



## ABORDAGEM ALGÉBRICO-DIFERENCIAL NA SIMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL DO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM DUTOS

Rodrigo Galvão D'Império Teixeira

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Química, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Química.

Orientadores: Argimiro Resende Secchi  
Evaristo Chalbaud Biscaia Jr.

Rio de Janeiro  
Dezembro de 2016

ABORDAGEM ALGÉBRICO-DIFERENCIAL NA SIMULAÇÃO  
UNIDIMENSIONAL DO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM DUTOS

Rodrigo Galvão D'Império Teixeira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ  
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)  
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS  
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR  
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA QUÍMICA.

Examinada por:

---

Prof. Argimiro Resende Secchi, D.Sc.

---

Prof. André Luiz Hemerly Costa, D.Sc.

---

Prof. Cláudia Míriam Scheid, D.Sc.

---

Prof. Juliana Braga Rodrigues Loureiro, D.Sc.

---

Prof. Príamo Albuquerque Melo Junior, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
DEZEMBRO DE 2016

Teixeira, Rodrigo Galvão D'Império

Abordagem Algébrico-Diferencial na Simulação Unidimensional do Escoamento Bifásico em Dutos/Rodrigo Galvão D'Império Teixeira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2016.

XXIV, 216 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Argimiro Resende Secchi

Evaristo Chalbaud Biscaia Jr.

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Química, 2016.

Referências Bibliográficas: p. 178 – 185.

1. Escoamento bifásico. 2. Equações Algébrico-Diferenciais. 3. Funções de regularização. I. Secchi, Argimiro Resende *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Química. III. Título.

*Dedico este trabalho à minha  
esposa, Mariana Pires Ferreira,  
que, em 30 de Março de 2007,  
prometeu me acompanhar aonde  
meus próximos passos me  
levassem - e que vem cumprindo  
integralmente a promessa desde  
então.*

*“May I return, to the beginning  
The light is dimming,  
and the dream is too  
The world and I,  
we are still waiting  
Still hesitating,  
any dream will do.”*

*Tim Rice*

# Agradecimentos

A conclusão deste Doutorado representa o atingimento de uma meta (e, por que não dizer, a realização de um sonho) que data dos anos em que eu ainda cursava a graduação. Parece o momento ideal para flexibilizar o tom mais formal e registrar meus agradecimentos aos que, de uma forma ou outra, participaram e contribuíram para o sucesso desta empreitada.

Começando, então, pelas origens: agradeço à minha mãe, Janice, e ao meu pai, Paulo, por todos os ensinamentos e valores que me transmitiram, pelo ambiente familiar que proporcionaram (e continuam a proporcionar) e por todo o esforço graças ao qual eu sempre pude contar com uma educação do mais alto nível. Sem vocês, eu não seria a pessoa que sou hoje, não teria a vida que tenho hoje, e o trabalho documentado neste texto não seria possível.

Já que estamos falando em família, também é hora de agradecer aos meus irmãos, Renato e Guilherme, por tantas horas de conversa e companhia cujo valor não se expressa com poucas palavras, e também pelo fundo musical que embalou os anos em que mais estudei na minha vida (providenciado ao vivo, com guitarras, ou com MP3, nos momentos de menor inspiração).

Agradeço especialmente à minha esposa Mariana, com cuja companhia diária eu tenho o privilégio de poder contar, por sua paciência e compreensão diante do tempo juntos que precisamos ceder nestes últimos anos em prol do sucesso desta Tese. Concluído este marco, é hora de começarmos a transformar em realidade nossos projetos para o futuro!

Agradeço aos meus sogros, Aurora e Marcos, e aos meus cunhados, Renata, Fernanda e Pedro, por todas as vezes em que me receberam na aprazível Guaratinguetá-SP, testemunhando assim diversas etapas deste trabalho. Menção adicional à Aurora, pelos cafés e companhia que tornaram ainda mais agradáveis aqueles intervalos que a gente faz para espalhar, e ao Pedro, que já expressou sua vontade de seguir a carreira acadêmica, e cuja Defesa de Doutorado tenho certeza que

assistiremos dentro dos próximos anos.

Falando em cunhados, estendo meus agradecimentos à Júlia (futura cunhada, e com planos avançados de futura tia) e à Cecília, junto com meus votos para que, agora, passemos a desfrutar ainda mais de passeios e programas em conjunto.

Agradeço à PETROBRAS pela liberação e pelas condições proporcionadas para realização deste trabalho, e também aos colegas Vinícius, Renato, Flávio, Daniele, Stella, Giovani e Priscila, com quem dividi diversos momentos desta experiência.

Pelos motivos apontados no parágrafo anterior, e também pelo apreço e confiança demonstrados para com o aprendizado adquirido em oportunidades como esta, eu agradeço a Joyce Stone de Souza Aires, que foi minha gerente durante a quase totalidade da execução deste trabalho. Registro, com satisfação, sua participação nas três Defesas mais importantes da minha passagem pela UFRJ: como membro da Banca Avaliadora de meu Projeto Final de Curso da graduação (em 2006) e como gerente no Mestrado (concluído em 2013) e no Doutorado.

Agradeço à COPPE e à UFRJ por todo o aprendizado proporcionado não somente nestes anos de Mestrado e Doutorado, mas também na graduação. Ter optado por cursar Engenharia Química na UFRJ, lá em 2001, é uma escolha que sempre recordarei com satisfação.

Além da importância do tema principal, outra característica do presente Doutorado que muito me agradou foi a ampla abrangência com relação às principais disciplinas da Engenharia Química: graças a isto, eu pude revisar e aprender ainda mais Transferência de Calor e demais Fenômenos de Transporte, bem como Termodinâmica e Métodos Numéricos. O sucesso deste projeto não teria sido possível sem a disponibilidade, dedicação e orientação do Prof. Argimiro Resende Secchi e do Prof. Evaristo Chalbaud Biscaia Jr. Deixo, portanto, o meu MUITO OBRIGADO aos meus orientadores, junto com meus votos para que este trabalho seja apenas o primeiro de uma longa parceria.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## ABORDAGEM ALGÉBRICO-DIFERENCIAL NA SIMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL DO ESCOAMENTO BIFÁSICO EM DUTOS

Rodrigo Galvão D'Império Teixeira

Dezembro/2016

Orientadores: Argimiro Resende Secchi  
Evaristo Chalbaud Biscaia Jr.

Programa: Engenharia Química

O escoamento simultâneo de uma fase líquida e outra fase vapor por canais, dutos e tubulações é encontrado com frequência na indústria química e de processos, com destaque para a produção e refino de petróleo, o transporte de gás natural e os reatores de energia nuclear. A simulação e o projeto destas unidades de processo exigem a solução numérica acurada e eficiente de modelos matemáticos igualmente precisos do escoamento bifásico. A pesquisa pela literatura relacionada revela que o problema de interesse vem sendo abordado por meio de simulações unidimensionais baseadas predominantemente nos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux*, embora ainda persista o uso de métodos que empregam a simplificação de escoamento homogêneo. Este trabalho propõe, como alternativa à discretização em volumes finitos para posterior solução segregada iterativa, que as equações de balanço de massa, momentum e energia sejam resolvidas simultaneamente aos modelos constitutivos necessários por meio de métodos numéricos já consolidados para Sistemas de Equações Algébrico-Diferenciais. A comparação desta estratégia com a prática atual baseada no método dos volumes finitos demonstrou a superioridade da proposta em termos de esforço computacional e acurácia dos resultados obtidos para o problema estacionário. A nova técnica foi utilizada na verificação do desempenho dos Modelos de Dois Fluidos, *Drift-Flux* e Homogêneo quanto à reprodutibilidade de medições experimentais. Os resultados mais acurados foram obtidos com o Modelo *Drift-Flux*, tornando-o uma opção ainda mais atraente para simulações de escoamentos bifásicos em face de seu equacionamento mais simples que o do Modelo de Dois Fluidos. Por fim, também foi demonstrado com discussões e resultados que a Abordagem Algébrico-Diferencial proposta é igualmente aplicável a simulações eficientes em estado transiente.



Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC APPROACH TO ONE-DIMENSIONAL  
SIMULATIONS OF TWO-PHASE FLOW IN DUCTS

Rodrigo Galvão D'Império Teixeira

December/2016

Advisors: Argimiro Resende Secchi

Evaristo Chalbaud Biscaia Jr.

Department: Chemical Engineering

Simultaneous flows of liquid and vapor phases through pipes, ducts and channels are frequently encountered in industrial applications, as is the case of petroleum production and refining, transportation of natural gas and nuclear power reactors. Simulation and design of such process facilities demands that efficient and accurate numerical methods be applied to equally accurate two-phase flow mathematical models. A literature survey has shown that this problem has been currently addressed by means of one-dimensional simulations based predominantly on Two-Fluid and Drift-Flux Models, although simpler methods which employ the assumption of homogeneous flow are also seen to persist. The present study proposes that these calculations, which are currently based on finite-volume discretizations and iterative sequential procedures, be performed instead by simultaneously solving all equations of change and constitutive models using established numerical methods devised for Differential-Algebraic Equations (DAE) systems. Through objective comparisons between this strategy and the finite-volume based technique, the DAE approach was proved highly advantageous in terms of computational requirements and accuracy of results for steady-state test cases. The proposed method was subsequently employed in the assessment of experimental data reproducibility with the Two-Fluid, Drift-Flux and Homogeneous models. Most accurate results were obtained with the Drift-Flux Model, thus making that approach even more attractive given its simpler formulation as compared to the Two-Fluid Model. It is lastly demonstrated through discussions and results that the proposed Differential-Algebraic Approach can also be extended to allow for efficient dynamic simulations of two-phase flow.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xviii</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xxii</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xxiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Aplicações e Motivação . . . . .	1
1.2 Evolução Histórica . . . . .	3
1.3 Objetivo . . . . .	4
<b>2 Hipótese do Contínuo e Escoamento Monofásico</b>	<b>5</b>
2.1 Definição de Fluido . . . . .	5
2.2 A Hipótese do Contínuo . . . . .	5
2.3 Descrições Euleriana e Lagrangiana . . . . .	6
2.4 As Equações Diferenciais de Balanço . . . . .	7
2.4.1 A Equação da Continuidade . . . . .	9
2.4.2 A Equação do Movimento . . . . .	9
2.4.3 A Equação da Energia . . . . .	11
2.5 Balanço de Informação . . . . .	14
2.6 Turbulência . . . . .	14
2.7 Balanços Macroscópicos em Tubulações . . . . .	18
2.7.1 Balanço Macroscópico de Energia Mecânica . . . . .	19
2.7.2 Balanço Macroscópico de Energia (Total) . . . . .	21
2.8 Considerações Finais . . . . .	22
<b>3 Teoria e Modelagem do Escoamento Bifásico</b>	<b>23</b>
3.1 Caracterização do Fenômeno . . . . .	23
3.1.1 Regimes de Escoamento . . . . .	23
3.1.2 Escalas e Acoplamento . . . . .	27

3.2	Interfaces e Condições de Salto . . . . .	29
3.3	Formulação Local Instantânea e DNS . . . . .	33
3.4	Equações Médias para o Escoamento Bifásico . . . . .	36
3.4.1	A Função Indicadora de Fase . . . . .	38
3.4.2	Equações Médias para as Fases . . . . .	38
3.4.3	Condições de Salto Médias . . . . .	41
3.4.4	Equação Média para a Mistura . . . . .	42
3.4.5	Processos Específicos de Média . . . . .	43
3.4.6	Descontinuidades e a Aplicação das Médias . . . . .	45
3.5	O Modelo de Dois Fluidos . . . . .	47
3.5.1	Média Transversal . . . . .	48
3.5.2	Modelo 1D . . . . .	49
3.5.3	Simplificações . . . . .	52
3.5.4	Aplicabilidade e Discussão . . . . .	54
3.6	O Modelo de Mistura . . . . .	56
3.6.1	O Modelo <i>Drift-Flux</i> 1D . . . . .	56
3.6.2	A Equação Constitutiva Cinemática . . . . .	61
3.6.3	Simplificações . . . . .	62
3.6.4	Escoamento Homogêneo Permanente . . . . .	64
3.6.5	Aplicabilidade e Discussão . . . . .	65
3.7	Os Primeiros Métodos e Correlações . . . . .	66
3.7.1	Correlações Empíricas . . . . .	66
3.7.2	Métodos Mecanísticos . . . . .	67
3.7.3	Aplicabilidade e Discussão . . . . .	68
3.7.4	A Análise Dimensional de Duns e Ros . . . . .	70
3.7.5	A Correlação de Beggs & Brill . . . . .	71
3.8	Consolidação e Resumo de Equações . . . . .	76
3.8.1	Modelo de Dois Fluidos . . . . .	77
3.8.2	Modelo <i>Drift-Flux</i> . . . . .	78
3.8.3	Modelo Homogêneo . . . . .	79
3.8.4	Modelagem Constitutiva . . . . .	79
3.9	Considerações Finais . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Modelagem Complementar e Equações Constitutivas</b>	<b>81</b>
4.1	Regimes de Escoamento . . . . .	81
4.1.1	Escoamento Vertical Ascendente . . . . .	82
4.1.2	Escoamento Horizontal . . . . .	82
4.1.3	Padrões Modelados . . . . .	82
4.2	Fricção e Arrasto Interfacial . . . . .	83

4.2.1	Bolhas e Nevoeiro . . . . .	83
4.2.2	<i>Slug</i> . . . . .	84
4.2.3	Anular . . . . .	85
4.2.4	Estratificado Horizontal . . . . .	86
4.2.5	Comentários e Observações . . . . .	87
4.3	Força de Massa Virtual . . . . .	88
4.4	Velocidades Médias Interfaciais . . . . .	88
4.5	Pressões Médias das Fases e da Interface . . . . .	89
4.6	Perdas por Atrito . . . . .	90
4.6.1	Partição . . . . .	91
4.7	Relações Cinemáticas . . . . .	91
4.7.1	Bolhas . . . . .	92
4.7.2	<i>Slug</i> . . . . .	92
4.8	Transferência de Calor e Massa . . . . .	93
4.8.1	Balço Interfacial de Energia . . . . .	94
4.9	Propriedades Termofísicas e de Transporte . . . . .	94
4.10	Considerações Finais . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Aprimoramento da Simulação Numérica do Escoamento Bifásico</b>	
	<b>Unidimensional</b>	<b>98</b>
5.1	Integração do Gradiente de Pressão “Homogêneo” Permanente . . . . .	98
5.2	As Equações Médias e o Método dos Volumes Finitos . . . . .	101
5.2.1	Discretização . . . . .	102
5.2.2	Solução das Equações Discretizadas . . . . .	105
5.2.3	Aplicação ao Modelo <i>Drift-Flux</i> 1D Estacionário . . . . .	107
5.3	Abordagem Algébrico-Diferencial . . . . .	108
5.3.1	O Método BDF . . . . .	108
5.3.2	Análise Comparativa e Avanços Esperados . . . . .	110
5.3.3	Tratamento das Descontinuidades dos Modelos . . . . .	112
5.4	Motivação Extra: Aplicação Anterior . . . . .	115
5.5	Resultados e Discussão . . . . .	116
5.5.1	Esforço Computacional e Acurácia . . . . .	116
5.5.2	Efeitos das Transições entre Regimes . . . . .	122
5.6	Considerações Finais . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Verificação contra Dados Experimentais</b>	<b>129</b>
6.1	Metodologia . . . . .	129
6.1.1	Estudo Experimental Selecionado . . . . .	129
6.1.2	Simulação dos Experimentos . . . . .	131
6.1.3	Estatísticas . . . . .	133

6.2	Comparações por Regime . . . . .	134
6.2.1	Bolhas . . . . .	134
6.2.2	<i>Slug</i> . . . . .	135
6.2.3	Anular . . . . .	140
6.2.4	Nevoeiro . . . . .	143
6.2.5	Estratificado Horizontal . . . . .	145
6.2.6	Balanço Parcial . . . . .	148
6.3	Influência do Modelo de Atrito na Parede . . . . .	148
6.3.1	Bolhas . . . . .	149
6.3.2	<i>Slug</i> . . . . .	151
6.3.3	Anular . . . . .	153
6.3.4	Nevoeiro . . . . .	155
6.3.5	Estratificado . . . . .	157
6.3.6	Balanço Definitivo . . . . .	161
6.4	Capacidade de Predição . . . . .	162
6.5	Considerações Finais . . . . .	165
<b>7</b>	<b>Simulação Dinâmica</b>	<b>167</b>
7.1	Metodologia . . . . .	167
7.1.1	Seleção do Passo de Integração no Tempo . . . . .	168
7.2	Resultados e Discussão . . . . .	170
7.3	Considerações Finais . . . . .	175
<b>8</b>	<b>Conclusões</b>	<b>176</b>
8.1	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	177
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>178</b>
<b>A</b>	<b>Desenvolvimento do Termo Fonte Interfacial de Momentum</b>	<b>186</b>
<b>B</b>	<b>Determinação da Área Interfacial Específica</b>	<b>188</b>
B.1	Bolhas e Nevoeiro . . . . .	188
B.2	<i>Slug</i> . . . . .	189
<b>C</b>	<b>Condições Experimentais e Resultados das Simulações</b>	<b>191</b>

# Lista de Figuras

3.1	Regimes de escoamento horizontal considerados por Baker. . . . .	24
3.2	Regimes de escoamento vertical ascendente. . . . .	25
3.3	Mapa de regimes de escoamento bifásico horizontal de Mandhane <i>et al.</i>	27
3.4	Volume de controle encerrando duas fases separadas por uma interface.	30
3.5	Aproximação para função delta de Dirac. . . . .	47
3.6	Aproximação computacional para a função indicadora de fase e sua derivada. . . . .	48
3.7	Mapa de regimes de escoamento da correlação de Duns & Ros (tubulação vertical) . . . . .	71
3.8	Mapa de regimes de escoamento da correlação de Beggs & Brill (tubulação horizontal). . . . .	72
4.1	Ângulo central do escoamento Estratificado horizontal. . . . .	86
5.1	Fluxograma do <i>marching algorithm</i> para cada subintervalo da tubulação. . . . .	100
5.2	Malha unidimensional para aplicação do Método dos Volumes Finitos.	103
5.3	Fluxograma do algoritmo SIMPLER conforme programado. . . . .	109
5.4	Comportamento ajustável da função de regularização $\eta$ . . . . .	114
5.5	Soluções numéricas obtidas para a fração de vazios pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 200$ ), Cenário 1. . . . .	117
5.6	Soluções numéricas obtidas para a velocidade da mistura bifásica pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 200$ ), Cenário 1.	118
5.7	Soluções numéricas obtidas para a pressão pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 200$ ), Cenário 1. . . . .	119
5.8	Soluções numéricas obtidas para a entalpia da mistura bifásica pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 200$ ), Cenário 1.	120
5.9	Erros de truncamento relativos para a fração de vazios para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 1. . . . .	120
5.10	Erros de truncamento relativos para a entalpia da mistura bifásica para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 1. . . . .	121

5.11	Erros de truncamento relativos para a velocidade da mistura bifásica para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 1. . . . .	121
5.12	Descontinuidade regularizada na distribuição axial da velocidade de deslizamento unidimensional, Cenário 2. . . . .	123
5.13	Soluções numéricas obtidas para a fração de vazios pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 2000$ ), Cenário 2. . . . .	124
5.14	Soluções numéricas obtidas para a entalpia da mistura bifásica pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 2000$ ), Cenário 2.	125
5.15	Soluções numéricas obtidas para a velocidade da mistura bifásica pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 2000$ ), Cenário 2.	125
5.16	Erros de truncamento relativos para a fração de vazios para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 2. . . . .	126
5.17	Erros de truncamento relativos para a entalpia da mistura bifásica para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 2. . . . .	126
5.18	Erros de truncamento relativos para a velocidade da mistura bifásica para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 2: (a) escala normal com ampliação na descontinuidade e (b) escala reduzida para melhor visualização dos erros por toda a tubulação. . . . .	127
6.1	Esquema parcial (vista superior) do aparato experimental utilizado por MUKHERJEE (1979). . . . .	130
6.2	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime de Bolhas com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	136
6.3	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime <i>Slug</i> com $K_b = 0,45$ e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	137
6.4	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime <i>Slug</i> com $K_b = 4,5$ e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	139
6.5	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em $K_e^{(f)}$ .	141

6.6	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 2,5 em $K_e^{(f)}$ . . .	142
6.7	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime <i>Mist</i> com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	144
6.8	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média. . . . .	146
6.9	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas a diferentes pressões médias. . . . .	147
6.10	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> no regime de Bolhas com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão. . . . .	150
6.11	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> no regime <i>Slug</i> com $K_b = 0,45$ e com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão. . . . .	152
6.12	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> no regime Anular com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em $K_e^{(f)}$ . . . . .	154
6.13	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> no regime <i>Mist</i> com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão. . . . .	156



6.14	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> no regime Estratificado horizontal com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média. . . . .	158
6.15	Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Estratificado (posições horizontal e $-30^\circ$ ) com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média. . . . .	160
6.16	Comportamentos experimental e previstos pelos modelos de interesse da (a) fração de vazios e (b) variação de pressão como função de $\langle j_v \rangle$ para óleo lubrificante a $\langle j_l \rangle = 0,0274$ m/s em $\theta = 90^\circ$ . . . . .	163
6.17	Comportamentos experimental e previstos pelos modelos de interesse da (a) fração de vazios e (b) variação de pressão como função de $\langle j_v \rangle$ para querosene a $\langle j_l \rangle = 0,1097$ m/s em $\theta = 50^\circ$ . . . . .	164
6.18	Comportamentos experimental e previstos pelos modelos de interesse da (a) fração de vazios e (b) variação de pressão como função de $\langle j_v \rangle$ para querosene a $\langle j_l \rangle = 2,2311$ m/s em $\theta = 0^\circ$ . . . . .	165
7.1	Respostas previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> da fração de vazios e da pressão na saída da tubulação frente à variação com o tempo da temperatura de entrada (simulações dinâmicas com passo fixo de $\Delta t = 5$ s). . . . .	172
7.2	Respostas previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> da fração de vazios e da pressão na saída da tubulação frente à variação com o tempo da temperatura de entrada (simulações dinâmicas com ajuste do passo $\Delta t$ ). . . . .	173
7.3	Respostas previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> da fração de vazios e da pressão na saída da tubulação frente à variação com o tempo da temperatura de entrada (comparação das simulações dinâmicas com passo $\Delta t$ fixo e variável). . . . .	174

# Lista de Tabelas

3.1	Determinação do regime de escoamento bifásico (orientação horizontal) pelo método de Beggs & Brill. . . . .	73
3.2	Coeficientes empíricos para cálculo de $HL_{(0)}$ (método de Beggs & Brill)	73
3.3	Coeficientes empíricos para cálculo do fator corretivo $\Psi$ (método de Beggs & Brill) . . . . .	74
4.1	Composição molar da corrente de nafta. . . . .	95
5.1	Resultados de custo computacional para o Cenário 1. . . . .	117
5.2	Resultados de custo computacional para o Cenário 2. . . . .	127
6.1	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime de Bolhas com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	134
6.2	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime <i>Slug</i> com $K_b = 0,45$ e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	138
6.3	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime <i>Slug</i> com $K_b = 4,5$ e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	139
6.4	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em $K_e^{(f)}$ .	140
6.5	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 2,5 em $K_e^{(f)}$ .	142

6.6	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime <i>Mist</i> com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	143
6.7	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média. . . . .	145
6.8	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas a diferentes pressões médias. . . . .	147
6.9	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> no regime de Bolhas com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão. . . . .	149
6.10	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> no regime <i>Slug</i> com $K_b = 0,45$ e com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão. . . . .	151
6.11	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> no regime Anular com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em $K_e^{(f)}$ . . . . .	153
6.12	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> no regime <i>Mist</i> com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão. . . . .	155
6.13	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> no regime Estratificado horizontal com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média. . . . .	157

6.14	Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Estratificado (posições horizontal e $-30^\circ$ ) com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média. . . . .	159
7.1	Passos de integração no tempo ajustados nas simulações dinâmicas com os Modelos de Dois Fluidos e <i>Drift-Flux</i> . . . . .	171
C.1	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime de Bolhas com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	192
C.2	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime <i>Slug</i> com $K_b = 0,45$ e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	194
C.3	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime <i>Slug</i> com $K_b = 4,5$ e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	198
C.4	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em $K_e^{(f)}$ . . . . .	202
C.5	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 2,5 em $K_e^{(f)}$ . . . . .	203
C.6	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime <i>Mist</i> com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão. . . . .	204
C.7	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média. . . . .	205
C.8	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas a diferentes pressões médias. . . . .	206
C.9	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime de Bolhas com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão. . . . .	207

C.10	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime <i>Slug</i> com $K_b = 0,45$ e com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão. . . . .	209
C.11	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Anular com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em $K_e^{(f)}$ . . . . .	213
C.12	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime <i>Mist</i> com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão. . . . .	214
C.13	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Estratificado horizontal com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média. . . . .	215
C.14	Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Estratificado (posições horizontal e $-30^\circ$ ) com a correlação de CHAXTON <i>et al.</i> (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média.	216

# Lista de Símbolos

$a_{lv}$	área interfacial específica, p. 83
$C_0$	parâmetro de distribuição, p. 61
$d$	diâmetro interno da tubulação ou duto, p. 20
ETL	erro de truncamento local, p. 169
$f$	fator de atrito, p. 19
$F_i$	força de fricção e arrasto interfacial, p. 83
$F_{MV}$	força de massa virtual, p. 88
$F_{mw}$	perda friccional de pressão, p. 63
$g$	aceleração gravitacional, p. 9
$h$	entalpia, p. 12
$HL$	<i>holdup</i> de líquido, p. 70
$\mathbf{I}$	tensor unitário, p. 10
$\langle j_k \rangle$	velocidade superficial da fase $k$ , p. 58
$\mathbb{J}$	fluxo molecular genérico, p. 8
$K_{et}$	constante de proporcionalidade entre o erro de truncamento local e a devida potência do passo de integração no tempo, p. 169
$P$	pressão, p. 9
$\mathbf{q}$	vetor fluxo térmico (condução de calor), p. 12
$Q_{ki}$	termo interfacial de transferência de calor associado à fase $k$ , p. 52

$Q_{kw}$	transferência de calor entre a parede e a fase $k$ , p. 51
$Q_{mw}$	transferência de calor entre a parede e a mistura bifásica, p. 60
$Q_k^V$	vazão volumétrica da fase $k$ , p. 58
$Re$	número de Reynolds, p. 20
$t$	tempo, p. 8
$T$	temperatura, p. 13
$v$	velocidade, p. 11
$\hat{v}_v^{\text{des}}$	velocidade de deslizamento unidimensional, p. 58
$\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$	média transversal ponderada da velocidade local de deslizamento, p. 61
$x$	direção axial do escoamento, p. 19

### Símbolos gregos

$\alpha_k$	fração de vazios da fase $k$ , p. 38
$\Gamma_k$	taxa de transferência de massa por unidade de volume para a fase $k$ , p. 46
$\theta$	ângulo de inclinação em relação à horizontal (positivo para escoamento ascendente), p. 19
$\mu$	viscosidade, p. 5
$\rho$	massa específica, p. 8
$\sigma$	tensão superficial, p. 32
$\tau$	tensor das tensões viscosas, p. 9
$\pi$	tensor das tensões total, p. 10
$\phi$	termo fonte genérico, p. 8
$\psi$	variável intensiva genérica do escoamento, p. 8

# Lista de Abreviaturas

BDF	<i>Backward Differentiation Formulas</i> , p. 109
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i> , p. 8
DAE	<i>Differential-Algebraic Equations</i> , p. 108
DNS	<i>Direct Numerical Simulation</i> , p. 15
EDO	Equação Diferencial Ordinária, p. 18
HEM	<i>Homogeneous Equilibrium Model</i> , p. 64
IATE	<i>Interfacial Area Transport Equations</i> , p. 24
RANS	<i>Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations</i> , p. 17
TTR	Teorema do Transporte de Reynolds, p. 7



# Capítulo 1

## Introdução

Para os propósitos do presente trabalho, o termo *fase* deve ser entendido como sinônimo de *estado físico da matéria*. São designados *escoamentos multifásicos* aqueles processos em que escoam duas ou mais fases imiscíveis ou de estados físicos distintos. A aplicação de interesse aqui é o escoamento simultâneo de uma fase líquida e outra fase vapor através de canais, tubulações e dutos em geral, caso em que também são empregadas as expressões *escoamento bifásico líquido-vapor*, ou mais sucintamente, *escoamento bifásico*.

### 1.1 Aplicações e Motivação

Muito antes do advento das tecnologias industriais mais modernas, escoamentos multifásicos em geral já ocorriam em diversos fenômenos da natureza. No próprio corpo humano, estão presentes nos sistemas cardiovascular e respiratório, no trato gastrointestinal e no controle da temperatura corporal por meio da transpiração. Exemplos de cunho geo-meteorológico, frequentemente citados na literatura, vão desde tempestades de areia, vulcões e avalanches, passando pela formação de névoas, movimento de gotas de chuva e surgimento de *icebergs*, até o comportamento de rios, nuvens e ondas nos oceanos (BRENNEN, 2005; ISHII e HIBIKI, 2011; YEOH e TU, 2010).

Equipamentos e aplicações industriais onde se encontram escoamentos multifásicos incluem caldeiras industriais, leitos fluidizados e permutadores de calor em geral, processos de separação por flotação e extração líquido-líquido, tratamento de esgoto urbano, motores de combustão interna e sistemas prediais de prevenção contra incêndios (ISHII e HIBIKI, 2011; YEOH e TU, 2010).

Segundo GHIAASIAAN (2008), os núcleos da quase totalidade dos reatores de energia nuclear atualmente em operação consistem basicamente de barras de combustível (*fuel rods*, também conhecidas como *varetas combustíveis*) resfriadas por escoamento externo de água. Nesta aplicação, o escoamento bifásico líquido-vapor

ocorre tanto na operação normal de *Reatores de Água Fervente (Boiling Water Reactors - BWR)* quanto em acidentes envolvendo *Reatores de Água Pressurizada (Pressurized Water Reactors - PWR)*. KOLEV (2006) destaca que o calor produzido nos núcleos destes reatores é quase integralmente liberado sobre materiais sólidos, os quais inevitavelmente derretem se o resfriamento for ineficaz.

Escoamentos bifásicos predominantemente unidimensionais também são encontrados nas principais etapas da cadeia produtiva do petróleo, a começar por sua extração de reservatórios em que não ocorre escoamento de água para o poço junto aos hidrocarbonetos produzidos (ABDEL-AAL *et al.*, 2003). No segmento *downstream* encontram-se cargas parcialmente vaporizadas para torres de fracionamento, assim como outras linhas bifásicas distribuídas por unidades de destilação. Instabilidades na operação das colunas, danos a seus pratos e prejuízos à separação almejada dos produtos podem resultar de projetos e condições inadequados nestas tubulações (KISTER, 1990, 2006).

Variações particularmente bruscas do escoamento multifásico através dos *risers*<sup>1</sup> dificultam a separação entre água e óleo e podem provocar paradas de emergência indesejadas das plataformas por níveis muito altos nos separadores, caso não sejam eliminadas pelo sistema de controle. O desenvolvimento de tal sistema, por sua vez, depende de um modelo, mesmo que simplificado, do escoamento em questão (CAMPOS e TEIXEIRA, 2006).

Ainda na indústria de hidrocarbonetos, é frequente que o gás natural precise ser transportado por grandes distâncias (principalmente aquele de produção *offshore*), atravessando variadas condições de relevo e temperatura. As inevitáveis mudanças de pressão e temperatura frequentemente causam a condensação de líquidos nos dutos, acarretando o transporte bifásico do gás produzido e impactando os cálculos necessários de variação de pressão. Vale lembrar que água também pode ser produzida a partir de reservatórios de gás (KELKAR, 2008; MOKHATAB e POE, 2012).

Em termos mais gerais, COKER (2007) afirma que quase todas as unidades de processo incorrem em condições de escoamento bifásico líquido-vapor por tubulações, e destaca que baixas porcentagens de vapor (7% a 8% em volume) já influenciam as variáveis relevantes em medida suficiente para exigir métodos específicos de análise. Segundo o mesmo autor, o tratamento inadequado destes casos possui potencial para impedir a operação de sistemas inteiros devido a problemáticas variações de pressão. Em outras situações, as altas velocidades alcançadas pelo líquido podem acentuar as taxas de erosão-corrosão em linhas de processo.

O dimensionamento ótimo dos diâmetros de dutos bifásicos, visando equilibrar custos de energia de bombeamento e investimento fixo, é outro exemplo de aprimoramento dos projetos que depende de métodos para estimar a variação de pressão

---

<sup>1</sup>Tubulações que ligam os poços no fundo do mar às plataformas.

envolvida (NOLTE, 1979; PETERS *et al.*, 2003; ROTAVA, 2012).

Tamanha gama de aplicações e ocorrências justifica os esforços de pesquisa empreendidos das últimas décadas aos dias atuais nos campos de modelagem e simulação estática e dinâmica de escoamentos bifásicos. Modelos e métodos numéricos eficientes e acurados, equilibrando rigor e custo computacional, precisam ser desenvolvidos e aperfeiçoados para que o comportamento previsto de um sistema bifásico, expresso por suas variáveis-chave, proporcione subsídios seguros e em tempo hábil para fins de projeto, estudos de operação e controle de processos e, seguindo tendência recente, o treinamento interativo de pessoal em tempo real.

## 1.2 Evolução Histórica

BRILL e MUKHERJEE (1999) destacam os anos entre 1950 e 1975 como o período aproximado em que foram desenvolvidos os primeiros métodos empíricos para representar escoamentos multifásicos em poços de petróleo e gás. Tratam-se de correlações de dados de laboratório (e também de medições de campo, em alguns poucos casos) para frações volumétricas e gradientes axiais de pressão, com os últimos parcialmente modelados sob a consideração de mistura bifásica homogênea em estado estacionário. Os limites de acurácia associados ao fraco caráter fenomenológico desta abordagem logo tornaram-se evidentes, e a indústria do petróleo passou a buscar aprofundamento teórico por meio das equações de conservação de massa, momentum e energia, de desenvolvimento mais avançado até então na engenharia nuclear.

Em acordo com a evolução descrita, GHIAASIAAN (2008) atribui a origem da crescente aplicação de princípios fundamentais em detrimento de modelos majoritariamente empíricos ao advento dos reatores nucleares por volta da metade do século XX, motivada pelo entendimento de que sua segurança depende em larga medida da compreensão de escoamentos bifásicos e de fenômenos relacionados à evaporação. O mesmo autor ressalta, contudo, que o estudo do escoamento bifásico líquido-vapor ainda possui destacado caráter empírico mesmo nos dias atuais, em razão da elevada complexidade dos mecanismos envolvidos.

Como se vê, a evolução separada das indústrias nuclear e do petróleo originou oportunidades de aprimoramento na segunda pelo emprego de resultados da primeira. A solução numérica dos modelos unidimensionais para dutos de transporte bifásico parece estar seguindo tendência análoga. Técnicas de integração numérica mais diretas e/ou acuradas, há muito consolidadas no estudo de equações diferenciais e sistemas não-lineares, vêm sendo cada vez mais aproveitadas na geometria de interesse em substituição a algoritmos iterativos de aplicação geral, classificados como *segregados* e frequentemente baseados em discretizações de baixa ordem.

## 1.3 Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo principal a proposta de uma nova abordagem numérica para a solução dos modelos unidimensionais de escoamento bifásico líquido-vapor. Almeja-se que a mesma seja tão eficiente e acurada quanto possível com o estado da arte dos métodos numéricos aplicáveis, estando portanto apta a substituir as práticas atualmente consolidadas nesta área de estudo dos Fenômenos de Transporte.

Para tanto, o presente documento está dividido em 8 Capítulos. O Capítulo 2 repassa as definições e conceitos básicos de Fenômenos de Transporte que servem de base para o estudo do escoamento bifásico, introduzindo ao mesmo tempo a notação utilizada para diversas variáveis, fluxos e tensões. No Capítulo 3, estes resultados são combinados com as particularidades do escoamento bifásico de modo a se chegar ao estado da arte no que se refere à sua modelagem matemática. De forma inédita na literatura, todas as abordagens já concebidas para cálculos práticos de escoamentos bifásicos em projetos de engenharia são apresentadas, desenvolvidas e situadas sobre uma única base teórica, o que foi possível mediante a unificação de nomenclaturas e a proposta de novas deduções. A revisão bibliográfica do escoamento bifásico é concluída no Capítulo 4, com a apresentação das equações constitutivas pesquisadas. O Capítulo 5 apresenta os principais resultados numéricos desta Tese, justificando com a devida fundamentação a proposta de Abordagem Algébrico-Diferencial do problema de interesse e comparando de forma objetiva o seu desempenho no problema estacionário contra aquele das práticas atualmente adotadas. Subsequentemente, o Capítulo 6 aplica a nova técnica à verificação do desempenho dos modelos estudados na reprodução de medidas experimentais, aprimorando-se assim não apenas a etapa de solução numérica, mas também a de seleção das melhores equações. Por fim, o Capítulo 7 inicia a extensão da Abordagem Algébrico-Diferencial proposta para problemas transientes, apresentando e discutindo os primeiros resultados desta técnica aplicada a simulações dinâmicas. O Capítulo 8 sintetiza as principais conclusões desta Tese e traça algumas possibilidades de extensão em trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Hipótese do Contínuo e Escoamento Monofásico

Como será visto adiante, o desenvolvimento dos principais modelos matemáticos do escoamento bifásico líquido-vapor e suas aplicações publicadas ao problema estudado fazem uso intensivo dos conceitos, definições e equações de conservação consolidados para escoamentos compostos de uma única fase na disciplina de Fenômenos de Transporte. Não por acaso, diversas publicações dedicadas a processos multifásicos reapresentam em seus capítulos ou páginas iniciais esta base teórica dos escoamentos *monofásicos* (BRILL e MUKHERJEE, 1999; GHIAASIAAN, 2008; ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003). Tais conceitos são revisados no presente capítulo.

### 2.1 Definição de Fluido

A mais difundida definição formal de *fluido* é aquela que classifica como tal qualquer substância que se deforma *continuamente* mediante a aplicação de uma tensão de cisalhamento (tangencial) de qualquer magnitude. Tal definição engloba as fases líquida e gasosa da matéria (a fase sólida também se deforma sob uma tensão de cisalhamento, mas não continuamente). O grau de deformação experimentado por dado fluido sob força cisalhante é função de sua viscosidade  $\mu$  (FOX *et al.*, 2011; KLEINSTREUER, 2010).

### 2.2 A Hipótese do Contínuo

Em tese, todos os escoamentos de fluidos podem ser modelados *microscopicamente* por meio do cálculo das posições e velocidades de todas as moléculas envolvidas como funções do tempo. O cômputo de *médias* adequadas de tais resultados, disponíveis de forma *discreta* (isto é, para cada molécula), resultaria em grandezas

ditas *macroscópicas*, como os campos de pressões, temperaturas e velocidades do escoamento. Uma vantagem desta abordagem seria sua aplicabilidade geral, dispensando modelagem complementar de fenômenos como a turbulência. Sua principal e decisiva desvantagem é a enorme capacidade computacional requerida para o cálculo de vastas quantidades de espécies moleculares, restringindo sua aplicabilidade atual a problemas selecionados, envolvendo números reduzidos de entidades (FAGHRI e ZHANG, 2006; KLEINSTREUER, 2010).

Felizmente, na maioria dos problemas de interesse da engenharia, a *trajetória média livre* das moléculas constituintes dos fluidos (isto é, a distância média percorrida pelas mesmas entre colisões) possui ordem de grandeza bastante reduzida frente à menor dimensão característica do sistema estudado, permitindo tratar as diversas propriedades macroscópicas do escoamento (massa específica, temperatura, velocidade e afins) como funções contínuas da posição e do tempo. Em termos formais, um fluido pode ser tratado como um *meio contínuo*, ignorando-se estruturas e movimentos moleculares, quando um limite mínimo de volume  $\delta V'$  (bastante reduzido) compreender uma quantidade suficiente de moléculas tal que, para toda propriedade macroscópica de interesse  $\varphi$  em todo ponto  $i$  (FOX *et al.*, 2011; KLEINSTREUER, 2003; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007):

$$\lim_{\delta V \rightarrow \delta V'} \varphi = \varphi_i \quad (2.1)$$

em que  $\delta V$  é um volume medido em torno do ponto  $i$ . Para um volume  $\delta V < \delta V'$ , o valor da propriedade  $\varphi$  varia de forma imprevisível à medida que moléculas entram e saem do mesmo.

Em certos problemas especiais (por exemplo, envolvendo gases rarefeitos), a supracitada trajetória média livre das moléculas assume proporções tais que a hipótese do contínuo deixa de ser válida, e o uso da abordagem microscópica pode ser necessário (FOX *et al.*, 2011).

## 2.3 Descrições Euleriana e Lagrangiana

Certos problemas da engenharia envolvem elementos de massa fixa e pronta delimitação, enquanto outros lidam com volumes de controle abertos, cujas fronteiras são constantemente atravessadas por massa, momentum e energia. A abordagem *Lagrangiana*, que consiste na descrição do movimento e das propriedades de partículas definidas, é uma escolha adequada para a solução do primeiro tipo. Em linha com a discussão precedente, convém mencionar que este método também poderia ser aplicado à análise de escoamentos de fluidos, após subdividí-los em um grande número de partículas a acompanhar. Entretanto, com frequência é mais conveniente desen-

volver as equações necessárias para diversos volumes de controle, os quais, juntos, compõem a região espacial de interesse. Neste método *Euleriano* de descrição, o foco são as propriedades do escoamento em dado ponto no espaço como função do tempo - uma decorrência natural da hipótese do contínuo (FOX *et al.*, 2011; KLEINS-TREUER, 2010; MOUKALLED *et al.*, 2016; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

## 2.4 As Equações Diferenciais de Balanço

Qualquer escoamento de fluidos é regido pelos mesmos princípios de conservação válidos para *sistemas* delimitados e suas propriedades *extensivas* (que dependem da *extensão* do sistema), como a *segunda lei de Newton* ou a *primeira lei da termodinâmica*. O cálculo individualizado das dinâmicas de diversas *partículas* apresenta a vantagem de aplicabilidade direta destas leis e pode ser necessário, por exemplo, em estudos relacionados à poluição. Entretanto, conforme discutido, diversas aplicações práticas tornam preferível o estudo de uma região do espaço que é atravessada pelo fluido de interesse (um volume de controle) (FOX *et al.*, 2011).

Segundo o *Teorema do Transporte de Reynolds* (TTR), uma vez delimitado um volume de controle em dado instante de tempo, a taxa de variação temporal de dada quantidade extensiva da massa ali contida (*sistema*) equivale à soma de duas contribuições: a taxa de variação temporal da mesma grandeza no interior do volume, e a taxa *líquida* de saída desta propriedade, através da superfície que o delimita, pelo mecanismo *advectivo*. Assim, este Teorema permite transportar os enunciados originais dos princípios de conservação relevantes para a formulação desejada, em termos de volumes de controle (FERZIGER e PERIC, 2002; FOX *et al.*, 2011; MOUKALLED *et al.*, 2016).

As supracitadas quantidades extensivas possuem relações simples com as correspondentes propriedades *intensivas* do escoamento (independentes de sua extensão, expressas por unidade de massa ou volume). O TTR pode ser facilmente reescrito em função das mesmas. Cada princípio de conservação fornece uma relação para a taxa de variação temporal de alguma propriedade, e a combinação destas leis com o TTR conduz a equações de balanço em forma *integral*.

As equações integrais de balanço permitem quantificar os efeitos dos escoamentos sobre peças ou equipamentos, sem fornecer, contudo, resultados “ponto a ponto” de pressões, velocidades e outras propriedades. Cálculos de tais *distribuições* detalhadas requerem equações *diferenciais* de balanço, as quais também podem ser deduzidas a partir da abordagem discutida. Tomando-se um volume de controle infinitesimal na mesma após a aplicação do *Teorema da Divergência de Gauss* onde necessário (para expressar integrais por superfícies como integrais sobre volumes),

chega-se finalmente às *equações diferenciais de balanço*, que possuem a seguinte forma geral (FERZIGER e PERIC, 2002; FOX *et al.*, 2011; GHIAASIAAN, 2008; ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003):

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \psi) = -\nabla \cdot \mathbb{J} + \rho \phi \quad (2.2)$$

Na Equação 2.2,  $\psi$  é uma variável intensiva genérica do escoamento, expressa por unidade de massa, e  $\mathbb{J}$  e  $\phi$  são as correspondentes representações genéricas dos *fluxos moleculares* e *termos fonte*. A massa específica do fluido e o vetor velocidade do escoamento são simbolizados por  $\rho$  e  $\mathbf{v}$ .

Diversos casos particulares da Equação 2.2 incluem fluxos moleculares *difusivos* proporcionais ao gradiente da variável intensiva considerada, levando diversos autores a adotar a seguinte formulação genérica alternativa (FERZIGER e PERIC, 2002; MOUKALLED *et al.*, 2016; PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007):

$$\frac{\partial \rho \psi}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \psi) = \nabla \cdot (\Gamma \nabla \psi) + S \quad (2.3)$$

em que  $\Gamma$  é um *coeficiente de difusão* genérico e  $S$  é outra representação comum dos termos fonte. Os quatro termos que compõem a Equação 2.3 são comumente denominados *transiente*, *advectivo*, *difusivo* e *fonte*, e todos representam variações ou influências por unidade de volume. O termo transiente, por exemplo, representa a taxa de variação temporal da propriedade extensiva em consideração por unidade de volume. Já o divergente de um fluxo qualquer equivale à correspondente taxa líquida de saída por unidade de volume. A expressão apropriada do *operador vetorial*  $\nabla$ , por sua vez, depende do sistema de coordenadas adotado (FOX *et al.*, 2011; PATANKAR, 1980).

Deve ser ressaltado que nem todo fluxo de natureza difusiva é formulado em função de  $\nabla \psi$ . Tais fluxos devem ser tratados como parte do termo fonte  $S$ , o mesmo ocorrendo com termos exclusivos de certos casos particulares da equação geral (PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

O entendimento de todas as equações de balanço como casos especiais da formulação genérica da Equação 2.3 abrevia o desenvolvimento de métodos numéricos de solução de problemas de escoamento, como o dos *volumes finitos*. De fato, as principais publicações relacionadas abordam apenas o caso geral na apresentação das principais técnicas numéricas. Assim, a aplicação destes métodos a cada equação de balanço particular torna-se natural, bastando atribuir valores ou formulações adequados a  $\Gamma$ ,  $S$  e afins. Simulações CFD (*Computational Fluid Dynamics*) baseiam-se justamente nestes procedimentos de discretização e solução das equações de balanço (FERZIGER e PERIC, 2002; PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).



No que segue, são apresentadas em maior detalhe as equações de balanço necessárias ao desenvolvimento do presente trabalho, as quais expressam os princípios de conservação de massa, momentum e energia.

### 2.4.1 A Equação da Continuidade

As Equações 2.2 e 2.3 são adaptadas ao princípio de conservação de massa fazendo-se  $\psi = 1$  e  $\mathbb{J} = \Gamma = \phi = S = 0$ , do que resulta a conhecida *equação da continuidade* (BIRD *et al.*, 2002; ISHII e HIBIKI, 2011; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4)$$

Conforme discutido anteriormente, o primeiro termo da Equação 2.4 dá a taxa de acúmulo da massa por unidade de volume. O segundo expressa a taxa líquida de diminuição da mesma pelo mecanismo de advecção (isto é, devido ao movimento macroscópico do fluido), também por unidade de volume (BIRD *et al.*, 2002).

### 2.4.2 A Equação do Movimento

De acordo com a segunda lei de Newton, a taxa de variação com o tempo da *quantidade de movimento* (ou momentum) de um sistema é igual à soma de todas as forças externas atuando sobre o mesmo. Aqui, portanto, o momentum é a grandeza extensiva de interesse. A propriedade intensiva correspondente (momentum por unidade de massa) é a velocidade (FERZIGER e PERIC, 2002; FOX *et al.*, 2011). Não custa lembrar que, ao contrário da pressão e da energia, que são variáveis *escalares*, o momentum é uma grandeza *vetorial* (BIRD *et al.*, 2002).

As forças que atuam sobre o fluido em dado volume de controle subdividem-se em *forças de campo* (que atuam por todo o volume do fluido sem contato físico) e *forças de superfície* (que atuam por contato direto nas fronteiras de um sistema). A principal força de campo a considerar é a que resulta do campo gravitacional terrestre, incluindo-se o vetor aceleração gravitacional  $\mathbf{g}$  como termo fonte na Equação 2.2:

$$\phi = \mathbf{g} \quad (2.5)$$

As forças de superfície são totalizadas pela integração superficial do *tensor das tensões*  $\boldsymbol{\pi}$  (por vezes denominado *tensor das tensões total* ou *tensor das tensões de Cauchy*), o qual é composto pelo *tensor das tensões viscosas*  $\boldsymbol{\tau}$  e pelas tensões (forças por unidade de área) associadas à pressão  $P$  (BIRD *et al.*, 2002; FERZIGER

e PERIC, 2002; ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2010):

$$\boldsymbol{\pi} = -P\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.6)$$

Na Equação 2.6,  $\mathbf{I}$  representa o *tensor unitário*, cujos componentes são dados pelo *delta de Kronecker* ( $\delta_{ii} = 1$ , e  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ ). As tensões  $\pi_{ii} = -P + \tau_{ii}$  são classificadas como *tensões normais*, e as demais ( $\pi_{ij} = \tau_{ij}$  em que  $i \neq j$ ), como *tensões cisalhantes* (tradução de *shear stresses*). As forças de pressão estão presentes tanto em fluidos em repouso quanto em movimento. As forças viscosas manifestam-se apenas na presença de gradientes de velocidade no fluido (BIRD *et al.*, 2002).

Existem duas interpretações físicas comuns para o tensor das tensões. Segundo uma delas, a tensão  $\pi_{ij}$  representa a força, na direção  $j$ , sobre uma área unitária normal à direção  $i$ . Alternativamente,  $\pi_{ij}$  pode ser entendido como o fluxo do componente  $j$  do momentum na direção  $i$ . Em ambos os casos, os *sentidos* envolvidos dependem da convenção de sinais adotada. A primeira interpretação se mostra mais natural no cômputo das forças superficiais por integração, como já foi mencionado. A segunda parece preferível quando substitui-se  $\mathbb{J} = -\boldsymbol{\pi}$  na Equação 2.2, junto com  $\psi = \mathbf{v}$  e a consideração da Equação 2.5, do que resulta (BIRD *et al.*, 2002; ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003):

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2.7)$$

Este resultado é conhecido como a *equação do movimento*. Ressalta-se que esta é uma equação vetorial de três componentes (um para cada componente do vetor velocidade). Existem muitos escoamentos em que as forças viscosas têm relativamente pouca importância, o que é matematicamente expresso fazendo-se  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = 0$  na Equação 2.7 (BIRD *et al.*, 2002).

No caso geral, não é possível resolver a equação do movimento sem uma *equação constitutiva reológica* para  $\boldsymbol{\tau}$ . Para fluidos *Newtonianos*, dispõe-se da seguinte generalização da *lei de Newton da viscosidade* (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left[ \nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T \right] - \left( \frac{2}{3} \mu - \kappa \right) (\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{I} \quad (2.8)$$

em que  $(\nabla \mathbf{v})^T$  é o transposto do tensor gradiente de velocidade e  $\kappa$  é a *viscosidade dilatacional* do fluido. Na grande maioria dos casos, a solução de problemas de escoamento dispensa o conhecimento deste último coeficiente. Gases são aproximados como ideais e monoatômicos, para os quais  $\kappa = 0$ . Líquidos, por sua vez, são frequentemente tratados como *incompressíveis* devido às variações desprezíveis em sua

massa específica, caso em que o último termo da equação constitutiva 2.8 se anula, já que a equação da continuidade simplifica-se para (BIRD *et al.*, 2002):

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.9)$$

Todos os líquidos e todos os gases cujas moléculas constituintes possuam massas molares de no máximo cerca de 5000 kg/kmol (portanto, uma ampla variedade de fluidos de interesse prático) são bem descritos pelo modelo de fluido Newtoniano. Em contrapartida, soluções poliméricas, emulsões e pastas são exemplos de fluidos *não-Newtonianos*, para os quais a Equação 2.8 não é válida (BIRD *et al.*, 2002).

É importante ressaltar que BIRD *et al.* (2002) adotam convenção de sinais oposta à preferida pela maioria dos demais textos para  $\boldsymbol{\tau}$  e  $\boldsymbol{\pi}$ , o que justificam apontando vantagens decorrentes. A convenção proposta não é seguida por diversas publicações de relevância para o presente trabalho (FERZIGER e PERIC, 2002), incluindo-se aí as que tratam especificamente do escoamento bifásico (FAGHRI e ZHANG, 2006; ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003), motivo pelo qual também não foi adotada na formulação acima. Uma consequência disto é que o equacionamento apresentado mostra as devidas diferenças de sinais em comparação com BIRD *et al.* (2002). Entretanto, estes mesmos autores enfatizam o caráter arbitrário desta escolha, a qual impacta apenas os significados físicos das grandezas envolvidas.

### 2.4.3 A Equação da Energia

Pela aplicação da *primeira lei da termodinâmica* a dado sistema, demonstra-se que a taxa de variação com o tempo de sua energia *total* (interna, cinética e potencial) é igual à taxa líquida de energia trocada com suas vizinhanças por meio de calor e trabalho (FOX *et al.*, 2011; SMITH *et al.*, 2001). Normalmente, na modelagem de problemas de escoamento, a única forma de energia potencial considerada é a de natureza gravitacional. Isto também pode ser feito de forma indireta, pela inclusão do trabalho realizado pela força de gravidade (BIRD *et al.*, 2002). Neste caso, a quantidade extensiva estudada corresponde à soma das energias cinética total (associadas ao vetor velocidade  $\mathbf{v}$  do fluido) e interna total (função de interações, vibrações e rotações das moléculas constituintes do fluido, incluindo também suas energias cinéticas associadas a seus movimentos relativos a  $\mathbf{v}$ ). A propriedade intensiva correspondente é a soma das energias interna e cinética por unidade de massa:  $\psi = U + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})/2 = U + v^2/2$ , em que (BIRD *et al.*, 2002; FOX *et al.*, 2011):

$$v^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \sum_i v_i^2 \quad (2.10)$$

A taxa de trabalho realizado por uma força (grandeza vetorial) é dada por seu *produto escalar* pelo vetor velocidade (FOX *et al.*, 2011). A Equação 2.2 é adaptada para o caso particular da conservação da energia substituindo-se (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$\mathbb{J} = \mathbf{q} - \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v} \quad (2.11a)$$

$$\phi = \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + \frac{\dot{q}}{\rho} \quad (2.11b)$$

do que resulta a chamada *equação da energia*:

$$\frac{\partial [\rho(U + v^2/2)]}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \right] = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) + \dot{q} \quad (2.12)$$

em que  $\mathbf{q}$  e  $\dot{q}$  representam, respectivamente, o *vetor fluxo térmico* (condução de calor por mecanismo molecular) e a transferência de energia por mecanismos como *radiação* (BIRD *et al.*, 2002; ISHII e HIBIKI, 2011).

A separação das forças de pressão e viscosas pode ser feita pela substituição da Equação 2.6 no resultado anterior, permitindo reescrevê-lo como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\rho(U + v^2/2)]}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \rho \left( U + \frac{v^2}{2} \right) \mathbf{v} \right] = \\ -\nabla \cdot \mathbf{q} - \nabla \cdot (P\mathbf{v}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{g} \cdot \mathbf{v}) + \dot{q} \end{aligned} \quad (2.13)$$

O primeiro termo no lado direito da Equação 2.13 representa a taxa de acréscimo de energia por unidade de volume proporcionada pela condução de calor. Já o segundo, terceiro e quarto termos expressam as taxas de trabalho realizadas sobre o fluido, também por unidade de volume, pelas forças de pressão, viscosas e gravitacional (BIRD *et al.*, 2002).

A equação da energia 2.13 é costumeiramente manipulada visando eliminar as variações de energia cinética. Tomando-se o produto escalar do vetor velocidade pela equação do movimento, obtém-se uma equação diferencial de balanço para a energia cinética; a subtração deste resultado da Equação 2.13 resulta em outra equação de balanço para a energia interna. Supondo-se que os resultados da termodinâmica do equilíbrio podem ser aplicados localmente a sistemas não-equilibrados, pode-se substituir a energia interna em sua equação de balanço pela seguinte relação com a *entalpia*  $h$  (BIRD *et al.*, 2002; ISHII e HIBIKI, 2011; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007):

$$U = h - \frac{P}{\rho} \quad (2.14)$$

do que resulta:

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + \frac{\partial P}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla P) + (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) + \dot{q} \quad (2.15)$$

A solução da equação da energia exige uma equação constitutiva para o vetor fluxo térmico. A maioria dos fluidos *isotrópicos* (isto é, sem direções preferenciais para a condução do calor) segue a formulação tridimensional da *Lei de Fourier da Condução de Calor* (BERGMAN *et al.*, 2011; BIRD *et al.*, 2002):

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (2.16)$$

em que o escalar  $k$  é a *condutividade térmica* do fluido e  $T$  é sua temperatura. Materiais *anisotrópicos* são caracterizados não por um único valor de  $k$ , mas sim por um *tensor condutividade térmica*. Em escoamentos através de tubulações, a condução de calor axial é normalmente desprezível frente a seu transporte advectivo nesta direção (BIRD *et al.*, 2002; ISHII e HIBIKI, 2011).

O produto escalar  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  na Equação 2.15 é conhecido como *perda por atrito*, *perda viscosa*, *aquecimento por dissipação viscosa*, ou apenas *aquecimento viscoso*. Sua expressão exata depende do sistema de coordenadas adotado. Em coordenadas cartesianas, a dissipação viscosa é dada por (BIRD *et al.*, 2002):

$$(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) = \sum_i \sum_j \tau_{ji} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (2.17)$$

em que os índices  $i$  e  $j$  representam as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  a cada passagem dos somatórios. A expressão do escalar resultante para o sistema de coordenadas cilíndricas (escolha natural para escoamentos por tubulações de seção transversal circular) não é tão compacta, e pode ser consultada em BIRD *et al.* (2002).

A dissipação viscosa quantifica uma forma de interconversão das energias mecânica e térmica. Esta interpretação física é matematicamente representada pela presença do referido produto escalar, com sinais contrários, nas supracitadas equações de balanço das energias cinética e interna. Para fluidos Newtonianos, é possível demonstrar que o escalar resultante é sempre positivo. Portanto, neste caso, a conversão de energia cinética em energia interna (térmica) devida à viscosidade do fluido é um processo *irreversível* (BIRD *et al.*, 2002).

Em problemas práticos, são esperadas perdas por atrito desprezíveis, a menos que viscosidades ou gradientes de velocidade muito elevados estejam envolvidos, como em certos escoamentos de lubrificantes ou de ar nas vizinhanças de satélites ou foguetes retornando à Terra. Estes são exemplos em que o aquecimento viscoso acarreta mudanças apreciáveis de temperatura no fluido (BIRD *et al.*, 2002).

## 2.5 Balanço de Informação

O cálculo de um escoamento isotérmico de um fluido Newtoniano (ou de um problema onde o campo de temperaturas como função do tempo seja conhecido previamente) passa pela solução das equações da continuidade (Equação 2.4) e do movimento (Equação 2.7), dadas condições iniciais e de contorno apropriadas. Nestas quatro equações diferenciais parciais (ressalta-se mais uma vez a natureza vetorial da equação do movimento) figuram seis incógnitas (as distribuições de  $\rho$ ,  $P$ ,  $\mu$  e dos três componentes de  $\mathbf{v}$ ), configurando-se aí uma deficiência de duas equações.

A conhecida *Regra das Fases de Gibbs*, válida para sistemas em equilíbrio, estabelece que se forem especificadas duas das propriedades intensivas independentes de uma mistura monofásica de composição conhecida (sem reações químicas), as propriedades intensivas restantes estarão determinadas (RIAZI, 2005; SMITH *et al.*, 2001). Como a temperatura é suposta conhecida e as incógnitas do problema incluem a pressão e a massa específica, pode-se eliminar a deficiência de equações identificada pela especificação de uma *equação térmica de estado*  $P = P(\rho, T)$  e de outra equação para a viscosidade:  $\mu = \mu(P, T)$ .

A equação da energia também precisa ser resolvida quando o problema de interesse não é isotérmico e a distribuição de temperaturas não é dada. A inclusão da Equação 2.15 junto com a Lei de Fourier (Equação 2.16) na formulação discutida introduz duas novas incógnitas ( $h$  e  $T$ ), e fica faltando uma equação para fechar o balanço de informação. A *equação calórica de estado*  $h = h(P, T)$  deve ser adicionada para este fim (BIRD *et al.*, 2002; ISHII e HIBIKI, 2011). Logicamente, este raciocínio considera que a condutividade térmica do fluido é conhecida e despreza as influências radioativas, eletromagnéticas e afins. Na inaplicabilidade destas suposições, equacionamento correspondente deve ser especificado para  $k$  e  $\dot{q}$ .

## 2.6 Turbulência

Abaixo de determinados valores *críticos* de *números de Reynolds*, calculados conforme o problema estudado, o movimento de fluidos é dito *laminar*, em alusão à natureza organizada do escoamento suave de camadas adjacentes. Em contrapartida, à medida que o número de Reynolds aumenta, surgem flutuações caóticas, rápidas e aleatórias (de magnitudes possivelmente grandes) em torno dos valores médios das pressões, velocidades, temperaturas e diversas outras variáveis em cada ponto do escoamento, que é então classificado como *turbulento*. Embora cuidados extremos permitam que o escoamento permaneça laminar até mesmo acima dos números de Reynolds críticos, verifica-se que praticamente todos os escoamentos de interesse são turbulentos. Logo, este fenômeno também precisa ser considerado no

equacionamento de problemas de dinâmica dos fluidos (BIRD *et al.*, 2002; WILCOX, 2006).

Flutuações turbulentas são inerentemente transientes e tridimensionais, mesmo que os valores médios das propriedades variem em somente uma ou duas direções. Aproximações bidimensionais não permitem o cálculo detalhado satisfatório de problemas turbulentos, mesmo que o movimento médio seja bidimensional. A visualização de escoamentos turbulentos revela a presença de estruturas rotacionais de diversos tamanhos, denominadas *turbilhões* ou *vórtices* (traduções comuns para *eddies*). Os movimentos dos vórtices aproximam entre si partículas de fluido inicialmente bem afastadas, acentuando as difusões de massa, momentum e energia, o que se constitui na mais importante característica da turbulência do ponto de vista do exercício da engenharia. A energia que mantém a turbulência é extraída do escoamento médio pelos turbilhões de maiores dimensões. Estes transmitem *energia cinética turbulenta* a turbilhões progressivamente menores, e assim sucessivamente (processo frequentemente denominado *cascata de energia*), até que nas escalas mais reduzidas da turbulência (as chamadas *microescalas de Kolmogorov*), a realização de trabalho contra as tensões viscosas termina por dissipar a energia dos menores vórtices, convertendo-a em energia térmica (interna). Verifica-se, portanto, que a perda de energia é acentuada pela turbulência (MOUKALLED *et al.*, 2016; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007; WILCOX, 2006).

Mesmo sendo extremamente reduzidos, os menores comprimentos característicos de escoamentos turbulentos ainda são superiores, em diversas ordens de grandeza, às escalas de comprimento moleculares. WILCOX (2006) discute um exemplo envolvendo escoamento de ar onde o percurso livre médio de suas moléculas é 72 vezes menor que o comprimento de Kolmogorov. Portanto, as equações diferenciais de balanço permanecem aplicáveis a problemas turbulentos. Sua solução numérica precisa (tridimensional e transiente) exige a resolução de todas as escalas relevantes. Mais especificamente, simulações DNS (*Direct Numerical Simulation*) permitem o cálculo das mais rápidas flutuações turbulentas pelo emprego de malhas mais finas e passos de tempo menores que as escalas de Kolmogorov, dispensando modelagem adicional para a turbulência. Todavia, apesar dos avanços registrados no que tange a simulações desta natureza, os recursos computacionais de memória e velocidade disponíveis neste início de século 21 ainda não são suficientes para viabilizar este cálculo nos escoamentos turbulentos encontrados na prática (BIRD *et al.*, 2002; KLEINSTREUER, 2010, 2003; MOUKALLED *et al.*, 2016; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007; WILCOX, 2006).

Felizmente, mesmo que todos os resultados de um escoamento turbulento estivessem disponíveis, a análise de tanta informação normalmente seria realizada a partir de suas *médias temporais*, calculadas por integração sobre um intervalo de tempo

$\Delta t$  suficientemente maior que o máximo período das flutuações, englobando um alto número destas (BIRD *et al.*, 2002; WILCOX, 2006).

O entendimento das grandezas instantâneas que figuram nas equações de balanço como as somas de valores médios com flutuações turbulentas é matematicamente expresso pela chamada *decomposição de Reynolds*. Para a pressão, pode-se escrever (BIRD *et al.*, 2002; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007; WILCOX, 2006):

$$P(\mathbf{x}, t) = \bar{P}(\mathbf{x}, t) + P'(\mathbf{x}, t) \quad (2.18)$$

em que a barra superior destaca o valor médio, a apóstrofe indica as flutuações e  $\mathbf{x}$  é um vetor posição genérico. Equações análogas podem ser escritas para  $T$ , para cada componente de  $\mathbf{v}$  e para outras grandezas do problema.

Por definição, o valor médio de uma variável corresponde à média temporal de seu valor instantâneo, calculada sobre o intervalo de tempo  $\Delta t$ . Seguindo com o exemplo da pressão, isto resulta em (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007; WILCOX, 2006):

$$\bar{P}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} P(\mathbf{x}, s) ds \quad (2.19)$$

O intervalo de tempo da integração deve observar também um limite superior suficientemente menor que o tempo característico de variações não-turbulentas dos valores médios com o tempo, quando elas ocorrem. Entretanto, WILCOX (2006) destaca a existência de problemas nos quais os limites mínimo e máximo discutidos para  $\Delta t$  não diferem por muitas ordens de grandeza. Isto significa que não há um limite de tempo bem definido entre as flutuações turbulentas e as variações de interesse, inviabilizando o uso da média temporal. Uma saída frequentemente apontada é o emprego da *média estatística (ensemble average)*, que consiste no cálculo de valores médios pela média aritmética dos valores instantâneos medidos em diversos “experimentos” hipotéticos sob condições idênticas (FERZIGER e PERIC, 2002; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

Alguns textos (BIRD *et al.*, 2002; ISHII e HIBIKI, 2011) fazem a integração sobre o intervalo  $\Delta t = [t - \Delta t/2; t + \Delta t/2]$ , o que não altera a ideia geral. ISHII e HIBIKI (2011) apresentam  $\Delta t$  como uma escala mínima da coordenada  $t$ , abaixo da qual o operador de diferenciação no tempo não possui significado físico. Estes mesmos autores comparam a obtenção de médias à aplicação de um *filtro passa-baixa*, devido à eliminação do “sinal” indesejado de alta frequência, mas ressaltam a importância de se considerar os efeitos *estatísticos* destas oscilações sobre os fenômenos macroscópicos, como é visto a seguir.

Dado que é sobre os comportamentos dos valores médios das variáveis que o maior interesse recai, é importante reescrever as equações de balanço em função das médias temporais. O procedimento geral neste sentido é o cômputo das médias das próprias



equações de balanço, após a substituição nas mesmas das variáveis instantâneas pelas correspondentes decomposições de Reynolds (BIRD *et al.*, 2002; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007; WILCOX, 2006). Para um fluido Newtoniano de  $\rho$  e  $\mu$  constantes (exemplo ilustrativo padrão na literatura relacionada), já foi apresentada a equação da continuidade 2.9 a utilizar. A forma exata da equação do movimento 2.7 resulta de sua combinação com a equação constitutiva 2.8. Observando-se que  $\nabla \cdot [(\nabla \mathbf{v})^T] = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0$  neste problema, obtém-se a seguinte *equação de Navier-Stokes* (BIRD *et al.*, 2002):

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla P + \mu [\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}] + \rho \mathbf{g} \quad (2.20)$$

Em coordenadas cartesianas, a equação na direção  $x$  é:

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v_x \mathbf{v}) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu [\nabla \cdot \nabla v_x] + \rho g_x \quad (2.21)$$

Seguindo-se os passos descritos na reformulação do problema em função das médias, obtém-se as formas das equações da continuidade e do movimento mais conhecidas como RANS (*Reynolds-Averaged Navier-Stokes equations*) (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007; WILCOX, 2006):

$$\nabla \cdot \left[ \begin{array}{c} \bar{v}_x \\ \bar{v}_y \\ \bar{v}_z \end{array} \right] = \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (2.22a)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_x}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}_x \bar{\mathbf{v}}) = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu [\nabla \cdot \nabla \bar{v}_x] + \rho g_x - \left[ \frac{\partial \rho \overline{v'_x v'_x}}{\partial x} + \frac{\partial \rho \overline{v'_y v'_x}}{\partial y} + \frac{\partial \rho \overline{v'_z v'_x}}{\partial z} \right] \quad (2.22b)$$

A comparação destes resultados com as equações de balanço originais (2.9 e 2.21) revela que a única modificação na equação da continuidade foi a substituição das variáveis instantâneas pelas respectivas médias. Por outro lado, além desta mudança, a equação média do movimento também difere da instantânea pelo surgimento do último somatório entre colchetes na Equação 2.22b, expresso em função das *tensões de Reynolds* (como são denominados os produtos  $-\rho \overline{v'_i v'_j}$ ), associadas ao transporte advectivo de momento devido aos vórtices turbulentos (BIRD *et al.*, 2002; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007; WILCOX, 2006).

Relações facilmente demonstráveis, como  $\overline{v'_i} = 0$  e  $\overline{v'_i v'_i} = 0$ , permitem o descarte de diversos termos que surgem na dedução das equações RANS. Entretanto, o comportamento dos turbilhões turbulentos origina uma *correlação* entre os diferentes componentes do vetor velocidade; as flutuações em dada direção  $i$  não são independentes daquelas em outra direção  $j$ , e por isso, a média  $\overline{v'_i v'_j}$  não é nula, compondo tensões normalmente altas em relação às viscosas (BIRD *et al.*, 2002; VERSTEEG

e MALALASEKERA, 2007).

O cálculo das variáveis médias pelas Equações 2.22 passa pela especificação de um *modelo de turbulência* para as tensões de Reynolds (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007). O modelo  $\kappa - \epsilon$  é frequentemente citado na literatura. WILCOX (2006) discute e apresenta diversos resultados calculados com este modelo e também com o  $\kappa - \omega$ . Se o escoamento considerado não for isotérmico, será necessário ainda outro modelo adicional, desta vez para o *fluxo térmico turbulento*, originado da correlação entre as oscilações da velocidade e da temperatura (BIRD *et al.*, 2002).

Por não ser este o foco principal do presente trabalho, não foram abordados tópicos como *instabilidade hidrodinâmica* e transição (região desprezada pelos principais simuladores CFD, que classificam os escoamentos apenas como laminares ou turbulentos), simulações LES (*Large Eddy Simulation*, de custo computacional alto, porém intermediário entre DNS e RANS) ou o emprego de *médias de Favre* em escoamentos compressíveis (quando as flutuações na massa específica também precisam ser consideradas). Maior ênfase foi dada à aplicação de médias no tratamento da complexidade introduzida por oscilações indesejadas e imprevisíveis *a priori*, uma vez que, como é visto adiante, problemas turbulentos e escoamentos multifásicos são semelhantes sob este aspecto (FERZIGER e PERIC, 2002; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007; WILCOX, 2006).

## 2.7 Balanços Macroscópicos em Tubulações

Os *balanços macroscópicos* apresentados por BIRD *et al.* (2002) permitem o cálculo de quantidades globais de escoamentos que atravessam sistemas macroscópicos (por exemplo, um ou mais equipamentos), relacionando suas condições de entrada e saída sem entrar muito nos detalhes do que ocorre em seu interior. Tais balanços constituem-se em Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) no tempo, reduzindo-se a relações algébricas no estado estacionário.

Segundo KOLEV (2006), a “arte da engenharia” reside na busca pelo modelo matemático mais simples possível para dado problema, fazendo-se as aproximações necessárias para permitir sua solução sem desprezar os mecanismos físicos mais importantes. Sob esta ótica, em cálculos como o da variação de pressão total em tubulações e dutos, faz sentido que as equações diferenciais de balanço sejam preteridas em favor dos balanços macroscópicos, de inferior complexidade, sempre que os resultados proporcionados por estes se mostrarem suficientemente acurados.

São apresentados a seguir os balanços macroscópicos relacionados ao desenvolvimento do presente trabalho.

### 2.7.1 Balanço Macroscópico de Energia Mecânica

O ponto de partida para a obtenção do *balanço macroscópico de energia mecânica* é a integração, sobre todo o volume do escoamento em estudo, da equação diferencial de balanço da energia cinética, mencionada anteriormente. Na integração de cada termo desta equação, supõe-se que as velocidades médias temporais de entrada e saída são perpendiculares às respectivas seções retas da tubulação, e que a pressão e as propriedades físicas do fluido não variam sobre as mesmas seções transversais. Os termos associados ao trabalho realizado pelas forças viscosas  $\boldsymbol{\tau}$  nestas posições, normalmente insignificantes frente à contribuição das forças de pressão, também são descartados.

Do procedimento descrito, resulta uma EDO no tempo, conforme mencionado acima. Em um problema em estado estacionário, descarta-se o termo transiente, restando uma equação algébrica. Há que se considerar, entretanto, que as variações de pressão e temperatura na direção axial do escoamento inevitavelmente dão origem a gradientes de suas propriedades físicas nesta direção. Esta é a motivação para escrever o balanço estacionário para um comprimento diferencial axial  $dx$ .

Cumpre lembrar que a mudança de elevação correspondente vale  $\sin(\theta) dx$  (em que  $\theta$  é o menor ângulo de inclinação do tubo em relação à horizontal, positivo para fluxos ascendentes) e que uma tubulação não possui superfícies móveis para realizar trabalho. Supondo-se ainda a existência de uma *linha de corrente representativa* no sistema, chega-se a (BIRD *et al.*, 2002):

$$v dv + g \sin(\theta) dx + \frac{1}{\rho} dP = -d\hat{E}_v \quad (2.23)$$

em que  $v$  deve ser interpretada como a média da velocidade sobre a seção transversal do duto, desprezando-se suas flutuações caso o escoamento seja turbulento. A dissipação viscosa por unidade de massa,  $\hat{E}_v$ , é definida como:

$$\hat{E}_v \equiv \frac{1}{w} \int_V (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v}) dV \quad (2.24)$$

em que  $w$  é a vazão mássica do escoamento e  $V$  é o volume da tubulação em questão. Destaca-se que a dedução da Equação 2.23 não supôs que o sistema fosse isotérmico. Portanto, este resultado também é válido para escoamentos não-isotérmicos.

A definição rigorosa da Equação 2.24 não é utilizada na prática para o cálculo da perda viscosa. É possível relacioná-la à força exercida pelo fluido sobre a tubulação, e daí, ao *fator de atrito*  $f$ , obtendo-se (BIRD *et al.*, 2002):

$$d\hat{E}_v = f \frac{dx}{d} \frac{v^2}{2} \quad (2.25)$$

em que  $d$  é o diâmetro interno da tubulação. Introduzindo-se esta relação na Equação 2.23 e rearranjando-se o resultado, chega-se finalmente a:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\rho f v^2}{2d} - \rho g \sin(\theta) - \rho v \frac{dv}{dx} \quad (2.26)$$

em que  $v$  é a velocidade média transversal, correspondendo ao quociente entre a vazão volumétrica local e a área transversal da tubulação, como já foi ressaltado.

A integração da Equação 2.26 permite calcular o perfil axial de pressões do escoamento. O cálculo rigoroso do terceiro termo no lado direito, que expressa a variação de energia cinética, exige a inclusão da conservação de massa na formulação do problema. Verifica-se, entretanto, que tal termo é nulo para escoamentos incompressíveis. Segundo BRILL e MUKHERJEE (1999), o mesmo somente assume proporções significativas na presença de uma fase compressível em pressões relativamente baixas.

O primeiro termo no lado direito da Equação 2.26, que representa o gradiente de pressão originado pela perda por atrito, é conhecido como a *equação de Darcy-Weisbach*, e seu cômputo exige métodos para a determinação do fator de atrito  $f$ . Este coeficiente é chamado em alguns textos de *fator de atrito de Darcy* (KLEINSTREUER, 2010; ROTAVA, 2012) ou *fator de atrito de Moody* (BRILL e MUKHERJEE, 1999) para diferenciá-lo do *fator de atrito de Fanning*  $f_F$ ; ambos são relacionados por  $f = 4f_F$ . O famoso *diagrama de Moody* fornece o fator de atrito como função da *rugosidade relativa*  $e/d$  da parede interna da tubulação (em que  $e$  representa sua *rugosidade absoluta*) e de um número de Reynolds calculado como (BRILL e MUKHERJEE, 1999; ROTAVA, 2012):

$$Re = \frac{dv\rho}{\mu} \quad (2.27)$$

em que, analogamente às equações anteriores,  $v$  representa a velocidade média transversal (ROTAVA, 2012). Acima do valor crítico de aproximadamente 2100 (BIRD *et al.*, 2002; ROTAVA, 2012) ou 2300 (WILCOX, 2006), o escoamento é suposto turbulento nos cálculos. Abaixo destes limites, ele é laminar e seu perfil de velocidades pode ser analiticamente determinado, permitindo demonstrar que (BIRD *et al.*, 2002):

$$f_{\text{laminar}} = \frac{64}{Re} \quad (2.28)$$

Os cálculos discutidos são mais convenientemente realizados em programas de computador. Equações que reproduzem com precisão o diagrama de Moody podem ser obtidas de ROTAVA (2012) para este fim. Convém mencionar que KLEINSTREUER (2010, 2003) cita a abordagem discutida como uma forma de evitar as dificuldades da modelagem da turbulência, cujos efeitos são encapsulados pelo fator

de atrito  $f$ .

## 2.7.2 Balanço Macroscópico de Energia (Total)

Rigorosamente falando, a integração da Equação 2.26 requer expressões para propriedades físicas como  $\rho$  e  $\mu$ , as quais são funções de duas propriedades intensivas, como já foi discutido. Se a temperatura  $T$  como função de  $x$  é conhecida (ou se o escoamento é suposto isotérmico), as referidas propriedades podem ser tomadas como funções de  $P$  e  $T$ , e o problema possui grau de liberdade zero (a Equação 2.26 pode ser resolvida).

Na situação mais geral, em que  $T(x)$  não é conhecida, o problema fica subespecificado; a Equação 2.26 precisa ser complementada pela equação calórica de estado e pelo *balanço macroscópico de energia*. Este balanço pode ser obtido pela integração da equação da energia ou, alternativamente, pela aplicação direta do princípio da conservação de energia sobre o sistema analisado. Dado que este é um balanço das energias interna, cinética e potencial, utiliza-se por vezes a denominação *balanço de energia total*, para evitar confusão com *balanço de energia mecânica*. Este último é deduzido da equação do movimento, e portanto, contém informação diferente do primeiro (BIRD *et al.*, 2002).

Para um comprimento diferencial  $dx$  ao longo de um escoamento permanente, em que a condução de calor e o trabalho das forças viscosas são considerados desprezíveis frente ao transporte advectivo de energia e à contribuição das forças de pressão, adotando-se as mesmas simplificações do ítem anterior, é possível obter:

$$v dv + g \sin(\theta) dx + dh = dQ \quad (2.29)$$

em que  $dQ$  representa o calor adicionado por unidade de massa do fluido, através das fronteiras do sistema. Dispondo-se de um modelo para o fluxo de calor  $\widehat{Q}$  trocado através das paredes da tubulação, pode-se representar esta parcela como:

$$dQ = \frac{\widehat{Q} \pi d}{w} dx \quad (2.30)$$

Substituindo-se 2.30 em 2.29, obtém-se, após alguma manipulação, a seguinte equação unidimensional para o gradiente axial de entalpia:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\widehat{Q} \pi d}{w} - v \frac{dv}{dx} - g \sin(\theta) \quad (2.31)$$

O segundo termo no lado direito da Equação 2.31, expresso em termos da velocidade média transversal  $v$ , surge da inclusão da energia cinética no balanço macroscópico, e seu cálculo rigoroso pode exigir a inclusão da conservação de massa na

formulação do problema, conforme discussão anterior. Entretanto, segundo BRILL e MUKHERJEE (1999), sua contribuição é normalmente desprezível. Isto é confirmado por BIRD *et al.* (2002), que demonstra que, frequentemente na indústria química, a variação axial da energia cinética é muito reduzida frente à diferença na entalpia.

