de 15% em quase todas as situações; ao passo que a deformação plástica máxima nos casos engastados é igual a 3.31%.

As deformações plásticas na casca cilíndrica são quase nulas ao longo de toda sua área para a condição de contorno simplesmente apoiada das extremidades. A distribuição das

deformações plásticas nas cavernas apresenta, também, a inexistência de deformações plásticas, salvo a região das extremidades onde pode ser visualizado uma excessiva concentração de esforço que leva aos valores apresentados na Tabela 5-2. Para o caso engastado, a casca cilíndrica apresenta deformações plásticas da ordem de 2.31% e 0.762% para as deformações circunferenciais e longitudinais, respectivamente. As cavernas dos modelos engastados possuem a mesma distribuição das deformações plásticas, em termos de ordem de grandeza, das aquelas verificadas na casca cilíndrica. Entretanto, igualmente como o que ocorre para os casos simplesmente apoiados, a região das extremidades apresenta um aumento abrupto dos valores das deformações plásticas, embora sejam, em termos absolutos, menores do que as observadas para os painéis simplesmente apoiados. As grandes deformações plásticas verificadas nos casos simplesmente apoiados se devem às excessivas rotações ao redor do eixo da extremidade longitudinal do painel.

5.2 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DO ÂNGULO DE ABERTURA

O estudo paramétrico para investigar a influência do ângulo θ nas pressões de colapso P_c e P_{co} é composto do mesmo conjunto de informações apresentadas na seção anterior. Os modelos têm em comum a relação $L_f/L_b=1/6$. As curvas apresentadas na Figura 5-19 e Figura 5-20 exibem o carregamento P adimensionalizado por P_c em função de u/a para diversos valores de θ .

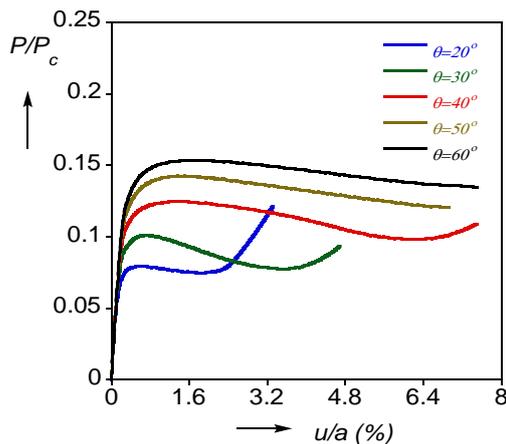


Figura 5-19 Solução elastoplástica para diferentes valores θ (engastados).

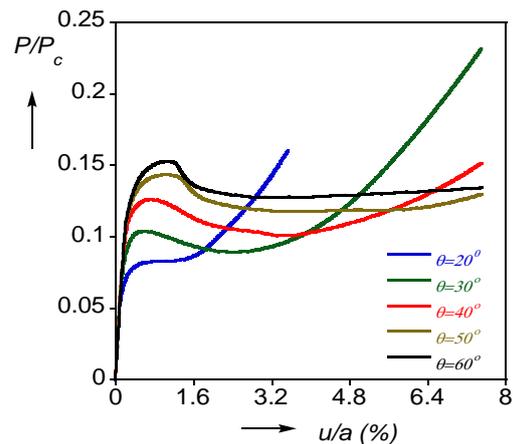


Figura 5-20 Solução elastoplástica para diferentes valores θ (simplesmente apoiados).

O conjunto de figuras compreendido entre a Figura 5-21e a Figura 5-40 reproduz o módulo de flambagem linear elástica de modelos engastados e simplesmente apoiados para diversos ângulos de abertura θ .

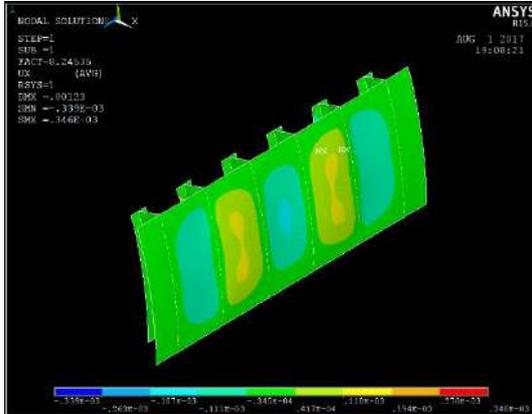


Figura 5-21 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $\theta=20^\circ$.

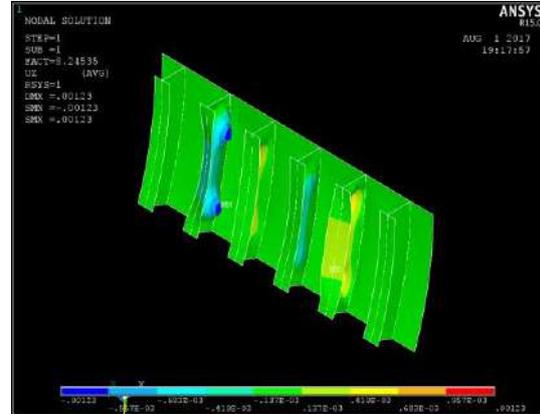


Figura 5-22 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $\theta=20^\circ$.

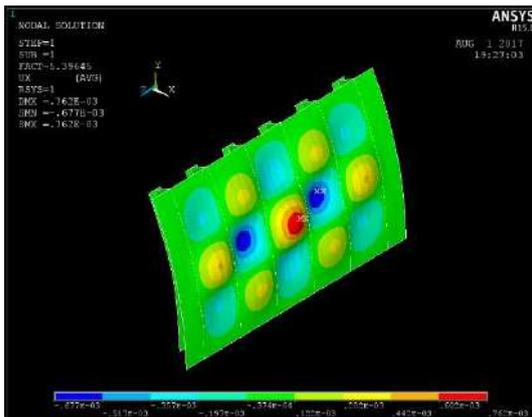


Figura 5-23 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $\theta=30^\circ$.

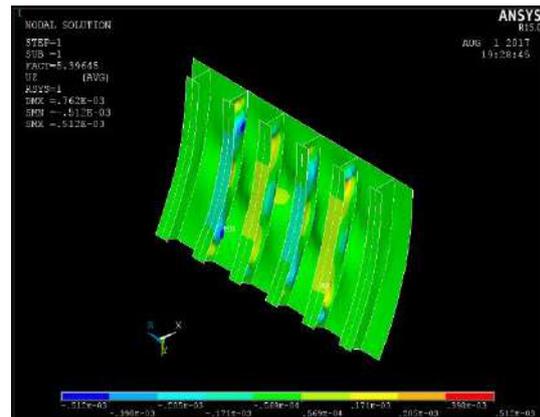


Figura 5-24 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $\theta=30^\circ$.

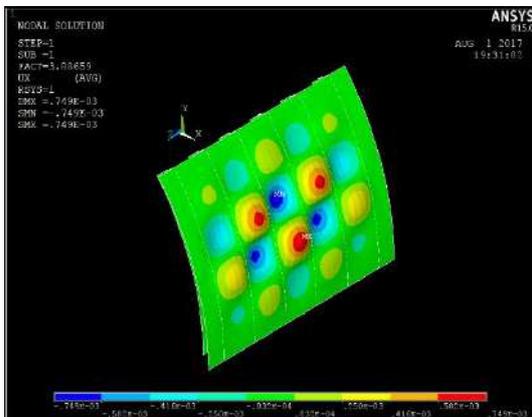


Figura 5-25 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $\theta=40^\circ$.

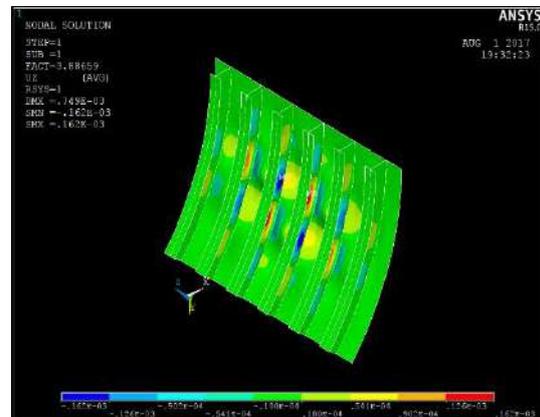


Figura 5-26 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $\theta=40^\circ$.

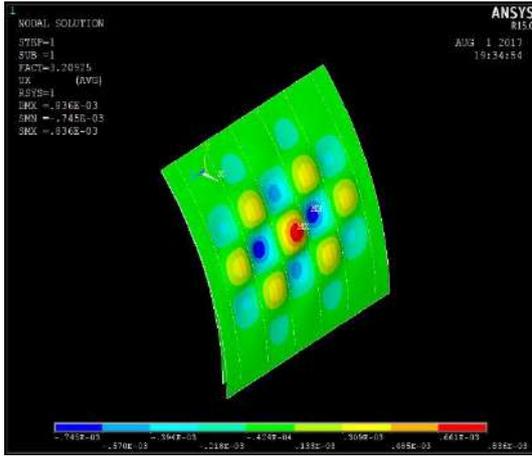


Figura 5-27 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $\theta=50^\circ$.

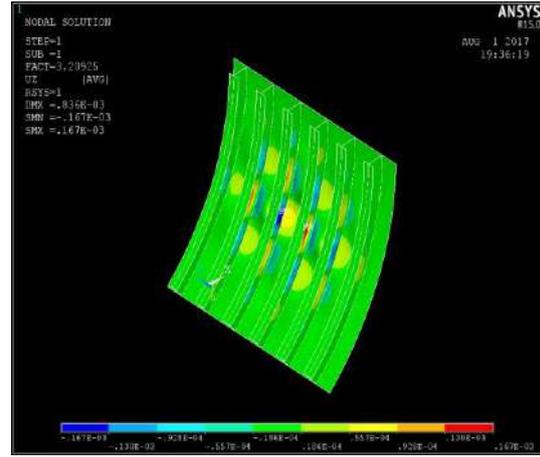


Figura 5-28 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $\theta=50^\circ$.

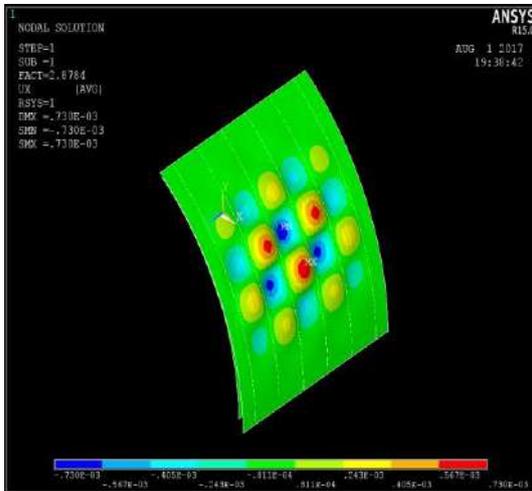


Figura 5-29 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel engastado com $\theta=60^\circ$.

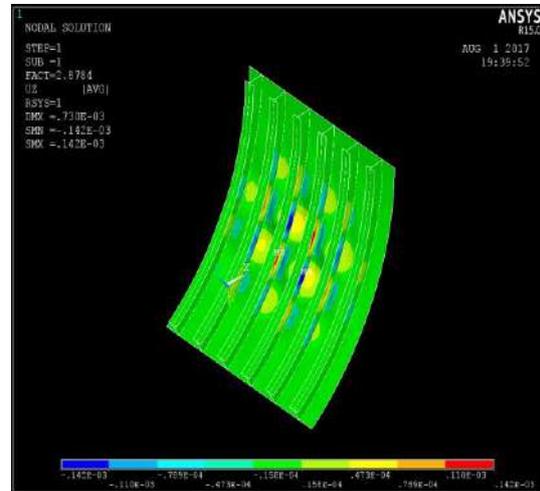


Figura 5-30 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel engastado com $\theta=60^\circ$.

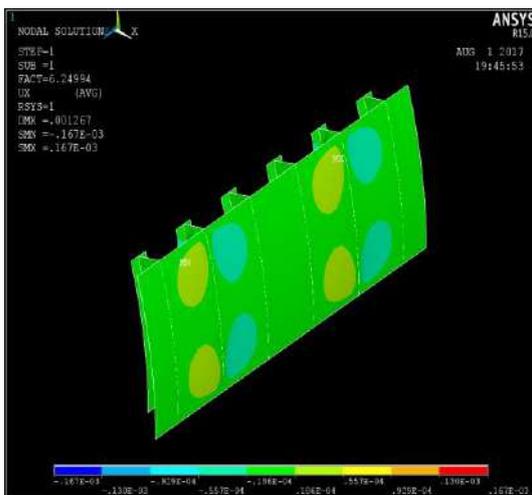


Figura 5-31 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $\theta=20^\circ$.

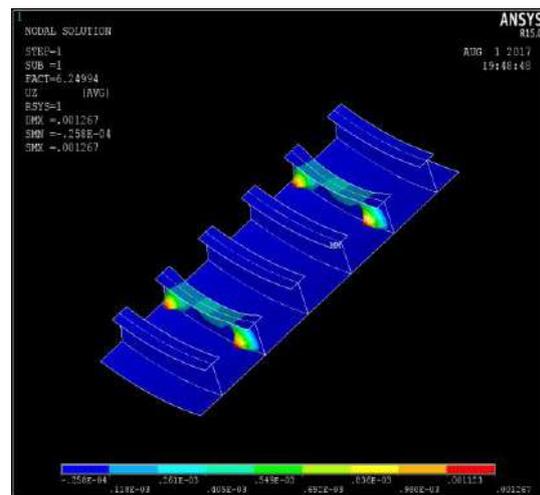


Figura 5-32 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $\theta=20^\circ$.

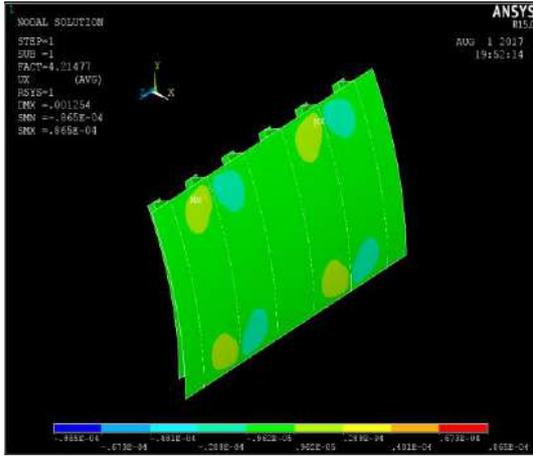


Figura 5-33 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $\theta=30^\circ$.