## 2.8 Considerações Finais

Neste capítulo revisou-se conceitos básicos de Fenômenos de Transporte que são importantes na análise do escoamento bifásico. Além de cumprir esta função, a apresentação das equações da continuidade, movimento e energia também introduziu a notação a ser utilizada no presente trabalho para representar determinadas variáveis e os fluxos e tensões associados, uma vez que tais grandezas também marcam presença nas equações do escoamento simultâneo de líquido e vapor.

Conceitos relacionados à turbulência também foram revisitados, pois, como se verá, o entendimento e a modelagem do escoamento bifásico fazem uso de frequentes paralelos com este fenômeno.

Na apresentação dos balanços macroscópicos discutiu-se simplificações de cunho prático e introduziu-se uma abordagem menos detalhada, proporcionando resultados com acurácia suficiente para determinados propósitos por meio de cálculos rápidos. Idealmente, a solução de qualquer problema de engenharia passaria por tais modelos, em detrimento de equações e métodos numéricos mais complexos. Na prática, é necessário recorrer à segunda alternativa quando as abordagens simplificadas disponíveis mostram grandes desvios em relação aos sistemas reais de interesse. Qualquer comparação entre modelos do escoamento bifásico deve levar em conta esta dualidade.

O próximo capítulo trata da utilização dos conceitos e equações revisados, junto com novas ideias e definições, na modelagem do escoamento bifásico.

# Capítulo 3

## Teoria e Modelagem do Escoamento Bifásico

Segundo ISHII e HIBIKI (2011), todos os sistemas bifásicos, compostos por qualquer combinação das fases sólida, líquida e vapor, são descritos pelos mesmos princípios físicos de conservação de massa, momentum e energia. Sua fraca semelhança à primeira vista teria originado uma tendência de estudá-los de forma separada, resultando em modelos e correlações de aplicação restrita. De fato, as primeiras tentativas de modelagem do escoamento bifásico líquido-vapor por canais, tubulações e dutos resultaram em correlações empíricas específicas para este problema, como é detalhado mais à frente (BRILL e MUKHERJEE, 1999; GHIAASIAAN, 2008).

Ao contrário do exposto, a literatura recente tem se caracterizado pelo tratamento unificado de sistemas *multifásicos*, apresentados por YEOH e TU (2010) como misturas de duas ou mais fases em escala bem acima da molecular.

### 3.1 Caracterização do Fenômeno

#### 3.1.1 Regimes de Escoamento

A principal característica de um escoamento bifásico é a presença de uma ou múltiplas interfaces separando regiões de líquido e vapor. Estas regiões podem se distribuir de diversas formas no espaço da tubulação, caracterizando os chamados *padrões* ou *regimes de escoamento*. Cada regime está associado a um arranjo *topológico* específico das interfaces, e o conhecimento desta geometria é importante para o cálculo preciso de escoamentos bifásicos.

O regime de escoamento vigente em dado problema varia com a inclinação e com o diâmetro do tubo, e também com as vazões relativas das fases que escoam e suas propriedades físicas (GHIAASIAAN, 2008).

Deve ser frisado que a classificação em padrões de escoamento é predominan-

temente qualitativa, baseada em observações visuais. Assim, não há um completo consenso com relação à nomenclatura dos regimes, e também é frequente que certos autores julguem necessário distinguir dois ou mais padrões onde outros consideraram apenas um. A título de ilustração, destaca-se que BEGGS e BRILL (1973) agruparam sob o regime *Distribuído* os padrões que BAKER (1954) denominou *Spray* e *Bolhas* (Figura 3.1). Mais recentemente, ao abordar equações de transporte para área interfacial (*interfacial area transport equations*, ou IATE), ISHII e HIBIKI (2011) apontaram a existência de ampla faixa de tamanhos e formatos de bolhas, do que resultam importantes diferenças de transporte a partir de determinado diâmetro, como motivador para a proposta de outro modelo IATE a duas equações. SMITH *et al.* (2012) obtiveram e analisaram resultados experimentais visando o aprimoramento deste modelo e da própria previsão de regimes de escoamento.

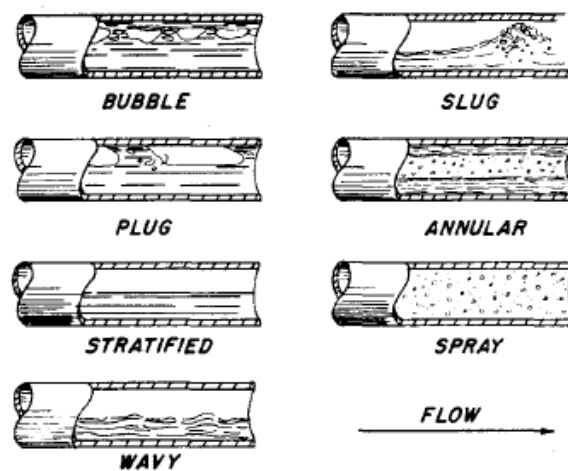


Figura 3.1: Regimes de escoamento horizontal considerados por BAKER (1954).

A classificação em regimes proposta por BAKER (1954), ilustrada na Figura 3.1, compreende toda a evolução qualitativa de um escoamento horizontal inicialmente líquido, mediante alimentação progressiva de gás. Introduzindo-se inicialmente pequenas quantidades de gás, obtém-se o regime de Bolhas (*Bubble*), em que bolhas de gás escoam pela parte superior do tubo com velocidade próxima à do líquido. Aumentando-se a vazão de gás, passa-se pelo regime *Plug*, em que grandes bolsões de gás passam a alternar-se com líquido nesta região superior, e depois chega-se ao regime Estratificado, onde as fases escoam separadamente, com o líquido na parte inferior. Mediante a alimentação de mais gás, esta fase se acelera e formam-se ondas na interface; o regime torna-se Ondular (*Wavy*). Crescentes quantidades de gás farão com que ondas maiores, capazes de tomar toda a seção transversal do tubo, sejam periodicamente arrastadas pelo gás que escoar mais rapidamente que o líquido, caracterizando o regime *Slug* (termo frequentemente traduzido, inclusive por ROSA (2012), como *Golfadas*). A vazão de gás pode então ser aumentada até que esta



fase passa a ocupar a região central da seção transversal do tubo, escoando a altas velocidades neste *núcleo*, com o líquido sendo transportado sob a forma de um filme junto à parede interna do duto (regime Anular). No limite da vazão de gás, o líquido é transportado por esta fase sob a forma de gotas dispersas (regime *Spray* ou Disperso, por vezes denominado *Mist* ou *Nevoeiro*).

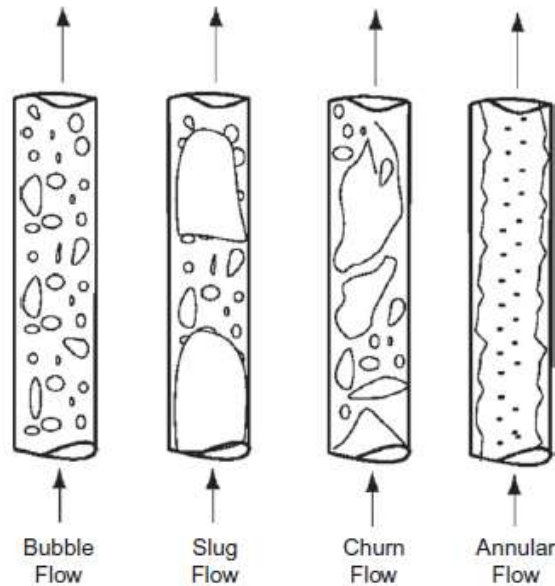


Figura 3.2: Regimes de escoamento vertical ascendente (MOKHATAB e POE, 2012).

TAITEL *et al.* (1980) propuseram a existência de quatro padrões em escoamentos verticais ascendentes, os quais encontram-se esquematizados na Figura 3.2. A comparação com a Figura 3.1 revela a coincidência de nomes entre alguns regimes, e suas características são de fato análogas. No regime de Bolhas, a coalescência de bolhas pequenas pode levar à formação de bolhas maiores que se deslocam mais rapidamente que a fase líquida contínua. O regime *Slug* é um tipo periódico de escoamento, marcado pela alternância de grandes quantidades de gás e líquido. Na literatura, utiliza-se frequentemente o nome *Taylor bubble* para designar esta quantidade de gás, e o termo *liquid slug* para seu análogo líquido. O escoamento *Agitado* (*Churn*) é marcado pela distorção destas duas estruturas, e assim como no tubo horizontal, o regime Anular caracteriza-se pelo escoamento do gás através de um núcleo central, sendo o líquido transportado tanto em forma dispersa por esta fase quanto sob a forma de um filme junto à parede interna (BRILL e MUKHERJEE, 1999; MOKHATAB e POE, 2012).

Tanto ROSA (2012) quanto YEOH e TU (2010) consideram a existência de um quinto regime - o *Disperso* ou *Nevoeiro*, associado às maiores vazões de gás - em complemento aos quatro discutidos para o escoamento vertical ascendente. O primeiro autor ainda discrimina mais três padrões: um intermediário entre Bolhas e Golfadas, denominado *Capa Esférica* (tradução de *spherical cap*, em referência ao resultado da

coalescência de bolhas discretas, de tamanhos e formas variados) e outros dois em substituição ao Agitado: *Golfadas Instáveis* e *Semianular*. Outrossim, escoamentos em bolhas ou gotículas (Nevoeiro) são coletivamente denominados *Dispersos* na literatura, reservando-se os termos *Separado* para escoamentos Estratificados ou Anulares e *Intermitente* para ocorrências alternadas, tais como *Golfadas*.

O transporte de gás natural e a extração *offshore* de petróleo são dois exemplos típicos onde o escoamento ocorre concomitantemente com transferência de massa entre as duas fases, devido a variações na temperatura e na pressão. Em poços verticais de petróleo, a contínua liberação de gás entre o fundo e o topo do poço pode transformar um escoamento líquido sub-resfriado em um bifásico Anular, passando por todos os regimes ilustrados na Figura 3.2 à medida que a mistura fluida se afasta do fundo (BRILL e MUKHERJEE, 1999; MOKHATAB e POE, 2012).

Além dos regimes discutidos, a literatura dedicada à engenharia nuclear também descreve padrões específicos de escoamentos sujeitos a forte aquecimento. É o caso do regime *Anular Invertido*, em que um filme de vapor é que separa a fase líquida da parede (GHIAASIAAN, 2008; LEVY, 1999).

Segundo GHIAASIAAN (2008), os processos e mecanismos que determinam o comportamento das misturas bifásicas são fortemente influenciados pelos padrões de escoamento estabelecidos em cada posição. Isto fica bem caracterizado nos modelos matemáticos do fenômeno pela seleção das equações constitutivas necessárias em função do regime observado, assim justificando-se em parte a importância dos métodos para previsão dos padrões de escoamento vigentes. Estes vêm sendo desenvolvidos há muitas décadas, e mesmo permanecendo longe da perfeição, apresentam acurácia razoável quando aplicados aos sistemas mais comuns sob condições bem definidas (e.g., escoamentos por tubos longos em estado estacionário).

Embora os regimes ilustrados nas Figuras 3.1 e 3.2 não representem completamente todas as possíveis configurações morfológicas de escoamentos bifásicos (como já foi mencionado, a observação de cada uma destas em maior detalhe permite sua subdivisão em novas classificações intermediárias), constata-se que os *mapas de regimes de escoamento* baseados nos padrões básicos apresentados possuem ampla aceitação. Estes mapas apresentam-se tipicamente como gráficos bidimensionais de natureza empírica. Um dos mais utilizados para escoamentos horizontais, de autoria de MANDHANE *et al.* (1974), é apresentado na Figura 3.3. As *velocidades superficiais* que constam como suas coordenadas são discutidas posteriormente, na Seção 3.6.1 (GHIAASIAAN, 2008).

A previsão de regimes de escoamento não é importante apenas como etapa intermediária nos cálculos, dado que possui aplicação direta em projetos de engenharia. Por exemplo, a ocorrência de escoamento tipo *Slug* pode provocar flutuações de pressão ou medição inconsistente por parte da instrumentação, com possíveis im-

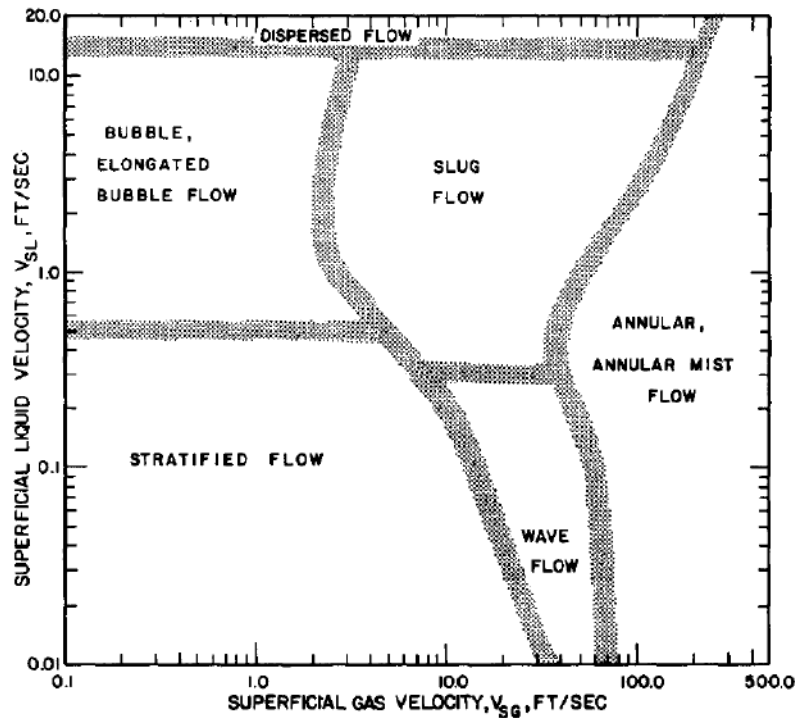


Figura 3.3: Mapa de regimes de escoamento bifásico horizontal de MANDHANE *et al.* (1974)

pactos negativos na operação da planta ou nos sistemas de controle. Em situações mais drásticas, a vibração mecânica induzida e o impacto de *slugs* sobre curvas e válvulas podem acarretar até mesmo a ruptura da tubulação. Danos a equipamentos a jusante (como compressores ou vasos de separação) também podem ser causados pelas flutuações nas vazões de líquido e gás. Por estes motivos, busca-se evitar este regime de escoamento no projeto de unidades industriais (GPSA, 2004; KERN, 1975; MOKHATAB e POE, 2012; NOLTE, 1979).

### 3.1.2 Escalas e Acoplamento

Destaca-se frequentemente na literatura a ampla faixa de escalas de comprimento importantes em escoamentos multifásicos. Segundo ISHII e HIBIKI (2011), são no mínimo quatro dimensões a considerar. A maior delas corresponde à escala do equipamento de interesse (a tubulação, no caso do presente trabalho). O segundo nível compreende a *macroescala* da hipótese do contínuo, na qual são tratados os transportes de massa, momentum e energia. As transferências interfaciais destas quantidades, bem como os efeitos da turbulência, resultam do comportamento observado na chamada *mesoescala* de comprimento. Finalmente, a escala *microscópica* é aquela onde ocorrem os processos locais de quebra e coalescência de bolhas e a nucleação ou condensação em paredes.

Conforme discutido anteriormente, escoamentos bifásicos podem ser classificados

em padrões de escoamento, assim como os monofásicos subdividem-se em laminar ou turbulento, gerando a expectativa por similaridade entre sistemas que escoam pelo mesmo regime. No entanto, o conceito de regime de escoamento é estabelecido em uma dimensão próxima daquela do sistema estudado. Resulta daí que análises baseadas no padrão previsto podem se revelar incapazes de considerar adequadamente os mecanismos associados às menores escalas de comprimento. Um exemplo desta limitação é o emprego de correlações dependentes do regime de escoamento para o cálculo da *concentração de área interfacial* (área interfacial média por unidade de volume), fundamental para o cômputo dos *termos interfaciais* de transferências de massa, momentum e energia entre fases. Isto explica o interesse nas supracitadas equações IATE, as quais, diga-se de passagem, contêm termos para quantificar alterações de área por efeitos microscópicos como quebra e coalescência (ISHII e HIBIKI, 2011; SMITH *et al.*, 2012).

Ao introduzir a motivação para o desenvolvimento das equações IATE, GHI-AASIAAN (2008) aponta deficiências na estratégia atualmente consolidada de seleção das relações constitutivas baseada em mapas ou modelos ditos “estáticos” de transição. É destacado que tal abordagem do problema não prevê a evolução dinâmica das interfaces e resulta em mudanças abruptas de regime durante simulações. Além de não refletirem adequadamente a realidade, tais variações causam problemas numéricos devido às descontinuidades matemáticas que introduzem. É enfatizado, contudo, que as equações IATE ainda se encontram em estágio de desenvolvimento, e longe da perfeição. Desta forma, o presente trabalho valeu-se de mapas de regimes de escoamento sempre que sua previsão fez-se necessária. A mitigação das consequências numéricas desta escolha é abordada em detalhe na Seção 5.3.3.

YEOH *et al.* (2014) descrevem três escalas relevantes. Estes autores destacam a importância do acompanhamento individual de bolhas e gotículas para a compreensão de sua interação com a fase *contínua* na microescala. Em dimensão superior, ganham importância as interações destas *partículas* entre si, originando os processos de aglomeração, quebra e coalescência característicos da mesoescala. Já na macroescala, o comportamento hidrodinâmico das fases dá origem às estruturas observáveis na dimensão do sistema, envolvendo ambas as fases.

Em complemento à discussão anterior, YEOH e TU (2010) discutem o papel dos chamados *Balanços Populacionais* na quantificação dos fenômenos microscópicos que influenciam a área interfacial. Um Balanço Populacional pode ser definido, de forma bastante resumida, como o cálculo da evolução do número e da distribuição de tamanhos de partículas, considerando-se aí os processos relevantes de *nascimento* e *morte* (YEOH *et al.*, 2014).

ROSA (2012) detalha o *acoplamento* entre as fases como fonte adicional de complexidade em escoamentos multifásicos, exemplificando este fator com regimes Dis-

persos de concentrações diluídas, intermediárias e densas. No primeiro caso, em que a fase contínua influencia o transporte das partículas sem ser afetada por elas, caracteriza-se o *acoplamento de uma via*, em que a fase contínua pode ser calculada como um escoamento monofásico. Em concentrações intermediárias, as partículas passam a influenciar o transporte da fase contínua sem interagir entre si, originando um *acoplamento de duas vias*. Já no *acoplamento de quatro vias*, associado a altas concentrações, as partículas encontram-se acopladas com a fase contínua e também umas com as outras.

## 3.2 Interfaces e Condições de Salto

Sob observação minuciosa, uma interface líquido-gás se apresenta como uma região de espessura bastante reduzida através da qual os valores das propriedades do escoamento variam continuamente entre aqueles medidos para cada uma das fases em contato. Esta espessura pode assumir proporções importantes em dispositivos muito reduzidos, como aqueles estudados pela *nanotecnologia*; tais casos encontram-se no escopo de aplicação da *simulação dinâmica molecular*. Em vários outros problemas, contudo, as dimensões do escoamento de interesse superam em muito a escala de comprimento da interface, permitindo a aproximação desta por uma *superfície* onde as propriedades variam abruptamente, de maneira descontínua (FAGHRI e ZHANG, 2006). Este artifício corresponde ao que TRYGGVASON *et al.* (2011) denominam *suposição da interface delgada* (tradução aproximada de *assumption of sharp interfaces*), segundo a qual as espessuras interfaciais são desprezíveis frente às escalas de aplicação da hipótese do contínuo.

As leis de conservação de massa, momentum e energia podem ser expressas como equações diferenciais parciais, como já foi discutido, desde que o ponto considerado não pertença a uma superfície de descontinuidade, como é tratada a interface segundo o parágrafo anterior. Uma consequência disto é que a Equação 2.2 é válida apenas no interior de cada fase, *até* a interface mas não *através* da mesma. Os balanços de massa, momentum e energia através da interface, os quais relacionam as propriedades de cada fase, são conhecidos como *condições de salto* (DREW e PASMANN, 1999; FAGHRI e ZHANG, 2006; ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012). Uma dedução unificada da forma canônica destas equações é desenvolvida a seguir, visto que o procedimento é esclarecedor de sua aplicabilidade e também das diferenças de sinais encontradas entre algumas publicações.

A Figura 3.4 ilustra o volume de controle fixo  $V$  a considerar, ocupado por duas fases 1 e 2 (uma líquida e outra vapor), separadas por uma interface. Uma vez que esta interface se movimentar, os volumes  $V_k$  e as áreas superficiais  $A_k$  de cada fase  $k$  são funções do tempo, bem como a área interfacial  $A_i$ . Por outro lado,

como o volume de controle é fixo no espaço, sua área superficial é sempre dada por  $A = A_1(t) + A_2(t)$ , e seu volume, por  $V = V_1(t) + V_2(t)$ . O vetor unitário normal à interface que aponta para fora da fase  $k$  é representado aqui por  $\mathbf{n}_k$ . Como a espessura da interface é tomada como nula na formulação matemática, verifica-se que (FAGHRI e ZHANG, 2006):

$$\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2 \quad (3.1)$$

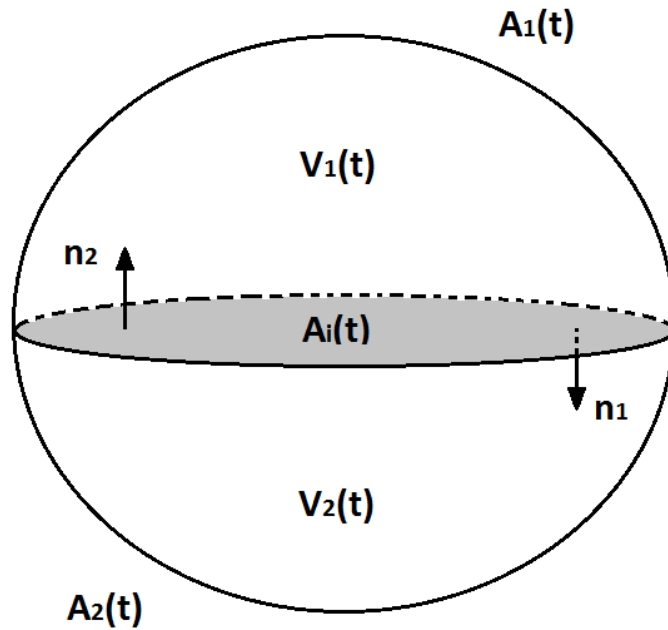


Figura 3.4: Volume de controle encerrando duas fases separadas por uma interface.

A transformação de balanços integrais em diferenciais (e vice-versa) faz uso frequente do *Teorema da Divergência* (ou Teorema de Gauss). Para dada grandeza vetorial  $\mathbf{\Omega}$ , este resultado estabelece que (FAGHRI e ZHANG, 2006):

$$\int_A [\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{n}] dA = \int_V [\nabla \cdot \mathbf{\Omega}] dV \quad (3.2)$$

em que  $A$  é a superfície que delimita o volume  $V$ , e  $\mathbf{n}$  é normal ao elemento de área  $dA$ . Outro teorema importante é a *Regra de Leibniz*, a qual fornece, para dada grandeza por unidade de massa  $\psi$  (FAGHRI e ZHANG, 2006):

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \psi dV = \int_V \frac{\partial \rho \psi}{\partial t} dV \quad (3.3)$$

Quando o volume de controle analisado inclui somente a fase  $k$ , vale o seguinte

balanço integral:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho_k \psi_k dV + \int_A \rho_k \psi_k [\mathbf{v}_{k,r} \cdot \mathbf{n}] dA = - \int_A [\mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}] dA + \int_V \rho_k \phi_k dV \quad (3.4)$$

em que  $\mathbf{v}_{k,r}$  é a velocidade da fase  $k$  em relação ao volume de controle, que se desloca à mesma velocidade constante do sistema de coordenadas adotado. As grandezas  $\mathbb{J}$  e  $\phi$  possuem os mesmos significados discutidos na Seção 2.4. Para um volume de controle estacionário, é possível verificar, com auxílio das Equações 3.2 e 3.3, que a formulação integral da Equação 3.4 se reduz à equação diferencial canônica 2.2.

Quando o volume de controle encerra duas fases, as integrações precisam ser realizadas sobre ambos os “subvolumes”  $V_k(t)$ . Neste caso, FAGHRI e ZHANG (2006) generalizam cada balanço individual dado pela Equação 3.4 para a seguinte forma geral:

$$\sum_{k=1}^2 \left\{ \frac{d}{dt} \int_{V_k(t)} \rho_k \psi_k dV + \int_{A_k(t)} \rho_k \psi_k [\mathbf{v}_{k,r} \cdot \mathbf{n}_k] dA + \int_{A_k(t)} [\mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k] dA - \int_{V_k(t)} \rho_k \phi_k dV \right\} = 0 \quad (3.5)$$

A Figura 3.4 mostra que o volume  $V_k(t)$  da fase  $k$  é delimitado pela área  $A_k(t) + A_i(t)$ . Assim, o Teorema da Divergência permite escrever:

$$\int_{A_k(t)+A_i(t)} \rho_k \psi_k [\mathbf{v}_{k,r} \cdot \mathbf{n}_k] dA + \int_{A_k(t)+A_i(t)} [\mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k] dA = \int_{V_k(t)} [\nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{v}_{k,r})] dV + \int_{V_k(t)} [\nabla \cdot \mathbb{J}_k] dV \quad (3.6)$$

Somando-se e subtraindo-se apenas as integrais sobre  $A_i(t)$  na Equação 3.5 (uma vez para cada fase  $k$ ) e aplicando-se a Regra de Leibniz ao primeiro termo deste balanço, chega-se a:

$$\sum_{k=1}^2 \left\{ \int_{V_k(t)} \left[ \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \psi_k \mathbf{v}_{k,r}) + \nabla \cdot \mathbb{J}_k - \rho_k \phi_k \right] dV - \int_{A_i(t)} \rho_k \psi_k [\mathbf{v}_{k,r} \cdot \mathbf{n}_k] dA - \int_{A_i(t)} [\mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k] dA \right\} = 0 \quad (3.7)$$

O integrando do primeiro termo entre chaves acima será momentaneamente considerado nulo, uma vez que corresponde ao balanço expresso pela Equação 2.2.

Assim, o resultado anterior se reduz a:

$$\sum_{k=1}^2 \left\{ \int_{A_i(t)} [\rho_k \psi_k (\mathbf{v}_{k,r} \cdot \mathbf{n}_k) + \mathbb{J}_k \cdot \mathbf{n}_k] dA \right\} = 0 \quad (3.8)$$

Somente a condição de somatório nulo dos integrandos garante o resultado da Equação 3.8 em qualquer forma ou dimensão da interface. Supondo-se adicionalmente que o volume de controle se desloca à mesma velocidade  $\mathbf{v}_i$  da interface, obtém-se:

$$\sum_{k=1}^2 [\rho_k \psi_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) + \mathbb{J}_k] \cdot \mathbf{n}_k = 0 \quad (3.9)$$

A Equação 3.9 reproduz o aspecto geral das condições de salto apresentadas por ROSA (2012), DREW e PASSMAN (1999) e KLEINSTREUER (2003). Fisicamente, este resultado representa um balanço dos fluxos que partem das fases em contato (ISHII e HIBIKI, 2011). ROSA (2012) e FAGHRI e ZHANG (2006) ressaltam, contudo, que o mesmo não considera os efeitos característicos da interface, tais como os decorrentes da *tensão superficial*  $\sigma$ .

O autor do presente trabalho destaca que, de fato, a etapa de adição e subtração não incluiu todos os termos interfaciais possíveis, considerando apenas aqueles necessários para permitir a aplicação do Teorema da Divergência após o “fechamento” dos volumes  $V_k(t)$ . Cumpre lembrar, além disso, que a tensão superficial pode ser definida como o trabalho requerido para aumentar a área interfacial em uma unidade, ou, alternativamente, como a força necessária por acréscimo de unidade de perímetro interfacial (FAGHRI e ZHANG, 2006). Ora, o balanço dado pela integral descartada na Equação 3.7 expressa princípios como a segunda lei de Newton ou a primeira lei da termodinâmica! Se determinados trabalhos ou forças na região interfacial não foram considerados, a referida integral não poderia a rigor ser considerada nula, já que não representa completamente os princípios fundamentais. Isto pode ser remediado pela inclusão, na etapa de adição e subtração, do *termo fonte interfacial*  $S_i$ , resultando na forma canônica das condições de salto apresentada por DREW e PASSMAN (1999) e KLEINSTREUER (2003) como:

$$\sum_{k=1}^2 [\rho_k \psi_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) + \mathbb{J}_k] \cdot \mathbf{n}_k = S_i \quad (3.10)$$

Uma vez que a espessura da interface é tomada como nula, esta região não pode acumular massa (TRYGGVASON *et al.*, 2011). Logo, introduzindo-se  $S_i = 0$ , a Equação 3.10 fornece o seguinte *balanço de massa interfacial* (FAGHRI e ZHANG,



2006; ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003):

$$\sum_{k=1}^2 [\rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i)] \cdot \mathbf{n}_k = \sum_{k=1}^2 \dot{m}_k = 0 \quad (3.11)$$

em que  $\dot{m}_k$  representa o fluxo mássico que deixa a fase  $k$ .

De acordo com a *equação de Young-Laplace*, a força por unidade de área originada pela tensão superficial, associada à *diferença de pressão capilar* entre as fases, vale (FAGHRI e ZHANG, 2006):

$$S_i^\sigma = \sigma \left[ \frac{1}{R_I} + \frac{1}{R_{II}} \right] \mathbf{n} = \sigma C \mathbf{n} \quad (3.12)$$

em que  $R_I$  e  $R_{II}$  são os dois *raios de curvatura* necessários para descrever superfícies curvas em geral, enquanto  $C$  é a *curvatura média* (ou apenas *curvatura*) da interface (GENNES *et al.*, 2004). Introduzindo-se a Equação 3.12 em 3.10, obtém-se, em face das Equações 3.1 e 3.11, um *balanço de momentum interfacial*:

$$\dot{m} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) = (\boldsymbol{\pi}_1 - \boldsymbol{\pi}_2) \cdot \mathbf{n} + \sigma C \mathbf{n} \quad (3.13)$$

em que  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$  e  $\dot{m} = \dot{m}_1 = -\dot{m}_2$ , com  $\boldsymbol{\pi}_1$  e  $\boldsymbol{\pi}_2$  definidos conforme a Equação 2.6. Este resultado relaciona o fluxo de quantidade de movimento que cruza a interface com o somatório de forças que atuam por unidade de área na mesma. ROSA (2012) ressalta que na maioria dos escoamentos líquido-vapor por tubulações, os efeitos da tensão superficial neste balanço são desprezíveis em comparação com os demais termos.

FAGHRI e ZHANG (2006) também demonstram a inclusão, no resultado acima, do *efeito Marangoni* decorrente de possíveis gradientes de tensão superficial causados por distribuições não-uniformes de temperaturas ou concentrações na interface. Já o *balanço interfacial de energia* demonstrado por ISHII e HIBIKI (2011) inclui, em complemento à dedução anterior, o trabalho realizado pela tensão superficial. Entretanto, a presente discussão não será estendida com mais estes tópicos, visto que o conteúdo apresentado já ilustra em detalhe suficiente os balanços válidos no caso singular da interface. Como elucidado a seguir, tais equações não são exatamente as que se busca resolver na abordagem de problemas de interesse industrial.

### 3.3 Formulação Local Instantânea e DNS

Do ponto de vista da modelagem matemática, um sistema bifásico consiste em um campo subdividido em diversas regiões monofásicas por fronteiras móveis (interfaces). De acordo com a discussão anterior, a forma mais direta de se descrever tais

escoamentos consiste em aplicar as equações diferenciais de balanço da forma da Equação 2.2 a cada região monofásica, combinando-se suas soluções nas interfaces por meio das condições de salto. Esta abordagem é frequentemente denominada *formulação local instantânea* (FAGHRI e ZHANG, 2006; ISHII e HIBIKI, 2011).

Alternativamente, TRYGGVASON *et al.* (2011) discutem a representação de todo o domínio do escoamento bifásico por apenas um conjunto de equações de balanço, tratando-se a mistura bifásica como um único fluido cujas propriedades variam abruptamente nas interfaces. Nesta abordagem *one-fluid*, as influências das interfaces são introduzidas na formulação por meio de *termos singulares interfaciais*, expressos em termos de *funções delta de Dirac*,  $\delta$ .

As equações de balanço podem ser obtidas partindo-se da Equação 3.4. A inserção de contribuições pontuais nestes balanços pelo emprego de funções delta de Dirac parece mesmo conveniente na medida que tais funções possuem a seguinte propriedade (HOSKINS, 2009):

$$\int_{-a}^a f(t) \delta(t) dt = f(0) \quad (3.14)$$

em que  $f$  representa qualquer função contínua nas vizinhanças da origem, em um intervalo  $[-a; a]$  qualquer. HOSKINS (2009) salienta que este resultado vale para qualquer  $a$  e depende apenas do comportamento do integrando no ponto  $t = 0$  (ou em suas vizinhanças).

PROSPERETTI e TRYGGVASON (2007) e TRYGGVASON *et al.* (2011) exemplificam a abordagem *one-fluid* com a quantidade de movimento, lembrando que a tensão superficial age apenas na interface. Para um volume de controle que contém uma interface, a força originada pela tensão superficial corresponde à integral da Equação 3.12 sobre a superfície  $A_i(t)$ . Utilizando-se as funções delta, é possível converter esta integral para outra sobre todo o volume de controle  $V$ , de forma semelhante ao Teorema da Divergência:

$$\int_{A_i(t)} (\sigma C \mathbf{n}) dA = \int_V [(\sigma C \mathbf{n}) \delta(n)] dV \quad (3.15)$$

em que a coordenada  $n$ , normal à interface, vale zero na mesma. Adicionando-se o lado direito deste resultado à Equação 3.4, fazendo-se as substituições indicadas na Seção 2.4.2 e aplicando-se as Equações 3.2 e 3.3, obtém-se uma equação do movimento válida em todo o domínio do escoamento:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = \nabla \cdot \boldsymbol{\pi} + \rho \mathbf{g} + \sigma C \delta(n) \mathbf{n} \quad (3.16)$$

em que, enfatize-se, propriedades como  $\rho$  variam de forma descontínua ao cruzar-se

uma interface.

TRYGGVASON *et al.* (2011) afirmam ser possível demonstrar que as formulações local instantânea e *one-fluid* são equivalentes. Para ambos os casos, diversos autores destacam como fator complicador o desconhecimento prévio das posições das interfaces. No âmbito de cálculos DNS (*Direct Numerical Simulations*) - aqui entendidos como simulações transientes em que as menores escalas de tempo e do contínuo são consideradas via emprego de malhas suficientemente refinadas - o modelo *one-fluid* é utilizado junto com técnicas como *level-set* ou VOF (*Volume-of-Fluid*), as quais fazem a localização e *advecção* da interface, ou, mais especificamente, de uma *função indicadora* (*marker function*) que assume diferentes valores em cada fase (PROSPERETTI e TRYGGVASON, 2007; TRYGGVASON *et al.*, 2011). No que tange à formulação local instantânea, FAGHRI e ZHANG (2006) apontam para a necessidade de resolver separadamente as equações de balanço para cada fase, atualizando-se iterativamente as localizações das interfaces até a obtenção da convergência nas condições de salto.

Experimentos multifásicos são sabidamente complicados, e YEOH e TU (2010), PROSPERETTI e TRYGGVASON (2007) e TRYGGVASON *et al.* (2011) destacam a importância das simulações DNS como ferramenta de pesquisa de escoamentos bifásicos, na medida que revelam características físicas de detecção experimental impossível devido a dificuldades com instrumentação, às escalas reduzidas de tempo e espaço e à impossibilidade de acesso ótico a boa parte do sistema. Simulações computacionais também permitem investigar a influência de valores arbitrários de gravidade ou tensão superficial, possivelmente irreprodutíveis em laboratório. Segundo TRYGGVASON *et al.* (2011), a possibilidade de prever a evolução de sistemas bifásicos complexos também é atraente do ponto de vista da operação de processos industriais de grande importância econômica, onde ainda são empregadas estratégias de controle rudimentares e empíricas. Os mesmos autores ressaltam, contudo, que a DNS de escoamentos multifásicos ainda se encontra em estágio “embrionário” de desenvolvimento em comparação com a DNS de sistemas monofásicos. Neste último caso, a técnica já se encontra consolidada como instrumento de estudo dos mecanismos que regem a turbulência e também como alternativa à obtenção de dados experimentais para a validação dos modelos deste fenômeno (VERSTEEG e MALASEKERA, 2007; WILCOX, 2006).

As semelhanças entre o escoamento bifásico e a turbulência não terminam por aí. Em ambos os casos, limitações de recursos computacionais impedem (na melhor das hipóteses, dificultam bastante) as referidas soluções “exatas” das equações de transporte na análise prática da maioria dos escoamentos naturais ou de interesse tecnológico. Por outro lado, mesmo que fossem viáveis, tais abordagens resultariam em imensas quantidades de informação local sobre os escoamentos, ao passo que,

na prática, é frequente que maior interesse recaia sobre *médias* adequadas destes resultados (FAGHRI e ZHANG, 2006; PROSPERETTI e TRYGGVASON, 2007; YEOH e TU, 2010). Neste contexto, DREW e PASSMAN (1999) também lembram que a solução das equações para a previsão de dado fenômeno deve se dar abaixo de suas escalas representativas, mas ressaltam que um cálculo excessivamente detalhado pode dificultar a compreensão das informações mais importantes. Em linhas bifásicas, foco do presente trabalho, deseja-se determinar parâmetros como a variação de pressão e as frações volumétricas das fases (ROSA, 2012).

Em sua discussão da formulação local instantânea, ISHII e HIBIKI (2011) apontam que a mesma é matematicamente exata desde que cada região delimitada por uma interface possa ser considerada como um contínuo. Dispõe-se, assim, de uma base fundamental rigorosa para a modelagem do escoamento bifásico. Entretanto, os mesmos autores também afirmam que o tratamento explícito das interfaces não é prático nem realista devido a dificuldades intransponíveis de natureza matemática, numérica e computacional. Tais obstáculos são atribuídos às descontinuidades das propriedades nas regiões interfaciais, à existência de múltiplas interfaces deformáveis cujos movimentos são previamente desconhecidos, e também às oscilações dos valores de diversas propriedades causadas tanto pela turbulência quanto pelos movimentos interfaciais. Estes cálculos detalhados são classificados como impossíveis, exceção feita a escoamentos de estrutura interfacial simples. Por outro lado, em linha com as demais publicações, é ressaltado que tais detalhes microscópicos raramente são necessários em problemas de engenharia, em que maior importância é dada a aspectos ditos *macroscópicos*. Na supracitada analogia com filtros passa-baixa, destaca-se a efetuação da média temporal como meio de extração dos valores médios das propriedades de interesse, eliminando-se as flutuações locais instantâneas assim como apresentado para escoamentos turbulentos em geral.

Seguindo a discussão acima, GHIAASIAAN (2008) e ROSA (2012) também afirmam que é impossível abordar problemas complexos de interesse prático pela estratégia local instantânea. ROSA (2012) cita diversos simuladores comerciais que empregam modelos baseados em processos de média. Diante do quadro apresentado, as seções e capítulos subsequentes tratarão do desenvolvimento e solução numérica destas últimas equações visando o cálculo do escoamento bifásico por tubulações e dutos.

### **3.4 Equações Médias para o Escoamento Bifásico**

O paralelo traçado na discussão anterior sugere que o tratamento matemático consolidado para escoamentos monofásicos turbulentos (Seção 2.6) seja adaptado ao escoamento bifásico, onde as flutuações das propriedades do sistema resultam não apenas

da turbulência, mas também dos movimentos aleatórios das interfaces (KLEINSTREUER, 2003; ROSA, 2012). Neste contexto, ROSA (2012) ressalta que são observadas flutuações de velocidades até mesmo em escoamentos laminares de bolhas.

É demonstrada nesta seção a aplicação da abordagem acima na dedução das equações médias de transporte para o escoamento bifásico. O entendimento deste procedimento facilita a compreensão do que é expresso por estas equações médias, bem como das próprias variáveis médias que as compõem.

As médias mais discutidas na literatura são a temporal, a volumétrica e a de conjunto, também conhecida como estatística ou *ensemble* (GHIAASIAAN, 2008; ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012; YEOH e TU, 2010). Em um primeiro momento, estas médias são aplicadas genericamente de forma unificada, fazendo-se referências específicas a determinados tipos somente quando for necessário. Posteriormente, detalhes inerentes a uma ou outra média em particular são apresentados. Para começar, basta considerar qualquer processo de média que resulte em  $\bar{f}$  quando aplicado a uma variável  $f$  e que obedeça às seguintes *relações de Reynolds* (KLEINSTREUER, 2003; ROSA, 2012):

$$\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g} \quad (3.17a)$$

$$\overline{f g} = \bar{f} \bar{g} \quad (3.17b)$$

$$\overline{cf} = c\bar{f} \quad (3.17c)$$

em que  $g$  é outra função e  $c$  é uma constante.

As seguintes relações, respectivamente denominadas *Regra de Leibniz* e *Regra de Gauss*, também são necessárias mais adiante (DREW e PASSMAN, 1999; KLEINSTREUER, 2003; YEOH e TU, 2010):

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t} \quad (3.18a)$$

$$\overline{\nabla f} = \nabla \bar{f} \quad (3.18b)$$

Convém observar que, segundo DREW e PASSMAN (1999), as Equações 3.18 são aplicáveis somente a funções “bem comportadas” que possibilitem a comutação das operações limitantes de diferenciação e integração. ROSA (2012), alternativamente, aplica em seu lugar os resultados obtidos dos Teoremas de Gauss e Leibniz para funções descontínuas. A discussão do tratamento das discontinuidades do escoamento bifásico no presente contexto é aprofundada posteriormente, na Seção 3.4.6.

### 3.4.1 A Função Indicadora de Fase

Define-se, para cada fase  $k$ , sua respectiva *função indicadora de fase*  $X_k$  como (ROSA, 2012; YEOH e TU, 2010; YEOH *et al.*, 2014):

$$X_k(\mathbf{x}; t) = \begin{cases} 1, & \text{se o ponto } \mathbf{x} \text{ estiver ocupado pela fase } k \text{ no instante } t \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.19)$$

A função  $X_k$  possui a propriedade de filtrar apenas a ocorrência da fase  $k$  (ROSA, 2012). DREW e PASSMAN (1999) demonstram que sua *derivada material* seguindo a interface é nula. A representação matemática deste resultado, que é utilizada na próxima Seção, é a frequentemente denominada *equação topológica da interface*:

$$\frac{\partial X_k}{\partial t} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla X_k = 0 \quad (3.20)$$

O gradiente  $\nabla X_k$  somente apresenta valores não nulos na interface, e portanto, comporta-se como a função delta em relação à mesma (KLEINSTREUER, 2003). Segundo TRYGGVASON *et al.* (2011),  $X_k$  também pode desempenhar o papel da função indicadora discutida na Seção 3.3, e seu gradiente vale:

$$\nabla X_k = -\delta(n) \mathbf{n} \quad (3.21)$$

A média da função indicadora  $X_k$  resulta na chamada *fração de vazios* (*void fraction*) da fase  $k$  (ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003; ROSA, 2012):

$$\alpha_k = \overline{X_k} \quad (3.22)$$

$\alpha_k$  também é costumeiramente denominada *fração volumétrica* da fase  $k$  (DREW e PASSMAN, 1999). Seu significado físico e a adequação desta nomenclatura são abordados mais à frente (Seção 3.4.5), quando forem discutidas as particularidades dos processos de média mais comuns.

Para um escoamento bifásico de líquido e vapor, verifica-se o seguinte *axioma da continuidade* (ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003):

$$\alpha_l + \alpha_v = 1 \quad (3.23)$$

em que os índices  $l$  e  $v$  denotam as fases líquida e vapor.

### 3.4.2 Equações Médias para as Fases

O procedimento padrão adotado na literatura na obtenção de uma equação canônica média para a fase  $k$  consiste em aplicar a média sobre o produto de  $X_k$  por sua

equação de balanço local instantânea, Equação 2.2 (KLEINSTREUER, 2003; ROSA, 2012; YEOH *et al.*, 2014):

$$\overline{X_k \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t}} + \overline{X_k \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \psi_k)} = -\overline{X_k \nabla \cdot \mathbb{J}_k} + \overline{X_k \rho_k \phi_k} \quad (3.24)$$

Da regra para derivadas de produtos, obtém-se que (KLEINSTREUER, 2003):

$$X_k \frac{\partial \rho_k \psi_k}{\partial t} = \frac{\partial X_k \rho_k \psi_k}{\partial t} - \rho_k \psi_k \frac{\partial X_k}{\partial t} \quad (3.25)$$

Para um escalar  $s$  e dado tensor ou vetor  $\mathbb{J}_k$ , demonstra-se que (BIRD *et al.*, 2002; KLEINSTREUER, 2003):

$$s \nabla \cdot \mathbb{J}_k = \nabla \cdot (s \mathbb{J}_k) - \nabla s \cdot \mathbb{J}_k \quad (3.26)$$

Aplicando-se 3.18, 3.25 e 3.26 a 3.24, obtém-se, após alguma manipulação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{X_k \rho_k \psi_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{X_k \rho_k \mathbf{v}_k \psi_k}) + \nabla \cdot (\overline{X_k \mathbb{J}_k}) - \overline{X_k \rho_k \phi_k} &= \overline{\rho_k \psi_k \frac{\partial X_k}{\partial t}} + \\ &\quad \overline{\nabla X_k \cdot (\rho_k \mathbf{v}_k \psi_k)} + \overline{\nabla X_k \cdot (\mathbb{J}_k)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Multiplicando-se a Equação 3.20 por  $\rho_k \psi_k$  e aplicando-se a média, chega-se a:

$$0 = \overline{\rho_k \psi_k \frac{\partial X_k}{\partial t}} + \overline{(\rho_k \psi_k \mathbf{v}_i) \cdot \nabla X_k} \quad (3.28)$$

Subtraindo-se 3.28 de 3.27 membro a membro, obtém-se após algum rearranjo (YEOH *et al.*, 2014):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{X_k \rho_k \psi_k}}{\partial t} + \nabla \cdot (\overline{X_k \rho_k \mathbf{v}_k \psi_k}) + \nabla \cdot (\overline{X_k \mathbb{J}_k}) - \overline{X_k \rho_k \phi_k} &= \\ \overline{\nabla X_k \cdot [\rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \psi_k + \mathbb{J}_k]} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Este resultado contém termos expressos em função da média de produtos, mas a equação precisa ser formulada em termos dos produtos dos valores médios para explicitar as variáveis dependentes do problema e possibilitar sua solução (ROSA, 2012).

ISHII e HIBIKI (2011) e ROSA (2012) definem o *valor médio baseado na fase* de uma variável  $f_k$  como sua média ponderada por  $X_k$ :

$$\overline{f_k}^X = \frac{\overline{X_k f_k}}{\overline{X_k}} = \frac{\overline{f_k}}{\alpha_k} \quad (3.30)$$

Por outro lado, a média ponderada pela massa específica resulta no *valor médio baseado na massa*, também conhecido como *média de Favre* (ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012):

$$\overline{f}_k^\rho = \frac{\overline{X_k \rho_k f_k}}{\overline{X_k \rho_k}} = \frac{\overline{X_k \rho_k f_k}}{\alpha_k \overline{\rho_k^X}} \quad (3.31)$$

Em estreita analogia com o tratamento da turbulência, as flutuações das propriedades do escoamento bifásico são definidas como as diferenças entre seus valores locais instantâneos e suas médias escolhidas para a formulação. Para uma variável média baseada na massa (DREW e PASSMAN, 1999; ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012):

$$f'_k = f_k - \overline{f}_k^\rho \quad (3.32)$$

Segundo KLEINSTREUER (2003):

$$\overline{f'_k}^\rho = 0 \quad (3.33)$$

Em face deste resultado e da Equação 3.31, o autor destaca que:

$$\overline{X_k \rho_k f'_k} = 0 \quad (3.34)$$

Aplicando-se as definições 3.30 e 3.31 ao lado esquerdo da Equação 3.29 (junto com 3.32 e 3.34 no caso do segundo termo), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\psi_k^\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \overline{X_k \rho_k (\overline{\mathbf{v}_k}^\rho + \mathbf{v}'_k) (\overline{\psi_k^\rho} + \psi'_k)} \right] + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\mathbb{J}_k^X}) - \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\phi_k}^\rho = \\ & \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\psi_k^\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ (\overline{X_k \rho_k}) \overline{\mathbf{v}_k}^\rho \overline{\psi_k^\rho} + (\overline{X_k \rho_k} \mathbf{v}'_k) \overline{\psi_k^\rho} + (\overline{X_k \rho_k} \psi'_k) \overline{\mathbf{v}_k}^\rho + \overline{X_k \rho_k} \mathbf{v}'_k \psi'_k \right] + \\ & \quad \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\mathbb{J}_k^X}) - \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\phi_k}^\rho = \\ & \frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\psi_k^\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\mathbf{v}_k}^\rho \overline{\psi_k^\rho} + \overline{X_k \rho_k} \mathbf{v}'_k \psi'_k \right] + \nabla \cdot (\alpha_k \overline{\mathbb{J}_k^X}) - \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\phi_k}^\rho = \\ & \quad \nabla X_k \cdot [\overline{\rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \psi_k} + \overline{\mathbb{J}_k}] \quad (3.35) \end{aligned}$$

Segundo ROSA (2012), o termo onde figura o produto  $\mathbf{v}'_k \psi'_k$  possui a mesma natureza do tensor de Reynolds da turbulência. DREW e PASSMAN (1999) adotam esta mesma nomenclatura (quando  $\psi'_k = \mathbf{v}'_k$ ) para o que ISHII e HIBIKI (2011) definem como o *fluxo turbulento* ou *fluxo de covariâncias*  $\mathbb{J}_k^T$ :

$$\mathbb{J}_k^T = \overline{\rho_k \mathbf{v}'_k \psi'_k}^X \quad (3.36)$$



Define-se, adicionalmente, o *termo fonte interfacial* de  $\psi_k$  para a fase  $k$  como (DREW e PASSMAN, 1999):

$$\mathbb{I}_k = \overline{\nabla X_k \cdot [\rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \psi_k + \mathbb{J}_k]} \quad (3.37)$$

Aplicando-se as definições 3.36 e 3.37 a 3.35, obtém-se finalmente a equação média de balanço para a fase  $k$  (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$\frac{\partial \alpha_k \overline{\rho_k^X \psi_k^\rho}}{\partial t} + \nabla \cdot [\alpha_k \overline{\rho_k^X \mathbf{v}_k^\rho \psi_k^\rho}] + \nabla \cdot [\alpha_k (\overline{\mathbb{J}_k^X} + \overline{\mathbb{J}_k^T})] - \alpha_k \overline{\rho_k^X \phi_k^\rho} = \mathbb{I}_k \quad (3.38)$$

### 3.4.3 Condições de Salto Médias

DREW e PASSMAN (1999) definem a *densidade de área interfacial* como:

$$a_i = -\overline{\mathbf{n}_k \cdot \nabla X_k} \quad (3.39)$$

Segundo ROSA (2012),  $a_i$  representa a razão entre a área interfacial contida em um volume infinitesimal e o próprio volume.

DREW e PASSMAN (1999) argumentam que as médias das fontes interfaciais podem ser relacionadas tomando-se as médias das condições de salto, ponderadas pela função delta interfacial. Os mesmos autores também apontam que as condições de salto médias são obtidas aplicando-se a média sobre o produto por  $\mathbf{n}_k \cdot \nabla X_k$  das referidas equações. Oportunamente, destaca-se que, de acordo com a Equação 3.21,  $\mathbf{n}_k \cdot \nabla X_k = -\delta(n)$ . Aplicando-se o procedimento descrito à condição de salto na Equação 3.10, obtém-se:

$$\sum_{k=1}^2 \overline{[\rho_k \psi_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) + \mathbb{J}_k] \cdot [-\delta(n) \mathbf{n}_k]} = \overline{-\delta(n) S_i} \quad (3.40)$$

O membro direito deste resultado corresponde ao termo fonte interfacial  $\mathbb{I}_m$  para a mistura bifásica. Aplicando-se esta definição em 3.40, juntamente com a Equação 3.21 ao lado esquerdo, obtém-se:

$$\sum_{k=1}^2 \overline{[\rho_k \psi_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) + \mathbb{J}_k] \cdot \nabla X_k} = \sum_{k=1}^2 \mathbb{I}_k = \mathbb{I}_m \quad (3.41)$$

ISHII e HIBIKI (2011) referem-se ao resultado 3.41 como *condição de salto macroscópica*, distinguindo-o assim da condição de salto local da Equação 3.10.

### 3.4.4 Equação Média para a Mistura

Como é discutido adiante, na Seção 3.6, existem situações em que é importante dispor-se de equações de transporte que representem o sistema bifásico como um todo, em vez de tratar cada fase de forma separada. A obtenção de tal equação global começa pela adição membro a membro das duas equações da forma 3.38 (uma para cada fase), do que resulta (ROSA, 2012):

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^2 \left( \alpha_k \overline{\rho_k^X \psi_k^\rho} \right) + \nabla \cdot \left[ \sum_{k=1}^2 \left( \alpha_k \overline{\rho_k^X \mathbf{v}_k^\rho \psi_k^\rho} \right) \right] + \nabla \cdot \left[ \sum_{k=1}^2 \alpha_k \left( \overline{\mathbb{J}_k^X} + \overline{\mathbb{J}_k^T} \right) \right] - \sum_{k=1}^2 \left( \alpha_k \overline{\rho_k^X \phi_k^\rho} \right) = \sum_{k=1}^2 \mathbb{I}_k \quad (3.42)$$

A Equação 3.42 precisa ser reescrita para expressar a evolução da mistura bifásica, definindo-se suas propriedades em função daquelas das duas fases.

A massa específica da mistura,  $\rho_m$ , é definida como (ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012):

$$\rho_m = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k^X} \quad (3.43)$$

Os mesmos autores definem a *velocidade do centro de massa* da mistura,  $\mathbf{v}_m$ , como:

$$\mathbf{v}_m = \frac{1}{\rho_m} \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k^X \mathbf{v}_k^\rho} \quad (3.44)$$

A *velocidade de difusão* da fase  $k$  corresponde à diferença entre sua velocidade baseada na massa e a velocidade  $\mathbf{v}_m$  da mistura (ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012):

$$\mathbf{v}_k^{\text{dif}} = \overline{\mathbf{v}_k^\rho} - \mathbf{v}_m \quad (3.45)$$

A propriedade genérica da mistura  $\psi_m$ , correspondente a  $\psi_k$  para a fase  $k$ , é definida como (ROSA, 2012):

$$\psi_m = \frac{1}{\rho_m} \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k^X \psi_k^\rho} \quad (3.46)$$

As definições anteriores podem ser utilizadas para reescrever o somatório no

segundo termo da Equação 3.42, como:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\mathbf{v}_k^\rho} \overline{\psi_k^\rho} &= \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k^X} (\mathbf{v}_k^{\text{dif}} + \mathbf{v}_m) \overline{\psi_k^\rho} = \\ &= \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k^X} \mathbf{v}_k^{\text{dif}} \overline{\psi_k^\rho} + \mathbf{v}_m \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\psi_k^\rho} = \mathbb{J}_m^{\text{dif}} + \rho_m \mathbf{v}_m \psi_m \end{aligned} \quad (3.47)$$

em que  $\mathbb{J}_m^{\text{dif}}$  representa o transporte dos  $\overline{\psi_k^\rho}$  devido à diferença de velocidades entre as fases (ISHII e HIBIKI, 2011).

Define-se, adicionalmente, os fluxos molecular  $\mathbb{J}_m^M$  e turbulento  $\mathbb{J}_m^T$  da mistura, bem como seu termo fonte genérico  $\phi_m$ , como (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$\mathbb{J}_m^M = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\mathbb{J}_k^X} \quad (3.48a)$$

$$\mathbb{J}_m^T = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \mathbb{J}_k^T \quad (3.48b)$$

$$\phi_m = \frac{1}{\rho_m} \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\phi_k^\rho} \quad (3.48c)$$

Aplicando-se as definições apresentadas, a Equação 3.42 já pode ser reescrita como uma *equação média de balanço para a mistura* (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$\frac{\partial \rho_m \psi_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{v}_m \psi_m) + \nabla \cdot (\mathbb{J}_m^M + \mathbb{J}_m^{\text{dif}} + \mathbb{J}_m^T) - \rho_m \phi_m = \mathbb{I}_m \quad (3.49)$$

ISHII e HIBIKI (2011) destacam que, uma vez deduzidas as Equações 3.38, 3.41 e 3.49, o objetivo original da aplicação do processo de média já foi alcançado. Foram filtradas as complicadíssimas flutuações de natureza bifásica e turbulenta, expressando-se seus efeitos estatísticos macroscópicos por meio dos fluxos turbulentos. Adicionalmente, as duas fases, que antes se alternavam em pontos de um meio descontínuo, agora coexistem de forma simultânea em todo o espaço com probabilidades de ocorrência adequadamente definidas, caracterizando o conceito de *meios interpenetrantes* (ROSA, 2012).

### 3.4.5 Processos Específicos de Média

Como já foi mencionado, as médias temporal, volumétrica e estatística são as mais citadas na literatura. YEOH *et al.* (2014) priorizam a aplicação das duas últimas,

enquanto que ISHII e HIBIKI (2011) trabalham somente com a temporal, FAGHRI e ZHANG (2006) demonstram a volumétrica e DREW e PASSMAN (1999) e KLEINS-TREUER (2003) preferem a estatística. Em geral, estas publicações apresentam comparações vagas entre os diversos processos de média, pouco discutindo possíveis impactos desta escolha sobre a modelagem. ISHII e HIBIKI (2011), por exemplo, afirmam que diferenças “importantes” entre as médias temporal e estatística surgem não na forma final das equações médias obtidas, mas sim na interpretação das variáveis com relação a um escoamento real. O emprego do adjetivo “importante” deixa em dúvida se a forma dos balanços resultantes é exatamente a mesma ou se diferenças “desprezíveis” porventura existem. O mesmo pode-se dizer de KLEINS-TREUER (2003), segundo quem as equações médias obtidas pelos três processos são “essencialmente” as mesmas.

Segundo DREW e PASSMAN (1999), a média estatística possui caráter fundamental, enquanto que as médias temporal e volumétrica apenas aproximam seus resultados em casos especiais. Estes autores ainda classificam como “conveniente” o fato de a aplicação direta das duas últimas médias resultar em equações que são “formalmente” as mesmas que resultam da primeira.

De todos os autores pesquisados, ROSA (2012) foi o único a aplicar cada uma das três médias de forma separada e rigorosa, demonstrando matematicamente que todas resultam nas mesmas equações médias genéricas.

Este relato indica que as equações médias a serem resolvidas na abordagem de dado problema independem da média considerada. O que pode variar de um processo de média para outro é a sua *aplicabilidade* ao problema de interesse.

A média temporal, Equação 2.19, só é aplicável quando determinadas escalas de tempo diferem por algumas ordens de grandeza, conforme discutido na Seção 2.6. Já a média volumétrica de uma variável  $f$  é definida como (FAGHRI e ZHANG, 2006; ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012):

$$\bar{f}^V = \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} f \, dV \quad (3.50)$$

em que  $\Delta V$  é um elemento de volume significativamente reduzido frente ao volume total do sistema bifásico, porém suficientemente maior que as não-uniformidades do campo.

A média estatística, por sua vez, é definida como a média aritmética dos valores medidos em uma mesma posição e instante de tempo para a variável de interesse em um alto número de experimentos hipotéticos conduzidos sob condições idênticas (as diferenças observadas de um valor para outro se devem à natureza aleatória do escoamento bifásico). Esta média possui completa generalidade na medida que não depende da supracitada separação de escalas de tempo ou espaço (KLEINS-

TREUER, 2003; ROSA, 2012).

Se a média volumétrica é aplicável, a média da função indicadora  $X_k$  resulta em (ROSA, 2012; YEOH *et al.*, 2014):

$$\overline{X_k}^V = \alpha_k = \frac{\Delta V_k}{\Delta V} \quad (3.51)$$

em que  $\Delta V_k$  é a fração do volume  $\Delta V$  ocupada pela fase  $k$ .

O resultado acima mostra que se a média volumétrica é aplicável,  $\alpha_k$  corresponde à *fração volumétrica* da fase  $k$ . Para a média de conjunto, ISHII e HIBIKI (2011) apontam que a interpretação para  $\alpha_k$  é a fração do número de experimentos em que se verificou a ocorrência da fase  $k$ . Os mesmos autores também mostram que, no caso da média temporal, a fração de vazios representa, para dado ponto, a fração do intervalo de tempo da média em que o mesmo esteve ocupado pela fase  $k$ . Como se vê, a aplicabilidade de um ou outro processo de média valida ou invalida as possíveis interpretações para dada variável.

### 3.4.6 Descontinuidades e a Aplicação das Médias

A dedução apresentada das equações médias seguiu o procedimento empregado por KLEINSTREUER (2003) e YEOH *et al.* (2014). Estes autores adotaram as Regras de Leibniz e Gauss (Equação 3.18) e as regras para derivadas de produtos expressas pelas Equações 3.25 e 3.26, nas quais nenhum tratamento diferenciado é aplicado à função indicadora  $X_k$ .

Outros autores (FAGHRI e ZHANG, 2006; ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012) consideraram que  $X_k$  introduz descontinuidades no tempo ou no espaço e lançaram mão de regras específicas para funções descontínuas, em detrimento das aqui utilizadas. Ao empregar a média volumétrica, por exemplo, FAGHRI e ZHANG (2006) utilizaram as seguintes relações:

$$\frac{\partial \overline{f_k}^V}{\partial t} = \frac{\partial \overline{f_k}^V}{\partial t} - \frac{1}{\Delta V} \int_{A_k} f_k (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{n}_k) dA_k \quad (3.52a)$$

$$\nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\Omega}_k}^V = \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\Omega}_k}^V + \frac{1}{\Delta V} \int_{A_k} (\boldsymbol{\Omega}_k \cdot \mathbf{n}_k) dA_k \quad (3.52b)$$

em que  $A_k$  agora é a área interfacial que delimita a fase  $k$  no interior de  $\Delta V$ . A variável  $f_k$  pode ser um escalar, um vetor ou um tensor de segunda ordem, enquanto que  $\boldsymbol{\Omega}_k$  pode ser um vetor ou um tensor de segunda ordem.

É interessante notar que, não tendo estabelecido médias de Favre antes de tomar a média da equação da continuidade, FAGHRI e ZHANG (2006) precisaram explicitar as flutuações da massa específica e depois, tomar como desprezível a média de

seu produto com as oscilações da velocidade. A expressão obtida por estes autores para  $\mathbb{I}_k$ , que no caso da conservação de massa, representa a taxa de transferência de massa por unidade de volume da outra fase para a fase  $k$ , foi:

$$\Gamma_k^V = -\frac{1}{\Delta V} \int_{A_k} [\rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \cdot \mathbf{n}_k] dA_k \quad (3.53)$$

em que o superíndice  $V$  indica a obtenção deste resultado pela média volumétrica.

Por outro lado, se a Equação 3.21 for substituída no termo fonte interfacial, Equação 3.37, juntamente com as grandezas indicadas na Seção 2.4.1, obtém-se:

$$\Gamma_k = \overline{[\rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i)] \cdot [-\delta(n) \mathbf{n}_k]} \quad (3.54)$$

Os resultados 3.53 e 3.54 devem ser comparados à luz da Equação 3.15, que mostra como o emprego da função delta de Dirac permite transformar uma integral sobre um volume em outra sobre a área interfacial. Demonstra-se assim que ambas as abordagens conduziram ao mesmo resultado.

A desconsideração da possibilidade de descontinuidades em  $X_k$  não constitui um erro se for considerado que sua variação entre 0 e 1 se dá de forma muito súbita, porém sempre contínua. Fisicamente, isto até faz sentido, pois segundo a discussão no início da Seção 3.2, a natureza descontínua da interface é uma (boa) *aproximação*.  $X_k$  também pode ser considerada contínua de um ponto de vista computacional, uma vez que a definição do delta de Dirac não pode ser usada para definir uma função matemática. A função delta de Dirac, que de fato é uma distribuição, é definida como:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \quad (3.55)$$

e que satisfaz a restrição:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1 \quad (3.56)$$

Segundo TRYGGVASON *et al.* (2011), cálculos computacionais envolvendo essa função são normalmente realizados recorrendo-se a aproximações como:

$$\delta(x) = \frac{\epsilon}{\pi(x^2 + \epsilon^2)} \quad (3.57)$$

em que o parâmetro  $\epsilon$  pode ser ajustado para concentrar a função em torno da origem tanto quanto desejado, como ilustra a Figura 3.5.

TRYGGVASON *et al.* (2011) também mencionam a possibilidade de se obter a função delta de Dirac via diferenciação de uma forma *suavizada* da função degrau, analogamente ao indicado pela Equação 3.21.

Em linha com o parágrafo anterior, o autor do presente trabalho sugere que uma

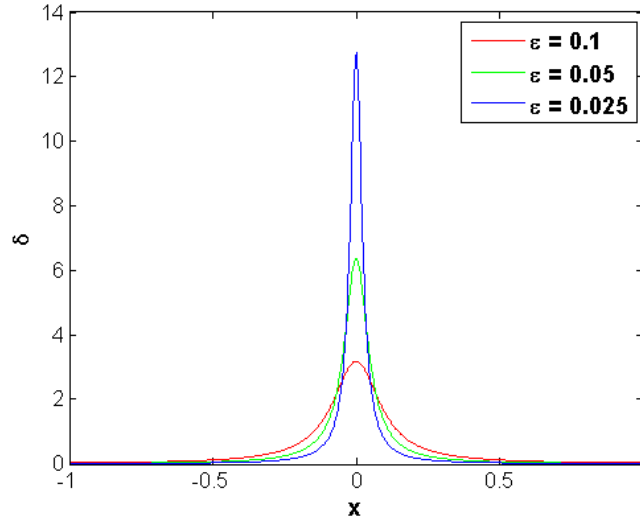


Figura 3.5: Aproximação para função delta de Dirac.

boa aproximação para a função indicadora  $X_k$  e sua correspondente função delta seriam:

$$\eta(x) = \frac{1 + \tanh(x/\epsilon)}{2} \quad (3.58a)$$

$$\delta(x) = \frac{d\eta}{dx} = \frac{\operatorname{sech}^2(x/\epsilon)}{2\epsilon} \quad (3.58b)$$

A Figura 3.6a mostra que o ajuste de  $\epsilon$  na Equação 3.58a permite reduzir, tanto quanto desejado, a região de transição entre os valores 0 e 1. A Figura 3.6b, por sua vez, mostra que a derivada de  $\eta$  (Equação 3.58b) aproxima o comportamento da função delta nos mesmos termos que a Equação 3.57 sugerida por TRYGGVASON *et al.* (2011), atendendo-se aí à Equação 3.21. Adicionalmente, a Equação 3.58b obedece sempre à condição 3.56. Mais importante ainda, a Equação 3.58a é contínua e os resultados apresentados sugerem, com argumentos computacionais, a validade da consideração de  $X_k$  contínua na dedução apresentada das equações médias.

### 3.5 O Modelo de Dois Fluidos

De acordo com o resultado obtido na Seção 3.4.2, o cálculo do escoamento bifásico pode ser baseado na solução das equações médias da forma 3.38 para cada fase. Esta abordagem corresponde ao que se convencionou referenciar como o *Modelo de Dois Fluidos* (tradução comum para *Two-Fluid Model*). Em sua forma mais ampla, tal modelo é constituído por nove equações principais: dois conjuntos de equações médias de balanço de massa, momentum e energia (um conjunto para cada fase), complementados pelas condições de salto médias (Equação 3.41) para

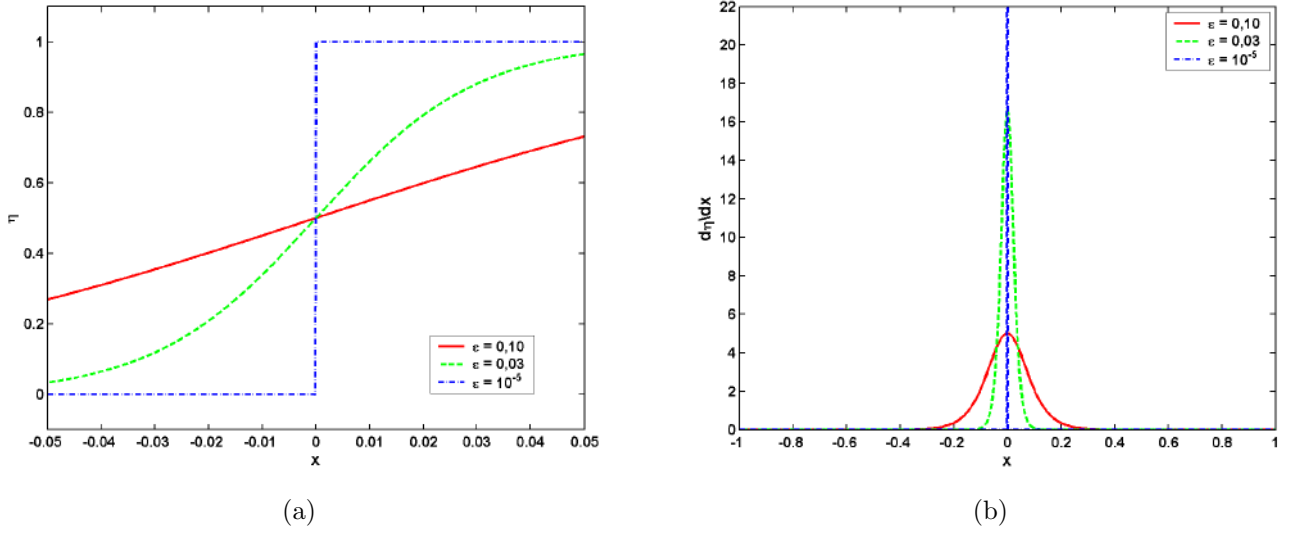


Figura 3.6: Aproximação computacional para (a) função indicadora de fase e (b) sua derivada.

massa, quantidade de movimento e energia (ISHII e HIBIKI, 2011).

### 3.5.1 Média Transversal

Substituindo-se nas Equações 3.38 e 3.41 as devidas definições de  $\psi$ ,  $\mathbb{J}$  e  $\phi$ , obtém-se o Modelo de Dois Fluidos *tridimensional*. ROSA (2012) enfatiza, entretanto, a adequação da representação de escoamentos bifásicos em tubulações por equações transientes *unidimensionais*, obtidas via aplicação de um processo de média na seção transversal do escoamento. Tal procedimento simplifica a um único valor qualquer propriedade do escoamento em dada seção transversal da tubulação, além de reduzir os vetores velocidade a escalares na direção axial. As equações resultantes, que constituem o Modelo de Dois Fluidos 1D, expressam as variações destas médias transversais na direção axial e no tempo. Em sua dedução, ROSA (2012) e ISHII e HIBIKI (2011) consideraram que as massas específicas das fases são uniformes na seção transversal (sendo, portanto, iguais às respectivas médias transversais), o que justificaram tomando como desprezível o gradiente de pressão transversal no canal.

A média transversal de uma variável  $f$  é matematicamente definida como (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$\langle f \rangle = \frac{1}{A} \int_A f \, dA \quad (3.59)$$

em que  $A = \pi d^2/4$  é a área da seção transversal da tubulação.

A *média ponderada pela concentração* da fase  $k$  na seção transversal é calculada como:

$$\langle f_k \rangle_\alpha = \frac{\langle \alpha_k f_k \rangle}{\langle \alpha_k \rangle} \quad (3.60)$$



A consideração de massas específicas uniformes resulta em:

$$\langle \overline{\rho_k^X} \rangle = \overline{\rho_k^X} \quad (3.61a)$$

$$\langle \overline{\rho_k^X} \rangle_\alpha = \overline{\rho_k^X} \quad (3.61b)$$

O emprego simultâneo de dois processos de média, evidente no lado esquerdo das Equações 3.61, é abordado na literatura por motivos que vão além da conveniência para escoamentos em uma direção preferencial. Segundo PROSPERETTI e TRYGGVASON (2007), quando não se verifica a separação de escalas pressuposta na aplicação da média volumétrica, as variáveis médias definidas não são suaves, o que pode ser contornado combinando-se a média volumétrica com outro processo (por exemplo, a média temporal). Em termos mais gerais, KLEINSTREUER (2003) e GHIAASIAAN (2008) destacam que a aplicação de um único processo de média às equações locais instantâneas resulta em variáveis que são contínuas, mas cujas derivadas são descontínuas. Ambas as publicações apontam como solução o procedimento de *média composta* (*double averaging* ou *composite averaging*). Segundo GHIAASIAAN (2008), as médias compostas temporal-volumétrica e estatística-volumétrica são as mais difundidas para escoamentos bi e tridimensionais. Para escoamentos unidimensionais, o mesmo autor aponta como equivalentes as médias temporal-transversal e estatística-transversal.

### 3.5.2 Modelo 1D

A equação da continuidade média unidimensional para a fase  $k$  é (ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012):

$$\frac{\partial [\langle \alpha_k \rangle \overline{\rho_k^X}]}{\partial t} + \frac{\partial [\langle \alpha_k \rangle \overline{\rho_k^X} \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha]}{\partial x} = \langle \Gamma_k \rangle \quad (3.62)$$

em que  $\langle \Gamma_k \rangle$  corresponde à taxa volumétrica de *geração* da fase  $k$  (ISHII e HIBIKI, 2011). Isto significa que quando ocorre evaporação,  $\langle \Gamma_v \rangle > 0$  (GHIAASIAAN, 2008).

ISHII e HIBIKI (2011) apontam que, com a aplicação da média transversal, perde-se a modelagem referente à variação das diversas propriedades do escoamento nas direções normais à axial. Neste caso, as transferências de momentum e energia entre a parede da tubulação e a mistura fluida precisam ser especificadas por relações empíricas ou modelos simplificados em substituição às condições interfaciais exatas. Fazendo-se as devidas substituições na Equação 3.38, aplicando-se a média transversal e adicionando-se a contribuição da parede, obtém-se a seguinte equação

média do movimento:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\langle \alpha_k \rangle \overline{\rho_k^X} \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha]}{\partial t} + \frac{\partial [\mathbb{C}_{\psi k} \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho_k^X} \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha^2]}{\partial x} + \left\langle \frac{\partial (\alpha_k \overline{P_k^X})}{\partial x} \right\rangle - \\ \frac{\partial \langle \alpha_k (\overline{\tau_{kxx}^X} + \tau_{kxx}^T) \rangle}{\partial x} + \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho_k^X} g \text{sen}(\theta) + \frac{S_k}{A} \tau_{kw} = \langle \mathbf{M}_k \rangle \end{aligned} \quad (3.63)$$

em que  $\tau_{kw}$  e  $S_k$  representam a tensão cisalhante da fase  $k$  junto à parede e o perímetro da parede “molhado” pela fase  $k$ , respectivamente. A relação entre a média transversal do produto de determinadas variáveis e o produto de suas médias transversais é dada por um *coeficiente de covariância*  $\mathbb{C}_{\psi k}$ , também conhecido como *parâmetro de distribuição* e definido para o termo advectivo por (ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012):

$$\left\langle \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{v_k^\rho} \overline{\psi_k^\rho} \right\rangle = \overline{\rho_k^X} \left\langle \alpha_k \overline{v_k^\rho} \overline{\psi_k^\rho} \right\rangle = \overline{\rho_k^X} \mathbb{C}_{\psi k} \left[ \langle \alpha_k \rangle \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha \left\langle \overline{\psi_k^\rho} \right\rangle_\alpha \right] \quad (3.64)$$

$\overline{\tau_{kxx}^X}$  e  $\tau_{kxx}^T$  são componentes de  $\overline{\boldsymbol{\tau}_k^X}$  e de:

$$\boldsymbol{\tau}_k^T = -\overline{\rho_k \mathbf{v}'_k \mathbf{v}'_k} \quad (3.65)$$

O membro direito da Equação 3.63 corresponde à média transversal de  $\mathbf{M}_k$ , que é a fonte de quantidade de movimento da fase  $k$  devido à transferência interfacial. A expressão que define esta grandeza pode ser obtida pela substituição das variáveis adequadas na Equação 3.37. A mesma pode ser desenvolvida de modo a explicitar a influência dos diversos mecanismos relevantes, conforme demonstrado no Apêndice A, permitindo expressar a equação unidimensional do movimento 3.63 sob forma análoga à apresentada por ISHII e HIBIKI (2011):

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\langle \alpha_k \rangle \overline{\rho_k^X} \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha]}{\partial t} + \frac{\partial [\mathbb{C}_{\psi k} \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho_k^X} \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha^2]}{\partial x} = - \left\langle \alpha_k \frac{\partial \overline{P_k^X}}{\partial x} \right\rangle + \\ \frac{\partial \langle \alpha_k (\overline{\tau_{kxx}^X} + \tau_{kxx}^T) \rangle}{\partial x} - \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho_k^X} g \text{sen}(\theta) - \frac{S_k}{A} \tau_{kw} + \\ \langle \Gamma_k \overline{v_k^i} \rangle + \left\langle \left( \overline{P_k^i} - \overline{P_k^X} \right) \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} \right\rangle + \langle \mathbf{M}_{ik}^d \rangle \end{aligned} \quad (3.66)$$

O antepenúltimo termo da Equação 3.66 representa o fluxo interfacial médio de quantidade de movimento associado a mudanças de fase. O termo seguinte quantifica os efeitos da diferença entre as pressões médias interfacial e da fase  $k$ . O último termo, por sua vez, corresponde à influência de diversas *forças interfaciais*, as quais

são abordadas no capítulo 4 (ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003; ROSA, 2012).

A obtenção de uma equação média para a conservação de energia parte da substituição, em 3.38, dos valores indicados na Seção 2.4.3. A conversão do resultado em uma equação tridimensional para a entalpia passa pela subtração do produto escalar de  $\overline{\mathbf{v}_k^\rho}$  pela equação média 3D do movimento. ISHII e HIBIKI (2011) demonstraram o procedimento, aplicaram a média transversal e adicionaram o calor trocado através da parede (aqui representado como  $Q_{kw}$ ) para chegar na seguinte equação unidimensional:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[ \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho}_k^X \left\langle \widehat{h}_k + \frac{(\mathbf{v}'_k)^2}{2} \right\rangle_\alpha \right]}{\partial t} + \frac{\partial \left[ \mathbb{C}_{hk} \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho}_k^X \left\langle \widehat{h}_k + \frac{(\mathbf{v}'_k)^2}{2} \right\rangle_\alpha \langle \overline{v}_k^\rho \rangle_\alpha \right]}{\partial x} = \\ - \frac{\partial \left[ \langle \alpha_k \rangle \langle \overline{q}_k^X + q_k^T \rangle_\alpha \right]}{\partial x} + \left\langle \alpha_k \left[ \frac{\partial \overline{P}_k^X}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}_k^\rho} \cdot \nabla \overline{P}_k^X \right] \right\rangle + Q_{kw} \\ + \langle \Gamma_k \rangle \left\langle \overline{h}_k^i \right\rangle_\alpha + \langle a_i \overline{q}_k^i \rangle + \langle \Phi_k \rangle \quad (3.67) \end{aligned}$$

em que  $\overline{h}_k^i$  e  $\overline{q}_k^i$  representam valores médios interfaciais da entalpia e do fluxo de calor, ao passo que  $\Phi_k$  representa, para fins práticos, apenas a dissipação viscosa. Verifica-se nos dois primeiros termos que a *energia cinética turbulenta* aparece somada à entalpia média  $\widehat{h}_k$ . Esta última, por sua vez, é definida como (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$\widehat{h}_k = \overline{U}_k^\rho + \frac{\overline{P}_k^X}{\overline{\rho}_k^X} \quad (3.68)$$

Esta definição é inteiramente análoga à relação termodinâmica da Equação 2.14. Convém observar que, ao discutir a necessidade das equações de estado térmica e calórica para cada fase na solução do Modelo de Dois Fluidos, KLEINSTREUER (2003) lembra que, embora tais equações de *fechamento* sejam *localmente* válidas, não existe uma demonstração rigorosa da validade de sua aplicação às propriedades termodinâmicas *médias*. O mesmo autor aponta, contudo, que não resta muita escolha exceto considerá-las aplicáveis.

O *fluxo térmico turbulento*  $\mathbf{q}_k^T$  é definido por ISHII e HIBIKI (2011) como:

$$\mathbf{q}_k^T = \overline{\rho_k \left( U_k + \frac{v_k^2}{2} \right)'} \mathbf{v}'_k - \overline{\boldsymbol{\pi}_k \cdot \mathbf{v}'_k}^X \quad (3.69)$$

De acordo com ISHII e HIBIKI (2011), contribuições de natureza mecânica à equação da energia são desprezíveis em problemas em que as trocas de energia são dominadas por mudanças de fase e transferências de calor. Este argumento se

traduziu no descarte dos termos correspondentes durante a dedução da Equação 3.67, a qual, segundo os mesmos autores, é válida para a maioria das aplicações práticas.

### 3.5.3 Simplificações

A literatura mais dedicada a aplicações práticas e à solução numérica do Modelo de Dois Fluidos (e menos focada na dedução de suas equações) não costuma trabalhar com a forma completa das equações unidimensionais 3.62, 3.66 e 3.67, desprezando alguns dos termos que as compõem e dispensando a notação referente aos processos de média.

A análise conjunta de livros (GHIAASIAAN, 2008; LEVY, 1999; MOKHATAB e POE, 2012) e de artigos (ABBASPOUR *et al.*, 2010; MORALES-RUIZ *et al.*, 2012; ZOU *et al.*, 2016b) com o perfil apontado, bem como dos manuais do código RELAP5 <sup>1</sup> (ISL, 2001b), permitiu estabelecer equações representativas do atual estado da arte, as quais foram utilizadas no desenvolvimento do presente trabalho.

Para a conservação de massa, as equações médias da continuidade são:

$$\frac{\partial [\alpha_l \rho_l]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_l \rho_l v_l]}{\partial x} = -\Gamma_v \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial [\alpha_v \rho_v]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_v \rho_v v_v]}{\partial x} = \Gamma_v \quad (3.71)$$

Os equacionamentos estudados para a quantidade de movimento adaptam-se à seguinte formulação geral:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\alpha_l \rho_l v_l]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_l \rho_l v_l^2]}{\partial x} = & -\alpha_l \frac{\partial P_l}{\partial x} - \alpha_l \rho_l g \sin(\theta) - F_{lw} - \Gamma_v v_{li} + \\ & (P_i - P_l) \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + F_{li} + F_{lMV} \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\alpha_v \rho_v v_v]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_v \rho_v v_v^2]}{\partial x} = & -\alpha_v \frac{\partial P_v}{\partial x} - \alpha_v \rho_v g \sin(\theta) - F_{vw} + \Gamma_v v_{vi} + \\ & (P_i - P_v) \frac{\partial \alpha_v}{\partial x} + F_{vi} + F_{vMV} \end{aligned} \quad (3.73)$$

E para a conservação de energia (introduzindo-se  $Q_{ki} = \langle a_i \bar{q}_k^i \rangle$ ):

$$\frac{\partial [\alpha_l \rho_l h_l]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_l \rho_l v_l h_l]}{\partial x} = \alpha_l \frac{\partial P}{\partial t} + Q_{lw} - \Gamma_v h_{li} + Q_{li} \quad (3.74)$$

---

<sup>1</sup> *Reactor Excursion and Leak Analysis Program*, referenciado com frequência na literatura.

$$\frac{\partial [\alpha_v \rho_v h_v]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_v \rho_v v_v h_v]}{\partial x} = \alpha_v \frac{\partial P}{\partial t} + Q_{vw} + \Gamma_v h_{vi} + Q_{vi} \quad (3.75)$$

O mesmo conjunto de referências fornece os seguintes balanços interfaciais de massa, momentum e energia:

$$\Gamma_l + \Gamma_v = 0 \quad (3.76)$$

$$-\Gamma_v v_{li} + F_{li} + F_{lMV} + \Gamma_v v_{vi} + F_{vi} + F_{vMV} = 0 \quad (3.77)$$

$$Q_{li} + Q_{vi} + \Gamma_v [h_{vi} - h_{li}] = 0 \quad (3.78)$$

A importância do processo de dedução das Equações 3.62, 3.66 e 3.67 deve ser destacada aqui, pois a comparação termo a termo do modelo apresentado com estas equações permite inferir o significado exato de cada variável, além de esclarecer a origem de determinadas parcelas e as simplificações que resultaram na omissão de outras contribuições.

As equações da continuidade 3.70 e 3.71 são idênticas à Equação 3.62. A condição de salto macroscópica 3.41 para a massa (Equação 3.76) resulta em  $\Gamma_l = -\Gamma_v$ , resultado que já se encontra aplicado ao lado direito de 3.70, 3.72 e 3.74.

O manual do código RELAP5 (ISL, 2001b) lista, dentre as simplificações aplicadas às equações do movimento, a consideração de coeficientes de covariância unitários e o desprezo das tensões viscosas e de Reynolds. Para o caso específico de simulações unidimensionais, ISHII e HIBIKI (2011) também sugerem desprezar o termo turbulento médio sem deixar de considerar o cisalhamento  $F_{kw}$  na parede. Ainda no contexto de abordagens 1D, estes mesmos autores destacam que somente as forças interfaciais de *arrasto*  $F_{ki}$  e de *massa virtual*  $F_{kMV}$  é que precisam ser consideradas no caso de escoamentos Dispersos (para escoamentos Separados, são mais importantes os efeitos do cisalhamento interfacial). Estas forças são tratadas em maior detalhe na discussão das equações constitutivas necessárias (Seções 4.2 e 4.3). Por ora, basta notar que as simplificações apresentadas reduzem a equação do movimento 3.66 às formas 3.72 e 3.73.

O balanço interfacial 3.77 de quantidade de movimento, considerado pelo código RELAP5 (ISL, 2001b), corresponde à condição de salto apresentada por ISHII e HIBIKI (2011), acrescida dos termos  $\Gamma_k v_{ki}$ . Seu lado direito nulo parece indicar que a força originada pela tensão superficial (Equação 3.12) está sendo desprezada. Uma consulta ao Apêndice A mostra, contudo, que nem todos os componentes de  $\mathbf{M}_l$  e  $\mathbf{M}_v$  aparecem no lado esquerdo desta expressão.

Comparando-se os dois primeiros termos das Equações 3.74 e 3.75 com seus correspondentes em 3.67, é possível constatar a desconsideração da energia cinética turbulenta, conforme sugerido por ISHII e HIBIKI (2011). Observa-se ainda o emprego de coeficientes de covariância unitários também na equação da energia, a exemplo

do que faz o simulador RELAP5 (ISL, 2001b). Este simulador não trabalha com o fluxo térmico de Reynolds, que também não figura nas Equações 3.74 e 3.75.

MORALES-RUIZ *et al.* (2012) citam explicitamente a desconsideração da transferência de calor por radiação e da condução de calor axial sem fazer o mesmo para a dissipação viscosa; nenhuma destas contribuições figuram nas equações da energia apresentadas por estes autores e nem nas Equações 3.74 e 3.75 (destaca-se, entretanto, que a possibilidade de desprezar estes termos foi discutida na Seção 2.4.3). A radiação também não é considerada na Equação 3.67. Já a dissipação viscosa, assim como o segundo termo no lado direito da Equação 3.67, encontra-se entre os efeitos mecânicos desprezados por ISHII e HIBIKI (2011). Esta suposição justificaria, adicionalmente, o descarte dos termos que contêm a derivada da pressão com o tempo nas Equações 3.74 e 3.75, os quais representam o trabalho de expansão ou contração das fases (LEVY, 1999) e foram retidos por alguns autores (LEVY, 1999; MORALES-RUIZ *et al.*, 2012). Ressalta-se, porém, que se tais contribuições forem mesmo desprezíveis, então sua (dispensável) manutenção não invalidará os resultados do modelo.

Convém discutir neste ponto mais uma simplificação comum, que é a suposição de pressões iguais para ambas as fases ( $P_l = P_v = P$ ). ROSA (2012) adota esta consideração ao apresentar o Modelo de Dois Fluidos 1D, o que atribui à ausência de efeitos de tensão superficial ou forças capilares. O código RELAP5 considera  $P_l = P_v = P_i = P$  em todas as situações com exceção do escoamento Estratificado horizontal, quando as três pressões são mantidas como diferentes nas equações do movimento (ISL, 2001b). Esta exceção não é aplicada às equações da energia nesta referência, e também não o foi nas Equações 3.74 e 3.75 (em que espera-se, de todo modo, que os termos de trabalho de expansão e contração sejam desprezíveis). As pressões foram escritas como diferentes nas Equações 3.72 e 3.73 somente para evitar perda de generalidade, embora ISHII e HIBIKI (2011) também afirmem que o termos contendo a diferença  $P_i - P_k$  podem ser desprezados quando o escoamento não é Estratificado horizontal. A modelagem constitutiva aplicada a cada um destes casos é detalhada mais adiante, na Seção 4.5.

Finalmente, quanto ao balanço interfacial de energia, Equação 3.78, observa-se que corresponde exatamente à condição de salto unidimensional fornecida por ISHII e HIBIKI (2011) e utilizada pelo código RELAP5 (ISL, 2001b).

### 3.5.4 Aplicabilidade e Discussão

Segundo ROSA (2012), o Modelo de Dois Fluidos proporciona bons resultados para escoamentos bifásicos em que as duas fases estão “relativamente desacopladas”, nos regimes Estratificado ou Anular. Quando não é o caso, ISHII e HIBIKI (2011)

afirmam que ele se mostra demasiadamente complexo, recomendando a abordagem discutida na próxima seção.

Um dos aspectos mais discutidos do Modelo de Dois Fluidos é a necessidade de equações de fechamento para possibilitar sua solução. Vale lembrar que mesmo um problema de escoamento monofásico exige a especificação de equações de estado e de *equações constitutivas* para o tensor das tensões viscosas e para as tensões de Reynolds. A solução de um problema bifásico exige, adicionalmente, relações constitutivas para as interações entre as fases, relacionadas aos termos  $\mathbb{I}_k$  e  $\mathbb{I}_m$  (KLEINSTREUER, 2003).

A existência dos termos interfaciais de transferência, os quais nascem na aplicação de processos de média às equações locais instantâneas, é destacada por ISHII e HIBIKI (2011) como uma das principais características do Modelo de Dois Fluidos. Entretanto, as definições exatas destes termos, obtidas das Equações 3.40 e 3.41, não servem como leis constitutivas, uma vez que são expressas em função de variáveis locais instantâneas. Como bem lembra KLEINSTREUER (2003), “se tivéssemos a solução instantânea, não precisaríamos resolver as equações médias”.

Por sua vez, ROSA (2012) afirma que, como não se possuem informações para resolver os termos médios de interação entre as fases, o processo de média resulta em um sistema de equações indeterminado. Segundo o mesmo autor, tal deficiência de informações deve ser suprida por relações de fechamento obtidas de modelos e/ou dados experimentais. Como tais relações podem depender do regime de escoamento, o número total de equações constitutivas necessárias deve ser multiplicado pelo total de padrões de interesse. O número de equações complementares segue aumentando junto com o esforço crescente para calcular o escoamento bifásico com detalhe cada vez maior (LEVY, 1999).

Apesar da discussão apresentada, ISHII e HIBIKI (2011) ressaltam que as relações de fechamento para os termos interfaciais ainda não estão completamente desenvolvidas, lembrando que sequer os fluxos turbulentos do escoamento monofásico encontram-se totalmente solucionados. Consideráveis dificuldades experimentais e de modelagem são citadas como justificativa para o quadro atual. ROSA (2012) também afirma que as equações constitutivas ainda estão distantes do ideal, destacando a impossibilidade de medição experimental de determinadas variáveis na interface como obstáculo ao desenvolvimento de modelos para as forças interfaciais. A via alternativa de se obter tais valores através de simulações DNS é mencionada por este autor.

## 3.6 O Modelo de Mistura

O Modelo de Dois Fluidos constitui a formulação macroscópica mais detalhada e precisa atualmente disponível para escoamentos bifásicos. Desta forma, trata-se do modelo com menos limites conhecidos de aplicabilidade, podendo representar até mesmo escoamentos transientes contra-corrente (ISHII e HIBIKI, 2011).

Tamanho espectro de possibilidades vem ao custo de maior complexidade do equacionamento e alto esforço computacional requerido em sua solução. Além do mais, a análise dinâmica de sistemas bifásicos requer o cálculo da resposta da mistura bifásica como um todo, e não do comportamento de cada fase (ressalte-se que mesmo o cálculo local detalhado de cada fase é mais prontamente realizado quando a evolução da mistura já é conhecida). Estes argumentos tornam atraente a abordagem do problema por equações médias representativas de toda a mistura bifásica, conforme o desenvolvimento apresentado na Seção 3.4.4 (ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003).

### 3.6.1 O Modelo *Drift-Flux* 1D

Em primeira análise, o *Modelo de Mistura* é baseado em equações médias da continuidade, momentum e energia para a mistura (obtidas da Equação 3.49), complementadas pela equação média da continuidade para a fase vapor (a mesma desenvolvida no Modelo de Dois Fluidos).

Foram eliminadas da formulação mais completa uma equação da quantidade de movimento e outra da energia. Portanto, o movimento relativo das fases e suas diferenças de energia precisarão ser dados por relações constitutivas adicionais. Segundo ISHII (1977), tais características são abordadas utilizando-se a equação da continuidade de uma fase juntamente com uma *equação constitutiva cinemática* para sua velocidade de difusão, além de outra expressão para a mudança de fase ( $\Gamma_v$ ). Uma vez que as taxas de transferência interfacial de massa e quantidade de movimento dependem do regime de escoamento, espera-se que as referidas equações de fechamento também variem com o mesmo. De fato, ao discutir a solução deste modelo em regime permanente, ROSA (2012) alerta para a necessidade de um método extra para prever o padrão de escoamento e adequar as equações constitutivas.

Em diversas referências (ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003), o Modelo de Mistura recebe a denominação alternativa de *Drift-Flux Model*. Segundo ROSA (2012) isto se deve ao fato de a velocidade de difusão ser preferencialmente expressa pela *velocidade de deslizamento (drift velocity)*, como demonstram ISHII e HIBIKI (2011). A velocidade de deslizamento da fase  $k$  corresponde à sua velocidade



relativa ao *centro de volume* da mistura:

$$\mathbf{v}_k^{\text{des}} = \overline{\mathbf{v}_k^\rho} - \mathbf{j} \quad (3.79)$$

em que  $\mathbf{j}$  representa a velocidade do centro de volume (ou fluxo volumétrico) da mistura bifásica. Sua relação com os fluxos volumétricos  $\mathbf{j}_k$  das fases (também conhecidos como *velocidades superficiais*) é dada por:

$$\mathbf{j} = \sum_{k=1}^2 \mathbf{j}_k = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\mathbf{v}_k^\rho} \quad (3.80)$$

As Equações 3.44 e 3.80 mostram que se ambas as fases escoam à mesma velocidade, então  $\mathbf{v}_m = \mathbf{j} = \overline{\mathbf{v}_l^\rho} = \overline{\mathbf{v}_v^\rho}$  e  $\mathbf{v}_k^{\text{dif}} = \mathbf{v}_k^{\text{des}} = 0$ , caracterizando um campo *homogêneo* de velocidades. Quando não é o caso, demonstra-se que as velocidades de difusão e de deslizamento da fase vapor mantêm entre si a seguinte relação (ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012):

$$\mathbf{v}_v^{\text{dif}} = \overline{\mathbf{v}_v^\rho} - \mathbf{v}_m = \frac{\overline{\rho_l^X}}{\rho_m} \mathbf{v}_v^{\text{des}} \quad (3.81)$$

em que a permutação dos índices  $l$  e  $v$  resulta em outra relação verdadeira.

ISHII e HIBIKI (2011) e ROSA (2012) demonstram a aplicação da média transversal às equações do modelo *Drift-Flux* 3D, obtendo assim sua formulação unidimensional. No caso da conservação de massa, a equação média tridimensional da continuidade da mistura, obtida após as devidas substituições na Equação 3.49 e escrita em função de  $\rho_m$  e  $\mathbf{v}_m$ , é idêntica à equação da continuidade 2.4 para um escoamento monofásico. Sua forma 1D, resultante da aplicação da média transversal, é:

$$\frac{\partial \langle \rho_m \rangle}{\partial t} + \frac{\partial [\langle \rho_m \rangle \overline{v}_m^d]}{\partial x} = 0 \quad (3.82)$$

em que a média transversal da velocidade ponderada pela massa específica da mistura é definida por ISHII e HIBIKI (2011) como:

$$\overline{v}_m^d = \frac{\langle \rho_m v_m \rangle}{\langle \rho_m \rangle} = \frac{\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho}_v^X \langle \overline{v}_v^\rho \rangle_\alpha + \langle \alpha_l \rangle \overline{\rho}_l^X \langle \overline{v}_l^\rho \rangle_\alpha}{\langle \rho_m \rangle} \quad (3.83)$$

O numerador da relação acima merece ser comparado à Equação 3.44. Convém lembrar que estão sendo supostos perfis uniformes das massas específicas das fases na seção transversal do canal. A aplicação da média transversal também resulta em (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$\langle \rho_m \rangle = \langle \alpha_v \rangle \overline{\rho}_v^X + \langle \alpha_l \rangle \overline{\rho}_l^X \quad (3.84)$$

$$\langle j \rangle = \langle j_v \rangle + \langle j_l \rangle = \langle \alpha_v \rangle \langle \overline{v}_v^\rho \rangle_\alpha + \langle \alpha_l \rangle \langle \overline{v}_l^\rho \rangle_\alpha \quad (3.85)$$

De acordo com ISHII e HIBIKI (2011):

$$\langle j_k \rangle = \frac{Q_k^V}{A} \quad (3.86)$$

em que  $Q_k^V$  é a vazão volumétrica da fase  $k$ . Portanto, a velocidade superficial  $\langle j_k \rangle$  corresponde à velocidade que a fase  $k$  possuiria se somente ela escoasse pela tubulação (ROSA, 2012).

Explicitando-se  $\langle \overline{v}_v^\rho \rangle_\alpha$  da Equação 3.83 e substituindo-se  $\langle \rho_m \rangle$  da Equação 3.84, chega-se a:

$$\langle \overline{v}_v^\rho \rangle_\alpha = \overline{v}_m^d + \frac{\langle \alpha_l \rangle \overline{\rho}_l^X}{\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho}_v^X} [\overline{v}_m^d - \langle \overline{v}_l^\rho \rangle_\alpha] \quad (3.87)$$

Substituindo-se a Equação 3.83 para  $\overline{v}_m^d$  somente no segundo termo acima e aplicando-se a Equação 3.84 para  $\langle \rho_m \rangle$  em seu numerador, é possível demonstrar:

$$\langle \overline{v}_v^\rho \rangle_\alpha = \overline{v}_m^d + \frac{\langle \alpha_l \rangle \overline{\rho}_l^X}{\langle \rho_m \rangle} [\langle \overline{v}_v^\rho \rangle_\alpha - \langle \overline{v}_l^\rho \rangle_\alpha] = \overline{v}_m^d + \frac{\overline{\rho}_l^X}{\langle \rho_m \rangle} \widehat{v}_v^{\text{des}} \quad (3.88)$$

A obtenção da relação acima, análoga à forma tridimensional 3.81, passa pela definição da velocidade de deslizamento unidimensional:

$$\widehat{v}_v^{\text{des}} = \langle \overline{v}_v^\rho \rangle_\alpha - \langle j \rangle = \langle \alpha_l \rangle [\langle \overline{v}_v^\rho \rangle_\alpha - \langle \overline{v}_l^\rho \rangle_\alpha] \quad (3.89)$$

A substituição da Equação 3.88 na equação média da continuidade para a fase vapor (Equação 3.62) permite expressar esta última em função de  $\overline{v}_m^d$ , que é uma das incógnitas do Modelo de Mistura. O resultado é (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$\frac{\partial [\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho}_v^X]}{\partial t} + \frac{\partial [\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho}_v^X \overline{v}_m^d]}{\partial x} = \langle \Gamma_v \rangle - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho}_l^X \overline{\rho}_v^X}{\langle \rho_m \rangle} \widehat{v}_v^{\text{des}} \right] \quad (3.90)$$

Outra importante relação resulta de procedimento análogo ao empregado na dedução da Equação 3.88 (ISHII e HIBIKI, 2011; ROSA, 2012):

$$\langle \overline{v}_l^\rho \rangle_\alpha = \overline{v}_m^d - \frac{\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho}_v^X}{\langle \alpha_l \rangle \langle \rho_m \rangle} \widehat{v}_v^{\text{des}} \quad (3.91)$$

Após apresentar as Equações 3.88 e 3.91, ISHII e HIBIKI (2011) destacam que as mesmas podem ser usadas na obtenção das velocidades individuais das duas fases, resolvendo-se antes o modelo *drift-flux* para obter  $\overline{v}_m^d$  mediante a especificação de uma equação constitutiva para  $\widehat{v}_v^{\text{des}}$ .

Ao demonstrar a aplicação da média transversal na dedução do Modelo de Mistura 1D, ROSA (2012) retorna à Equação 3.42 e desenvolve a média do somatório

que figura em seu segundo termo no lado esquerdo, utilizando as Equações 3.88 e 3.91 para obter:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=l,v} \left\langle \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{v_k^\rho} \overline{\psi_k^\rho} \right\rangle &= \sum_{k=l,v} \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho_k^X} \left\langle \overline{\psi_k^\rho} \right\rangle_\alpha \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha + \sum_{k=l,v} \left\langle \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\psi_k^\rho} (\overline{v_k^\rho} - \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha) \right\rangle = \\
&\overline{v_m^d} \sum_{k=l,v} \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho_k^X} \left\langle \overline{\psi_k^\rho} \right\rangle_\alpha - \langle \alpha_l \rangle \overline{\rho_l^X} \left\langle \overline{\psi_l^\rho} \right\rangle_\alpha \frac{\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho_v^X}}{\langle \alpha_l \rangle \langle \rho_m \rangle} \widehat{v}_v^{\text{des}} + \\
&\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho_v^X} \left\langle \overline{\psi_v^\rho} \right\rangle_\alpha \frac{\overline{\rho_l^X}}{\langle \rho_m \rangle} \widehat{v}_v^{\text{des}} + \sum_{k=l,v} \left\langle \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\psi_k^\rho} (\overline{v_k^\rho} - \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha) \right\rangle = \\
&\langle \rho_m \rangle \overline{v_m^d} \overline{\psi_m^d} + \frac{\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho_l^X} \overline{\rho_v^X}}{\langle \rho_m \rangle} \left[ \left\langle \overline{\psi_v^\rho} \right\rangle_\alpha - \left\langle \overline{\psi_l^\rho} \right\rangle_\alpha \right] \widehat{v}_v^{\text{des}} + \\
&\sum_{k=l,v} \left\langle \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{\psi_k^\rho} (\overline{v_k^\rho} - \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha) \right\rangle \quad (3.92)
\end{aligned}$$

em que o terceiro termo, ao qual ISHII e HIBIKI (2011) também se referem como *termo de covariância*, expressa as diferenças entre médias transversais de produtos e produtos de médias transversais. A definição  $\overline{\psi_m^d} = \langle \rho_m \psi_m \rangle / \langle \rho_m \rangle$ , também substituída acima, resulta da aplicação da média transversal à Equação 3.46. Já o penúltimo termo acima pode ser comparado com  $\mathbb{J}_m^{\text{dif}}$  da Equação 3.47, cuja definição pode ser reescrita como:

$$\mathbb{J}_m^{\text{dif}} = \frac{\alpha_v \overline{\rho_l^X} \overline{\rho_v^X}}{\rho_m} \left[ \overline{\psi_v^\rho} - \overline{\psi_l^\rho} \right] \mathbf{v}_v^{\text{des}} \quad (3.93)$$

ISHII e HIBIKI (2011) apresentam a seguinte equação média unidimensional para a quantidade de movimento da mistura:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [\langle \rho_m \rangle \overline{v_m^d}]}{\partial t} + \frac{\partial [\langle \rho_m \rangle \overline{v_m^d}^2]}{\partial x} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{P_k^X} \right\rangle + \frac{\partial \langle \tau_{mxx} + \tau_{mxx}^T \rangle}{\partial x} \\
&- \langle \rho_m \rangle g \sin(\theta) - \langle \rho_m \rangle \frac{f_m}{2d} |\overline{v_m^d}| \overline{v_m^d} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho_l^X} \overline{\rho_v^X}}{\langle \alpha_l \rangle \langle \rho_m \rangle} \widehat{v}_v^{\text{des}2} \right] \\
&- \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{k=1}^2 \left\langle \alpha_k \overline{\rho_k^X} \overline{v_k^\rho} (\overline{v_k^\rho} - \langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha) \right\rangle \right] \quad (3.94)
\end{aligned}$$

em que  $\tau_{mxx}$  e  $\tau_{mxx}^T$  são os componentes normais (na direção axial) de:

$$\boldsymbol{\tau}_m = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\boldsymbol{\tau}}_k^X \quad (3.95a)$$

$$\boldsymbol{\tau}_m^T = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \boldsymbol{\tau}_k^T \quad (3.95b)$$

O quarto termo no lado direito da Equação 3.94 representa a queda de pressão friccional. Quanto ao surgimento dos dois últimos termos, convém compará-los com a Equação 3.92, em que a diferença entre as velocidades foi calculada a partir das Equações 3.88 e 3.91. Destaca-se, ainda, a ausência da fonte de quantidade de movimento  $\mathbf{M}_m$  nesta formulação, resultando na exclusão dos efeitos associados à tensão superficial.

ISHII e HIBIKI (2011) somam as equações médias tridimensionais dos balanços de energia das duas fases, obtendo assim uma equação correspondente para a mistura bifásica. A aplicação da média transversal sobre este resultado fornece:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\langle \rho_m \rangle \widehat{h}_m^d]}{\partial t} + \frac{\partial [\langle \rho_m \rangle \widehat{h}_m^d \overline{v}_m^d]}{\partial x} = & - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho}_l^X \overline{\rho}_v^X}{\langle \rho_m \rangle} \left( \langle \widehat{h}_v \rangle_\alpha - \langle \widehat{h}_l \rangle_\alpha \right) \widehat{v}_v^{\text{des}} \right] \\ - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \sum_{k=1}^2 \langle \alpha_k \overline{\rho}_k^X \widehat{h}_k (\overline{v}_k^\rho - \langle \overline{v}_k^\rho \rangle_\alpha) \rangle \right] + & \left[ \overline{v}_m^d + \frac{\langle \alpha_v \rangle (\overline{\rho}_l^X - \overline{\rho}_v^X)}{\langle \rho_m \rangle} \widehat{v}_v^{\text{des}} \right] \frac{\partial}{\partial x} \left\langle \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{P}_k^X \right\rangle \\ + \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{P}_k^X \right\rangle - \frac{\partial \langle q_m + q_m^T \rangle}{\partial x} + & Q_{mw} + \langle \Phi_m \rangle \quad (3.96) \end{aligned}$$

em que a entalpia média transversal da mistura é dada por:

$$\widehat{h}_m^d = \frac{\langle \alpha_v \rangle \overline{\rho}_v^X \langle \widehat{h}_v \rangle_\alpha + \langle \alpha_l \rangle \overline{\rho}_l^X \langle \widehat{h}_l \rangle_\alpha}{\langle \rho_m \rangle} \quad (3.97)$$

O primeiro e segundo termos no lado direito da Equação 3.96 remetem novamente à Equação 3.92. Quanto à terceira e à quarta parcelas, infere-se de ISHII e HIBIKI (2011) que surgem do somatório (envolvendo ambas as fases) dos efeitos mecânicos correspondentes ao segundo termo no lado direito da equação média da energia 3.67 (a dedução do terceiro termo da Equação 3.96, que não é apresentada na referência em questão, sugere que o mesmo despreza a diferença entre as pressões médias das fases, o que os mesmos autores afirmam ser válido em boa parte do escopo de aplicação do *Drift-Flux Model*).

Os dois últimos termos da Equação 3.96 representam, respectivamente, o calor

trocado através da parede da tubulação e a dissipação viscosa da mistura.  $Q_{mv}$  não constava da equação tridimensional original, mas ISHII e HIBIKI (2011) ressaltam a importância do cômputo da transferência de energia entre a parede e os fluidos em escoamento no contexto da aplicação da média transversal, como já foi mencionado. Adicionalmente, o termo de dissipação viscosa  $\Phi_m$  corresponde à simples soma dos  $\Phi_k$  que figuram na Equação 3.67. Finalmente,  $q_m$  e  $q_m^T$  originam-se de (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$\mathbf{q}_m = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \overline{\mathbf{q}_k^X} \quad (3.98)$$

$$\mathbf{q}_m^T = \sum_{k=1}^2 \alpha_k \mathbf{q}_k^T \quad (3.99)$$

### 3.6.2 A Equação Constitutiva Cinemática

ISHII e HIBIKI (2011) e ROSA (2012) apresentam o desenvolvimento de uma equação constitutiva para a velocidade de deslizamento unidimensional. A Equação 3.89 pode ser desenvolvida como segue:

$$\begin{aligned} \widehat{v}_v^{\text{des}} &= \frac{\langle \alpha_v \overline{v_v^\rho} \rangle}{\langle \alpha_v \rangle} - \langle j \rangle = \frac{\langle \alpha_v (v_v^{\text{des}} + j) \rangle}{\langle \alpha_v \rangle} - \langle j \rangle = \frac{\langle \alpha_v v_v^{\text{des}} \rangle}{\langle \alpha_v \rangle} + \frac{\langle \alpha_v j \rangle}{\langle \alpha_v \rangle} - \langle j \rangle = \\ & \langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha + \frac{\langle \alpha_v j \rangle \langle j \rangle}{\langle \alpha_v \rangle \langle j \rangle} - \langle j \rangle \quad (3.100) \end{aligned}$$

em que se verifica a presença da média transversal ponderada da velocidade *local* de deslizamento,  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$ . Com a introdução do *parâmetro de distribuição*  $C_0$ :

$$C_0 = \frac{\langle \alpha_v j \rangle}{\langle \alpha_v \rangle \langle j \rangle} \quad (3.101)$$

a Equação 3.100 pode ser reescrita como (ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003; ROSA, 2012):

$$\widehat{v}_v^{\text{des}} = \langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha + (C_0 - 1) \langle j \rangle \quad (3.102)$$

Conforme observam ISHII e HIBIKI (2011), o fator  $C_0$  representa a covariância entre os perfis do fluxo volumétrico e da concentração. Fisicamente falando, se uma fase estiver mais concentrada na região de  $j$  mais acentuado, seu transporte médio será influenciado pelo maior fluxo local. Por outro lado, se o perfil de concentração é uniforme, então  $C_0$  é unitário, e verifica-se que  $\widehat{v}_v^{\text{des}} = \langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$ . Adicionalmente, se  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$  for muito reduzida, o escoamento se aproxima da condição homogênea (ROSA, 2012).

KLEINSTREUER (2003) e ROSA (2012) ressaltam a dependência dos

parâmetros  $C_0$  e  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$  com o padrão de escoamento. Sabendo-se que  $\langle \overline{v_v^\rho} \rangle_\alpha$  e  $\langle j \rangle$  são variáveis facilmente mensuráveis, um primeiro método para determinação experimental de  $C_0$  e  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$  passa pela reformulação da Equação 3.100 como:

$$\langle \overline{v_v^\rho} \rangle_\alpha = \frac{\langle j_v \rangle}{\langle \alpha_v \rangle} = \langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha + C_0 \langle j \rangle \quad (3.103)$$

De acordo com a Equação 3.103, se um escoamento bifásico apresenta perfis plenamente desenvolvidos de velocidades e frações de vazio, então seu gráfico de  $\langle j_v \rangle / \langle \alpha_v \rangle$  contra  $\langle j \rangle$  resultará em uma reta de coeficientes angular  $C_0$  e linear  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$  (ISHII e HIBIKI, 2011).

Este método gráfico de medição, simples e *indireto*, foi utilizado no desenvolvimento de diversas correlações para cálculo de  $C_0$  e  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$ , possibilitando assim a predição de  $\widehat{v}_v^{\text{des}}$ . Entretanto, SHEN *et al.* (2010) destacam que em tubulações de diâmetros maiores, o escoamento possivelmente não se encontra plenamente desenvolvido, situação em que o regime de escoamento também pode variar bastante. Os valores obtidos graficamente neste caso podem apresentar imprecisões. Por outro lado, os mesmos autores apontam que avanços recentes no desenvolvimento de instrumentação e técnicas experimentais tornaram possível a medição de frações de vazio e velocidades das fases, abrindo caminho para a determinação direta de  $C_0$  e  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$  a partir de suas definições (Equação 3.101, no caso da primeira). Então, estes autores realizaram medições experimentais em tubulações de altos diâmetros, calcularam diretamente  $C_0$  e  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$  e fizeram as devidas comparações com o método gráfico indireto, demonstrando as esperadas discrepâncias.

O desenvolvimento de equações constitutivas para  $C_0$  e  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$  também é o tema do trabalho de BHAGWAT e GHAJAR (2014). Estes autores apontam que a maioria das equações desenvolvidas para estas duas variáveis somente se aplicam a um único padrão de escoamento, que normalmente não é conhecido *a priori* e por isso, precisa ser determinado através de ferramentas como mapas de regimes de escoamento. Ocorre que a acurácia e a aplicabilidade de tais mapas é condicionada pelas condições experimentais que lhes deram origem. Além disto, é difícil selecionar com segurança as correlações a utilizar quando as condições do escoamento estão próximas às de transição entre dois padrões. Dados estes motivadores, o referido trabalho propõe equações para  $C_0$  e  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$  aplicáveis a todos os regimes.

### 3.6.3 Simplificações

A exemplo do que ocorre com o Modelo de Dois Fluidos, o Modelo *Drift-Flux* 1D dificilmente é apresentado e resolvido na literatura na forma rigorosa das Equações 3.82, 3.90, 3.94 e 3.96. As referências que tratam de sua solução numérica (TALEBI *et al.*,

2012; ZOU *et al.*, 2016a) e de aplicações práticas (GHIAASIAAN, 2008; MOKHATAB e POE, 2012) costumam empregar versões simplificadas destas últimas, dispensando a notação indicativa da aplicação de médias e deprezando seletivamente alguns de seus termos. O estabelecimento das equações a resolver no presente trabalho fez uso das considerações mais frequentes neste sentido (muitas das quais são as mesmas adotadas no Modelo de Dois Fluidos).

Foram consideradas as seguintes equações da continuidade para a mistura bifásica e a fase vapor:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_m v_m]}{\partial x} = 0 \quad (3.104)$$

$$\frac{\partial [\alpha_v \rho_v]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_v \rho_v v_m]}{\partial x} = \Gamma_v - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha_v \rho_v \rho_l}{\rho_m} \widehat{v}_v^{\text{des}} \right] \quad (3.105)$$

A equação resolvida para a quantidade de movimento da mistura foi:

$$\frac{\partial [\rho_m v_m]}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_m v_m^2]}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_m g \text{sen}(\theta) - F_{mw} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha_v \rho_v \rho_l}{\alpha_l \rho_m} \widehat{v}_v^{\text{des}^2} \right] \quad (3.106)$$

em que  $F_{mw}$  representa a perda friccional de pressão.

E para a conservação de energia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\rho_m h_m]}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_m v_m h_m]}{\partial x} = & \frac{\partial P}{\partial t} + Q_{mw} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha_v \rho_v \rho_l}{\rho_m} (h_v - h_l) \widehat{v}_v^{\text{des}} \right] \\ & + \left[ v_m + \frac{\alpha_v (\rho_l - \rho_v)}{\rho_m} \widehat{v}_v^{\text{des}} \right] \frac{\partial P}{\partial x} \end{aligned} \quad (3.107)$$

TALEBI *et al.* (2012) e ZOU *et al.* (2016a) também apresentam a seguinte equação complementar:

$$\widehat{v}_v^{\text{des}} = \frac{\rho_m [\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha + (C_0 - 1) v_m]}{\rho_m - (C_0 - 1) (\rho_l - \rho_v) \alpha_v} \quad (3.108)$$

As variáveis  $\widehat{v}_v^{\text{des}}$  e  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$  são facilmente confundíveis. Por este motivo, ambas as quantidades foram representadas nas equações acima seguindo-se a mesma notação adotada nas seções anteriores. Para as demais grandezas que figuram nestas equações, seguiu-se tanto quanto possível a nomenclatura típica das referências supracitadas, onde nenhum dos processos de média é explicitamente indicado. Verifique aqui, mais uma vez, a importância do processo de dedução do *Drift-Flux Model* apresentado anteriormente. O entendimento deste procedimento esclarece o significado exato de cada variável e a origem de cada termo, além de indicar a omissão simplificadora de certas contribuições.

As Equações 3.104 e 3.105 não contêm qualquer simplificação em relação a seus

pares 3.82 e 3.90.

A comparação da Equação 3.106 com 3.94 demonstra a consideração da mesma pressão  $P$  para ambas as fases, além do desprezo de covariâncias e das tensões viscosas e de Reynolds. A validade destas simplificações foi discutida na abordagem do Modelo de Dois Fluidos e é reforçada pelo trabalho de TALEBI *et al.* (2012), que demonstram boa concordância de suas simulações com dados experimentais de  $\alpha_v$ . O mesmo pode se afirmar a respeito da Equação 3.107 para o balanço de energia. Sua comparação com a Equação 3.96 mostra que, adicionalmente à adoção da mesma pressão para as duas fases e à desconsideração do termo de covariância, foram desprezados também a dissipação viscosa, a condução de calor e o fluxo térmico turbulento.

Quanto à Equação 3.108, verifica-se que a mesma pode ser obtida pela substituição das Equações 3.88 e 3.91 em 3.85, e deste resultado na Equação 3.102.

### 3.6.4 Escoamento Homogêneo Permanente

O modelo de escoamento bifásico mais simples discutido por KLEINSTREUER (2003) é o *Homogeneous Equilibrium Model* (HEM), que considera que ambas as fases escoam em equilíbrio termodinâmico e à mesma velocidade (portanto,  $\widehat{v}_v^{\text{des}} = 0$ ). Embora sejam citados os usos de fatores de atrito, fatores multiplicativos de correção e equações básicas do escoamento monofásico no cálculo de variações de pressão, nenhuma equação de balanço é apresentada. Nesta seção, propõe-se brevemente o desenvolvimento de duas equações aplicáveis ao modelo homogêneo, cuja importância é esclarecida na Seção 3.7.

Para um escoamento em estado estacionário, a equação da continuidade da mistura, Equação 3.82, se reduz a:

$$\frac{\partial [\langle \rho_m \rangle \overline{v}_m^d]}{\partial x} = 0 \quad (3.109)$$

Isto significa que o produto  $\langle \rho_m \rangle \overline{v}_m^d$  não varia ao longo da tubulação.

O fluxo mássico local instantâneo da fase  $k$  vale  $G_k = X_k \rho_k v_k$ . Aplicando-se qualquer processo de média sobre o mesmo, e em seguida, a média transversal, obtém-se (GHIAASIAAN, 2008):

$$\langle \overline{G}_k \rangle = \langle \overline{X_k \rho_k v_k} \rangle = \langle \alpha_k \overline{\rho}_k^X \overline{v}_k^\rho \rangle = \langle \alpha_k \rangle \overline{\rho}_k^X \langle \overline{v}_k^\rho \rangle_\alpha = \frac{w_k}{A} \quad (3.110)$$

em que  $w_k$  é a vazão mássica da fase  $k$  que atravessa a seção transversal na posição axial considerada. Este resultado permite escrever (GHIAASIAAN, 2008):

$$\frac{w}{A} = \frac{w_l + w_v}{A} = \langle \alpha_l \rangle \overline{\rho}_l^X \langle \overline{v}_l^\rho \rangle_\alpha + \langle \alpha_v \rangle \overline{\rho}_v^X \langle \overline{v}_v^\rho \rangle_\alpha = \langle \rho_m \rangle \overline{v}_m^d \quad (3.111)$$



em que  $w$  é a vazão mássica total da mistura bifásica e a última igualdade resulta da Equação 3.83. Portanto, em estado estacionário, o produto  $\langle \rho_m \rangle \overline{v_m^d}$  é constante ao longo da tubulação e igual a  $w/A$ . Fica demonstrado também que a vazão mássica  $w$  não varia com a posição axial em estado estacionário, mesmo que  $w_l$  e  $w_v$  possam variar devido a processos de mudança de fase.

Supondo-se escoamento homogêneo ( $\widehat{v}_v^{\text{des}} = 0$ ) em estado estacionário e adotando-se todas as simplificações discutidas, a equação média da quantidade de movimento, Equação 3.94, se reduz a:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = - \langle \rho_m \rangle \frac{f_m}{2d} |\overline{v_m^d}| \overline{v_m^d} - \langle \rho_m \rangle g \text{sen}(\theta) - \langle \rho_m \rangle \overline{v_m^d} \frac{\partial \overline{v_m^d}}{\partial x} \quad (3.112)$$

Procedimento análogo ao anterior simplifica a equação do balanço de energia, Equação 3.96, para:

$$\langle \rho_m \rangle \overline{v_m^d} \frac{\partial \widehat{h}_m^d}{\partial x} = \overline{v_m^d} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{S \dot{Q}_w}{A} \quad (3.113)$$

Como já foi mencionado, o primeiro termo no lado direito acima é parte de uma contribuição mecânica que ISHII e HIBIKI (2011) sugeriram ser desprezível frente a efeitos térmicos. Assim, tais influências poderiam ser descartadas por completo. Alternativamente, pode-se escolher os termos a reter. Substituindo-se somente os dois últimos termos do lado direito da Equação 3.112 no primeiro termo da Equação 3.113, ou seja, desprezando-se a dissipação viscosa, e rearranjando-se o resultado, considerando-se ainda a Equação 3.111 e observando-se que  $S = \pi d$ , chega-se a:

$$\frac{\partial \widehat{h}_m^d}{\partial x} = \frac{\dot{Q}_w \pi d}{w} - g \text{sen}(\theta) - \overline{v_m^d} \frac{\partial \overline{v_m^d}}{\partial x} \quad (3.114)$$

Convém comparar as Equações 3.112 e 3.114 com suas equações análogas 2.26 e 2.31, obtidas para um escoamento monofásico por meio de balanços macroscópicos. Vale ressaltar, todavia, que enquanto a dedução das últimas fez uso de simplificações pouco críticas, a validade das primeiras está sujeita à limitadora suposição de velocidades idênticas para ambas as fases (KLEINSTREUER, 2003).

### 3.6.5 Aplicabilidade e Discussão

KLEINSTREUER (2003), ISHII e HIBIKI (2011) e ROSA (2012) recomendam o modelo *Drift-Flux* para escoamentos em que as dinâmicas das fases estejam “fortemente acopladas”. Entretanto, ISHII e HIBIKI (2011) também estendem sua aplicabilidade para sistemas de fraco acoplamento local, desde que suas dimensões axiais sejam grandes o suficiente para proporcionar o tempo necessário de interação.

KLEINSTREUER (2003) cita trabalhos em que este Modelo foi utilizado para estudar escoamentos vertical e horizontalmente orientados nos mais diversos regimes

de escoamento. Segundo este autor, o Modelo de Mistura proporciona um “meio termo” entre a simples, porém limitada modelagem HEM e o completo, porém complexo Modelo de Dois Fluidos.

Na comparação do modelo *Drift-Flux* com o modelo de Dois Fluidos, GHIAA-SIAAN (2008) aponta que a eliminação de uma equação do movimento resulta em importante economia de esforço computacional, sem deixar de destacar que isto se dá às custas da acurácia do modelo e do nível de detalhamento de seus resultados. Este autor também restringe a aplicabilidade do modelo *Drift-Flux* na prática a escoamentos unidimensionais - e nisto é acompanhado por ISHII e HIBIKI (2011), que afirmam ser de “extrema dificuldade” o desenvolvimento de uma correlação tridimensional de velocidade relativa.

## 3.7 Os Primeiros Métodos e Correlações

Ao discutir o projeto de poços de petróleo - uma aplicação típica do problema de interesse - BRILL e MUKHERJEE (1999) narram brevemente o desenvolvimento histórico da modelagem do escoamento bifásico. Segundo estes autores, é normal que os primeiros modelos de um dado fenômeno baseiem-se em correlações empíricas de grupos adimensionais, as quais vão sendo substituídas por métodos melhor fundamentados à medida que mais conhecimento é adquirido. A evolução histórica dos modelos do escoamento bifásico, que passa pela discussão a seguir e culmina no atual estado da arte (seções anteriores) parece seguir à risca esta tendência.

### 3.7.1 Correlações Empíricas

Os primeiros métodos de cálculo desenvolvidos especificamente para este tipo de escoamento são essencialmente empíricos (BEGGS e BRILL, 1973; DUNS e ROS, 1963; LOCKHART e MARTINELLI, 1949; ORKISZEWSKI, 1967). Em geral, os autores destes trabalhos mediram em laboratório (alguns poucos, em campo), além das pressões a montante e a jusante, as vazões volumétricas e propriedades físicas (massas específicas, viscosidades e tensão superficial) dos fluidos empregados (quase sempre ar com água ou hidrocarbonetos).

Em boa parte dos casos, já se sabia que o regime de escoamento influencia fortemente o gradiente de pressão axial. Nestes, o regime vigente quando da execução de cada experimento também foi registrado. Ressalta-se que isto se baseou na detecção visual em aparato transparente na quase totalidade dos trabalhos, o que deixa BHAGWAT e GHAJAR (2014) reticentes quanto ao uso destes resultados na seleção de equações constitutivas para o *Drift-Flux Model*.

Os dados experimentais, juntamente com o diâmetro interno e a inclinação do

escoamento, foram então correlacionados com parâmetros e/ou grupos adimensionais entendidos como relevantes, permitindo o cálculo de variáveis como frações volumétricas locais, fatores de atrito e, finalmente, o gradiente de pressão axial. Verifica-se que boa parte destas correlações foi concebida sob a seguinte forma geral:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\rho_{tp} f_{tp} v_{tp}^2}{2d} - \rho_{tp} g \sin(\theta) - \rho_{tp} v_{tp} \frac{dv_{tp}}{dx} \quad (3.115)$$

em que o índice  $tp$  denota “escoamento bifásico” (*two-phase*). Cada método propõe a sua definição ou correlação para as grandezas marcadas com este índice.

BRILL e MUKHERJEE (1999) afirmam que o desenvolvimento das correlações empíricas em discussão baseou-se nos princípios de conservação válidos para misturas bifásicas homogêneas em estado estacionário (não por acaso, a Equação 3.115 é idêntica às Equações 2.26 e 3.112). Os três termos à direita da Equação 3.115 são frequentemente denominados como gradientes de pressão *friccional*, *estático* e *aceleracional*, respectivamente. Muitas vezes, este último é considerado desprezível, e algumas correlações sequer o levam em conta. Em outros trabalhos, apenas algumas contribuições foram correlacionadas na forma apresentada, propondo-se equacionamento alternativo para as demais.

Nesta linha de trabalho empírica, também foram desenvolvidos os primeiros mapas de regimes de escoamento (BAKER, 1954; DUNS e ROS, 1963), e as correlações que levam este parâmetro em consideração normalmente exigem sua determinação como etapa prévia aos demais cálculos.

### 3.7.2 Métodos Mecanísticos

Logo percebeu-se que as correlações empíricas nem sempre fornecem resultados satisfatoriamente acurados, tanto na predição de regimes de escoamento quanto em cálculos de variação de pressão. Isto é atribuído principalmente à fraquíssima modelagem dos fenômenos particulares do escoamento bifásico no desenvolvimento desses métodos (vide a suposição de mistura homogênea). Referindo-se a este aspecto, um trabalho recente chegou a afirmar que as correlações em questão funcionam como uma caixa-preta (*black box*) (RATKOVICH *et al.*, 2013).

Este entendimento encaminhou o surgimento de uma nova tendência: o desenvolvimento dos chamados *métodos mecanísticos* (*mechanistic models*, como são frequentemente referenciados na literatura), caracterizados justamente pela maior base fenomenológica (ANSARI *et al.*, 1994; HASAN e KABIR, 1988a,b, 1990; PETALAS e AZIZ, 2000).

Esta evolução é melhor compreendida por meio de exemplos selecionados. ANSARI *et al.* (1994) propuseram métodos de cálculo para cada um dos regimes ilustrados na Figura 3.2, exceto *Churn*. Os autores reconheceram que no escoamento

em regime de Bolhas Dispersas (menores), estas são praticamente transportadas pela fase líquida, não ocorrendo diferenças significativas de velocidade entre as fases. Nesta situação, recomendaram os cálculos de  $v_{tp}$ ,  $\rho_{tp}$  e  $\mu_{tp}$  (Equação 3.115) pela simples ponderação das propriedades individuais do líquido e do gás. Quando as bolhas são maiores e a velocidade relativa entre as fases não pode mais ser desprezada, o trabalho propõe correções das frações volumétricas e o cálculo mais realista das referidas grandezas. O fator de atrito  $f_{tp}$  deve ser obtido do diagrama de Moody pelo uso dos resultados assim obtidos. O gradiente aceleracional não é considerado no regime de Bolhas, visto que o mesmo é dominado pela fase líquida supostamente incompressível, acarretando velocidade constante.

Para o regime *Slug*, os mesmos autores propuseram um detalhado balanço de massa entre um *liquid slug* e uma *Taylor bubble* vizinha, visando determinar a razão entre seus comprimentos axiais. Neste procedimento, é considerada a velocidade do filme de líquido que cerca a bolha de Taylor, e a fração volumétrica de gás no *slug* de líquido também é calculada. De posse destas grandezas, é proposta a ponderação das massas específicas e viscosidades das fases, permitindo o cômputo das variações estática e friccional de pressão (esta última, após a leitura de um fator de atrito do diagrama de Moody para o *slug* de líquido). O gradiente aceleracional do escoamento é novamente desprezado, bem como a perda friccional ao longo da região de gás.

Quando o regime é Anular, o método proposto por ANSARI *et al.* (1994) para calcular a variação de pressão faz uso de equações de conservação de momentum referentes ao filme de líquido na parede e ao núcleo central de gás com líquido disperso. HASAN e KABIR (1988a,b, 1990), por sua vez, concluíram que a perda de pressão friccional neste caso deve-se à interação do gás com o filme líquido ondulado e recomendaram expressões para seu cálculo. Figuram nestas equações um fator de atrito específico e a fração volumétrica de líquido disperso no núcleo central.

Esta breve descrição de alguns métodos mecânicos mostra claramente como a mera correlação de dados deu lugar à maior apreciação dos mecanismos físicos relevantes.

### 3.7.3 Aplicabilidade e Discussão

BRILL e MUKHERJEE (1999) lembram que embora a mistura bifásica seja tratada como homogênea nas primeiras correlações de medições, estas foram obtidas de experimentos onde as fases líquida e vapor podiam escoar a velocidades distintas. Os efeitos decorrentes desta velocidade relativa são considerados em tais métodos de forma empírica, através de equações para a fração volumétrica de líquido. Nem parece possível ser diferente, pois a Equação 3.115 é um caso particular do Modelo de Mistura na suposição de escoamento homogêneo permanente, como foi demonstrado

na Seção 3.6.4. Sua capacidade de considerar o movimento relativo entre as fases de maneira fenomenológica foi prejudicada quando os termos contendo a velocidade de deslizamento unidimensional foram descartados.

Em que pese seu caráter fenomenológico mais acentuado, verifica-se que modelos mecanísticos como os de ANSARI *et al.* (1994) e HASAN e KABIR (1988a,b, 1990) também se baseiam na Equação 3.115 do gradiente de pressão. Adicionalmente, segundo MOKHATAB e POE (2012), a maioria dos métodos desta classe apresenta a desvantagem de aplicação restrita a uma única orientação do tubo ou apenas à previsão de regimes de escoamento, e não da variação de pressão. ANSARI *et al.* (1994) também compararam os resultados de diversos métodos mecanísticos e empíricos com medições reais, e, surpreendentemente, concluíram que o método mecanístico de HASAN e KABIR (1988a,b, 1990) apresentou desempenho semelhante à correlação empírica de DUNS e ROS (1963). MOKHATAB e POE (2012), por sua vez, destacaram a necessidade de se validarem os modelos mecanísticos mais recentes de PETALAS e AZIZ (2000) e ZHANG *et al.* (2003) contra dados reais.

Fato é que não parece haver na literatura aberta um consenso a respeito de um ou mais métodos mecanísticos a utilizar no cálculo do gradiente de pressão, principalmente (mas não somente) em textos cujo foco é o transporte e processamento posterior à produção de petróleo e gás. Nestes, as correlações empíricas de uso mais difundido foram e seguem sendo recomendação constante (GPSA, 2004; IKOKU, 1984; KELKAR, 2008; MOKHATAB e POE, 2012), possivelmente devido à combinação dos fatores apontados com sua praticidade frente aos métodos alternativos.

Ao ressaltarem a importância de simulações transientes para a segurança e a viabilidade econômica do projeto e operação de linhas de transmissão de gás natural, MOKHATAB e POE (2012) destacam a impossibilidade de se utilizar os métodos em discussão, equacionados para estado estacionário. Estes autores recomendam os Modelos *Drift-Flux* e de Dois Fluidos para simulações transientes.

Quando a temperatura do escoamento em função da posição axial não é conhecida, BRILL e MUKHERJEE (1999) recomendam a integração do gradiente de pressão (Equação 3.115) em conjunto com um balanço de energia da forma 2.31 - idêntico à Equação 3.114 deduzida na Seção 3.6.4 para escoamento homogêneo permanente.

O emprego do balanço homogêneo de energia traz à tona, mais uma vez, a importância da dedução apresentada na Seção 3.6.4, pois este resultado é que permite situar os modelos mais antigos em relação ao estado da arte sob o ponto de vista dos fundamentos teóricos representados por cada um. Alguns poucos trabalhos (CHANG *et al.*, 2008; MUNKEJORD *et al.*, 2005) até buscaram comparar as variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos e por CFD com os resultados proporcionados pela correlação empírica de BEGGS e BRILL (1973).

Entretanto, a demonstração da “ponte” entre o Modelo de Mistura e as práticas antigamente adotadas (conforme apresentada na Seção 3.6.4) não foi encontrada na bibliografia pesquisada.

As próximas seções são dedicadas ao detalhamento de alguns modelos da categoria discutida. Além de ilustrá-la com exemplos e apresentar as equações utilizadas no desenvolvimento do presente trabalho, a discussão que segue também mostra mais algumas relações e variáveis comuns entre estes métodos e os Modelos de Dois Fluidos e de Mistura.

### 3.7.4 A Análise Dimensional de Duns e Ros

A técnica de Análise Dimensional é um recurso útil no desenvolvimento de relações empíricas quando a descrição fenomenológica é impossível ou desconhecida (ROTAVA, 2012).

Uma das mais difundidas aplicações da Análise Dimensional ao problema de escoamento bifásico é o trabalho de DUNS e ROS (1963). Estes investigadores selecionaram 12 variáveis significativas para o cálculo do gradiente de pressão e as combinaram em 9 grupos adimensionais. Destes, os quatro que seguem foram selecionados como mais relevantes, sendo então utilizados na elaboração do roteiro experimental:

$$N_{Lv} = \langle j_l \rangle \sqrt[4]{\frac{\rho_l}{g\sigma_l}} \quad (3.116a)$$

$$N_{Gv} = \langle j_v \rangle \sqrt[4]{\frac{\rho_l}{g\sigma_l}} \quad (3.116b)$$

$$N_d = d \sqrt{\frac{\rho_l g}{\sigma_l}} \quad (3.116c)$$

$$N_L = \mu_l \sqrt[4]{\frac{g}{\rho_l \sigma_l^3}} \quad (3.116d)$$

A Figura 3.7 apresenta o mapa de regimes de escoamento vertical proposto por estes autores com base em dois destes grupos.

DUNS e ROS (1963) também desenvolveram uma correlação para a previsão do *holdup* de líquido,  $HL$ . Esta variável, que recebe quase tanta atenção nos métodos discutidos quanto o gradiente de pressão, é definida por BRILL e MUKHERJEE (1999) como “a fração de um incremento de volume de um tubo ocupada pela fase líquida”. Para todos os efeitos, segundo MOKHATAB e POE (2012), o *holdup* de líquido expressa a fração volumétrica *in situ* desta fase. Ainda segundo os mesmos autores, o termo *void fraction* representa a fração volumétrica *in situ* da fase vapor.

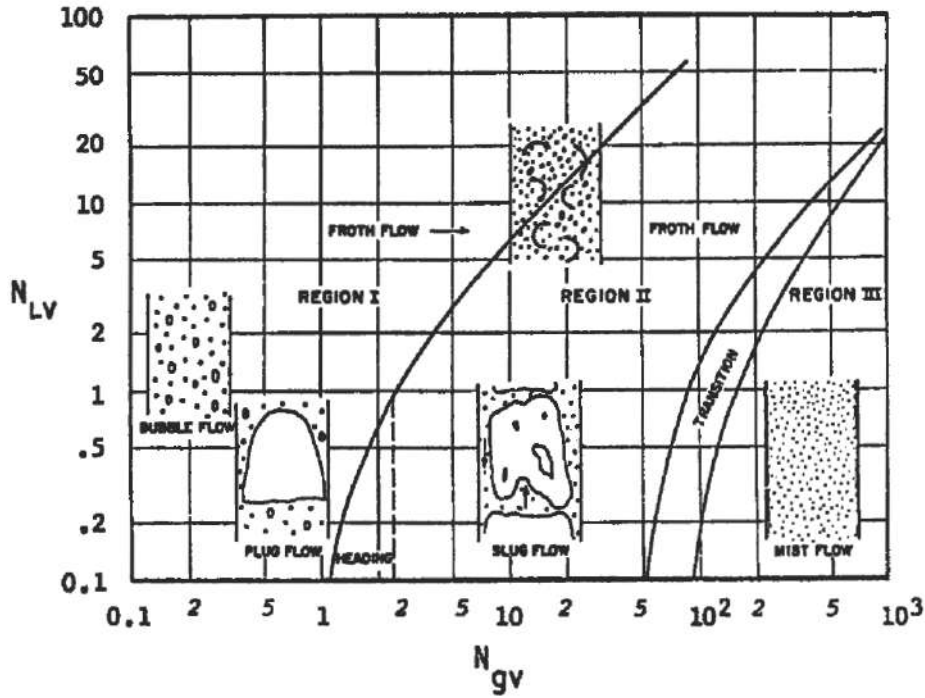


Figura 3.7: Mapa de regimes de escoamento da correlação de DUNS e ROS (1963) (tubulação vertical).

HASAN e KABIR (1988a,b, 1990), e mais recentemente, CHOI *et al.* (2012) propõem o cálculo do *holdup* de líquido a partir da Equação 3.103, fazendo:

$$HL = 1 - \langle \alpha_v \rangle \quad (3.117)$$

Este relato mostra que a fração de vazios de uma fase é frequentemente interpretada como sinônimo de sua fração volumétrica local. Sua ocorrência em equações como 3.84 talvez vá ao encontro desta percepção. Convém lembrar, contudo, que o surgimento da variável  $\alpha_k$  nas equações do escoamento bifásico é resultado da aplicação de processos de média.

BRILL e MUKHERJEE (1999) também destacam que, se ambas as fases escoassem à mesma velocidade, o *holdup* de líquido valeria:

$$\lambda_l = \frac{Q_l^V}{Q_l^V + Q_v^V} \quad (3.118)$$

### 3.7.5 A Correlação de Beggs & Brill

A inexistência de métodos capazes de prever o *holdup* de líquido e o gradiente de pressão de escoamentos bifásicos para qualquer orientação da tubulação (quase todos os métodos publicados à época restringiam-se a escoamentos horizontais ou verticais) foi o que motivou BEGGS e BRILL (1973) a desenvolverem sua correlação.

A possibilidade de cálculo para todos os ângulos é frequentemente destacada como um diferencial deste método (CHANG *et al.*, 2008; MOKHATAB e POE, 2012).

BEGGS e BRILL (1973) realizaram 584 medições de gradiente de pressão e *holdup* de líquido a diferentes vazões (de ar e água), pressões médias e ângulos de inclinação, para escoamentos ascendentes, descendentes e horizontais através de tubos de acrílico transparentes.

Buscando inicialmente uma correlação para o *holdup* na posição horizontal, os autores realizaram regressões destas medições contra diversas possíveis variáveis independentes, dentre as quais  $N_{Lv}$ ,  $N_{Gv}$ ,  $N_d$ ,  $Re$ ,  $\lambda_l$  e um número de Froude  $N_{Fr}$  definido como:

$$N_{Fr} = \frac{\langle j \rangle^2}{gd} \quad (3.119)$$

O procedimento apontou  $\lambda_l$  e  $N_{Fr}$  como variáveis independentes mais relevantes.

Tendo observado que o *holdup* sofre considerável influência do regime de escoamento, os autores desenvolveram um mapa para sua previsão em tubulações horizontais em função destas duas variáveis. Este mapa divide os regimes da Figura 3.1 em três categorias, a saber: Segregado (Estratificado, Ondular e Anular), Intermitente (*Slug* e *Plug*) e Distribuído (Bolhas e *Spray*). Constatou-se posteriormente que o rápido decréscimo do *holdup* na passagem do regime Segregado para Intermitente seria melhor correlacionado se uma região intermediária entre estes dois grupos fosse incluída. Isto resultou na criação da região denominada Transição. O mapa resultante destas considerações é ilustrado pela Figura 3.8.

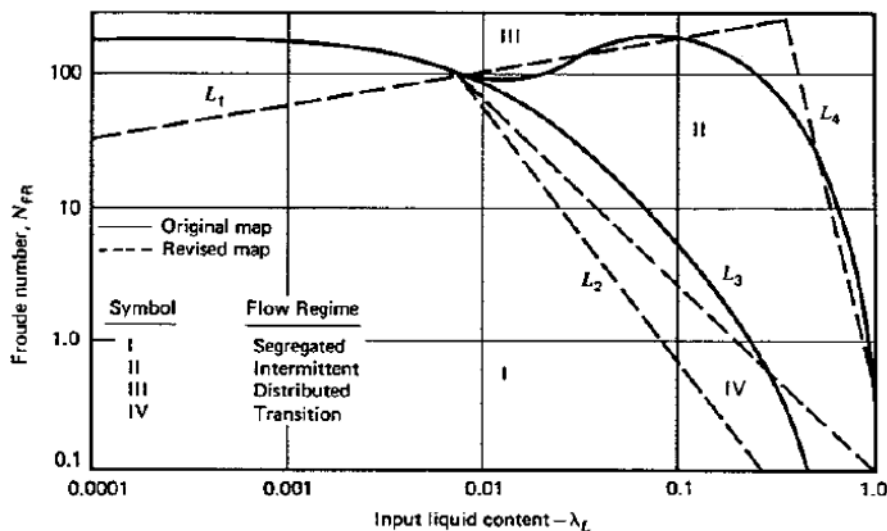


Figura 3.8: Mapa de regimes de escoamento da correlação de Beggs & Brill (tubulação horizontal) (BRILL e MUKHERJEE, 1999).

O regime de escoamento bifásico em uma tubulação horizontal pode ser determinado pela localização do par  $(\lambda_l; N_{Fr})$  neste mapa. As fronteiras que o dividem



em suas quatro regiões,  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  e  $L_4$ , podem ser calculadas por:

$$L_1 = 316\lambda_l^{0,302} \quad (3.120a)$$

$$L_2 = 0,0009252\lambda_l^{-2,4684} \quad (3.120b)$$

$$L_3 = 0,10\lambda_l^{-1,4516} \quad (3.120c)$$

$$L_4 = 0,50\lambda_l^{-6,738} \quad (3.120d)$$

Desta forma, cada regime de escoamento está associado a um conjunto de desigualdades, como mostra a Tabela 3.1.

Tabela 3.1: Determinação do regime de escoamento bifásico (orientação horizontal) pelo método de Beggs & Brill.

Segregado	$\lambda_l < 0,01$ e $N_{Fr} < L_1$ OU $\lambda_l \geq 0,01$ e $N_{Fr} < L_2$
Transição	$\lambda_l \geq 0,01$ e $L_2 \leq N_{Fr} \leq L_3$
Intermitente	$0,01 \leq \lambda_l < 0,4$ e $L_3 < N_{Fr} \leq L_1$ OU $\lambda_l \geq 0,4$ e $L_3 < N_{Fr} \leq L_4$
Distribuído	$\lambda_l < 0,4$ e $N_{Fr} \geq L_1$ OU $\lambda_l \geq 0,4$ e $N_{Fr} > L_4$

O *holdup* de líquido correspondente à tubulação horizontal é então calculado por:

$$HL_{(0)} = \frac{a\lambda_l^b}{N_{Fr}^c} \quad (3.121)$$

A restrição  $HL_{(0)} \geq \lambda_l$  deve ser sempre observada. Os coeficientes  $a$ ,  $b$  e  $c$  estão listados na Tabela 3.2 para os três regimes de escoamento originalmente considerados. O tratamento da região de Transição é abordado mais adiante nesta seção.

Tabela 3.2: Coeficientes empíricos para cálculo de  $HL_{(0)}$  (Equação 3.121).

Regime	$a$	$b$	$c$
Segregado	0,980	0,4846	0,0868
Intermitente	0,845	0,5351	0,0173
Distribuído	1,065	0,5824	0,0609

O *holdup*  $HL$  correspondente à real orientação do escoamento, quando este não

é horizontal, é obtido pelo produto de  $HL_{(0)}$  com um fator corretivo  $\Psi$ :

$$HL = \Psi HL_{(0)} \quad (3.122)$$

O fator  $\Psi$  foi correlacionado com  $N_{Lv}$ , o ângulo de inclinação da tubulação  $\theta$ ,  $\lambda_l$  e  $N_{Fr}$ :

$$C = (1,0 - \lambda_l) \ln \left( e \lambda_l^f N_{Lv}^g N_{Fr}^h \right); C \geq 0 \quad (3.123a)$$

$$\Psi = 1,0 + C [\text{sen}(1,8\theta) - 0,333 \text{sen}^3(1,8\theta)] \quad (3.123b)$$

Os coeficientes empíricos  $e$ ,  $f$ ,  $g$  e  $h$  variam de acordo com o regime de escoamento horizontal e com a orientação do escoamento inclinado (ascendente ou descendente), como mostra a Tabela 3.3.

Tabela 3.3: Coeficientes empíricos para cálculo do fator  $\Psi$  (Equação 3.123a).

	$e$	$f$	$g$	$h$
Segregado ascendente	0,011	-3,768	3,539	-1,614
Intermitente ascendente	2,960	0,3050	-0,4473	0,0978
Distribuído ascendente	$C = 0$ e $\Psi = 1$			
Todos os regimes, descendente	4,7	-0,3692	0,1244	-0,5056

Quando a determinação do regime de escoamento horizontal apontar a região de Transição, o *holdup* de líquido deve ser obtido por interpolação entre os regimes Segregado e Intermitente:

$$A_{BB} = \frac{L_3 - N_{Fr}}{L_3 - L_2} \quad (3.124a)$$

$$HL = A_{BB} HL_{Seg} + (1 - A_{BB}) HL_{Int} \quad (3.124b)$$

Tendo determinado o *holdup* de líquido, o próximo passo é o cálculo de um fator de atrito para o escoamento bifásico  $f_{tp}$ . A abordagem adotada foi a determinação deste via correção do fator de atrito de Moody  $f_n$ , correspondente a uma tubulação lisa, lido na suposição de que as fases escoam à mesma velocidade, acarretando um número de Reynolds na forma:

$$Re = \frac{\rho_n \langle j \rangle d}{\mu_n} \quad (3.125)$$

em que:

$$\rho_n = \rho_l \lambda_l + \rho_v (1 - \lambda_l) \quad (3.126a)$$

$$\mu_n = \mu_l \lambda_l + \mu_v (1 - \lambda_l) \quad (3.126b)$$

A seguinte equação, válida para tubulações lisas, foi recomendada como alternativa à utilização do diagrama de Moody:

$$f_n = \left[ 2 \log \left( \frac{Re}{4,5223 \log(Re) - 3,8215} \right) \right]^{-2} \quad (3.127)$$

A regressão de valores medidos do fator de atrito contra  $\lambda_l$  e  $HL$  como variáveis independentes levou a uma correlação da forma:

$$f_{tp} = f_n \exp(S) \quad (3.128)$$

em que:

$$S = \frac{\ln(y)}{-0,0523 + 3,182 \ln(y) - 0,8725 \ln^2(y) + 0,01853 \ln^4(y)} \quad (3.129)$$

$$y = \frac{\lambda_l}{HL^2} \quad (3.130)$$

Quando  $1 < y < 1,2$ ,  $S$  é dado por:

$$S = \ln(2,2y - 1,2) \quad (3.131)$$

A perda de pressão friccional pode, então, ser calculada por:

$$\left( \frac{dP}{dx} \right)_f = - \frac{f_{tp} \rho_n \langle j \rangle^2}{2d} \quad (3.132)$$

Já a variação de pressão por mudança de elevação é dada por:

$$\left( \frac{dP}{dx} \right)_{el} = -\rho_s g \sin(\theta) \quad (3.133)$$

em que  $\rho_s$  é calculada como:

$$\rho_s = \rho_l HL + \rho_v (1 - HL) \quad (3.134)$$

A variação aceleracional de pressão é incluída no resultado via uso do termo de

aceleração adimensional  $E_K$ , definido como:

$$E_K = \frac{\langle j \rangle \langle j_v \rangle \rho_n}{P} \quad (3.135)$$

O gradiente de pressão total é, então:

$$\frac{dP}{dx} = \left[ \left( \frac{dP}{dx} \right)_{el} + \left( \frac{dP}{dx} \right)_f \right] \frac{1}{1 - E_K} \quad (3.136)$$

BEGGS e BRILL (1973) destacam que sua equação se reduz à do escoamento monofásico correspondente à medida que o *holdup* de líquido se aproxima de 0 ou 1.

Duas modificações propostas por PAYNE *et al.* (1979) para esta correlação são frequentemente adotadas. Estes autores verificaram que o método subestimava o fator de atrito do escoamento, e recomendaram a leitura de  $f_n$  de acordo com a rugosidade real da tubulação (e não mais da curva para tubos lisos). Esta correção melhorou as previsões da correlação para tubulações rugosas.

Os mesmos autores também relataram que o presente método superestimava o *holdup* de líquido em escoamentos ascendentes e descendentes. Baseando-se em suas medições experimentais, propuseram fatores corretivos de 0,924 e 0,685, respectivamente (no caso ascendente, somente se a restrição  $HL \geq \lambda_l$  não for violada).

Se a comparação entre as Equações 3.115 e 3.136 mostra semelhanças entre os termos friccional e estático, o mesmo não se pode afirmar da contribuição aceleracional, para a qual BEGGS e BRILL (1973) propuseram equacionamento alternativo (uma possibilidade mencionada na Seção 3.7.1). Convém mencionar que, ao propor sua correlação como a soma destas três parcelas, os referidos autores basearam-se no conhecido balanço de energia mecânica para estado estacionário (isto é, nenhuma referência foi feita à obtenção da Equação 3.115 como caso particular de um modelo mais avançado do escoamento bifásico).

### 3.8 Consolidação e Resumo de Equações

A pesquisa detalhada nestes primeiros capítulos mostrou diversas semelhanças no que tange à simulação de escoamentos bifásicos líquido-vapor e monofásicos turbulentos.

O paralelo mais fundamental a destacar neste sentido passa pela constatação de que, qualquer que seja a natureza do problema de interesse (monofásico ou bifásico), seu cálculo mais acurado passa atualmente pela solução das equações diferenciais de balanço de massa, momentum e energia nas três dimensões do espaço e (quando for o caso) no tempo, caracterizando uma simulação CFD.

Esta complexa abordagem se mostra inviável, contudo, quando se toma o exemplo de uma unidade industrial qualquer a projetar, na qual canais, tubulações e dutos ocorrem frequentemente às centenas (não raro, aos milhares). Isto se explica pela sofisticação de toda a modelagem envolvida, e principalmente, pelo tempo computacional requerido por simulações CFD.

Não obstante as limitações cada vez menores de recursos computacionais disponíveis, há que se considerar em qualquer época que o cálculo de resultados tridimensionais se mostra excessivamente detalhado na medida que seja possível aproximar como uniformes os valores das propriedades do escoamento de interesse na seção transversal das tubulações, considerando-se apenas suas variações na direção axial e no tempo.

Este quadro justifica que se recorra às equações de balanço unidimensionais, as quais possibilitam a simulação de um problema de escoamento de maneira adequadamente simples e rápida.

Observa-se aí uma dualidade que já se encontra bem solucionada no caso de escoamentos monofásicos, por meio dos balanços macroscópicos discutidos na Seção 2.7. Para escoamentos bifásicos, são três as principais vertentes de modelagem a considerar, cujas equações foram obtidas no decorrer deste capítulo e são, para conveniência, resumidas a seguir.

### 3.8.1 Modelo de Dois Fluidos

Equações da continuidade:

$$\frac{\partial [\alpha_l \rho_l]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_l \rho_l v_l]}{\partial x} = -\Gamma_v$$

$$\frac{\partial [\alpha_v \rho_v]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_v \rho_v v_v]}{\partial x} = \Gamma_v$$

Equações da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial [\alpha_l \rho_l v_l]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_l \rho_l v_l^2]}{\partial x} = -\alpha_l \frac{\partial P_l}{\partial x} - \alpha_l \rho_l g \sin(\theta) - F_{lw} - \Gamma_v v_{li} +$$

$$(P_i - P_l) \frac{\partial \alpha_l}{\partial x} + F_{li} + F_{lMV}$$

$$\frac{\partial [\alpha_v \rho_v v_v]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_v \rho_v v_v^2]}{\partial x} = -\alpha_v \frac{\partial P_v}{\partial x} - \alpha_v \rho_v g \sin(\theta) - F_{vw} + \Gamma_v v_{vi} +$$

$$(P_i - P_v) \frac{\partial \alpha_v}{\partial x} + F_{vi} + F_{vMV}$$

Equações da energia:

$$\frac{\partial [\alpha_l \rho_l h_l]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_l \rho_l v_l h_l]}{\partial x} = \alpha_l \frac{\partial P}{\partial t} + Q_{lw} - \Gamma_v h_{li} + Q_{li}$$

$$\frac{\partial [\alpha_v \rho_v h_v]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_v \rho_v v_v h_v]}{\partial x} = \alpha_v \frac{\partial P}{\partial t} + Q_{vw} + \Gamma_v h_{vi} + Q_{vi}$$

Balances interfaciais:

$$\Gamma_l + \Gamma_v = 0$$

$$-\Gamma_v v_{li} + F_{li} + F_{lMV} + \Gamma_v v_{vi} + F_{vi} + F_{vMV} = 0$$

$$Q_{li} + Q_{vi} + \Gamma_v [h_{vi} - h_{li}] = 0$$

### 3.8.2 Modelo *Drift-Flux*

Equação da continuidade da mistura:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_m v_m]}{\partial x} = 0$$

Equação da continuidade da fase vapor:

$$\frac{\partial [\alpha_v \rho_v]}{\partial t} + \frac{\partial [\alpha_v \rho_v v_m]}{\partial x} = \Gamma_v - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha_v \rho_v \rho_l}{\rho_m} \widehat{v}_v^{\text{des}} \right]$$

Equação da quantidade de movimento da mistura:

$$\frac{\partial [\rho_m v_m]}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_m v_m^2]}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_m g \sin(\theta) - F_{mw} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha_v \rho_v \rho_l}{\alpha_l \rho_m} \widehat{v}_v^{\text{des}^2} \right]$$

Equação da energia da mistura:

$$\frac{\partial [\rho_m h_m]}{\partial t} + \frac{\partial [\rho_m v_m h_m]}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial t} + Q_{mw} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\alpha_v \rho_v \rho_l}{\rho_m} (h_v - h_l) \widehat{v}_v^{\text{des}} \right]$$

$$+ \left[ v_m + \frac{\alpha_v (\rho_l - \rho_v)}{\rho_m} \widehat{v}_v^{\text{des}} \right] \frac{\partial P}{\partial x}$$

Equação constitutiva cinemática:

$$\widehat{v}_v^{\text{des}} = \frac{\rho_m [\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha + (C_0 - 1) v_m]}{\rho_m - (C_0 - 1) (\rho_l - \rho_v) \alpha_v}$$

### 3.8.3 Modelo Homogêneo

Gradiente de pressão:

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\rho_{tp} f_{tp} v_{tp}^2}{2d} - \rho_{tp} g \text{sen}(\theta) - \rho_{tp} v_{tp} \frac{dv_{tp}}{dx}$$

Gradiente de entalpia:

$$\frac{dh_{tp}}{dx} = \frac{\widehat{Q}\pi d}{w} - v_{tp} \frac{dv_{tp}}{dx} - g \text{sen}(\theta)$$

Convém lembrar neste ponto que as mais antigas correlações empíricas e métodos mecanísticos concebidos para simulações de escoamentos bifásicos baseiam-se na simples extensão dos balanços macroscópicos válidos para escoamentos monofásicos em estado estacionário, o que explica a ausência de termos transientes nas equações de balanço do Modelo Homogêneo.

### 3.8.4 Modelagem Constitutiva

Conforme destacado no decorrer deste capítulo e evidenciado neste resumo de equações, a solução dos modelos médios unidimensionais do escoamento bifásico líquido-vapor exige modelos e equações constitutivas adicionais para:

- forças de fricção e arrasto interfacial ( $F_{ki}$ )
- forças de massa virtual ( $F_{kMV}$ )
- velocidades médias interfaciais ( $v_{ki}$ )
- pressões médias das fases e da interface ( $P_k$  e  $P_i$ )
- atrito na parede ( $F_{mw}$  e  $F_{kw}$ )
- relações cinemáticas ( $C_0$  e  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$ )
- transferência de calor ( $Q_{mw}$ ,  $Q_{kw}$  e  $Q_{ki}$ )
- propriedades termofísicas e de transporte ( $\rho_k$ ,  $\mu_k$ ,  $h_k$  e  $\sigma$ )

Os quatro primeiros ítems listados acima (bem como algumas grandezas que figuram nos próximos) correspondem a variáveis presentes somente no Modelo de Dois Fluidos, o que o torna altamente complexo na comparação com as outras duas abordagens de interesse.

### 3.9 Considerações Finais

Após apresentar as principais definições e particularidades inerentes ao escoamento bifásico líquido-vapor, este capítulo indicou o emprego das equações médias de balanço na solução de problemas onde ocorre este fenômeno. Neste contexto, demonstrou-se a aplicação de processos de média à formulação local instantânea, segundo um procedimento bastante semelhante ao consolidado no estudo da turbulência. Tal exercício, reconhecidamente extenso e exaustivo, é importante para a compreensão de como os modelos mais usados tratam a alternância das fases no espaço e no tempo.

A dedução apresentada conduziu aos modelos de Dois Fluidos e de Mistura, e a aplicação da média transversal resultou em suas formas transientes unidimensionais. Foram apontados estudos e aplicações recentes nos quais versões simplificadas destes modelos vêm apresentando resultados satisfatórios para fins práticos e boa concordância com dados experimentais, credenciando-as como bons pontos de partida para os cálculos deste trabalho.

Por último, foram discutidas as abordagens mais antigas do problema de escoamento bifásico. Seguiu-se o caminho, mais lógico à primeira vista, de generalizar para este problema o balanço macroscópico de energia mecânica, utilizado com sucesso para escoamentos monofásicos juntamente com correlações para o fator de atrito. Ocorre que este tratamento não passa pela modelagem fenomenológica de certos mecanismos particulares do escoamento bifásico, cujos efeitos somente são considerados empiricamente. A demonstração de que estes métodos correspondem a uma versão simplificada do Modelo de Mistura para escoamento homogêneo permanente pode ajudar a compreender suas limitações.

O próximo capítulo apresenta os modelos e equações constitutivas utilizados no presente trabalho na solução dos modelos de Dois Fluidos, de Mistura e empíricos.



## Capítulo 4

# Modelagem Complementar e Equações Constitutivas

O presente trabalho é baseado na solução dos modelos de Dois Fluidos, de Mistura (conforme apresentados nas Seções 3.5.3 e 3.6.3) e de BEGGS e BRILL (1973). Este último foi selecionado como representante da categoria de correlações empíricas, sendo complementado com o balanço homogêneo de energia quando a distribuição axial de temperaturas não for previamente conhecida.

Como já foi destacado, a inspeção das equações que constituem estes modelos revela a presença de taxas de transferência, forças e outras grandezas que precisam ser calculadas por equações constitutivas adicionais. Neste capítulo são apresentadas as equações e os modelos complementares que foram utilizados no desenvolvimento deste trabalho.

### 4.1 Regimes de Escoamento

Boa parte das equações constitutivas para o escoamento bifásico foi desenvolvida para um padrão específico de escoamento. Por este motivo, a seleção destas equações exige que se delimite previamente quais são os regimes de interesse.