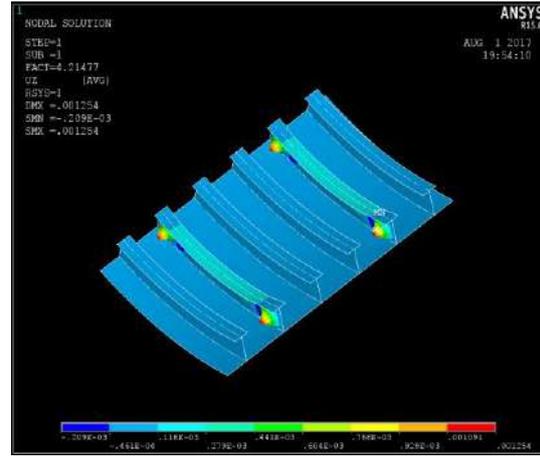


Figura 5-34 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $\theta=30^\circ$.

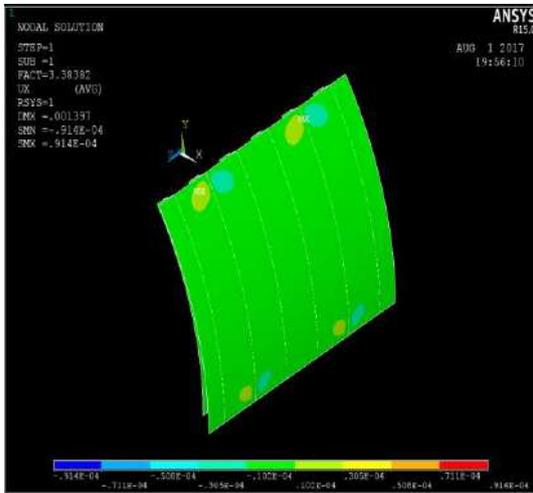


Figura 5-35 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $\theta=40^\circ$.

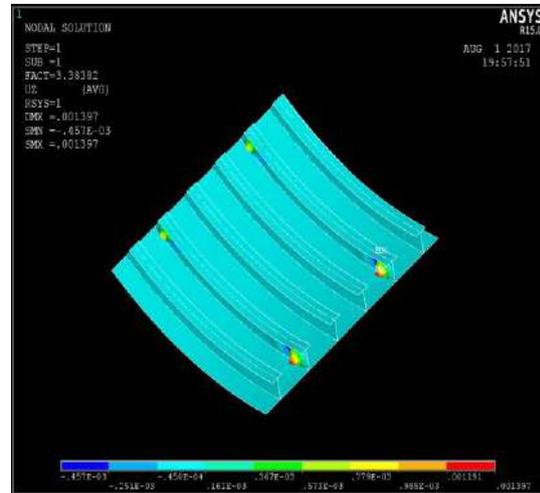


Figura 5-36 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $\theta=40^\circ$.

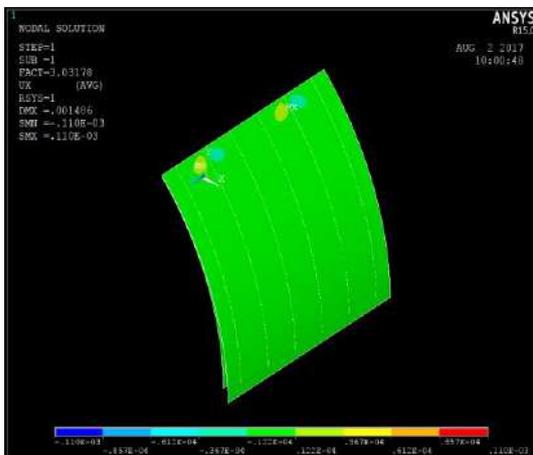


Figura 5-37 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $\theta=50^\circ$.

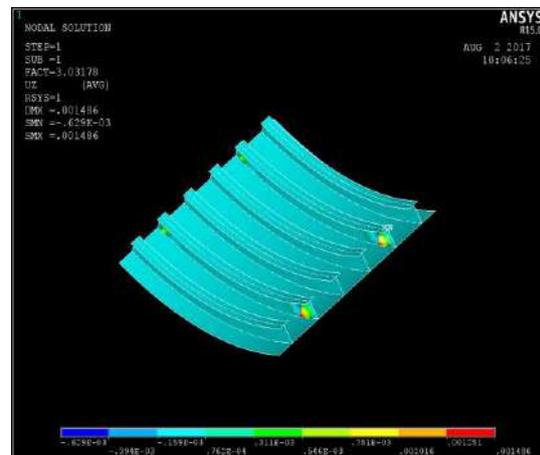


Figura 5-38 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $\theta=50^\circ$.

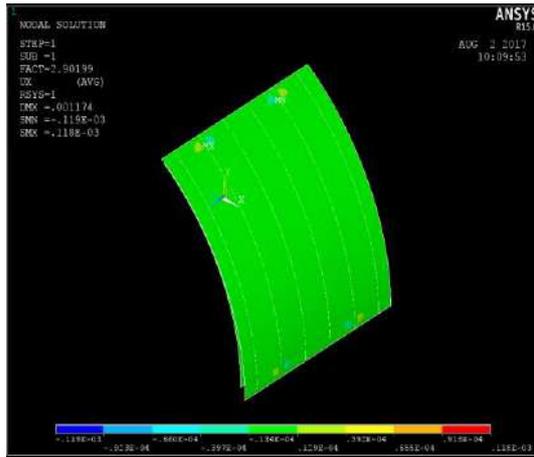


Figura 5-39 Flambagem linear (deslocamento radial) em painel simplesmente apoiado com $\theta=60^\circ$.

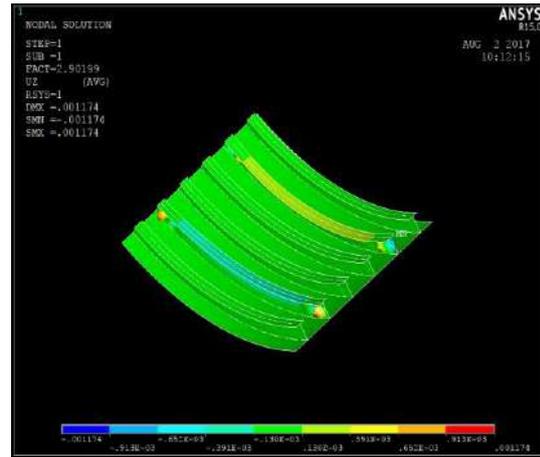


Figura 5-40 Flambagem linear (deslocamento longitudinal) em painel simplesmente apoiado com $\theta=60^\circ$.

Tabela 5-3 - Valores de P_c , P_{co} e adimensionais.

θ	Painéis engastados					Painéis simplesmente suportados				
	20°	30°	40°	50°	60°	20°	30°	40°	50°	60°
P_c (MPa)	82.45	53.96	38.86	32.09	28.78	62.49	42.15	33.83	30.32	29.02
P_{co} (MPa)	6.53	5.45	4.83	4.56	4.41	-	4.36	4.26	4.34	4.43
P_{co}/P_c	0.079	0.101	0.124	0.142	0.153	-	0.103	0.126	0.143	0.153
$ u/a _{P_{co}/P_c}$ (%)	0.606	0.718	1.365	1.446	1.711	-	0.599	0.724	1.05	1.064

De acordo com a Tabela 5-3, para os modelos engastados, o aumento de θ leva a redução de P_c e P_{co} , e o aumento da relação de P_{co}/P_c , ou seja, P_{co} se aproxima da pressão de flambagem linear elástica. Os modelos simplesmente apoiados apresentam o mesmo comportamento dos engastados com exceção ao aparecimento de um mínimo local de P_c para $\theta=40^\circ$. Os valores adimensionalizados de deslocamento radiais (u/a) no ponto limite para os modelos engastados são maiores do que aqueles verificados para os simplesmente apoiados conforme mostrado na Tabela 5-3. Devido à inexistência do ponto limite característico do fenômeno de snap-through, os valores de colapso referentes ao modelo simplesmente apoiado com $\theta=20^\circ$ estão suprimidos. As curvas elastoplásticas apresentadas na Figura 5-19 e Figura 5-20 indicam que, em ambas condições de contorno, a rigidez no pós-colapso diminui conforme θ aumenta, isto é, para o mesmo carregamento observam-se maiores deslocamentos após o colapso com o aumento de θ . A diferença entre a pressão de colapso linear elástica e elastoplástica para painéis com o mesmo ângulo de abertura θ , porém com condições de contorno distintas, diminui conforme θ aumenta, conforme descrito na Tabela 5-3. Isto revela que o aumento de θ ocasiona o decréscimo da influência das condições de extremidades no carregamento de colapso.

A flambagem linear dos modelos apresenta nuances conforme o parâmetro θ varia. O modelo engastado com $\theta=20^\circ$ diverge no que tange à forma de colapso linear quando comparado aos demais painéis com a mesma condição de contorno. Conforme pode ser visto na Figura 5-22, o aspecto de flambagem linear indica a predominância do colapso das cavernas em relação à instabilidade entre cavernas. Os demais modelos engastados apresentam a predominância do colapso entre cavernas sobre a instabilidade das cavernas, porém, cabe ressaltar que, igualmente ao verificado na análise paramétrica anterior, a solução linearizada de colapso possui deslocamentos longitudinais nas cavernas na mesma ordem de grandeza dos deslocamentos radiais entre cavernas. Ao contrário da análise paramétrica fundamentada em L_f/L_b , o número de lóbulos circunferenciais n ao longo da casca cilíndrica e das cavernas demonstra uma certa tendência ao aumento conforme o parâmetro θ se eleva. O painel com $\theta=30^\circ$ tem o seu colapso linear associado a $n=1.5$ (Figura 5-23), enquanto que os modelos com $\theta=40^\circ$ e 50° (Figura 5-25 e Figura 5-27) apresentam $n=2$ e 2.5 , respectivamente. A solução linearizada de colapso para o painel com $\theta=60^\circ$ se apresenta visualmente com $n=2$ (Figura 5-29), porém os lóbulos não alcançam as extremidades devido ao efeito de atenuação de amplitude causado pela condição de contorno imposta. Este espaço sugere que a tendência é a formação de um novo lóbulo circunferencial em caso de um ângulo de abertura ligeiramente maior que 60° .

Igualmente ao verificado para a parametrização constituída em função de L_f/L_b , os modelos simplesmente apoiados apresentam a predominância do colapso das cavernas na região próxima à extremidade longitudinal com formação de lóbulos circunferenciais igualmente concentrados. O caso do painel com $\theta=20^\circ$ apresenta o mesmo colapso das cavernas descrito anteriormente para os demais, porém a definição do número de lóbulos permanece indefinida conforme pode ser visto na Figura 5-22. A Tabela 5-4 detalha os valores máximos para as deformações elásticas e plásticas na direção circunferencial e longitudinal no limiar do colapso para os diversos valores de θ .

Tabela 5-4 - Deformações elásticas e plásticas máximas observadas no limiar do colapso.

θ	Painéis engastados					Painéis simplesmente apoiados				
	20°	30°	40°	50°	60°	20°	30°	40°	50°	60°
$ \varepsilon_y^{el} _{max}(\%)$	0.249	0.247	0.251	0.246	0.251	-	0.297	0.314	0.315	0.314
$ \varepsilon_y^p _{max}(\%)$	2.80	2.46	3.29	2.86	2.86	-	11.32	>15	>15	>15
$ \varepsilon_z^{el} _{max}(\%)$	0.178	0.183	0.228	0.232	0.233	-	0.161	0.181	0.201	0.204
$ \varepsilon_z^p _{max}(\%)$	2.08	1.967	2.42	1.861	1.892	-	8.93	14.09	>15	>15

As deformações plásticas circunferenciais e longitudinais no ponto limite de colapso são apresentadas no intervalo de figuras entre a Figura 5-41 e a Figura 5-48.

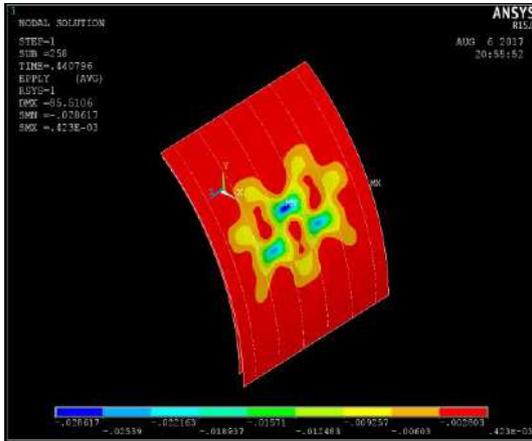


Figura 5-41 Deformação plástica circunferencial na casca cilíndrica - $\theta=60^\circ$ (engastado).

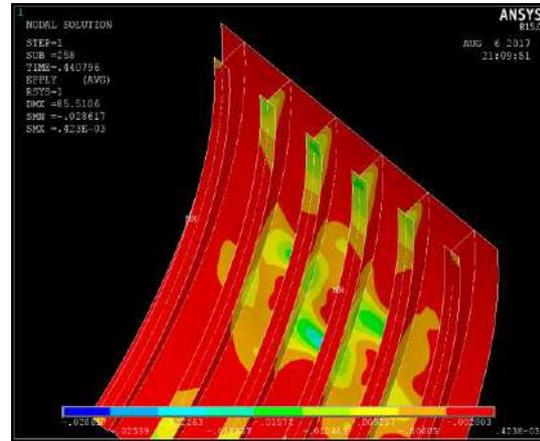


Figura 5-42 Deformação plástica circunferencial nas cavernas - $\theta=60^\circ$ (engastado).