Buscou-se, quando do desenvolvimento do código computacional para realização das simulações, a conciliação de duas questões potencialmente conflitantes. De um lado, o objetivo de modelar acuradamente toda a faixa de evolução dos regimes de escoamentos bifásicos (conforme exemplificado pelas Figuras 3.1 e 3.2), garantindo-se assim a máxima abrangência possível ao programa. De outro, a limitação imposta ao nível de detalhamento pela disponibilidade de modelos na literatura (o reconhecimento de regimes intermediários aos básicos ilustrados e a subdivisão de dado padrão em dois novos, conforme discutido anteriormente, fazem pouco sentido quando as equações constitutivas disponíveis possuem faixas de aplicabilidade mais amplas).

### 4.1.1 Escoamento Vertical Ascendente

Ao discutir a orientação vertical ascendente, BRILL e MUKHERJEE (1999) relatam que o regime Agitado é frequentemente combinado com o *Slug*, ou então incorporado a uma região de transição entre os padrões *Slug* e Anular. HASAN e KABIR (1988a,b, 1990) de fato usam as mesmas equações para os regimes *Slug* e Agitado, com pouquíssimas modificações. O código RELAP5 também incorpora o regime Agitado ao *Slug* (ISL, 2001a).

Estas considerações, junto com aquelas apresentadas na Seção 3.1.1, sugerem a modelagem de quatro padrões de escoamento vertical ascendente: Bolhas, *Slug*, Anular e Nevoeiro.

### 4.1.2 Escoamento Horizontal

O regime de escoamento horizontal *Plug*, agrupado por BEGGS e BRILL (1973) com *Slug* na classificação *Intermitente*, não recebe tratamento específico no simulador RELAP5 (ISL, 2001b).

Já os padrões Estratificado e Ondular ilustrados na Figura 3.1 diferem apenas pela presença de ondas na interface, conforme ressaltado pelo próprio BAKER (1954). Em vez de modelar estes regimes de forma separada, o código RELAP5 introduz nas equações constitutivas do escoamento Estratificado os fatores necessários para representar os efeitos da possível ocorrência de ondas (ISL, 2001b).

Desta forma, a orientação horizontal exige a modelagem dos mesmos quatro padrões do escoamento vertical ascendente, acrescidos do regime Estratificado.

### 4.1.3 Padrões Modelados

As investigações detalhadas para as orientações acima, juntamente com os modelos disponíveis na literatura (vide publicações referenciadas no decorrer deste capítulo) permitem concluir que o escoamento bifásico líquido-vapor é satisfatoriamente modelado para os fins do presente trabalho através da consideração de cinco regimes de escoamento, a saber: Bolhas, *Slug*, Anular, Nevoeiro e Estratificado (este último, somente para dutos horizontais).

Vale frisar que as posições vertical ascendente e horizontal foram selecionadas aqui com o único objetivo de orientar a seleção dos padrões de escoamento a tratar. Este trabalho visa à solução dos modelos de escoamento bifásico de interesse para qualquer inclinação.

## 4.2 Fricção e Arrasto Interfacial

De acordo com a Seção 3.5.3, a solução do Modelo de Dois Fluidos passa pela modelagem das forças por unidade de volume  $F_{li}$  e  $F_{vi}$ . Todas as referências pesquisadas consideram que (ABBASPOUR *et al.*, 2010; GHIAASIAAN, 2008; ISL, 2001b; LEVY, 1999; MORALES-RUIZ *et al.*, 2012; ZOU *et al.*, 2016b):

$$F_{li} = -F_{vi} = F_i \quad (4.1)$$

restando, portanto, a tarefa de especificar um modelo para  $F_i$ .

Esta força constitui parte do termo  $\langle \mathbf{M}_{ik}^d \rangle$ , o qual é composto pelo arrasto interfacial generalizado (importante para escoamentos Dispersos) e pelo cisalhamento interfacial (cujos efeitos são predominantes em escoamentos Separados), como demonstrado no Apêndice A. Dentre as diversas forças interfaciais associadas à primeira contribuição, somente as forças de *massa virtual* e de *arrasto* são consideradas em simulações unidimensionais (BROOKS *et al.*, 2012; ISHII e HIBIKI, 2011). Assim, a força  $F_i$  quantifica as influências do cisalhamento interfacial e do arrasto, enquanto a força de massa virtual, discutida na Seção 4.3, é representada pelos termos  $F_{lMV}$  e  $F_{vMV}$ .

### 4.2.1 Bolhas e Nevoeiro

$F_i$  foi calculada neste trabalho para os padrões Bolhas e Nevoeiro através da seguinte equação (BROOKS *et al.*, 2012; ISL, 2001b):

$$F_i = \frac{\rho_c C_D a_{lv}}{8} |v_v - v_l| (v_v - v_l) \quad (4.2)$$

em que a massa específica da fase contínua,  $\rho_c$ , vale  $\rho_l$  para o regime de Bolhas e  $\rho_v$  para o escoamento em Nevoeiro.  $C_D$  e  $a_{lv}$  são, respectivamente, o *coeficiente de arrasto* e a *área interfacial específica* (área interfacial por unidade de volume considerada nesta formulação unidimensional).

$C_D$  foi calculado de acordo com (BROOKS *et al.*, 2012; ISL, 2001b):

$$C_D = \frac{24 [1 + Re_P^{0,75}/10]}{Re_P} \quad (4.3)$$

baseado em um número de Reynolds  $Re_P$  dado por:

$$Re_P = \frac{d_o |v_v - v_l| \rho_c}{\mu_m} \quad (4.4)$$

em que a viscosidade da mistura bifásica vale  $\mu_m = \mu_l/\alpha_l$  no regime de Bolhas, e

$\mu_m = \mu_v/\alpha_v^{2,5}$  para o de Nevoeiro. O diâmetro médio das bolhas (ou gotículas)  $d_o$  é obtido como metade do diâmetro máximo  $d_{max}$ , que por sua vez é função do valor crítico do número de Weber calculado como:

$$We_{crit} = \frac{d_{max}\rho_c (v_v - v_l)^2}{\sigma} \quad (4.5)$$

Foi considerado  $We_{crit} = 10$  para o padrão Bolhas, e  $We_{crit} = 12$  para Nevoeiro (BROOKS *et al.*, 2012; ISL, 2001b). Este grupo adimensional é interpretado por BERGMAN *et al.* (2011) como a razão entre as forças de inércia e as de tensão superficial.

A área interfacial específica foi obtida da seguinte expressão (ISL, 2001b):

$$a_{lv} = \frac{3,6\alpha_d}{d_o} \quad (4.6)$$

em que  $\alpha_d = \alpha_v$  para escoamentos em Bolhas e  $\alpha_d = \alpha_l$  se o regime for Nevoeiro. A dedução da Equação 4.6 é discutida no Apêndice B em detalhe suficiente para revelar as principais considerações que lhe deram origem.

## 4.2.2 *Slug*

As análises apresentadas até aqui para o regime de Golfadas fizeram a subdivisão deste tipo de escoamento em *Taylor bubbles* e regiões de líquido, considerando-se alguma quantidade de vapor misturada ao último. Assim como no simulador RELAP5 (ISL, 2001a), tal decomposição foi estendida no presente trabalho para o cálculo de  $F_i$  conforme:

$$F_i = \alpha_b F_i^{(b)} + (1 - \alpha_b) F_i^{(s)} \quad (4.7)$$

em que  $\alpha_b$  representa a fração de vazios das bolhas de Taylor na mistura bifásica.

$F_i^{(s)}$  representa a força de arrasto referente à porção majoritariamente líquida do escoamento, suposta no regime de Bolhas e calculada de acordo com o procedimento já apresentado para este padrão.

O cômputo de  $F_i^{(b)}$ , que é a força de arrasto correspondente à bolha de Taylor, também é feito de acordo com a Equação 4.2, fazendo-se  $\rho_c = \rho_l$  e adotando-se expressão apropriada para o coeficiente de arrasto (ISHII e HIBIKI, 2011):

$$C_D = 9,8 (1 - \alpha_b)^3 \quad (4.8)$$

A área por unidade de volume das bolhas de Taylor foi calculada como:

$$a_{lv} = \frac{K_b}{d} \quad (4.9)$$

em que o fator ajustável  $K_b$  considera o comprimento destas bolhas, conforme discutido no Apêndice B.

Somando-se os volumes de vapor presentes na *Taylor bubble* e em sua região líquida associada, determina-se o volume total de vapor desta estrutura periódica, associado a  $\alpha_v$ . O desenvolvimento desta soma resulta na seguinte equação para  $\alpha_b$ :

$$\alpha_b = \frac{\alpha_v - \alpha_v^{(s)}}{1 - \alpha_v^{(s)}} \quad (4.10)$$

em que  $\alpha_v^{(s)}$  representa a fração de vazios da fase vapor no líquido que acompanha a bolha de Taylor. Esta fração, que também é necessária para o cálculo de  $F_i^{(s)}$ , foi obtida através de uma interpolação exponencial entre as transições dos regimes de Bolhas para *Slug* e de *Slug* para Anular (ISL, 2001b).

### 4.2.3 Anular

O escoamento Anular também pode ser decomposto, considerando-se neste caso um filme de líquido revestindo a parede interna do duto, enquanto seu núcleo central é ocupado pela fase vapor (com algum líquido disperso). Isto implica o cálculo de  $F_i$  conforme:

$$F_i = (1 - \alpha_f) F_i^{(n)} + F_i^{(f)} \quad (4.11)$$

em que  $\alpha_f$  é a fração volumétrica correspondente ao filme de líquido, tendo sido obtida no presente trabalho através das mesmas equações de *entranhamento* apresentadas nos manuais do código RELAP5 (ISL, 2001a,b).

$F_i^{(n)}$  é a força de arrasto associada ao núcleo central de vapor e gotículas de líquido, e foi calculada conforme o roteiro apresentado para o regime Nevoeiro mediante a consideração da fração volumétrica  $\alpha_l^{(n)}$  de líquido disperso no núcleo. A suposição de que todo o vapor encontra-se no núcleo central permite calcular esta fração como (ISL, 2001a,b):

$$\alpha_l^{(n)} = \frac{\alpha_l - \alpha_f}{1 - \alpha_f} \quad (4.12)$$

Seguindo a relação traçada por ISHII e HIBIKI (2011) entre o cisalhamento interfacial para escoamentos Anulares em tubos e o perímetro do núcleo de vapor,  $F_i^{(f)}$  foi calculada como:

$$F_i^{(f)} = \frac{\rho_v f_i a_{lv}^{(f)}}{8} |v_v - v_l| (v_v - v_l) \quad (4.13)$$

em que o fator de atrito interfacial  $f_i$  foi obtido através das mesmas correlações utilizadas no código RELAP5. Uma correlação alternativa é apresentada por ISHII e HIBIKI (2011).

Através de considerações geométricas simples, obtém-se a seguinte expressão para a área interfacial interna do filme de líquido por unidade de volume do escoamento,  $a_{lv}^{(f)}$ :

$$a_{lv}^{(f)} = \frac{4K_e^{(f)}}{d} \sqrt{1 - \alpha_f} \quad (4.14)$$

em que o fator multiplicativo de rugosidade  $K_e^{(f)}$ , referente a ondulações na película de líquido, foi calculado como um múltiplo de  $[30\alpha_f]^{1/8}$  - isto é,  $K_e^{(f)} \propto [30\alpha_f]^{1/8}$ , em que a constante de proporcionalidade ajustável varia entre 1 e 2,5 (ISL, 2001a).

#### 4.2.4 Estratificado Horizontal

O cálculo de  $F_i$  para escoamentos Estratificados horizontais foi baseado na Equação 4.13, conforme indicado por ROSA (2012), com as devidas equações constitutivas para  $f_i$  e  $a_{lv}$ . Ambas são funções do *ângulo central*  $\lambda$ , ilustrado na Figura 4.1. Este ângulo, que é metade daquele que circunscreve o perímetro da interface, possui a seguinte relação com  $\alpha_v$  (ISL, 2001b):

$$\alpha_v \pi = \lambda - \text{sen}(\lambda) \cos(\lambda) \quad (4.15)$$

em que  $\lambda$  é dado em radianos.

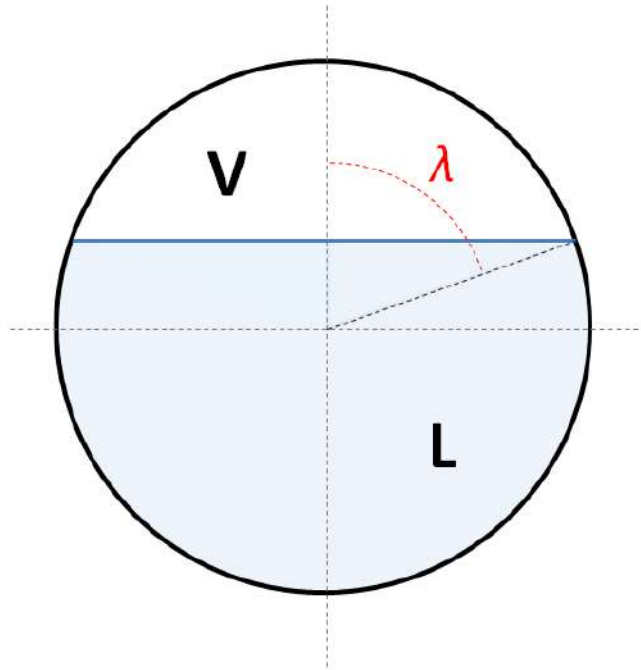


Figura 4.1: Ângulo central do escoamento Estratificado horizontal.

A área interfacial específica a considerar vale (ISL, 2001b):

$$a_{lv} = \frac{4\text{sen}(\lambda)}{\pi d} \quad (4.16)$$

Já o fator de atrito interfacial  $f_i$  foi calculado como (ISL, 2001b):

$$f_i = \text{MAX} \left[ \frac{64}{Re_i}; \frac{0,3164}{Re_i^{0,25}} \right] \quad (4.17)$$

com o número de Reynolds  $Re_i$ , referente à interface, dado por:

$$Re_i = \frac{d_i \rho_v |v_v - v_l|}{\mu_v} \quad (4.18)$$

em que o *diâmetro molhado equivalente*  $d_i$  vale:

$$d_i = \frac{\alpha_v \pi d}{\lambda + \text{sen}(\lambda)} \quad (4.19)$$

#### 4.2.5 Comentários e Observações

Convém observar que BIRD *et al.* (2002) definem o coeficiente de arrasto como sendo um fator de atrito para o escoamento em torno de determinado objeto. Sob esta perspectiva, é natural que as Equações 4.2 e 4.13 difiram apenas pela representação dos fatores de atrito considerados. O agrupamento do cisalhamento interfacial e do arrasto no mesmo termo ( $F_i$ ) também se mostra conceitualmente consistente.

Referindo-se especificamente a escoamentos Dispersos, ISHII e HIBIKI (2011) afirmam que a força de arrasto dada pela Equação 4.2 é a mais importante a considerar, mas destacam que a velocidade relativa adotada em seu cômputo deveria ser a média transversal da velocidade relativa local entre as fases, e não a diferença entre os  $\langle \overline{v_k^\rho} \rangle_\alpha$ , conforme frequentemente praticado. Segundo os mesmos autores, esta distinção jamais foi tratada nas simulações baseadas no Modelo de Dois Fluidos, ocasionando prejuízos à sua acurácia em comparação com o Modelo *Drift-Flux*. Embora esta referência apresente uma expressão mais adequada para a velocidade relativa (em que figura o parâmetro de distribuição  $C_0$ ), seus autores levantam, em artigo posterior (BROOKS *et al.*, 2012), diversos questionamentos quanto a seu uso, dentre os quais encontra-se a variação das equações constitutivas de acordo com as previsões de modelos de transição ou mapas *estáticos* - problema que as seções anteriores também apresentam. A única abordagem discutida por BROOKS *et al.* (2012) que não possui esta limitação é o emprego de equações de transporte para a área interfacial - as já discutidas IATEs, que ainda se encontram em processo de desenvolvimento.

### 4.3 Força de Massa Virtual

Segundo ISHII e HIBIKI (2011) e ROSA (2012), a força de massa virtual é a força exigida para acelerar o fluido na vizinhança de uma partícula quando ocorrem variações de velocidade relativa.

Os cálculos do presente trabalho adotaram a seguinte suposição frequente (GHIAASIAAN, 2008; LEVY, 1999):

$$-F_{lMV} = F_{vMV} = F_{MV} \quad (4.20)$$

A equação constitutiva para  $F_{MV}$  foi obtida do manual do simulador RELAP5 (ISL, 2001b):

$$F_{MV} = -C_{MV}\alpha_v\alpha_l\rho_m \left[ \frac{\partial(v_v - v_l)}{\partial t} + v_l \frac{\partial v_v}{\partial x} - v_v \frac{\partial v_l}{\partial x} \right] \quad (4.21)$$

em que:

$$C_{MV} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[ \frac{1 + 2\alpha_v}{1 - \alpha_v} \right], & 0 \leq \alpha_v \leq 0,5 \\ \frac{1}{2} \left[ \frac{3 - 2\alpha_v}{\alpha_v} \right], & 0,5 < \alpha_v \leq 1 \end{cases} \quad (4.22)$$

Equações parecidas são apresentadas por GHIAASIAAN (2008), segundo quem  $F_{MV}$  somente assume proporções significativas sob forte aceleração e quando a fase vapor encontra-se dispersa. Sua contribuição mais importante diz respeito à estabilidade da solução numérica do Modelo de Dois Fluidos (BROOKS *et al.*, 2012).

### 4.4 Velocidades Médias Interfaciais

As velocidades médias interfaciais  $v_{li}$  e  $v_{vi}$  são frequentemente consideradas iguais (GHIAASIAAN, 2008; ZOU *et al.*, 2016b):

$$v_{li} = v_{vi} = v_i \quad (4.23)$$

Esta consideração foi adotada em todos os cálculos apresentados neste trabalho, junto com o seguinte modelo para  $v_i$  (ISL, 2001b):

$$v_i = \begin{cases} v_l, & \Gamma_v > 0 \\ v_v, & \Gamma_v < 0 \end{cases} \quad (4.24)$$



É importante destacar que as Equações 4.1, 4.20 e 4.23 garantem, sem nenhuma consideração adicional, o balanço interfacial de momentum, Equação 3.77.

## 4.5 Pressões Médias das Fases e da Interface

As equações da quantidade de movimento do Modelo de Dois Fluidos (Equações 3.72 e 3.73) possuem cada uma um termo dado pelo produto do gradiente da fração de vazios com a diferença entre as pressões médias da interface e da fase considerada.

Esta parcela é omitida em diversas publicações (GHIAASIAAN, 2008; LEVY, 1999). ISHII e HIBIKI (2011) confirmam que a mesma pode ser desprezada em quase todas as situações - a única exceção apontada é para escoamentos Estratificados horizontais, quando estes autores alertam que a referida contribuição pode ser importante. ROSA (2012) afirma que mesmo neste caso, este termo interfacial costuma ser desprezado.

O programa computacional desenvolvido neste trabalho deixa a critério do usuário a consideração ou não de pressões diferentes para as fases e a interface no escoamento Estratificado horizontal. Na opção por este tratamento diferenciado, o problema ganha três novas variáveis ( $P_i$ ,  $P_l$  e  $P_v$ ) na comparação com o cálculo simplificado, e três equações adicionais tornam-se necessárias. A pressão da mistura bifásica definida por ISHII e HIBIKI (2011) passa a ser calculada para todos os regimes:

$$P = \alpha_v P_v + \alpha_l P_l \quad (4.25)$$

e ficam faltando duas equações.

Quando o escoamento não é Estratificado horizontal, o programa desenvolvido baseia-se no procedimento do código RELAP5 (ISL, 2001b) e faz  $P_l = P_i$  e  $P_v = P_i$ . Isto resulta em  $P_l = P_v = P_i = P$  para estes casos e anula os termos em que figuram as diferenças de pressões, em pleno acordo com o relato acima.

Quando é previsto o padrão Estratificado em um duto horizontal, o cálculo rigoroso prevê  $P_l$  e  $P_v$  de acordo com as equações apresentadas por HENAU e RAITHBY (1995)<sup>1</sup>, conforme as recomendações de ISL (2001b) e MOKHATAB e POE (2012):

$$P_l = P_i + \rho_l g d \cos(\theta) \left[ \frac{\text{sen}^3(\lambda)}{3\pi\alpha_l} + \frac{\cos(\lambda)}{2} \right] \quad (4.26)$$

$$P_v = P_i - \rho_v g d \cos(\theta) \left[ \frac{\text{sen}^3(\lambda)}{3\pi\alpha_v} - \frac{\cos(\lambda)}{2} \right] \quad (4.27)$$

---

<sup>1</sup>Atentar que o ângulo  $\beta$  considerado por estes autores vale  $\beta = 2\pi - 2\lambda$ .

## 4.6 Perdas por Atrito

Todas as seções anteriores do presente capítulo (com exceção da identificação dos regimes de escoamento) apresentam equações constitutivas necessárias somente para a solução do Modelo de Dois Fluidos. Ao compará-lo com o Modelo de Mistura, ISHII e HIBIKI (2011) de fato destacam a diferença na quantidade de modelos complementares exigidos.

As perdas friccionais de pressão, por outro lado, estão presentes em todos os modelos de interesse.

Foram programados dois métodos para o cálculo de  $F_{mw}$  no Modelo de Mistura. O primeiro consiste na parte correspondente da correlação empírica de BEGGS e BRILL (1973), detalhada na Seção 3.7.5. O segundo método (CHAXTON *et al.*, 1972), que é o mesmo adotado no código RELAP5 (ISL, 2001b), consiste em equações simples para o multiplicador  $\phi_v^2$  introduzido por LOCKHART e MARTINELLI (1949) - a queda de pressão do sistema bifásico vem do produto desse multiplicador pela perda de carga  $(dP/dx)_{f(v)}$  que resultaria se a fase vapor fosse a única a escoar:

$$X^2 = \frac{(dP/dx)_{f(l)}}{(dP/dx)_{f(v)}} \quad (4.28a)$$

$$2 \leq C = -2 + \left[ 28 - 0,3\sqrt{G_m} \right] \exp \left\{ - \frac{[\log_{10} (\rho_v \rho_l^{-1} \mu_l^{0,2} \mu_v^{-0,2}) + 2,5]^2}{2,4 - 10^{-4} G_m} \right\} \quad (4.28b)$$

$$\phi_v^2 = X^2 + CX + 1 \quad (4.28c)$$

em que  $G_m = \sum G_k = \sum \alpha_k \rho_k v_k$  corresponde à soma dos fluxos mássicos das fases líquida e vapor.

Excepcionalmente, na realização dos cálculos apresentados na Seção 5.5,  $F_{mw}$  foi calculada na forma do quarto termo no lado direito da Equação 3.94, dado o interesse em estudar-se os efeitos numéricos das transições entre regimes de escoamento e descontinuidades matemáticas associadas. Neste caso,  $f_m$  para o padrão Bolhas foi obtido a partir da chamada equação de Chen (ROTAVA, 2012), adotando-se um número de Reynolds para a mistura bifásica em que sua massa específica e viscosidade correspondem à média ponderada por  $\alpha_k$  das propriedades das fases líquida e vapor. O cálculo deste mesmo fator de atrito para o regime *Slug* considerou, adicionalmente, que  $\rho_m \approx \alpha_l \rho_l$  (HASAN e KABIR, 1988b).

### 4.6.1 Partição

A pesquisa realizada para este trabalho confirmou o quadro apresentado por GHI-AASIAAN (2008) no que tange ao Modelo de Dois Fluidos. Esta referência salienta que as correlações para o cálculo do atrito com a parede em escoamentos bifásicos frequentemente fornecem a perda de carga de toda a mistura (e não as de cada fase), levando à necessidade de outro critério para repartir  $F_{mw}$  entre  $F_{lw}$  e  $F_{vw}$ .

Manipulando-se equações da quantidade de movimento bastante simplificadas para ambas as fases, é possível obter (ISL, 2001b):

$$F_{lw} = \alpha_l \left[ \frac{Z^2}{\alpha_l Z^2 + \alpha_v} \right] F_{mw} \quad (4.29)$$

$$F_{vw} = \alpha_v \left[ \frac{1}{\alpha_l Z^2 + \alpha_v} \right] F_{mw} \quad (4.30)$$

em que:

$$Z^2 = \frac{f_l \rho_l v_l^2 \alpha_{lw} / \alpha_l}{f_v \rho_v v_v^2 \alpha_{vw} / \alpha_v} \quad (4.31)$$

O fator de atrito  $f_k$  para a fase  $k$  é obtido do diagrama de Moody (ou equação equivalente) para o seguinte número de Reynolds:

$$Re_k = \frac{D_{kh} v_k \rho_k}{\mu_k} \quad (4.32)$$

em que o *diâmetro hidráulico*  $D_{kh}$  vale:

$$D_{kh} = \frac{4A_k}{S_k} = \frac{4\alpha_k A}{\alpha_{kw} \pi d} \quad (4.33)$$

O cálculo das frações volumétricas das fases junto à parede,  $\alpha_{kw}$ , é mais um que varia de acordo com o regime de escoamento (ISL, 2001b).

Para os padrões Bolhas e Nevoeiro, foi feito  $\alpha_{kw} = \alpha_k$ . No regime *Slug*, considerou-se  $\alpha_{vw} = \alpha_v^{(s)}$  analisada anteriormente (vale lembrar que, em qualquer regime,  $\alpha_{lw} + \alpha_{vw} = 1$ ). Para escoamentos Anulares, adotou-se  $\alpha_{lw} = \alpha_f^{0,25}$ , e para o caso Estratificado horizontal,  $\alpha_{vw} = \lambda/\pi$  (ISL, 2001b).

## 4.7 Relações Cinemáticas

As correlações desenvolvidas por BHAGWAT e GHAJAR (2014) para  $C_0$  e  $\langle v_v^{des} \rangle_\alpha$ , mencionadas anteriormente, apresentaram desempenho satisfatório na verificação contra 8255 pontos experimentais, oriundos de mais de 60 referências bibliográficas e compreendendo toda a faixa possível de inclinações da tubulação, assim como ampla variedade de pressões, diâmetros e fases líquida (água, querosene, etanol,

refrigerantes, óleos, etc.) e vapor (ar, gás natural, Argônio, etc.). Trata-se de um resultado importante em um contexto em que predominam equações constitutivas válidas sob condições bem mais restritas.

Merece menção especial o fato de que as condições experimentais consideradas na validação mostram-se bem distribuídas por toda a faixa de  $\alpha_v$ . Isto significa que estas correlações são válidas para todos os regimes de escoamento bifásico, podendo ser aplicadas sem a necessidade de recorrer a qualquer mapa de padrões.

Tamanho faixa de aplicabilidade foi a principal motivação para adoção das equações propostas por BHAGWAT e GHAJAR (2014) nos cálculos do presente trabalho. Pesou decisivamente também o fato de que não foram encontradas equações constitutivas para  $C_0$  e  $\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha$  desenvolvidas especificamente para determinados regimes, como o Estratificado horizontal.

O programa computacional desenvolvido também permite o emprego de correlações específicas para determinados padrões em substituição às de BHAGWAT e GHAJAR (2014), tendo em vista tanto o seu emprego disseminado na literatura quanto o interesse em estudar os efeitos numéricos das descontinuidades matemáticas nas transições entre os regimes.

### 4.7.1 Bolhas

Foram programadas, especificamente para escoamentos no regime de Bolhas, as seguintes equações constitutivas (ISHII e HIBIKI, 2011; LEVY, 1999):

$$C_0 = 1,2 - 0,2\sqrt{\frac{\rho_v}{\rho_l}} \quad (4.34)$$

$$\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha = 1,53 \left[ \frac{\sigma_l g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_l^2} \right]^{1/4} \quad (4.35)$$

Seguindo orientações de ISHII e HIBIKI (2011), o resultado da Equação 4.34 é multiplicado por  $[1 - \exp(-18\alpha_v)]$  quando  $\Gamma_v > 0$ .

### 4.7.2 Slug

O programa desenvolvido também permite a simulação do padrão *Slug* com base nas seguintes equações (HASAN e KABIR, 1988b):

$$C_0 = 1,2 \quad (4.36)$$

$$\langle v_v^{\text{des}} \rangle_\alpha = 0,35\sqrt{\sin(\theta)} [1 + \cos(\theta)]^{1,2} \left[ \frac{gd(\rho_l - \rho_v)}{\rho_l} \right]^{1/2} \quad (4.37)$$

## 4.8 Transferência de Calor e Massa

A taxa de transferência de calor por unidade de volume da mistura bifásica através da parede do duto,  $Q_{mw}$ , foi modelada como:

$$Q_{mw} = \frac{4U(T_{viz} - T)}{d} \quad (4.38)$$

em que  $T$  é a temperatura local dos fluidos escoados,  $T_{viz}$  é a temperatura das vizinhanças da tubulação e  $U$  é o *coeficiente global de transferência de calor* correspondente.

Se o sistema em questão corresponde a uma tubulação exposta ao ar ambiente,  $U$  é calculado por (BERGMAN *et al.*, 2011; BIRD *et al.*, 2002):

$$U = \frac{2}{d} \left[ \frac{2}{dh_i} + \frac{\ln(D/d)}{k} + \frac{2}{Dh_o} \right]^{-1} \quad (4.39)$$

em que  $D$  é o diâmetro externo da tubulação,  $k$  é sua condutividade térmica e  $h_i$  e  $h_o$  são coeficientes de transferência de calor por convecção nas paredes interna e externa do tubo, respectivamente.

Neste trabalho, considerou-se que o escoamento era turbulento o suficiente para promover intensa transferência de calor convectiva, de modo que as diferenças de temperaturas entre a mistura bifásica e a parede interna sejam sempre desprezíveis. Matematicamente, isto equivale a tomar como nula a correspondente resistência convectiva no termo entre colchetes na Equação 4.39:

$$U = \frac{2}{d} \left[ \frac{\ln(D/d)}{k} + \frac{2}{Dh_o} \right]^{-1} \quad (4.40)$$

O coeficiente de transferência de calor por convecção entre a parede externa da tubulação e o ar ambiente,  $h_o$ , deve ser obtido a partir do número de Nusselt correspondente, cujo procedimento de cálculo varia entre situações de convecção natural e forçada (BERGMAN *et al.*, 2011). A correlação de CHURCHILL e BERNSTEIN (1977) para convecção forçada foi selecionada neste trabalho para estimativas de  $h_o$  sob condições atmosféricas instáveis.

Se a temperatura da superfície externa da tubulação for um parâmetro de projeto ou se for medida durante a operação, como é comum em cálculos de fornos industriais (NIAEI *et al.*, 2004), ela toma o lugar de  $T_{viz}$  na Equação 4.38, e a Equação 4.40 simplifica-se para:

$$U = \frac{2}{d} \left[ \frac{\ln(D/d)}{k} \right]^{-1} \quad (4.41)$$

### 4.8.1 Balanço Interfacial de Energia

Seguindo o exemplo de MORALES-RUIZ *et al.* (2012) e ZOU *et al.* (2016b), o presente trabalho baseou-se na modelagem empregada pelo código RELAP5 (ISL, 2001a) para os diversos termos em aberto que figuram nas equações da energia 3.74 e 3.75 e no balanço interfacial de energia 3.78, introduzindo algumas simplificações.

O referido simulador trabalha com temperaturas diferentes entre as fases e a interface (isto é, com  $T_l$ ,  $T_v$  e  $T_i$ ) e decompõe os termos interfaciais  $Q_{ki}$  em duas parcelas: uma associada à transferência de calor no *bulk* (diretamente proporcional à diferença  $T_i - T_k$ ), e outra representando a transferência de calor interfacial na camada limite térmica junto à parede (ISL, 2001b).

O presente trabalho considera, para fins de simplificação, que a variação da temperatura em qualquer seção transversal do escoamento seja desprezível. Isto equivale a fazer  $T_l = T_v = T_i = T$ , restando somente a segunda parcela dos  $Q_{ki}$  no modelo. Tais contribuições representam a fração  $\gamma_k$  do calor trocado com a parede ( $Q_{kw}$ ) que resulta em transferência de massa, permitindo escrever (ISL, 2001a):

$$Q_{ki} = -\gamma_k Q_{kw} \quad (4.42)$$

em que, por definição,  $0 \leq \gamma_k \leq 1$ .

A substituição da Equação 4.42 no balanço interfacial, Equação 3.78, permite obter:

$$\Gamma_v = \frac{\gamma_v Q_{vw} + \gamma_l Q_{lw}}{h_{vi} - h_{li}} \quad (4.43)$$

Na ocorrência de evaporação,  $Q_{vw}$  é nulo e  $Q_{lw} = Q_{mw}$ . Vale o oposto para condensação (ISL, 2001a,b).

Como é detalhado na Seção 4.9, a suposição de equilíbrio termodinâmico foi adotada no cálculo de todas as propriedades termofísicas e de transporte das fases líquida e vapor. Desta forma, os modelos adotados para as entalpias associadas à transferência de massa reduzem-se a  $h_{li} = h_l$  e  $h_{vi} = h_v$  (ISL, 2001b).

Todos os cálculos apresentados neste trabalho foram realizados com  $\gamma_k = 1$ . O modelo utilizado pelo simulador RELAP5, mais detalhado, também se reduz a isto quando ambas as fases estão na condição de saturação (ISL, 2001a,b).

## 4.9 Propriedades Termofísicas e de Transporte

Propriedades termofísicas (massas específicas e entalpias) e de transporte (viscosidades e tensão superficial) de cada fase figuram nas equações de conservação e constitutivas apresentadas para o escoamento bifásico, exigindo-se a aplicação de métodos para sua previsão.

Os próximos capítulos apresentam estudos de estratégias de solução numérica do problema de interesse, cujas potencialidades ficam mais claras à medida que o modelo resolvido se torna mais rigoroso. Considerando este critério, tais simulações foram baseadas em um escoamento fictício de uma corrente multicomponente de *nafta*, cuja composição global (dada pela Tabela 4.1) é semelhante à verificada por cromatografia gasosa e apresentada por RIAZI (2005).

Tabela 4.1: Composição molar da corrente de nafta.

Componente	Porcentagem molar (%)
<i>n</i> -Pentano	4,03
<i>n</i> -Heptano	13,55
2-Metil-Heptano	16,98
Ciclohexano	17,28
Benzeno	3,72
Tolueno	25,26
Etilbenzeno	4,57
<i>p</i> -Xileno	10,96
<i>o</i> -Xileno	3,65

A nafta é uma fração de petróleo separada em colunas de destilação, sendo também obtida em outros processos de refino (JONES e PUJADÓ, 2006). Optou-se pela mesma como mistura multicomponente com o objetivo de basear os cálculos em cenários representativos de refinarias de petróleo, pouco explorados na literatura relacionada. Vale frisar, no entanto, que todas as técnicas discutidas neste trabalho são aplicáveis a qualquer outro problema de interesse, bastando substituir a composição global da nafta pela da mistura fluida em questão.

Os cálculos das propriedades das fases líquida e vapor exigem o conhecimento de suas composições em termos das espécies químicas listadas na Tabela 4.1. Estas composições foram calculadas para  $P$  e  $T$  locais a partir das *constantes de equilíbrio* de cada componente, em conjunto com a solução da conhecida *equação de Rachford e Rice*. A dependência das constantes de equilíbrio com as composições do vapor e do líquido foi rigorosamente considerada, calculando-se as mesmas como a razão entre os *coeficientes de fugacidade* destas fases. A determinação de tais coeficientes foi baseada na equação de estado cúbica de Peng-Robinson. Os *parâmetros de interação* que compõem esta equação são frequentemente aproximados como nulos para pares de hidrocarbonetos. Tal suposição foi adotada neste trabalho, uma vez que a nafta considerada é composta somente por hidrocarbonetos (REID *et al.*, 1987; RIAZI, 2005).

O cálculo da entalpia de cada fase foi dividido em duas etapas. Na primeira, as frações molares das espécies químicas foram utilizadas em conjunto com suas expressões de *calor específico no estado de gás ideal*, obtendo-se aí a entalpia da fase

considerada no estado de gás ideal. Este resultado foi somado à *entalpia residual* da fase, também calculada em conjunto com a equação de estado de Peng-Robinson, passando-se assim do estado de gás ideal para o estado real.

A massa específica da fase vapor foi obtida a partir de seu *fator de compressibilidade*, o qual resulta diretamente da equação de estado de Peng-Robinson. Já a massa específica da fase líquida e as viscosidades das duas fases, bem como a tensão superficial entre as mesmas, foram todas calculadas por métodos apresentados por DAUBERT e DANNER (1997) e RIAZI (2005) para frações de petróleo de composição química definida.

É importante salientar que a aproximação de equilíbrio termodinâmico para fins de cálculo das propriedades foi introduzida com o objetivo de preencher uma lacuna de informação, representada pelas composições químicas das duas fases como função da posição axial. No máximo nível de rigor, tal deficiência seria sanada pela inclusão, nos modelos de escoamento bifásico, das *equações da continuidade para espécies químicas* (BIRD *et al.*, 2002; GHIAASIAAN, 2008). Isto aumentaria sobremaneira a complexidade do problema, e não foi tentado com os modelos unidimensionais de interesse nos trabalhos pesquisados na literatura.

Neste contexto, convém destacar, particularmente, que a fração vaporizada obtida da equação de Rachford e Rice cumpre apenas um papel intermediário na estimativa das composições químicas e não corresponde ao real valor da razão entre os fluxos mássicos previstos pelos modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux*. O motivo para isto é que o modelo obtido para  $\Gamma_v$  não obriga que a transferência de massa siga as relações de equilíbrio de fases. Caso isto fosse arbitrado, seria necessário flexibilizar a modelagem de algum outro termo do balanço interfacial de energia.

## 4.10 Considerações Finais

Este capítulo apresentou e discutiu toda a modelagem constitutiva utilizada no presente trabalho para resolver as equações médias de conservação do escoamento bifásico.

Ficou evidente que o alto número de equações complementares exigidas somente pelo Modelo de Dois Fluidos, bem como o nível de detalhe modelado pelas mesmas, tornam esta abordagem significativamente mais complexa que o Modelo de Mistura.

Que boa parte da modelagem apresentada tenha sido obtida ou adaptada a partir do código RELAP5 (ISL, 2001a,b) não surpreende. Julgando pela frequência com que o mesmo é referenciado na literatura, pode-se afirmar com segurança que este simulador encontra-se atualmente entre as aplicações mais consolidadas de modelos médios unidimensionais do escoamento bifásico.

O próximo capítulo é dedicado à solução numérica acurada e eficiente dos mo-



delos de interesse.

# Capítulo 5

## Aprimoramento da Simulação Numérica do Escoamento Bifásico Unidimensional

De acordo com o Capítulo 3, todos os modelos atualmente disponíveis e computacionalmente viáveis para a simulação de escoamentos bifásicos, desde os mais simples (correlações empíricas) até os mais avançados (Modelos de Dois Fluidos e de Mistura), são compostos por equações diferenciais representando balanços de massa, quantidade de movimento e energia.

Este capítulo apresenta a primeira contribuição do presente trabalho baseada na solução (e não no desenvolvimento) das respectivas equações unidimensionais, a qual consiste na aplicação de uma estratégia numérica alternativa. Apresenta-se, antes da mesma, uma breve revisão dos métodos numéricos mais utilizados na literatura atual. Estes também foram implementados no código desenvolvido com o propósito de demonstrar objetivamente as vantagens esperadas da proposta deste capítulo, como é analisado a seguir.

### 5.1 Integração do Gradiente de Pressão “Homogêneo” Permanente

O Capítulo 3 referenciou e discutiu correlações empíricas e modelos mecanísticos que fornecem o gradiente de pressão,  $dP/dx$ , para escoamentos bifásicos em estado estacionário. Uma vez selecionado o método ou correlação, o cômputo da variação de pressão axial exige sua integração ao longo de todo o comprimento  $L$  da tubulação:

$$\Delta P = \int_0^L \left( \frac{dP}{dx} \right) dx \quad (5.1)$$

O gradiente de pressão  $dP/dx$  é função de variáveis como propriedades físicas e velocidades superficiais das fases, as quais variam com a pressão (a menos que simplificações em casos particulares permitam supor o contrário). Como a pressão varia com  $x$ , o mesmo ocorre com  $dP/dx$ , e métodos numéricos são então necessários para o cômputo rigoroso da integral na Equação 5.1, mesmo em escoamentos isotérmicos.

Entretanto, a situação com que engenheiros tipicamente se deparam ao resolver problemas de escoamento de fluidos é aquela em que a temperatura ao longo da linha também não é conhecida. Vazões e propriedades físicas não podem ser previstas sem um valor de temperatura (consequentemente, nem o gradiente de pressão). Neste caso, a Equação 5.1 deve ser resolvida simultaneamente a um balanço de energia. Conforme mencionado na Seção 3.7.3, a prática mais difundida neste sentido é a consideração de um gradiente de entalpia na forma das Equações 2.31 ou 3.114 (BRILL e MUKHERJEE, 1999; GREGORY e AZIZ, 1978; MOKHATAB e POE, 2012). A solução do problema passa, então, pela integração simultânea de duas equações diferenciais.

Da bibliografia relacionada, depreende-se que a técnica há muito utilizada nestes cálculos é a subdivisão do duto em intervalos menores, no interior dos quais o gradiente de pressão ou as propriedades físicas dos fluidos possam ser aproximados como constantes (BEGGS e BRILL, 1973; BRILL e MUKHERJEE, 1999; GREGORY e AZIZ, 1978; MOKHATAB e POE, 2012). Esta é a essência do procedimento geral que BRILL e MUKHERJEE (1999) denominaram *marching algorithm* (“algoritmo de marcha”). De posse das condições de vazão, pressão e temperatura em uma extremidade da tubulação, subdivide-se-a nos  $m$  referidos subintervalos de comprimento  $\Delta x$  e calculam-se sequencialmente as pressões e temperaturas desconhecidas nas extremidades opostas de cada um. Ao final do cálculo, estarão disponíveis as pressões em ambas as pontas do tubo, e  $\Delta P$  pode finalmente ser calculado.

A Figura 5.1 ilustra o roteiro do cálculo para dado intervalo de comprimento  $\Delta x$ , supondo que as condições a montante do mesmo (índice  $i$ ) já se encontram determinadas, restando o cálculo da pressão e temperatura a jusante (índice  $i + 1$ ). Trata-se de um procedimento duplamente iterativo, onde a sequência de cálculo para cada pressão estimada exige outra iteração na temperatura. Em escoamentos bifásicos, a expressão *Cálculos PVT* na figura engloba a determinação da transferência de massa entre as fases, bem como de suas propriedades físicas e termodinâmicas (massas específicas, viscosidades, tensão superficial e entalpias) à pressão e temperatura médias do intervalo. Convém destacar que o procedimento ilustrado torna-se triplamente iterativo se esta etapa termodinâmica também o for.

MOKHATAB e POE (2012) recomendam explicitamente o Método da Substituição Sucessiva no refinamento das pressões e temperaturas a cada iteração.

Vale frisar que variantes deste procedimento geral podem ser encontradas na

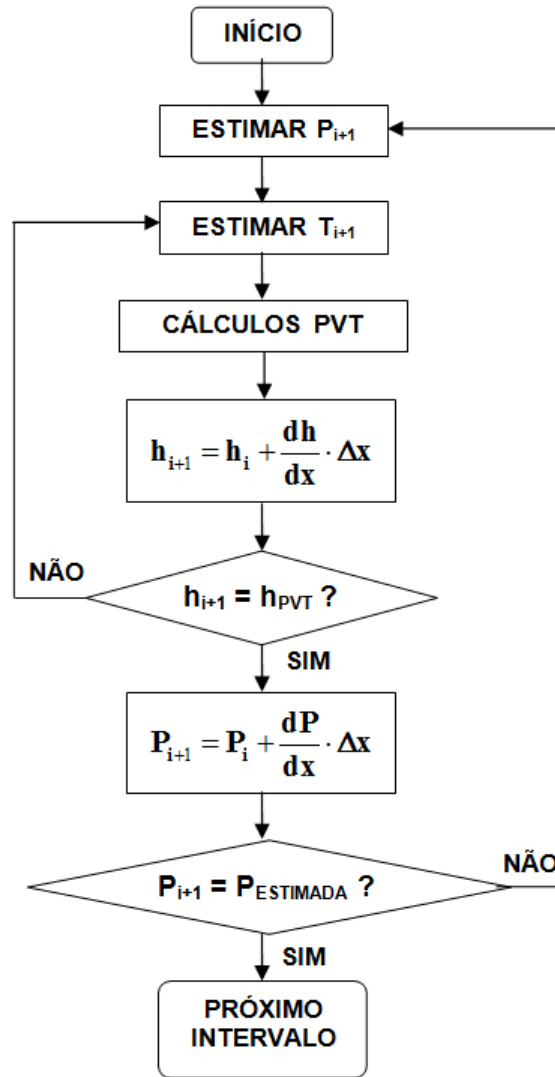


Figura 5.1: Fluxograma do *marching algorithm* para cada subintervalo da tubulação.

literatura. Ao recomendar esta metodologia para escoamentos monofásicos de gás natural, KELKAR (2008) argumenta que é preferível trabalhar com curtos incrementos de pressão em vez de comprimento, embora o balanço de energia não tenha sido incluído nesta discussão. Já MOKHATAB e POE (2012) recomendam iterar na temperatura em um laço externo, e na pressão em outro interno, o que justificam alegando menor esforço computacional. O método básico de “marchar” pela tubulação, entretanto, é utilizado em todos estes casos.

Tanto BRILL e MUKHERJEE (1999) quanto MOKHATAB e POE (2012) indicam cálculos de *flash* para o cômputo da transferência de massa entre as fases, pressupondo-se aí que ambas encontram-se sempre em equilíbrio termodinâmico. Dos balanços macroscópicos de massa apresentados por BIRD *et al.* (2002), ou do balanço material escrito por BRASIL (2004), deduz-se que, em estado estacionário e na ausência de reações químicas, as vazões mássicas de todas as espécies químicas

presentes permanecem as mesmas ao longo da tubulação. Isto implica que a vazão mássica total independe da posição axial (como já foi verificado anteriormente) e, mais importante ainda, que a composição química global da mistura bifásica também não varia com  $x$ . Então, para dadas  $P(x)$  e  $T(x)$ , o cálculo do *flash* sobre a composição global conhecida resulta na fração mássica vaporizada local, possibilitando a determinação local das vazões mássicas e composições químicas das fases e, por conseguinte, das diversas propriedades físicas necessárias mediante a aplicação dos métodos termodinâmicos pertinentes.

## 5.2 As Equações Médias e o Método dos Volumes Finitos

Qualquer simulação CFD passa primeiramente pela decomposição da região espacial fluida em pequenos blocos adjacentes. As equações diferenciais que regem o problema são então convertidas em formas algébricas aplicáveis a cada célula. A solução do sistema formado por estas equações resulta em distribuições *discretas* de velocidades, pressões, temperaturas e demais propriedades de interesse. Diz-se, então, que as equações diferenciais originais foram *discretizadas* (YEOH e TU, 2010; YEOH *et al.*, 2014).

Embora diversos métodos de discretização sejam citados na literatura (*diferenças finitas* e *elementos finitos* são dois exemplos), verifica-se que o *método dos volumes finitos* é o mais explorado no presente contexto, inclusive no desenvolvimento dos *softwares* de CFD que lideram este mercado (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

As obras que desenvolvem as definições e métodos numéricos aplicáveis ao roteiro brevemente descrito (PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007) adotam a Equação 2.3 como ponto de partida, proporcionando resultados diretamente aplicáveis a escoamentos monofásicos. Verifica-se, entretanto, que a mesma abordagem vem sendo adotada na solução de problemas multifásicos. YEOH e TU (2010) e PROSPERETTI e TRYGGVASON (2007) aplicaram a discretização por volumes finitos às equações dos Modelos de Dois Fluidos e de Mistura. MORALES-RUIZ *et al.* (2012) e TALEBI *et al.* (2012) seguiram a mesma linha na discretização de ambos os modelos e resolveram o sistema de equações resultante por técnicas numéricas iterativas *semi-implícitas*, conforme a prática já consolidada para escoamentos monofásicos e discutida pelos demais autores para escoamentos multifásicos.

Dado o panorama apresentado, nesta seção são revisados de forma breve os principais aspectos relacionados à discretização por volumes finitos e à solução do sistema de equações resultante, enfatizando as definições compartilhadas por escoamentos

mono e bifásicos e as estratégias aplicadas ao presente trabalho.

### 5.2.1 Discretização

De acordo com SCHÄFER (2006), a aplicação da técnica dos volumes finitos passa pela subdivisão do domínio espacial do problema em diversos volumes de controle, seguida da aplicação, a cada célula, dos balanços em forma integral. O mesmo autor lembra que tais balanços já foram obtidos quando da aplicação dos princípios de conservação (vide Equação 3.4), mas ressalta que os mesmos também podem ser deduzidos via integração das correspondentes equações diferenciais.

A integração no tempo para cada volume também é necessária em cálculos transientes, de modo que as equações resultantes apresentam integrais e derivadas no tempo e no espaço. Estimativas sobre a variação temporal e espacial das grandezas envolvidas permitem aproximar estes termos e finalizar o processo de discretização (PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

A Figura 5.2 ilustra uma malha unidimensional aplicável a escoamentos por tubulações. O domínio fluido foi subdividido em  $NV$  volumes de controle, e os balanços integrais precisam ser aplicados a cada um deles. As células (ou, mais especificamente, os *pontos nodais* envolvidos pelas mesmas) são numeradas de 1 a  $NV$ , e suas *faces*, de 1 a  $NV + 1$ . No desenvolvimento da discretização para o volume  $i$ , tornou-se comum sua designação pela letra maiúscula  $P$ , e a de seus vizinhos (índices  $i - 1$  e  $i + 1$ ) por  $W$  e  $E$  (em alusão às palavras da língua inglesa *west* e *east*). Identificação análoga é adotada para as faces do volume  $i$ , costumeiramente referenciadas pelas letras minúsculas  $\bar{w}$  e  $\bar{e}$  (PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007). As barras superiores aqui introduzidas evitam confusão entre os índices de faces e os de pontos nodais.

O processo de discretização resulta em equações algébricas cujas incógnitas são os valores das variáveis dependentes nos pontos nodais. À medida que  $NV$  aumenta, estes pontos ficam mais próximos, as variações das incógnitas entre volumes vizinhos se reduzem, e os detalhes dos perfis de variação aproximados entre tais posições perdem importância. Assim, espera-se que para maiores valores de  $NV$ , os resultados das equações discretizadas se aproximem das soluções exatas das equações diferenciais originais (PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

Em estado estacionário, a integração sobre o volume  $i$  do termo advectivo da Equação 3.107 fornece:

$$\int_{\bar{w}}^{\bar{e}} \left[ \frac{\partial (\rho_m v_m h_m)}{\partial x} \right] dx = [\rho_m v_m h_m]_{\bar{e}} - [\rho_m v_m h_m]_{\bar{w}} \quad (5.2)$$

A entalpia  $h_m$  somente é calculada nos pontos nodais, mas seus valores nas faces

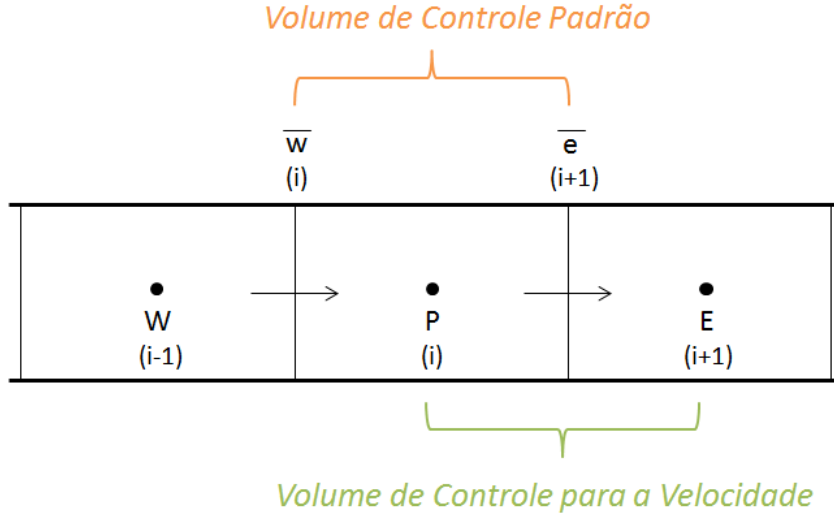


Figura 5.2: Malha unidimensional para aplicação do Método dos Volumes Finitos.

da célula considerada é que aparecem no resultado da integração. Isto requer a introdução de distribuições aproximadas em função das incógnitas do problema, conforme mencionado. O emprego da interpolação linear para a face  $\bar{w}$  (índice  $i$ ) resulta em:

$$h_{m[F(i)]} = \left( \frac{x_{F(i)} - x_{V(i-1)}}{x_{V(i)} - x_{V(i-1)}} \right) h_{m[(i)]} + \left[ 1 - \left( \frac{x_{F(i)} - x_{V(i-1)}}{x_{V(i)} - x_{V(i-1)}} \right) \right] h_{m[(i-1)]} \quad (5.3)$$

em que os índices  $F(i)$  e  $V(i)$  destacam valores referentes às faces e pontos nodais de índice  $i$ , respectivamente. O índice  $V$  foi omitido na entalpia porque somente seus valores em pontos nodais compõem o problema (apenas sua ocorrência nas faces foi explicitamente indicada).

Expansões em séries de Taylor mostram que esta estimativa por interpolação linear, mais conhecida como aproximação por *diferenças centrais*, possui *erro de truncamento* de segunda ordem (SCHÄFER, 2006). Sua utilização no termo advectivo pode levar à obtenção de resultados fisicamente impossíveis, acarretando no pior dos casos a divergência de métodos numéricos na etapa de solução das equações discretizadas (PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

Os problemas acima podem ser evitados se a aproximação por diferenças centrais for substituída pela técnica *upwind*. Ao contrário da anterior, esta abordagem leva em consideração a direção do escoamento, aproximando sempre uma variável dependente sobre uma face pelo valor do ponto nodal a montante. Matematicamente,

isto implica (PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007):

$$[\rho_m v_m h_m]_{\bar{e}} - [\rho_m v_m h_m]_{\bar{w}} \approx \{\text{MAX}[(\rho_m v_m)_{\bar{e}}; 0] + \text{MAX}[-(\rho_m v_m)_{\bar{w}}; 0]\} h_{m(P)} - \text{MAX}[-(\rho_m v_m)_{\bar{e}}; 0] h_{m(E)} - \text{MAX}[(\rho_m v_m)_{\bar{w}}; 0] h_{m(W)} \quad (5.4)$$

em que o operador  $\text{MAX}[a; b]$  retorna o maior valor dentre  $a$  e  $b$ . Segundo VERSTEEG e MALALASEKERA (2007), demonstra-se através de expansões em séries de Taylor que a técnica *upwind* é de primeira ordem. Embora MORALES-RUIZ *et al.* (2012), TALEBI *et al.* (2012) e ZOU *et al.* (2016a) tenham utilizado esta abordagem na solução dos Modelos de Dois Fluidos e de Mistura, ressalta-se que diversas outras alternativas de discretização são discutidas na literatura (PATANKAR, 1980; SCHÄFER, 2006; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

Em uma simulação transiente, a aplicação do método dos volumes finitos ao calor trocado através da parede na Equação 3.96 pode partir de:

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{\bar{w}}^{\bar{e}} Q_{mw} dx \right] dt = [x_{\bar{e}} - x_{\bar{w}}] \int_t^{t+\Delta t} \overline{Q_{mw}} dt \quad (5.5)$$

em que  $\Delta t$  é o *passo de integração* no tempo e  $\overline{Q_{mw}}$  é o valor médio de  $Q_{mw}$  no volume  $i$ . Em malhas suficientemente refinadas, o mesmo pode ser razoavelmente aproximado por:

$$\overline{Q_{mw}} = \frac{4U}{d} (T_{\text{viz}} - T_P) \quad (5.6)$$

se for suposto, para fins de cálculo da transferência de calor, que a temperatura do escoamento ao longo do volume  $i$  não difere muito de  $T_i$ .

A Equação 5.6 deve ser substituída em 5.5 junto com uma aproximação para a variação de  $T_i$  com o tempo. PATANKAR (1980) e VERSTEEG e MALALASEKERA (2007) introduzem um fator de ponderação  $\kappa_t$  ( $0 \leq \kappa_t \leq 1$ ) e propõem:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} T_i dt = \Delta t [\kappa_t T_i^n + (1 - \kappa_t) T_i^{n-1}] \quad (5.7)$$

em que  $t_n = t_0 + n\Delta t$  e  $T_i^n = T_i(t_n)$ .

Para avançar no tempo, PATANKAR (1980) propõe que, uma vez conhecidos  $T_i^{n-1}$ , calculem-se  $T_i^n$ , e assim sucessivamente - tarefa cuja complexidade depende do  $\kappa_t$  adotado. Os esquemas *explícito* e *implícito* caracterizam-se por  $\kappa_t = 0$  e  $\kappa_t \neq 0$ , respectivamente. A abordagem de *Crank-Nicolson* corresponde a  $\kappa_t = 1/2$ . De todas as possibilidades, somente o método *totalmente implícito* ( $\kappa_t = 1$ ) garante a obtenção de resultados fisicamente plausíveis sem impor restrições à malha ou ao passo no tempo (PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).



Na apresentação do método *upwind*, não foram discutidas aproximações para as velocidades nas faces das células em função de seus valores nodais, embora elas apareçam na Equação 5.4. Na verdade, se o problema for montado em função das velocidades desconhecidas nos pontos nodais da Figura 5.2, a discretização resultante para o gradiente de pressão na equação do movimento pode admitir distribuições oscilatórias para o campo de pressões - comportamento inválido do ponto de vista físico. O mesmo pode ocorrer com as componentes da velocidade na discretização da equação da continuidade. Isto é evitado pelo cálculo das velocidades nas faces dos volumes, e não nos pontos nodais. Em outras palavras, as velocidades são calculadas em uma malha diferente, *deslocada* (*staggered grid*) em relação à adotada para as demais variáveis dependentes escalares. Naturalmente, a discretização da equação do movimento exigirá a integração de um ponto nodal a outro, e não mais de uma face para a seguinte (PATANKAR, 1980; PROSPERETTI e TRYGGVASON, 2007; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007):

$$\int_P^E \left[ \frac{\partial P}{\partial x} \right] dx = P_E - P_P \quad (5.8)$$

TALEBI *et al.* (2012), MORALES-RUIZ *et al.* (2012) e ZOU *et al.* (2016a,b) empregaram malhas deslocadas na solução dos Modelos de Mistura e de Dois Fluidos unidimensionais.

## 5.2.2 Solução das Equações Discretizadas

Embora tenha se baseado em exemplos envolvendo apenas a entalpia ou a temperatura, a discussão anterior é válida para qualquer variável intensiva representada por  $\psi$  na Equação 2.2. A aplicação das técnicas de discretização descritas aos balanços integrais de todas as células da malha (com a devida incorporação das condições de contorno nos volumes fronteiros) transforma cada um deles em sistemas de equações representadas pela seguinte forma geral (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007):

$$a_P \psi_P = \sum a_{nb} \psi_{nb} + b \quad (5.9)$$

em que  $b$  é um termo independente e o índice  $nb$  representa os pontos nodais vizinhos ao volume considerado. PATANKAR (1980) destaca que os coeficientes  $a$  e  $b$  desta equação algébrica “linear” podem ser funções da distribuição de  $\psi$ . Nesta situação, este autor indica a combinação de um esquema iterativo de substituição sucessiva com métodos para solução de sistemas lineares: a partir de uma estimativa inicial da distribuição de  $\psi$ , calcula-se os coeficientes e resolve-se o sistema de equações algébricas “lineares” para obter valores melhorados das incógnitas, que são utilizados na atualização dos coeficientes, e assim sucessivamente, até atingir-se convergência.

Em tese, como lembram PROSPERETTI e TRYGGVASON (2007), a solução das Equações 5.9 seria tarefa para métodos numéricos aplicáveis a sistemas não-lineares, como a técnica iterativa de *Newton-Raphson*. Na prática, conforme ressaltado pelos mesmos autores, limitações computacionais de tempo e armazenamento inviabilizam “ataques frontais” desta natureza, justificando a busca por métodos segregados.

Ao aplicar a técnica dos volumes finitos ao Modelo de Dois Fluidos, PROSPERETTI e TRYGGVASON (2007) propuseram a solução das equações discretizadas por adaptações do algoritmo iterativo dito *semi-implícito* SIMPLE ou suas variantes SIMPLIC ou PISO, consolidados para escoamentos monofásicos (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007). Tratam-se, essencialmente, de técnicas de substituição sucessiva em que os sistemas de equações da forma 5.9 são resolvidos de maneira sequencial em cada iteração - motivo pelo qual são classificados por PROSPERETTI e TRYGGVASON (2007) como algoritmos *segregados*. Segundo estes mesmos autores, as técnicas segregadas mostram-se adequadas para a solução de fenômenos de longa duração como os encontrados em tubulações. Adicionalmente, o fato de os diversos sistemas serem resolvidos de forma sequencial facilita a modificação dos códigos computacionais para a inclusão de novos efeitos, como a turbulência.

O emprego do algoritmo SIMPLE à solução do Modelo de Mistura discretizado, por sua vez, é discutido por YEOH e TU (2010). Mais recentemente, esta abordagem foi novamente classificada como “segregada” por MOUKALLED *et al.* (2016).

Embora o método dos volumes finitos possa ser diretamente aplicado na discretização de determinados termos de escoamentos bifásicos, verifica-se que outras contribuições requerem atenção especial. No caso do Modelo de Dois Fluidos, YEOH e TU (2010) destacam o desenvolvimento de abordagens totalmente explícitas e parcial ou totalmente implícitas para os termos fonte interfaciais, visando favorecer a convergência dos procedimentos numéricos. Neste sentido, são apresentados os métodos de discretização PEA e SINCE (siglas de *Partial Elimination Algorithm* e *Simultaneous solution of Non-Linearly Coupled Equations*, respectivamente). PROSPERETTI e TRYGGVASON (2007) também comentam estas técnicas e ainda apresentam, para a solução do Modelo de Dois Fluidos discretizado, o algoritmo IPSA (*Inter-Phase Slip Algorithm*). De acordo com YEOH e TU (2010), é possível demonstrar que o IPSA consiste em uma simples extensão do método SIMPLE.

Tanto TALEBI *et al.* (2012) quanto MORALES-RUIZ *et al.* (2012) utilizaram métodos numéricos semi-implícitos na solução de seus Modelos de Mistura e de Dois Fluidos discretizados. Os autores do segundo trabalho afirmam ter empregado um “método semi-implícito semelhante ao SIMPLE”. ZOU *et al.* (2016a,b) inovaram nesta etapa, tendo recorrido ao método JFNK (*Jacobian-free Newton-Krylov*) para

resolver o sistema não-linear de equações discretizadas do escoamento bifásico.

### 5.2.3 Aplicação ao Modelo *Drift-Flux* 1D Estacionário

Na próxima seção é proposta uma abordagem numérica diferente das apresentadas até este ponto, buscando ganhos de eficiência e acurácia. Logicamente, a melhor forma de avaliar seu grau de sucesso quanto a estes quesitos consiste na comparação de seu desempenho com o da estratégia atualmente consolidada na literatura, baseada na discretização e solução segregada iterativa das equações diferenciais de balanço.

Visando confrontar objetivamente ambos os métodos, aplicou-se a discretização por volumes finitos ao Modelo de Mistura apresentado na Seção 3.6.3 em estado estacionário (simulações transientes são discutidas no Capítulo 7).

Seguindo a discussão anterior, as velocidades desconhecidas foram armazenadas em uma malha deslocada em relação à das demais variáveis dependentes, e todos os termos advectivos foram tratados de acordo com a técnica *upwind*.

Sempre que o resultado da integração sobre um volume de controle exigiu valores de face para variáveis armazenadas em pontos nodais, os mesmos foram aproximados por interpolação linear. A estratégia indicada pelas Equações 5.5 e 5.6, de tomar as condições em dado ponto nodal como representativas de toda a célula, foi aplicada à taxa de troca térmica com a parede,  $Q_{mw}$ , e também ao termo de transferência de massa  $\Gamma_v$ .

O problema de interesse aqui é aquele em que as condições a montante do duto estudado (temperatura, pressão, vazões, etc. em  $x = 0$ ) são previamente conhecidas, adentrando a formulação matemática sob a forma de condições de contorno. A geração da malha foi programada de modo a subdividir o domínio unidimensional em uma quantidade ajustável  $NV$  de volumes de controle, posicionando primeiro suas faces e depois, os pontos nodais nos respectivos centros geométricos. Esta prática facilita a incorporação das condições de contorno pelas equações discretizadas na célula de entrada do tubo (PATANKAR, 1980).

Dentre os diversos métodos de tratamento do *acoplamento pressão-velocidade* descritos na literatura, escolheu-se o algoritmo SIMPLER para fazer a solução iterativa segregada das equações discretizadas. Originalmente desenvolvido com o propósito de aprimorar a velocidade de convergência de seu precursor SIMPLE, o SIMPLER também já se mostrou tão eficiente quanto os algoritmos SIMPLEC e PISO. Este método também dispensa a *sub-relaxação* das *correções da pressão* calculadas, uma vez que resolve uma *Equação da Pressão* mais eficaz para obter uma distribuição de pressões melhorada. Entretanto, uma vez que os valores das correções da pressão também são necessários nas *Fórmulas de Correção da Veloci-*

dade, a *Equação da Correção da Pressão* ainda precisa ser resolvida em cada iteração do SIMPLER (PATANKAR, 1980; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

A Figura 5.3 ilustra a sequência de cálculo do algoritmo SIMPLER conforme programado no presente trabalho. Tratam-se dos mesmos passos enumerados por PATANKAR (1980) e VERSTEEG e MALALASEKERA (2007) até a correção do campo de velocidades. As equações da energia da mistura e da continuidade da fase vapor são resolvidas na etapa dedicada por estas referências às “equações de transporte adicionais” discretizadas. Os valores das entalpias, massas específicas, viscosidades e tensão superficial são atualizados em todos os pontos nodais ao final de cada iteração utilizando-se as novas condições locais de pressão e temperatura. Este último passo é precedido por  $NV$  soluções da Equação 3.97 para a temperatura, dado que a solução da equação da energia resulta na distribuição de  $h_m$ .

A discretização de cada equação diferencial de balanço resultou em um sistema *tri-diagonal* de equações algébricas, o qual foi resolvido na etapa correspondente do SIMPLER por meio do método *Tri-Diagonal Matrix Algorithm* ou TDMA (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

O processo iterativo desta implementação do SIMPLER somente é interrompido quando as mudanças relativas nas *variáveis primárias* do problema ( $P$ ,  $\alpha_v$ ,  $\rho_m$ ,  $v_m$ ,  $h_m$  e  $T$ ) entre duas passagens consecutivas caem abaixo de uma tolerância estabelecida.

## 5.3 Abordagem Algébrico-Diferencial

Esta seção propõe, com as devidas justificativas, um método alternativo para a solução numérica do *Problema de Valor Inicial* formado pelas equações unidimensionais de balanço do escoamento bifásico e as condições conhecidas a montante do duto de interesse.

Somente o estado estacionário é analisado neste primeiro momento. A extensão da proposta para simulações transientes é tema do Capítulo 7.

### 5.3.1 O Método BDF

Sistemas compostos por um misto de equações diferenciais e algébricas, os quais surgem em muitas aplicações e apresentam dificuldades adicionais de solução numérica em relação às *Equações Diferenciais Ordinárias* (EDOs), são objeto de intenso esforço de pesquisa sob a denominação de *Sistemas de Equações Algébrico-Diferenciais* ou DAEs (abreviação frequente para a correspondente expressão inglesa *Differential-Algebraic Equations*). A forma geral mais abrangente de tais sistemas é (BRENAN

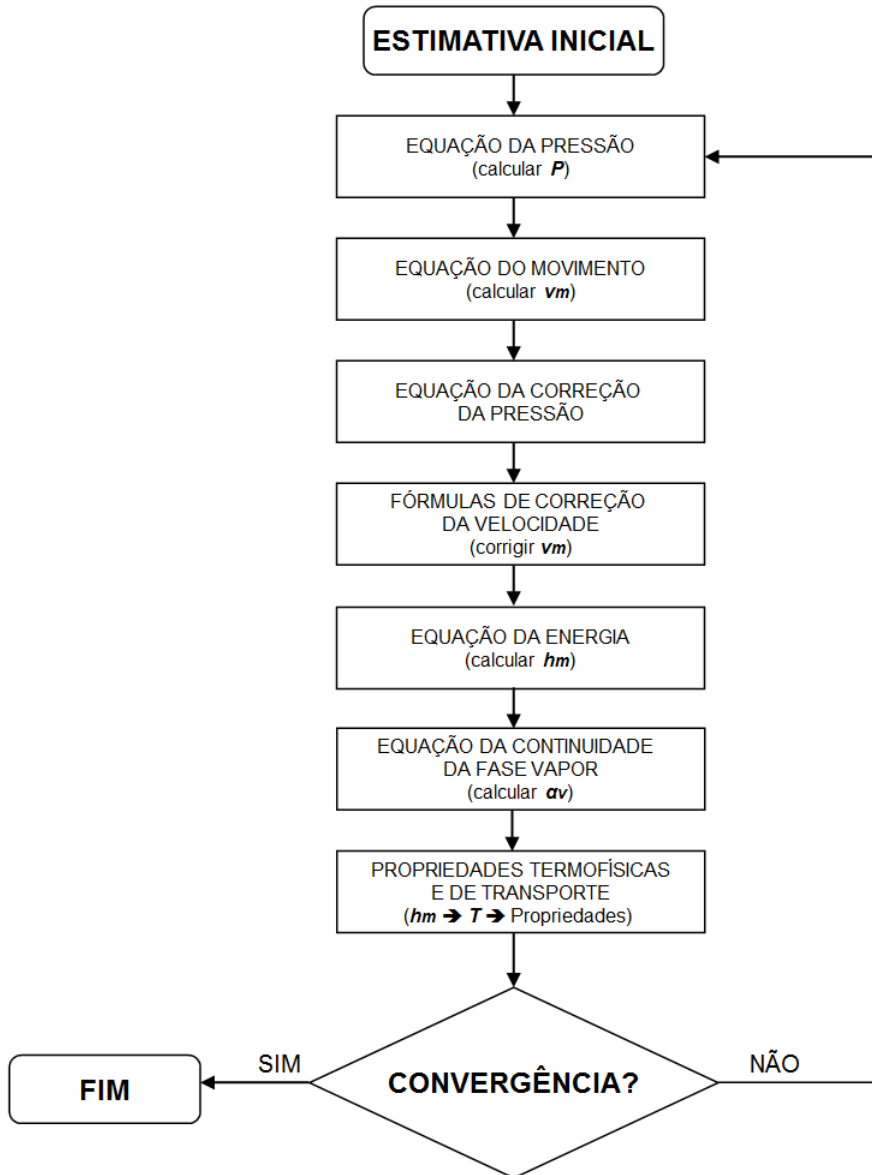


Figura 5.3: Fluxograma do algoritmo SIMPLER conforme programado.

*et al.*, 1996; KUNKEL e MEHRMANN, 2006; LAMOUR *et al.*, 2013):

$$\mathbf{F} \left[ x; \mathbf{y}(x); \frac{d\mathbf{y}}{dx} \right] = \mathbf{0} \quad (5.10)$$

Entre as primeiras técnicas utilizadas com sucesso na solução de sistemas DAE, encontra-se o método *multipasso* implícito BDF (*Backward Differentiation Formulas*). A ideia básica deste método, buscando calcular as variáveis dependentes em cada passo  $x_n$ , é a aproximação de cada componente do vetor  $\mathbf{y}(x)$  por polinômios de grau  $k$  passando pelos valores desconhecidos  $\mathbf{y}(x_n)$  (aqui representados por  $\mathbf{y}_n$ ) e por um número  $k$  de pontos anteriores a  $n$  (previamente determinados). Exige-se

então que a derivada de  $\mathbf{P}_k$  (vetor composto pelos referidos polinômios) satisfaça o problema 5.10 em  $x_n$ , isto é (BRENAN *et al.*, 1996; LAMOUR *et al.*, 2013):

$$\mathbf{F}[x_n; \mathbf{y}_n; \mathbf{P}'_k(x_n)] = \mathbf{0} \quad (5.11)$$

Este procedimento resulta, a cada passo, em um sistema de equações (possivelmente não-lineares) em  $\mathbf{y}_n$ , o qual é normalmente resolvido pelo Método de Newton (BRENAN *et al.*, 1996).

Conforme apontado por HAIRER e WANNER (1996) e LAMOUR *et al.* (2013), existem diversas implementações do método BDF para sistemas DAE, dentre as quais a mais utilizada é a DASSL (BRENAN *et al.*, 1996). Sua extensão DASSLC (SECCHI, 2012) foi selecionada para os fins do presente trabalho. Para aplicação nos modelos estudados de escoamento bifásico, interessam particularmente as estimativas de erro de truncamento para ajuste do passo de integração e as altas ordens de acurácia praticadas por estes códigos (quinta ordem é um valor representativo), conforme detalhado a seguir.

### 5.3.2 Análise Comparativa e Avanços Esperados

Em estado estacionário, os modelos unidimensionais de interesse para o escoamento bifásico podem ser trivialmente representados sob a forma padrão 5.10, a qual acomoda tanto as equações diferenciais de balanço quanto as restrições algébricas nas variáveis dependentes do problema (equações constitutivas). Há importantes vantagens a esperar da aplicação da abordagem DAE em substituição aos métodos iterativos baseados em volumes finitos, as quais resultam, em última análise, da existência de uma única variável independente na modelagem analisada.

Destaca-se, primeiramente, que o método BDF resolve todas as equações diferenciais e algébricas de um sistema DAE de forma verdadeiramente simultânea a cada passo de integração. As seções anteriores apontaram que os procedimentos atualmente consolidados de CFD baseiam-se em técnicas segregadas não por impedimentos teóricos, mas sim por limitações de capacidade computacional. Embora este argumento faça sentido quando se consideram geometrias bi ou tridimensionais subdivididas em milhões de volumes de controle, ele não invalida a integração de Problemas de Valor Inicial unidimensionais pelo método BDF, o qual calcula  $\mathbf{y}_n$  pelo Método de Newton de forma individual para cada passo na direção axial, e não para toda a geometria discretizada. Esperam-se, portanto, ganhos de eficiência advindos da solução progressiva e simultânea das equações do escoamento bifásico em comparação com a aplicação dos algoritmos segregados.

A tarefa essencial de equilibrar o custo computacional e a acurácia da solução também pesa a favor da abordagem Algébrico-Diferencial. Enquanto as apro-

ximações introduzidas na discretização por volumes finitos frequentemente possuem baixas ordens de acurácia (e.g., a técnica *upwind* de primeira ordem), ordens maiores podem ser alcançadas por meio do método BDF, o que se traduz em acurácia igual ou superior mediante passos de integração maiores. Verifica-se, pois, que esta diferença se acentua quando se considera a *estabilidade numérica* da solução, dado que este é o principal motivo que leva à preferência pelo método *upwind* em substituição à mais acurada discretização por diferenças centrais (PROSPERETTI e TRYGGVASON, 2007; VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007). Códigos de integração como o DASSL, por outro lado, são capazes de reduzir a ordem do método BDF de forma criteriosa e avançar em passos maiores usando fórmulas mais estáveis, garantindo eficiência quando o critério da estabilidade restringe o passo de integração além do exigido pela tolerância estabelecida para a solução numérica (BRENAN *et al.*, 1996).

Também deve ser enfatizado que, uma vez aplicado dado conjunto de técnicas e aproximações na discretização por volumes finitos, a acurácia da solução obtida dependerá somente da resolução da malha empregada, qualquer que seja o algoritmo selecionado para resolver o sistema de equações discretizadas. Conseqüentemente, os supracitados métodos de baixa ordem irão demandar malhas mais refinadas através de valores altos de  $NV$ , elevando a quantidade de equações discretizadas a resolver. Outro resultado é que, na prática, somente é possível garantir a tolerância desejada através de seguidas simulações com refinamento sucessivo de malha até o ponto em que determinados valores-chave deixem de registrar alterações significativas, quando a solução então é dita *independente de malha* (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007). Integradores DAE, por sua vez, atendem à tolerância estabelecida em uma única simulação mediante estimativas de erros de truncamento seguidas de ajuste do passo de integração à medida que avançam. Este comportamento também garante o emprego de passos mais reduzidos apenas onde necessário, o que exigiria, no método alternativo, o refinamento local da malha entre simulações em substituição ao simples aumento de  $NV$ .

Em que pese o fato de conceitos bastante consolidados basearem a presente discussão, foram encontrados pouquíssimos estudos na literatura que tentassem a solução dos modelos unidimensionais estacionários do escoamento bifásico por técnicas alternativas àquelas baseadas na discretização em volumes finitos. A descoberta mais original neste sentido foram as recomendações apresentadas por GHIA-ASIAAN (2008). Esta referência destaca que, ao contrário dos modelos transientes e/ou multidimensionais, os quais exigem métodos e algoritmos mais sofisticados, as equações de conservação unidimensionais estacionárias são passíveis de solução numérica por pacotes de integração amplamente disponíveis. O método de Runge-Kutta é mencionado, assim como elevadas ordens de integração, passos ajustáveis

e até mesmo o integrador BDF para sistemas DAE denominado LSODI (HIND-MARSH, 1980). Apesar da última citação, o referido autor concentra a discussão somente nas EDOs dos modelos e instrui que os sistemas sejam reformulados para a forma *explícita* antes da integração numérica:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{f}[x; \mathbf{y}(x)] \quad (5.12)$$

A execução deste rearranjo força que as variações espaciais de determinadas propriedades termofísicas sejam expressas em função das derivadas das variáveis de estado, o que se consegue através da aplicação da Regra da Cadeia. Nos exemplos apresentados, são descartados com frequência os termos em que figura a derivada da massa específica da fase líquida  $\rho_l$  com relação à pressão  $P$ . A incompressibilidade de líquidos é, de fato, uma simplificação comum, mas que deve considerar somente os aspectos termodinâmicos envolvidos, sendo inadequada a sua imposição em razão da rearrumação matemática do modelo. Perdas de informação desta natureza e o tempo consumido nesta reformulação estão entre as justificativas apresentadas por BRENAN *et al.* (1996) e VIEIRA e BISCAIA JR (2001) para preferir trabalhar diretamente com a forma 5.10 em vez de reescrever o sistema DAE na forma 5.12.

Felizmente, o que se verifica é que pouquíssima (frequentemente, nenhuma) manipulação algébrica é requerida para programar as equações de determinada aplicação no formato de subrotina padronizada pelos códigos e pacotes de integração numérica mais comuns. No presente trabalho, as equações dos Modelos de Dois Fluidos, de Mistura e “Homogêneo” foram programadas nas respectivas funções de *resíduos* representando o lado esquerdo da Equação 5.10, conforme exigido pelo DASSLC em complemento às condições iniciais (SECCHI, 2012).

### 5.3.3 Tratamento das Descontinuidades dos Modelos

Como já foi mencionado, os modelos matemáticos do escoamento bifásico frequentemente apresentam descontinuidades, as quais normalmente resultam da mudança das equações constitutivas utilizadas quando é prevista uma transição entre padrões de escoamento. Esta característica é amplamente reconhecida na literatura pelas dificuldades numéricas que causa, principalmente no que tange a algoritmos de integração (BRILL, 1989; GHIAASIAAN, 2008; GREGORY e AZIZ, 1978; PETALAS e AZIZ, 2000; ZOU *et al.*, 2016a). A programação computacional desta alternância entre modelos torna-se trivial mediante o emprego de estruturas IF-ELSE em conjunto com as predições de um mapa de regimes de escoamento. Trata-se, contudo, de uma prática desaconselhável, uma vez que as descontinuidades introduzidas nas derivadas de  $\mathbf{F}$  (Equação 5.10) prejudicam seriamente as estimativas numéricas da matriz Jacobiana e do erro, os cálculos do método de Newton e a seleção da ordem e dos



passos a adotar, podendo provocar a falha (terminação precoce) do processo de integração (BRENAN *et al.*, 1996). Verifica-se, portanto, que o tratamento adequado das descontinuidades é de fundamental importância para a aplicação da abordagem Algébrico-Diferencial aos modelos do escoamento bifásico.

O procedimento padrão de reiniciar a integração após uma descontinuidade é mais recomendável quando se utiliza técnicas de *passo simples* como Runge-Kutta em vez de métodos multipasso como o BDF, visto que os últimos precisam reiniciar em ordens baixas - a maioria de suas implementações o faz em primeira ordem (BRENAN *et al.*, 1996).

Propõe-se aqui que a técnica de *regularização* introduzida por VIEIRA e BISCAIA JR (2001) seja aplicada às descontinuidades entre equações constitutivas do escoamento bifásico. Para este efeito, descontinuidades genericamente representadas por:

$$z(\mathbf{X}) = \begin{cases} z_1(\mathbf{X}), & p(\mathbf{X}) \geq p_{max} \\ z_2(\mathbf{X}), & p(\mathbf{X}) < p_{max} \end{cases} \quad (5.13)$$

são substituídas por uma equação única como:

$$z(\mathbf{X}) = \eta(p(\mathbf{X}) - p_{max}; \epsilon) z_1(\mathbf{X}) + [1 - \eta(p(\mathbf{X}) - p_{max}; \epsilon)] z_2(\mathbf{X}) \quad (5.14)$$

em que  $\eta(arg; \epsilon)$  é uma *função de regularização* contínua, calculada no valor  $arg$  e para dado parâmetro característico  $\epsilon$ . Para que a descontinuidade 5.13 seja fielmente reproduzida pela Equação 5.14,  $\eta$  deve ser escolhida de modo que:

$$\eta(arg; \epsilon) = \begin{cases} 1, & arg > +\xi \\ 0, & arg < -\xi \end{cases} \quad (5.15)$$

em que  $0 < \xi \ll 1$ . Quando  $-\xi \leq arg \leq \xi$ ,  $\eta$  assume um valor intermediário entre 0 e 1.  $\xi$  é função do parâmetro  $\epsilon$ , o qual deve ser ajustado ao problema de interesse de modo que o intervalo  $[-\xi, \xi]$ , onde a Equação 5.14 não reproduz 5.13 exatamente, seja reduzido o suficiente para que essas diferenças entre ambas as equações possam ser desprezadas. Este tratamento garante uma transição contínua entre  $z_1(\mathbf{X})$  e  $z_2(\mathbf{X})$  sem alterar perceptivelmente o modelo original.

Uma possível função de regularização é a Equação 3.58a, que foi sugerida no Capítulo 3 como aproximação computacional para a função indicadora de fase. A Figura 5.4 ilustra o ajuste de  $\xi$  pela escolha adequada de  $\epsilon$  nesta função de regularização, a qual foi adotada nos cálculos do presente trabalho.

A aplicação desta estratégia às transições entre padrões de escoamento bifásico passa primeiramente pela definição de *variáveis indicadoras* associadas aos regimes de interesse, as quais assumem o valor de 1 quando é prevista a ocorrência de determinado padrão, e 0 caso contrário. Se o mapa em uso for o de MANDHANE *et al.*

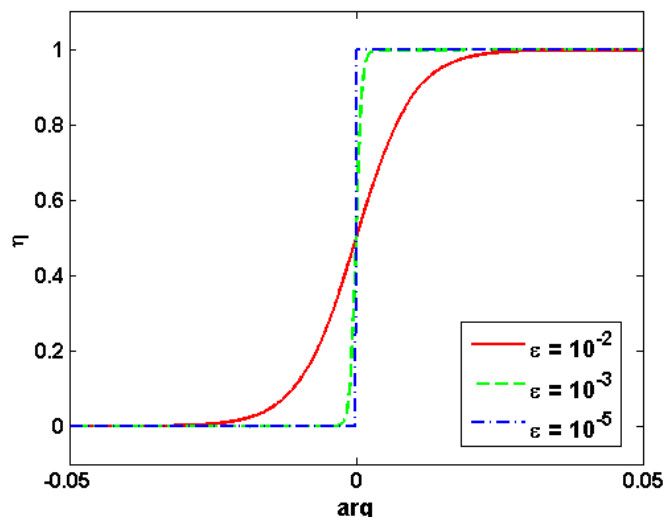


Figura 5.4: Comportamento ajustável da função de regularização  $\eta$ .

(1974) (rever a Figura 3.3), pode-se definir, por exemplo, as variáveis indicadoras  $Eb$  e  $Sl$  para os padrões *Elongated Bubble* e *Slug*. As correlações específicas destes regimes para o parâmetro de distribuição,  $C_0^{Eb}$  e  $C_0^{Sl}$ , podem então ser combinadas em uma única equação:

$$C_0 = EbC_0^{Eb} + SlC_0^{Sl} + \dots \quad (5.16)$$

em que as reticências indicam a existência de termos análogos para os demais padrões.

Uma vez executado este procedimento para todas as demais grandezas cujas equações constitutivas variam com o regime, a eliminação das descontinuidades do modelo passa a ser uma questão de calcular as variáveis indicadoras de forma contínua.

Verifica-se que o código FORTRAN publicado junto com o mapa de MANDHANE *et al.* (1974) faz a previsão dos padrões de escoamento de forma descontínua, uma vez que seus resultados são obtidos de comandos IF que comparam velocidades superficiais com resultados intermediários, alguns dos quais também descontínuos (e.g., Y456).

Com o objetivo de demonstrar na prática os efeitos das descontinuidades numéricas sobre simulações de escoamento bifásico, bem como a eficácia da proposta apresentada, o referido código FORTRAN foi incluído no programa desenvolvido sob duas formas. A primeira corresponde à versão descontínua original. Na segunda, todas as seleções de equações baseadas em comandos IF foram reescritas sob a forma da Equação 5.14, conforme explicado anteriormente, com o resultado que todas as variáveis indicadoras são calculadas de forma contínua.

## 5.4 Motivação Extra: Aplicação Anterior

O estado da arte no que tange ao escoamento bifásico unidimensional é representado pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux*, o que justifica a importância do aprimoramento de sua solução numérica. A análise das contribuições mais recentes à literatura relacionada mostrou haver espaço para isto, como demonstrou a seção anterior.

Em complemento às justificativas teóricas já detalhadas, a expectativa positiva acerca da abordagem Algébrico-Diferencial também encontra respaldo em um trabalho anterior, desenvolvido pelo mesmo autor da presente Tese de Doutorado (TEIXEIRA, 2013). Trata-se de uma Dissertação de Mestrado elaborada com base na correlação empírica de BEGGS e BRILL (1973), cuja integração simultânea com o balanço homogêneo de energia se mostrou, conforme previsto, mais eficiente e acurada pela via Algébrico-Diferencial do que pelo método iterativo recomendado na literatura (neste caso, o já analisado *marching algorithm*).

A referida Dissertação demonstra que a aplicação do *marching algorithm* equivale a resolver as equações diferenciais do problema pelo *Método do Ponto Central Implícito* (ASCHER e PETZOLD, 1998) cuja acurácia é apenas de segunda ordem. Mais focados nos resultados do problema que em suas características numéricas, os livros e artigos que trabalham com esta classe de modelos se limitam a apenas apresentar brevemente este método, sequer analisando aspectos importantes como a possibilidade de variação do passo de integração. As derivadas são aproximadas da forma mais rudimentar possível, e a Figura 5.1 mostra que cada passagem de um laço externo exige toda a iteração nos laços internos.

A corrente de nafta detalhada na Tabela 4.1 foi utilizada em simulações ilustrativas realizadas com o intuito de demonstrar como a eficiência do cálculo é impactada pelas diferenças levantadas entre o *marching algorithm* e a estratégia Algébrico-Diferencial. O emprego do primeiro método com a tubulação subdividida em apenas dois intervalos (uma discretização bastante grosseira) chegou a consumir mais tempo que o método BDF à tolerância relativa de  $10^{-8}$ !

A aplicação da abordagem Algébrico-Diferencial à correlação original de BEGGS e BRILL (1973) terminou em falha sempre que o cenário analisado apresentou transições entre padrões de escoamento, corroborando o efeito deletério das descontinuidades associadas conforme informado pela literatura.

A técnica de regularização descrita anteriormente foi utilizada para expressar os coeficientes empíricos das Tabelas 3.2 e 3.3 como funções contínuas das variáveis que definem os regimes. Analogamente, todos os chaveamentos entre equações passaram a ser executados continuamente, reescrevendo-se da mesma forma os IFs correspondentes. A estratégia funcionou na medida que o método BDF foi capaz então de

integrar os sistemas DAE em todos os níveis estudados de tolerâncias relativas.

No restante deste capítulo, são apresentadas simulações análogas com o objetivo de demonstrar o potencial da abordagem Algébrico-Diferencial proposta frente aos métodos iterativos segregados baseados na discretização por volumes finitos.

## 5.5 Resultados e Discussão

Todas as simulações demonstrativas analisadas nesta seção consideraram uma vazão total de 115000 kg/h da nafta da Tabela 4.1 percorrendo uma tubulação horizontal de 12 m de comprimento,  $d = 7,981$  in,  $D = 8,625$  in e constituída de aço carbono ( $k = 60,5$  W/m/K e  $e = 0,046$  mm).

Simulações preliminares foram realizadas na busca por condições de escoamento propícias para a demonstração das diferenças entre a abordagem Algébrico-Diferencial proposta e a solução iterativa pelo SIMPLER do Modelo *Drift-Flux* discretizado. Dois cenários fictícios mostraram-se suficientes: no Cenário 1, a tubulação encontra-se exposta a condições atmosféricas instáveis (velocidade de vento de 36 km/h e temperatura ambiente de 27°C), ao passo que o Cenário 2 representa uma linha sob forte aquecimento (temperatura de 215°C especificada na superfície externa). Em ambos os casos, as condições de pressão e temperatura a montante valem 485,43 kPa e 163,95°C, para as quais a equação de Rachford e Rice prevê uma fração mássica vaporizada de 0,8%.

### 5.5.1 Esforço Computacional e Acurácia

As simulações preliminares para o Cenário 1 mostraram que o regime de escoamento previsto pelo mapa de MANDHANE *et al.* (1974) em todo  $x$  é de *Elongated Bubble*, dispensando por enquanto a necessidade de regularização.

O primeiro objetivo aqui é comparar as abordagens DAE e de Volumes Finitos pelo critério do custo computacional de uma simulação típica, em que apenas estimativas iniciais grosseiras do campo de escoamento podem ser fornecidas *a priori* para o SIMPLER. Neste sentido, os valores das condições de contorno *upstream* foram utilizados para atribuir distribuições iniciais uniformes a todas as variáveis com exceção da massa específica e velocidade da mistura, as quais foram inicializadas com variações lineares positivas e negativas de 20% entre a entrada e a saída da linha.

A resolução da malha de volumes finitos foi dobrada sucessivamente, de  $NV = 25$  até  $NV = 200$ , entre quatro execuções do algoritmo SIMPLER. Cada uma destas foi precedida por uma simulação usando o DASSLC em que esta malha foi adotada como o conjunto de pontos para reportagem dos resultados, a fim de obterem-se as

soluções por ambos os métodos nas mesmas posições axiais. As tolerâncias relativa e absoluta utilizadas nestas integrações de sistemas DAE foram de  $10^{-6}$  e  $10^{-9}$ , respectivamente.

A visualização das distribuições axiais calculadas para diversas variáveis (ver, por exemplo, as Figuras 5.5 e 5.6) evidencia que ambos os métodos numéricos chegaram à mesma solução, o que também assegura a correta programação computacional. A perda de calor para as vizinhanças provoca a condensação da fase vapor, reduzindo sua fração volumétrica no escoamento e tornando a mistura bifásica mais densa. Isto se reflete na queda progressiva da velocidade da mistura, uma vez que, em estado estacionário, sua vazão mássica não varia com a posição axial.

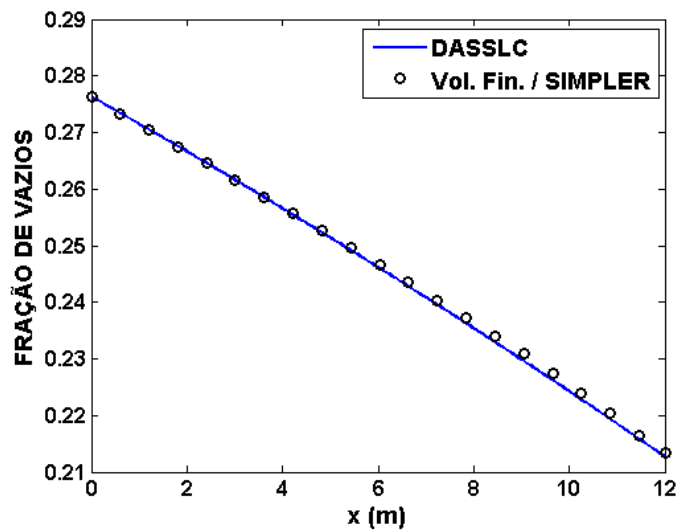


Figura 5.5: Soluções numéricas obtidas para a fração de vazios pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 200$ ), Cenário 1.

O critério adotado como “medida” do esforço computacional foi o tempo de execução aferido com os comandos *tic* e *toc* do MATLAB em um computador equipado com 8 GB de RAM e processador i7 (2,20 GHz). Os resultados são apresentados pela Tabela 5.1 juntamente a outras estatísticas associadas.

Tabela 5.1: Resultados de custo computacional para o Cenário 1.

$NV$	DASSLC	SIMPLER		
	Tempo (s)	Tempo (s)	Iterações	Tempo Médio por Iteração (s)
25	1,05	7,25	6	1,21
50	1,11	17,40	8	2,18
100	1,12	50,79	11	4,62
200	1,19	101,5	9	11,28

Os resultados de esforço computacional indicam que a integração do sistema

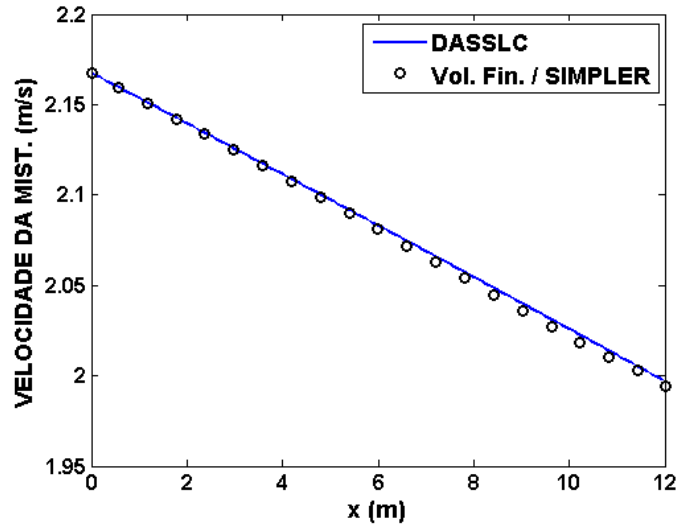


Figura 5.6: Soluções numéricas obtidas para a velocidade da mistura bifásica pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 200$ ), Cenário 1.

DAE com o DASSLC é altamente vantajosa na comparação com a abordagem semi-implícita baseada em volumes finitos, uma vez que a primeira necessitou de no máximo 15% do tempo da segunda (e de 1,2% no melhor dos casos) para retornar a solução numérica nos mesmos valores de  $x$ . A estratégia Algébrico-Diferencial também se mostrou mais rápida que uma iteração média do algoritmo SIMPLER até mesmo com a malha inicial mais grosseira. Neste contexto, é interessante observar como o tempo médio por iteração do SIMPLER aumenta com o refinamento da malha. Isto já era esperado, uma vez que maiores valores de  $NV$  implicam dimensões mais altas dos sistemas tri-diagonais de equações algébricas, assim como maior quantidade de cálculos das propriedades termofísicas e de transporte.

As diferenças de tempo observadas entre ambos os métodos tornam-se ainda mais importantes quando se considera a necessidade de testes de convergência para malhas de volumes finitos. Conforme já foi analisado, os tempos listados na Tabela 5.1 para o DASSLC já incluem cálculos para ajuste dos passos de integração de modo a atender as tolerâncias especificadas. O mesmo não se pode afirmar a respeito do SIMPLER. Na indisponibilidade de uma solução analítica, uma busca sistemática pela independência de malha exigiria no mínimo mais uma simulação via volumes finitos com uma malha mais exigente, o que significa que os recursos computacionais consumidos por este método são na prática ainda maiores que os tempos tabelados para o algoritmo SIMPLER.

Se uma malha bastante fina fosse utilizada para gerar uma solução-referência contra a qual comparar aquelas obtidas com menos volumes de controle, as taxas de convergência observadas poderiam ajudar a otimizar a busca pelo  $NV$  ideal. No entanto, como indica a Tabela 5.1, isto ainda exigiria considerável esforço compu-

tacional a mais que o DASSLC. Vale destacar também que as baixas ordens de acurácia associadas à discretização por volumes finitos provavelmente se refletiriam em taxas de convergência igualmente reduzidas.

Visando confirmar estas expectativas, os resultados obtidos para o Cenário 1 também foram utilizados para estudar o comportamento dos erros de truncamento introduzidos pela discretização em volumes finitos com os níveis de resolução de malha considerados. As distribuições axiais calculadas pelo DASSLC foram tomadas como soluções-referência, dadas as reduzidas tolerâncias impostas.

O erro de truncamento associado a dada fórmula pode ser calculado através da substituição de valores exatos. Partindo-se deste princípio, os cálculos do DASSLC também cumpriram, neste segundo momento, o papel de estimativas iniciais para o algoritmo SIMPLER, o qual, como esperado, acusou convergência sempre após a primeira e única iteração.

As Figuras 5.7 e 5.8 confirmam novamente que ambos os métodos chegaram à mesma solução, observando-se aí os comportamentos qualitativos esperados de perda de pressão e entalpia (calor). Já as Figuras 5.9, 5.10 e 5.11 apresentam os erros percentuais de truncamento do Método dos Volumes Finitos para a fração de vazios e a entalpia e velocidade da mistura bifásica, para todo o domínio unidimensional e para os diversos níveis de refinamento da malha.

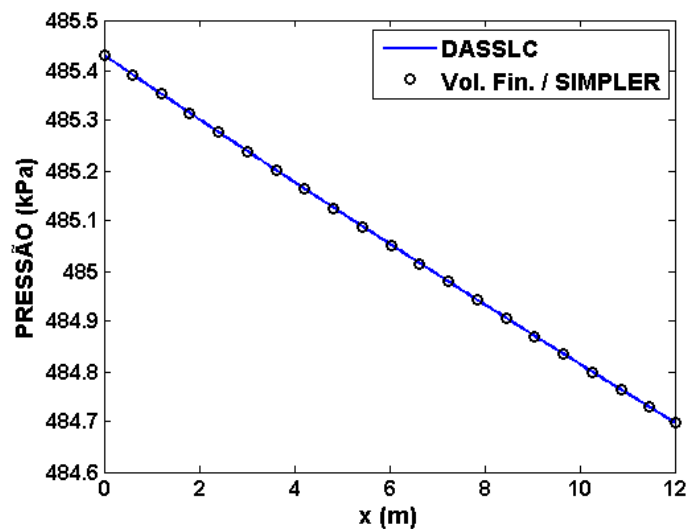


Figura 5.7: Soluções numéricas obtidas para a pressão pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 200$ ), Cenário 1.

Os gráficos para a fração de vazios e a entalpia da mistura indicam claramente a primeira ordem de acurácia da discretização para estas variáveis, uma vez que os erros de truncamento caem para muito próximo da metade em todo  $x$  em resposta a cada multiplicação por 2 de  $NV$  (em outras palavras, estes erros respondem proporcionalmente à primeira potência da dimensão dos volumes de controle à medida

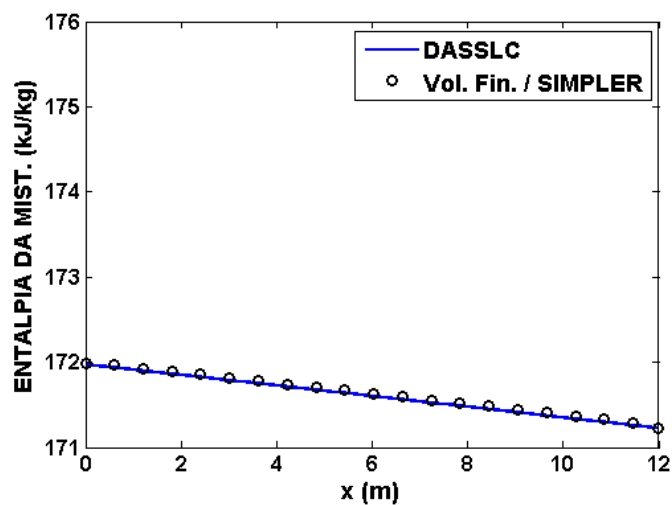


Figura 5.8: Soluções numéricas obtidas para a entalpia da mistura bifásica pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 200$ ), Cenário 1.

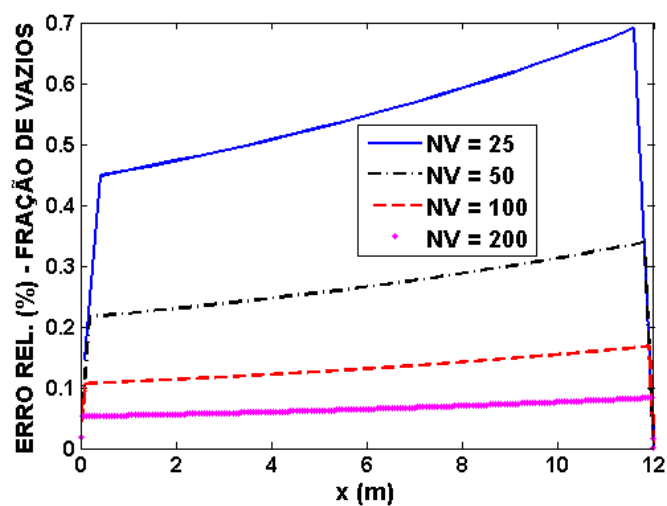


Figura 5.9: Erros de truncamento relativos para a fração de vazios para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 1.



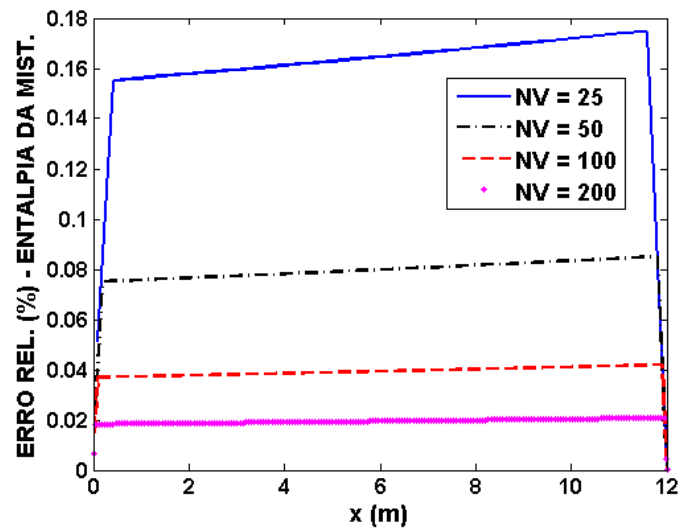


Figura 5.10: Erros de truncamento relativos para a entalpia da mistura bifásica para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 1.

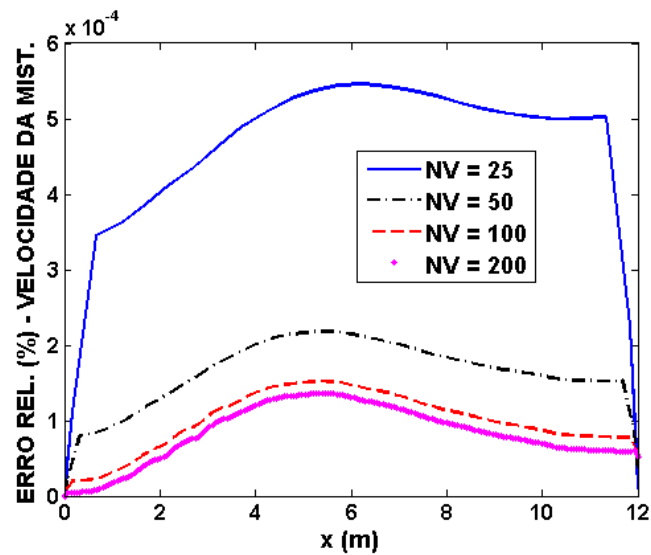


Figura 5.11: Erros de truncamento relativos para a velocidade da mistura bifásica para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 1.

que a malha é refinada).

A Figura 5.9 mostra que somente com 200 volumes de controle foi possível calcular as frações de vazio com erros de truncamento inferiores a 0,1%.

A Figura 5.11 sugere, na melhor das hipóteses, a segunda ordem de acurácia para a velocidade da mistura bifásica, o que ainda é inferior às ordens alcançáveis pelo método BDF.

## 5.5.2 Efeitos das Transições entre Regimes

A primeira tentativa de integração do Cenário 2 com o DASSLC, em que foi utilizada a programação FORTRAN originalmente publicada com o mapa de MANDHANE *et al.* (1974), terminou em falha em  $x \approx 0,78$  m. Subsequentemente, mediante a troca para a versão regularizada da rotina e com  $\epsilon = 10^{-3}$ , a simulação foi concluída com sucesso.

Esta observação naturalmente levanta questionamentos quanto a uma possível transição entre padrões de escoamento na posição axial da primeira falha, o que é confirmado pelo exame das variáveis indicadoras dos regimes: o indicador de *Elongated Bubble* mudou de 1 para 0, enquanto o do regime *Slug* fez o oposto. Estas variações ocorreram de forma contínua, conforme planejado - em  $x = 0,7766$  m, por exemplo, os indicadores em análise valiam 0,6465 e 0,3535.

Em  $x = 0,7706$  m, ou seja, imediatamente a montante da posição de transição, as velocidades superficiais previstas para as fases líquida e vapor foram 1,5324 m/s e 2,2173 m/s, ao passo que  $\epsilon = 10^{-3}$  na função de regularização utilizada corresponde a  $\xi \approx 0,005$  (ver Equação 5.15). Isto restringiu matematicamente a transição contínua entre os dois regimes a uma distância máxima de 0,33% entre as velocidades superficiais das fases e as fronteiras do mapa original, eliminando-se as descontinuidades e cumprindo-se com êxito a tarefa de viabilizar a estratégia Algébrico-Diferencial sem alterar significativamente os resultados inicialmente descontínuos.

Os efeitos associados à descontinuidade em questão encontram-se ilustrados na Figura 5.12, em que a variação da velocidade de deslizamento unidimensional foi representada de acordo com os passos de integração selecionados pelo DASSLC. Seu funcionamento *adaptativo* (capacidade de variar o passo) é demonstrado pelo espaçamento não-uniforme entre os pontos em diferentes regiões do duto e pela forte concentração dos mesmos na região da súbita variação de 6,48% da velocidade de deslizamento entre  $x = 0,7731$  m e  $x = 0,7796$  m. Neste intervalo, que corresponde a apenas 0,054% do comprimento da tubulação, encontram-se nada menos que 116 dos 299 passos de integração (38,8% do total), o que resulta em um passo médio local de  $5,6 \times 10^{-5}$  m. Destaca-se, para fins de comparação, que passos levemente superiores a 0,2 m predominam nas vizinhanças de  $x = 10$  m.

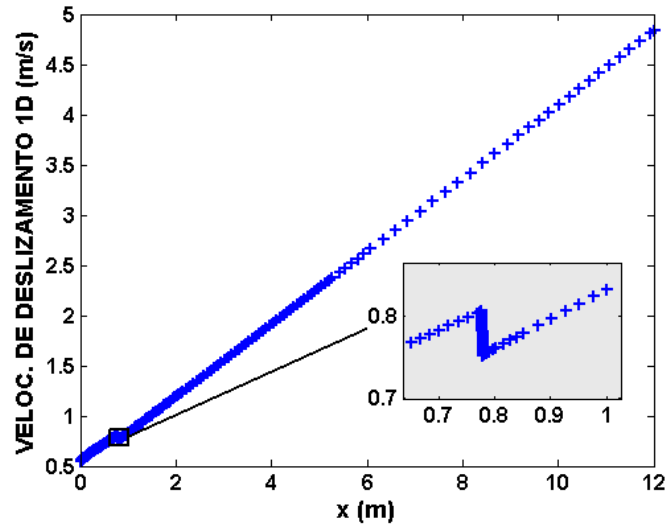


Figura 5.12: Descontinuidade regularizada na distribuição axial da velocidade de deslizamento unidimensional, Cenário 2.

A alternativa semi-implícita de volumes finitos já se mostrava menos eficiente que a integração com o DASSLC com um número de volumes de controle bastante inferior a 299 nas simulações para o Cenário 1. Entretanto, para o Cenário 2, sua baixa ordem de acurácia sugere que mesmo uma malha refinada localmente na região da descontinuidade exigiria uma quantidade de passos (volumes) maior que o necessário para o DASSLC. Este quadro se agrava se a única forma disponível para aprimorar a malha consiste na prática comumente adotada de aumentar  $NV$ .

Para investigar na prática esta expectativa, os erros de truncamento associados ao Método dos Volumes Finitos foram calculados para os resultados do Cenário 2 em três níveis de resolução da malha sucessivamente dobrados (de  $NV = 500$  a  $NV = 2000$ ), tomando-se as distribuições axiais do DASSLC como soluções-referência conforme informado anteriormente.

As Figuras 5.13, 5.14 e 5.15, que ilustram o aquecimento da mistura bifásica aumentando sua entalpia e seu conteúdo da fase menos densa (e conseqüentemente, as velocidades do centro de massa e de deslizamento), não mostram diferenças importantes entre estas frações de vazios, entalpias e velocidades calculadas pelas duas estratégias. Entretanto, as Figuras 5.16, 5.17 e 5.18 revelam claras desvantagens de o ajuste de  $NV$  representar o único meio disponível para aumentar a acurácia associada às malhas uniformes.

A análise das Figuras 5.16 e 5.17 em conjunto com a Figura 5.12 explica o comportamento decrescente observado para os erros de truncamento da fração de vazios e da entalpia da mistura. Devido ao emprego de uma malha uniforme no Método dos Volumes Finitos, os erros se mostram maiores na porção inicial do escoamento, onde suas estimativas pelo DASSLC o levaram a selecionar passos de integração mais

reduzidos. É pelo mesmo motivo que as Figuras 5.16, 5.17 e 5.18 exibem “picos” correspondendo à súbita ampliação dos erros na região da descontinuidade, onde foram adotados os menores passos de integração.

As Figuras 5.16 e 5.17 confirmam a reduzida (primeira) ordem de acurácia para a fração de vazios e a entalpia da mistura na discretização por volumes finitos. Erros maiores que 0,1% persistem mesmo com  $NV = 2000$ . Diferentemente do que se observa para estas variáveis, a Figura 5.18 mostra que o erro de truncamento da velocidade da mistura foi amplificado por um fator superior a 50 na localização da descontinuidade em todos os três níveis investigados de resolução da malha. É verdade que este comportamento poderia ser corrigido pelo refinamento local da mesma. Entretanto, como o regime observado é função das próprias variáveis do modelo, não se conhecem de antemão as posições das descontinuidades numéricas, o que torna a estratégia de espaçamento não-uniforme dos volumes de controle menos trivial do que se poderia supor.

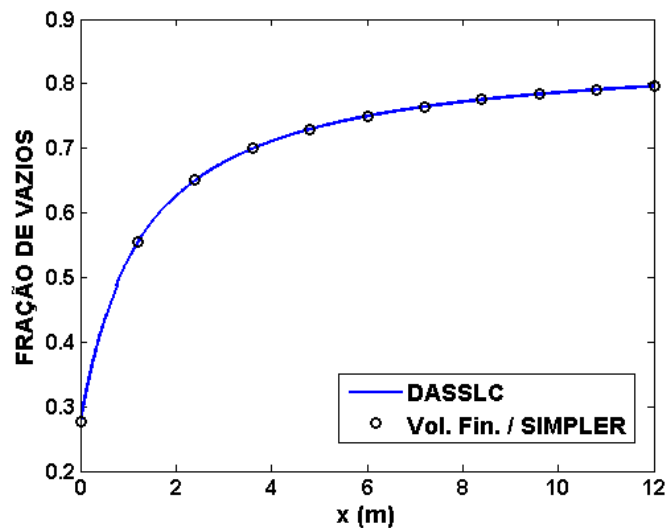


Figura 5.13: Soluções numéricas obtidas para a fração de vazios pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 2000$ ), Cenário 2.

Os tempos de execução do algoritmo SIMPLER apresentados na Tabela 5.2 foram cronometrados nos cálculos dos erros de truncamento usando as soluções do DASSLC como estimativas iniciais, como já foi explicado. Estes dados dão suporte adicional à conclusão de que uma solução de alto nível de acurácia para o Cenário 2 não pode ser calculada de forma eficiente a partir da discretização em volumes finitos realizada recorrendo-se apenas à prática comum de aumentar  $NV$ .

Também não deve causar surpresa que os tempos aferidos para o DASSLC neste caso, bastante inferiores aos do SIMPLER, se mostrem perceptivelmente superiores aos listados na Tabela 5.1 para o Cenário 1. Este aumento se deve ao fato de a técnica de regularização representar a transição descontínua entre dois regimes por

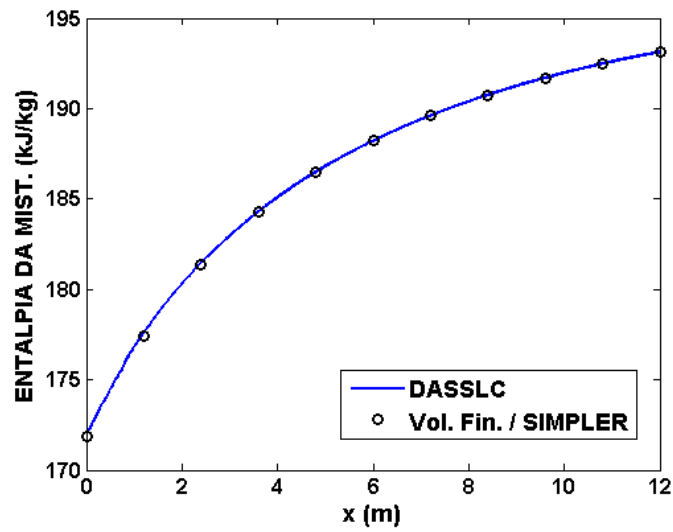


Figura 5.14: Soluções numéricas obtidas para a entalpia da mistura bifásica pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 2000$ ), Cenário 2.

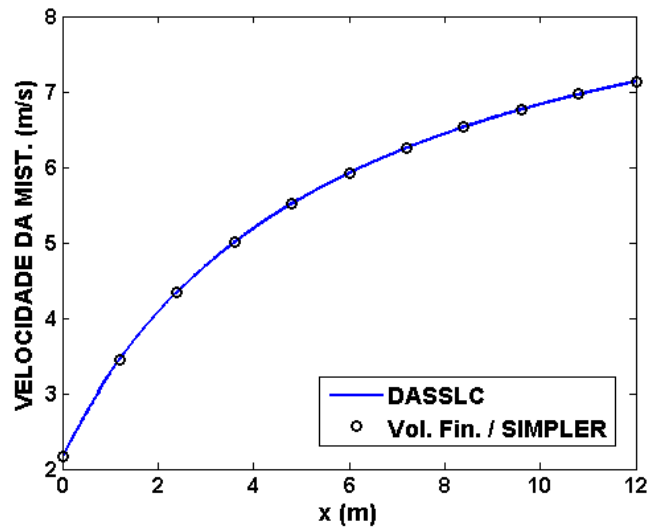


Figura 5.15: Soluções numéricas obtidas para a velocidade da mistura bifásica pelo DASSLC e pelo Método dos Volumes Finitos ( $NV = 2000$ ), Cenário 2.

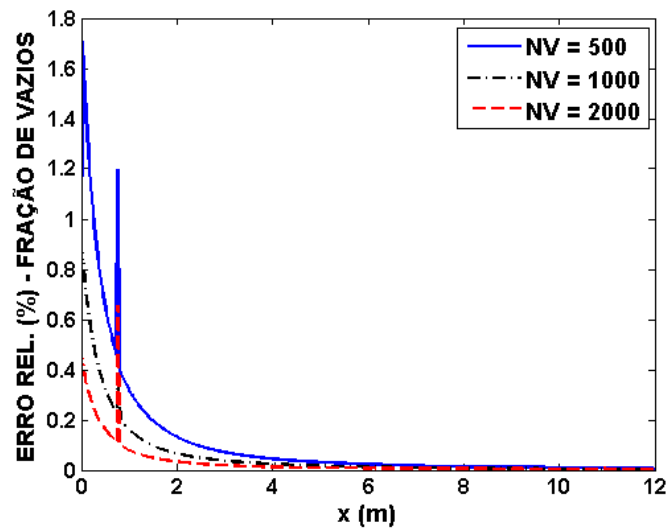


Figura 5.16: Erros de truncamento relativos para a fração de vazios para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 2.

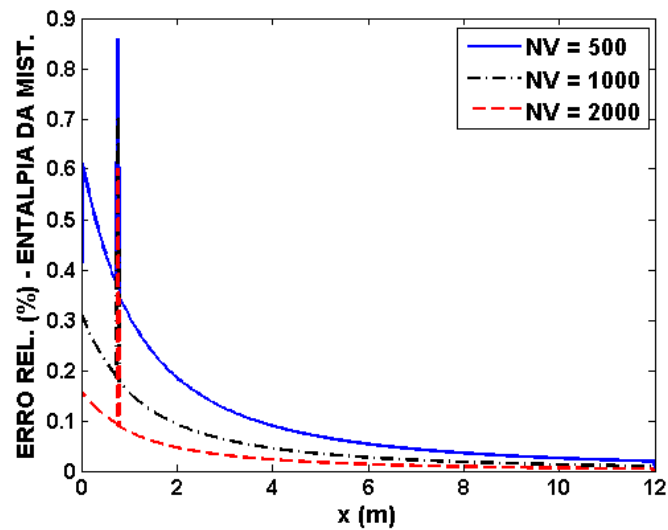


Figura 5.17: Erros de truncamento relativos para a entalpia da mistura bifásica para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 2.

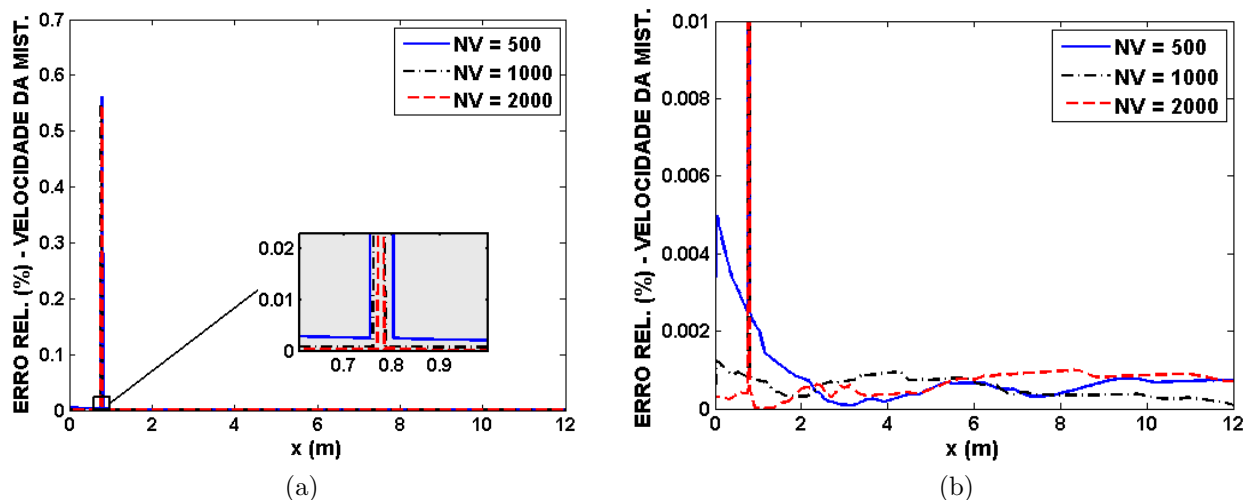


Figura 5.18: Erros de truncamento relativos para a velocidade da mistura bifásica para o Método dos Volumes Finitos, Cenário 2: (a) escala normal com ampliação na descontinuidade e (b) escala reduzida para melhor visualização dos erros por toda a tubulação.

uma variação bastante brusca, ainda que contínua. Isto torna aconselhável reduzir  $\epsilon$  apenas na medida suficiente, evitando sacrificar desnecessariamente a eficiência dos cálculos.

Tabela 5.2: Resultados de custo computacional para o Cenário 2.

$NV$	DASSLC	SIMPLER	
	Tempo (s)	Tempo (s)	Iterações
500	6,69	55,63	1
1000	6,88	103,0	1
2000	6,67	194,3	1

## 5.6 Considerações Finais

Foram apresentadas neste capítulo que se encerra as técnicas numéricas utilizadas na literatura para resolver as equações unidimensionais dos modelos “Homogêneo”, de Dois Fluidos e de Mistura.

A exemplo do primeiro, os dois últimos, que representam o atual estado da arte, consistem de sistemas de equações diferenciais razoavelmente simples quando considerados em sua forma unidimensional estacionária. Apesar disso, sua solução na literatura vem sendo feita com base em técnicas empregadas em simulações CFD complexas, nas quais regiões bi ou tridimensionais são descritas por malhas compostas de milhões de células.

Visando investigar a possibilidade de solução do problema de forma mais direta, eficiente e acurada, foi proposta, com a devida fundamentação, a aplicação de técnicas e códigos consolidados para a integração de Sistemas de Equações Algébrico-Diferenciais. Este método e o dos Volumes Finitos foram comparados quanto ao esforço computacional e à ordem de acurácia quando aplicados a simulações de escoamentos de hidrocarbonetos com cálculos rigorosos das propriedades termofísicas e de transporte. A superioridade da proposta Algébrico-Diferencial foi claramente demonstrada, tornando a mesma mais uma contribuição do presente trabalho.

O Capítulo 6 trata do potencial de cada um dos três modelos de interesse do escoamento bifásico no que se refere à reprodutibilidade de dados experimentais.



# Capítulo 6

## Verificação contra Dados Experimentais

O Capítulo 3 discutiu a possibilidade da modelagem do escoamento bifásico por meio de equações uni ou tridimensionais. A primeira abordagem foi selecionada para os fins do presente trabalho, e o Capítulo 4 apresentou as equações constitutivas pesquisadas.

Embora o estabelecimento das equações (diferenciais e algébricas) a resolver tenha sido feito com o respaldo de numerosas e importantes referências bibliográficas, a melhor forma de avaliar sua capacidade de reprodução do fenômeno de interesse consiste na comparação dos resultados das simulações contra medições de escoamentos reais.

Este capítulo trata da verificação dos modelos de Dois Fluidos, de Mistura (*Drift-Flux*) e de BEGGS e BRILL (1973) contra dados experimentais de escoamento bifásico em estado estacionário. Após uma descrição da metodologia de execução desta etapa, seus resultados são apresentados e discutidos.

### 6.1 Metodologia

Esta seção apresenta os passos que foram seguidos com o objetivo de viabilizar a comparação entre dados experimentais e o desempenho dos modelos de interesse.

#### 6.1.1 Estudo Experimental Selecionado

Considerando que o código desenvolvido no presente trabalho não impõe restrições quanto à inclinação do duto ou ao regime de escoamento, julgou-se necessário buscar um conjunto de medições experimentais igualmente abrangente para possibilitar o estudo das mais variadas condições. Outra diretriz adotada foi a de dar preferência a estudos da literatura aberta, acessíveis a qualquer pesquisador.

Um trabalho que se encaixa nestes critérios gerais, tendo sido adotado nesta etapa do presente estudo, é a Tese de Doutorado de MUKHERJEE (1979). Suas medições foram realizadas em um complexo aparato experimental, cuja seção mais importante encontra-se representada esquematicamente na Figura 6.1. Trata-se de uma tubulação de 3,81 cm (1,5 in) de diâmetro interno, a qual, vista de cima, possui forma de “U”. A mistura bifásica é alimentada através de uma das pontas no lado aberto deste “U”, seguindo a direção apontada pelas setas e deixando o tubo através da outra ponta. Um guincho possibilita levantar ou abaixar o lado fechado (curvo) do “U” de modo a simular qualquer ângulo de escoamento ascendente no lado de entrada dos fluidos, e qualquer inclinação de escoamento descendente no lado de saída dos mesmos. As posições para medição das pressões nos trechos de entrada ( $P_1$  e  $P_2$ ) e de saída ( $P_3$  e  $P_4$ ), separadas em cada caso por  $L = 9,3$  m (30,5 ft), foram ajustadas de modo que os 6,71 m (22 ft) precedentes de tubulação cumprem o papel de eliminar efeitos de entrada. Os 2,13 m (7 ft) centrais entre as tomadas de pressão são constituídos de material transparente de modo a possibilitar a visualização dos regimes de escoamento ascendente e descendente. Também foram posicionados nesta região central os sensores de *holdup* de líquido  $HL_1$  e  $HL_2$ .

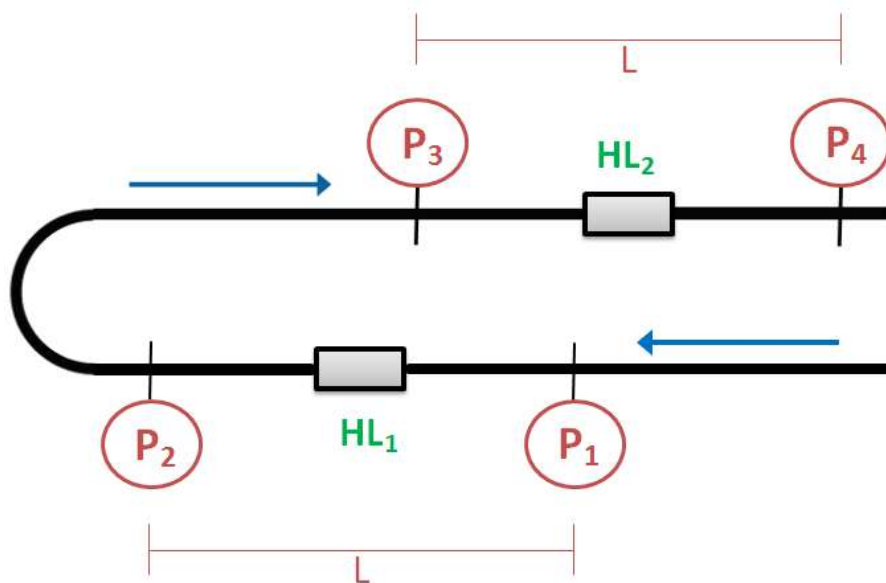


Figura 6.1: Esquema parcial (vista superior) do aparato experimental utilizado por MUKHERJEE (1979).

O procedimento experimental básico adotado por MUKHERJEE (1979) foi o de fixar o ângulo de inclinação e a vazão da fase líquida, aumentando-se a vazão da fase vapor de uma medição para a seguinte de forma a varrer todos os regimes de escoamento possíveis dentre os quatro considerados pelo estudo em questão: Estratificado, Bolhas, *Slug* e *Annular-Mist*. Para cada experimento assim realizado, foram

registrados as velocidades superficiais de cada fase, a pressão média, a temperatura, o padrão de escoamento observado e os valores medidos de *holdup* e de variação de pressão.

Ar comprimido foi utilizado como fase vapor em todas as medições. Como fase líquida, alternou-se entre querosene e óleo lubrificante com o objetivo de capturar a influência de sua viscosidade. O trabalho em questão ajustou as seguintes equações para as propriedades do querosene:

$$\sigma = 0,0522 - 9 \times 10^{-5} T \quad 294 \text{ K} \leq T \leq 317 \text{ K} \quad (6.1a)$$

$$\rho_l = 1059,95 - 0,833T \quad 294 \text{ K} \leq T \leq 308 \text{ K} \quad (6.1b)$$

$$\mu_l = \exp(-0,187 - 0,0207T) \quad 291 \text{ K} \leq T \leq 317 \text{ K} \quad (6.1c)$$

As equações correspondentes para o óleo lubrificante são:

$$\sigma = 0,0686 - 1,17 \times 10^{-4} T \quad 291 \text{ K} \leq T \leq 314 \text{ K} \quad (6.2a)$$

$$\rho_l = 1068,36 - 0,758T \quad 272 \text{ K} \leq T \leq 319 \text{ K} \quad (6.2b)$$

$$\mu_l = \exp(8,3407 - 0,0412T) \quad 280 \text{ K} \leq T \leq 311 \text{ K} \quad (6.2c)$$

Em todas estas equações de regressão, as unidades utilizadas são as do Sistema Internacional (temperaturas em K). MUKHERJEE (1979) também considerou o fator de compressibilidade do ar como 1.

## 6.1.2 Simulação dos Experimentos

O código computacional desenvolvido foi dotado de toda a flexibilidade possível, permitindo incluir ou excluir determinados efeitos ou alternar entre equações constitutivas. Isto possibilitou buscar a reprodução mais fiel possível de cada ponto experimental via simulação com os modelos de interesse.

Tendo em vista os benefícios já comprovados da Abordagem DAE dos referidos modelos em estado estacionário, esta estratégia foi utilizada em todas as simulações numéricas das medições experimentais.

O trabalho experimental de MUKHERJEE (1979) não apresenta qualquer discussão ou medição relacionada à transferência de calor e massa. Cálculos de entalpia tampouco são abordados, e apenas um valor de temperatura (medido) por ponto experimental é fornecido. Este quadro indica que a variação axial de temperatura na execução dos experimentos não é importante, justificando a suposição de escoamento isotérmico para fins de simulação. Esta consideração foi aplicada aos três modelos explorados, descartando-se as respectivas equações de conservação de ener-

gia e adotando-se a temperatura fornecida com cada ponto experimental sempre que necessário (por exemplo, no cálculo das propriedades termofísicas e de transporte). Valor nulo foi atribuído a  $\Gamma_v$ .

A seleção das equações constitutivas para os modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* foi feita com base no regime de escoamento reportado junto com cada experimento. Isto garante que os desvios observados entre os valores experimentais e simulados nestes casos devem-se exclusivamente à modelagem empregada, e não a imprecisões associadas a dado mapa de padrões. Os cálculos baseados na correlação empírica de BEGGS e BRILL (1973), entretanto, seguiram o mapa proposto com este modelo. Segundo BRILL e MUKHERJEE (1999), os regimes previstos neste último caso devem ser tratados como parâmetros da correlação.

Embora MUKHERJEE (1979) tenha agrupado os escoamentos observados sob as formas Anular ou Nevoeiro em uma mesma classificação (*Annular-Mist*), o mesmo autor informa que o regime observado se torna *Mist* quando  $\lambda_l \leq 0,01$ . Este critério foi utilizado no presente trabalho para dividir os experimentos classificados como *Annular-Mist* entre os padrões Anular e Nevoeiro.

As vazões volumétricas alimentadas de cada fase, fornecidas para cada experimento na forma de velocidades superficiais, foram devidamente introduzidas no Sistema Algébrico-Diferencial como condições iniciais em  $x = 0$ . A pressão neste local foi obtida para cada ponto experimental a partir de seus valores tabelados de pressão média e variação de pressão.

As integrações dos sistemas DAE foram feitas de  $x = 0$  até  $x = L = 9,3$  m (30,5 ft) de modo a replicar o aparato experimental. Pelo mesmo motivo, finalizada uma simulação, escolheu-se o valor de  $\alpha_v$  calculado em  $x = L/2$  para fins de comparação com o obtido experimentalmente. A tubulação utilizada por MUKHERJEE (1979) é constituída de aço, cujo valor de rugosidade apresentado por ROTAVA (2012) (0,046 mm) foi utilizado quando necessário nos cálculos.

A solução do sistema DAE também exige o cálculo da massa específica e da viscosidade do ar junto com as Equações 6.1 ou 6.2. No primeiro caso, o manual da CRANE (1979) recomenda a lei dos gases perfeitos, destacando que a correção para o desvio da idealidade nos níveis de pressão aqui explorados não ultrapassaria os 3%. Esta observação corrobora a aproximação de fator de compressibilidade unitário de MUKHERJEE (1979), a qual também foi utilizada nas simulações do presente trabalho.

Para a viscosidade do ar, adotou-se a seguinte equação (CRANE, 1979):

$$\mu_v = \mu_0 \left[ \frac{T_0 + 120}{T + 120} \right] \left[ \frac{T}{T_0} \right]^{3/2} \quad (6.3)$$

em que as temperaturas devem ser fornecidas em Kelvin, e  $\mu_0$  (0,016 cP para o ar)

é a viscosidade conhecida a  $T_0$  (255,37 K). A correção deste resultado para incluir o efeito de pressões bem maiores que as praticadas nos experimentos de MUKHERJEE (1979) seria menor que 10% (CRANE, 1979).

### 6.1.3 Estatísticas

A reprodutibilidade dos experimentos de MUKHERJEE (1979) por cada um dos três modelos matemáticos de interesse foi avaliada por meio da comparação entre os valores experimentais e simulados de fração de vazios e de variação de pressão. Esta última foi expressa aqui em unidades de pressão por comprimento de tubo, a exemplo do que fazem diversas correlações de escoamento bifásico para  $dP/dx$ , tornando este dado independente do comprimento da tubulação.

A comparação entre os valores experimentais  $\mathbf{y}^{\text{exp}}$  e simulados  $\mathbf{y}^{\text{sim}}$ , correspondentes a dado conjunto de experimentos, foi baseada nas estatísticas apresentadas a seguir.

O *Erro Absoluto Médio* (EAM) correspondente a dados  $\mathbf{y}^{\text{exp}}$  e  $\mathbf{y}^{\text{sim}}$  é a média aritmética dos *Erros Absolutos* individuais de cada experimento, obtidos por diferença entre o valor simulado e o experimental ( $y_i^{\text{sim}} - y_i^{\text{exp}}$ ). O *Desvio Padrão* dos Erros Absolutos (DPEA) também é apresentado.

Uma terceira estatística auxiliar calculada foi o *Erro Relativo Percentual Médio* ERPM:

$$\text{ERPM} = \frac{1}{N} \sum_N \left| 100 \left( \frac{y_i^{\text{sim}} - y_i^{\text{exp}}}{y_i^{\text{exp}}} \right) \right| \quad (6.4)$$

em que  $N$  é o número de experimentos simulados.

MUKHERJEE (1979) e BHAGWAT e GHAJAR (2014) alertam que quando o valor de  $y_i^{\text{exp}}$  é muito reduzido, pode-se incorrer em erros relativos muito altos mesmo quando o erro absoluto é aceitável. Nestas situações, é melhor basear as análises no erro absoluto.

A Tese de MUKHERJEE (1979) não entra em detalhes sobre repetições da execução de cada experimento, e também não especifica valores numéricos referentes à acurácia dos sensores de medição utilizados. O texto informa, contudo, que as pressões foram medidas usando-se manômetros tipo *Tubo Bourdon*, e que o funcionamento do elemento sensor de *holdup* é baseado em leituras de *capacitância* na forma proposta por GREGORY e MATTAR (1973).

É possível encontrar no mercado medidores Bourdon de pressão com acurácia de  $\pm 0,25\%$  do *span*. Um sensor de 1378,95 kPa (200 psi) de *span* seria capaz de acomodar as pressões médias associadas aos dados experimentais de MUKHERJEE (1979) com alguma folga, permitindo estimar o erro das medidas de pressão em cerca de  $\pm 3,45$  kPa ( $\pm 0,5$  psi). Este valor foi utilizado no presente trabalho para aproximar o erro associado às variações de pressão medidas como  $\pm 6,90$  kPa ( $\pm 1,0$  psi).

Com relação aos dados de fração volumétrica, a leitura da proposta de sensor originalmente apresentada por GREGORY e MATTAR (1973) permite estimar o erro das medições em cerca de  $\pm 0,02$ .

## 6.2 Comparações por Regime

A verificação contra dados experimentais foi baseada em um subconjunto dos experimentos de MUKHERJEE (1979), formado por medidas obtidas em cinco ângulos de inclinação:  $0^\circ$  (posição horizontal),  $\pm 90^\circ$  (fluxos verticais ascendente e descendente),  $50^\circ$  (escoamento inclinado ascendente) e  $-30^\circ$  (inclinado descendente).

Todas as condições experimentais simuladas neste capítulo, assim como os correspondentes resultados numéricos obtidos por cada modelo matemático, são apresentadas no Apêndice C.

Esta seção apresenta, discute e compara o desempenho dos três modelos de interesse em função do padrão de escoamento observado experimentalmente. Neste primeiro momento, a perda friccional de pressão dos modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* também foi calculada pelo método de BEGGS e BRILL (1973).

### 6.2.1 Bolhas

A Tabela 6.1 apresenta as estatísticas que permitem avaliar o desempenho dos modelos de Dois Fluidos, *Drift-Flux* - complementado com as já discutidas correlações de BHAGWAT e GHAJAR (2014) - e Homogêneo - correlação completa de BEGGS e BRILL (1973) - no regime de Bolhas.

Tabela 6.1: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime de Bolhas com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

Nº de Experimentos	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIAÇÃO DE PRESSÃO		
	Média	Desvio Padrão		Média	Desvio Padrão	
87	0,33	$\pm 0,24$		-2,94 kPa/m	$\pm 4,44$ kPa/m	
MODELO	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	-0,02	$\pm 0,18$	66,49	-1,11	$\pm 2,55$	65,73
<i>Drift-Flux</i>	-0,07	$\pm 0,17$	56,45	-0,94	$\pm 2,06$	56,33
Homogêneo	0,05	$\pm 0,16$	104,45	-1,44	$\pm 3,05$	92,94

Embora estes primeiros resultados de EAM para a fração de vazios pareçam bastante animadores quando comparados à média dos dados experimentais, é preciso destacar que se está lidando com médias de valores com grau de espalhamento alto, como mostram os respectivos Desvios Padrão. Conclusões mais seguras podem ser

tiradas a partir da análise de *histogramas* como os apresentados na Figura 6.2, cujas barras indicam a contagem de pontos cujos Erros Absolutos situam-se em dado intervalo.

Verifica-se assim que a reprodutibilidade de  $\alpha_v$  pelos três modelos é algo mais semelhante do que sugerem os valores de EAM. Em todos os três casos, cerca de 70 pontos foram reproduzidos com Erros Absolutos de magnitude igual ou menor a 0,20. A contagem é um pouco menor para o modelo Homogêneo, e assume o maior valor no modelo *Drift-Flux*. O valor de EAM para o Modelo de Dois Fluidos é, de longe, o menor de todos (sem considerar o sinal), mas isto se deve apenas à distribuição mais igualitária de seus Erros Absolutos individuais em torno de zero. A comparação dos ERPMS, que não são afetados pelos sinais dos desvios, atesta que o melhor desempenho foi de fato o do Modelo *Drift-Flux*, e que o pior foi o da correlação Homogênea.

Valores altos de Desvio Padrão também são encontrados nos resultados referentes à variação de pressão, tornando preferível mais uma vez a análise apoiada nos histogramas correspondentes. Estes indicam uma pior reprodutibilidade para a correlação Homogênea, cujos Erros Absolutos de magnitude mais alta ocorreram em maior quantidade. Embora estes Erros e os do Modelo de Dois Fluidos encontrem-se distribuídos aproximadamente pela mesma faixa, verifica-se maior concentração junto ao zero no segundo caso, o que ajuda a explicar seus valores menores (em módulo) de EAM e ERPMS.

O melhor desempenho ficou, mais uma vez, sendo o do modelo *Drift-Flux*, tanto em termos das estatísticas médias quanto pela distribuição ilustrada no histograma. Os limites menos amplos indicados por este último no eixo das abcissas revelam a menor propensão deste modelo a cometer erros altos no regime de Bolhas.

### 6.2.2 *Slug*

A repetição da análise anterior para o regime *Slug* exige a especificação de um valor razoável para  $K_b$ , que possui a relação com o comprimento das bolhas de Taylor apresentada no Apêndice B.

O trabalho de MUKHERJEE (1979) refere-se a *slugs* de 60,96 cm (2 ft) de comprimento como “longos”, e a média de aproximadamente 0,60 dos  $\alpha_v$  experimentais neste regime indica que o comprimento das bolhas de Taylor também possui esta ordem de grandeza. A suposição de um comprimento médio de dez diâmetros ( $K_b = 0,45$ ) corresponde a um valor aproximado realista (38,10 cm ou 1,25 ft), e foi adotada na obtenção dos resultados resumidos na Tabela 6.2 e na Figura 6.3.

Os histogramas referentes à fração de vazios mostram que quase todos os Erros Absolutos do modelo *Drift-Flux* são menores que 0,1 em magnitude. A distribuição

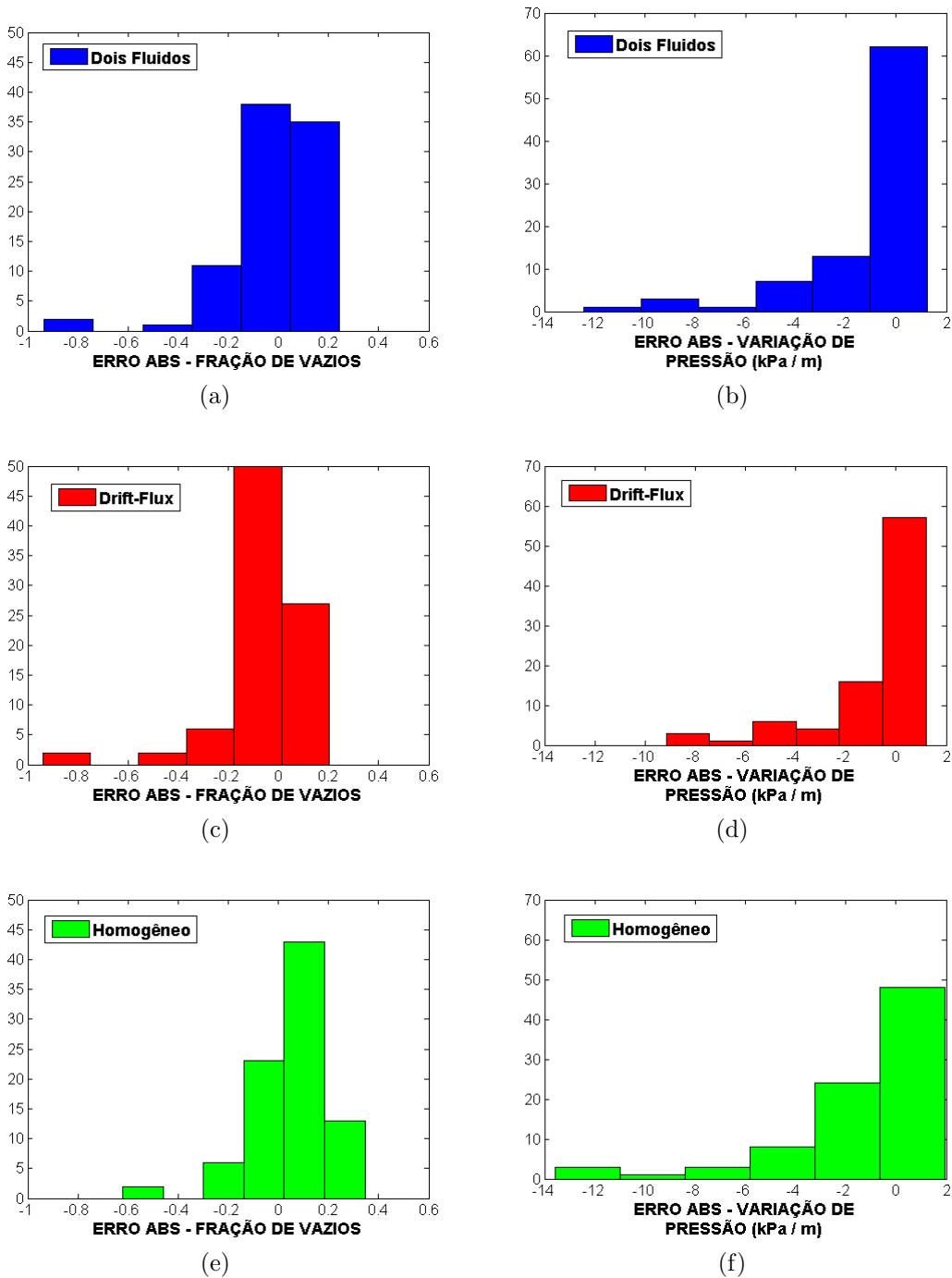
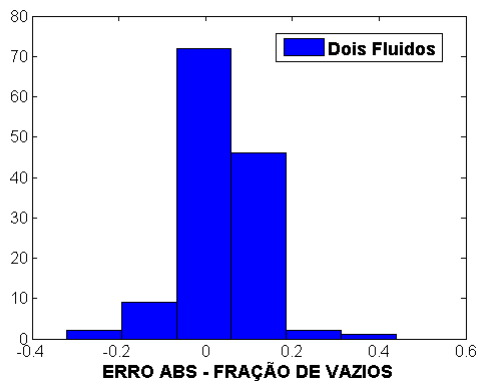
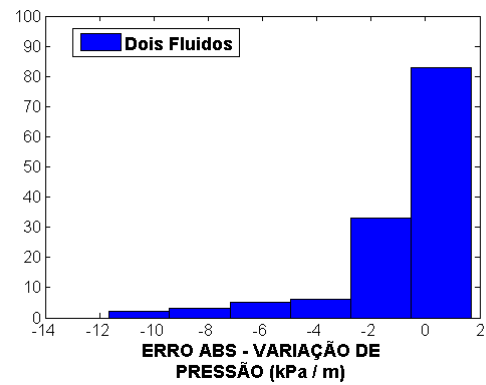


Figura 6.2: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime de Bolhas com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

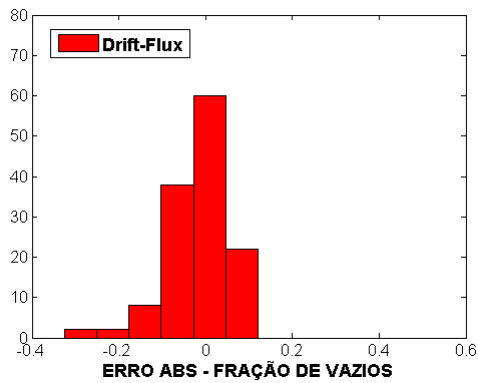




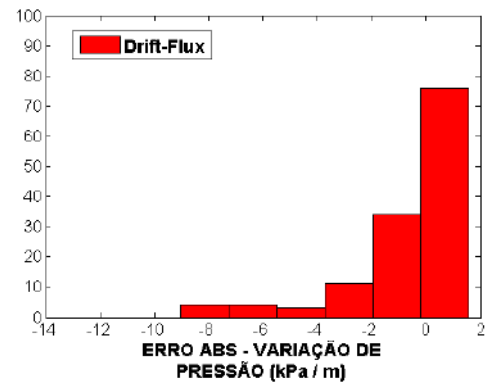
(a)



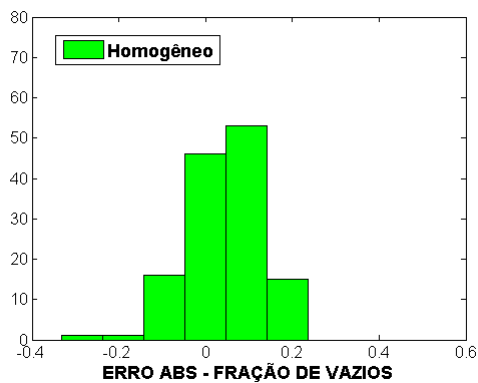
(b)



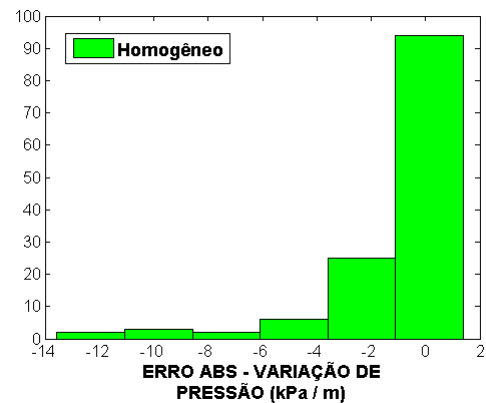
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.3: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime *Slug* com  $K_b = 0,45$  e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

Tabela 6.2: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime *Slug* com  $K_b = 0,45$  e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

Nº de Experimentos	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIACÃO DE PRESSÃO		
	Média	Desvio Padrão		Média	Desvio Padrão	
132	0,60	$\pm 0,24$		-3,04 kPa/m	$\pm 2,70$ kPa/m	
MODELO	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	0,04	$\pm 0,09$	17,33	-0,92	$\pm 2,33$	58,39
<i>Drift-Flux</i>	-0,02	$\pm 0,07$	11,68	-0,84	$\pm 2,00$	43,33
Homogêneo	0,04	$\pm 0,09$	20,35	-1,01	$\pm 2,53$	64,14

dos mesmos em torno de zero também é mais equilibrada neste caso que nos outros dois modelos. Mais uma vez, portanto, o melhor desempenho foi o do modelo *Drift-Flux*, refletindo-se nos menores valores (em módulo) associados de EAM e ERPM.

Embora os valores de EAM e DPEA dos modelos de Dois Fluidos e Homogêneo sejam quase iguais, os histogramas indicam melhor reprodutibilidade para o primeiro caso, cuja concentração de Erros Absolutos junto ao zero foi bem maior. Alguns poucos pontos foram reproduzidos pelo modelo de Dois Fluidos com erros mais altos, o que pode ter contribuído para quase igualar suas estatísticas às da correlação Homogênea. A exemplo de EAM, seu valor de ERPM também foi ligeiramente menor.

Quanto à variação de pressão, verifica-se que os três modelos tendem a superestimá-la na maioria dos casos, embora em grau muito menor do que as menos frequentes subestimativas. Os histogramas de todos os três casos mostram cerca de 100 a 110 Erros Absolutos menores que 2 kPa/m em módulo. Seus diferentes limites inferiores da abcissa mostram maior concentração total junto ao zero para o modelo *Drift-Flux* e depois para o de Dois Fluidos. A correlação Homogênea teve a maior faixa de Erros Absolutos. Esta observação explica a comparação entre os valores correspondentes de EAM e ERPM.

É importante frisar que o sinal negativo da média das variações de pressão experimentais indica uma queda de pressão. Um Erro Absoluto positivo calculado de acordo com esta convenção aponta uma queda de pressão subestimada, ou então um ganho de pressão superestimado. Como foi destacado no parágrafo anterior, a maioria das simulações de medições experimentais de regime *Slug* incorreu nestes dois tipos de desvio.

Este procedimento de verificação contra dados experimentais também oferece a possibilidade de investigar a influência do comprimento aproximado para as bolhas de Taylor sobre o desempenho do Modelo de Dois Fluidos. Tal *análise de sensibili-*

dade foi realizada aqui repetindo-se as simulações dos experimentos de MUKHERJEE (1979) em regime *Slug* com  $K_b = 4,5$ , conforme discutido no Apêndice B. Os resultados que apresentaram variações - ou seja, aqueles referentes ao Modelo de Dois Fluidos - são apresentados pela Tabela 6.3 e pela Figura 6.4.

Tabela 6.3: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime *Slug* com  $K_b = 4,5$  e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

MODELO	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIAÇÃO DE PRESSÃO		
	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	0,06	$\pm 0,08$	18,02	-0,91	$\pm 2,49$	67,30

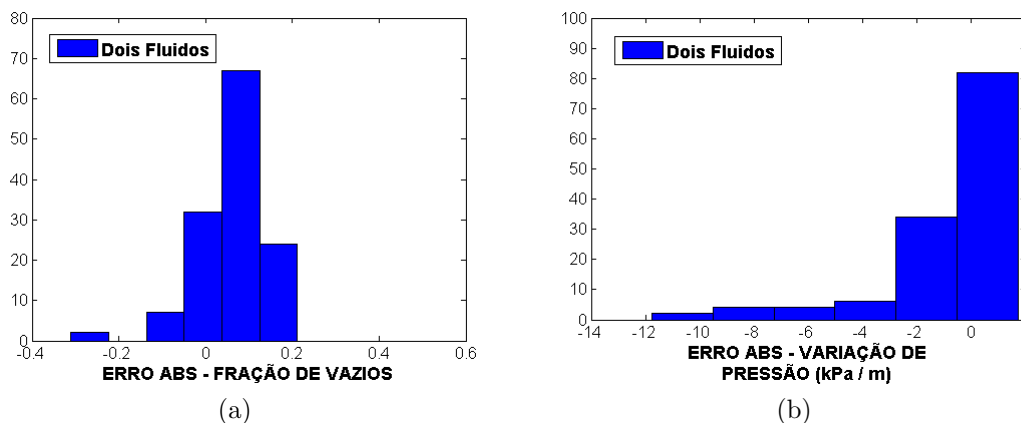


Figura 6.4: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime *Slug* com  $K_b = 4,5$  e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

A comparação entre as Figuras 6.3a e 6.4a mostra uma clara piora da reprodutibilidade das frações de vazios pelo Modelo de Dois Fluidos, associada à consideração inadequada do comprimento das bolhas de Taylor na seleção de um valor para  $K_b$ . A concentração dos Erros Absolutos junto ao zero diminuiu, e a tendência do Modelo a superestimar  $\alpha_v$  aumentou significativamente. Isto se refletiu em um aumento do EAM correspondente, como mostram as Tabelas 6.2 e 6.3. A piora mais leve do ERPM se explica pela redução verificada na faixa dos valores dos Erros Absolutos.

Diferenças quase imperceptíveis podem ser visualizadas entre as Figuras 6.3b e 6.4b, o que explica os valores muito parecidos de EAM e DPEA correspondentes para variação de pressão. O ERPM apresentou uma piora razoável, indicando que

os Erros Absolutos dentro das duas barras mais à direita nos histogramas (que representam as maiores contagens) devem ter se afastado do valor nulo.

### 6.2.3 Anular

A reprodução dos experimentos em regime Anular foi inicialmente realizada com valor unitário atribuído à constante de proporcionalidade do fator multiplicativo de rugosidade  $K_e^{(f)}$ . Os resultados obtidos, apresentados na Tabela 6.4 e na Figura 6.5, apontaram mais uma vez o desempenho superior do Modelo *Drift-Flux*.

Tabela 6.4: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em  $K_e^{(f)}$ .

Nº de Experimentos	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIAÇÃO DE PRESSÃO		
	Média	Desvio Padrão		Média	Desvio Padrão	
33	0,89	±0,06		-1,95 kPa/m	±1,28 kPa/m	
MODELO	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	0,03	±0,05	5,57	-3,31	±3,09	210,91
<i>Drift-Flux</i>	-0,02	±0,04	3,43	-1,54	±1,37	160,01
Homogêneo	0,04	±0,04	5,49	-2,80	±1,80	303,86

Os histogramas elaborados para os Erros Absolutos nas frações de vazios mostram uma distribuição mais equilibrada em torno do zero para o Modelo *Drift-Flux*, ao passo que as outras duas formulações mostraram tendência a superestimar  $\alpha_v$ . Os valores limítrofes (máximo e mínimo) nos eixos das abcissas também indicam menor espalhamento dos Erros Absolutos do Modelo de Mistura. Estas constatações explicam seus menores valores de EAM, DPEA e ERPM.

A pior reprodutibilidade da fração de vazios ficou sendo, mais uma vez, a da correlação Homogênea de BEGGS e BRILL (1973), cujos Erros Absolutos exibem pior distribuição em torno do zero em relação ao Modelo de Dois Fluidos, bem como magnitudes mais altas.

Duas características dos histogramas referentes à variação de pressão permitem classificar o Modelo *Drift-Flux* como vantajoso em relação aos demais. Uma delas é a distribuição “menos pior” de seus Erros Absolutos em torno do zero (foi o único modelo a apresentar valores positivos), mas a principal é a faixa bem mais restrita em que estes se situam. Não por acaso, os valores de EAM, DPEA e ERPM do Modelo de Mistura são menores (em módulo) que os das outras formulações.

O Modelo de Dois Fluidos apresentou valores pequenos de Erros Absolutos na variação de pressão em quantidade levemente superior à correlação Homogênea. Seu valor de ERPM é aproximadamente meio-termo entre o desta abordagem e o do

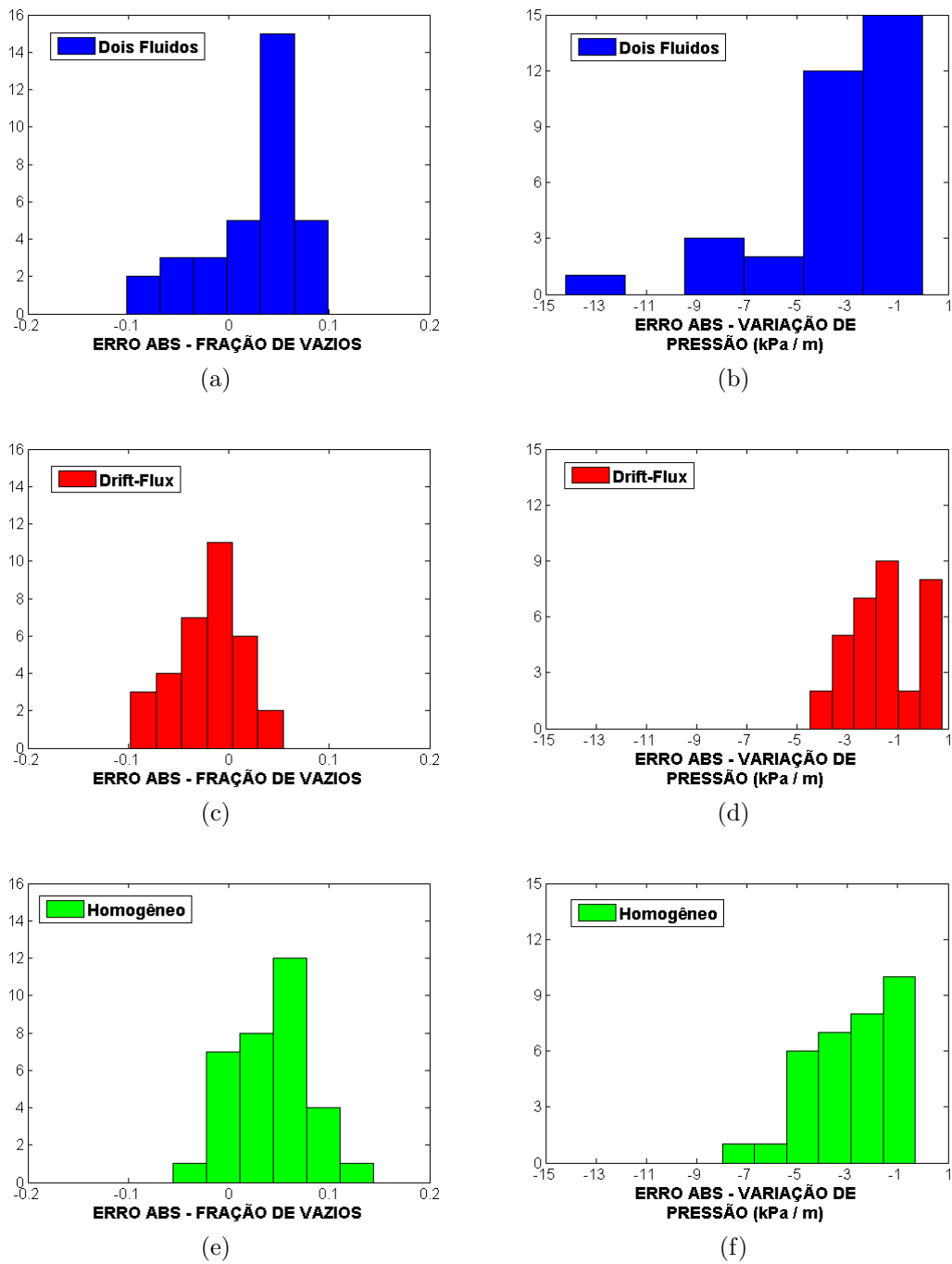


Figura 6.5: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em  $K_e^{(f)}$ .

Modelo de Mistura. Que seu valor de EAM seja, em módulo, razoavelmente superior em relação ao da formulação Homogênea provavelmente deve-se aos casos pontuais ilustrados cujos Erros Absolutos se mostraram atipicamente altos.

A influência da constante de proporcionalidade em  $K_e^{(f)}$  sobre os resultados do Modelo de Dois Fluidos foi verificada alterando-se seu valor para 2,5, em acordo com a Seção 4.2.3, e repetindo-se a comparação com os dados experimentais. Os resultados, apresentados na Tabela 6.5 e na Figura 6.6 mostraram mais alterações piores do que melhores.

Tabela 6.5: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 2,5 em  $K_e^{(f)}$ .