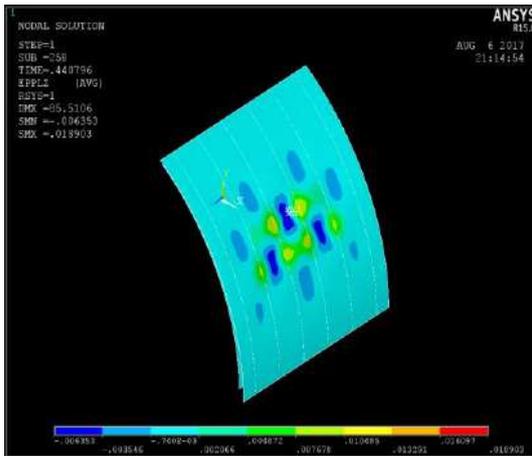


Figura 5-43 Deformação plástica longitudinal na casca cilíndrica - $\theta=60^\circ$ (engastado).

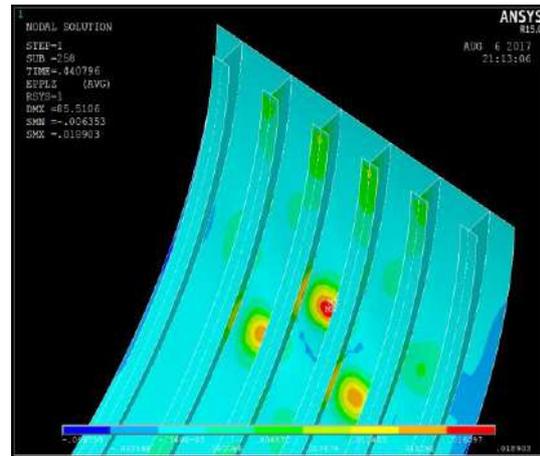


Figura 5-44 Deformação plástica longitudinal nas cavernas - $\theta=60^\circ$ (engastado).

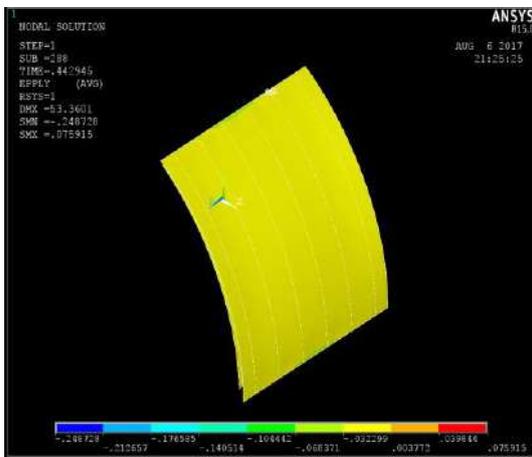


Figura 5-45 Deformação plástica circunferencial na casca cilíndrica - $\theta=60^\circ$ (simplesmente apoiado).

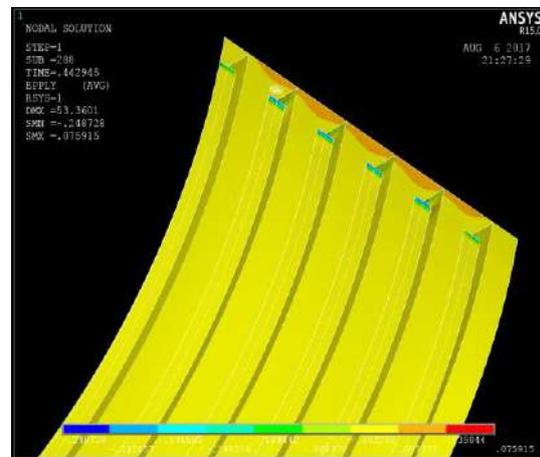


Figura 5-46 Deformação plástica circunferencial nas cavernas - $\theta=60^\circ$ (simplesmente apoiado).

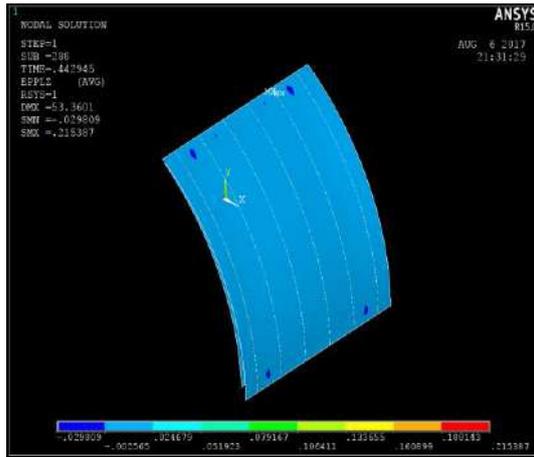


Figura 5-47 Deformação plástica longitudinal na casca cilíndrica - $\theta=60^\circ$ (simplesmente apoiado).

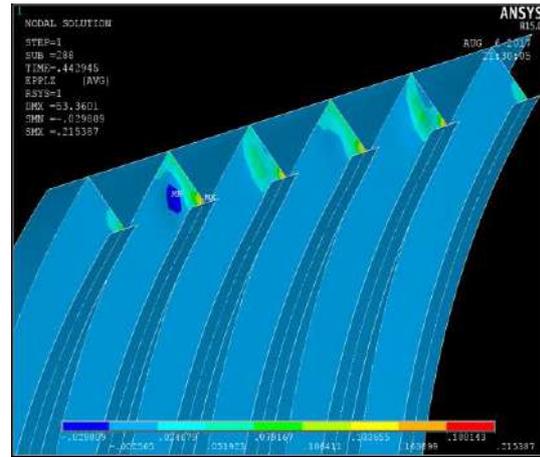


Figura 5-48 Deformação plástica longitudinal nas cavernas - $\theta=60^\circ$ (simplesmente apoiado).

A Tabela 5-4 mostra que todos os modelos experimentam a região plástica do material no limiar do colapso. Assim como verificado para a análise paramétrica baseada em L_f/L_b , os modelos simplesmente apoiados observam as máximas deformações plásticas maiores do que as máximas reportadas nos casos engastados. O sentido circunferencial possui as máximas deformações plásticas superiores às deformações no sentido longitudinal em ambas condições de contorno.

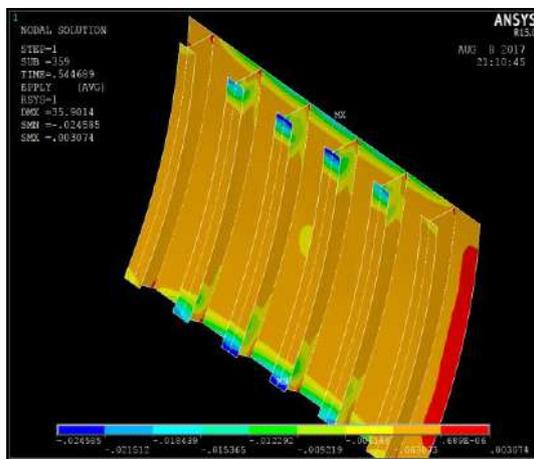


Figura 5-49 Deformação plástica circunferencial - $\theta=30^\circ$ (engastado).

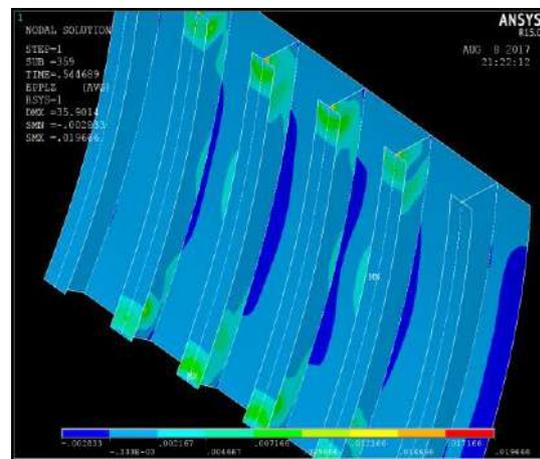


Figura 5-50 Deformação plástica longitudinal - $\theta=30^\circ$ (engastado).

Similarmente ao verificado para a investigação paramétrica em função de L_f/L_b , a magnitude das deformações plásticas máximas para os modelos simplesmente apoiados se apresenta significativamente maior do que a magnitude das deformações nos casos simplesmente apoiados. A comparação entre os resultados revela que os painéis com $\theta=40^\circ, 60^\circ$ e, adicionalmente, as deformações plásticas para $\theta=30^\circ$ (Figura 5-49 e Figura

5-50) tendem a concentrar os esforços nas extremidades das cavernas (contorno longitudinal) a medida que θ diminui.

5.3 ANÁLISE DA INFLUÊNCIA DAS IMPERFEIÇÕES

As imperfeições assumidas nas simulações numéricas para a obtenção do carregamento crítico resultaram da forma colapsada decorrente da análise linear elástica. A análise da influência das imperfeições foi baseada no estabelecimento de amplitudes máximas na casca cilíndrica em função da combinação do raio a com o parâmetro de imperfeição μ . As curvas elastoplásticas dos casos engastados e simplesmente apoiados são apresentados na Figura 5-51 e na Figura 5-52, respectivamente. A Tabela 5-5 expõe os valores das pressões de colapso de P_c e P_{co} , assim como as relações P_{co}/P_c e u/a , em função da alteração do parâmetro μ .

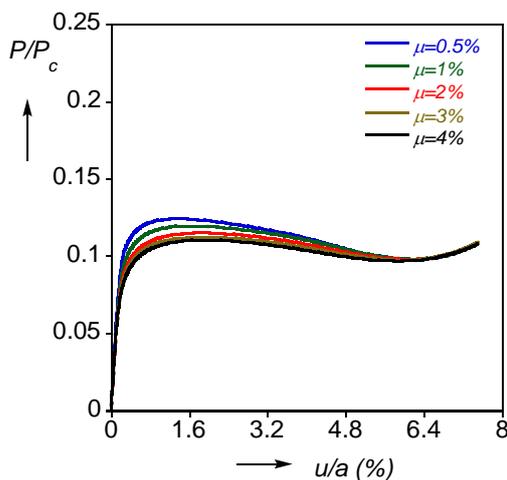


Figura 5-51 Solução elastoplástica para diferentes valores μ (painéis engastados).

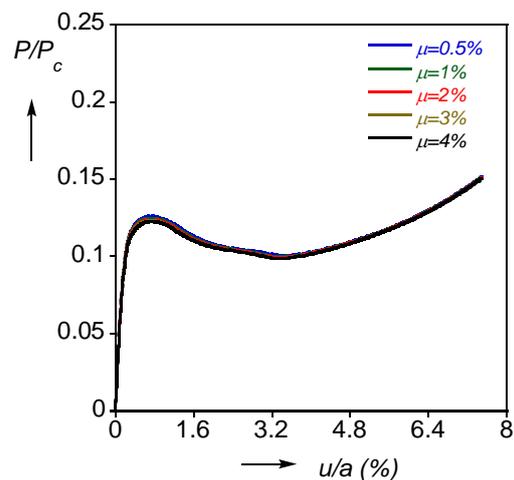


Figura 5-52 Solução elastoplástica para diferentes valores μ (painéis simplesmente apoiados).

Tabela 5-5 - Valores de P_c , P_{co} e adimensionais.

μ (%)	Painéis engastados ($P_c=38.87$ MPa)					Painéis simplesmente apoiados ($P_c=33.84$ MPa)				
	0.5	1	2	3	4	0.5	1	2	3	4
P_{co} (MPa)	4.83	4.65	4.47	4.37	4.29	4.26	4.22	4.18	4.16	4.14
P_{co}/P_c	0.124	0.119	0.115	0.112	0.111	0.126	0.125	0.124	0.123	0.122
$ u/a _{P_{co}/P_c}$ (%)	1.365	1.631	1.849	1.909	1.935	0.724	0.708	0.738	0.733	0.770

O comportamento de depreciação da pressão de colapso linear elástica e elastoplástica consagrada na literatura também é verificada nesta análise paramétrica, isto é, a capacidade de resistir ao colapso decresce conforme as amplitudes das imperfeições aumentam. Similarmente, a razão P_{co}/P_c diminui com o aumento do fator de imperfeição

μ , o que revela a coerência dos resultados pois o aumento das imperfeições torna a estrutura mais distante da geometria perfeita. Por intermédio dos valores numéricos apresentados na Tabela 5-5, pode ser verificado que, para os painéis engastados, os deslocamentos adimensionalizados no limiar do colapso aumentam a medida que o parâmetro μ de imperfeição caminha para valores maiores. As curvas apresentadas pela Figura 5-51 e Figura 5-52 apontam que os modelos engastados são mais sensíveis às imperfeições do que os simplesmente apoiados no que tange a magnitude do carregamento no ponto limite, assim como a ausência da influência das imperfeições no caminho de solução da região estável pós-colapso.

Tabela 5-6 - Deformações elásticas e plásticas máximas observadas no limiar do colapso.

μ	Painéis engastados					Painéis simplesmente apoiados				
	0.5%	1%	2%	3%	4%	0.5%	1%	2%	3%	4%
$ \varepsilon_y^{el} _{max}(\%)$	0.251	0.257	0.263	0.266	0.267	0.314	0.312	0.314	0.313	0.315
$ \varepsilon_y^p _{max}(\%)$	3.29	4.09	5.19	5.59	5.68	>15	>15	>15	>15	>15
$ \varepsilon_z^{el} _{max}(\%)$	0.228	0.229	0.227	0.217	0.209	0.180	0.180	0.181	0.181	0.182
$ \varepsilon_z^p _{max}(\%)$	2.42	2.94	3.63	3.92	4.11	14.01	13.49	13.92	13.70	14.29

As deformações plásticas verificadas no ponto limite são caracteristicamente análogas aos painéis investigados anteriormente, isto é, as elevadas deformações plásticas concentradas nas extremidades e as máximas deformações plásticas consideravelmente maiores para os casos simplesmente apoiados.

6 ESTUDO DE CASOS

O estudo de casos intenciona apresentar resultados numéricos de painéis reforçados sob carregamento de pressão externa uniforme que representam estruturas sob carregamento hidrostático encontradas em situações reais. Os painéis são identificados como *casos*, e divididos em *caso A*, *caso B* e *caso C*. Cada caso está associado a um cilindro reforçado distinto, no total de dois identificados como *cilindro reforçado 1* e *cilindro reforçado 2*. Os cilindros reforçados representam o casco resistente à pressão hidrostática, e são as estruturas que estabelecem os seguintes parâmetros geométricos dos casos em estudo: espessura h e raio a da casca cilíndrica, geometria das cavernas, representada por I_c , e espaçamento entre cavernas L_f . Em casos reais, a geometria dos painéis reforçados segue o escantilhamento geral do casco resistente envolvente, o que confere aderência à realidade da relação geométrica entre os casos e o cilindro reforçado associado estabelecido anteriormente.