MODELO	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIAÇÃO DE PRESSÃO		
	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	0,04	±0,04	5,63	-3,58	±3,03	278,66

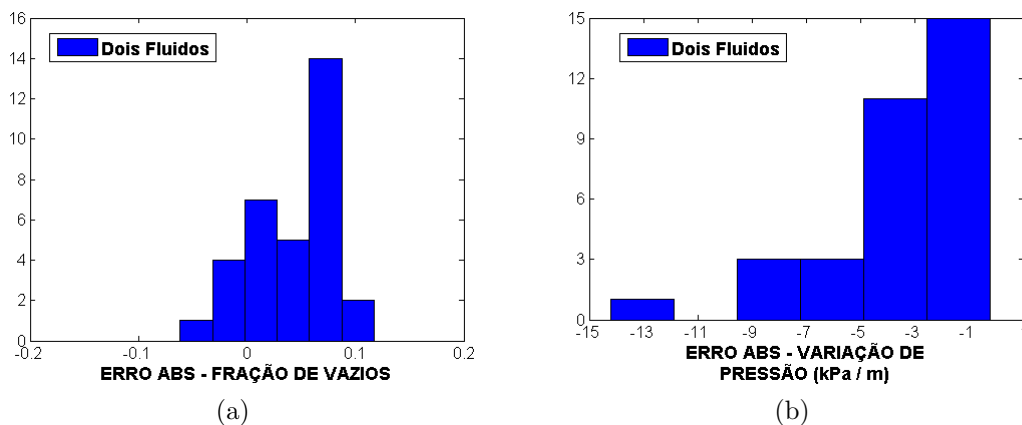


Figura 6.6: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 2,5 em  $K_e^{(f)}$ .

Embora tenha aumentado a concentração de Erros Absolutos na fração de vazios junto ao zero, a distribuição dos mesmos em torno deste valor tornou-se ainda mais desigual, e também aumentou muito a contagem de Erros Absolutos superiores a +0,05. Estas observações explicam os aumentos observados em EAM e em ERPM correspondentes.

Também se verifica uma leve piora no histograma 6.6b, com os Erros Absolutos afastando-se um pouco mais do zero em comparação com a Figura 6.5b. Os gráficos

continuam muito parecidos, mas a evolução registrada foi suficiente para piorar perceptivelmente os valores de EAM e ERPM da variação de pressão.

## 6.2.4 Nevoeiro

A Tabela 6.6 e a Figura 6.7 sintetizam os resultados da comparação com dados experimentais no padrão Nevoeiro.

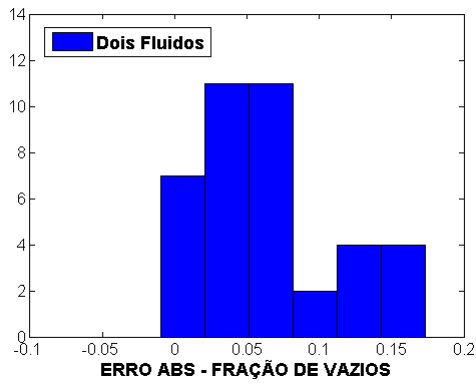
Tabela 6.6: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime *Mist* com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

Nº de Experimentos	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIACÃO DE PRESSÃO		
	Média	Desvio Padrão		Média	Desvio Padrão	
39	0,92	±0,06		-0,52 kPa/m	±0,35 kPa/m	
MODELO	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	0,06	±0,05	7,23	-1,01	±0,80	234,55
<i>Drift-Flux</i>	0,01	±0,05	4,71	-0,22	±0,29	59,46
Homogêneo	0,05	±0,05	5,95	-0,47	±0,37	121,23

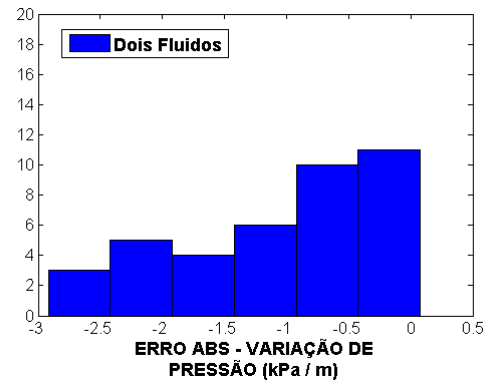
Os histogramas dos Erros Absolutos nas frações de vazios simuladas mostram maior concentração em torno do zero para o Modelo *Drift-Flux*. Esta formulação também proporcionou uma distribuição igualitária dos Erros em torno do valor nulo, enquanto as outras duas apresentaram clara tendência a superestimar  $\alpha_v$ . Diante destas observações, é compreensível que o valor de EAM para o Modelo *Drift-Flux* seja tão inferior aos demais, e que seu valor de ERPM também seja o menor.

Tanto o Modelo de Dois Fluidos quanto a correlação Homogênea contabilizaram 18 pontos com Erro Absoluto na fração de vazios inferior a +0,05. Em ambos os casos, o número de experimentos cujos Erros de simulação superam o valor de +0,10 também é quase o mesmo. Os histogramas são bastante parecidos, mas o do modelo Homogêneo apresenta valores negativos de maior módulo, enquanto o do Modelo de Dois Fluidos mostra Erros positivos levemente superiores. Por estes motivos, os valores de EAM e ERPM da correlação Homogênea se mostram levemente inferiores.

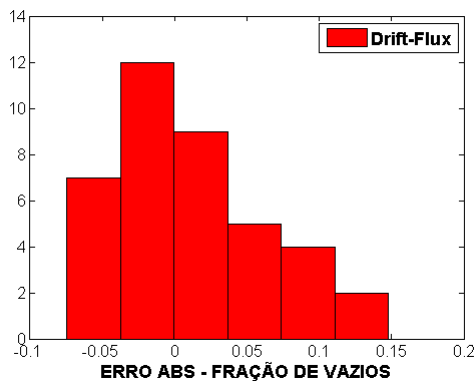
No caso da variação de pressão, é possível verificar que a quase totalidade dos experimentos foi simulada pelo modelo *Drift-Flux* com Erro Absoluto inferior a 0,5 kPa/m em módulo, o que não se repetiu com as outras duas abordagens. O modelo *Drift-Flux* também foi o que apresentou a distribuição menos desequilibrada de Erros Absolutos em torno de zero, e os valores limítrofes no eixo das abcissas de seu histograma são os que formam a faixa de valores mais estreita dentre os três. Este melhor desempenho é traduzido em números por meio dos valores bem inferiores aos demais de EAM (em magnitude) e ERPM.



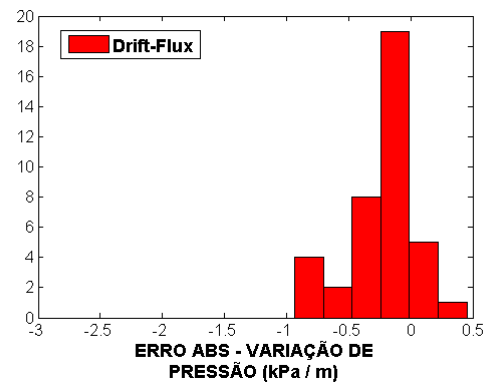
(a)



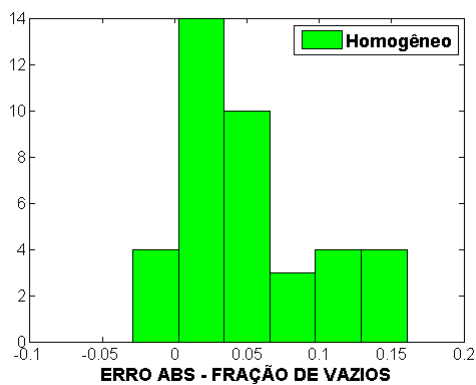
(b)



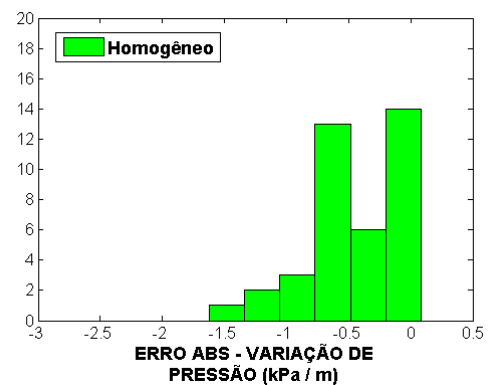
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.7: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime *Mist* com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.



Quase todos os Erros Absolutos de variação de pressão dos modelos de Dois Fluidos e Homogêneo são negativos, como mostram os respectivos histogramas. Nitidamente, a correlação Homogênea se revelou mais acurada na reprodução do conjunto de experimentos em discussão, o que se refletiu com igual clareza nos valores correspondentes de EAM e ERPM.

## 6.2.5 Estratificado Horizontal

A verificação do desempenho dos modelos matemáticos estudados contra medições experimentais no regime Estratificado horizontal foi inicialmente realizada sem o cálculo de pressões diferentes para as fases e a interface descrito na Seção 4.5 (isto é, foi adotada a mesma pressão média para a interface e para as fases líquida e vapor). Os resultados da comparação podem ser analisados na Tabela 6.7 e na Figura 6.8.

Tabela 6.7: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média.

Nº de Experimentos	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIAÇÃO DE PRESSÃO		
	Média	Desvio Padrão		Média	Desvio Padrão	
9	0,86	$\pm 0,14$		-0,02 kPa/m	$\pm 0,02$ kPa/m	
MODELO	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	-0,20	$\pm 0,13$	25,80	-0,07	$\pm 0,05$	353,03
<i>Drift-Flux</i>	-0,06	$\pm 0,06$	8,31	-0,08	$\pm 0,06$	379,06
Homogêneo	-0,002	$\pm 0,04$	4,38	-0,08	$\pm 0,07$	432,79

Os histogramas referentes à comparação das frações de vazios mostram mais uma vez um desempenho bastante satisfatório do modelo *Drift-Flux*, que reproduziu somente dois experimentos com Erro Absoluto de magnitude superior a 0,10. Desta vez, entretanto, foi a correlação empírica Homogênea que obteve os melhores resultados, com todos os erros inferiores a 0,08 em módulo e bem distribuídos em torno do valor nulo. Os valores associados de EAM e ERPM espelham estas observações, assim como a incontestável pior reprodutibilidade da fração de vazios pelo Modelo de Dois Fluidos - o que, tendo em vista a recomendação da Seção 3.5.4, é surpreendente em se tratando do padrão Estratificado.

Neste sentido, os resultados referentes à variação de pressão se apresentam mais próximos ao esperado. Embora os três modelos tendam claramente a superestimar a queda de pressão em tubos horizontais, o Modelo de Dois Fluidos apresenta Erros Absolutos ligeiramente mais próximos ao zero em relação às outras duas abordagens. Seus valores de EAM e ERPM foram os menores em magnitude, seguidos do modelo *Drift-Flux*, e então, da correlação Homogênea.

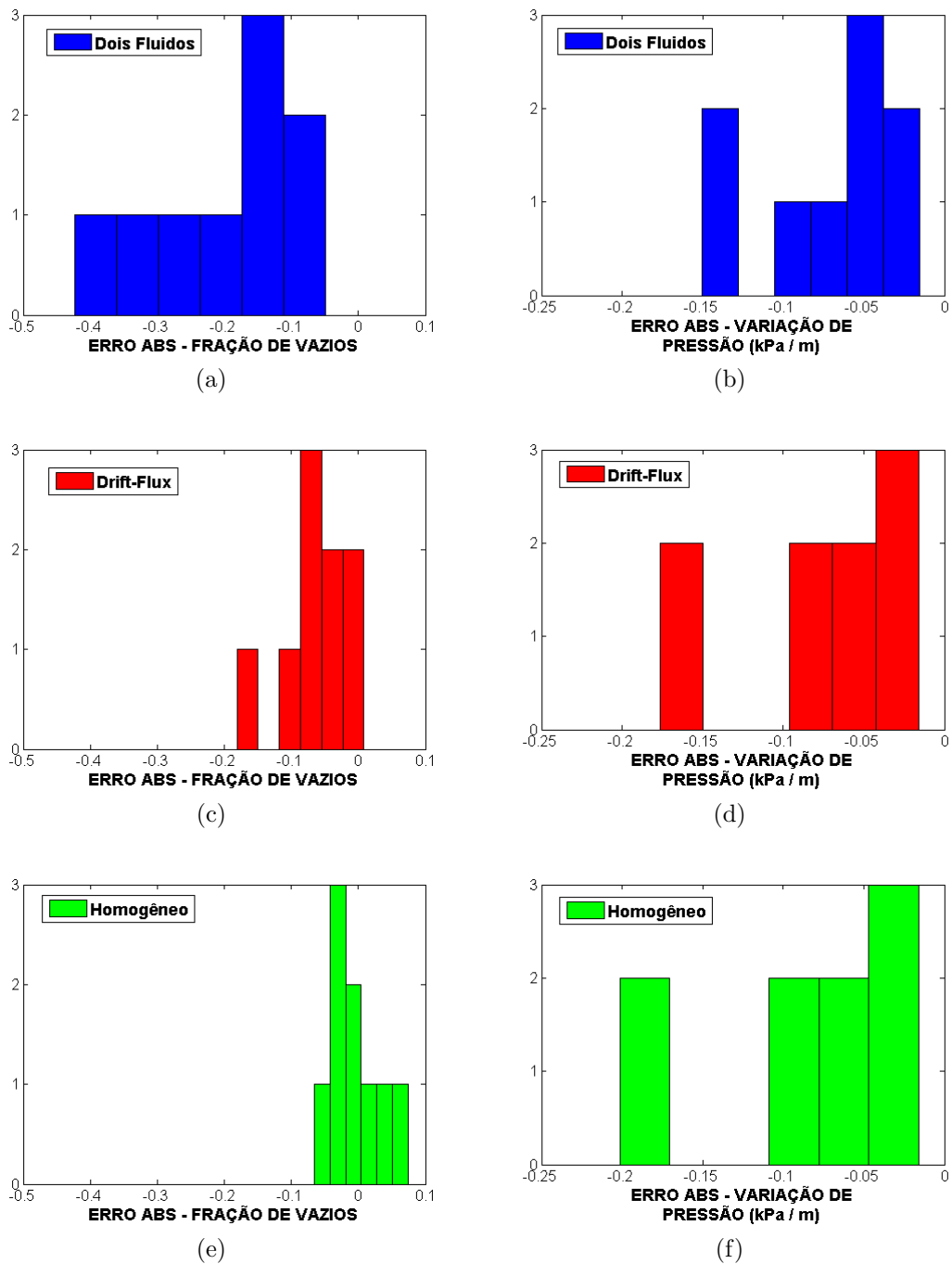


Figura 6.8: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média.

A simulação dos experimentos em discussão foi repetida com o Modelo de Dois Fluidos com o objetivo de verificar o impacto da consideração de pressões médias diferentes para as duas fases e a interface, conforme a modelagem constitutiva já apresentada para este fim. Os resultados apresentados na Tabela 6.8 e na Figura 6.9 mostraram, contudo, pouquíssima modificação.

Tabela 6.8: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas a diferentes pressões médias.

MODELO	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIÇÃO DE PRESSÃO		
	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	-0,20	±0,14	27,02	-0,07	±0,05	352,73

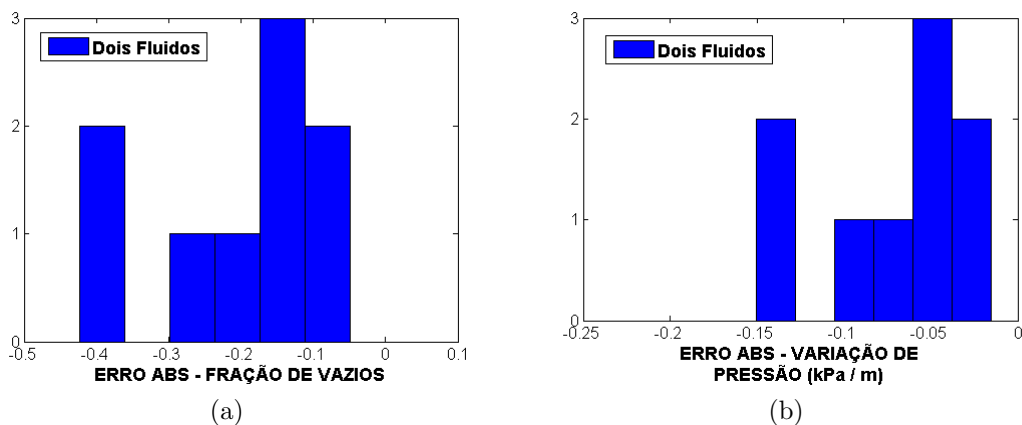


Figura 6.9: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelo Modelo de Dois Fluidos no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas a diferentes pressões médias.

A comparação dos histogramas 6.8a e 6.9a mostra uma leve piora dos resultados associados à fração de vazios, com a reprodução de um dos experimentos acusando leve aumento no Erro Absoluto. Já as Figuras 6.8b e 6.9b são tão similares que poderiam estar ilustrando valores idênticos de Erros Absolutos na variação de pressão, não fossem os valores associados de EAM, DPEA e ERPM a diferenciá-los.

Assim como se verifica para a fração de vazios, as estatísticas calculadas para a comparação das variações de pressão registraram pequena variação após a adoção do equacionamento adicional para as pressões médias de cada fase, o que poderia por em cheque a real necessidade desta modelagem. Entretanto, diante dos relatos publicados

e já discutidos acerca da possibilidade deste efeito de assumir proporções importantes, torna-se necessária a realização de estudos similares ao presente capítulo sob condições experimentais diferentes (como maiores diâmetros) a fim de possibilitar uma conclusão mais segura.

### 6.2.6 Balanço Parcial

As subseções anteriores compararam e avaliaram a capacidade dos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* e da correlação Homogênea empírica de BEGGS e BRILL (1973) de realizar simulações unidimensionais de escoamento bifásico líquido-vapor em estado estacionário. A perda friccional de pressão foi calculada em todos os três casos através do mesmo modelo constitutivo, de modo que as diferenças observadas na reprodução de medições experimentais devem-se exclusivamente aos fenômenos e estratégias fundamentais representados por cada um.

O Modelo *Drift-Flux* destacou-se com resultados sistematicamente melhores que os das demais abordagens. Já o Modelo de Dois Fluidos mostrou-se, em geral, levemente superior à correlação Homogênea, embora em casos pontuais a segunda tenha proporcionado melhores resultados. É importante destacar, entretanto, a base fenomenológica bastante superior do Modelo de Dois Fluidos, juntamente com o fato de a correlação empírica de BEGGS e BRILL (1973) ter sido desenvolvida sobre medições experimentais realizadas em tubos de 2,54 cm (1,0 in) e 3,81 cm (1,5 in) de diâmetro - igual ou muito próximo ao aparato experimental de MUKHERJEE (1979).

Os desempenhos relativos observados até aqui tornam o Modelo *Drift-Flux* uma opção atraente para simulações unidimensionais de escoamento bifásico, dada a superioridade de seus resultados junto com seu equacionamento bem mais simples que o do Modelo de Dois Fluidos. Este último também se mostrou promissor, mas é possível que uma de suas vantagens teóricas - a quantidade de fenômenos considerados em sua formulação mais detalhada - esteja cobrando na prática o preço da exigência de muitas equações constitutivas suficientemente acuradas.

Mais resultados são analisados no que segue, antes de se tirar as conclusões definitivas.

## 6.3 Influência do Modelo de Atrito na Parede

Esta seção investiga a possibilidade de obtenção de melhor reprodutibilidade pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* através do emprego do modelo de CHAXTON *et al.* (1972), descrito na Seção 4.6, como equação constitutiva alternativa para as perdas por atrito na parede.

Registra-se, adicionalmente, que a comparação dos resultados assim obtidos com aqueles já apresentados para a correlação de BEGGS e BRILL (1973) constitui uma boa oportunidade para avaliação do real custo-benefício de se optar por estes métodos mais simples e *off-the-shelf* em substituição aos modelos unidimensionais de base fundamental mais sólida.

### 6.3.1 Bolhas

A Tabela 6.9 e a Figura 6.10 apresentam os resultados referentes às simulações dos escoamentos experimentais em regime de Bolhas com o modelo constitutivo de CHAXTON *et al.* (1972) para a perda friccional de pressão.

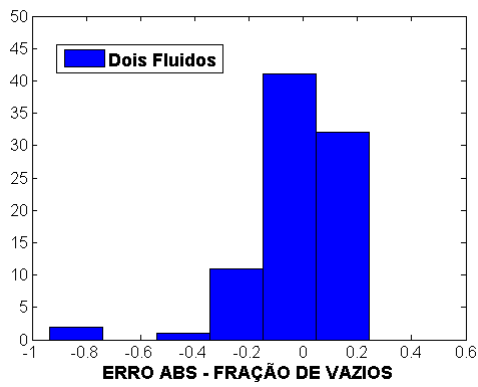
Tabela 6.9: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no regime de Bolhas com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão.

MODELO	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIAÇÃO DE PRESSÃO		
	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	-0,02	±0,18	65,72	-0,05	±0,68	22,90
<i>Drift-Flux</i>	-0,07	±0,17	56,33	-0,02	±0,48	16,60

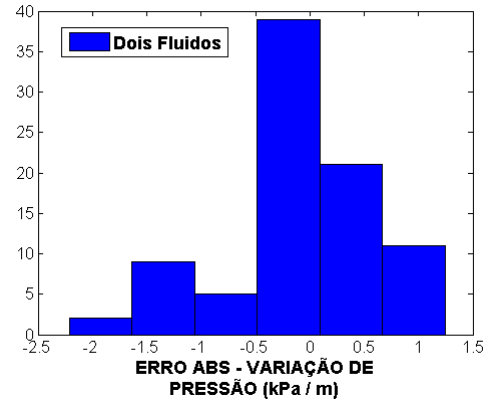
A comparação com os resultados apresentados na Seção 6.2.1 revela histogramas quase idênticos para os Erros Absolutos nas frações de vazios. Naturalmente, os valores associados de EAM, DPEA e ERPM não apresentaram mudanças significativas.

Por outro lado, os resultados referentes à variação de pressão mostram uma melhora substancial em relação aos obtidos com o primeiro modelo constitutivo para a perda friccional. Os valores máximo e mínimo no eixo das abcissas dos histogramas aproximaram-se do zero, com destaque para o valor inferior, indicando que os Erros Absolutos foram muito reduzidos em magnitude. Adicionalmente, estes Erros estão agora distribuídos em torno do valor nulo de maneira bem mais equilibrada que anteriormente. Esta observação é importante na medida que permite concluir que era o modelo de atrito de BEGGS e BRILL (1973) que apresentava maior tendência a simular variações de pressão menores que as observadas - este aparente *bias* sistemático está associado a esta correlação, e não às formulações de Dois Fluidos ou *Drift-Flux* (ao menos, no que diz respeito a escoamentos em Bolhas).

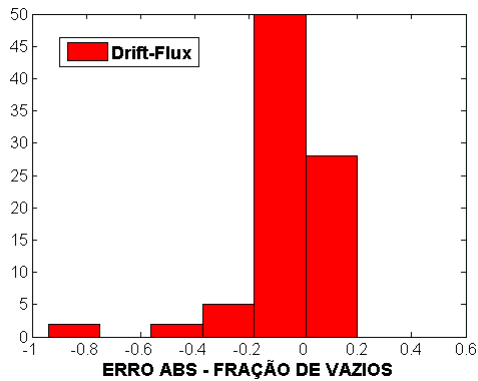
Tamanho aprimoramento fez-se sentir também nas estatísticas correspondentes. Os valores de EAM referentes à variação de pressão mostraram forte redução, e os menores DPEA indicam menor espalhamento em torno destas médias. Os ERPM



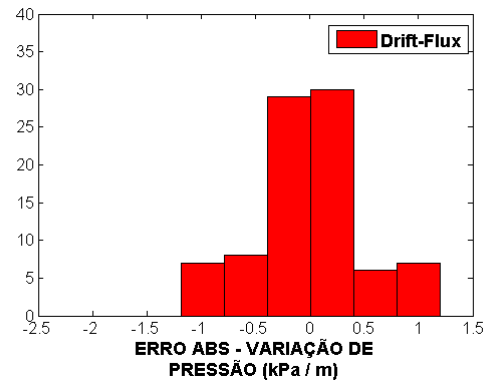
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.10: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no regime de Bolhas com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão.

também melhoraram muito, indicando que, de fato, os erros de simulação tornaram-se significativamente menores em módulo.

O Modelo *Drift-Flux*, que seguiu apresentando os melhores resultados para a fração de vazios, também permanece como a melhor opção para cálculos de variação de pressão no regime de Bolhas, apresentando uma distribuição quase igualitária em torno de zero dos Erros Absolutos nesta última variável, assim como os menores valores (em módulo) associados de EAM, DPEA e ERPM.

Finalmente, é importante destacar que a substituição das equações constitutivas para a perda friccional tornou os Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* acentuadamente superiores à correlação Homogênea no que se refere a simulações no padrão de Bolhas.

### 6.3.2 *Slug*

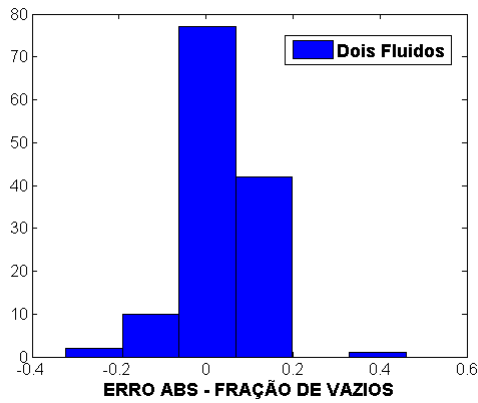
Os experimentos de MUKHERJEE (1979) em que observou-se o padrão *Slug* foram novamente simulados utilizando-se as equações de CHAXTON *et al.* (1972), juntamente com  $K_b = 0,45$  (este valor corresponde a um comprimento realista para as bolhas de Taylor, como já foi discutido). Os novos resultados, apresentados na Tabela 6.10 e na Figura 6.11, mostraram evolução semelhante à verificada no regime de Bolhas.

Tabela 6.10: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no regime *Slug* com  $K_b = 0,45$  e com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão.

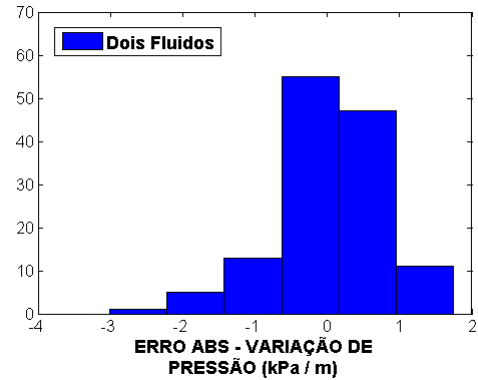
MODELO	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIAÇÃO DE PRESSÃO		
	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	0,04	±0,09	17,41	0,0005	±0,74	28,67
<i>Drift-Flux</i>	-0,02	±0,07	11,69	-0,04	±0,55	23,62

Os histogramas referentes aos erros na fração de vazios mostram pouca diferença em relação a seus pares na Figura 6.3. Verifica-se o mesmo com as estatísticas associadas (EAM, DPEA e ERPM). Portanto, o Modelo *Drift-Flux* segue como a melhor opção estudada para previsão de  $\alpha_v$  no padrão *Slug*, seguido do Modelo de Dois Fluidos.

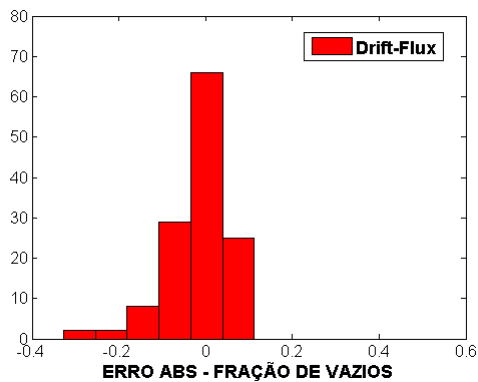
Com relação à variação de pressão, constata-se novamente uma significativa evolução nos resultados associada à substituição do modelo de atrito na parede. Os novos histogramas mostram, assim como no regime de Bolhas, Erros Absolutos bem mais concentrados junto ao zero, e melhor distribuídos em torno deste valor. Estas observações se refletiram nas estatísticas correspondentes: estas apontam o



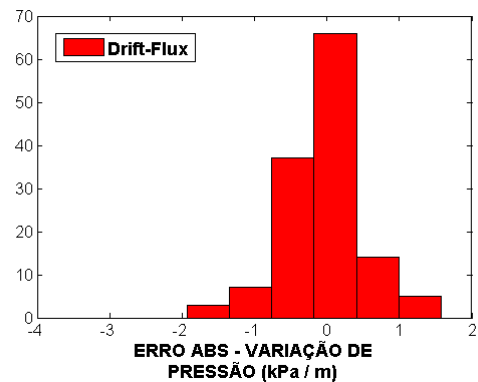
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.11: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no regime *Slug* com  $K_b = 0,45$  e com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão.



Modelo *Drift-Flux* como ligeiramente melhor que o de Dois Fluidos, e ambos como muito superiores à correlação Homogênea empírica de BEGGS e BRILL (1973).

### 6.3.3 Anular

Dando sequência à reavaliação dos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* com o método de CHAXTON *et al.* (1972) para o cálculo do atrito na parede, esta correlação foi aplicada na repetição das simulações dos experimentos em regime Anular juntamente com valor unitário atribuído à constante de proporcionalidade do fator multiplicativo de rugosidade  $K_e^{(f)}$ . Os resultados podem ser consultados na Tabela 6.11 e na Figura 6.12.

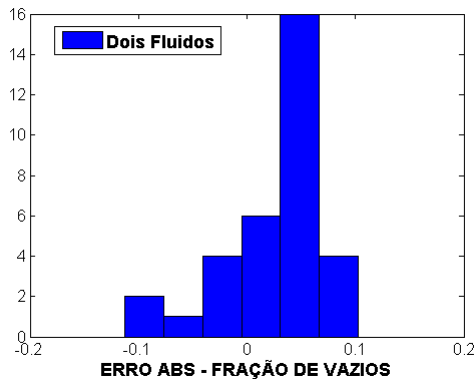
Tabela 6.11: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no regime Anular com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em  $K_e^{(f)}$ .

MODELO	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIAÇÃO DE PRESSÃO		
	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	0,03	±0,05	5,31	-1,84	±1,29	173,76
<i>Drift-Flux</i>	-0,02	±0,04	3,46	-1,57	±1,27	100,56

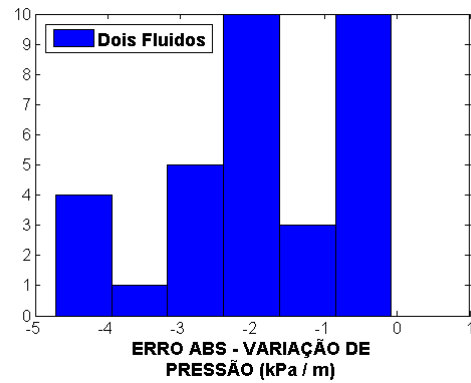
A substituição das equações de cálculo da perda friccional de pressão surtiu, para o padrão Anular, efeitos semelhantes aos já observados para os regimes de Bolhas e *Slug*, como mostra a comparação das novas estatísticas e histogramas com seus pares na Seção 6.2.3.

O histograma de Erros Absolutos do Modelo *Drift-Flux* na fração de vazios quase não sofreu modificações. No caso do Modelo de Dois Fluidos, verifica-se uma leve melhora, com o aumento da contagem dos Erros Absolutos nas faixas mais próximas de zero. Os valores de EAM e ERPM acompanharam estas constatações: permaneceram quase os mesmos para o Modelo *Drift-Flux* (o qual seguiu apresentando a melhor reprodutibilidade de  $\alpha_v$  dentre as três abordagens estudadas) e mostraram uma pequena redução (em módulo) para o Modelo de Dois Fluidos (tornando este definitivamente superior à correlação Homogênea).

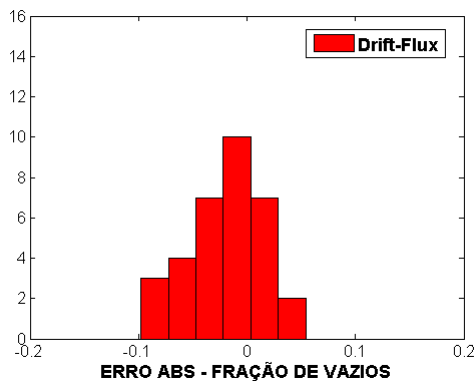
O emprego da correlação de CHAXTON *et al.* (1972) melhorou muito o cálculo da variação de pressão pelo Modelo de Dois Fluidos - o maior Erro Absoluto exibido pelo histograma correspondente (em magnitude) passou de cerca de 15 kPa/m para aproximadamente 5 kPa/m. Seus valores de EAM e ERPM acompanharam este forte avanço em medida suficiente para torná-lo ainda mais vantajoso que a correlação Homogênea empírica de BEGGS e BRILL (1973), mas não a ponto de igualar o desempenho do Modelo *Drift-Flux*.



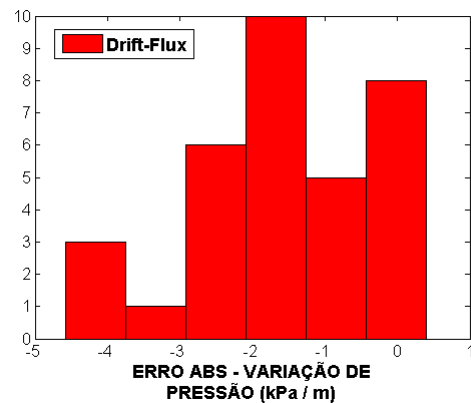
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.12: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no regime Anular com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em  $K_e^{(f)}$ .

Curioso é que, ao contrário do observado nos padrões *Bolhas* e *Slug*, a troca para o método de CHAXTON *et al.* (1972) não resultou em uma melhor distribuição dos Erros Absolutos na variação de pressão em torno de zero para o regime Anular. Os Erros nesta variável associados ao Modelo *Drift-Flux* também não foram tão impactados agora pela mudança no equacionamento quanto já se verificou anteriormente.

### 6.3.4 Nevoeiro

Os resultados da nova comparação com dados experimentais no padrão *Mist*, apresentados na Tabela 6.12 e na Figura 6.13, mostram que a substituição do modelo de atrito na parede não trouxe qualquer alteração significativa à reprodutibilidade das frações de vazios: os histogramas e estatísticas correspondentes são quase iguais aos apresentados na Seção 6.2.4.

Tabela 6.12: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no regime *Mist* com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão.

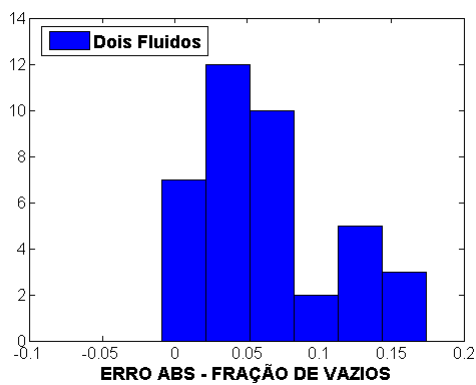
MODELO	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIAÇÃO DE PRESSÃO		
	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	0,06	±0,05	7,07	-0,52	±0,47	145,84
<i>Drift-Flux</i>	0,01	±0,05	4,72	-0,50	±0,51	128,47

Os Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* seguiram, portanto, com bons resultados de  $\alpha_v$ , com destaque para o superior desempenho do segundo em relação ao primeiro e à correlação Homogênea.

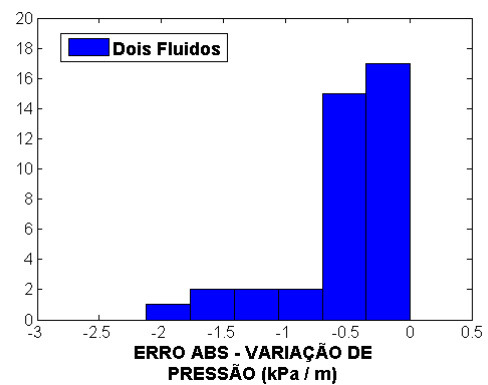
Por outro lado, os cálculos de variação de pressão pelo Modelo de Dois Fluidos tornaram-se melhores. O histograma 6.13b apresenta Erros Absolutos menores em magnitude e mais concentrados junto ao zero, explicando o decréscimo (em módulo) em EAM e ERPM.

Os resultados de variação de pressão do Modelo *Drift-Flux* mostraram uma piora surpreendente com o novo modelo de perdas friccionalis. Surgiram Erros Absolutos de módulo significativamente maior, e conseqüentemente, os valores associados de EAM e ERPM aumentaram a ponto de se tornarem piores que os da correlação empírica Homogênea de BEGGS e BRILL (1973) (embora permaneçam melhores que as estatísticas do Modelo de Dois Fluidos).

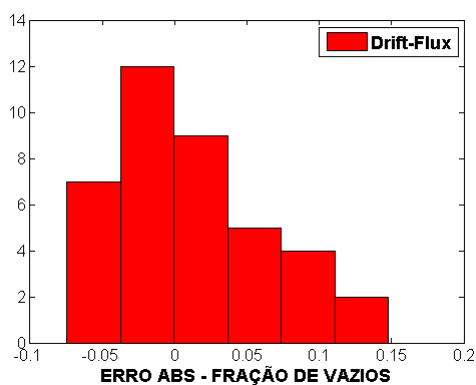
A correlação de CHAXTON *et al.* (1972) vinha se mostrando superior ao modelo de atrito de BEGGS e BRILL (1973). Parece sintomático que seu emprego no padrão Nevoeiro somente tenha conseguido melhorar os resultados do modelo que faz a partição adequada da perda friccional de pressão entre as duas fases em escoamento.



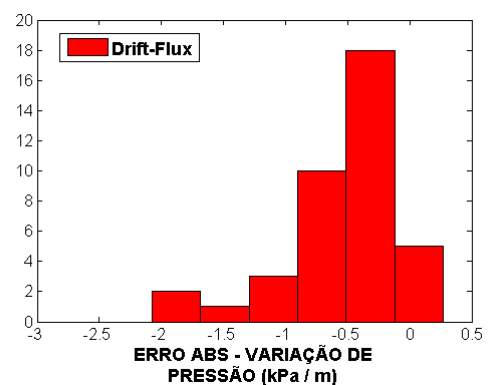
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 6.13: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no regime *Mist* com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão.

Sobre as melhores estatísticas do modelo Homogêneo, ressalta-se mais uma vez que o mesmo foi desenvolvido com base em dados medidos sob condições bastante próximas às dos experimentos de MUKHERJEE (1979). Isto torna precipitado apontá-lo como superior aos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux*.

### 6.3.5 Estratificado

O emprego da correlação de CHAXTON *et al.* (1972) mal afetou os cálculos já apresentados das frações de vazios no regime Estratificado horizontal. Foram repetidas as comparações adotando-se a mesma pressão média para a interface e para as fases líquida e vapor, e os novos resultados para  $\alpha_v$  (apresentados na Tabela 6.13 e na Figura 6.14) mostraram-se quase iguais aos analisados na Seção 6.2.5.

Tabela 6.13: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no regime Estratificado horizontal com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média.

MODELO	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIAÇÃO DE PRESSÃO		
	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	-0,20	$\pm 0,12$	26,86	-0,11	$\pm 0,07$	556,16
<i>Drift-Flux</i>	-0,06	$\pm 0,06$	8,31	-0,11	$\pm 0,07$	557,28

Portanto, para este regime e orientação da tubulação, o presente estudo obteve as melhores predições de  $\alpha_v$  com a correlação Homogênea de BEGGS e BRILL (1973), seguida de perto pelo Modelo *Drift-Flux* (e este, de longe, pelo Modelo de Dois Fluidos).

Com relação à variação de pressão, os histogramas acusam um leve aumento dos Erros Absolutos com o emprego do método de CHAXTON *et al.* (1972). Isto se refletiu nas estatísticas associadas a ponto de tornar as simulações pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* um pouco piores que as da formulação Homogênea. Há que se ressaltar aqui os baixíssimos valores envolvidos de variação de pressão, conforme indicado pela média e desvio padrão dos dados experimentais fornecidos na Tabela 6.7 - como já foi apontado, isto torna preferível basear as análises em Erros Absolutos que no ERPM, o qual se torna muito alto.

#### 6.3.5.1 Escoamento Estratificado Não-Horizontal

Ao contrário do que a revisão bibliográfica apresentada permitia esperar, o desempenho do Modelo de Dois Fluidos para os padrões Estratificado e Anular esteve longe de impressionar até este ponto do presente trabalho.

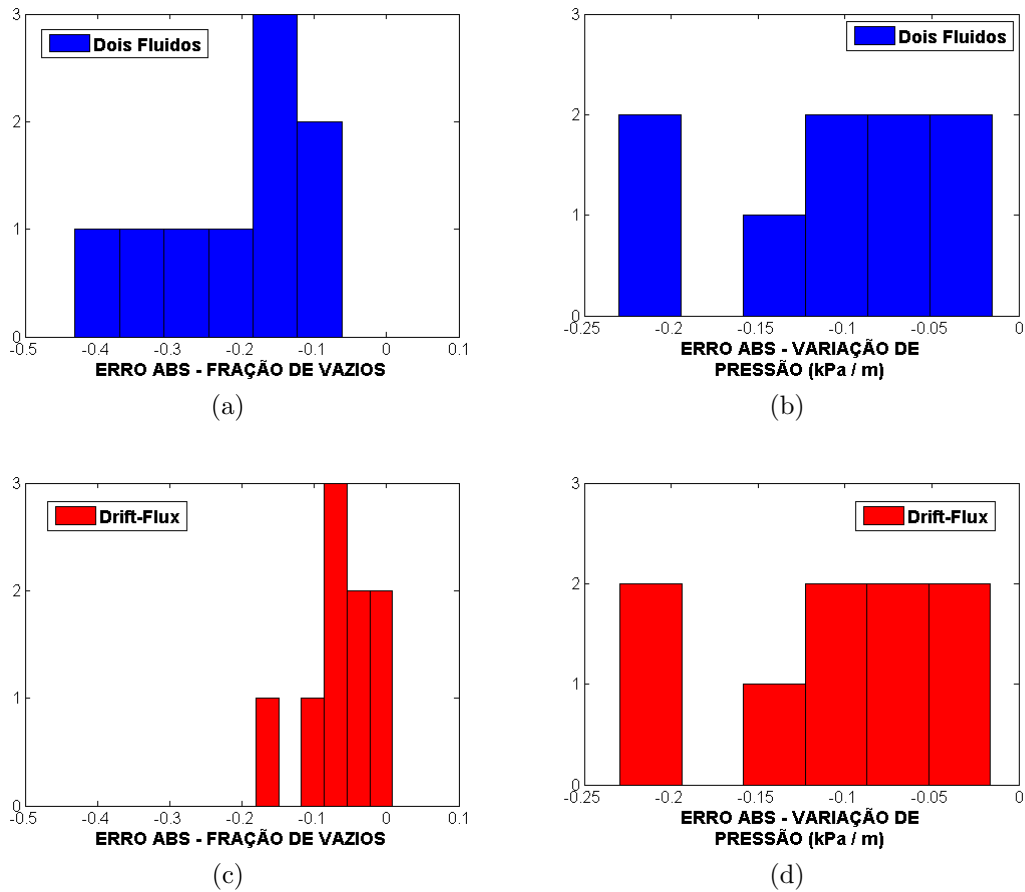


Figura 6.14: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no regime Estratificado horizontal com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média.

Na investigação deste intrigante resultado, foi observado que embora a posição horizontal do duto tenha sido priorizada no levantamento de equações constitutivas para o regime Estratificado (como ele é tipicamente considerado na literatura), o fato é que os modelos complementares adotados não impõem esta restrição à inclinação do escoamento, como é possível constatar no Capítulo 4.

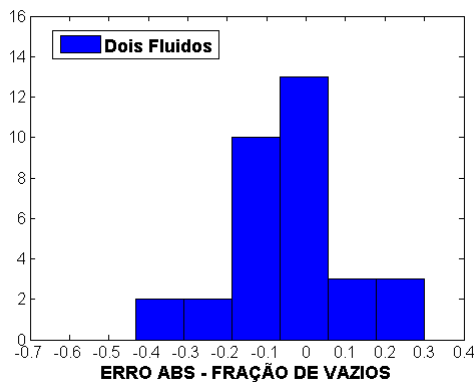
MUKHERJEE (1979) também observou a ocorrência do regime Estratificado em alguns de seus experimentos com escoamento descendente. A título de investigação, as medições para este padrão no ângulo de  $-30^\circ$  foram incorporadas ao conjunto considerado de dados experimentais, repetindo-se então as simulações e comparações com os três modelos de interesse - foi mantido o método de CHAXTON *et al.* (1972) para o cálculo da perda friccional de pressão. Os resultados podem ser consultados na Tabela 6.14 e na Figura 6.15.

Tabela 6.14: Estatísticas da comparação com dados experimentais das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Estratificado (posições horizontal e  $-30^\circ$ ) com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média.

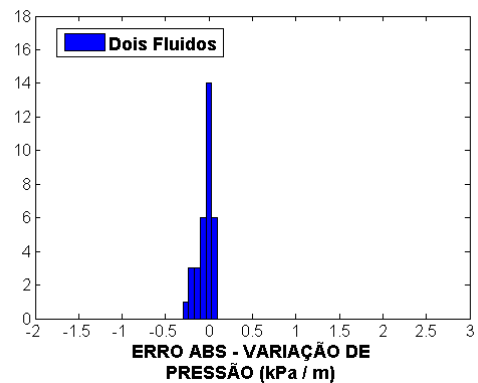
Nº de Experimentos	FRAÇÃO DE VAZIOS			VARIÇÃO DE PRESSÃO		
	Média	Desvio Padrão		Média	Desvio Padrão	
33	0,86	$\pm 0,14$		-0,008 kPa/m	$\pm 0,02$ kPa/m	
MODELO	EAM	DPEA	ERPM (%)	EAM (kPa/m)	DPEA (kPa/m)	ERPM (%)
Dois Fluidos	-0,05	$\pm 0,15$	15,90	-0,04	$\pm 0,10$	393,74
<i>Drift-Flux</i>	-0,15	$\pm 0,15$	19,43	0,56	$\pm 1,04$	6862,39
Homogêneo	-0,009	$\pm 0,09$	6,81	-0,08	$\pm 0,73$	4104,23

Os histogramas agora mostram melhores resultados de frações de vazios para o Modelo de Dois Fluidos que para o *Drift-Flux* (os Erros Absolutos do primeiro estão melhor distribuídos em torno do zero, e também possuem magnitudes mais reduzidas). A melhor reprodutibilidade de  $\alpha_v$  continuou sendo da correlação empírica Homogênea, mas a constatação mais interessante ficou mesmo sendo a inversão nos desempenhos relativos dos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* no cálculo desta variável. Os valores calculados de EAM e ERPM confirmam a melhor *performance* para o modelo Homogêneo, seguido do de Dois Fluidos e então, do *Drift-Flux*.

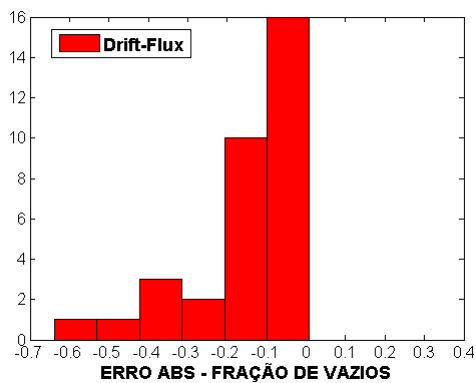
Em que pese os valores bastante reduzidos de média e desvio padrão apresentados na Tabela 6.14 para os dados experimentais de variação de pressão, chama a atenção o fato de os valores de ERPM para o Modelo *Drift-Flux* e a correlação Homogênea terem assumido proporções altíssimas e inéditas até então sem serem acompanhados pelo Modelo de Dois Fluidos. Os histogramas correspondentes apontam, de fato, para um desempenho bastante superior deste último, com Erros Absolutos de módulo bem inferior aos das demais formulações.



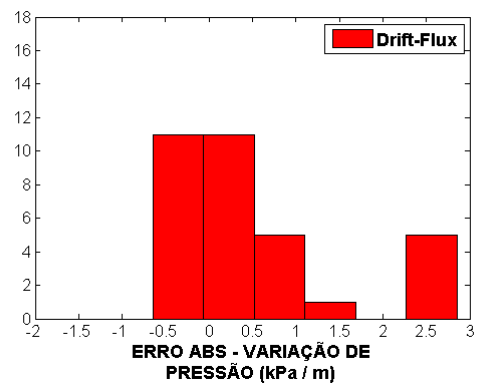
(a)



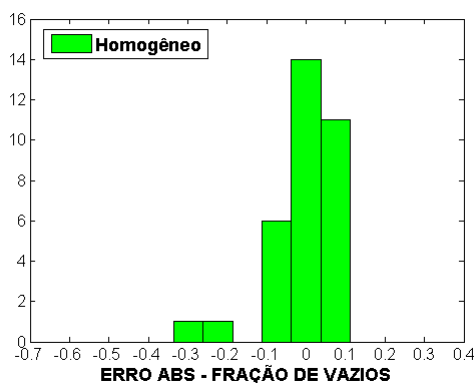
(b)



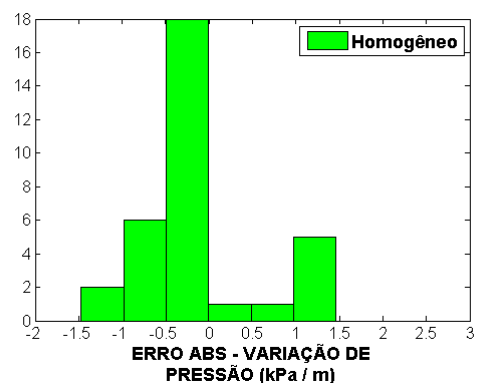
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 6.15: Histogramas de distribuição dos Erros Absolutos das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos modelos de interesse no regime Estratificado (posições horizontal e  $-30^\circ$ ) com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média.



Foram encontradas, portanto, novas condições de escoamento Estratificado nas quais o Modelo de Dois Fluidos manteve, em linhas gerais, desempenho tão seguro quanto o já verificado, enquanto as outras duas abordagens mostraram uma grande piora em sua reprodutibilidade da variação de pressão. Isto se constitui em um forte argumento a favor do equacionamento separado das duas fases para este tipo de escoamento, como costuma defender a literatura. Como ficou provado, nem sempre a modelagem matemática da própria mistura é suficiente nestes casos.

### 6.3.6 Balanço Definitivo

Se os resultados discutidos nas seções anteriores forem utilizados como base para um parecer breve, pode-se afirmar que, exceto em casos isolados, o Modelo *Drift-Flux* se mostrou superior ao de Dois Fluidos, e que este é uma melhor escolha que a correlação Homogênea empírica de BEGGS e BRILL (1973).

É sintomático que o modelo Homogêneo empírico tenha se saído pior mesmo com os dados experimentais utilizados aqui tendo sido obtidos em um diâmetro igual ou tão próximo daqueles correspondentes às medições que foram empregadas no desenvolvimento da correlação. É de esperar que o desempenho dos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* se mostre ainda mais vantajoso que o deste método em diâmetros maiores, quando o método empírico não será mais favorecido neste aspecto. Esta conclusão reforça a importância da compreensão e modelagem dos principais fenômenos do escoamento bifásico com vistas à sua simulação acurada.

Outro ponto importante a ressaltar com relação à abordagem Homogênea está no fato de ela ter apresentado os piores resultados mesmo quando foram fixadas as mesmas equações constitutivas para os termos que ela possui em comum com os modelos mais detalhados (no caso, a perda friccional de pressão). Isto significa que os primeiros métodos e correlações desenvolvidos para o escoamento bifásico sofrem não apenas por seu caráter excessivamente empírico, mas também pela falta de tratamento adequado para as diferenças de velocidade entre as fases, representada pela omissão dos termos correspondentes devido à simples extensão do balanço macroscópico de energia mecânica deduzido originalmente para escoamentos monofásicos. Não por acaso, ao insistir nesta estratégia, a abordagem *mecanística* não foi capaz de obter resultados definitivamente melhores que os das correlações empíricas, como já foi relatado.

Talvez a maior surpresa proporcionada pelos resultados aqui obtidos esteja na superioridade que o Modelo *Drift-Flux* quase sempre exibiu em relação ao Modelo de Dois Fluidos. Suas previsões foram melhores para as duas variáveis analisadas em quase todos os regimes, ao passo que a revisão bibliográfica apresentada conduz à expectativa oposta (isto é, que o Modelo de Mistura, de menor complexidade, seja

capaz, na melhor das hipóteses, de aproximar os resultados do detalhado e preciso Modelo de Dois Fluidos).

A melhor explicação para a diferença observada encontra-se justamente naquele que é, teoricamente, o ponto forte do Modelo de Dois Fluidos - sua formulação mais detalhada. A consideração de tamanha gama de fenômenos e características (forças interfaciais, diferenças de pressão entre as fases e a interface, área interfacial específica, etc.) somente se constitui em uma vantagem na medida que se dispõe de modelos complementares suficientemente acurados, e, de fato, a literatura aponta com alguma frequência suas necessidades de aprimoramento (vide, por exemplo, a Seção 4.2.5, em que inclusive foi mencionada a possibilidade de prejuízos aos resultados do Modelo de Dois Fluidos em relação aos do *Drift-Flux*).

Mas também não é o caso de se generalizar e afirmar que o Modelo *Drift-Flux* é sempre superior. Isto ficou claro diante dos melhores resultados do Modelo de Dois Fluidos para a variação de pressão nos escoamentos Estratificados descendentes - e vale destacar que, neste caso, não foi considerada a diferença de pressão entre as fases. O equacionamento separado das duas fases já foi suficiente.

Por fim, pode-se concluir que, à exceção de casos pontuais, o Modelo *Drift-Flux* se mostrou uma boa opção para a simulação unidimensional de escoamentos bifásicos em estado estacionário, tendo proporcionado os resultados mais acurados por meio de equações de conservação e constitutivas menos complexas e menos numerosas que as do Modelo de Dois Fluidos.

## 6.4 Capacidade de Predição

Informações interessantes adicionais acerca do potencial dos modelos estudados podem ser obtidas através da análise de gráficos como os apresentados na Figura 6.16. Estes foram elaborados com base em um conjunto de experimentos de MUKHERJEE (1979) que diferem por apenas uma condição experimental relevante (a velocidade superficial da fase vapor). As demais variáveis importantes (o líquido utilizado e sua vazão, bem como o ângulo de inclinação da tubulação) são sempre as mesmas. Ao ilustrar quão bem (ou mal) dado modelo foi capaz de acompanhar as tendências indicadas pela curva experimental, gráficos deste tipo proporcionam uma noção da *capacidade de predição* da formulação matemática em discussão (isto é, de seu potencial para simular condições diferentes das experimentais).

A Figura 6.16a mostra, por exemplo, que a fração de vazios da fase vapor aumentou junto com a vazão alimentada desta fase. Isto leva à redução da massa específica  $\rho_m$  da mistura bifásica, e portanto, do termo gravitacional na Equação 3.106. Em se tratando de um escoamento vertical ascendente, o que se espera então são variações de pressão de magnitude cada vez menor, uma vez que nesta configuração,

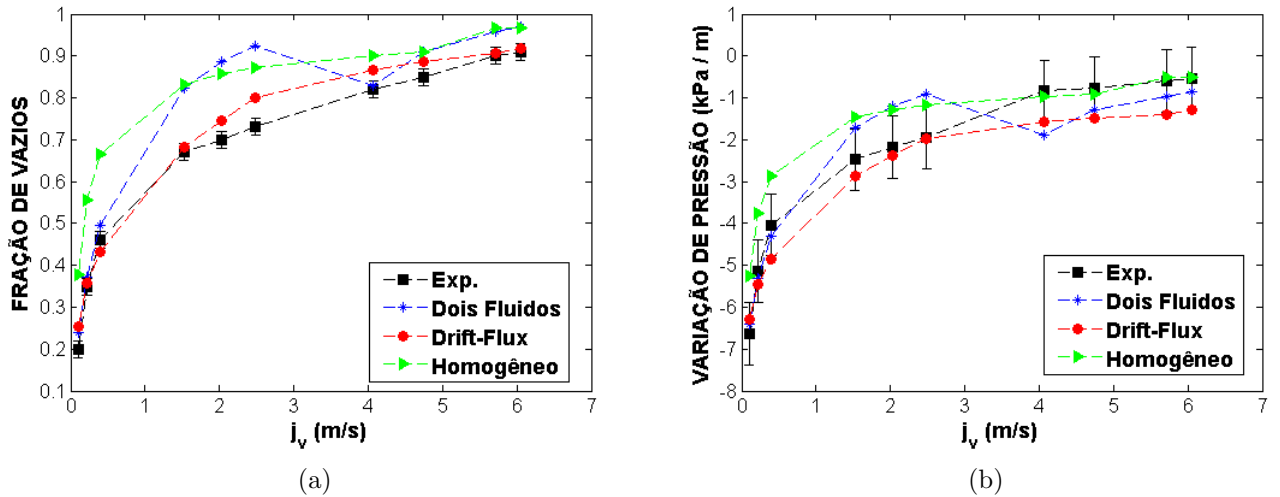


Figura 6.16: Comportamentos experimental e previstos pelos modelos de interesse da (a) fração de vazios e (b) variação de pressão como função de  $\langle j_v \rangle$  para óleo lubrificante a  $\langle j_l \rangle = 0,0274$  m/s em  $\theta = 90^\circ$ .

a maior parcela da queda de pressão deve-se justamente à contribuição estática analisada (BRILL e MUKHERJEE, 1999).

Tal expectativa é corroborada pela curva experimentalmente levantada na Figura 6.16b, a qual também mostra que os modelos matemáticos de interesse acompanharam adequadamente a tendência demonstrada. A única exceção neste sentido corresponde ao comportamento do Modelo de Dois Fluidos entre  $\langle j_v \rangle \approx 2,5$  m/s e  $\langle j_v \rangle \approx 4,0$  m/s, intervalo no qual MUKHERJEE (1979) observou a transição entre os regimes *Slug* e *Annular-Mist* (o critério baseado em  $\lambda_l$ , mencionado anteriormente e utilizado no presente trabalho, classifica os últimos quatro pontos no regime *Mist*). Esta anomalia pode ser uma demonstração de que a modelagem baseada apenas em regimes de escoamento, sem previsão da evolução dinâmica das interfaces, realmente possui as deficiências discutidas na literatura e nos capítulos anteriores.

Os erros experimentais estimados também se encontram representados nos gráficos por meio de barras de erro. Verifica-se assim que todos os cálculos de variação de pressão pelo Modelo *Drift-Flux* diferem do valor experimental por menos que o erro de medição aproximado. O mesmo não se pode afirmar a respeito da fração de vazios, embora os cálculos do referido modelo para esta variável também sejam nitidamente os melhores. Com relação à variação de pressão, é interessante observar que os últimos três pontos foram reproduzidos por todos os modelos com desvios menores que o erro do sensor, o que os tornam *estatisticamente equivalentes* nesses casos.

A Figura 6.17 mostra gráficos análogos para outro conjunto de experimentos, realizados com uma vazão maior de querosene (de massa específica parecida com

a do óleo lubrificante, e viscosidade cerca de dez vezes menor) em uma inclinação ascendente intermediária entre a horizontal e a vertical.

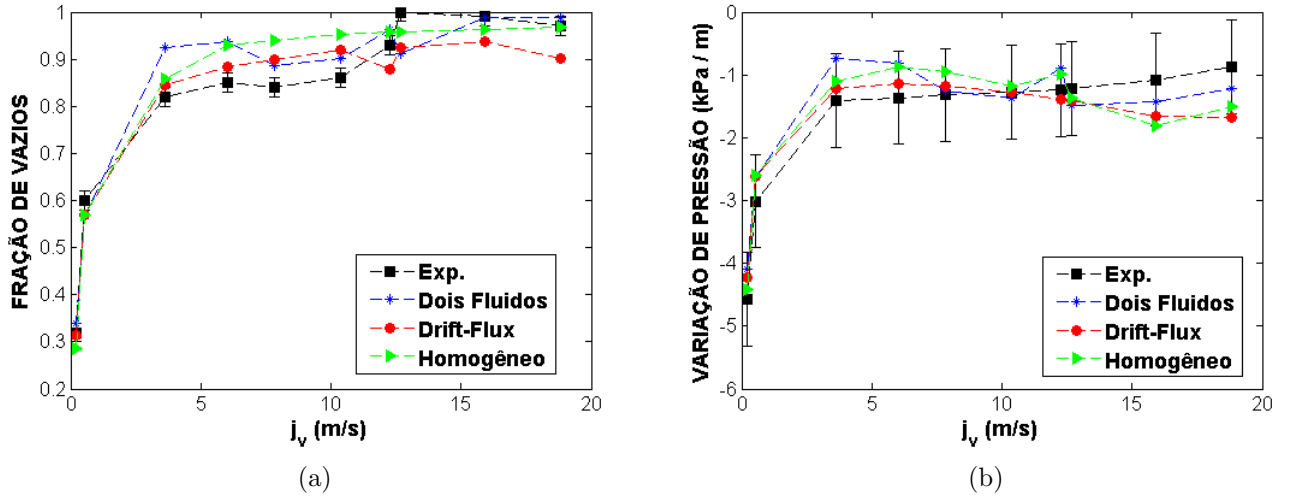


Figura 6.17: Comportamentos experimental e previstos pelos modelos de interesse da (a) fração de vazios e (b) variação de pressão como função de  $\langle j_v \rangle$  para querosene a  $\langle j_l \rangle = 0,1097$  m/s em  $\theta = 50^\circ$ .

Nestas condições de inclinação menos acentuada e velocidades maiores (os eixos das abcissas agora mostram valores maiores também para  $\langle j_v \rangle$ ), espera-se um domínio menor da contribuição gravitacional, embora a mesma permaneça importante (o seno de  $50^\circ$  vale 0,766).

A Figura 6.17b de fato mostra respostas das variações de pressão medidas bem alinhadas às mudanças nas frações de vazios correspondentes (Figura 6.17a), embora a semelhança não seja a mesma que existe entre as Figuras 6.16a e 6.16b. As tendências de ambas as curvas experimentais na Figura 6.17 tornam-se cada vez mais diferentes com o aumento de  $\langle j_v \rangle$ , quando as perdas friccionais também ficam maiores.

Os três modelos estudados mostraram, em mais este caso, boa capacidade de predição, tendo acompanhado a tendência geral das curvas medidas por toda a faixa de valores de  $\langle j_v \rangle$ . Cabe destacar que a Figura 6.17b indica a equivalência estatística entre as três abordagens no caso da variação de pressão.

Nestas condições, atravessa-se novamente a fronteira entre os padrões *Slug* e *Mist*, desta vez entre  $\langle j_v \rangle \approx 12,70$  m/s e  $\langle j_v \rangle \approx 15,90$  m/s (antepenúltimo e penúltimo pontos). A curva de fração de vazios do Modelo de Dois Fluidos tornou a apresentar, nesta região de transição, uma variação diferente (mais acentuada) da experimental e dos demais modelos, reforçando a discussão anterior sobre este aspecto.

A Figura 6.18 apresenta comparações com dados medidos em uma vazão de líquido bastante superior às anteriores, e com a tubulação na posição horizontal.

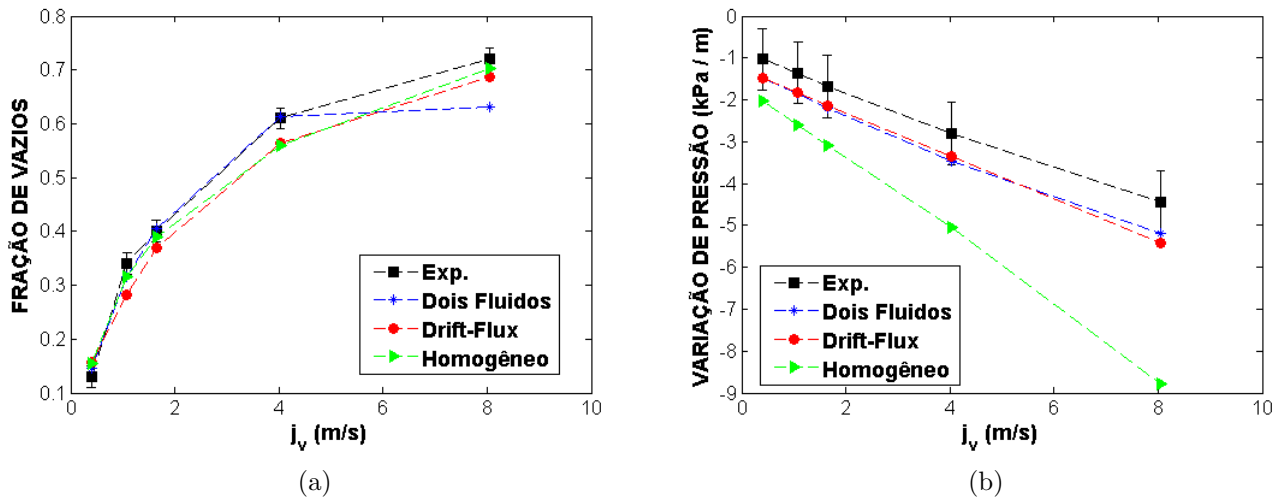


Figura 6.18: Comportamentos experimental e previstos pelos modelos de interesse da (a) fração de vazios e (b) variação de pressão como função de  $\langle j_v \rangle$  para querosene a  $\langle j_l \rangle = 2,2311$  m/s em  $\theta = 0^\circ$ .

Com a anulação dos efeitos da contribuição gravitacional, as mudanças na fração de vazios deixaram de influenciar tão nitidamente os valores de variação de pressão. Agora são as perdas por atrito que dominam, daí as variações de pressão assumirem magnitudes maiores com o aumento da vazão de vapor.

Os Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux*, complementados pelo método de CHAXTON *et al.* (1972) para o atrito na parede, apresentaram ótimos resultados de variação de pressão, permanecendo sempre dentro dos limites do erro do sensor. Já a correlação empírica Homogênea manteve-se fora das barras de erro, apresentando erros crescentes com a vazão da fase vapor. As seções anteriores de fato mostraram os piores resultados para esta última abordagem nos regimes de Bolhas (primeiro ponto), *Slug* (três pontos seguintes) e Anular (último ponto).

O único efeito visível das transições entre padrões de escoamento encontra-se na Figura 6.18a: o Modelo de Dois Fluidos, que vinha apresentando resultados quase exatos de fração de vazios, deixou de fazê-lo quando o regime tornou-se Anular.

## 6.5 Considerações Finais

Neste capítulo descreveu-se a comparação com os dados experimentais de MUKHERJEE (1979) das frações de vazios e variações de pressão previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* e pela correlação Homogênea empírica de BEGGS e BRILL (1973).

Os piores resultados foram (previsivelmente) obtidos com a abordagem Homogênea. As equações constitutivas foram selecionadas de modo a demonstrar que

este fraco desempenho possui relação com o tratamento demasiadamente simplificado e empírico do problema de interesse.

O Modelo de Dois Fluidos mostrou-se uma alternativa robusta, mas de acurácia menor que a do Modelo *Drift-Flux*. Esta surpreendente observação pode ser explicada pela alta quantidade de detalhes que compõem sua formulação matemática, gerando a dependência de boas predições a partir de um número maior de modelos complementares.

Conclui-se, então, que o Modelo *Drift-Flux* mostrou-se a melhor opção estudada para simulações unidimensionais de escoamento bifásico em estado estacionário. Além dos resultados mais acurados, o mesmo apresenta como vantagem adicional uma formulação matemática de complexidade bastante inferior à do Modelo de Dois Fluidos.

No próximo capítulo introduz-se uma proposta numérica para simulações unidimensionais em estado transiente.

# Capítulo 7

## Simulação Dinâmica

Todos os resultados apresentados até este ponto foram baseados na solução dos modelos estudados de escoamento bifásico em estado estacionário. As equações originais dos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* possuem, contudo, a importante propriedade de também possibilitar o estudo do problema de interesse em estado transiente mediante a aplicação dos métodos numéricos necessários.

Neste capítulo procura-se demonstrar que a Abordagem Algébrico-Diferencial proposta no Capítulo 5 também pode ser aproveitada em *simulações dinâmicas*. É apresentada, para tanto, uma primeira forma de adaptação da referida estratégia. Seus resultados são brevemente discutidos, ressaltando-se, quando for o caso, as necessidades de aprimoramento.

### 7.1 Metodologia

Em BRENAN *et al.* (1996) e ASCHER e PETZOLD (1998) é descrito o chamado *Método das Linhas* (*Method of Lines*) para a solução numérica de equações diferenciais parciais no tempo e em uma variável espacial. A técnica consiste em discretizar apenas as derivadas espaciais, convertendo o problema em um sistema de EDOs no tempo. Aplicado à equação da continuidade 3.104 do Modelo de Mistura, tal procedimento resultaria em:

$$\frac{d\rho_{m(n)}}{dt} + \frac{\rho_{m(n)}v_{m(n)} - \rho_{m(n-1)}v_{m(n-1)}}{\Delta x_n} = 0 \quad (7.1)$$

em que empregou-se a *diferença finita regressiva* (de primeira ordem) na discretização espacial. BRENAN *et al.* (1996) apontam duas importantes vantagens associadas a tal abordagem, a primeira das quais é ser computacionalmente eficiente na medida que se atribuirá ao código integrador a seleção dos passos no tempo. A segunda vantagem está no fato de que somente a discretização das derivadas espaciais é que caberá ao usuário, buscando reduzir o esforço necessário à programação

computacional do cálculo.

No que tange ao presente trabalho e à segunda vantagem, pode-se argumentar que seria mais interessante “inverter” a aplicação da técnica, discretizando-se as derivadas no tempo e deixando a integração no espaço para códigos como o DASSLC. Tal abordagem - inteiramente análoga ao *Transverse Method of Lines* recomendado por ASCHER e PETZOLD (1998) para *Problemas de Valor de Contorno* em que o espaço (e não o tempo) exige tratamento diferenciado - traz a conveniência de substituir o método dos volumes finitos pela discretização de poucos termos transientes (vide modelos apresentados no Capítulo 3). Outro importante benefício é a possibilidade de pronta extensão da Abordagem Algébrico-Diferencial proposta para simulações transientes. Tomando-se como novo exemplo a equação da continuidade da fase vapor 3.105, verifica-se que a discretização do termo transiente por diferenças finitas regressivas resulta em:

$$\frac{\alpha_{v(n)}\rho_{v(n)} - \alpha_{v(n-1)}\rho_{v(n-1)}}{\Delta t} + \frac{d[\alpha_{v(n)}\rho_{v(n)}v_{m(n)}]}{dx} = \Gamma_{v(n)} - \frac{d}{dx} \left[ \frac{\alpha_{v(n)}\rho_{v(n)}\rho_{l(n)}}{\rho_{m(n)}} \hat{v}_{v(n)}^{\text{des}} \right] \quad (7.2)$$

Resultados análogos à Equação 7.2, que também podem ser obtidos pela adoção do esquema totalmente implícito na integração dos modelos no tempo (ver Seção 5.2.1), permitem avançar em  $t$  mediante a solução de um sistema DAE a cada passo  $\Delta t$ .

### 7.1.1 Seleção do Passo de Integração no Tempo

O programa computacional desenvolvido foi adaptado para permitir a realização de simulações dinâmicas através da anulação ou não dos termos “fonte” oriundos da discretização das derivadas no tempo conforme se esteja resolvendo um problema estacionário ou transiente.

Neste último caso, os termos transientes são aproximados por diferenças finitas regressivas conforme exemplificado, e as condições iniciais (em  $t = t_0$  especificado pelo usuário) para todo  $x$  são calculadas através da solução do sistema DAE neste instante em estado permanente.

Segue-se então um processo iterativo até o instante final especificado para a simulação. Em cada uma dessas iterações, de posse de  $\Delta t$ , o programa resolve o sistema DAE para obter os resultados referentes ao novo instante de tempo, armazenando-os devidamente.

Dentre todas as etapas descritas, a mais importante é possivelmente a seleção do passo de integração no tempo, dado que a acurácia da solução obtida depende



diretamente do mesmo. Embora o programa permita a especificação de  $\Delta t$  constante pelo usuário, esta abordagem básica e simples possui a desvantagem de não fazer qualquer controle dos erros de truncamento.

Na pesquisa por uma técnica de ajuste do passo de integração no tempo de acordo com uma tolerância pré-especificada, optou-se por implementar aquela descrita por GILAT e SUBRAMANIAM (2014). Estes autores se baseiam na seguinte expressão para o *erro de truncamento local* ETL de uma aproximação numérica de ordem  $N$ :

$$\text{ETL}(\Delta t) = K_{\text{et}} \Delta t^N \quad (7.3)$$

em que  $K_{\text{et}}$  é uma constante associada ao problema de interesse, de valor desconhecido *a priori*.

Se o passo de integração for reduzido pela metade, o erro de truncamento associado modifica-se para:

$$\text{ETL}(\Delta t/2) = \frac{K_{\text{et}} \Delta t^N}{2^N} \quad (7.4)$$

mas seriam necessários dois destes passos para se chegar a uma solução no mesmo valor da variável independente (tempo) alcançado com o passo original, incorrendo-se em um erro estimado de:

$$2\text{ETL}(\Delta t/2) = \frac{K_{\text{et}} \Delta t^N}{2^{N-1}} \quad (7.5)$$

Portanto, partindo-se de dado instante de tempo  $t$  em que a solução numérica para a variável de interesse (aqui representada genericamente por  $y$ ) já foi determinada, é possível obter, em  $t + \Delta t$ , as soluções numéricas  $y^{(i)}$  e  $y^{(ii)}$ , as quais diferem do valor exato por  $\text{ETL}(\Delta t)$  e  $2\text{ETL}(\Delta t/2)$ , respectivamente. Segue daí que  $y^{(i)}$  e  $y^{(ii)}$  diferem entre si por  $\text{ETL}(\Delta t) - 2\text{ETL}(\Delta t/2)$  e, supondo-se  $K_{\text{et}}$  constante no intervalo  $[t; t + \Delta t]$ , obtém-se:

$$K_{\text{et}} = \frac{2^{N-1} [y^{(i)} - y^{(ii)}]}{\Delta t^N [2^{N-1} - 1]} \quad (7.6)$$

Em suma, o procedimento descrito por GILAT e SUBRAMANIAM (2014) consiste em um *experimento numérico* que possibilita determinar a constante  $K_{\text{et}}$ . Uma vez conhecido este valor, a Equação 7.3 pode ser utilizada para estimar o passo de integração associado ao erro máximo tolerado  $\text{ETL}^{(\text{max})}$ :

$$\Delta t = \left[ \frac{\text{ETL}^{(\text{max})}}{K_{\text{et}}} \right]^{1/N} \quad (7.7)$$

Esta técnica de seleção do passo no tempo foi implementada no código computa-

cional desenvolvido no presente trabalho. O programa resolve o sistema DAE uma primeira vez com o passo estimado (este corresponde ao passo ajustado na iteração anterior, exceto na primeira iteração, quando especificou-se  $\Delta t = 2$  min nos testes realizados), utilizando em seguida a metade deste valor para outras duas soluções consecutivas do modelo de escoamento bifásico selecionado.

Para os fins de primeiras demonstrações da proposta, julgou-se suficiente aplicar o controle do erro de truncamento aos valores calculados a jusante da tubulação de três variáveis:  $P$ ,  $T$  e  $\alpha_v$ . O código permite a especificação de uma tolerância relativa porcentual para a integração no tempo, a qual é aplicada sobre as soluções do último instante de tempo concluído para obter, nas devidas unidades de cada uma destas três variáveis, os valores de  $ETL^{(\max)}$  a utilizar na Equação 7.7 junto com  $N = 2$ . O passo de integração selecionado ao final é o menor dentre  $\Delta t_P$ ,  $\Delta t_T$  e  $\Delta t_\alpha$ .

## 7.2 Resultados e Discussão

A eficácia da metodologia proposta para simulações dinâmicas foi estudada com base em simulações de condições fictícias ligeiramente diferentes daquelas correspondentes ao Cenário 1 descrito na Seção 5.5. A vazão mássica alimentada de nafta foi reduzida à metade, e o comprimento considerado da tubulação foi ampliado para 60 m. Foram mantidos os valores dos demais parâmetros, e a seleção das equações constitutivas seguiu as previsões do código regularizado correspondente ao mapa de MANDHANE *et al.* (1974).

Tomou-se por objetivo verificar a influência sobre  $P$  e  $\alpha_v$  ao aplicar uma oscilação de  $2,5^\circ\text{C}$  na temperatura de entrada da tubulação, informada ao programa como:

$$T(x = 0; t) = 165,95 + 2,5\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{10}\right) [1 - \eta(t - 5)] \quad (7.8)$$

em que  $T$  encontra-se expressa em  $^\circ\text{C}$  e  $t$ , em minutos. Esta perturbação pode ser visualizada graficamente na Figura 7.1a.  $\eta$  é a função de regularização que foi ilustrada na Figura 5.4, cumprindo aqui a função de anular a variação senoidal após meio período sem introduzir descontinuidades numéricas no tempo.

As primeiras simulações foram executadas com passo constante de  $\Delta t = 5$ s entre  $t_0 = 0$  e  $t = 10$  min (o que exige um total de 120 passos). As respostas na saída da tubulação, apresentadas na Figura 7.1, mostraram pouca sensibilidade ao modelo de escoamento bifásico escolhido (Dois Fluidos ou *Drift-Flux*). A Figura 7.1b revela que  $\alpha_v$  na saída do tubo demora cerca de meio minuto para estabilizar-se após cessar a perturbação na temperatura de entrada. A pressão na saída se estabiliza um pouco mais rápido, não sem antes exibir um leve *overshoot* em relação ao estado

estacionário (previsto por ambos os modelos).

Os resultados obtidos com  $\Delta t$  fixo já são suficientes para comprovar na prática a viabilidade de se aproveitar a Abordagem Algébrico-Diferencial proposta em simulações dinâmicas, mas deixam em aberto a questão sobre qual valor de passo adotar, o que é de fundamental importância para a acurácia e eficiência computacional dos cálculos.

Visando demonstrar o potencial do controle dos erros de truncamento no tempo no que diz respeito à integração das equações de interesse, repetiu-se as simulações com ambos os modelos, adotando-se desta vez uma tolerância relativa de 0,25% em conjunto com a estratégia já discutida para estimativas de  $\Delta t$ .

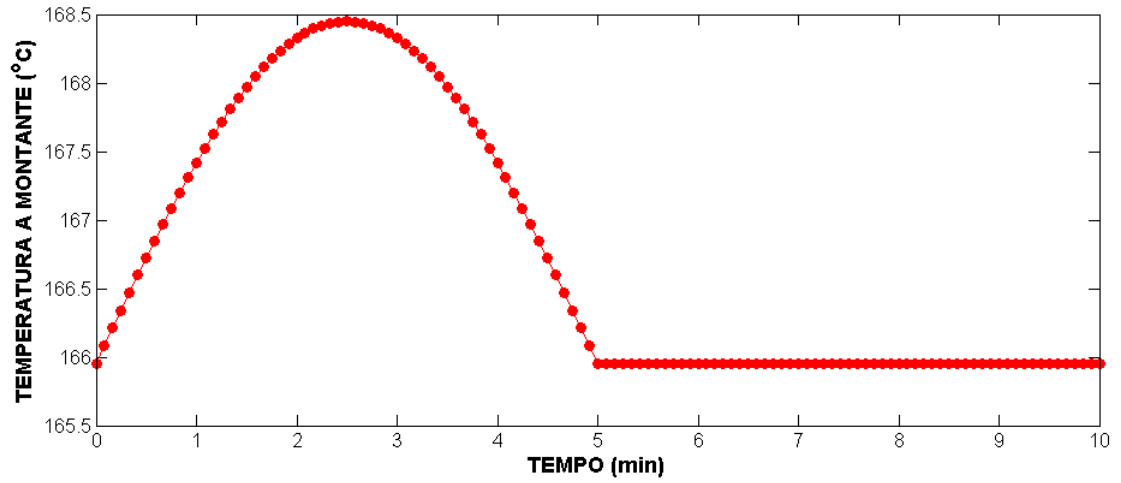
Os resultados apresentados na Figura 7.2 e na Tabela 7.1 não deixam dúvidas a respeito dos ganhos de eficiência em relação às simulações iniciais. Naquele caso, sem saber sequer uma ordem de grandeza razoável para o passo de integração, foi necessário recorrer a um valor julgado como reduzido e utilizá-lo por todo o cálculo. Agora, adotando-se a técnica de GILAT e SUBRAMANIAM (2014), foi possível resolver o mesmo problema com um número de passos quase dez vezes menor.

Tabela 7.1: Passos de integração no tempo ajustados nas simulações dinâmicas com os Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux*.