A diferença entre os casos está no comprimento total L_b , cada caso possui, portanto, uma relação L_f/L_b distinta conforme descrito na Tabela 6-1.

Tabela 6-1 Relação L_f/L_b dos casos.

	L_f/L_b
<i>Caso A</i>	1/4
<i>Caso B</i>	1/5
<i>Caso C</i>	1/6

O ângulo de abertura dos casos associados ao cilindro reforçado 1 é igual a 40°, enquanto que os casos comparados com cilindro reforçado 2 possuem ângulo de abertura igual 60°. O estudo contempla duas condições de contorno: extremidades engastadas e simplesmente apoiadas (ou suportadas). A curva tensão-deformação plástica e as propriedades mecânicas lineares utilizadas para calibrar as equações constitutivas do modelo numérico é exibida na Figura 6-1. Em comparação com as curvas tensão-deformação utilizadas nas fases anteriores deste estudo, percebe-se um aumento significativo da tensão de escoamento característico de aços de alta resistência. Estes tipos de aço dispõem de excelente soldabilidade associada com outros processos de fabricação, tais como usinagem, e são usualmente utilizados em estruturas concebidas para operação sob condição de carregamento hidrostático.

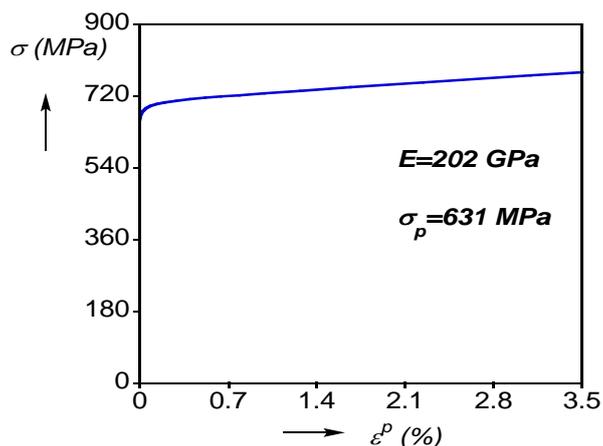


Figura 6-1 Curva tensão-deformação de aço de alta resistência utilizada nos modelos numéricos.

Os desvios de circularidades inseridos numericamente nos casos são previamente obtidos a partir da solução linearizada do modelo perfeito, com aplicação de um desvio máximo de 0.4% do raio médio da casca cilíndrica. O processo numérico de obtenção da solução linearizada de colapso decorre da aplicação do método de Lanczos. Os resultados oriundos da solução linearizada é externada nesta seção por meio de figuras que indicam o aspecto preferencial de flambagem. O comportamento elastoplástico dos casos são representados por meio de curvas que expressam o comportamento das razões P/P_c e P/P_{co} em função do adimensional de deslocamento máximo radial u/a . As pressões de colapso elastoplásticas dos cilindros reforçados são identificadas com numeral identificador, isto é, P_{co1} é a pressão de colapso elastoplástica do cilindro reforçado 1, e, P_{co2} , do cilindro reforçado 2.

Os resultados referentes ao ponto limite, onde ocorre o fenômeno de snap-through, são apresentados em tabelas divididas de acordo com o caso e a condição de contorno aplicada. As tabelas apresentam, também, as deformações plásticas máximas observadas no limiar do colapso para cada caso de um determinado cilindro reforçado para diferentes tipos de condições contorno. As distribuições das deformações plásticas são exibidas em figuras para permitir a verificação de regiões críticas de ocorrências das máximas deformações plásticas.

Esta seção divide-se em 3 subseções. A primeira subseção transcorre a respeito da correlação da geometria dos cilindros reforçados com as formulações consagradas para obtenção da pressão de colapso linear, e expõe resultados numéricos decorrentes de simulações totalmente linearizadas e elastoplásticas. As demais subseções são dedicadas

à obtenção e discussão dos resultados numéricos para cada caso de um determinado cilindro reforçado. A simulação numérica dos cilindros reforçados estabelece dois planos de simetria que reduz o modelo numérico a um arco de 90° e com metade do comprimento nominal. Os casos estudados são simulados por inteiro, pois tanto as simulações elastoplásticas quanto as linearizadas não apresentam simetria nos planos principais.

6.1 CILINDROS REFORÇADOS

A expressão proposta por von Mises e modificada por Kendrick para a pressão que causa a instabilidade entre cavernas P_{m1} , minimizada em função de n ,

$$P_{m1} = \frac{Eh}{a} \left[n^2 - 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ \left[n^2 \left(\frac{L}{\pi a} \right)^2 + 1 \right]^{-2} + \frac{h^2}{12a^2(1-\mu^2)} \left[n^2 - 1 + \left(\frac{\pi a}{L} \right)^2 \right]^2 \right\}, \quad 6.1$$

assume que o colapso gera uma forma cujo aspecto longitudinal apresenta uma meia onda senoidal. P_{m1} possui um certo grau de conservadorismo, pois as cavernas são consideradas simplesmente apoiadas na casca cilíndrica.

A pressão P_N que leva ao colapso global de cascas cilíndricas reforçadas proposta por Bryant, também minimizada em função de n ,

$$P_N = \frac{Eh\lambda^4}{a} \left[n^2 - 1 + \frac{\lambda^2}{2} \right]^{-1} [n^2 + \lambda^2]^{-2} + (n^2 - 1)E\psi, \quad 6.2$$

onde $\psi = EI_c/aa_g^2L_f$ e $\lambda = \pi a/L_B$, expressa de forma distinta a contribuição para a rigidez da casca cilíndrica (1° termo) e das cavernas (2° termo). Dentro do 1° termo, a razão a/h e λ são os parâmetros geométrico de interesse, assim como o parâmetro geométrico de rigidez das cavernas ψ . As geometrias dos cilindros reforçados utilizados nas simulações numéricas para efeitos de comparação com os painéis possuem parâmetros geométricos conforme a Tabela 6-2.

Tabela 6-2 Parâmetros geométricos dos cilindros reforçados.

Cilindro reforçado 1			Cilindro reforçado 2		
a/h	λ	$\psi_{n=2}(\%)$	a/h	λ	$\psi_{n=2}(\%)$
116.28	0.219	0.0049	103.33	0.233	0.0054

A análise da Tabela 6-2 não permite diretamente estabelecer a estrutura com maior rigidez ao colapso, pois o parâmetro λ apresenta-se maior para o cilindro 2, o que indica maior rigidez no sentido longitudinal quando comparado ao cilindro 1. Os demais parâmetros apontam, para o cilindro 2, a maior capacidade de resistir aos esforços circunferenciais e maior contribuição das cavernas na rigidez da estrutura. A Tabela 6-3 apresenta as pressões de colapso utilizando as formulações clássicas (referências externas) P_{m1} , P_N , P_{c5} e P_{ci} , e, adicionalmente, os resultados numericamente obtidos.

Tabela 6-3 Pressão de colapso dos cilindros reforçados.

Colapso cilindro reforçado 1 (MPa)						Colapso cilindro reforçado 2					
Referências externas			Simulação numérica (ANSYS®)			Referências externas			Simulação numérica (ANSYS®)		
P_{m1}	P_N	P_{c5}	P_{ci}	P_c	P_{co}	P_{m1}	P_N	P_{c5}	P_{ci}	P_c	P_{co}
14.28	9.99	20.91	7.14	6.89	4.95	13.62	10.98	16.36	6.81	7.10	5.11

P_{c5} é a pressão que causa o escoamento da casca cilíndrica na superfície média entre cavernas. P_{ci} é a pressão de colapso entre cavernas estimada, para $P_{m1} < P_{c5}$, a partir da seguinte relação: $P_{ci}/P_{c5} = P_{m1}/2P_{c5}$. Os resultados apresentados na Tabela 6-3 indicam o colapso global para ambos cilindros reforçados, assim como os maiores valores de colapso para o cilindro reforçado 2. Os aspectos de flambagem linear obtidos numericamente para os cilindros reforçados 1 e 2 são apresentados na Figura 6-2 e Figura 6-3, respectivamente. Ambos cilindros reforçados apresentam dois lóbulos no sentido circunferencial e uma meia onda longitudinal na forma colapsada.

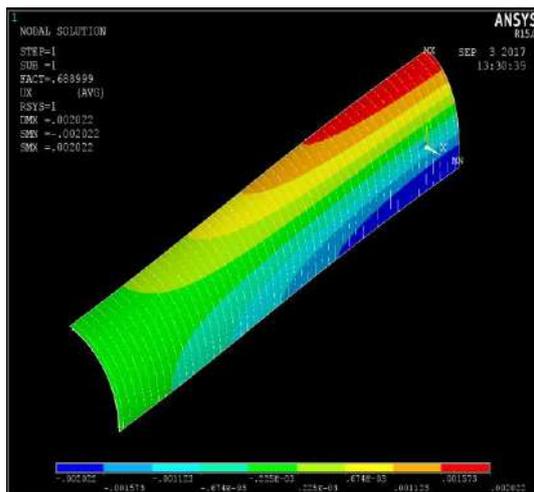


Figura 6-2 Flambagem linear do cilindro reforçado 1.

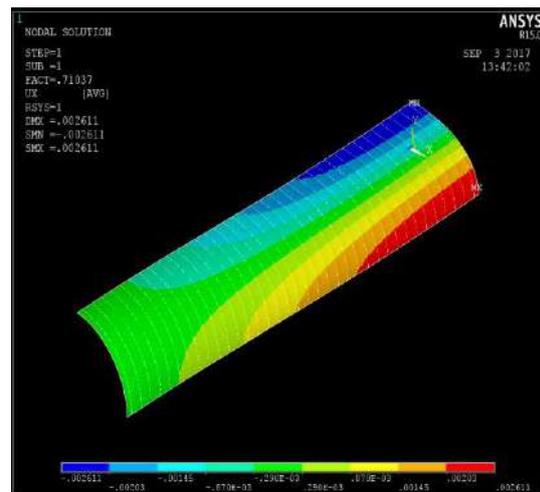


Figura 6-3 Flambagem linear do cilindro reforçado 2.

6.2 CASOS DO CILINDRO REFORÇADO 1

Os casos A, B e C do cilindro reforçado 1 possuem as formas de colapso linear conforme o grupo de figuras compreendido entre a Figura 6-4 e a Figura 6-15. As simulações numéricas mostram que as condições de contorno são importantes na definição do modo de colapso. Os casos engastados apresentam instabilidade da casca cilíndrica entre cavernas, enquanto que os casos simplesmente apoiados exibem instabilidade nas cavernas nas adjacências da extremidade longitudinal. Os casos simplesmente apoiados possuem pressões de colapso linear menores do que aquelas observadas para os casos engastados. Os resultados obtidos numericamente mostram que o aumento do comprimento favorece a instabilidade tanto nos painéis engastados quanto nos painéis simplesmente apoiados.

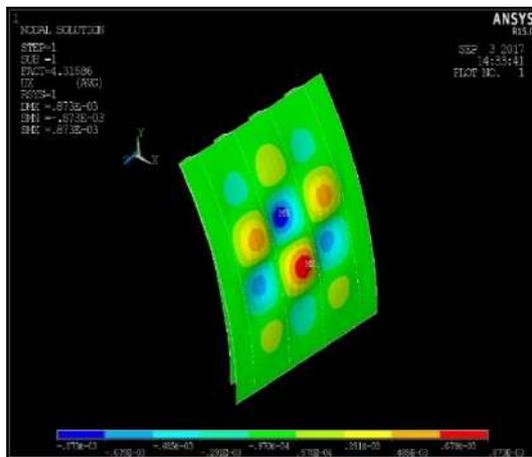


Figura 6-4 Caso A engastado visto a partir casca da cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).

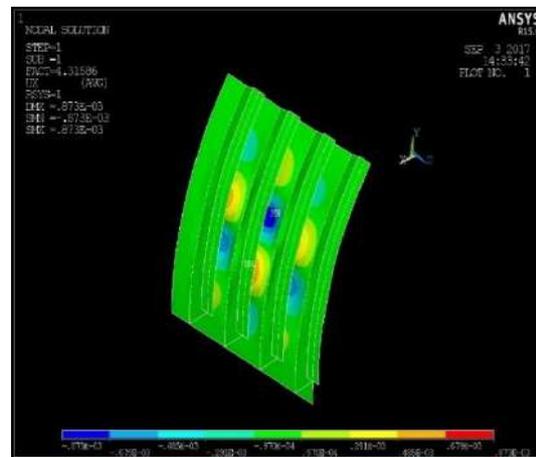


Figura 6-5 Caso A engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).

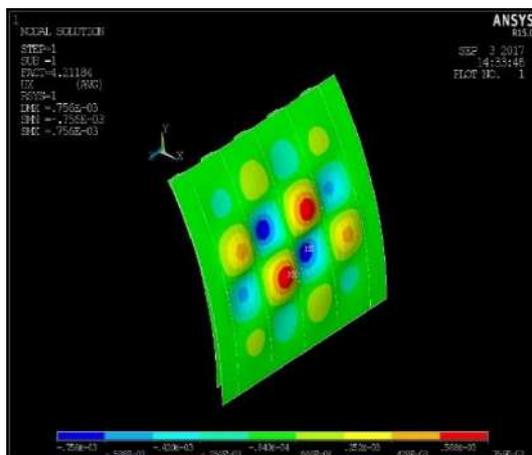


Figura 6-6 Caso B engastado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).

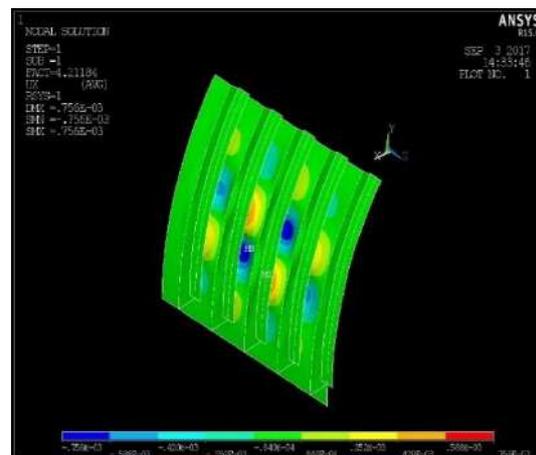


Figura 6-7 Caso B engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).