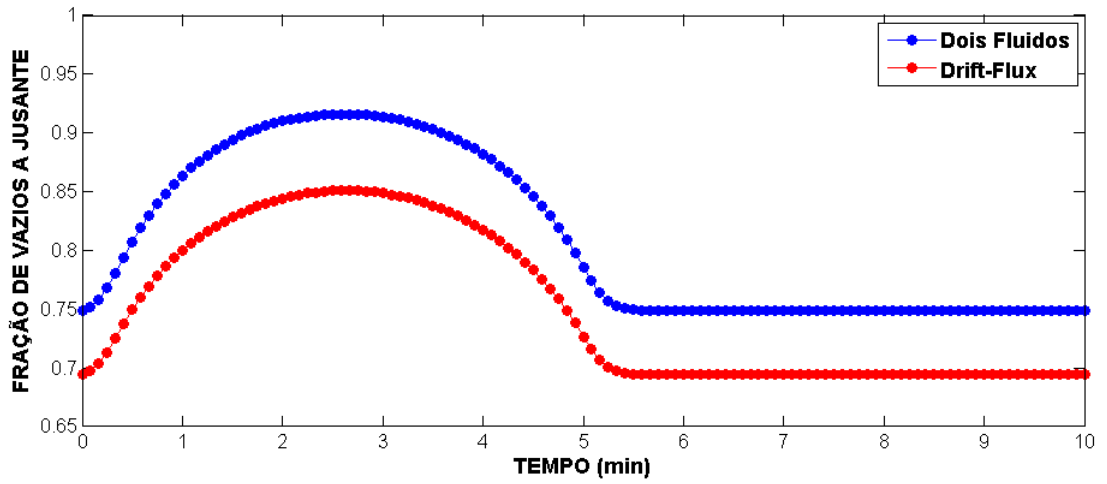
	PASSOS DE INTEGRAÇÃO (s)	
	Dois Fluidos	<i>Drift-Flux</i>
1	63,124	61,852
2	54,471	51,178
3	63,832	53,666
4	51,924	52,136
5	29,375	36,834
6	18,758	22,316
7	13,917	15,440
8	7,4002	7,5307
9	6,2388	6,0066
10	6,2316	5,8264
11	7,5187	6,8100
12	12,605	10,947
13	39,663	34,633
14	224,94	234,83

A estratégia adaptativa implementada mostrou-se capaz de reduzir o passo para cerca de 6s quando necessário para a previsão acurada da região do *overshoot* na pressão, para depois aumentá-lo progressivamente em até quase 40 vezes, à medida que os efeitos da perturbação induzida se dissipavam.

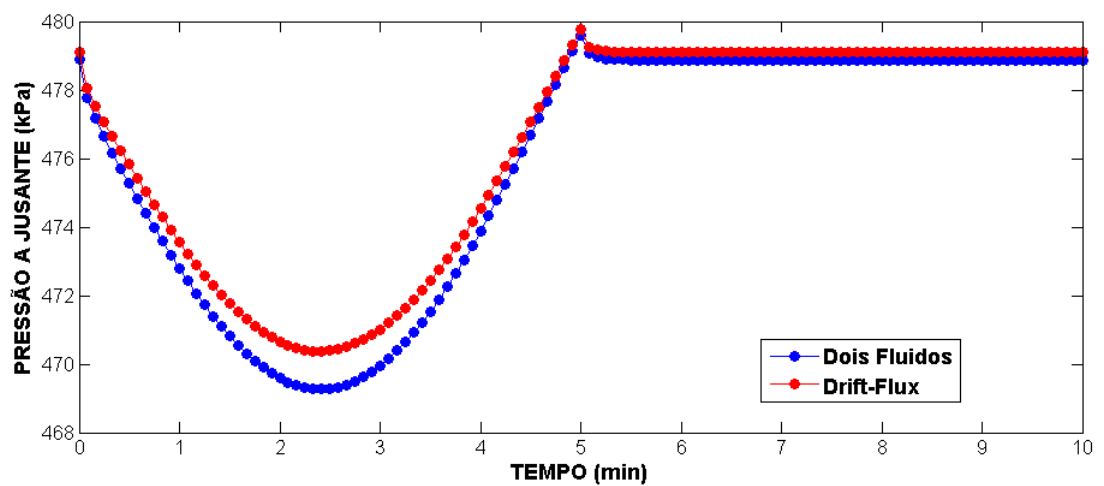
A Figura 7.3 evidencia que a estratégia adotada de seleção do passo no tempo conduziu à previsão das mesmas respostas obtidas com um passo fixo muito reduzido,



(a)

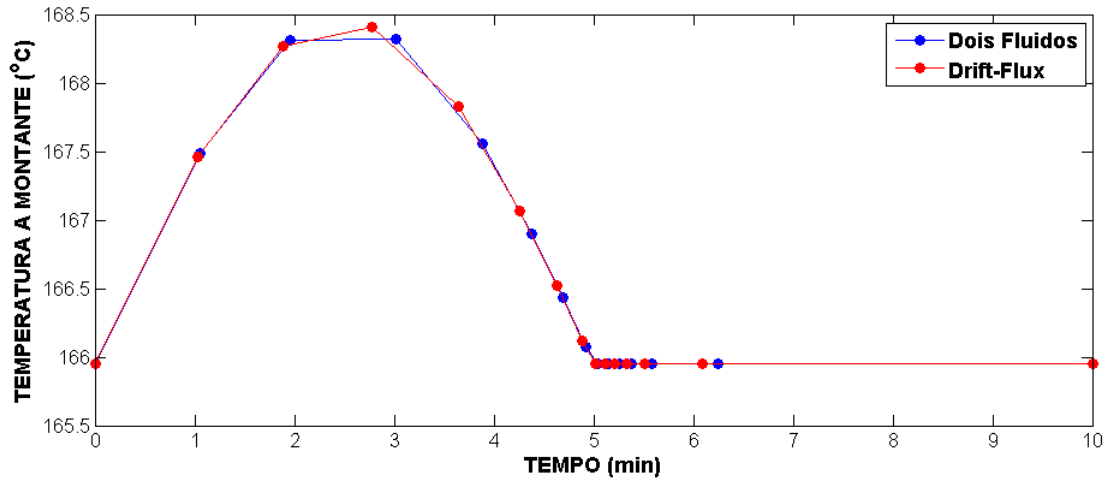


(b)

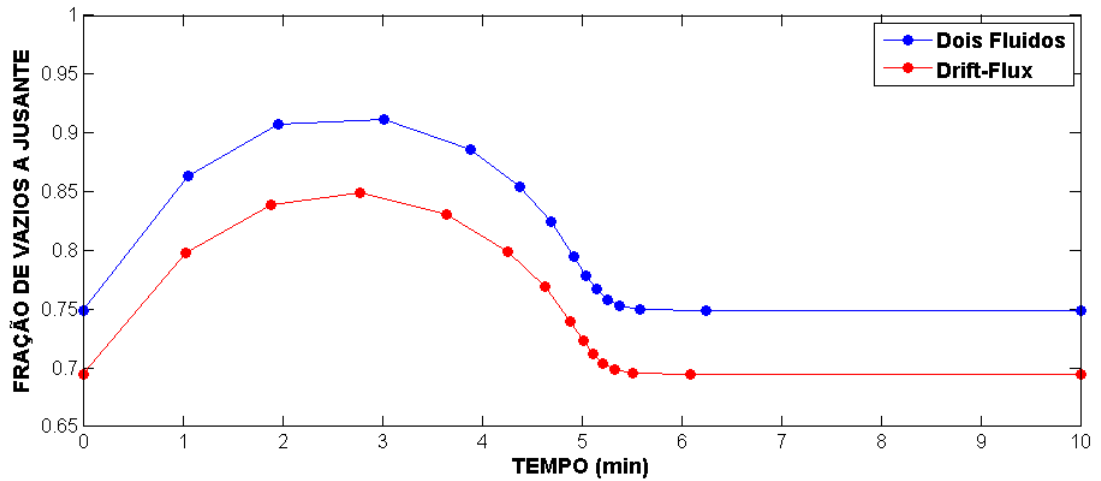


(c)

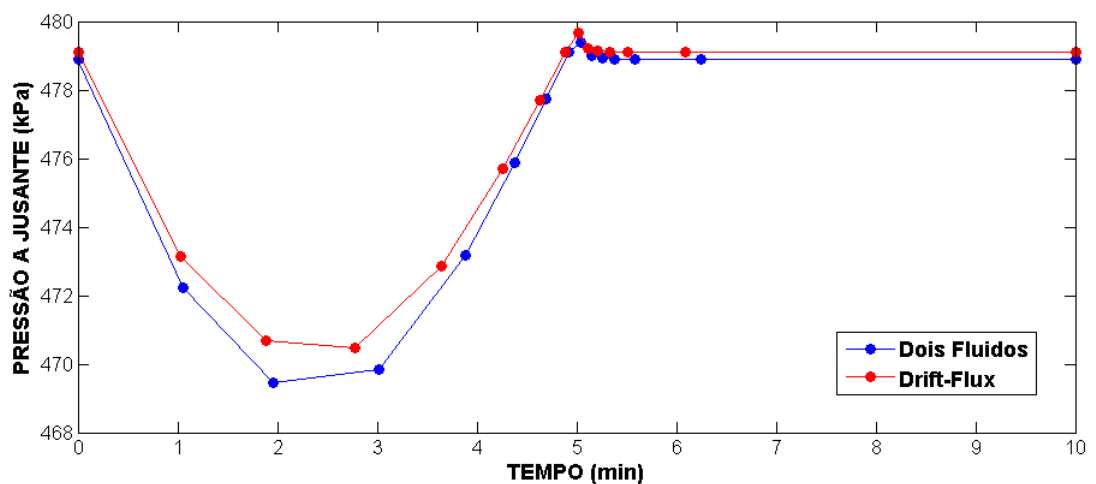
Figura 7.1: Respostas previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* da fração de vazios e da pressão na saída da tubulação frente à variação com o tempo da temperatura de entrada (simulações dinâmicas com passo fixo de  $\Delta t = 5s$ ).



(a)



(b)



(c)

Figura 7.2: Respostas previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* da fração de vazios e da pressão na saída da tubulação frente à variação com o tempo da temperatura de entrada (simulações dinâmicas com ajuste do passo  $\Delta t$ ).

esclarecendo que as curvas da Figura 7.2 somente são menos suaves porque conectam pontos discretos em número reduzido.

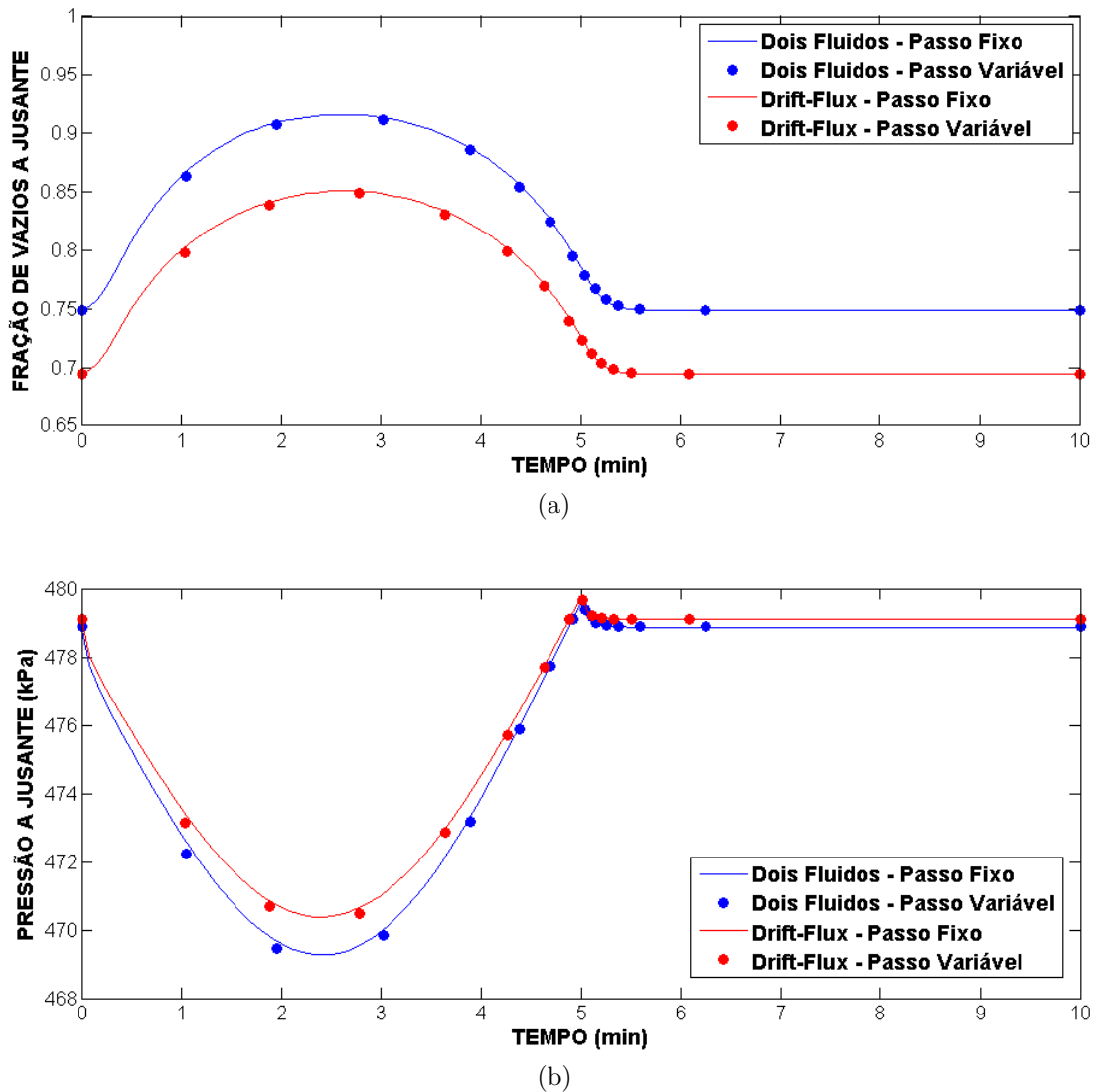


Figura 7.3: Respostas previstas pelos Modelos de Dois Fluidos e *Drift-Flux* da fração de vazios e da pressão na saída da tubulação frente à variação com o tempo da temperatura de entrada (comparação das simulações dinâmicas com passo  $\Delta t$  fixo e variável).

Vale destacar que o método utilizado para estimativa de  $\Delta t$  é *aproximado*, possuindo inexatidões associadas à consideração de  $K_{et}$  constante na obtenção da Equação 7.6. Não obstante as possibilidades de aprimoramento, a técnica implementada cumpriu com sucesso seu objetivo: o de demonstrar que a Abordagem Algébrico-Diferencial proposta no presente trabalho também pode ser aproveitada em simulações dinâmicas acuradas e eficientes.

## 7.3 Considerações Finais

Neste capítulo valeu-se de estratégias numéricas relativamente simples para demonstrar que a Abordagem Algébrico-Diferencial proposta no presente trabalho, comprovadamente vantajosa para cálculos rigorosos de escoamento bifásico em estado estacionário, também pode ser estendida para simulações em estado transiente.

É interessante destacar que os resultados ilustrados pela Figura 7.2 representam os cálculos mais abrangentes apresentados nesta Tese. Estes aplicaram a seleção criteriosa de passos de integração no tempo e no espaço à solução dos dois modelos mais avançados atualmente disponíveis para simulações unidimensionais de escoamento bifásico, considerando a transferência de calor entre as vizinhanças do sistema e a mistura multicomponente de interesse, cujas propriedades termofísicas e de transporte foram obtidas por meio de cálculos termodinâmicos rigorosos.

Uma importante característica da proposta numérica deste capítulo reside na solução simultânea das equações de conservação. Ao evitar sua solução segregada, o método desenvolvido dispensa os tratamentos especiais exigidos por equações *hiperbólicas* discretizadas em volumes finitos (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007). Trata-se, portanto, de uma motivação adicional para o aprimoramento da extensão aplicada à Abordagem Algébrico-Diferencial.

O capítulo seguinte apresenta as conclusões finais do presente trabalho, além de deixar sugestões para trabalhos futuros.

# Capítulo 8

## Conclusões

Após revisar os conceitos necessários de escoamentos monofásicos e optar pela vertente das equações médias de conservação do escoamento bifásico líquido-vapor, este trabalho apresentou inovações teóricas e práticas relacionadas a esta importante área de estudo dos Fenômenos de Transporte.

A contribuição teórica consiste na dedução, a partir do Modelo de Mistura, das equações de balanço que serviram de base para os primeiros métodos e correlações desenvolvidos para cálculos de escoamentos bifásicos. As duas abordagens dificilmente são estudadas em conjunto na literatura, de modo que não foi encontrada referência alguma em que os modelos mais simples fossem adequadamente situados como um caso particular de outra formulação mais completa. Trata-se de um avanço importante na medida que ajuda a compreender, por exemplo, o motivo de determinados setores industriais buscarem os modelos mais atuais em vez de se darem por satisfeitos com os chamados métodos *mecanísticos*. A dedução apresentada na Seção 3.6.4 deixa claro que, além de melhorar a modelagem das contribuições friccional, estática e aceleracional, o caminho para obter melhor desempenho que o das correlações empíricas passava também pelo tratamento adequado do movimento relativo entre as fases através de termos que não figuram nos balanços macroscópicos de escoamentos monofásicos.

As propostas científicas de cunho prático deste trabalho dizem respeito à solução numérica dos modelos unidimensionais de escoamento bifásico. A pesquisa pela literatura relacionada revelou uma predominância de trabalhos em que o método dos volumes finitos é aplicado aos modelos de interesse tal qual se faria em estudos mais complexos de CFD, sem muita apreciação pela simplicidade geométrica característica das formulações unidimensionais. Nem mesmo as publicações que tentaram estratégias mais diretas chegaram a explorar este aspecto em todo seu potencial.

A solução das equações de balanço e constitutivas do escoamento bifásico através de métodos há muito consolidados para sistemas DAE foi aqui proposta como uma alternativa superior à prática atual em termos de eficiência e acurácia. Esta expec-



tativa foi confirmada no Capítulo 5 através de comparações detalhadas e objetivas entre ambas as abordagens do problema estacionário. Posteriormente, demonstrou-se no Capítulo 7 que a estratégia Algébrico-Diferencial também pode ser adaptada para simulações dinâmicas.

Além de constituir-se em proposta do presente trabalho, a solução via DASSLC dos modelos de interesse também foi utilizada no Capítulo 6 para a verificação de seus desempenhos quanto à reprodutibilidade de medições experimentais de frações volumétricas e variação de pressão. Este estudo demonstrou uma surpreendente (porém compreensível em posterior análise) superioridade do Modelo *Drift-Flux* em relação ao de Dois Fluidos, tornando o primeiro uma opção ainda mais atraente em face de seu equacionamento mais simples. A obtenção dos piores resultados com a correlação empírica Homogênea, por outro lado, já era esperada.

## 8.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

A leitura da presente Tese permite identificar diversas possibilidades de investigação em trabalhos futuros. Dentre estas, citam-se:

- aplicar a eficiente Abordagem Algébrico-Diferencial à solução dos Modelos de Dois Fluidos e/ou *Drift-Flux* complementados com as equações da continuidade para espécies químicas, possibilitando a simulação de escoamentos multicomponente no máximo nível de rigor alcançável com as equações médias.
- investigar o potencial para estimativas mais apuradas do passo de integração no tempo em simulações dinâmicas, bem como a possibilidade de se utilizar aproximações numéricas de mais alta ordem de acurácia.
- ampliar a verificação dos modelos estudados contra dados experimentais para medições em condições diferentes das analisadas neste trabalho, especialmente no que se refere às transferências de calor e massa (que não puderam entrar na comparação realizada aqui) e ao diâmetro interno do aparato experimental (que favoreceu a correlação empírica Homogênea nos resultados obtidos).
- selecionar, dentre as diversas possibilidades encontradas na literatura, o(s) melhor(es) modelo(s) para previsão de regimes de escoamento e condições de transição, baseando-se para tanto nas reprodutibilidades de observações experimentais como as utilizadas na presente Tese.

# Referências Bibliográficas

- ABBASPOUR, M., CHAPMAN, K. S., GLASGOW, L. A., 2010, “Transient modeling of non-isothermal, dispersed two-phase flow in natural gas pipelines”, *Applied Mathematical Modelling*, v. 34 (fev.), pp. 495–507.
- ABDEL-AAL, H. K., AGGOUR, M., FAHIM, M. A., 2003, *Petroleum and Gas Field Processing*. 1 ed. New York, Marcel Dekker.
- ANSARI, A. M., SYLVESTER, N. D., SARICA, C., et al., 1994, “A Comprehensive Mechanistic Model for Upward Two-Phase Flow in Wellbores”, *SPE Production & Facilities*, v. 9, n. 2 (maio), pp. 143–151.
- ASCHER, U. M., PETZOLD, L. R., 1998, *Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations*. 1 ed. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- BAKER, O., 1954, “Designing for Simultaneous Flow of Oil and Gas”, *The Oil and Gas Journal*, (jul.), pp. 185–195.
- BEGGS, H. D., BRILL, J. P., 1973, “A Study of Two-Phase Flow in Inclined Pipes”, *Journal of Petroleum Technology*, v. 25, n. 5 (maio), pp. 607–617.
- BERGMAN, T. L., LAVINE, A. S., INCROPERA, F. P., et al., 2011, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. 7 ed. Hoboken, John Wiley & Sons.
- BHAGWAT, S. M., GHAJAR, A. J., 2014, “A flow pattern independent drift flux model based void fraction correlation for a wide range of gas-liquid two phase flow”, *International Journal of Multiphase Flow*, v. 59 (fev.), pp. 186–205.
- BIRD, R. B., STEWART, W. E., LIGHTFOOT, E. N., 2002, *Transport Phenomena*. 2 ed. Danvers, John Wiley & Sons.
- BRASIL, N. I., 2004, *Introdução à Engenharia Química*. 2 ed. Rio de Janeiro, Interciência.

- BRENAN, K. E., CAMPBELL, S. L., PETZOLD, L. R., 1996, *Numerical Solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations*. 1 ed. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- BRENNEN, C. E., 2005, *Fundamentals of Multiphase Flows*. 1 ed. New York, Cambridge University Press.
- BRILL, J. P., 1989, “Discontinuities in the Orkiszewski Correlation for Predicting Pressure Gradients in Wells”, *Journal of Energy Resources Technology*, v. 111 (mar.), pp. 34–36.
- BRILL, J. P., MUKHERJEE, H., 1999, *Multiphase Flow in Wells*. 1 ed. Richardson, Society of Petroleum Engineers.
- BROOKS, C. S., HIBIKI, T., ISHII, M., 2012, “Interfacial drag force in one-dimensional two-fluid model”, *Progress in Nuclear Energy*, v. 61 (nov.), pp. 57 – 68.
- CAMPOS, M. C. M. M., TEIXEIRA, H. C. G., 2006, *Controles Típicos de Equipamentos e Processos Industriais*. 1 ed. São Paulo, Edgard Blücher.
- CHANG, Y. S. H., GANESAN, T., LAU, K. K., 2008, “Comparison between Empirical Correlation and Computational Fluid Dynamics Simulation for the Pressure Gradient of Multiphase Flow”. In: *Proceedings of the World Congress on Engineering 2008*, Londres, jul.
- CHAXTON, K. T., COLLIER, J. G., WARD, J. A., 1972, “H.T.F.S. Correlation for Two-Phase Pressure Drop and Void Fraction in Tubes”, *AERE-R7162*.
- CHOI, J., PEREYRA, E., SARICA, C., et al., 2012, “An Efficient Drift-Flux Closure Relationship to Estimate Liquid Holdups of Gas-Liquid Two-Phase Flow in Pipes”, *Energies*, v. 5 (dez.), pp. 5294–5306.
- CHURCHILL, S. W., BERNSTEIN, M., 1977, “A Correlating Equation for Forced Convection From Gases and Liquids to a Circular Cylinder in Crossflow”, *Journal of Heat Transfer*, v. 99 (maio), pp. 300–306.
- COKER, A. K., 2007, *Ludwig’s Applied Process Design for Chemical and Petrochemical Plants - Volume 1*. 4 ed. Burlington, Gulf Professional Publishing.
- CRANE, 1979, *Flow of Fluids through Valves, Fittings and Pipe*. CRANE 410M, Crane Co.
- CROWE, C. T., 2006, *Multiphase Flow Handbook*. 1 ed. London, Taylor & Francis.

- DAUBERT, T. E., DANNER, R. P., 1997, *API Technical Data Book - Petroleum Refining*. 6 ed. Washington, DC, American Petroleum Institute.
- DREW, D. A., PASSMAN, S. L., 1999, *Theory of Multicomponent Fluids*. 1 ed. New York, Springer.
- DUNS, H., ROS, N. C. J., 1963, "Vertical Flow of Gas and Liquid Mixtures in Wells". In: *Proceedings of the Sixth World Petroleum Congress*, pp. 451–463, Tóquio.
- FAGHRI, A., ZHANG, Y., 2006, *Transport Phenomena in Multiphase Systems*. 1 ed. San Diego, Elsevier.
- FERZIGER, J. H., PERIC, M., 2002, *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3 ed. Berlin, Springer.
- FOX, R. W., MCDONALD, A. T., PRITCHARD, P. J., 2011, *Introduction to Fluid Mechanics*. 8 ed. Danvers, John Wiley & Sons.
- GENNES, P. G., WYART, F. B., QUÉRÉ, D., 2004, *Capillarity and Wetting Phenomena - Drops, Bubbles, Pearls, Waves*. 1 ed. New York, Springer.
- GHIAASIAAN, S. M., 2008, *Two-Phase Flow, Boiling and Condensation in Conventional and Miniature Systems*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press.
- GILAT, A., SUBRAMANIAM, V., 2014, *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. 3 ed. Hoboken, John Wiley & Sons.
- GPSA, 2004, *Engineering Data Book*. 12 ed. Tulsa, Gas Processors Suppliers Association.
- GREGORY, G. A., AZIZ, K., 1978, "Calculation of pressure and temperature profiles in multiphase pipelines and simple pipelines networks", *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 17, n. 1 (mar.).
- GREGORY, G. A., MATTAR, L., 1973, "An In-Situ Volume Fraction Sensor for Two-Phase Flows of Non-Electrolytes", *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 12 (abr.), pp. 1–5.
- HAIRER, E., WANNER, G., 1996, *Solving Ordinary Differential Equations II - Stiff and Differential-Algebraic Problems*. 2 ed. Berlin, Springer.
- HASAN, A. R., KABIR, C. S., 1988a, "A Study of Multiphase Flow Behavior in Vertical Wells", *SPE Production Engineering*, v. 3, n. 2 (maio), pp. 263–272.

- HASAN, A. R., KABIR, C. S., 1988b, “Predicting Multiphase Flow Behavior in a Deviated Well”, *SPE Production Engineering*, v. 3, n. 4 (nov.), pp. 474–482.
- HASAN, A. R., KABIR, C. S., 1990, “Performance of a Two-Phase Gas/Liquid Flow Model in Vertical Wells”, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, v. 4 (jul.), pp. 273–289.
- HENAU, V., RAITHBY, G. D., 1995, “A Transient Two-Fluid Model for the Simulation of Slug Flow in Pipelines - I.Theory”, *International Journal of Multiphase Flow*, v. 21 (jun.), pp. 335–349.
- HINDMARSH, A. C., 1980, “LSODE and LSODI, Two New Initial Value Ordinary Differential Equation Solvers”, *SIGNAL Newsl.*, v. 15, n. 4 (dez.), pp. 10–11. ISSN: 0163-5778. doi: 10.1145/1218052.1218054. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/1218052.1218054>>.
- HOSKINS, R. F., 2009, *Delta Functions: Introduction to Generalised Functions*. 2 ed. Cambridge, Woodhead Publishing.
- IKOKU, C. U., 1984, *Natural Gas Production Engineering*. 1 ed. Malabar, Krieger Publishing Company.
- ISHII, M., 1977, “Drift Flux Model and Derivation of Kinematic Constitutive Laws”. In: *Two-phase flows and heat transfer: proceedings of NATO Advanced Study Institute*, 1 ed., Istanbul, Turquia, Hemisphere Publishing Corporation.
- ISHII, M., HIBIKI, T., 2011, *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*. 2 ed. New York, Springer.
- ISL, 2001a, *RELAP5/MOD3.3 Code Manual Volume IV: Models and Correlations*. 1 ed. Idaho Falls, Information Systems Laboratories. Disponível em: <<http://edasolutions.com/old/RELAP5/RELAP5M33/Manuals/index.htm>>.
- ISL, 2001b, *RELAP5/MOD3.3 Code Manual Volume I: Code Structure, System Models, and Solution Methods*. 1 ed. Idaho Falls, Information Systems Laboratories. Disponível em: <<http://edasolutions.com/old/RELAP5/RELAP5M33/Manuals/index.htm>>.
- JONES, D. S. J. S., PUJADÓ, P. R., 2006, *Handbook of Petroleum Processing*. 1 ed. Dordrecht, Springer.

- KELKAR, M., 2008, *Natural Gas Production Engineering*. 1 ed. Tulsa, PennWell.
- KERN, R., 1975, "Piping Design for Two-Phase Flow", *Chemical Engineering*, (jun.), pp. 145–151.
- KISTER, H. Z., 1990, *Distillation Operation*. 1 ed. New York, McGraw-Hill.
- KISTER, H. Z., 2006, *Distillation Troubleshooting*. 1 ed. Hoboken, John Wiley & Sons.
- KLEINSTREUER, C., 2010, *Modern Fluid Dynamics*. 1 ed. New York, Springer.
- KLEINSTREUER, C., 2003, *Two-Phase Flow: Theory and Applications*. 1 ed. London, Taylor & Francis.
- KOLEV, N. I., 2006, *Multiphase Flow Dynamics 4 - Nuclear Thermal Hydraulics*. 1 ed. New York, Springer.
- KUNKEL, P., MEHRMANN, V., 2006, *Differential-Algebraic Equations*. 1 ed. Zürich, European Mathematical Society.
- LAMOUR, R., MÄRZ, R., TISCHENDORF, C., 2013, *Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis*. 1 ed. Berlin, Springer.
- LEVY, S., 1999, *Two-Phase Flow in Complex Systems*. 1 ed. New York, John Wiley & Sons.
- LOCKHART, R. W., MARTINELLI, R. C., 1949, "Proposed Correlation of Data for Isothermal Two-Phase, Two-Component Flow in Pipes", *Chemical Engineering Progress*, v. 45, n. 1 (jan.), pp. 39–48.
- MANDHANE, J. M., GREGORY, G. A., AZIZ, K., 1974, "A Flow Pattern Map for Gas-Liquid Flow in Horizontal Pipes", *International Journal of Multiphase Flow*, v. 1 (out.), pp. 537–553.
- MOKHATAB, S., POE, W. A., 2012, *Handbook of Natural Gas Transmission and Processing*. 2 ed. Waltham, Gulf Professional Publishing (Elsevier).
- MORALES-RUIZ, S., RIGOLA, J., RODRIGUEZ, I., et al., 2012, "Numerical resolution of the liquid-vapour two-phase flow by means of the two-fluid model and a pressure based method", *International Journal of Multiphase Flow*, v. 43 (mar.), pp. 118–130.
- MOUKALLED, F., MANGANI, L., DARWISH, M., 2016, *The Finite Volume Method in Computational Fluid Dynamics*. 1 ed. Cham, Springer.

- MUKHERJEE, H., 1979, *An Experimental Study of Inclined Two-Phase Flow*. Tese de D.Sc., University of Tulsa, Tulsa, Oklahoma, EUA.
- MUNKEJORD, S. T., MØLNVIK, M. J., MELHEIM, J. A., et al., 2005, “Prediction of Two-Phase Pipe Flows Using Simple Closure Relations in a 2D Two-Fluid Model”. In: *Fourth International Conference on CFD in the Oil and Gas, Metallurgical & Process Industries*, Trondheim, jun.
- NIAEI, A., TOWFIGHI, J., SADRAMELI, S. M., et al., 2004, “The combined simulation of heat transfer and pyrolysis reactions in industrial cracking furnaces”, *Applied Thermal Engineering*, v. 24 (out.), pp. 2251–2265.
- NOLTE, C. B., 1979, *Optimum Pipe Size Selection*. 2 ed. Houston, Gulf Publishing Company.
- ORKISZEWSKI, J., 1967, “Predicting Two-Phase Pressure Drops in Vertical Pipe”, *Journal of Petroleum Technology*, v. 19, n. 6 (jun.), pp. 829–838.
- PATANKAR, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. 1 ed. New York, McGraw-Hill.
- PAYNE, G. A., PALMER, C. M., BEGGS, H. D., et al., 1979, “Evaluation of Inclined-Pipe, Two-Phase Liquid Holdup and Pressure-Loss Correlations Using Experimental Data”, *Journal of Petroleum Technology*, v. 31, n. 9 (set.), pp. 1198–1208.
- PETALAS, N., AZIZ, K., 2000, “A Mechanistic Model for Multiphase Flow in Pipes”, *Journal of Canadian Petroleum Technology*, v. 39, n. 6 (jun.).
- PETERS, M. S., TIMMERHAUS, K. D., WEST, R. E., 2003, *Plant Design and Economics for Chemical Engineers*. 5 ed. New York, McGraw-Hill.
- PROSPERETTI, A., TRYGGVASON, G., 2007, *Computational Methods for Multiphase Flow*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press.
- RATKOVICH, N., MAJUMDER, S. K., BENTZEN, T. R., 2013, “Empirical correlations and CFD simulations of vertical two-phase gas-liquid (Newtonian and non-Newtonian) slug flow compared against experimental data of void fraction”, *Chemical Engineering Research and Design*, v. 91 (jun.), pp. 988–998.
- REID, R. C., PRAUSNITZ, J. M., POLING, B. E., 1987, *The Properties of Gases and Liquids*. 4 ed. New York, McGraw-Hill.

- RIAZI, M. R., 2005, *Characterization and Properties of Petroleum Fractions*. 1 ed. West Conshohocken, American Society for Testing and Materials.
- ROSA, E. S., 2012, *Escoamento Multifásico Isotérmico*. 1 ed. Porto Alegre, Bookman.
- ROTAVA, O., 2012, *Aplicações Práticas em Escoamento de Fluidos*. 1 ed. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos.
- SCHÄFER, M., 2006, *Computational Engineering - Introduction to Numerical Methods*. 1 ed. Berlin, Springer.
- SECCHI, A. R., 2012, *Differential-Algebraic System Solver in C*. <http://www.enq.ufrgs.br/enqlib/numeric>, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- SHEN, X., MATSUI, R., MISHIMA, K., et al., 2010, “Distribution parameter and drift velocity for two-phase flow in a large diameter pipe”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 240 (dez.), pp. 3991–4000.
- SMITH, J. M., NESS, H. C. V., ABBOTT, M. M., 2001, *Introduction to Chemical Engineering Thermodynamics*. 6 ed. New York, McGraw-Hill.
- SMITH, T. R., SCHLEGEL, J. P., HIBIKI, T., et al., 2012, “Two-phase flow structure in large diameter pipes”, *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 33 (fev.), pp. 156–167.
- TAITEL, Y., BORNEA, D., DUKLER, A. E., 1980, “Modelling Flow Pattern Transitions for Steady Upward Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes”, *AIChE Journal*, v. 26 (maio), pp. 345–354.
- TALEBI, S., KAZEMINEJAD, H., DAVILU, H., 2012, “A numerical technique for analysis of transient two-phase flow in a vertical tube using the Drift Flux Model”, *Nuclear Engineering and Design*, v. 242 (jan.), pp. 316–322.
- TEIXEIRA, R. G. D., 2013, *Abordagem Algébrico-Diferencial na Simulação Unidimensional do Escoamento Bifásico em Tubos para Processos de Refino*. M.Sc. dissertation, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- TRYGGVASON, G., SCARDOVELLI, R., ZALESKI, S., 2011, *Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press.



- VERSTEEG, H. K., MALALASEKERA, W., 2007, *An Introduction to Computational Fluid Dynamics*. 2 ed. Harlow, Pearson Education.
- VIEIRA, R. C., BISCAIA JR, E. C., 2001, “Direct methods for consistent initialization of DAE systems”, *Computers and Chemical Engineering*, v. 25 (set.), pp. 1299–1311.
- WILCOX, D. C., 2006, *Turbulence Modeling for CFD*. 3 ed. La Cañada, DCW Industries.
- YEOH, G. H., TU, J., 2010, *Computational Techniques for Multi-Phase Flows*. 1 ed. Oxford, Elsevier.
- YEOH, G. H., CHEUNG, C. P., TU, J., 2014, *Multiphase Flow Analysis Using Population Balance Modeling*. 1 ed. Oxford, Elsevier.
- ZHANG, H., WANG, Q., SARICA, C., et al., 2003, “Unified Model for Gas-Liquid Pipe Flow via Slug Dynamics - Part 1: Model Development”, *Journal of Energy Resources Technology*, v. 125 (nov.), pp. 266–273.
- ZOU, L., ZHAO, H., ZHANG, H., 2016a, “Numerical implementation, verification and validation of two-phase flow four-equation drift flux model with Jacobian-free Newton-Krylov method”, *Annals of Nuclear Energy*, v. 87 (jan.), pp. 707–719.
- ZOU, L., ZHAO, H., ZHANG, H., 2016b, “Implicitly solving phase appearance and disappearance problems using two-fluid six-equation model”, *Progress in Nuclear Energy*, v. 88 (abr.), pp. 198–210.

# Apêndice A

## Desenvolvimento do Termo Fonte Interfacial de Momentum

A discussão e a modelagem constitutiva de  $\mathbf{M}_k$ , que é o termo fonte interfacial de quantidade de movimento para a fase  $k$ , são costumeiramente precedidas por sua expansão em diversas contribuições, conforme demonstrado neste Apêndice.

Substituindo-se na Equação 3.37 as definições apresentadas na Seção 2.4.2, obtém-se:

$$\mathbb{I}_k \equiv \mathbf{M}_k = \overline{\nabla X_k \cdot [\rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_k - \boldsymbol{\pi}_k]} = \overline{\nabla X_k \cdot [\rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_k]} - \overline{\nabla X_k \cdot \boldsymbol{\pi}_k} \quad (\text{A.1})$$

Uma vez que, para a conservação de massa, a Equação 3.37 fornece:

$$\mathbb{I}_k \equiv \Gamma_k = \overline{\nabla X_k \cdot [\rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i)]} \quad (\text{A.2})$$

o primeiro termo resultante da Equação A.1 pode ser reescrito de forma simplificada através da definição de uma *velocidade média interfacial*  $\overline{\mathbf{v}_k^i}$ , de modo que (KLEINSTREUER, 2003):

$$\overline{\nabla X_k \cdot [\rho_k (\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i) \mathbf{v}_k]} = \Gamma_k \overline{\mathbf{v}_k^i} \quad (\text{A.3})$$

Desmembrando-se a pressão e o tensor das tensões viscosas na interface em suas médias interfaciais e variações locais (KLEINSTREUER, 2003):

$$P_k = \overline{P}_k^i + P_k^{i, \text{loc}} \quad (\text{A.4a})$$

$$\boldsymbol{\tau}_k = \overline{\boldsymbol{\tau}}_k^i + \boldsymbol{\tau}_k^{i, \text{loc}} \quad (\text{A.4b})$$

desenvolve-se o segundo termo obtido em A.1 como:

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla X_k \cdot \boldsymbol{\pi}_k} &= -\overline{\nabla X_k \cdot (P_k \mathbf{I})} + \overline{\nabla X_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k} = \\
&= -\overline{P_k^i \nabla X_k} - \overline{\nabla X_k \cdot (P_k^{i, \text{loc}} \mathbf{I})} + \overline{\nabla X_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k^i} + \overline{\nabla X_k \cdot \boldsymbol{\tau}_k^{i, \text{loc}}} = \\
&= -\overline{P_k^i \nabla \alpha_k} + \overline{\nabla X_k \cdot (-P_k^{i, \text{loc}} \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}_k^{i, \text{loc}})} + \nabla \alpha_k \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}_k^i} = \\
&= -\overline{P_k^i \nabla \alpha_k} - \mathbf{M}_{ik} + \nabla \alpha_k \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}_k^i} \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

em que verifica-se a introdução do termo de *arrasto interfacial generalizado*  $\mathbf{M}_{ik}$  (ISHII e HIBIKI, 2011; KLEINSTREUER, 2003).

Substituindo-se os resultados A.3 e A.5 em A.1, obtém-se finalmente:

$$\mathbf{M}_k = \Gamma_k \overline{\boldsymbol{v}_k^i} + \overline{P_k^i \nabla \alpha_k} + \mathbf{M}_{ik} - \nabla \alpha_k \cdot \overline{\boldsymbol{\tau}_k^i} = \Gamma_k \overline{\boldsymbol{v}_k^i} + \overline{P_k^i \nabla \alpha_k} + \mathbf{M}_{ik}^d \quad (\text{A.6})$$

em que  $\mathbf{M}_{ik}^d$  é definido por KLEINSTREUER (2003) como a *densidade de forças interfaciais*.

# Apêndice B

## Determinação da Área Interfacial Específica

Nas seções abaixo apresenta-se, para alguns padrões de escoamento, a dedução de expressões para estimativa da área interfacial por unidade de volume,  $a_{lv}$ .

### B.1 Bolhas e Nevoeiro

CROWE (2006) define o *diâmetro médio de Sauter*  $d_{mS}$  de um *spray* como o diâmetro de uma gotícula cuja área superficial por unidade de volume (que vale  $6/d_{mS}$ ) é a mesma de todo o *spray*.

A definição acima somente considera o volume das próprias gotículas. Portanto, a área superficial por unidade de volume de todo o sistema bifásico vale  $6\alpha_l/d_{mS}$ , em que  $\alpha_l$  é a fração volumétrica de gotas no sistema. Este resultado pode ser generalizado para escoamentos nos regimes de Bolhas ou Nevoeiro, escrevendo-se:

$$a_{lv} = \frac{6\alpha_d}{d_{mS}} \quad (\text{B.1})$$

em que  $\alpha_d$  é a fração de vazios da fase dispersa.

O diâmetro médio de Sauter pode ser calculado a partir da *função densidade de probabilidade*  $p(s)$ , a qual expressa como  $p(s) ds$  a fração do número total de partículas compreendida entre os diâmetros  $s$  e  $s + ds$ . Por definição (KLEINS-TREUER, 2003):

$$d_{mS} = \frac{\int_0^{+\infty} s^3 p(s) ds}{\int_0^{+\infty} s^2 p(s) ds} \quad (\text{B.2})$$

A substituição na Equação B.2 da função  $p(s)$  adotada pelo simulador RELAP5

conduz a (ISL, 2001a):

$$d_{mS} = \frac{5}{2}d' \quad (\text{B.3})$$

em que  $d'$  é o diâmetro mais provável da distribuição. A mesma função  $p(s)$  foi utilizada no desenvolvimento do código RELAP5 para relacionar este valor ao diâmetro médio  $d_o$ , obtendo-se (ISL, 2001a):

$$d_o = \frac{3}{2}d' \quad (\text{B.4})$$

Ou seja:  $d_o = 0,6d_{mS}$ . Substituindo-se este resultado na Equação B.1, obtém-se finalmente:

$$a_{lv} = \frac{3,6\alpha_d}{d_o} \quad (\text{B.5})$$

## B.2 *Slug*

Ao apresentar relações constitutivas para as equações da energia do Modelo de Dois Fluidos, o manual do código RELAP5 (ISL, 2001a) aproxima uma dada bolha de Taylor por um cilindro de diâmetro  $0,88d$  ( $d$  é o diâmetro interno da tubulação). É demonstrado que se seu comprimento for grande o suficiente para permitir desprezar as áreas das seções circulares em suas pontas, então a razão entre sua área superficial e seu volume vale  $4,5/d$ . Isto permite escrever:

$$a_{lv}^{(b)} = \frac{4,5\alpha_b}{d} \quad (\text{B.6})$$

em que  $a_{lv}^{(b)}$  representa a contribuição das bolhas de Taylor para a concentração de área interfacial da mistura bifásica.

No entanto, para o cálculo da força de arrasto  $F_i^{(b)}$  correspondente às bolhas de Taylor, a mesma referência define a grandeza  $a_{lv}$  a utilizar como sendo a área *frontal* (e não *superficial*) por unidade de volume, utilizando neste caso um fator de  $1/2$  (em vez de  $1/8$ , como faz a Equação 4.2).  $F_i^{(b)}$  calculada desta forma replica integralmente a definição de coeficiente de arrasto apresentada por BIRD *et al.* (2002). Entretanto, a expressão fornecida por ISL (2001a) para  $a_{lv}^{(b)}$  é função do comprimento local da *malha* empregada na solução numérica. Isto levanta questionamentos acerca da adequação e praticidade do uso de tal equação constitutiva junto com métodos numéricos de passo ajustável, constituindo uma motivação para buscar a independência do tamanho do volume de controle.

Propõe-se aqui a aproximação das bolhas de Taylor por cilindros de diâmetro  $0,88d$  e de comprimento igual a  $x$  vezes seu diâmetro. A razão entre a área frontal e o volume de tal cilindro vale  $1,14/(xd)$ . A área interfacial específica correspondente

é:

$$a_{lv}^{(b)} = \frac{1,14\alpha_b}{xd} \quad (\text{B.7})$$

A multiplicação da equação acima por 4 possibilita seu uso com o fator de 1/8 da Equação 4.2, acarretando a troca do fator 1,14 por 4,56 <sup>1</sup>. É interessante notar que a consideração adicional (e incerta) de  $x = 1$  torna a Equação B.7 praticamente idêntica a B.6 (deduzida para cilindros longos e utilizada também no cálculo da força de arrasto em versões anteriores do RELAP5).

Com o objetivo de flexibilizar a modelagem e o programa computacional desenvolvido no que diz respeito ao comprimento das bolhas de Taylor (possibilitando inclusive investigar a influência deste parâmetro), a área por unidade de volume das mesmas foi programada como:

$$a_{lv} = \frac{K_b}{d} \quad (\text{B.8})$$

com valor padrão de  $K_b \approx 4,56/x$ .

---

<sup>1</sup>Conforme observado em ISL (2001a), a ocorrência do fator de 1/8 na Equação 4.2 em substituição ao valor convencional de 1/2 deve-se ao uso da área *superficial* da bolha, em vez de sua área *frontal* - a primeira corresponde exatamente ao quádruplo da segunda.

# Apêndice C

## Condições Experimentais e Resultados das Simulações

Este apêndice apresenta, sob a forma de tabelas, todas as condições experimentais simuladas e os resultados obtidos com cada um dos três modelos de interesse do escoamento bifásico, os quais deram origem às estatísticas e histogramas analisados no Capítulo 6.

Por conveniência, a ordem de apresentação destas tabelas segue a mesma sequência do Capítulo 6 no que se refere aos subconjuntos de experimentos simulados e à modelagem constitutiva utilizada.

Em cada linha das tabelas, encontra-se destacado em negrito o resultado da fração de vazios e da variação de pressão correspondente ao modelo matemático que mais se aproximou do valor experimentalmente medido (coluna *Exp.*).

Tabela C.1: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime de Bolhas com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)				
						Exp.	Dois Fluidos	Drift-Flux	Homogêneo	Exp.	Dois Fluidos	Drift-Flux
-90	Querosene	0,24	0,10	487,5	300,9	0,80	0,45	0,61	5,04	4,33	4,72	3,08
-90	Querosene	0,24	0,11	446,1	302,6	0,80	0,47	0,62	4,85	4,21	4,59	2,99
-90	Querosene	0,31	0,12	404,7	307,0	0,26	0,40	0,34	4,52	4,71	5,18	3,20
-90	Querosene	3,22	2,58	361,3	315,9	0,43	0,45	0,39	1,50	-2,32	-1,56	-4,30
-90	Querosene	3,31	5,40	447,5	314,8	0,58	0,64	0,54	-1,85	-8,78	-6,66	-9,78
-90	Querosene	3,34	1,83	332,3	315,9	0,32	0,35	0,31	1,81	-0,92	-0,42	-3,25
-90	Óleo lubrificante	1,19	0,45	287,5	308,1	0,28	0,29	0,23	4,62	4,60	5,10	2,75
-90	Óleo lubrificante	2,44	0,41	332,3	306,5	0,09	0,15	0,12	5,53	3,15	3,82	0,51
-90	Óleo lubrificante	2,46	0,29	326,8	305,9	0,05	0,11	0,09	5,79	3,84	4,32	0,83
-30	Querosene	1,18	0,50	185,5	313,7	0,50	0,31	0,34	1,85	1,95	1,84	0,85
-30	Querosene	1,21	0,67	187,5	314,3	0,57	0,37	0,40	1,54	1,62	1,49	0,38
-30	Querosene	1,27	0,32	191,0	308,1	0,42	0,21	0,23	1,85	2,32	2,25	1,12
-30	Querosene	1,27	0,44	204,8	308,4	0,43	0,27	0,43	1,57	2,05	1,96	0,90
-30	Querosene	2,55	1,64	240,6	310,4	0,31	0,39	0,35	0,31	-1,48	-1,21	-2,70
-30	Querosene	2,55	2,30	264,8	310,9	0,40	0,48	0,42	-2,55	-2,11	-2,13	-3,54
-30	Querosene	3,79	7,17	457,8	318,7	0,64	0,69	0,60	-5,10	-17,53	-14,25	-18,67
-30	Querosene	3,88	3,00	319,9	320,4	0,41	0,45	0,41	-2,21	-7,75	-7,10	-9,57
-30	Querosene	3,90	4,74	375,1	319,5	0,53	0,58	0,51	-3,62	-11,99	-10,48	-13,70
-30	Querosene	3,91	2,12	284,1	320,1	0,32	0,36	0,33	-1,29	-5,95	-5,58	-7,75
-30	Querosene	3,91	5,62	406,1	319,5	0,57	0,62	0,54	-4,31	-14,25	-12,16	-15,87
-30	Querosene	3,96	5,42	409,5	319,8	0,57	0,61	0,53	-4,44	-13,88	-11,96	-15,56
-30	Óleo lubrificante	0,85	0,09	170,3	295,4	0,16	0,10	0,07	3,19	3,38	1,90	1,52
-30	Óleo lubrificante	1,21	0,11	197,9	293,1	1,00	0,09	0,07	3,07	3,01	3,13	1,52
-30	Óleo lubrificante	1,55	0,10	197,9	294,8	1,00	0,07	0,06	3,04	2,31	2,37	0,53
-30	Óleo lubrificante	1,83	0,25	195,8	294,3	0,27	0,13	0,12	1,73	1,11	1,15	-0,56
-30	Óleo lubrificante	1,84	0,13	191,0	295,4	0,24	0,07	0,07	2,05	1,74	1,77	-0,18
0	Querosene	0,07	0,23	211,7	310,9	0,69	0,72	0,47	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01
0	Querosene	0,08	0,70	211,7	310,4	0,77	0,89	0,79	-0,07	-0,04	-0,03	-0,03
0	Querosene	0,11	0,44	209,6	313,1	0,69	0,78	0,64	-0,04	-0,04	-0,03	-0,03
0	Querosene	0,13	0,45	209,6	310,4	0,77	0,76	0,63	-0,05	-0,04	-0,04	-0,04
0	Querosene	0,15	0,42	213,0	313,1	0,66	0,72	0,59	-0,04	-0,04	-0,04	-0,04
0	Querosene	0,16	0,43	213,0	314,8	0,71	0,70	0,58	-0,07	-0,05	-0,05	-0,05
0	Querosene	0,31	0,43	216,5	318,1	0,61	0,55	0,48	-0,10	-0,10	-0,10	-0,10
0	Querosene	0,54	0,46	216,5	317,6	0,48	0,43	0,41	-0,20	-0,23	-0,22	-0,22
0	Querosene	0,55	0,30	309,6	316,5	0,40	0,33	0,30	-0,17	-0,20	-0,20	-0,20
0	Querosene	0,55	0,41	309,6	316,5	0,28	0,40	0,37	-0,19	-0,23	-0,22	-0,22
0	Querosene	1,15	0,30	340,6	312,0	0,29	0,20	0,20	-0,36	-0,66	-0,66	-0,69
0	Querosene	1,16	0,45	216,5	320,4	0,29	0,27	0,27	-0,41	-0,70	-0,70	-0,70
0	Querosene	1,70	0,40	235,8	323,1	0,21	0,18	0,19	-0,67	-1,29	-1,29	-1,29
0	Querosene	2,23	0,40	244,1	320,9	0,13	0,15	0,16	-1,03	-1,95	-2,06	-2,04
0	Querosene	3,98	1,96	501,2	310,9	0,10	0,34	0,30	-3,92	-8,49	-8,32	-8,42
0	Óleo lubrificante	0,08	0,12	275,1	281,5	0,27	0,51	0,21	-0,11	-0,10	-0,09	-0,09
0	Óleo lubrificante	0,08	0,19	349,6	275,9	0,40	0,64	0,43	-0,13	-0,13	-0,11	-0,11



Tabela C.1: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	(j <sub>l</sub> ) (m/s)	(j <sub>v</sub> ) (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)					
						Dois Fluidos	Drift-Flux Homogêneo ]	Exp.	Dois Fluidos	Drift-Flux Homogêneo ]			
0	Óleo lubrificante	0,11	0,09	349,6	283,1	0,23	0,36	0,15	0,22	-0,09	-0,12	-0,11	-0,11
0	Óleo lubrificante	0,28	0,10	335,8	285,9	0,17	0,23	0,11	0,27	-0,19	-0,28	-0,25	-0,28
0	Óleo lubrificante	0,28	0,29	323,4	282,6	0,34	0,47	0,24	0,34	-0,25	-0,33	-0,29	-0,32
0	Óleo lubrificante	0,44	0,16	282,0	283,7	0,13	0,23	0,13	0,26	-0,34	-0,49	-0,42	-0,49
0	Óleo lubrificante	1,40	0,22	373,7	287,6	0,09	0,13	0,11	0,13	-0,97	-1,19	-1,08	-1,21
0	Óleo lubrificante	1,44	0,19	363,4	287,0	0,07	0,11	0,09	0,12	-1,02	-1,21	-1,11	-1,25
0	Óleo lubrificante	1,49	0,12	315,1	287,0	0,06	0,07	0,06	0,08	-0,95	-1,16	-1,09	-1,18
0	Óleo lubrificante	2,26	0,16	394,4	291,8	0,01	0,06	0,06	0,07	-2,66	-3,04	-3,04	-3,10
0	Óleo lubrificante	3,04	0,24	432,3	288,1	0,02	0,07	0,08	0,08	-4,38	-5,46	-5,52	-5,56
0	Óleo lubrificante	3,04	0,29	487,5	292,3	0,03	0,09	0,09	0,09	-4,32	-5,39	-5,50	-5,50
50	Querosene	0,27	0,09	466,8	292,9	0,24	0,16	0,12	0,24	-5,56	-5,19	-5,42	-4,72
50	Querosene	0,87	0,34	446,1	298,1	0,16	0,26	0,21	0,31	-5,53	-5,01	-5,22	-4,68
50	Querosene	1,23	0,20	384,0	298,1	0,12	0,13	0,11	0,19	-5,92	-5,97	-6,03	-5,67
50	Querosene	1,23	0,26	392,3	299,8	0,25	0,16	0,14	0,25	-6,17	-5,82	-5,88	-5,53
50	Querosene	1,23	0,32	456,4	298,7	0,15	0,19	0,16	0,24	-5,92	-5,73	-5,80	-5,45
50	Querosene	3,29	2,61	342,7	325,4	0,45	0,47	0,40	0,49	-7,46	-10,54	-10,53	-10,30
50	Querosene	3,38	2,85	356,5	324,8	0,45	0,48	0,42	0,50	-7,79	-11,14	-11,08	-10,90
50	Querosene	3,40	0,58	282,0	324,3	0,10	0,16	0,12	0,23	-7,98	-9,56	-9,31	-9,31
50	Querosene	3,45	0,42	226,8	324,3	0,03	0,12	0,11	0,19	-8,11	-9,41	-9,21	-9,46
90	Querosene	0,04	0,04	549,5	295,9	0,26	0,13	0,12	0,09	-7,85	-6,96	-7,01	-7,29
90	Querosene	0,11	0,04	473,7	296,5	0,07	0,12	0,11	0,15	-8,28	-7,03	-7,08	-6,79
90	Querosene	0,11	0,08	506,1	295,4	0,22	0,21	0,19	0,23	-7,25	-6,34	-6,51	-6,49
90	Querosene	0,13	0,10	495,7	305,4	0,43	0,25	0,22	0,26	-6,67	-5,97	-6,20	-5,89
90	Querosene	0,16	0,09	553,0	304,8	0,37	0,20	0,18	0,30	-6,87	-6,32	-6,48	-5,56
90	Querosene	0,24	0,09	549,5	300,9	0,41	0,17	0,16	0,41	-7,59	-6,61	-6,73	-5,64
90	Querosene	0,24	0,10	466,8	302,6	0,31	0,20	0,18	0,31	-7,46	-6,37	-6,54	-5,51
90	Querosene	0,28	0,09	553,0	306,5	0,32	0,16	0,15	0,28	-7,65	-6,68	-6,79	-5,77
90	Querosene	0,31	0,10	494,4	310,9	0,33	0,17	0,15	0,28	-6,81	-6,59	-6,72	-5,73
90	Querosene	0,31	0,12	397,8	307,0	0,30	0,20	0,18	0,31	-6,87	-6,35	-6,53	-5,50
90	Querosene	0,55	0,34	288,9	320,4	0,42	0,35	0,29	0,39	-5,89	-5,30	-5,71	-4,96
90	Querosene	3,16	0,48	313,0	316,5	0,02	0,14	0,12	0,21	-10,08	-10,55	-10,34	-10,26
90	Querosene	3,22	2,26	413,0	315,9	0,38	0,43	0,36	0,47	-8,83	-11,15	-11,38	-10,81
90	Querosene	3,31	0,42	266,8	318,7	0,02	0,12	0,11	0,20	-10,54	-10,78	-10,58	-10,63
90	Querosene	3,31	4,29	563,3	314,8	0,61	0,58	0,49	0,56	-8,90	-13,38	-13,18	-13,06
90	Querosene	3,34	1,48	411,6	315,9	0,28	0,32	0,27	0,38	-9,55	-11,23	-11,48	-10,75
90	Querosene	3,34	3,89	502,6	314,8	0,52	0,56	0,47	0,56	-8,90	-13,15	-13,04	-12,84
90	Óleo lubrificante	0,11	0,05	392,3	288,7	0,11	0,15	0,15	0,15	-7,61	-7,20	-7,57	-7,14
90	Óleo lubrificante	0,28	0,08	261,3	309,3	0,09	0,15	0,11	0,26	-7,65	-7,00	-7,85	-6,15
90	Óleo lubrificante	0,31	0,08	273,7	312,0	0,06	0,14	0,11	0,25	-7,74	-7,08	-7,36	-6,27
90	Óleo lubrificante	1,19	0,43	302,7	308,1	0,18	0,26	0,22	0,28	-7,22	-7,34	-7,63	-7,15
90	Óleo lubrificante	1,20	0,21	249,6	303,7	0,07	0,15	0,12	0,20	-8,41	-8,14	-8,23	-7,78
90	Óleo lubrificante	1,26	0,13	228,9	303,7	0,03	0,09	0,08	0,17	-8,60	-8,51	-8,57	-8,12
90	Óleo lubrificante	2,44	0,40	342,7	306,5	0,08	0,15	0,12	0,22	-9,66	-10,80	-10,60	-10,43
90	Óleo lubrificante	2,46	0,29	332,3	305,9	0,05	0,11	0,09	0,19	-9,79	-10,76	-10,64	-10,66

Tabela C.2: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime *Slug* com  $K_b \equiv 0,45$  e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)				
						Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo	Homogêneo	
-90	Querosene	0,11	2,08	291,0	315,4	0,93	0,97	0,93	0,62	0,04	1,17	0,43
-90	Querosene	0,11	3,18	285,4	313,7	0,91	0,96	0,91	0,32	0,03	1,04	0,31
-90	Querosene	0,11	7,71	478,5	296,5	0,92	0,95	0,96	-0,13	-0,09	0,38	-0,28
-90	Querosene	0,31	7,59	484,0	295,9	0,85	0,90	0,92	-0,33	-0,36	0,26	-0,66
-90	Querosene	0,31	9,75	490,9	292,6	0,87	0,90	0,86	-0,65	-0,64	-0,16	-1,16
-90	Querosene	0,54	14,65	332,3	320,4	0,88	0,89	0,84	-2,09	-2,46	-1,75	-3,59
-90	Querosene	0,55	17,58	356,5	319,8	0,91	0,89	0,85	-3,32	-4,87	-2,59	-4,87
-90	Querosene	0,57	8,73	309,6	320,4	0,81	0,88	0,81	-0,42	-1,20	-0,35	-1,53
-90	Querosene	0,57	11,97	323,4	320,9	0,84	0,88	0,83	-1,73	-1,88	-1,18	-2,73
-90	Óleo lubrificante	0,48	4,02	325,4	301,5	0,78	0,85	0,77	0,22	-0,17	0,74	-0,27
-90	Óleo lubrificante	0,54	0,10	282,0	303,1	0,22	0,66	0,11	2,52	2,52	7,08	4,19
-90	Óleo lubrificante	1,16	1,85	315,1	304,3	0,59	0,68	0,52	2,09	0,43	1,92	0,09
-90	Óleo lubrificante	1,18	2,81	323,4	304,8	0,63	0,68	0,60	0,88	-0,11	0,70	-0,83
-90	Óleo lubrificante	1,18	2,23	316,5	304,3	0,60	0,68	0,56	1,45	0,14	1,38	-0,32
-30	Querosene	0,11	12,53	187,5	319,8	0,96	0,98	0,89	-0,29	-1,24	-0,10	-0,80
-30	Querosene	0,11	17,37	180,6	319,8	0,97	0,99	0,90	-0,39	-2,10	-0,41	-1,21
-30	Querosene	0,62	4,69	215,1	308,7	0,71	0,84	0,76	-0,22	-0,76	-0,24	-0,94
-30	Querosene	1,19	7,05	244,1	313,7	0,74	0,82	0,74	-1,78	-3,58	-2,58	-3,67
-30	Querosene	1,19	8,67	256,5	312,6	0,81	0,85	0,76	-2,22	-4,88	-3,42	-4,82
-30	Querosene	1,27	3,00	216,5	309,3	0,62	0,66	0,62	0,15	-1,40	-0,42	-1,40
-30	Querosene	2,55	2,65	270,3	311,5	0,43	0,49	0,45	-0,49	-2,91	-2,58	-3,97
-30	Querosene	3,31	8,47	453,0	317,9	0,71	0,72	0,65	-5,10	-16,33	-13,68	-18,10
-30	Querosene	3,33	6,49	390,9	319,0	0,65	0,66	0,60	-4,31	-12,38	-10,72	-14,01
-30	Querosene	3,52	8,10	464,7	318,1	0,74	0,70	0,63	-5,30	-16,95	-14,32	-18,87
-30	Óleo lubrificante	1,81	0,40	225,5	293,1	0,51	0,19	0,19	1,42	0,54	0,56	-0,97
0	Querosene	0,03	1,89	204,1	314,8	0,82	0,93	0,83	0,89	-0,03	-0,03	-0,03
0	Querosene	0,53	0,69	216,5	318,1	0,56	0,50	0,52	-0,22	-0,26	-0,26	-0,26
0	Querosene	0,56	1,81	323,4	317,0	0,58	0,69	0,63	-0,43	-0,53	-0,50	-0,50
0	Querosene	0,57	1,75	223,4	319,8	0,71	0,68	0,63	-0,44	-0,52	-0,49	-0,49
0	Querosene	1,14	0,68	230,3	320,9	0,38	0,35	0,36	-0,46	-0,77	-0,77	-0,77
0	Querosene	1,16	1,95	340,6	320,4	0,59	0,58	0,53	-0,70	-1,35	-1,30	-1,30
0	Querosene	1,16	0,46	325,4	319,8	0,33	0,27	0,27	-0,41	-0,71	-0,71	-0,69
0	Querosene	1,18	1,26	326,8	320,9	0,50	0,48	0,43	-0,56	-1,07	-1,04	-1,05
0	Querosene	1,70	1,61	251,0	328,7	0,53	0,46	0,42	-1,08	-2,02	-1,96	-1,98
0	Querosene	2,16	5,41	464,7	318,1	0,58	0,68	0,63	-3,20	-6,39	-5,93	-5,95
0	Querosene	2,21	1,52	273,7	323,1	0,40	0,39	0,36	-1,53	-2,96	-2,90	-2,92
0	Querosene	2,23	1,08	380,6	322,0	0,34	0,32	0,29	-1,36	-2,62	-2,58	-2,60
0	Querosene	2,23	1,64	397,8	314,8	0,40	0,41	0,37	-1,68	-3,14	-3,10	-3,10
0	Querosene	2,23	4,03	449,5	315,4	0,61	0,61	0,57	-2,80	-5,31	-5,04	-5,06
0	Querosene	2,32	6,76	518,5	315,4	0,72	0,72	0,66	-4,19	-8,55	-7,78	-7,96
0	Querosene	3,40	5,74	633,6	310,9	0,48	0,62	0,57	-5,76	-12,32	-11,43	-11,68
0	Óleo lubrificante	0,11	0,37	349,6	277,6	0,47	0,61	0,34	-0,25	-0,16	-0,14	-0,16
0	Óleo lubrificante	0,52	1,89	344,0	287,0	0,56	0,71	0,61	-1,08	-1,05	-0,96	-0,98

Tabela C.2: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)					
						Dois Fluidos	$Drift-Flux$ Homogêneo ]	Dois Fluidos	$Drift-Flux$ Homogêneo ]				
0	Óleo lubrificante	0,58	0,44	344,0	283,7	0,30	0,38	0,26	0,39	-0,49	-0,66	-0,48	-0,65
0	Óleo lubrificante	0,60	0,35	357,8	284,5	0,19	0,33	0,22	0,35	-0,46	-0,66	-0,48	-0,65
0	Óleo lubrificante	1,41	0,44	339,2	288,1	0,17	0,23	0,20	0,17	-1,45	-1,31	-1,27	-1,31
0	Óleo lubrificante	1,43	0,28	359,0	287,6	0,12	0,14	0,13	0,16	-1,04	-1,22	-1,16	-1,28
0	Óleo lubrificante	2,24	0,27	384,0	292,6	0,04	0,10	0,11	0,11	-2,91	-3,31	-3,36	-3,46
0	Óleo lubrificante	2,24	0,38	387,5	292,9	0,05	0,14	0,14	0,15	-2,91	-3,65	-3,74	-3,87
0	Óleo lubrificante	2,29	3,88	518,5	293,1	0,46	0,56	0,56	0,55	-6,09	-8,77	-8,77	-8,38
0	Óleo lubrificante	3,04	3,01	616,4	292,9	0,33	0,50	0,45	0,48	-7,24	-11,08	-10,68	-10,83
50	Querosene	0,03	0,05	453,0	287,6	0,12	0,17	0,11	0,08	-5,73	-5,11	-5,48	-5,69
50	Querosene	0,03	0,11	513,0	284,3	0,27	0,28	0,24	0,25	-4,88	-4,47	-4,72	-4,67
50	Querosene	0,03	0,15	566,7	283,1	0,36	0,32	0,30	0,31	-4,42	-4,20	-4,35	-4,27
50	Querosene	0,03	0,17	546,1	281,5	0,37	0,35	0,34	0,35	-4,36	-4,05	-4,13	-4,06
50	Querosene	0,03	0,23	556,4	281,5	0,44	0,40	0,41	0,41	-4,03	-3,75	-3,68	-3,68
50	Querosene	0,03	2,27	537,1	280,4	0,87	0,91	0,88	0,79	-1,24	-0,68	-1,38	-1,21
50	Querosene	0,03	3,13	535,7	279,3	0,94	0,96	0,91	0,82	-1,04	-0,40	-0,66	-1,21
50	Querosene	0,03	3,89	533,7	279,3	0,97	0,97	0,92	0,84	-0,91	-0,34	-0,60	-1,11
50	Querosene	0,11	0,19	442,6	293,1	0,32	0,34	0,31	0,28	-4,57	-4,09	-4,23	-4,41
50	Querosene	0,11	0,54	187,5	318,1	0,60	0,57	0,57	0,57	-3,01	-2,63	-2,62	-2,61
50	Querosene	0,11	3,65	530,2	293,1	0,82	0,92	0,85	0,86	-1,41	-1,18	-1,11	-0,87
50	Querosene	0,11	6,04	542,6	293,1	0,85	0,94	0,88	0,93	-1,36	-0,85	-1,11	-0,87
50	Querosene	0,11	7,82	544,0	293,7	0,84	0,89	0,90	0,94	-1,32	-1,15	-1,14	-0,96
50	Querosene	0,11	10,39	559,9	294,3	0,86	0,90	0,92	0,95	-1,28	-1,25	-1,26	-1,17
50	Querosene	0,11	12,28	175,1	315,6	0,93	0,96	0,88	0,96	-1,25	-1,00	-1,29	-0,99
50	Querosene	0,11	12,70	502,6	293,1	1,00	0,91	0,92	0,96	-1,22	-1,38	-1,40	-1,37
50	Querosene	0,15	0,08	473,7	291,5	0,15	0,19	0,15	0,21	-5,44	-4,98	-4,87	-4,87
50	Querosene	0,51	0,43	185,5	321,5	0,35	0,38	0,34	0,40	-4,19	-3,89	-4,12	-3,81
50	Querosene	0,52	0,81	188,9	321,5	0,60	0,51	0,48	0,49	-3,49	-3,21	-3,41	-3,32
50	Querosene	0,80	0,77	504,7	297,6	0,39	0,42	0,39	0,43	-4,44	-4,12	-4,29	-4,01
50	Querosene	0,85	1,23	487,5	298,1	0,47	0,51	0,48	0,50	-3,80	-3,74	-3,92	-3,79
50	Querosene	1,23	0,77	501,2	298,1	0,31	0,35	0,32	0,40	-5,08	-5,00	-5,18	-4,67
50	Querosene	1,23	1,16	501,2	299,3	0,34	0,44	0,40	0,46	-4,50	-4,64	-4,83	-4,50
50	Querosene	1,39	3,22	204,8	324,8	0,62	0,67	0,60	0,62	-3,66	-4,58	-4,77	-4,71
50	Querosene	1,39	4,25	223,4	325,4	0,68	0,72	0,65	0,67	-3,80	-4,93	-5,03	-5,03
50	Querosene	2,15	0,64	164,8	325,9	0,15	0,24	0,21	0,32	-6,35	-6,69	-6,82	-6,29
50	Querosene	2,15	3,71	259,9	324,3	0,58	0,62	0,56	0,60	-5,10	-7,33	-7,34	-7,31
50	Querosene	2,16	2,96	235,8	325,4	0,53	0,57	0,51	0,56	-5,24	-6,92	-7,02	-6,89
50	Querosene	3,16	8,36	601,2	324,8	0,69	0,65	0,64	0,70	-7,72	-15,90	-15,84	-16,60
50	Querosene	3,29	3,84	408,2	321,5	0,51	0,54	0,49	0,56	-7,33	-11,82	-11,68	-11,68
50	Querosene	3,29	4,70	446,1	321,5	0,55	0,56	0,53	0,57	-7,53	-12,60	-12,53	-12,68
50	Querosene	3,34	6,69	549,5	324,8	0,61	0,60	0,60	0,65	-8,11	-14,91	-14,89	-15,39
50	Querosene	3,44	7,18	590,9	324,3	0,61	0,60	0,60	0,66	-7,98	-16,01	-15,98	-16,61
90	Querosene	0,03	0,05	435,7	288,7	0,25	0,18	0,17	0,16	-6,17	-6,64	-6,72	-6,77
90	Querosene	0,03	3,91	488,8	285,4	0,93	0,97	0,92	0,90	-0,78	-0,40	-0,76	-0,97

Tabela C.2: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
						Dois Fluidos	$Drift-Flux$ Homogêneo ]	Dois Fluidos	$Drift-Flux$ Homogêneo ]		
90	Querosene	0,04	0,07	525,4	296,5	0,54	0,22	0,22	-5,63	-6,20	-6,33
90	Querosene	0,08	3,44	484,0	288,1	0,81	0,93	0,86	-1,25	-0,78	-1,31
90	Querosene	0,09	3,54	478,5	289,3	0,80	0,92	0,85	-1,29	-0,86	-1,17
90	Querosene	0,11	1,96	308,2	315,4	0,76	0,82	0,78	-2,02	-1,50	-1,50
90	Querosene	0,11	2,98	304,7	313,7	0,82	0,90	0,81	-1,90	-1,00	-1,26
90	Querosene	0,11	3,44	495,7	291,5	0,80	0,91	0,84	-1,38	-0,96	-1,27
90	Querosene	0,11	5,31	295,8	313,1	0,79	0,96	0,85	-1,42	-0,76	-1,07
90	Querosene	0,11	10,09	322,0	316,5	0,91	0,90	0,89	-1,23	-1,28	-1,05
90	Querosene	0,13	3,56	490,9	298,7	0,81	0,91	0,83	-1,42	-1,02	-1,34
90	Querosene	0,54	4,98	325,4	317,0	0,81	0,85	0,76	-2,68	-2,52	-2,85
90	Querosene	0,55	2,97	316,5	316,5	0,73	0,77	0,70	-2,75	-2,63	-2,97
90	Querosene	0,55	1,98	309,6	315,4	0,64	0,69	0,64	-3,03	-3,27	-3,38
90	Querosene	0,55	1,35	294,4	315,4	0,60	0,61	0,57	-3,86	-3,54	-3,59
90	Querosene	0,55	5,92	332,3	319,8	0,96	0,87	0,77	-2,83	-3,12	-2,94
90	Querosene	0,57	7,97	339,2	320,4	0,98	0,84	0,79	-3,60	-3,18	-3,11
90	Querosene	0,57	10,67	363,4	320,9	0,90	0,85	0,81	-3,70	-3,86	-3,65
90	Querosene	1,85	12,30	609,5	310,9	0,86	0,77	0,75	-7,20	-12,37	-12,82
90	Querosene	3,11	6,77	599,2	313,1	0,71	0,61	0,59	-8,90	-14,79	-15,00
90	Óleo lubrificante	0,03	0,10	332,3	283,7	0,20	0,24	0,25	-6,64	-6,40	-5,25
90	Óleo lubrificante	0,03	0,22	354,4	283,4	0,35	0,37	0,36	-5,14	-5,30	-3,77
90	Óleo lubrificante	0,03	0,39	346,1	283,7	0,46	0,50	0,43	-4,03	-4,26	-2,86
90	Óleo lubrificante	0,03	1,52	346,1	284,8	0,67	0,83	0,68	-2,48	-1,51	-1,46
90	Óleo lubrificante	0,03	2,03	342,7	284,8	0,70	0,89	0,75	-0,98	-1,29	-1,46
90	Óleo lubrificante	0,03	2,49	342,7	287,0	0,73	0,93	0,80	-1,95	-0,67	-1,17
90	Óleo lubrificante	0,11	1,65	342,7	291,5	0,65	0,79	0,70	-2,61	-1,96	-1,82
90	Óleo lubrificante	0,11	2,19	349,6	293,7	0,68	0,85	0,75	-2,39	-1,51	-1,61
90	Óleo lubrificante	0,11	2,49	342,7	291,5	0,71	0,87	0,76	-2,26	-1,33	-1,54
90	Óleo lubrificante	0,11	3,55	346,1	288,1	0,76	0,93	0,80	-2,74	-1,04	-1,40
90	Óleo lubrificante	0,11	6,51	344,0	302,6	0,81	0,97	0,86	-2,19	-1,07	-1,09
90	Óleo lubrificante	0,11	7,89	353,0	299,8	0,85	0,97	0,87	-2,12	-1,21	-1,16
90	Óleo lubrificante	0,28	0,16	349,6	305,4	0,22	0,22	0,19	-6,76	-6,48	-5,50
90	Óleo lubrificante	0,28	6,66	349,6	307,6	0,79	0,93	0,82	-3,33	-2,03	-2,06
90	Óleo lubrificante	0,48	3,78	346,1	301,5	0,70	0,82	0,74	-4,39	-2,84	-3,20
90	Óleo lubrificante	0,49	0,29	344,0	302,6	0,23	0,27	0,24	-6,44	-6,24	-5,42
90	Óleo lubrificante	0,50	0,44	349,6	303,1	0,31	0,35	0,32	-6,08	-5,58	-4,95
90	Óleo lubrificante	0,50	5,29	370,2	301,5	0,74	0,80	0,77	-4,20	-3,07	-3,35
90	Óleo lubrificante	0,51	0,19	302,0	302,0	0,16	0,20	0,17	-6,50	-6,81	-5,92
90	Óleo lubrificante	1,14	4,89	401,3	305,4	0,67	0,76	0,68	-6,14	-6,24	-6,24
90	Óleo lubrificante	1,16	1,69	346,1	304,3	0,47	0,53	0,49	-5,37	-5,97	-5,88
90	Óleo lubrificante	1,18	2,58	353,0	304,8	0,54	0,63	0,57	-4,98	-6,10	-5,89
90	Óleo lubrificante	1,18	1,98	356,5	304,3	0,50	0,56	0,52	-5,30	-5,93	-5,91
90	Óleo lubrificante	2,40	6,54	553,0	305,4	0,62	0,66	0,63	-10,83	-14,17	-14,06
90	Óleo lubrificante	2,42	3,98	484,0	307,6	0,52	0,59	0,54	-9,44	-11,77	-11,71
90	Óleo lubrificante	2,42	1,54	382,0	305,9	0,31	0,38	0,34	-8,47	-10,56	-10,19

Tabela C.2: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE	$\langle j_t \rangle$ (m/s)	$\langle j_v \rangle$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)					
						[ Exp. ]	[ Homogêneo ]	Dois Fluidos	Dois Fluidos	<i>Drift-Flux</i>	<i>Drift-Flux</i>	Homogêneo	
90	Líquida Óleo lubrificante	2,45	2,11	418,5	305,4	0,39	0,48	0,45	0,40	-8,47	-10,86	-11,08	-10,61

Tabela C.3: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime *Slug* com  $K_b = 4,5$  e com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)				
						Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo	Homogêneo	
-90	Querosene	0,11	2,08	291,0	315,4	0,97	0,84	0,93	0,62	0,04	1,17	0,43
-90	Querosene	0,11	3,18	285,4	313,7	0,96	0,85	0,91	0,32	0,03	1,04	0,31
-90	Querosene	0,11	7,71	478,5	296,5	0,96	0,90	0,96	-0,13	-0,24	0,38	-0,28
-90	Querosene	0,31	7,59	484,0	295,9	0,85	0,85	0,85	-0,33	-0,74	0,26	-0,66
-90	Querosene	0,31	9,75	490,9	292,6	0,87	0,93	0,87	-0,65	-1,20	-0,16	-1,16
-90	Querosene	0,54	14,65	332,3	320,4	0,88	0,84	0,93	-2,09	-3,58	-1,75	-3,59
-90	Querosene	0,55	17,58	356,5	319,8	0,91	0,85	0,94	-2,48	-4,68	-2,59	-4,87
-90	Querosene	0,57	8,73	309,6	320,4	0,81	0,81	0,90	-0,42	-1,76	-0,35	-1,53
-90	Querosene	0,57	11,97	323,4	320,9	0,84	0,84	0,92	-1,73	-2,84	-1,18	-2,73
-90	Óleo lubrificante	0,48	4,02	325,4	301,5	0,78	0,77	0,86	0,22	-0,40	0,74	-0,27
-90	Óleo lubrificante	0,54	0,10	282,0	303,1	0,22	0,11	0,22	0,46	5,50	6,14	4,19
-90	Óleo lubrificante	1,16	1,85	315,1	304,3	0,59	0,52	0,70	2,09	0,73	1,92	0,09
-90	Óleo lubrificante	1,18	2,81	323,4	304,8	0,63	0,60	0,74	0,88	-0,31	0,70	-0,83
-90	Óleo lubrificante	1,18	2,23	316,5	304,3	0,60	0,56	0,72	1,45	0,21	1,38	-0,32
-30	Querosene	0,11	12,53	187,5	319,8	0,96	0,89	0,98	-0,29	-1,24	-0,10	-0,80
-30	Querosene	0,11	17,37	180,6	319,8	0,97	0,90	0,97	-0,39	-2,10	-0,41	-1,21
-30	Querosene	0,62	4,69	215,1	308,7	0,71	0,76	0,86	-0,22	-0,92	-0,24	-0,94
-30	Querosene	1,19	7,05	244,1	313,7	0,74	0,74	0,83	-1,78	-3,78	-2,58	-3,67
-30	Querosene	1,19	8,67	256,5	312,6	0,81	0,86	0,86	-2,22	-5,07	-3,42	-4,82
-30	Querosene	1,27	3,00	216,5	309,3	0,62	0,68	0,76	0,15	-1,40	-0,42	-1,40
-30	Querosene	2,55	2,65	270,3	311,5	0,43	0,45	0,64	-0,49	-2,99	-2,58	-3,97
-30	Querosene	3,31	8,47	453,0	317,9	0,71	0,72	0,78	-5,10	-16,51	-13,68	-18,10
-30	Querosene	3,33	6,49	390,9	319,0	0,65	0,60	0,74	-4,31	-12,49	-10,72	-14,01
-30	Óleo lubrificante	3,52	8,10	464,7	318,1	0,74	0,63	0,77	-5,30	-17,08	-14,32	-18,87
-30	Óleo lubrificante	1,81	0,40	225,5	293,1	0,20	0,19	0,48	1,42	0,49	0,56	-0,97
0	Querosene	0,03	1,89	204,1	314,8	0,82	0,83	0,89	-0,15	-0,04	-0,03	-0,03
0	Querosene	0,53	0,69	216,5	318,1	0,56	0,54	0,47	-0,22	-0,27	-0,26	-0,26
0	Querosene	0,56	1,81	323,4	317,0	0,58	0,63	0,63	-0,43	-0,57	-0,50	-0,50
0	Querosene	0,57	1,75	223,4	319,8	0,71	0,72	0,62	-0,44	-0,55	-0,49	-0,49
0	Querosene	1,14	0,68	230,3	320,9	0,38	0,36	0,37	-0,46	-0,77	-0,77	-0,77
0	Querosene	1,16	1,95	340,6	320,4	0,59	0,60	0,53	-0,70	-1,39	-1,30	-1,30
0	Querosene	1,16	0,46	325,4	319,8	0,33	0,27	0,22	-0,41	-0,71	-0,71	-0,69
0	Querosene	1,18	1,26	326,8	320,9	0,50	0,49	0,46	-0,56	-1,09	-1,04	-1,05
0	Querosene	1,70	1,61	251,0	328,7	0,53	0,47	0,45	-1,08	-2,04	-1,96	-1,98
0	Querosene	2,16	5,41	464,7	318,1	0,58	0,63	0,61	-3,20	-6,53	-5,93	-5,95
0	Querosene	2,21	1,52	273,7	323,1	0,40	0,40	0,38	-1,53	-2,98	-2,90	-2,92
0	Querosene	2,23	1,08	380,6	322,0	0,34	0,32	0,32	-1,36	-2,62	-2,58	-2,60
0	Querosene	2,23	1,64	397,8	314,8	0,40	0,37	0,39	-1,68	-3,16	-3,07	-3,10
0	Querosene	2,23	4,03	449,5	315,4	0,61	0,63	0,56	-2,80	-5,40	-5,04	-5,06
0	Querosene	2,32	6,76	518,5	315,4	0,72	0,73	0,66	-4,19	-8,72	-7,78	-7,96
0	Querosene	3,40	5,74	633,6	310,9	0,48	0,57	0,59	-5,76	-12,37	-11,43	-11,68
0	Óleo lubrificante	0,11	0,37	349,6	277,6	0,47	0,68	0,34	-0,25	-0,17	-0,14	-0,16
0	Óleo lubrificante	0,52	1,89	344,0	287,0	0,56	0,61	0,65	-1,08	-1,08	-0,96	-0,98