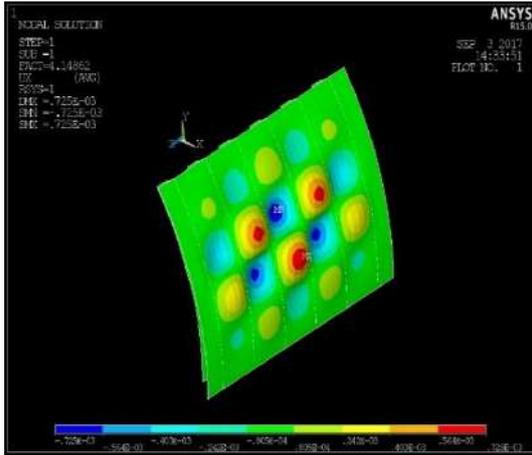


Figura 6-8 Caso C engastado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).

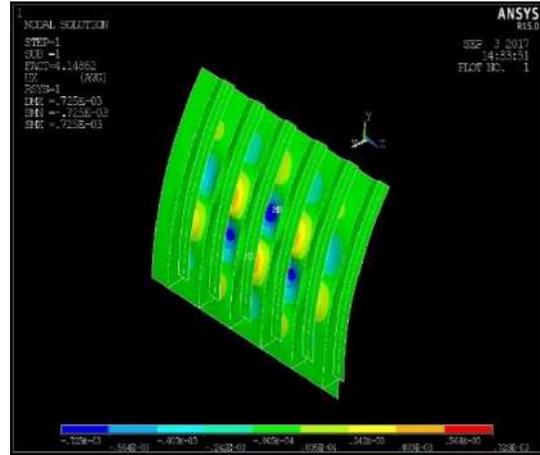


Figura 6-9 Caso C engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).

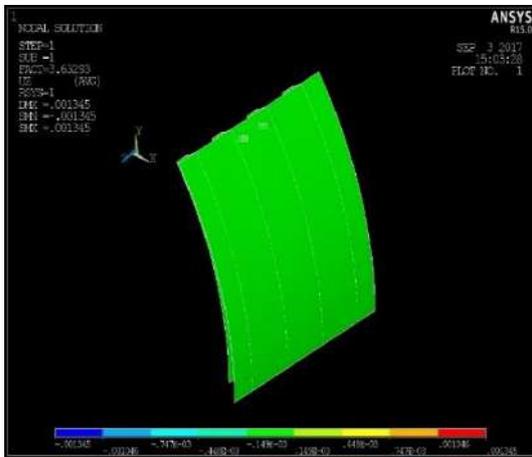


Figura 6-10 Caso A simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento longitudinal).

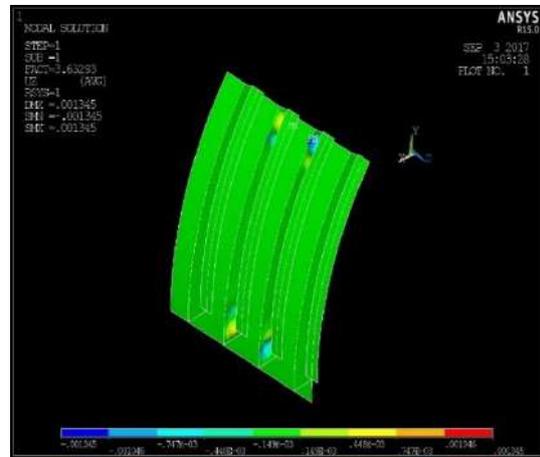


Figura 6-11 Caso A simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).

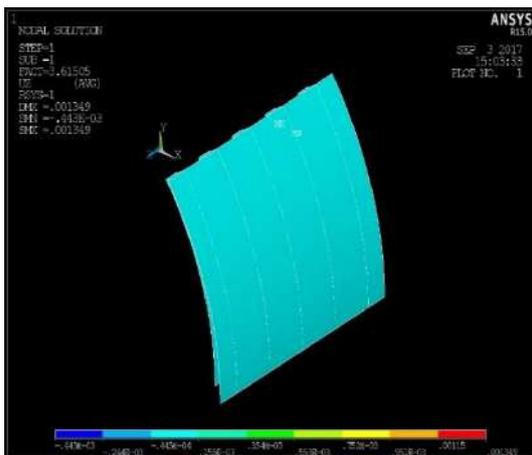


Figura 6-12 Caso B simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento longitudinal).

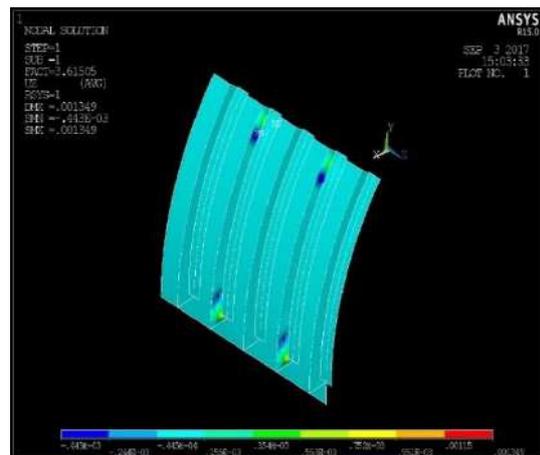


Figura 6-13 Caso B simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).

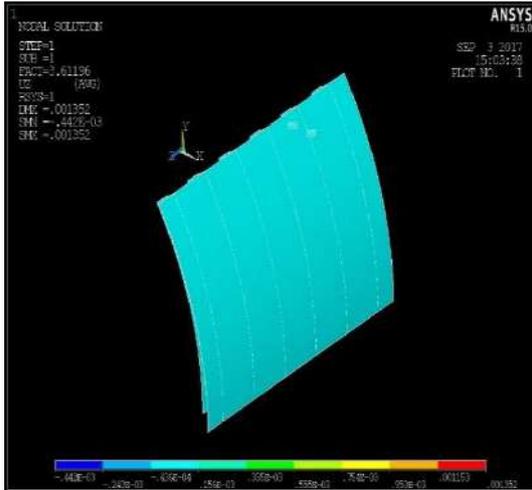


Figura 6-14 Caso C simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento longitudinal).

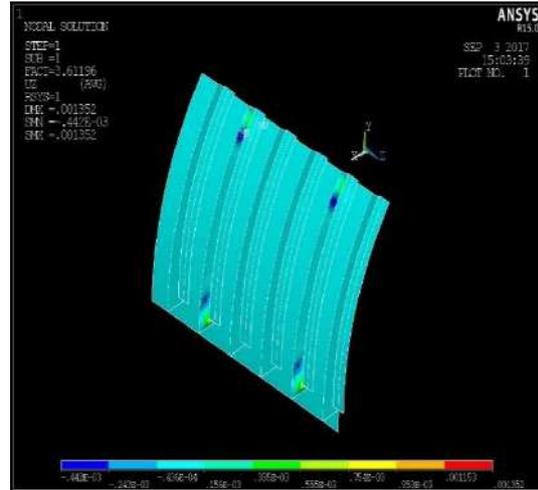


Figura 6-15 Caso C simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).

A relação P/P_c em função do adimensional u/a para os casos em estudo e do cilindro reforçado 1 são apresentados na Figura 6-16 e Figura 6-17. As curvas de equilíbrio elastoplásticas dos casos engastados e simplesmente apoiados apresentam diferenças reduzidas tanto no caminho de equilíbrio pré-colapso quanto na região pós-colapso. A pressão de colapso elastoplástica do cilindro reforçado P_{co1} é comparada ao equilíbrio elastoplástico dos casos em análise, e exibida na Figura 6-18 e Figura 6-19. Os casos engastados possuem a pressão de colapso elastoplástica mais distante de P_{co1} quando comparados aos casos simplesmente apoiados.

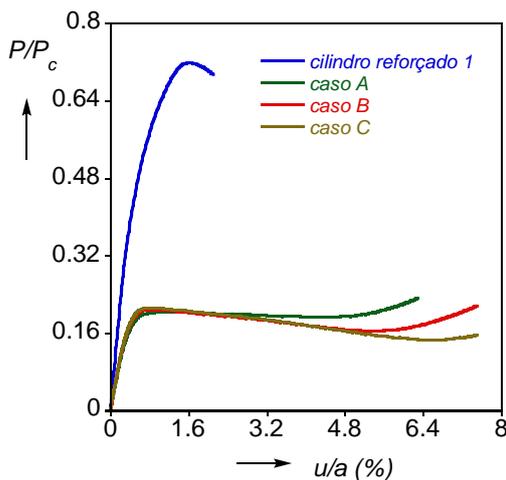


Figura 6-16 Comparação da relação P/P_c de casos engastados com cilindro reforçado 1.

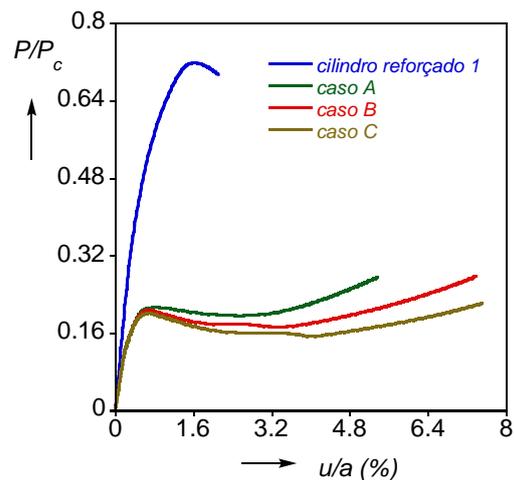


Figura 6-17 Comparação da relação P/P_c de casos simplesmente apoiados com cilindro reforçado 1.

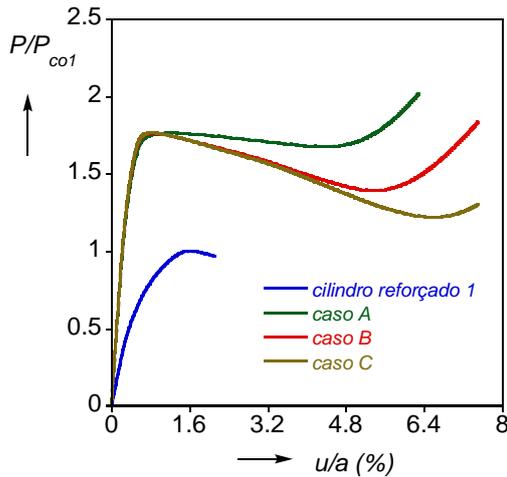


Figura 6-18 Comparação da relação p/P_{co1} de casos engastados com cilindro reforçado 1.

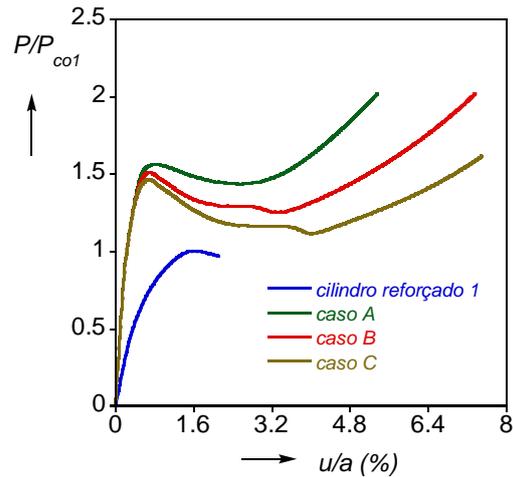


Figura 6-19 Comparação da relação p/P_{co1} de casos simplesmente apoiados com cilindro reforçado 1.

Os valores de P_c , P_{co} e demais adimensionais são exibidos na Tabela 6-4. Igualmente ao observado para as simulações linearizadas, o caminho de equilíbrio elastoplástico para os casos engastados levam a valores maiores de P_{co} em comparação com os valores de P_{co} para os casos simplesmente apoiados.

Tabela 6-4 Resultados numéricos para os casos em análise.

	Cilindro reforçado 1					
	Painéis engastados			Painéis simplesmente suportados		
	A	B	C	A	B	C
P_c (MPa)	43.16	42.12	41.48	36.33	36.15	36.12
P_{co} (MPa)	8.73	8.72	8.71	7.73	7.48	7.24
P_{co}/P_c	0.202	0.207	0.211	0.213	0.207	0.201
$ u/a _{P_{co}/P_c}$	1.228	0.849	0.692	0.823	0.694	0.691
P_{co}/P_{co1}	1.765	1.764	1.761	1.562	1.511	1.463
$ \varepsilon_x^p _{max}$ (%)	3.12	1.909	1.533	>15	>15	>15
$ \varepsilon_y^p _{max}$ (%)	3.91	2.90	2.31	>15	>15	>15
$ \varepsilon_z^p _{max}$ (%)	2.17	1.693	1.329	>15	>15	>15

Em ambas condições de contorno, e analogamente ao apresentado na análise paramétrica, os valores de P_{co} decresce a medida que o comprimento do painel aumenta. Para os casos engastados, a relação P_{co}/P_c aumenta conforme o comprimento dos painéis aumenta, ao passo que nos casos simplesmente apoiados o comportamento é invertido. Os deslocamentos adimensionais u/a no ponto limite das curvas elastoplásticas apresentam-se ligeiramente maiores para os casos engastados e decrescente conforme o comprimento dos painéis eleva-se. A relação P_{co}/P_{co1} dos casos simplesmente apoiados são menores do que aqueles obtidos para os casos engastados. As deformações plásticas obtidas para os casos simplesmente apoiados são muito maiores do que as deformações

verificadas para os casos engastados. Nos casos simplesmente apoiados, as deformações plásticas na direção radial e circunferencial estão em um patamar de magnitude acima das deformações plásticas verificadas na direção longitudinal. O quarteto de figuras compreendido entre a Figura 6-20 e a Figura 6-23 apresenta a distribuição das deformações plásticas obtidas numericamente para o caso B no limiar do colapso para ambas as condições de contorno. Os outros casos, no que tange a verificação das regiões de elevadas deformações plásticas, apresentam de forma geral as mesmas características do caso B.