Tabela C.3: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	(j <sub>l</sub> ) (m/s)	(j <sub>v</sub> ) (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)		TEMPERATURA (K)		FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
				(kPa)	(kPa)	(K)	(K)	Dois Fluidos	Drift-Flux	Homogêneo	[ Exp. ]	Dois Fluidos	Drift-Flux
0	Óleo lubrificante	0,58	0,44	344,0	283,7	0,30	0,40	0,26	0,39	-0,49	-0,66	-0,48	-0,65
0	Óleo lubrificante	0,60	0,35	357,8	284,5	0,19	0,34	0,22	0,35	-0,46	-0,66	-0,48	-0,65
0	Óleo lubrificante	1,41	0,44	339,2	288,1	0,17	0,22	0,20	0,21	-1,45	-1,31	-1,27	-1,31
0	Óleo lubrificante	1,43	0,28	359,0	287,6	0,12	0,13	0,13	0,16	-1,04	-1,17	-1,16	-1,28
0	Óleo lubrificante	2,24	0,27	384,0	292,6	0,04	0,10	0,11	0,11	-2,91	-3,26	-3,36	-3,46
0	Óleo lubrificante	2,24	0,38	387,5	292,9	0,05	0,13	0,14	0,15	-2,91	-3,52	-3,74	-3,87
0	Óleo lubrificante	2,29	3,88	518,5	293,1	0,46	0,62	0,56	0,55	-6,09	-8,82	-8,33	-8,38
0	Óleo lubrificante	3,04	3,01	616,4	292,9	0,33	0,50	0,45	0,48	-7,24	-11,09	-10,68	-10,83
50	Querosene	0,03	0,05	453,0	287,6	0,12	0,18	0,11	0,08	-5,73	-5,06	-5,48	-5,69
50	Querosene	0,03	0,11	513,0	284,3	0,27	0,33	0,24	0,25	-4,88	-4,16	-4,72	-4,67
50	Querosene	0,03	0,15	566,7	283,1	0,36	0,39	0,30	0,31	-4,42	-3,81	-4,35	-4,27
50	Querosene	0,03	0,17	546,1	281,5	0,37	0,42	0,34	0,35	-4,36	-3,60	-4,13	-4,06
50	Querosene	0,03	0,23	556,4	281,5	0,44	0,49	0,41	0,41	-4,03	-3,21	-3,68	-3,68
50	Querosene	0,03	2,27	537,1	280,4	0,87	0,92	0,88	0,79	-1,24	-0,56	-1,38	-1,21
50	Querosene	0,03	3,89	533,7	279,3	0,94	0,96	0,91	0,82	-1,04	-0,39	-0,66	-1,21
50	Querosene	0,11	0,19	442,6	293,1	0,32	0,39	0,31	0,28	-4,57	-3,79	-4,41	-4,41
50	Querosene	0,11	0,54	187,5	318,1	0,60	0,63	0,57	0,57	-3,01	-2,23	-2,62	-2,61
50	Querosene	0,11	3,65	530,2	293,1	0,82	0,93	0,85	0,86	-1,41	-0,73	-1,18	-1,11
50	Querosene	0,11	6,04	542,6	293,1	0,85	0,95	0,88	0,93	-1,36	-0,82	-1,11	-0,87
50	Querosene	0,11	7,82	544,0	293,7	0,84	0,94	0,90	0,94	-1,32	-0,96	-1,14	-0,96
50	Querosene	0,11	10,39	559,9	294,3	0,86	0,95	0,92	0,95	-1,28	-1,18	-1,26	-1,17
50	Querosene	0,11	12,28	175,1	315,6	0,93	0,97	0,88	0,96	-1,25	-1,03	-1,29	-0,99
50	Querosene	0,11	12,70	502,6	293,1	1,00	0,96	0,92	0,96	-1,22	-1,36	-1,40	-1,37
50	Querosene	0,15	0,08	473,7	291,5	0,15	0,21	0,15	0,21	-5,44	-4,91	-5,26	-4,87
50	Querosene	0,51	0,43	185,5	321,5	0,35	0,40	0,34	0,40	-4,19	-3,78	-4,12	-3,81
50	Querosene	0,52	0,81	188,9	321,5	0,60	0,54	0,48	0,49	-3,49	-3,04	-3,41	-3,32
50	Querosene	0,80	0,77	504,7	297,6	0,39	0,44	0,39	0,43	-4,44	-3,99	-4,29	-4,01
50	Querosene	0,85	1,23	487,5	298,1	0,47	0,54	0,48	0,50	-3,80	-3,60	-3,92	-3,79
50	Querosene	1,23	0,77	501,2	299,3	0,31	0,36	0,32	0,40	-5,08	-4,94	-5,18	-4,67
50	Querosene	1,23	1,16	501,2	299,3	0,34	0,45	0,40	0,46	-4,50	-4,56	-4,83	-4,50
50	Querosene	1,39	3,22	204,8	324,8	0,62	0,68	0,60	0,62	-3,66	-4,55	-4,77	-4,71
50	Querosene	1,39	4,25	223,4	325,4	0,68	0,73	0,65	0,67	-3,80	-4,93	-5,03	-5,03
50	Querosene	2,15	0,64	164,8	325,9	0,15	0,24	0,21	0,32	-6,35	-6,70	-6,82	-6,29
50	Querosene	2,15	3,71	259,9	324,3	0,58	0,63	0,56	0,60	-5,10	-7,34	-7,34	-6,89
50	Querosene	2,16	2,96	235,8	325,4	0,53	0,58	0,51	0,56	-5,24	-6,91	-7,02	-6,89
50	Querosene	3,16	8,36	601,2	324,8	0,69	0,71	0,64	0,70	-7,72	-17,05	-15,84	-16,60
50	Querosene	3,29	3,84	408,2	321,5	0,51	0,55	0,49	0,56	-7,33	-11,85	-11,68	-11,68
50	Querosene	3,29	4,70	446,1	321,5	0,55	0,59	0,53	0,57	-7,53	-12,84	-12,53	-12,68
50	Querosene	3,34	6,69	549,5	324,8	0,61	0,66	0,60	0,65	-8,11	-15,67	-14,89	-15,39
50	Querosene	3,44	7,18	590,9	324,3	0,61	0,67	0,60	0,66	-7,98	-16,91	-15,98	-16,61
90	Querosene	0,03	0,05	435,7	288,7	0,25	0,18	0,17	0,16	-6,17	-6,57	-6,72	-6,77
90	Querosene	0,03	3,91	488,8	285,4	0,93	0,97	0,92	0,90	-0,78	-0,40	-0,76	-0,97

Tabela C.3: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
						Dois Fluidos	$Drift-Flux$ Homogêneo ]	Dois Fluidos	$Drift-Flux$ Homogêneo ]		
90	Querosene	0,04	0,07	525,4	296,5	0,54	0,24	0,22	0,21	-5,63	-6,33
90	Querosene	0,08	3,44	484,0	288,1	0,81	0,94	0,86	0,89	-1,25	-1,31
90	Querosene	0,09	3,54	478,5	289,3	0,80	0,93	0,85	0,88	-1,29	-1,17
90	Querosene	0,11	1,96	308,2	315,4	0,76	0,86	0,78	0,82	-2,02	-1,81
90	Querosene	0,11	2,98	304,7	313,7	0,82	0,91	0,81	0,86	-1,90	-1,60
90	Querosene	0,11	3,44	495,7	291,5	0,80	0,92	0,84	0,87	-1,38	-1,27
90	Querosene	0,11	5,31	295,8	313,1	0,79	0,96	0,85	0,90	-1,42	-1,07
90	Querosene	0,11	10,09	322,0	316,5	0,91	0,95	0,89	0,95	-1,23	-1,05
90	Querosene	0,13	3,56	490,9	298,7	0,81	0,92	0,83	0,86	-1,42	-1,34
90	Querosene	0,54	4,98	325,4	317,0	0,81	0,86	0,76	0,81	-2,68	-3,03
90	Querosene	0,55	2,97	316,5	316,5	0,73	0,79	0,70	0,72	-2,75	-3,10
90	Querosene	0,55	1,98	309,6	315,4	0,64	0,72	0,64	0,66	-3,27	-3,38
90	Querosene	0,55	1,35	294,4	315,4	0,60	0,64	0,57	0,60	-3,86	-3,78
90	Querosene	0,55	5,92	332,3	319,8	0,96	0,88	0,77	0,80	-2,83	-3,12
90	Querosene	0,57	7,97	339,2	320,4	0,98	0,89	0,79	0,86	-3,60	-3,86
90	Querosene	0,57	10,67	363,4	320,9	0,90	0,91	0,81	0,88	-3,70	-3,65
90	Querosene	1,85	12,30	609,5	310,9	0,86	0,84	0,75	0,81	-7,20	-12,82
90	Querosene	3,11	6,77	599,2	313,1	0,71	0,67	0,59	0,66	-8,90	-15,36
90	Óleo lubrificante	0,03	0,10	332,3	283,7	0,20	0,29	0,25	0,28	-6,64	-6,01
90	Óleo lubrificante	0,03	0,22	354,4	283,4	0,35	0,46	0,36	0,56	-5,14	-4,61
90	Óleo lubrificante	0,03	0,39	346,1	283,7	0,46	0,60	0,43	0,67	-4,03	-3,42
90	Óleo lubrificante	0,03	1,52	346,1	284,8	0,67	0,87	0,68	0,83	-2,48	-2,71
90	Óleo lubrificante	0,03	2,03	342,7	284,8	0,70	0,91	0,75	0,86	-2,17	-2,20
90	Óleo lubrificante	0,03	2,49	342,7	287,0	0,73	0,94	0,80	0,87	-1,95	-1,77
90	Óleo lubrificante	0,11	1,65	342,7	291,5	0,65	0,83	0,70	0,81	-2,61	-1,82
90	Óleo lubrificante	0,11	2,19	349,6	293,7	0,68	0,87	0,75	0,83	-2,39	-1,61
90	Óleo lubrificante	0,11	2,49	342,7	291,5	0,71	0,89	0,76	0,85	-2,26	-1,54
90	Óleo lubrificante	0,11	3,55	346,1	288,1	0,76	0,93	0,80	0,87	-2,74	-1,97
90	Óleo lubrificante	0,11	6,51	344,0	302,6	0,81	0,97	0,86	0,93	-2,19	-1,57
90	Óleo lubrificante	0,11	7,89	353,0	299,8	0,85	0,97	0,87	0,94	-2,12	-1,16
90	Óleo lubrificante	0,28	0,16	349,6	305,4	0,22	0,25	0,19	0,35	-6,76	-5,50
90	Óleo lubrificante	0,28	6,66	349,6	307,6	0,79	0,93	0,82	0,89	-3,33	-2,06
90	Óleo lubrificante	0,48	3,78	346,1	301,5	0,70	0,84	0,74	0,76	-4,39	-3,20
90	Óleo lubrificante	0,49	0,29	344,0	302,6	0,23	0,30	0,24	0,37	-6,44	-5,42
90	Óleo lubrificante	0,50	0,44	349,6	303,1	0,31	0,39	0,32	0,43	-6,08	-4,95
90	Óleo lubrificante	0,50	5,29	370,2	301,5	0,74	0,87	0,77	0,80	-4,20	-3,35
90	Óleo lubrificante	0,51	0,19	373,7	302,0	0,16	0,22	0,17	0,31	-6,50	-5,92
90	Óleo lubrificante	1,14	4,89	401,3	305,4	0,67	0,77	0,68	0,71	-6,14	-6,24
90	Óleo lubrificante	1,16	1,69	346,1	304,3	0,47	0,55	0,49	0,54	-5,37	-5,88
90	Óleo lubrificante	1,18	2,58	353,0	304,8	0,54	0,65	0,57	0,61	-4,98	-5,89
90	Óleo lubrificante	1,18	1,98	356,5	304,3	0,50	0,59	0,52	0,56	-5,30	-5,91
90	Óleo lubrificante	2,40	6,54	553,0	305,4	0,62	0,71	0,63	0,69	-10,83	-14,33
90	Óleo lubrificante	2,42	3,98	484,0	307,6	0,52	0,61	0,54	0,59	-9,44	-11,71
90	Óleo lubrificante	2,42	1,54	382,0	305,9	0,31	0,39	0,34	0,43	-8,47	-10,80



Tabela C.3: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE	$\langle j_t \rangle$ (m/s)	$\langle j_v \rangle$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)					
						[ Exp. ]	[ Homogêneo ]	Dois Fluidos	Dois Fluidos	<i>Drift-Flux</i>	<i>Drift-Flux</i>	Homogêneo	
90	Líquida Óleo lubrificante	2,45	2,11	418,5	305,4	0,39	0,48	0,46	0,40	-8,47	-10,82	-11,08	-10,61

Tabela C.4: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em  $K_e^{(f)}$ .

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		HOMOGENEÍZADO		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
						Exp.	Dois Fluidos	Drift-Flux	Homogêneo	Exp.	Dois Fluidos	Drift-Flux	Homogêneo
-90	Querosene	0,11	9,12	485,4	291,5	0,92	0,96	0,91	0,97	-0,17	-0,33	0,20	-0,47
-90	Querosene	0,11	10,84	299,2	316,5	0,98	0,96	0,90	0,97	-0,21	-0,33	0,34	-0,54
-90	Querosene	0,31	12,02	501,2	295,9	0,88	0,93	0,87	0,94	-0,62	-1,38	-0,60	-1,70
-90	Querosene	0,31	15,25	492,3	293,7	0,88	0,95	0,88	0,95	-1,14	-2,65	-1,24	-2,61
-90	Querosene	0,31	19,59	516,4	293,7	0,91	0,97	0,90	0,96	-1,40	-5,56	-2,24	-4,03
-90	Querosene	0,31	22,22	537,1	294,3	0,92	0,98	0,90	0,96	-1,49	-7,81	-2,93	-5,04
-90	Querosene	0,56	23,03	384,0	319,3	0,92	0,96	0,86	0,95	-1,97	-9,70	-4,09	-7,63
-90	Querosene	0,56	28,11	419,9	318,7	0,94	0,97	0,87	0,96	-2,71	-16,90	-5,62	-10,69
-90	Óleo lubrificante	0,11	9,89	339,2	299,8	0,89	0,95	0,89	0,97	-0,35	-0,68	0,41	-0,78
-90	Óleo lubrificante	0,28	7,27	319,9	307,6	0,83	0,90	0,84	0,93	-0,01	-0,30	0,32	-0,78
-90	Óleo lubrificante	0,28	9,00	332,3	308,1	0,84	0,90	0,85	0,94	-0,34	-0,55	0,01	-1,14
-90	Óleo lubrificante	0,28	10,24	339,2	301,5	0,85	0,90	0,85	0,94	-0,47	-0,81	-0,27	-1,50
-30	Querosene	0,31	25,80	264,8	307,0	0,90	0,95	0,89	0,97	-1,71	-4,24	-2,85	-5,63
-30	Querosene	0,59	14,29	223,4	317,6	0,88	0,84	0,83	0,93	-1,39	-2,59	-2,55	-4,19
-30	Querosene	0,59	16,77	235,8	320,4	0,90	0,86	0,84	0,94	-1,83	-3,38	-3,20	-5,26
-30	Querosene	0,63	20,79	287,5	304,8	0,80	0,90	0,85	0,94	-2,63	-5,56	-4,80	-7,87
0	Querosene	0,31	19,73	587,4	293,7	0,94	0,95	0,91	0,94	-1,76	-4,18	-3,37	-3,87
0	Querosene	0,31	23,18	611,6	297,0	0,96	0,96	0,92	0,95	-2,02	-5,78	-4,27	-4,95
0	Querosene	0,31	24,06	625,4	297,0	0,96	0,96	0,92	0,95	-2,14	-6,33	-4,56	-5,28
0	Querosene	0,56	16,20	408,2	312,0	0,89	0,89	0,85	0,90	-1,98	-4,01	-3,73	-4,27
0	Querosene	2,19	9,57	592,3	316,8	0,72	0,67	0,72	0,73	-5,24	-9,14	-9,72	-10,10
0	Querosene	2,23	8,05	553,0	317,6	0,72	0,62	0,69	0,70	-4,45	-7,89	-8,51	-8,77
0	Óleo lubrificante	0,28	13,88	392,3	283,4	0,84	0,90	0,88	0,93	-1,44	-2,55	-2,47	-2,83
0	Óleo lubrificante	0,28	18,64	432,3	279,8	0,89	0,93	0,90	0,94	-1,92	-3,93	-3,55	-4,18
0	Óleo lubrificante	0,51	19,02	473,7	285,4	0,85	0,91	0,87	0,92	-3,03	-6,60	-5,93	-6,90
0	Óleo lubrificante	0,52	21,14	497,8	285,4	0,87	0,93	0,88	0,93	-3,32	-7,95	-6,80	-7,99
50	Querosene	0,31	19,88	571,6	296,8	1,00	0,97	0,90	0,94	-2,05	-6,66	-3,98	-4,39
50	Querosene	0,52	21,28	325,4	324,8	0,87	0,95	0,86	0,93	-3,20	-7,48	-5,10	-6,20
50	Querosene	0,55	24,18	370,2	323,1	0,88	0,97	0,87	0,94	-3,40	-11,35	-6,28	-7,63
50	Querosene	0,55	17,92	292,3	323,1	0,89	0,91	0,85	0,92	-3,08	-5,25	-4,79	-5,34
90	Querosene	0,31	20,51	581,9	294,3	0,92	0,98	0,90	0,95	-2,07	-7,33	-4,38	-4,74
90	Querosene	0,56	24,41	484,0	318,7	0,95	0,97	0,87	0,93	-3,92	-13,09	-7,21	-8,29
90	Óleo lubrificante	0,11	9,37	357,8	299,8	0,94	0,87	0,88	0,95	-0,89	-1,74	-1,60	-1,25

Tabela C.5: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Anular com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 2,5 em  $K_e^{(f)}$ .

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		HOMOGENEÍZADO		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
						[ Exp. ]	Dois Fluidos	Drift-Flux	Homogêneo	[ Exp. ]	Dois Fluidos	Drift-Flux	Homogêneo
-90	Querosene	0,11	9,12	485,4	291,5	0,92	0,97	0,91	0,97	-0,17	-0,51	0,20	-0,47
-90	Querosene	0,11	10,84	299,2	316,5	0,98	0,97	0,90	0,97	-0,21	-0,51	0,34	-0,54
-90	Querosene	0,31	12,02	501,2	295,9	0,88	0,94	0,87	0,94	-0,62	-1,70	-0,60	-1,70
-90	Querosene	0,31	15,25	492,3	293,7	0,88	0,95	0,88	0,95	-1,14	-2,87	-1,24	-2,61
-90	Querosene	0,31	19,59	516,4	293,7	0,91	0,97	0,90	0,96	-1,40	-5,63	-2,24	-4,03
-90	Querosene	0,31	22,22	537,1	294,3	0,92	0,98	0,90	0,96	-1,49	-7,84	-2,93	-5,04
-90	Querosene	0,56	23,03	384,0	319,3	0,92	0,96	0,86	0,95	-1,97	-9,79	-4,09	-7,63
-90	Querosene	0,56	28,11	419,9	318,7	0,94	0,97	0,87	0,96	-2,71	-16,92	-5,62	-10,69
-90	Óleo lubrificante	0,11	9,89	339,2	299,8	0,89	0,96	0,89	0,97	-0,35	-0,68	0,41	-0,68
-90	Óleo lubrificante	0,28	7,27	319,9	307,6	0,83	0,91	0,84	0,93	-0,01	-0,51	0,32	-0,78
-90	Óleo lubrificante	0,28	9,00	332,3	308,1	0,84	0,92	0,85	0,94	-0,34	-0,85	0,01	-1,14
-90	Óleo lubrificante	0,28	10,24	339,2	301,5	0,85	0,92	0,85	0,94	-0,47	-1,17	-0,27	-1,50
-30	Querosene	0,31	25,80	264,8	307,0	0,90	0,96	0,92	0,97	-1,71	-4,78	-2,85	-5,63
-30	Querosene	0,59	14,29	223,4	317,6	0,88	0,88	0,83	0,93	-1,39	-3,08	-2,55	-4,19
-30	Querosene	0,59	16,77	235,8	320,4	0,90	0,90	0,84	0,94	-1,83	-3,92	-3,20	-5,26
-30	Querosene	0,63	20,79	287,5	304,8	0,80	0,92	0,85	0,94	-2,63	-6,15	-4,80	-7,87
0	Querosene	0,31	19,73	587,4	293,7	0,94	0,96	0,91	0,94	-1,76	-4,64	-3,37	-3,87
0	Querosene	0,31	23,18	611,6	297,0	0,96	0,96	0,92	0,95	-2,02	-6,23	-4,27	-4,95
0	Querosene	0,31	24,06	625,4	297,0	0,96	0,97	0,92	0,95	-2,14	-6,78	-4,56	-5,28
0	Querosene	0,56	16,20	408,2	312,0	0,89	0,91	0,85	0,90	-1,98	-4,43	-3,73	-4,27
0	Querosene	2,19	9,57	592,3	316,8	0,72	0,70	0,72	0,73	-5,24	-9,49	-9,72	-10,10
0	Querosene	2,23	8,05	553,0	317,6	0,72	0,66	0,69	0,70	-4,45	-8,18	-8,51	-8,77
0	Óleo lubrificante	0,28	13,88	392,3	283,4	0,84	0,93	0,88	0,93	-1,44	-2,90	-2,47	-2,83
0	Óleo lubrificante	0,28	18,64	432,3	279,8	0,89	0,95	0,90	0,94	-1,92	-4,44	-3,55	-4,18
0	Óleo lubrificante	0,51	19,02	473,7	285,4	0,85	0,93	0,87	0,92	-3,03	-7,13	-5,93	-6,90
0	Óleo lubrificante	0,52	21,14	497,8	285,4	0,87	0,94	0,88	0,93	-3,32	-8,49	-6,80	-7,99
50	Querosene	0,31	19,88	571,6	296,8	1,00	0,97	0,90	0,94	-2,05	-6,71	-3,98	-4,39
50	Querosene	0,52	21,28	325,4	324,8	0,87	0,95	0,86	0,93	-3,20	-7,62	-5,10	-6,20
50	Querosene	0,55	24,18	370,2	323,1	0,88	0,97	0,87	0,94	-3,40	-11,41	-6,28	-7,63
50	Querosene	0,55	17,92	292,3	323,1	0,89	0,92	0,85	0,92	-3,08	-5,45	-4,79	-5,34
90	Querosene	0,31	20,51	581,9	294,3	0,92	0,98	0,90	0,95	-2,07	-7,37	-4,38	-4,74
90	Querosene	0,56	24,41	484,0	318,7	0,95	0,97	0,87	0,93	-3,92	-13,12	-7,21	-8,29
90	Óleo lubrificante	0,11	9,37	357,8	299,8	0,94	0,94	0,88	0,95	-0,89	-1,29	-1,60	-1,25

Tabela C.6: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime *Mist* com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)				
						[ Exp. ]	Dois Fluidos	[ Exp. ]	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo ]	
-90	Querosene	0,03	7,27	478,5	287,6	0,94	0,99	0,97	-0,03	-0,33	0,11	-0,17
-90	Querosene	0,11	11,79	487,5	291,5	0,93	0,98	0,92	-0,33	-1,53	-0,83	-0,83
-90	Querosene	0,11	13,09	302,0	310,4	0,92	0,98	0,90	-0,33	-1,40	0,13	-0,80
-90	Querosene	0,11	16,00	478,5	291,5	0,93	0,99	0,94	-0,66	-2,66	-0,67	-1,49
-90	Querosene	0,11	19,09	511,6	286,5	0,94	0,99	0,95	-1,12	-3,60	-1,26	-2,19
-90	Querosene	0,11	21,70	326,8	310,9	0,98	0,99	0,93	-0,47	-3,38	-0,63	-2,09
-30	Querosene	0,03	17,10	201,3	287,0	0,89	1,00	0,96	-0,22	-0,80	-0,32	-0,83
-30	Querosene	0,03	17,82	192,4	309,3	0,97	1,00	0,96	-0,17	-0,77	-0,21	-0,81
-30	Querosene	0,03	19,69	184,1	309,3	0,98	1,00	0,96	-0,24	-0,83	-0,28	-0,83
-30	Querosene	0,11	19,74	188,9	315,9	0,96	0,99	0,91	-0,44	-2,50	-0,61	-1,52
-30	Óleo lubrificante	0,03	9,13	375,1	292,0	0,83	0,99	0,96	-0,62	-0,58	-0,10	-0,58
-30	Óleo lubrificante	0,03	12,15	368,2	281,5	0,93	0,99	0,96	-0,23	-0,99	-0,32	-0,90
0	Querosene	0,02	11,19	211,0	306,5	0,98	1,00	0,97	-0,13	-0,37	-0,20	-0,24
0	Querosene	0,03	7,88	475,0	294,3	0,94	0,99	0,96	-0,15	-0,51	-0,24	-0,27
0	Querosene	0,03	9,46	495,7	290,6	0,93	0,99	0,97	-0,19	-0,66	-0,35	-0,38
0	Querosene	0,04	10,03	211,0	299,8	1,00	0,99	0,92	-0,14	-0,53	-0,23	-0,30
0	Querosene	0,04	10,81	213,0	304,8	0,96	0,99	0,93	-0,16	-0,61	-0,25	-0,33
0	Querosene	0,04	14,71	219,9	309,3	0,86	0,99	0,94	-0,27	-0,95	-0,40	-0,53
0	Querosene	0,04	16,80	226,8	299,8	0,97	1,00	0,95	-0,38	-1,12	-0,40	-0,68
0	Querosene	0,11	11,29	499,2	290,4	0,90	0,98	0,92	-0,44	-1,60	-0,76	-0,87
0	Querosene	0,11	15,55	515,0	291,2	0,94	0,99	0,94	-0,85	-2,78	-1,25	-1,43
0	Óleo lubrificante	0,03	3,86	335,8	284,3	0,80	0,96	0,86	-0,09	-0,13	-0,10	-0,11
0	Óleo lubrificante	0,03	5,75	340,6	283,1	0,84	0,98	0,91	-0,15	-0,28	-0,16	-0,19
0	Óleo lubrificante	0,04	13,91	384,0	269,8	0,97	0,99	0,95	-0,56	-1,80	-0,77	-0,97
0	Óleo lubrificante	0,11	10,89	344,0	280,9	0,82	0,98	0,90	-0,53	-1,56	-0,80	-1,05
0	Óleo lubrificante	0,11	13,22	375,1	278,1	0,86	0,98	0,91	-0,76	-2,35	-0,95	-1,39
50	Querosene	0,03	8,82	537,1	278,7	0,82	0,99	0,97	-0,52	-0,76	-0,58	-0,63
50	Querosene	0,03	9,52	537,1	277,6	0,86	0,99	0,97	-0,50	-0,82	-0,63	-0,63
50	Querosene	0,11	15,92	518,5	292,0	0,99	0,99	0,94	-1,08	-3,01	-1,71	-1,81
50	Querosene	0,11	18,80	191,0	315,1	0,97	0,99	0,90	-0,88	-2,46	-1,55	-1,51
90	Querosene	0,11	13,50	322,0	308,1	0,94	0,98	0,90	-0,77	-1,84	-1,31	-1,31
90	Querosene	0,11	15,24	502,6	291,5	0,95	0,99	0,93	-1,07	-2,82	-1,79	-1,77
90	Querosene	0,11	17,26	325,4	309,3	0,96	0,99	0,92	-0,79	-2,69	-1,67	-1,67
90	Querosene	0,11	18,05	540,5	286,5	0,96	0,99	0,94	-1,29	-3,72	-2,15	-2,29
90	Querosene	0,11	20,01	334,4	310,9	0,96	0,99	0,93	-1,33	-3,38	-1,64	-2,06
90	Óleo lubrificante	0,03	4,07	328,9	285,4	0,82	0,84	0,87	-0,84	-1,50	-1,26	-0,96
90	Óleo lubrificante	0,03	4,75	346,1	284,8	0,85	0,92	0,89	-0,77	-0,84	-1,12	-0,91
90	Óleo lubrificante	0,03	5,71	340,6	285,9	0,90	0,97	0,91	-0,59	-0,97	-0,51	-0,51
90	Óleo lubrificante	0,03	6,05	350,9	290,4	0,91	0,97	0,92	-0,53	-0,48	-0,88	-0,51

Tabela C.7: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
						Dois Fluidos	Drift-Flux	Dois Fluidos	Drift-Flux	Homogêneo ]	Homogêneo ]
0	Querosene	0,02	2,76	199,3	309,3	0,86	0,89	0,94	-0,01	-0,02	-0,03
0	Querosene	0,03	4,09	488,8	293,4	0,89	0,93	0,94	-0,03	-0,08	-0,09
0	Querosene	0,04	2,91	199,3	318,7	0,74	0,85	0,91	-0,01	-0,05	-0,05
0	Querosene	0,04	3,48	211,0	309,8	0,77	0,86	0,92	-0,01	-0,06	-0,07
0	Querosene	0,04	8,69	211,0	303,1	0,88	0,92	0,97	-0,04	-0,18	-0,24
0	Querosene	0,07	0,45	206,2	312,6	0,38	0,68	0,64	0,00	-0,02	-0,02
0	Querosene	0,08	2,93	194,4	312,6	0,64	0,83	0,89	-0,01	-0,08	-0,10
0	Querosene	0,11	4,08	484,0	294,0	0,70	0,86	0,89	-0,04	-0,19	-0,22
0	Óleo lubrificante	0,06	0,37	332,3	273,7	0,13	0,37	0,62	0,00	-0,09	-0,09

Tabela C.8: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Estratificado horizontal com a correlação de BEGGS e BRILL (1973) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas a diferentes pressões médias.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)		
						Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo	[ Exp.	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo ]
0	Querosene	0,02	2,76	199,3	309,3	0,86	0,89	<b>0,94</b>	-0,01	<b>-0,02</b>	-0,02	-0,03
0	Querosene	0,03	4,09	488,8	293,4	0,89	0,93	<b>0,94</b>	-0,03	<b>-0,08</b>	-0,09	-0,09
0	Querosene	0,04	2,91	199,3	318,7	0,74	0,85	<b>0,91</b>	-0,01	<b>-0,05</b>	-0,05	-0,05
0	Querosene	0,04	3,48	211,0	309,8	0,77	0,86	<b>0,92</b>	-0,01	<b>-0,06</b>	-0,06	-0,07
0	Querosene	0,04	8,69	211,0	303,1	0,88	<b>0,92</b>	0,97	-0,04	<b>-0,18</b>	-0,19	-0,24
0	Querosene	0,07	0,45	206,2	312,6	0,31	<b>0,68</b>	0,64	0,00	<b>-0,02</b>	-0,02	-0,02
0	Querosene	0,08	2,93	194,4	312,6	0,63	0,83	<b>0,89</b>	-0,01	<b>-0,08</b>	-0,09	-0,10
0	Querosene	0,11	4,08	484,0	294,0	0,70	<b>0,86</b>	0,89	-0,04	<b>-0,19</b>	-0,21	-0,22
0	Óleo lubrificante	0,06	0,37	332,3	273,7	0,13	0,37	<b>0,62</b>	0,00	-0,09	-0,09	<b>-0,08</b>

Tabela C.9: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime de Bolhas com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)				
						Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo	Homogêneo	
-90	Querosene	0,24	0,10	487,5	300,9	0,80	0,45	0,61	5,04	4,33	4,73	3,08
-90	Querosene	0,24	0,11	446,1	302,6	0,80	0,47	0,62	4,85	4,22	4,60	2,99
-90	Querosene	0,31	0,12	404,7	307,0	0,26	0,40	0,34	4,52	4,72	5,19	3,20
-90	Querosene	3,22	2,58	361,3	315,9	0,43	0,45	0,38	1,50	0,20	0,93	-4,30
-90	Querosene	3,31	5,40	447,5	314,8	0,58	0,62	0,61	-1,85	-3,28	-2,02	-9,78
-90	Querosene	3,34	1,83	332,3	315,9	0,32	0,36	0,30	1,81	1,19	1,77	-3,25
-90	Óleo lubrificante	1,19	0,45	287,5	308,1	0,28	0,29	0,23	4,62	4,95	5,44	2,75
-90	Óleo lubrificante	2,44	0,41	332,3	306,5	0,09	0,15	0,12	5,53	4,29	4,53	0,51
-90	Óleo lubrificante	2,46	0,29	326,8	305,9	0,05	0,11	0,09	5,79	4,67	4,85	0,83
-30	Querosene	1,18	0,50	185,5	313,7	0,50	0,31	0,34	1,85	2,18	2,08	0,85
-30	Querosene	1,21	0,67	187,5	314,3	0,57	0,37	0,40	1,54	1,84	1,72	0,38
-30	Querosene	1,27	0,32	191,0	308,1	0,42	0,21	0,23	1,85	2,54	2,47	1,12
-30	Querosene	1,27	0,44	204,8	308,4	0,43	0,27	0,29	1,57	2,30	2,21	0,90
-30	Querosene	2,55	1,64	240,6	310,4	0,31	0,39	0,34	0,31	-0,14	0,11	-2,70
-30	Querosene	2,55	2,30	264,8	310,9	0,40	0,47	0,42	-0,21	-0,84	-0,52	-3,54
-30	Querosene	3,79	7,17	457,8	318,7	0,64	0,67	0,58	0,75	-7,32	-6,09	-18,67
-30	Querosene	3,88	3,00	319,9	320,4	0,41	0,44	0,39	-2,21	-3,37	-2,97	-9,57
-30	Querosene	3,90	4,74	375,1	319,5	0,53	0,56	0,49	-3,62	-5,18	-4,46	-13,70
-30	Querosene	3,91	2,12	284,1	320,1	0,32	0,35	0,32	-1,29	-2,49	-2,23	-7,75
-30	Querosene	3,91	5,62	406,1	319,5	0,57	0,60	0,53	-4,31	-6,06	-5,16	-15,87
-30	Querosene	3,96	5,42	409,5	319,8	0,57	0,59	0,52	-4,44	-5,93	-5,08	-15,56
-30	Óleo lubrificante	0,85	0,09	170,3	295,4	0,16	0,10	0,07	3,26	3,38	1,90	1,52
-30	Óleo lubrificante	1,21	0,11	197,9	293,1	1,00	0,09	0,07	3,07	3,09	3,16	1,52
-30	Óleo lubrificante	1,55	0,10	197,9	294,8	1,00	0,07	0,06	3,04	2,50	2,53	0,53
-30	Óleo lubrificante	1,83	0,25	195,8	294,3	0,27	0,13	0,12	1,73	1,76	1,78	-0,56
-30	Óleo lubrificante	1,84	0,13	191,0	295,4	0,24	0,07	0,07	2,05	2,03	2,04	-0,18
0	Querosene	0,07	0,23	211,7	310,9	0,69	0,72	0,47	-0,02	-0,01	-0,01	-0,01
0	Querosene	0,08	0,70	211,7	310,4	0,77	0,89	0,79	-0,07	-0,03	-0,03	-0,03
0	Querosene	0,11	0,44	209,6	313,1	0,69	0,78	0,64	-0,04	-0,03	-0,03	-0,03
0	Querosene	0,13	0,45	209,6	310,4	0,77	0,76	0,63	-0,05	-0,04	-0,04	-0,04
0	Querosene	0,15	0,42	213,0	313,1	0,66	0,72	0,59	-0,04	-0,04	-0,04	-0,04
0	Querosene	0,16	0,43	213,0	314,8	0,71	0,70	0,58	-0,07	-0,04	-0,04	-0,04
0	Querosene	0,31	0,43	216,5	318,1	0,61	0,55	0,48	-0,10	-0,10	-0,10	-0,10
0	Querosene	0,54	0,46	216,5	317,6	0,48	0,43	0,41	-0,20	-0,20	-0,20	-0,22
0	Querosene	0,55	0,30	309,6	316,5	0,40	0,33	0,30	-0,17	-0,16	-0,16	-0,20
0	Querosene	0,55	0,41	309,6	316,5	0,28	0,40	0,37	-0,19	-0,20	-0,20	-0,22
0	Querosene	1,15	0,30	340,6	312,0	0,29	0,20	0,20	-0,36	-0,51	-0,51	-0,59
0	Querosene	1,16	0,45	216,5	320,4	0,29	0,27	0,22	-0,41	-0,54	-0,54	-0,68
0	Querosene	1,70	0,40	235,8	323,1	0,21	0,18	0,19	-0,67	-0,90	-0,90	-1,29
0	Querosene	2,23	0,40	244,1	320,9	0,13	0,15	0,16	-1,03	-1,47	-1,47	-2,04
0	Querosene	3,98	1,96	501,2	310,9	0,10	0,33	0,30	-3,92	-5,21	-5,11	-8,42
0	Óleo lubrificante	0,08	0,12	275,1	281,5	0,27	0,51	0,21	-0,11	-0,10	-0,10	-0,09
0	Óleo lubrificante	0,08	0,19	349,6	275,9	0,40	0,64	0,43	-0,13	-0,13	-0,13	-0,11

Tabela C.9: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	(j <sub>l</sub> ) (m/s)	(j <sub>v</sub> ) (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)				
						Dois Fluidos	Drift-Flux Homogêneo ]	Exp.	Dois Fluidos	Drift-Flux Homogêneo ]		
0	Óleo lubrificante	0,11	0,09	349,6	283,1	0,23	0,36	0,15	0,22	-0,09	-0,12	-0,11
0	Óleo lubrificante	0,28	0,10	335,8	285,9	0,17	0,23	0,11	0,27	-0,19	-0,24	-0,24
0	Óleo lubrificante	0,28	0,29	323,4	282,6	0,34	0,47	0,24	0,42	-0,25	-0,33	-0,32
0	Óleo lubrificante	0,44	0,16	282,0	283,7	0,13	0,23	0,13	0,26	-0,34	-0,41	-0,49
0	Óleo lubrificante	1,40	0,22	373,7	287,6	0,09	0,13	0,11	0,13	-0,97	-1,04	-1,21
0	Óleo lubrificante	1,44	0,19	363,4	287,0	0,07	0,11	0,09	0,12	-1,02	-1,06	-1,25
0	Óleo lubrificante	1,49	0,16	315,1	287,0	0,06	0,07	0,06	0,08	-0,95	-1,08	-1,18
0	Óleo lubrificante	2,26	0,16	394,4	291,8	0,01	0,06	0,06	0,07	-2,66	-2,65	-3,10
0	Óleo lubrificante	3,04	0,24	432,3	288,1	0,02	0,07	0,08	0,08	-4,38	-4,62	-5,56
0	Óleo lubrificante	3,04	0,29	487,5	292,3	0,03	0,09	0,09	0,09	-4,32	-4,43	-5,50
50	Querosene	0,27	0,09	466,8	292,9	0,24	0,16	0,12	0,24	-5,56	-5,20	-4,72
50	Querosene	0,87	0,34	446,1	298,1	0,16	0,26	0,21	0,21	-5,53	-4,92	-4,68
50	Querosene	1,23	0,20	384,0	298,1	0,12	0,13	0,11	0,19	-5,92	-5,85	-5,67
50	Querosene	1,23	0,26	392,3	299,8	0,25	0,16	0,14	0,22	-6,17	-5,55	-5,53
50	Querosene	1,23	0,32	456,4	298,7	0,15	0,19	0,16	0,24	-5,92	-7,46	-7,85
50	Querosene	3,29	2,61	342,7	325,4	0,45	0,46	0,40	0,49	-7,79	-7,94	-8,08
50	Querosene	3,38	2,85	356,5	324,8	0,45	0,47	0,41	0,50	-7,79	-8,25	-9,31
50	Querosene	3,40	0,58	282,0	324,3	0,10	0,15	0,14	0,23	-7,98	-8,33	-8,49
50	Querosene	3,45	0,42	226,8	324,3	0,03	0,12	0,11	0,19	-8,11	-8,43	-9,46
90	Querosene	0,04	0,04	549,5	295,9	0,26	0,13	0,12	0,09	-7,85	-6,96	-7,01
90	Querosene	0,11	0,04	473,7	296,5	0,07	0,12	0,11	0,15	-8,28	-7,03	-6,79
90	Querosene	0,11	0,08	506,1	295,4	0,22	0,21	0,19	0,22	-7,25	-6,33	-6,49
90	Querosene	0,13	0,10	495,7	305,4	0,43	0,25	0,22	0,26	-6,07	-5,97	-5,89
90	Querosene	0,16	0,09	553,0	304,8	0,37	0,20	0,18	0,30	-6,87	-6,33	-5,56
90	Querosene	0,24	0,09	549,5	300,9	0,41	0,17	0,16	0,30	-7,59	-6,61	-5,64
90	Querosene	0,24	0,10	466,8	302,6	0,31	0,20	0,18	0,31	-7,46	-6,38	-5,51
90	Querosene	0,28	0,09	553,0	306,5	0,32	0,16	0,15	0,28	-7,65	-6,69	-5,77
90	Querosene	0,31	0,10	494,4	310,9	0,33	0,17	0,15	0,28	-6,81	-6,59	-5,73
90	Querosene	0,31	0,12	397,8	307,0	0,30	0,20	0,18	0,31	-6,87	-6,35	-5,50
90	Querosene	0,55	0,34	288,9	320,4	0,42	0,35	0,29	0,39	-5,89	-5,28	-4,96
90	Querosene	3,16	0,48	313,0	316,5	0,02	0,14	0,12	0,21	-10,08	-9,58	-10,26
90	Querosene	3,22	2,26	413,0	315,9	0,38	0,42	0,36	0,47	-8,83	-8,72	-10,81
90	Querosene	3,31	0,42	266,8	318,7	0,02	0,12	0,10	0,20	-10,54	-9,86	-10,63
90	Querosene	3,31	4,29	563,3	314,8	0,61	0,58	0,48	0,56	-8,90	-9,16	-13,06
90	Querosene	3,34	1,48	411,6	315,9	0,28	0,32	0,27	0,38	-9,55	-9,22	-10,75
90	Querosene	3,34	3,89	502,6	314,8	0,52	0,55	0,46	0,56	-8,90	-9,15	-12,84
90	Óleo lubrificante	0,11	0,05	392,3	288,7	0,11	0,15	0,10	0,15	-7,61	-7,20	-7,14
90	Óleo lubrificante	0,28	0,08	261,3	309,3	0,09	0,15	0,11	0,26	-7,65	-7,02	-6,15
90	Óleo lubrificante	0,31	0,08	273,7	312,0	0,06	0,14	0,11	0,25	-7,74	-7,09	-6,27
90	Óleo lubrificante	1,19	0,43	302,7	308,1	0,18	0,26	0,22	0,28	-7,22	-7,00	-7,15
90	Óleo lubrificante	1,20	0,21	249,6	303,7	0,07	0,15	0,12	0,20	-8,41	-7,88	-8,10
90	Óleo lubrificante	1,26	0,13	228,9	303,7	0,03	0,09	0,08	0,17	-8,60	-8,38	-8,12
90	Óleo lubrificante	2,44	0,40	342,7	306,5	0,08	0,15	0,12	0,22	-9,66	-9,80	-10,43
90	Óleo lubrificante	2,46	0,29	332,3	305,9	0,05	0,11	0,09	0,19	-9,79	-10,07	-10,66



Tabela C.10: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime *Slug* com  $K_b = 0,45$  e com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)				
						Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo	Homogêneo	
-90	Querosene	0,11	2,08	291,0	315,4	0,98	0,84	0,93	0,62	0,05	1,14	0,43
-90	Querosene	0,11	3,18	285,4	313,7	0,97	0,85	0,91	0,32	0,03	1,00	0,31
-90	Querosene	0,11	7,71	478,5	296,5	0,95	0,90	0,96	-0,13	-0,06	0,36	-0,28
-90	Querosene	0,31	7,59	484,0	295,9	0,85	0,90	0,85	-0,33	-0,35	0,12	-0,66
-90	Querosene	0,31	9,75	490,9	292,6	0,87	0,86	0,87	-0,65	-0,67	-0,32	-1,16
-90	Querosene	0,54	14,65	332,3	320,4	0,88	0,84	0,88	-2,09	-2,10	-1,61	-3,59
-90	Querosene	0,55	17,58	356,5	319,8	0,91	0,85	0,91	-2,48	-2,88	-2,41	-4,87
-90	Querosene	0,57	8,73	309,6	320,4	0,81	0,81	0,90	-0,42	-0,91	-0,25	-1,53
-90	Querosene	0,57	11,97	323,4	320,9	0,84	0,88	0,83	-1,73	-1,56	-1,04	-2,73
-90	Querosene	0,48	4,02	325,4	301,5	0,78	0,87	0,86	0,22	-0,04	0,84	-0,27
-90	Óleo lubrificante	0,54	0,10	282,0	303,1	0,22	0,68	0,11	2,48	5,50	7,07	4,19
-90	Óleo lubrificante	1,16	1,85	315,1	304,3	0,59	0,70	0,52	2,09	0,97	2,53	0,09
-90	Óleo lubrificante	1,18	2,81	323,4	304,8	0,63	0,75	0,60	0,88	0,22	1,50	-0,83
-90	Óleo lubrificante	1,18	2,23	316,5	304,3	0,60	0,73	0,56	1,45	0,62	2,08	-0,32
-30	Querosene	0,11	12,53	187,5	319,8	0,96	0,98	0,89	-0,29	-0,64	-0,19	-0,80
-30	Querosene	0,11	17,37	180,6	319,8	0,97	0,99	0,90	-0,39	-0,97	-0,51	-1,21
-30	Querosene	0,62	4,69	215,1	308,7	0,71	0,84	0,76	-0,22	-0,47	-0,07	-0,94
-30	Querosene	1,19	7,05	244,1	313,7	0,74	0,82	0,74	-1,78	-2,10	-1,55	-3,67
-30	Querosene	1,19	8,67	256,5	312,6	0,81	0,85	0,76	-2,22	-2,86	-2,17	-4,82
-30	Querosene	1,27	3,00	216,5	309,3	0,62	0,68	0,60	0,15	-0,22	0,14	-1,40
-30	Querosene	2,55	2,65	270,3	311,5	0,43	0,49	0,45	-0,49	-1,08	-0,81	-3,97
-30	Querosene	3,31	8,47	453,0	317,9	0,71	0,64	0,71	-5,10	-7,23	-6,17	-18,10
-30	Querosene	3,33	6,49	390,9	319,0	0,65	0,65	0,65	-4,31	-5,57	-4,79	-18,87
-30	Querosene	3,52	8,10	464,7	318,1	0,74	0,69	0,62	-7,35	-7,35	-6,29	-18,87
-30	Óleo lubrificante	1,81	0,40	225,5	293,1	0,51	0,18	0,77	1,42	1,42	1,45	-0,97
0	Querosene	0,03	1,89	204,1	293,1	0,82	0,92	0,83	-0,15	-0,05	-0,05	-0,03
0	Querosene	0,53	0,69	216,5	314,8	0,56	0,50	0,52	-0,22	-0,23	-0,23	-0,26
0	Querosene	0,56	1,81	323,4	317,0	0,58	0,63	0,63	-0,43	-0,50	-0,48	-0,50
0	Querosene	0,57	1,75	223,4	319,8	0,71	0,62	0,62	-0,44	-0,46	-0,44	-0,49
0	Querosene	1,14	0,68	230,3	320,9	0,38	0,35	0,35	-0,46	-0,60	-0,60	-0,77
0	Querosene	1,16	1,95	340,6	320,4	0,59	0,53	0,53	-0,70	-1,08	-1,05	-1,30
0	Querosene	1,16	0,46	325,4	319,8	0,33	0,27	0,27	-0,41	-0,56	-0,56	-0,69
0	Querosene	1,18	1,26	326,8	320,9	0,50	0,43	0,43	-0,56	-0,86	-0,84	-1,05
0	Querosene	1,70	1,61	251,0	328,7	0,53	0,46	0,45	-1,08	-1,45	-1,41	-1,98
0	Querosene	2,16	5,41	464,7	318,1	0,58	0,63	0,61	-3,20	-4,10	-3,89	-5,95
0	Querosene	2,21	1,52	273,7	323,1	0,40	0,39	0,38	-1,53	-2,04	-2,00	-2,92
0	Querosene	2,23	1,08	380,6	322,0	0,34	0,31	0,32	-1,36	-1,87	-1,84	-2,60
0	Querosene	2,23	1,64	397,8	314,8	0,40	0,41	0,39	-1,68	-2,20	-2,15	-3,10
0	Querosene	2,23	4,03	449,5	315,4	0,61	0,61	0,56	-2,80	-3,47	-3,34	-5,06
0	Querosene	2,32	6,76	518,5	315,4	0,72	0,71	0,65	-4,19	-5,22	-4,90	-7,96
0	Querosene	3,40	5,74	633,6	310,9	0,48	0,56	0,56	-5,76	-6,67	-6,28	-11,68
0	Óleo lubrificante	0,11	0,37	349,6	277,6	0,47	0,60	0,34	-0,25	-0,21	-0,21	-0,16
0	Óleo lubrificante	0,52	1,89	344,0	287,0	0,56	0,71	0,65	-1,08	-1,02	-0,99	-0,98

Tabela C.10: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)		FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)				
					[ Exp. ]	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo ]	[ Exp. ]	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo ]	
0	Óleo lubrificante	0,58	0,44	344,0	283,7	0,30	0,38	0,26	0,39	-0,49	-0,65	-0,64	-0,65
0	Óleo lubrificante	0,60	0,35	357,8	284,5	0,19	0,33	0,22	0,35	-0,46	-0,61	-0,61	-0,65
0	Óleo lubrificante	1,41	0,44	339,2	288,1	0,17	0,23	0,20	0,13	-1,13	-1,14	-1,13	-1,31
0	Óleo lubrificante	1,43	0,28	359,0	287,6	0,12	0,14	0,13	0,16	-1,04	-1,09	-1,09	-1,28
0	Óleo lubrificante	2,24	0,27	384,0	292,6	0,04	0,10	0,10	0,11	-2,91	-2,74	-2,68	-3,46
0	Óleo lubrificante	2,24	0,38	387,5	292,9	0,05	0,14	0,14	0,15	-2,91	-2,74	-2,74	-3,87
0	Óleo lubrificante	2,29	3,88	518,5	293,1	0,46	0,61	0,55	0,55	-6,09	-4,95	-4,78	-8,38
0	Óleo lubrificante	3,04	3,01	616,4	292,9	0,33	0,49	0,44	0,48	-7,24	-6,14	-5,98	-10,83
50	Querosene	0,03	0,05	453,0	287,6	0,12	0,17	0,11	0,08	-5,73	-5,12	-5,49	-5,69
50	Querosene	0,03	0,11	513,0	284,3	0,27	0,28	0,24	0,25	-4,88	-4,47	-4,72	-4,67
50	Querosene	0,03	0,15	566,7	283,1	0,36	0,32	0,30	0,31	-4,42	-4,21	-4,36	-4,27
50	Querosene	0,03	0,17	546,1	281,5	0,37	0,35	0,34	0,35	-4,36	-4,06	-4,14	-4,06
50	Querosene	0,03	0,23	556,4	281,5	0,44	0,40	0,41	0,41	-4,03	-3,75	-3,69	-3,88
50	Querosene	0,03	2,27	537,1	280,4	0,87	0,90	0,88	0,79	-1,24	-0,73	-0,88	-1,38
50	Querosene	0,03	3,13	535,7	279,3	0,94	0,95	0,91	0,82	-1,04	-0,46	-0,74	-1,21
50	Querosene	0,03	3,89	533,7	279,3	0,97	0,97	0,92	0,84	-0,91	-0,38	-0,67	-1,11
50	Querosene	0,11	0,19	442,6	293,1	0,32	0,34	0,31	0,28	-4,57	-4,09	-4,23	-4,41
50	Querosene	0,11	0,54	187,5	318,1	0,60	0,57	0,57	0,57	-3,01	-2,64	-2,63	-2,61
50	Querosene	0,11	3,65	530,2	293,1	0,82	0,92	0,85	0,86	-1,41	-1,22	-1,22	-1,11
50	Querosene	0,11	6,04	542,6	293,1	0,85	0,94	0,88	0,93	-1,36	-0,82	-1,15	-0,87
50	Querosene	0,11	7,82	544,0	293,7	0,84	0,89	0,90	0,94	-1,32	-1,25	-1,17	-0,96
50	Querosene	0,11	10,39	559,9	294,3	0,86	0,90	0,92	0,95	-1,28	-1,38	-1,27	-1,17
50	Querosene	0,11	12,28	175,1	315,6	0,93	0,96	0,88	0,96	-1,25	-0,90	-1,39	-0,99
50	Querosene	0,11	12,70	502,6	293,1	1,00	0,91	0,92	0,96	-1,22	-1,49	-1,41	-1,37
50	Querosene	0,15	0,08	473,7	291,5	0,15	0,19	0,15	0,21	-5,44	-4,98	-4,87	-4,87
50	Querosene	0,51	0,43	185,5	321,5	0,35	0,38	0,34	0,40	-4,19	-3,85	-4,08	-3,81
50	Querosene	0,52	0,81	188,9	321,5	0,60	0,51	0,34	0,49	-3,49	-3,18	-3,39	-3,32
50	Querosene	0,80	0,77	504,7	297,6	0,39	0,42	0,39	0,43	-4,44	-4,05	-4,23	-4,01
50	Querosene	0,85	1,23	487,5	298,1	0,47	0,51	0,48	0,50	-3,80	-3,64	-3,84	-3,79
50	Querosene	1,23	0,77	501,2	298,1	0,31	0,35	0,32	0,40	-5,08	-4,80	-4,98	-4,67
50	Querosene	1,23	1,16	501,2	299,3	0,34	0,44	0,40	0,46	-4,50	-4,41	-4,61	-4,50
50	Querosene	1,39	3,22	204,8	324,8	0,62	0,66	0,60	0,62	-3,66	-3,77	-4,06	-4,71
50	Querosene	1,39	4,25	223,4	325,4	0,68	0,72	0,65	0,67	-3,80	-3,85	-4,15	-5,03
50	Querosene	2,15	0,64	164,8	325,9	0,15	0,24	0,21	0,32	-6,35	-6,04	-6,20	-6,29
50	Querosene	2,15	3,71	259,9	324,3	0,58	0,62	0,55	0,60	-5,10	-5,66	-5,66	-6,89
50	Querosene	2,16	2,96	235,8	325,4	0,53	0,56	0,51	0,56	-5,24	-5,36	-5,57	-6,89
50	Querosene	3,16	8,36	601,2	324,8	0,69	0,66	0,64	0,70	-7,72	-9,70	-9,65	-16,60
50	Querosene	3,29	3,84	408,2	321,5	0,51	0,54	0,48	0,51	-7,33	-8,04	-8,15	-11,68
50	Querosene	3,29	4,70	446,1	321,5	0,55	0,56	0,52	0,57	-7,53	-8,34	-8,41	-12,68
50	Querosene	3,34	6,69	549,5	324,8	0,61	0,60	0,59	0,65	-8,11	-9,30	-9,28	-15,39
50	Querosene	3,44	7,18	590,9	324,3	0,61	0,61	0,60	0,66	-7,98	-9,74	-9,70	-16,61
90	Querosene	0,03	0,05	435,7	288,7	0,25	0,18	0,17	0,16	-6,17	-6,64	-6,77	-6,77
90	Querosene	0,03	3,91	488,8	285,4	0,93	0,97	0,92	0,90	-0,78	-0,44	-0,83	-0,97

Tabela C.10: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)		FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
					[ Exp. ]	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo ]	[ Exp. ]	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo ]
90	Querosene	0,04	0,07	525,4	296,5	0,54	0,22	0,22	0,21	-5,63	-6,24	-6,33
90	Querosene	0,08	3,44	484,0	288,1	0,81	0,93	0,86	0,89	-1,25	-0,81	-1,39
90	Querosene	0,09	3,54	478,5	289,3	0,80	0,92	0,85	0,88	-1,29	-0,88	-1,17
90	Querosene	0,11	1,96	308,2	315,4	0,76	0,82	0,78	0,82	-2,02	-1,53	-1,87
90	Querosene	0,11	2,98	304,7	313,7	0,82	0,90	0,81	0,86	-1,90	-1,04	-1,26
90	Querosene	0,11	3,44	495,7	291,5	0,80	0,91	0,84	0,87	-1,38	-0,97	-1,27
90	Querosene	0,11	5,31	295,8	313,1	0,79	0,96	0,85	0,90	-1,42	-0,71	-1,07
90	Querosene	0,11	10,09	322,0	316,5	0,91	0,90	0,89	0,95	-1,23	-1,46	-1,57
90	Querosene	0,13	3,56	490,9	298,7	0,81	0,91	0,83	0,86	-1,42	-1,06	-1,34
90	Querosene	0,54	4,98	325,4	317,0	0,81	0,86	0,76	0,79	-2,68	-3,00	-2,85
90	Querosene	0,55	2,97	316,5	316,5	0,73	0,77	0,70	0,72	-2,75	-2,56	-2,97
90	Querosene	0,55	1,98	309,6	315,4	0,64	0,69	0,64	0,66	-3,27	-3,00	-3,24
90	Querosene	0,55	1,35	294,4	315,4	0,60	0,61	0,57	0,60	-3,86	-3,51	-3,59
90	Querosene	0,55	5,92	332,3	319,8	0,96	0,87	0,77	0,80	-2,83	-2,39	-2,94
90	Querosene	0,57	7,97	339,2	320,4	0,98	0,84	0,79	0,86	-3,60	-3,00	-3,11
90	Querosene	1,85	12,30	609,5	310,9	0,86	0,78	0,75	0,81	-7,20	-8,90	-8,96
90	Querosene	3,11	6,77	599,2	313,1	0,71	0,62	0,59	0,66	-8,90	-9,72	-9,77
90	Óleo lubrificante	0,03	0,10	332,3	283,7	0,20	0,24	0,25	0,38	-6,64	-6,41	-5,25
90	Óleo lubrificante	0,03	0,22	354,4	283,4	0,35	0,37	0,36	0,56	-5,14	-5,32	-3,77
90	Óleo lubrificante	0,03	0,39	346,1	283,7	0,46	0,50	0,43	0,67	-4,03	-4,31	-2,86
90	Óleo lubrificante	0,03	1,52	346,1	284,8	0,67	0,82	0,68	0,83	-2,48	-1,70	-1,46
90	Óleo lubrificante	0,03	2,03	342,7	284,8	0,70	0,89	0,75	0,86	-2,17	-1,21	-1,29
90	Óleo lubrificante	0,03	2,49	342,7	287,0	0,73	0,93	0,80	0,87	-1,95	-0,93	-1,17
90	Óleo lubrificante	0,11	1,65	342,7	291,5	0,65	0,78	0,70	0,81	-2,61	-2,18	-1,82
90	Óleo lubrificante	0,11	2,19	349,6	293,7	0,68	0,84	0,75	0,83	-2,39	-1,76	-1,61
90	Óleo lubrificante	0,11	2,49	342,7	291,5	0,71	0,87	0,77	0,85	-2,26	-1,62	-1,54
90	Óleo lubrificante	0,11	3,55	344,0	288,1	0,76	0,92	0,80	0,87	-2,74	-1,40	-1,40
90	Óleo lubrificante	0,11	6,51	344,0	302,6	0,81	0,97	0,86	0,93	-2,19	-1,24	-1,09
90	Óleo lubrificante	0,11	7,89	353,0	299,8	0,85	0,97	0,88	0,94	-2,12	-1,48	-1,16
90	Óleo lubrificante	0,28	0,16	349,6	305,4	0,22	0,22	0,19	0,35	-6,76	-6,51	-5,50
90	Óleo lubrificante	0,28	6,66	349,6	307,6	0,79	0,93	0,82	0,89	-3,33	-1,92	-2,06
90	Óleo lubrificante	0,48	3,78	346,1	301,5	0,70	0,82	0,74	0,76	-4,39	-2,64	-3,20
90	Óleo lubrificante	0,49	0,29	344,0	302,6	0,23	0,27	0,24	0,37	-6,44	-6,27	-5,42
90	Óleo lubrificante	0,50	0,44	349,6	303,1	0,31	0,35	0,33	0,43	-6,08	-5,65	-4,95
90	Óleo lubrificante	0,50	5,29	370,2	303,1	0,74	0,87	0,77	0,80	-4,20	-2,69	-3,35
90	Óleo lubrificante	0,51	0,19	373,7	302,0	0,16	0,20	0,17	0,31	-6,50	-6,82	-5,92
90	Óleo lubrificante	1,14	4,89	401,3	305,4	0,67	0,76	0,68	0,71	-6,14	-4,79	-6,24
90	Óleo lubrificante	1,16	1,69	346,1	304,3	0,47	0,53	0,49	0,54	-5,37	-5,68	-5,88
90	Óleo lubrificante	1,18	2,58	353,0	304,8	0,54	0,63	0,57	0,61	-4,98	-5,38	-5,89
90	Óleo lubrificante	1,18	1,98	356,5	304,3	0,50	0,56	0,52	0,56	-5,30	-5,25	-5,91
90	Óleo lubrificante	2,40	6,54	553,0	305,4	0,62	0,66	0,63	0,69	-10,83	-9,20	-14,33
90	Óleo lubrificante	2,42	3,98	484,0	307,6	0,52	0,59	0,53	0,59	-9,44	-8,34	-11,71
90	Óleo lubrificante	2,42	1,54	382,0	305,9	0,31	0,38	0,34	0,43	-8,47	-8,65	-8,93

Tabela C.10: Continuação

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE	$\langle j_t \rangle$ (m/s)	$\langle j_v \rangle$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)					
						[ Exp. ]	[ Homogêneo ]	Dois Fluidos	Dois Fluidos	Drift-Flux	Homogêneo		
90	Líquida Óleo lubrificante	2,45	2,11	418,5	305,4	0,39	0,45	0,40	0,48	-8,47	-8,83	-8,52	-10,61

Tabela C.11: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Anular com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão e constante de proporcionalidade 1 em  $K_e^{(f)}$ .

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		HOMOGENÊNEO		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
						Exp.	Dois Fluidos	Drift-Flux	Homo	Dois Fluidos	Drift-Flux	Homo	
-90	Querosene	0,11	9,12	485,4	291,5	0,92	0,96	0,91	0,97	-0,17	-0,25	0,16	-0,47
-90	Querosene	0,11	10,84	299,2	316,5	0,98	0,96	0,90	0,97	-0,21	-0,31	0,19	-0,54
-90	Querosene	0,31	12,02	501,2	295,9	0,88	0,93	0,87	0,94	-0,62	-1,28	-0,78	-1,70
-90	Querosene	0,31	15,25	492,3	293,7	0,88	0,95	0,88	0,95	-2,11	-2,11	-1,43	-2,61
-90	Querosene	0,31	19,59	516,4	293,7	0,91	0,97	0,90	0,96	-1,40	-3,26	-2,39	-4,03
-90	Querosene	0,31	22,22	537,1	294,3	0,92	0,98	0,90	0,96	-1,49	-3,97	-3,02	-5,04
-90	Querosene	0,56	23,03	384,0	319,3	0,92	0,96	0,86	0,95	-1,97	-5,36	-3,93	-7,63
-90	Querosene	0,56	28,11	419,9	318,7	0,94	0,97	0,87	0,96	-2,71	-7,33	-5,52	-10,69
-90	Óleo lubrificante	0,11	9,89	339,2	299,8	0,89	0,92	0,89	0,97	-0,35	-0,74	-0,68	-0,78
-90	Óleo lubrificante	0,28	7,27	319,9	307,6	0,83	0,89	0,84	0,93	-0,01	-0,37	0,05	-0,78
-90	Óleo lubrificante	0,28	9,00	332,3	308,1	0,84	0,89	0,85	0,94	-0,34	-0,69	-1,14	-1,14
-90	Óleo lubrificante	0,28	10,24	339,2	301,5	0,85	0,89	0,85	0,94	-0,47	-1,11	-0,83	-1,50
-30	Querosene	0,31	25,80	284,8	307,0	0,90	0,95	0,89	0,97	-1,71	-3,48	-3,13	-5,63
-30	Querosene	0,59	14,29	223,4	317,6	0,88	0,85	0,83	0,93	-1,39	-2,16	-2,07	-4,19
-30	Querosene	0,59	16,77	235,8	320,4	0,90	0,90	0,87	0,94	-2,63	-4,48	-4,15	-5,26
-30	Querosene	0,63	20,79	287,5	304,8	0,80	0,90	0,85	0,94	-2,63	-4,48	-4,15	-5,26
0	Querosene	0,31	19,73	587,4	293,7	0,94	0,95	0,91	0,94	-1,76	-3,52	-3,45	-3,87
0	Querosene	0,31	23,18	611,6	297,0	0,96	0,96	0,92	0,95	-2,02	-4,33	-4,21	-4,95
0	Querosene	0,31	24,06	625,4	297,0	0,96	0,96	0,92	0,95	-2,14	-4,57	-4,44	-5,28
0	Querosene	0,56	16,20	408,2	312,0	0,89	0,89	0,85	0,90	-1,98	-3,66	-3,59	-4,27
0	Querosene	2,19	9,57	592,3	316,8	0,72	0,68	0,71	0,73	-5,24	-5,99	-6,16	-10,10
0	Querosene	2,23	8,05	553,0	317,6	0,72	0,63	0,69	0,70	-4,45	-5,19	-5,41	-8,77
0	Óleo lubrificante	0,28	13,88	392,3	283,4	0,84	0,88	0,88	0,93	-1,44	-4,06	-4,06	-2,83
0	Óleo lubrificante	0,28	18,64	432,3	279,8	0,89	0,92	0,90	0,94	-1,92	-5,96	-5,93	-4,18
0	Óleo lubrificante	0,51	19,02	473,7	285,4	0,85	0,91	0,87	0,92	-3,03	-7,07	-6,98	-6,90
0	Óleo lubrificante	0,52	21,14	497,8	285,4	0,87	0,92	0,88	0,93	-3,32	-8,03	-7,89	-7,99
50	Querosene	0,31	19,88	571,6	296,8	1,00	0,97	0,90	0,94	-2,05	-3,90	-4,09	-4,39
50	Querosene	0,52	21,28	325,4	324,8	0,87	0,95	0,86	0,93	-3,20	-4,95	-5,13	-6,20
50	Querosene	0,55	24,18	370,2	323,1	0,88	0,97	0,87	0,94	-3,40	-6,13	-6,09	-7,63
50	Querosene	0,55	17,92	292,3	323,1	0,89	0,92	0,85	0,92	-3,08	-4,27	-4,52	-5,34
90	Querosene	0,31	20,51	581,9	294,3	0,92	0,98	0,90	0,95	-2,07	-4,15	-4,50	-4,74
90	Querosene	0,56	24,41	484,0	318,7	0,95	0,97	0,87	0,93	-3,92	-6,88	-6,96	-8,29
90	Óleo lubrificante	0,11	9,37	357,8	299,8	0,94	0,83	0,89	0,95	-0,89	-2,83	-2,35	-1,25

Tabela C.12: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime *Mist* com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
						[ Exp. ]	Dois Fluidos	[ Exp. ]	Dois Fluidos		
-90	Querosene	0,03	7,27	478,5	287,6	0,94	0,99	0,98	-0,19	0,04	-0,17
-90	Querosene	0,11	11,79	487,5	291,5	0,93	0,99	0,97	-0,33	-0,70	-0,83
-90	Querosene	0,11	13,09	302,0	310,4	0,92	0,99	0,97	-0,33	-0,75	-0,80
-90	Querosene	0,11	16,00	478,5	291,5	0,93	0,99	0,97	-0,66	-1,14	-1,49
-90	Querosene	0,11	19,09	511,6	286,5	0,94	0,99	0,98	-1,12	-1,60	-2,19
-90	Querosene	0,11	21,70	326,8	310,9	0,98	0,99	0,98	-0,47	-1,62	-2,09
-30	Querosene	0,03	17,10	201,3	287,0	0,89	1,00	0,99	-0,22	-0,59	-0,83
-30	Querosene	0,03	17,82	192,4	309,3	0,97	1,00	0,96	-0,17	-0,52	-0,81
-30	Querosene	0,03	19,69	184,1	309,3	0,98	1,00	0,99	-0,24	-0,58	-0,83
-30	Querosene	0,11	19,74	188,9	315,9	0,96	0,99	0,91	-0,44	-1,15	-1,52
-30	Óleo lubrificante	0,03	9,13	375,1	292,0	0,83	0,99	0,99	-0,19	-0,78	-0,98
-30	Óleo lubrificante	0,03	12,15	368,2	281,5	0,93	0,99	0,96	-0,23	-1,30	-0,90
0	Querosene	0,02	11,19	211,0	306,5	0,98	1,00	0,97	-0,13	-0,26	-0,24
0	Querosene	0,03	7,88	475,0	294,3	0,94	0,99	0,96	-0,15	-0,31	-0,27
0	Querosene	0,03	9,46	495,7	290,6	0,93	0,99	0,97	-0,19	-0,42	-0,41
0	Querosene	0,04	10,03	211,0	299,8	1,00	0,99	0,92	-0,14	-0,33	-0,30
0	Querosene	0,04	10,81	213,0	304,8	0,96	0,99	0,93	-0,16	-0,35	-0,33
0	Querosene	0,04	14,71	219,9	309,3	0,86	0,99	0,94	-0,27	-0,51	-0,53
0	Querosene	0,04	16,80	226,8	299,8	0,97	1,00	0,95	-0,38	-0,66	-0,68
0	Querosene	0,11	11,29	499,2	290,4	0,90	0,98	0,92	-0,44	-0,84	-0,87
0	Querosene	0,11	15,55	515,0	291,2	0,94	0,99	0,94	-0,85	-1,27	-1,43
0	Óleo lubrificante	0,03	3,86	335,8	284,3	0,80	0,93	0,86	-0,09	-0,41	-0,41
0	Óleo lubrificante	0,03	5,75	340,6	283,1	0,84	0,98	0,91	-0,15	-0,60	-0,19
0	Óleo lubrificante	0,04	13,91	384,0	269,8	0,97	0,99	0,95	-0,56	-2,30	-0,97
0	Óleo lubrificante	0,11	10,89	344,0	280,9	0,82	0,97	0,90	-0,53	-2,23	-1,05
0	Óleo lubrificante	0,11	13,22	375,1	278,1	0,86	0,98	0,91	-0,76	-2,88	-1,39
50	Querosene	0,03	8,82	537,1	278,7	0,82	0,99	0,92	-0,52	-0,58	-0,67
50	Querosene	0,03	9,52	537,1	277,6	0,86	0,99	0,97	-0,50	-0,70	-0,63
50	Querosene	0,11	15,92	518,5	292,0	0,99	0,99	0,96	-1,08	-1,66	-1,81
50	Querosene	0,11	18,80	191,0	315,1	0,97	0,99	0,90	-0,88	-1,22	-1,51
90	Querosene	0,11	13,50	322,0	308,1	0,94	0,98	0,90	-0,77	-1,12	-1,31
90	Querosene	0,11	15,24	502,6	291,5	0,95	0,99	0,93	-1,07	-1,38	-1,77
90	Querosene	0,11	17,26	325,4	309,3	0,96	0,99	0,92	-0,79	-1,41	-1,67
90	Querosene	0,11	18,05	540,5	286,5	0,96	0,99	0,94	-1,29	-1,77	-2,29
90	Querosene	0,11	20,01	334,4	310,9	0,96	0,99	0,93	-1,33	-1,72	-2,06
90	Óleo lubrificante	0,03	4,07	328,9	285,4	0,82	0,83	0,87	-0,84	-1,88	-0,96
90	Óleo lubrificante	0,03	4,75	346,1	284,8	0,85	0,91	0,91	-0,77	-1,30	-0,91
90	Óleo lubrificante	0,03	5,71	340,6	285,9	0,90	0,96	0,97	-0,59	-1,39	-0,51
90	Óleo lubrificante	0,03	6,05	350,9	290,4	0,91	0,97	0,92	-0,53	-1,28	-0,51

Tabela C.13: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Estratificado horizontal com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)	FRACÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
						Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Dois Fluidos	$Drift-Flux$	Homogêneo ]	Homogêneo ]
0	Querosene	0,02	2,76	199,3	309,3	0,97	0,89	0,94	-0,01	-0,05	-0,03
0	Querosene	0,03	4,09	488,8	293,4	0,94	0,93	0,94	-0,03	-0,14	-0,09
0	Querosene	0,04	2,91	199,3	318,7	0,94	0,85	0,91	-0,01	-0,07	-0,05
0	Querosene	0,04	3,48	211,0	309,8	0,92	0,86	0,92	-0,01	-0,10	-0,07
0	Querosene	0,04	8,69	211,0	303,1	0,94	0,87	0,97	-0,04	-0,27	-0,24
0	Querosene	0,07	0,45	206,2	312,6	0,71	0,38	0,64	0,00	-0,02	-0,02
0	Querosene	0,08	2,93	194,4	312,6	0,91	0,63	0,89	-0,01	-0,10	-0,10
0	Querosene	0,11	4,08	484,0	294,0	0,85	0,69	0,89	-0,04	-0,24	-0,22
0	Óleo lubrificante	0,06	0,37	332,3	273,7	0,55	0,12	0,62	0,00	-0,15	-0,08

Tabela C.14: Condições experimentais simuladas e resultados obtidos pelos modelos de interesse no regime Estratificado (posições horizontal e -30°) com a correlação de CHAXTON *et al.* (1972) para perda friccional de pressão e com ambas as fases consideradas à mesma pressão média.

ÂNGULO DE INCLINAÇÃO (°)	FASE LÍQUIDA	$(j_l)$ (m/s)	$(j_v)$ (m/s)	PRESSÃO MÉDIA (kPa)	TEMPERATURA (K)		FRAÇÃO DE VAZIOS		VARIACÃO DE PRESSÃO (kPa/m)			
					[ Exp.	Homogêneo ]	[ Exp.	Homogêneo ]	Dois Fluidos	Drift-Flux	Dois Fluidos	Drift-Flux
-30	Querosene	0,03	5,37	184,1	314,8	0,96	0,98	0,91	0,99	-0,01	0,26	-0,13
-30	Querosene	0,03	7,86	184,1	310,9	0,97	0,97	0,92	0,99	-0,02	0,12	-0,25
-30	Querosene	0,03	11,03	184,1	309,8	0,98	0,97	0,94	0,99	-0,05	-0,03	-0,40
-30	Querosene	0,11	0,57	170,3	315,4	0,97	0,98	0,90	1,00	0,01	0,36	-0,01
-30	Querosene	0,11	5,13	184,1	313,7	0,96	0,94	0,85	0,96	0,01	0,33	-0,24
-30	Querosene	0,31	0,11	199,3	305,9	1,00	0,95	0,36	0,66	0,01	2,46	1,25
-30	Querosene	0,31	0,56	195,8	312,6	1,00	0,94	0,72	0,89	0,01	1,01	0,19
-30	Querosene	0,31	4,19	202,7	309,8	1,00	0,87	0,80	0,92	-0,01	0,29	-0,42
-30	Querosene	0,31	7,48	202,7	309,8	1,00	0,81	0,83	0,93	-0,03	-0,20	-0,96
-30	Querosene	0,35	0,10	397,8	290,4	0,84	0,94	0,31	0,62	0,02	1,43	1,43
-30	Querosene	0,58	0,49	184,1	315,4	0,83	0,89	0,52	0,75	0,01	1,69	0,62
-30	Querosene	0,59	5,19	192,4	314,5	0,82	0,75	0,77	0,87	-0,02	0,81	-1,00
-30	Querosene	0,64	2,15	188,9	318,1	0,77	0,83	0,65	0,84	0,00	0,05	-0,28
-30	Querosene	1,21	3,40	204,8	314,3	0,66	0,64	0,63	0,77	-0,01	-0,00	-1,49
-30	Óleo lubrificante	0,03	2,36	363,4	289,3	0,96	0,94	0,82	1,00	0,01	0,54	-0,02
-30	Óleo lubrificante	0,03	3,94	350,9	282,0	0,98	0,91	0,87	0,99	0,00	0,15	-0,17
-30	Óleo lubrificante	0,28	2,51	357,8	297,0	0,88	0,84	0,75	0,93	0,01	0,38	-0,37
-30	Óleo lubrificante	0,28	5,22	368,2	291,5	0,86	0,73	0,82	0,92	-0,03	-0,60	-0,98
-30	Óleo lubrificante	0,28	6,01	377,1	297,0	0,88	0,75	0,83	0,93	-0,04	-0,68	-1,02
-30	Óleo lubrificante	0,47	1,86	373,7	299,8	0,82	0,83	0,66	0,88	0,01	0,76	-0,60
-30	Óleo lubrificante	0,62	2,24	373,7	299,8	0,79	0,78	0,66	0,79	0,00	0,56	-0,90
-30	Óleo lubrificante	0,77	0,25	211,7	297,0	0,58	0,84	0,21	0,52	0,01	2,85	1,15
-30	Óleo lubrificante	0,81	0,24	211,7	297,6	0,57	0,83	0,20	0,52	0,01	2,86	1,47
-30	Óleo lubrificante	0,88	0,25	211,7	299,8	0,52	0,82	0,20	0,51	0,01	2,86	1,47
0	Querosene	0,02	2,76	199,3	309,3	0,97	0,84	0,89	0,94	-0,01	-0,05	-0,03
0	Querosene	0,03	4,09	488,8	293,4	0,94	0,88	0,93	0,94	-0,03	-0,14	-0,09
0	Querosene	0,04	2,91	199,3	318,7	0,94	0,73	0,85	0,91	-0,01	-0,07	-0,05
0	Querosene	0,04	3,48	211,0	309,8	0,92	0,76	0,86	0,92	-0,01	-0,10	-0,07
0	Querosene	0,04	8,69	211,0	303,1	0,94	0,87	0,92	0,97	-0,04	-0,27	-0,24
0	Querosene	0,07	0,45	206,2	312,6	0,71	0,38	0,68	0,64	0,00	-0,02	-0,02
0	Querosene	0,08	2,93	194,4	312,6	0,91	0,63	0,83	0,89	-0,01	-0,10	-0,10
0	Querosene	0,11	4,08	484,0	294,0	0,85	0,69	0,86	0,89	-0,04	-0,24	-0,22
0	Óleo lubrificante	0,06	0,37	332,3	273,7	0,55	0,12	0,37	0,62	0,00	-0,15	-0,08