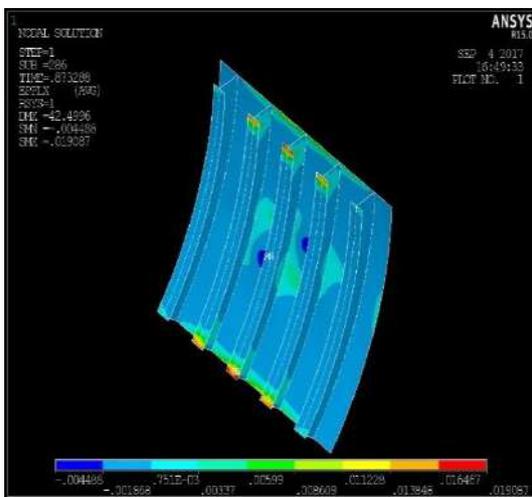


Figura 6-20 Deformação plástica radial para o caso B engastado.

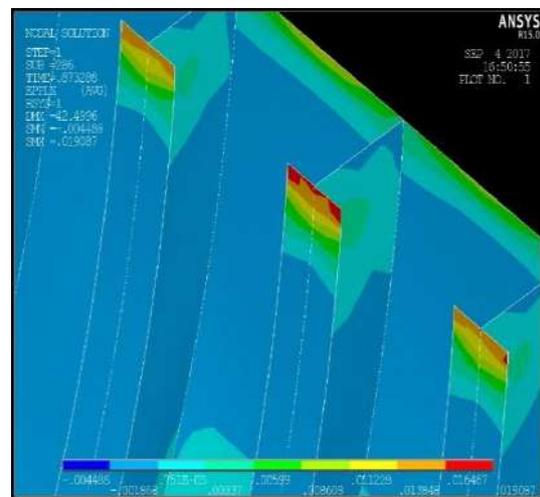


Figura 6-21 Deformação plástica radial para o caso B engastado (detalhe dos flanges e almas).

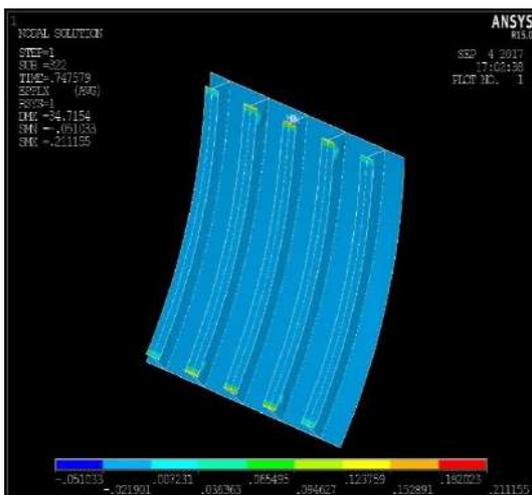


Figura 6-22 Deformação plástica radial para o caso B simplesmente apoiado.

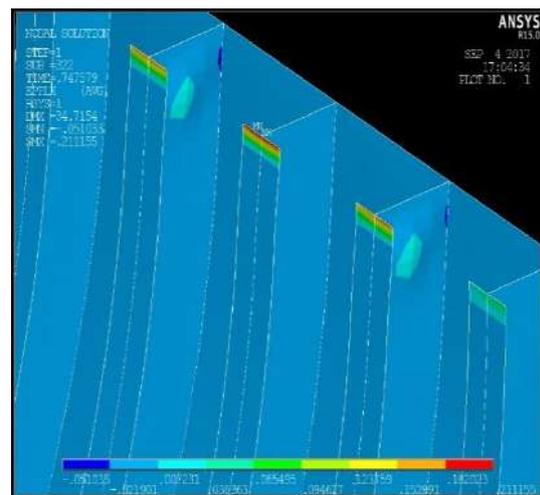


Figura 6-23 Deformação plástica longitudinal para o caso B simplesmente apoiado (detalhe dos flanges e almas).

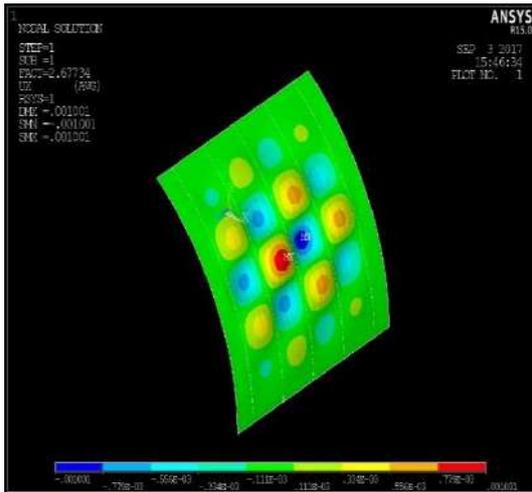


Figura 6-26 Caso B engastado visto a partir casca da cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).

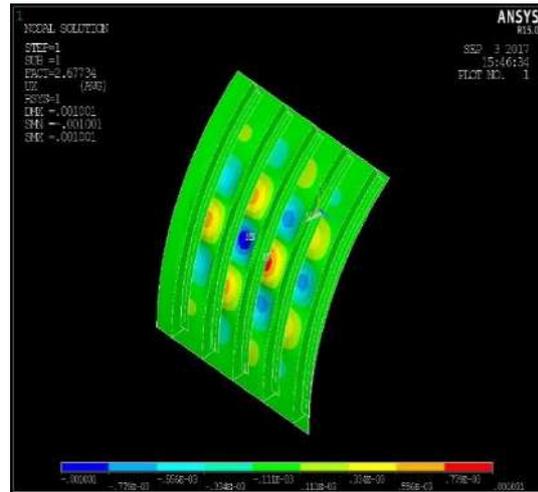


Figura 6-27 Caso B engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).

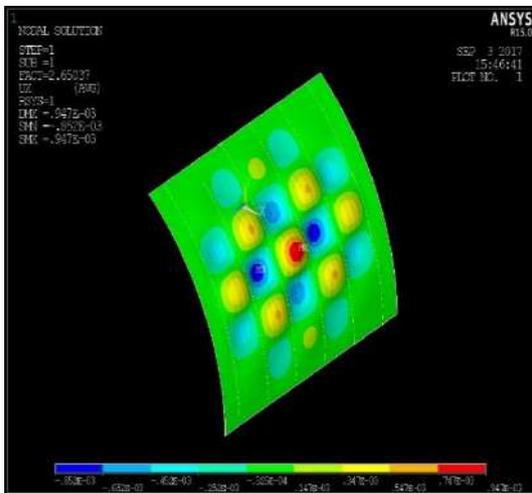


Figura 6-28 Caso C engastado visto a partir casca da cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).

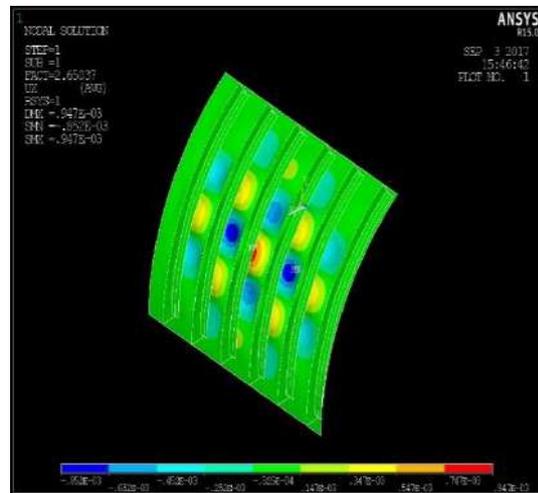


Figura 6-29 Caso C engastado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento radial).

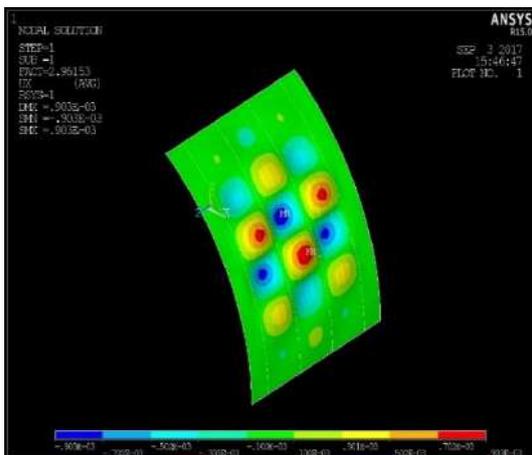


Figura 6-30 Caso A simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).

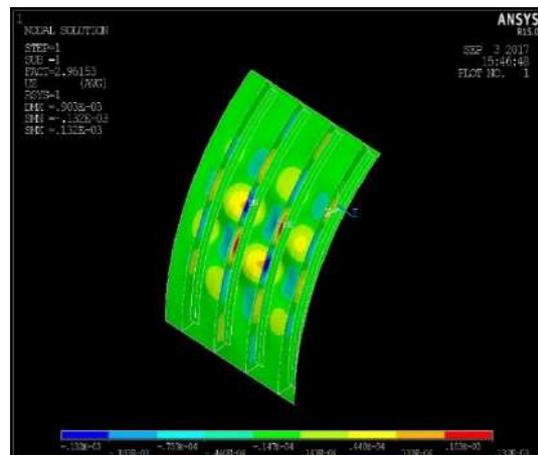


Figura 6-31 Caso A simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).

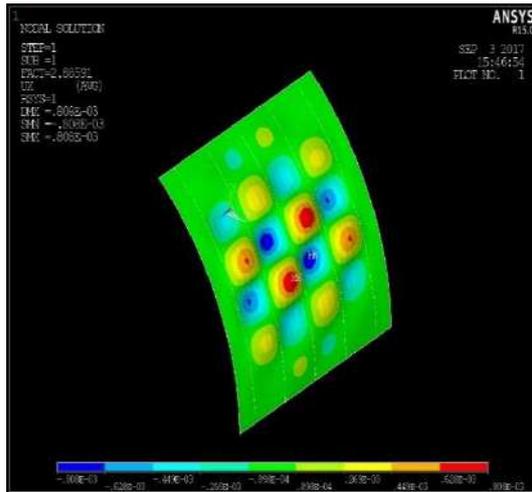


Figura 6-32 Caso B simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).

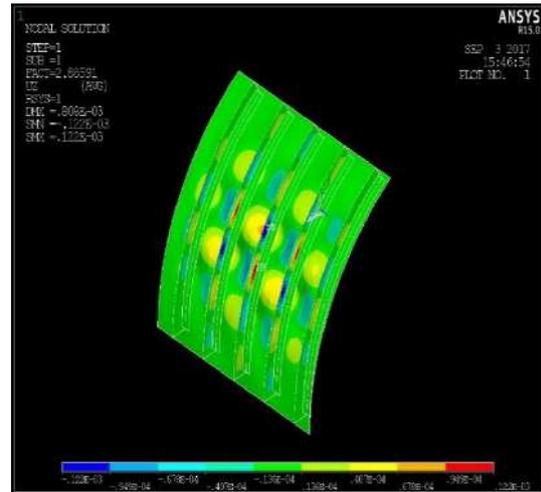


Figura 6-33 Caso B simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).

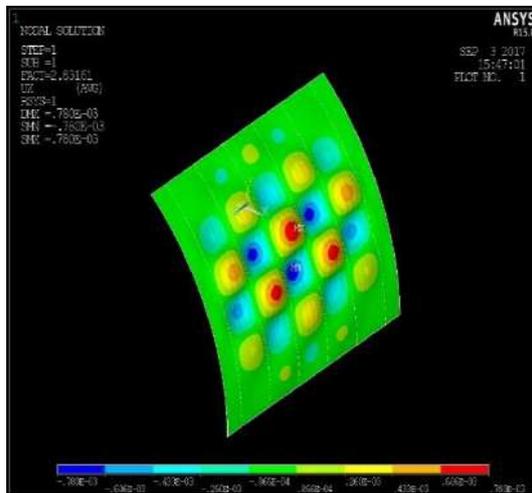


Figura 6-34 Caso C simplesmente apoiado visto a partir da casca cilíndrica (colapso linear-deslocamento radial).

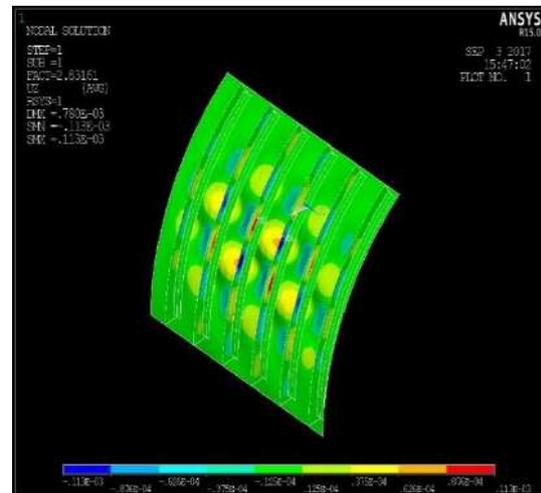


Figura 6-35 Caso C simplesmente apoiado visto a partir das cavernas (colapso linear-deslocamento longitudinal).

O caminho de equilíbrio elastoplástico representado pela relação entre P/P_c e u/a para os casos em análise é exibido na Figura 6-36 e Figura 6-37 para as condições engastadas e simplesmente apoiadas das extremidades, respectivamente. A curva elastoplástica que compara o carregamento aplicado P com a pressão de colapso elastoplástica do cilindro reforçado $2 P_{CO2}$ para os casos engastados e simplesmente apoiados é apresentada na Figura 6-38 e Figura 6-39, respectivamente.

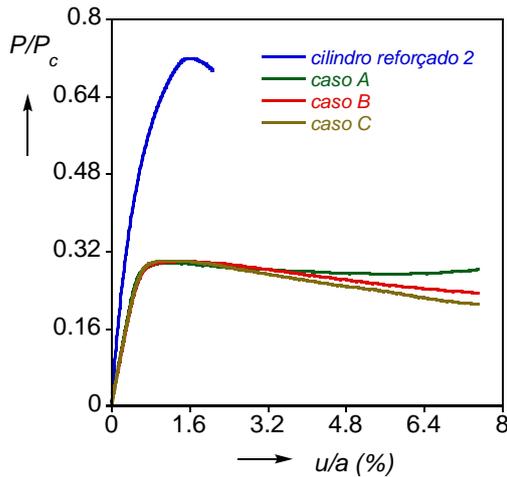


Figura 6-36 Comparação da relação P/P_c de casos engastados com cilindro reforçado 2.

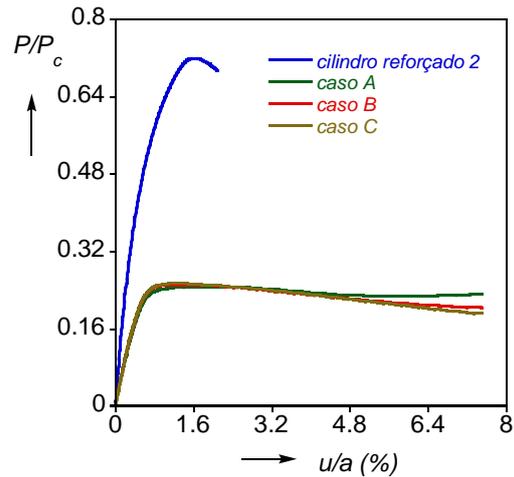


Figura 6-37 Comparação da relação p/P_c de casos simplesmente apoiados com cilindro reforçado 2.

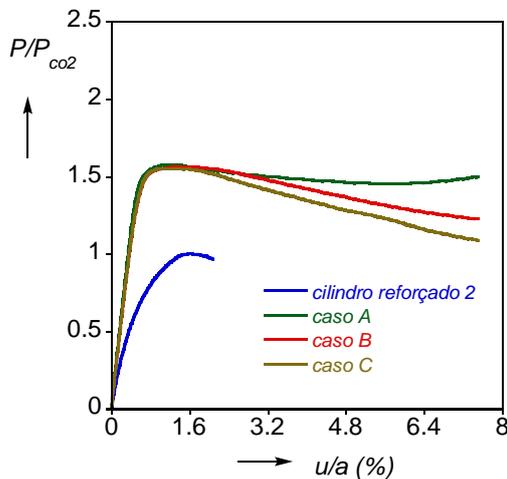


Figura 6-38 Comparação da relação P/P_{co2} de casos engastados com cilindro reforçado 2.

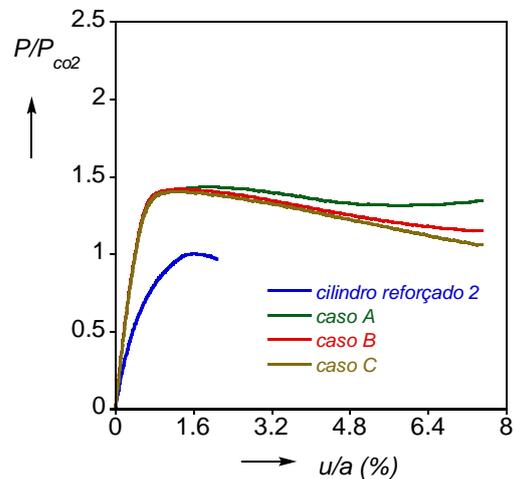


Figura 6-39 Comparação da relação P/P_{co2} de casos simplesmente apoiados com cilindro reforçado 2.

A magnitude no ponto limite da razão P/P_c dos casos engastados são maiores do que a observada para os casos simplesmente apoiados. A diferença no que diz respeito aos valores de P/P_c e P/P_{co2} no ponto limite de colapso para os casos com mesmas condições de contorno se apresentam de forma reduzida quando comparada com a curva elastoplástica do cilindro reforçado 2. Em todos os casos, os valores de P/P_{co2} no ponto limite são maiores do que a magnitude observada no cilindro reforçado 2.

Os valores obtidos numericamente no limiar do colapso de P_{co} , u/a e as deformações plásticas ε^P , assim como os valores para a pressão de colapso linear P_c , são exibidos na Tabela 6-5. A magnitude de P_{co} para os casos engastados se apresentam superiores aos casos simplesmente suportados. Em ambas as condições de contorno, os valores de P_{co}

decrecem do caso A para o caso C. A razão P_{co}/P_c dos casos engastados se mostram superiores aos casos simplesmente apoiados, assim como característica crescente do caso A para o caso C em ambas condições de contorno.

Tabela 6-5 Resultados numéricos para os casos em análise.

	Cilindro reforçado 2					
	Painéis engastados			Painéis simplesmente suportados		
	A	B	C	A	B	C
P_c (MPa)	27.23	26.77	26.51	29.62	28.86	28.32
P_{co} (MPa)	8.06	7.98	7.94	7.31	7.24	7.16
P_{co}/P_c	0.296	0.298	0.301	0.247	0.251	0.253
$ u/a _{P_{co}/P_c}$	1.202	1.561	1.194	1.905	1.336	1.261
$P_{co}/ P_{co} _2$	1.577	1.565	1.554	1.431	1.416	1.402
$ \varepsilon_x^p _{max}$ (%)	2.78	4.07	2.70	>15	>15	>15
$ \varepsilon_y^p _{max}$ (%)	2.64	3.75	2.35	>15	>15	>15
$ \varepsilon_z^p _{max}$ (%)	1.314	1.614	1.075	>15	>15	>15

A relação P_{co}/P_{co2} dos casos engastados indicam uma ligeira superioridade em comparação aos casos simplesmente apoiados e apontam valores decrescente do caso A para o caso C. As deformações plásticas verificadas para os casos simplesmente apoiados são severamente maiores que as obtidas numericamente para os casos engastados.

O agrupamento de figuras compreendido entre a Figura 6-40 e a Figura 6-43 exhibe a distribuição das deformações plásticas do caso C para ambas condições de contorno ao longo da casca cilíndrica e cavernas com ênfase nas regiões com elevadas magnitudes.

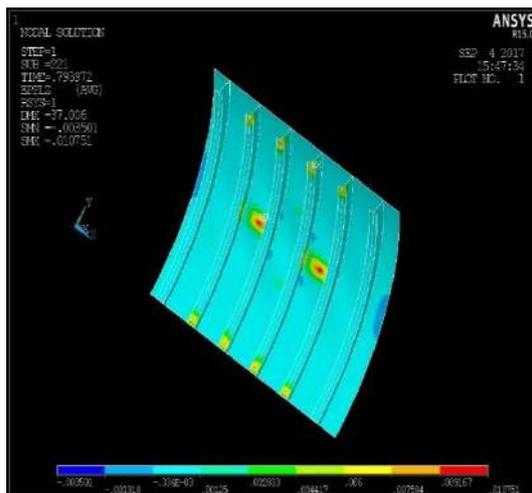


Figura 6-40 Deformação plástica longitudinal para o caso C engastado.

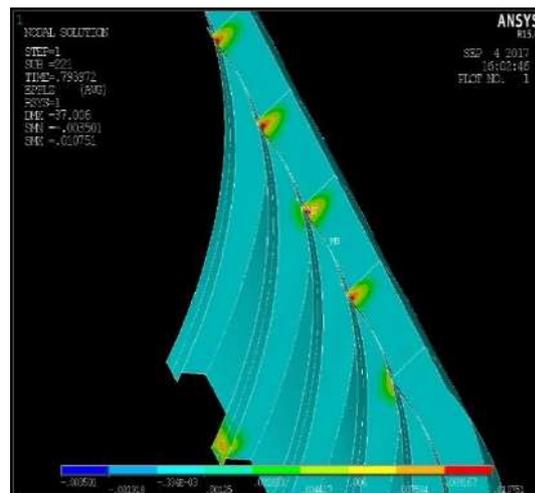


Figura 6-41 Deformação plástica longitudinal para o caso C engastado (detalhe dos flanges e almas).

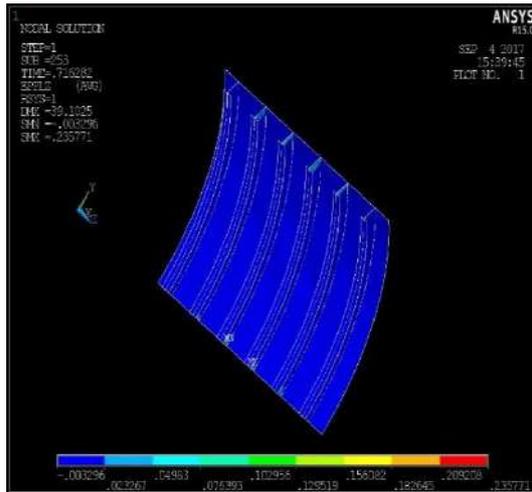


Figura 6-42 Deformação plástica longitudinal para o caso C simplesmente apoiado.

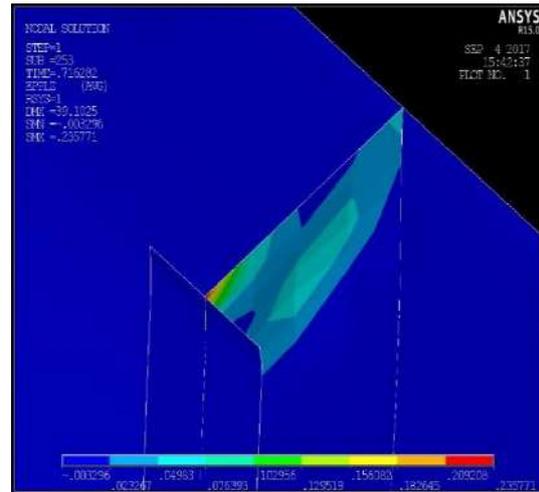


Figura 6-43 Deformação plástica longitudinal para o caso C simplesmente apoiado (detalhe dos flanges e almas).

O caso C engastado apresenta deformações plásticas relevantes na casca cilíndrica na região mais distante da extremidade longitudinal e na região da alma da caverna próxima à extremidade longitudinal, conforme pode ser visualizado na Figura 6-40 e Figura 6-41. Para os casos simplesmente apoiados, a região crítica onde se observa as maiores deformações plásticas é a junção da alma com o flange na extremidade longitudinal.

7 CONCLUSÕES E PROPOSTAS DE ESTUDOS FUTUROS

As simulações numéricas elastoplásticas possuem uma fase de análise linear prévia para a obtenção da forma preferencial de colapso de cada painel. Os painéis simulados na análise paramétrica e no estudo de casos revelam que a condição de contorno engastada leva ao colapso entre cavernas, enquanto que a situação simplesmente apoiada das extremidades apresenta uma forma colapsada preferencial com desvios do plano principal das cavernas. Entretanto, para os casos simulados para o cilindro reforçado 2 do estudo de casos, as formas colapsadas apresentam, na mesma magnitude, desvios nos planos das cavernas e formação de lóbulos circunferenciais entre cavernas. Em casos reais, as condições de contorno não são como as simuladas nesta investigação, porém é esperado uma situação intermediária entre extremidades engastadas e simplesmente apoiadas. De acordo com os resultados apresentados, é seguro afirmar que, dependendo dos parâmetros geométricos dos painéis, condições de contorno que se aproximam da condição simplesmente apoiada tendem a gerar um colapso localizado nas cavernas nas proximidades da extremidade longitudinal.

A solução elastoplástica de equilíbrio se mostra, também, desfavorável quando as extremidades estão simplesmente apoiadas. As tabelas apresentadas na análise paramétrica e no estudo de casos se destacam pela excessiva superioridade das deformações plásticas ε^p para os casos simplesmente apoiados em relação aos painéis engastados. Além da superioridade em magnitude das deformações plásticas máximas, a condição simplesmente apoiada leva aos painéis a experimentarem uma certa concentração das deformações plásticas nas cavernas na região adjacente à extremidade longitudinal. Cabe enfatizar que a concentração das deformações plásticas foi verificada na alma e no flange dos painéis analisados no estudo de casos e na análise paramétrica; indicando, portanto, que a descontinuidade gerada pelo perpendicularismo da caverna em relação à extremidade e as rotações permitidas pela condição simplesmente apoiada levaram os painéis a experimentarem deformações plásticas demasiadas. Embora este estudo tenha externado o colapso pelo alcance do ponto limite nas análises elastoplásticas, as grandes deformações plásticas para os modelos numéricos com condição de simples apoio das extremidades observadas apontam para a falha causada por deformação plástica excessiva.

Os painéis engastados também observam concentração de deformações plásticas na mesma região, porém com intensidade bem inferior. Além disso, os painéis engastados distribuem melhor as deformações. Portanto, os resultados elastoplásticos apresentados em relação aos painéis simplesmente apoiados reforçam a criticidade desta condição de extremidade, pois levam, sob condições de carregamento hidrostático, à depreciação da capacidade de resistir ao colapso e à concentração de esforços nas cavernas na região da extremidade longitudinal. Em casos reais, as rotações ao longo do eixo das extremidades podem ser reduzidas através da instalação de apêndices em formato de cunha. Adicionalmente, de forma a distribuir melhor os esforços na união entre cavernas e extremidade longitudinal, podem ser concebidos trechos de cavernas com momento de inércia maior por meio do aumento da espessura da alma do flange e, complementarmente, geometrias arredondas para eliminar o perpendicularismo local entre a extremidade longitudinal e os elementos das cavernas.

Os caminhos de equilíbrio elastoplásticos representados pelas curvas de P/P_c e P/P_{c0} em função de u/a expõem a proximidade do colapso em relação ao colapso linear e a comparação do colapso em relação ao colapso do cilindro reforçado associado, respectivamente. Ambas condições de contorno possuem a mesma ordem de grandeza de aproximação do colapso elastoplástico em relação ao colapso linear. Entretanto, a comparação do colapso dos painéis com os cilindros associados realizada no estudo de casos coloca mais um item depreciativo à resistência colapso para os casos simplesmente apoiados, pois as curvas de P/P_{c0} dos casos engastados possuem pontos limites superiores. Embora haja a diferença mencionada entre as condições de contorno aplicadas, em todos os casos, as curvas de P/P_{c0} apresentadas no estudo de caso para os painéis têm os pontos limites acima dos pontos limites das curvas de p/P_{c0} para os cilindros reforçados utilizados para a comparação. Tal situação reforça ainda mais a necessidade de afastar as extremidades da condição de simplesmente apoiada, pois levaria o painel a uma condição de colapso prematura, ou seja, antes do colapso do cilindro reforçado envolvente.

As tabelas apresentadas na análise paramétrica e no estudo de casos mostram, quando comparadas na mesma condição de contorno, que quanto maior a relação L_f/L_b menor é a pressão crítica linear P_c e a elastoplástica P_{c0} . Em alguns casos da análise paramétrica, para os casos com menores valores de L_f/L_b , o ponto limite de colapso não é observado,

o que indica que, além da magnitude do colapso, a relação L_f/L_b altera, também, a silhueta da curva de equilíbrio estático. As diferenças de variação da pressão crítica de flambagem com o aumento da razão L_f/L_b quando comparadas entre painéis com as mesmas condições de contorno não se mostram significativa. A magnitude da pressão de colapso dos painéis engastados se apresenta superior à verificada para os painéis simplesmente apoiados, de acordo com os resultados expostos na análise paramétrica baseada na razão L_f/L_b e no estudo de casos; com exceção aos casos simplesmente apoiados do estudo de casos do cilindro reforçado 2 no que diz respeito a pressão crítica linear P_c .

A majoração do ângulo abertura θ apresentada na análise paramétrica e no estudo de casos apresenta o mesmo caráter depreciativo ao colapso verificado nas investigações a respeito do aumento da razão L_f/L_b . A exceção observada é atribuída aos casos simplesmente apoiados, onde se verificou um mínimo local para as pressões de colapso elastoplásticas P_{co} . Cabe ressaltar que os casos relacionados ao cilindro reforçado 1 possuem ângulo de abertura θ menor que os casos associados ao cilindro reforçado 2. As curvas elastoplásticas apresentadas na análise paramétrica indicam que a aproximação do ponto limite ao colapso linear (P_{co}/P_c) é mais sensível ao parâmetro θ do que ao parâmetro L_f/L_b para as variações adotadas. Em geral, como concluído para o parâmetro L_f/L_b , o aumento do parâmetro θ ocasiona redução da pressão de colapso dos painéis, entretanto persiste a necessidade da condução de investigações mais detalhadas para determinar em quais condições o aumento do parâmetro θ definitivamente reduz a pressão de colapso. A análise paramétrica deste trabalho levou em consideração a premissa que a geometria dos painéis depende exclusivamente da necessidade do embarque de itens e equipamentos no interior do casco resistente de origem, ou seja, o projeto de concepção de painéis curvados reforçados é imperiosamente precedido do escantilhamento geral e dos requisitos de alto nível de arranjo.

As imperfeições dos modelos numéricos são decorrentes da forma colapsada linearizada com aplicação de uma certa amplitude máxima. A análise paramétrica mostra que a condição simplesmente apoiada é menos sensível às imperfeições em comparação com os modelos com extremidades engastadas, embora a magnitude do carregamento de colapso linear e elastoplástico seja maior para os painéis engastados. A variação do

parâmetro μ mostrada na análise paramétrica não representa os desvios de circularidade observados em casos reais, pois se apresentam com valores nominais bem acima dos estabelecidos em projeto, os quais giram em torno de 0.4% e 0.5% do raio da casca cilíndrica. A forma colapsada, também, não é a verificada após inspeções qualitativas ao término de cada etapa de construção. Surge, portanto, a necessidade de verificar as formas mais prováveis de imperfeições devido ao processo construtivo para investigações a respeito do colapso e distribuição dos esforços ao longo da estrutura.

Os painéis investigados neste estudo representam de maneira geral painéis encontrados em casos reais. Na grande maioria das vezes, tais painéis estão associados a um cilindro reforçado que faz o papel de casco resistente à pressão hidrostática. A interação entre painéis e cilindros reforçados exposta nesta investigação é representada basicamente pela comparação entre as pressões de colapso de ambas estruturas. Entretanto, o conjunto painel e cilindro reforçado não se apresentam solidários estruturalmente nos casos reais. Usualmente, os painéis estão apoiados aos cilindros de forma a permitir a vedação em condições de carregamento hidrostático, ou seja, submersos. A geometria das extremidades dos casos reais favorece a manutenção da estanqueidade do volume a medida que a pressão hidrostática aumenta. Esta interação entre painel e cilindro reforçado gera uma superfície de contato que influencia no comportamento do painel. Sendo assim, estudos que investigam o comportamento das extremidades com adição de elementos estruturais de contato se mostram de grande utilidade para a continuação da investigação corrente.

8 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ANSYS, I. ANSYS® Structural Analysis Guide, Release 15.0, 2013.
- ARIFURRAHMAN, F. et al. Blast impact analysis of stiffened and curved panel structures. **Procedia Engineering**, v. 173, p. 487 - 494, 2017.
- ASTM E8. Standard Test Methods for Tension Testing of Metallic Materials, 2011.
- BATDORF, S. B.; SCHILDCROUT, M. **Critical Axial-Compressive Stress of a Curved Rectangular Panel with a Central Chordwise Stiffener**. National Advisory Committee for Aeronautics. Langley Field, Va, USA. 1948. (1661).
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. 3ª. ed. USA: Prentice Hall, Pearson Education, Inc, 2006.
- BRESSE, M. Cours de Mécanique Appliquée, Paris, 1859.
- BRIDGMAN, P. W. **Studies in Large Plastic Flow and Fracture**. New York: McGraw-Hill, 1952.
- BRUSH, D. O.; ALMROTH, B. O. **Buckling of Bars, Plates and Shells**. USA: McGraw-Hill, Inc, 1975.
- BRYANT, A. R. **Hydrostatic Pressure Buckling of a Ring-Stiffened Tube**. Naval Construction Research Establishment. Dunfermline, Scotland. 1954. (NCRE 306).
- BSI. **British Standard Specification for Unfired Fusion Welded Pressure Vessels**. 5. ed. United Kingdom: [s.n.], 1980.
- CALLISTER JR., W. . D. . **Material Science and Engineering**. 7. ed. Danvers: John Wiley & Sons, Inc, 2007.
- CHOUNG, J. M.; CHO, S. R. Study on True Stress Correction from Tensile Tests. **Journal of Mechanical Science and Tecnology**, v. 22, p. 1039 - 1051, 2008.
- CROSSLAND, B. The Effect of Fluid Pressure on the Shear Properties of Metals. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, p. 168-935, 1954.
- CRYPTOME , 2012. Disponivel em: <<http://cryptome.org/>>. Acesso em: 22 março 2015.

DEFENSE Industry, 2010. Disponível em: <<http://www.defenseindustrydaily.com>>. Acesso em: 21 março 2015.

DEVCON. **5 Minute Epoxy Technical Data Sheet**. Danvers. 2012.

DEVCON. **Plastic Steel Putty**. Danvers. 2012.

DONNEL, L. H. **Beams, Plates, and Shells**. 1. ed. New York: McGraw-Hill, Inc, 1976.

DPA. SSP74 Design of Submarine Structures, United Kingdom, 2001.

ECCS. **Buckling of steel shells: European Recommendations**. Brussels, Belgium: [s.n.], 1988.

FORDE, B.; STIEMER, S. F. Improved arc-length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. **Computer and Structures**, v. 27, p. 625-630, 1987.

FOX, C. **An Introduction to the Calculus of Variations**. 2^a. ed. London, UK: Dover Publications, 2010.

FRIED, I. Orthogonal Trajectory Accession to the Non- Linear Equilibrium Curve. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 47, p. 283-298, 1984.

GALL, H. **Compressive Strength of Stiffened Sheets of Aluminum Alloy**. Massachusetts Institute Technology. Cambridge, USA. 1930.

GANNON, L. **Submarine Pressure Hull Collapse Considering Corrosion and Penetrations**. Defense R&D Atlantic. Toronto, Canada. 2010.

GERMANISCHER LLOYD. **Fabrication Tolerances for the Pressure Hull**. HAMBURG. 2008.

GOULD, P. L. **Introduction to Linear Elasticity**. 3. ed. New York: Springer, 2013.

GRUNITZ, L. The effect of welding on the buckling behaviour of a spherical cap. **International Journal of Pressure Vessels and Piping** , v. 80, n. 4, p. 237-241, April 2003.

HILL, R. **The Mathematical Theory of Plasticity**. Oxford: Claredon Press, 1950.

HU, L. W. Plastic Stress-Strain Relations and Hydrostatic Stress. **Proceedings 2nd Symposium on Naval Structure Mechanics**, 1960.

- INSTRON. **Strain Gauges Technical Information Report**. Norwood. 2007.
- JAEHONG, L.; NGUYEN, T.; THANG, P. Nonlinear static analysis of thin curved panels with FG coatings under combined axial compression and external pressure. **Thin-Walled Structures**, v. 107, p. 405-414, October 2016.
- KENDRICK, S. **The Deformation under External Pressure of Nearly Circular Cylindrical Shells with Evenly Spaced Ring Frames**. Naval Construction Research Establishment. Dunfermline. 1953. (NCRE/R.259).
- KENDRICK, S. Externally Pressurized Vessels. In: GILL, S. S. **The Stress Analysis of Pressure Vessels and Pressure Vessel Components**. Toronto: Pergamon Press, 1970. p. 405-511.
- KUTZ, M. **Handbook of Material Selection**. 1^a. ed. Canada: John Wiley & Sons, 2002.
- LAM, W. F.; MORLEY, C. T. Arc-length method for passing limit points in structural calculation. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, p. 169-185, 1992.
- LÉVY, M. **Journal de Mathématiques Pures et Appliquées**, v. 10, n. 3, p. 5, 1884.
- LUNDQUIST, E. **Comparison of Three Methods for Calculating the Compressive Strength of Flat and Slightly Curved Sheet and Stiffener Combinations**. National Advisory Committee for Aeronautics. Langley Field, Va, USA. 1933. (455).
- MACKAY, J. R. **Structural Analysis and Design of Pressure Hulls: the State of the Art and Future Trends**. Defence R&D. Toronto, Canada. 2007. (TM 2007-188).
- MODEC , 2015. Disponivel em: <<http://www.modec.com/fps/tlp/projects/oveng.html>>. Acesso em: 17 março 2015.
- MORANDI, A. C.; FAULKNER, D.; DAS, P. K. Frame Tripping in Externally Pressurized Cylinders. **Marine Structures**, Glasgow, Scotland, n. 9, p. 585-608, March 1996.
- PIEZOTRONICS, P. **Load Cell 1630-03C Thecnical Sheet**. Farmington Hills. 2015.
- PRAGER, W. Recent Developments in the Mathematical Theory of Plasticity. **Journal of Applied Physics**, v. 20, p. 235-259, 1949.

PRAGER, W. The Theory of Plasticity: a Survey of Recent Achievements. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, p. 41-53, 169 1955.

RAMBERG, W.; LEVY, S.; FIENUB, K. **Effect of Curvature on Stregth of Axially Loaded Sheetstringer Panels**. National Advisory Committee for Aeronautics. Langley Field, Va, USA. 1944. (944).

RAMBERG, W.; OSGOOD, W. R. **Description of stress-strain curves by three parameters**. National Advisory Committee for Aeronautics. Washington DC. 1943. (902).

REIS, A. et al. Imperfection sensitivity of cylindrically curved steel panels. **Thin-Walled Structures**, v. 89, p. 101 - 115, April 2015.

REYNOLDS, T. E. **Inelastic Lobar Buckling of Cylindrical Shells under External Hydrostatic Pressure**. David Taylor Model Basin. Bethesda, Maryland, USA. 1960. (1392).

REYNOLDS, T. E.; BLUMENBERG, W. F. **Elastic General Stability of Ring-Stiffened Cylinders with Intermediate Heavy Frames under External Pressure**. David Taylor Model Basin. Bethesda, Maryland, USA. 1961. (1588).

RIKS, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. **Journal of Applied Mechanics**, v. 39, p. 1060-1065, 1972.

ROSS, C. T. F.; WATERMAN, G. A. Inelastic Instability of Circular Corrugated Cylinders under Hydrostatic Pressure. **Ocean Engineering**, v. 27, n. 4, p. 331-343, 2000.

SAKAKIBARA, N.; KYRIAKIDES, S.; CORONA, E. Collapse of partially corroded or worn pipe under external pressure. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 50, p. 1586-1597, 2008.

SANDERS, J. L. Nonlinear Theories for Thin Shells. **Q. Appl. Math**, v. 21, p. 21-36, 1963.

SHENCK, C. A.; SHUELLER, G. I. Buckling Analysis of Cylindrical Shells with Cutouts Including Random Boundary and Geometric Imperfections. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, n. 35-36, p. 3424-3434, April 2007.

SILVESTRE, N.; SILVA, L. S.; MARTINS, J. P. Energy-based analytical model to predict the elastic critical behaviour of curved panels. **Journal of Constructional Steel Research**, v. 127, p. 165 - 175, December 2016.

SNIADECKI, N. J. University of Washington, 2012. Disponível em: <faculty.washington.edu>.

TIMOSHENKO, S. P. **Theory of Elastic Stability**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 1961.

TRAN, K. L. et al. Buckling of Stiffened Curved Panels under Uniform Axial Compression. **Journal of Constructional Steel Research**, n. 103, p. 140-147, September 2014.

U Boat Net, 2007. Disponível em: <<http://uboa.net/technical/industries.htm>>. Acesso em: 12 março 2015.

VAUGHAN, H. **The Stress Distribution in Ring Frames with Initial Tilt**. Naval Construction Research Establishment. Dunfermline, Scotland. 1963. (NCRE/R.476).

WIKIPEDIA DSV Alvin, 2005. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/DSV_Alvin>. Acesso em: 23 março 2015.

WIKIPEDIA Spar Platform, 2008. Disponível em: <[http://en.wikipedia.org/wiki/Spar_\(platform\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Spar_(platform))>. Acesso em: 2015 março 2015.

WIKIPEDIA U-Boat, 2006. Disponível em: <<http://en.wikipedia.org/wiki/U-boat>>. Acesso em: 14 março 2015.

ZIEGLER, H. A Modification of Prager's Hardening Rule. **Quarterly of Applied Mathematics**, v. 17, n. 1, p. 55-65, 1955.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals**. 7^a. ed. Waltham: Butterworth-Heinemann, 2013.