Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia

UM MÉTODO PROXIMAL INEXATO COM DISTÂNCIAS PROXIMAIS PARA PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO QUASE-MONÓTONO

Lennin Mallma Ramirez

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira
Erik Alex Papa Quiroz

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2017

UM MÉTODO PROXIMAL INEXATO COM DISTÂNCIAS PROXIMAIS PARA PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO QUASE-MONÓTONO

Lennin Mallma Ramirez

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Paulo Roberto Oliveira, Ph.D.

Prof. Erik Alex Papa Quiroz, D.Sc.

Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.

Prof. Ronaldo Malheiros Gregório, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2017

Ramirez, Lennin Mallma

Um Método Proximal inexato com distâncias proximais para problemas de equilíbrio Quase-Monótono/Lennin Mallma Ramirez. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

IX, 54 p. $29,7$cm.

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira
Erik Alex Papa Quiroz

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 45 – 54.

1. Método proximal inexato. 2. Distâncias proximais. 3. Quase-Monótono. I. Oliveira, Paulo Roberto *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Dedicado a minha família.*
*(para Alessandra e Mathías)*

# Agradecimentos

Quero agradecer aos meus pais, Leni e Felipe; meus irmãos, Elvis e sua família, Joel, Leni e sua família, porque sempre me apoiam a seguir os meus sonhos, eu admiro e são tudo na minha vida.

A palavra simples pode ser suficiente para conhecer os sentimentos, os corações das pessoas ou sentir a sua ajuda desinteressada, então eu quero agradecer a Tiago SF, Talita VR, Lucas V, Lilian C, Daniela L, Larissa A, Aline V, Leonardo S, Pedro J, Renato C, Pâmela A, Ygor C, Alexsander M, Ramiro R, Aluizio L e Rogério B. A meu amigo Rafael J Sampaio, obrigado por estar nos bons e piores tempos, durante a minha estadia no Rio de Janeiro. Eu também quero agradecer ao meu amigo Charlan DS e sua família, muito obrigado pelas aulas em Matlab, pela sua paciência e atenção que recebi de sua família. A meu amigo, Bao NT, FFB, Gabriel C e Stepfanie C, porque, apesar da distância ainda mantemos contato e discutimos sobre questões relacionadas a otimização matemática. A muitos outros colegas brasileiros, com quem partilhei diferentes momentos durante a minha estadia em Rio.

Ao Pessoal da administração e todas as pessoas que trabalham na PESC por criar um ambiente agradável para fazer a pesquisa.

Aos professores da COPPE-UFRJ: Adilson E, Abilio L, Wallace M, Laura B, Susana S, por a sua orientação em sala de aula.

Ao Francisco P e sua família, aos meus amigos de UNAC e todos os amigos peruanos no Rio, que sempre me apoiam quando eu preciso de sua ajuda. Quero agradecer aos prof. Maculan e prof. Ronaldo por aceitarem fazer parte da banca a minha tese de dissertação.

Dedico estas linhas aos meus orientadores, prof. Paulo R e Erik A, muito obrigado pelas aulas, pelos seus comentários feitos para que eu possa melhorar como pesquisador e por todos esses anos de trabalho conjunto.

Quero agradecer a CAPES-Brasil, por me permitir realizar pesquisas em otimização matemática e aprender mais da cultura do Brasil.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

UM MÉTODO PROXIMAL INEXATO COM DISTÂNCIAS PROXIMAIS PARA PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO QUASE-MONÓTONO

Lennin Mallma Ramirez

Fevereiro/2017

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira
Erik Alex Papa Quiroz

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho propomos um método de ponto proximal inexato para resolver o problema de equilíbrio quase-monótono utilizando distâncias proximais e o subdiferencial diagonal. Considerando algumas condições naturais sobre o problema e a condição de quase-monotonicidade para bifunções, provamos que a sequência gerada pelo método converge para um ponto solução do problema.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

AN INEXACT PROXIMAL METHOD WITH PROXIMAL DISTANCES FOR QUASIMONOTONE EQUILIBRIUM PROBLEMS

Lennin Mallma Ramirez

February/2017

Advisors: Paulo Roberto Oliveira
Erik Alex Papa Quiroz

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this work we propose an inexact proximal point method to solve quasimonotone equilibrium problems using proximal distances and the diagonal subdifferential. Under some natural assumptions on the problem and the quasimonotonicity condition on the bifunction, we prove that the sequence generated for the method converges to a solution point of the problem.

# Sumário

# Lista de Tabelas

# Capítulo 1

# Introdução

Estamos interessados em estudar o problema de equilíbrio (PE) no espaço euclidiano: dado um conjunto aberto, convexo e não vazio $C \subset \mathbb{R}^n$ e $f : \bar{C} \times \bar{C} \to \mathbb{R}$, encontrar $\bar{x} \in \bar{C}$ de tal modo que

$$f(\bar{x}, y) \geq 0, \quad \forall y \in \bar{C}, \tag{1.1}$$

onde $\bar{C}$ é o fecho de $C$. O problema de equilíbrio generaliza o problema de minimização restrito sobre um conjunto $\bar{C}$. De fato, o problema de minimização de uma função $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ consiste em encontrar um ponto $\bar{x}$ tal que

$$\phi(\bar{x}) \leq \phi(y), \forall y \in \bar{C}.$$

Definindo

$$f(x, y) = \phi(y) - \phi(x),$$

temos que o problema de minimização pode ser expressado na forma (1.1).
O problema de equilíbrio também generaliza o problema de Desigualdade Variacional. De fato, dado uma conjunto fechado $\bar{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ e um operador $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, o problema de desigualdade variacional de Stampacchia consiste em encontrar um ponto $x^* \in \bar{C}$ tal que

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in \bar{C}.$$

Definindo

$$f(x, y) = \langle F(x), y - x \rangle,$$

temos que resolver este problema é equivalente a resolver o problema (1.1), ver, por exemplo Flores-Bazán [45], Blum e Oettli [12] e Bigi et al. [19].
O problema (PE) também generaliza o Problema de Ponto Fixo. De fato, dado um conjunto fechado $\bar{C} \subseteq \mathbb{R}^n$, um ponto fixo de um operador $F : \bar{C} \to \bar{C}$ é qualquer $x^* \in \bar{C}$ de tal modo que $x^* = F(x^*)$. Encontrar um ponto fixo equivale a resolver

(1.1) com

$$f(x,y) = \langle x - F(x), y - x\rangle.$$

Um outro problema que generaliza o (PE) é o problema de Equilíbrio de Nash em Jogos Não Cooperativos. De fato, consideremos $I = \{1,...,n\}$ um conjunto de jogadores, cada jogador $i \in I$ tem um conjunto de estratégias $K_i \subset I\!R^{m_i}$, onde $K_i \neq \emptyset$ é um conjunto fechado e convexo. Seja $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$, o conjunto de todas as estratégias dos jogadores. Para cada jogador $i \in I$, considerar uma função contínua $f_i : K \to I\!R$, a qual é convexa no i-ésimo argumento e que associa o ganho, $f_i$, do i-ésimo jogador a cada estratégia $x \in K$.
Em seguida, $\bar{x} = (\bar{x}_1, ..., \bar{x}_n) \in K$ é uma solução de equilíbrio de Nash, se para todo $i \in I$

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^i, y_i), \ \ \forall i \in I, \ \ \forall y_i \in K_i,$$

$\bar{x}$ é chamado de equilíbrio de Nash, também é denotado como se segue

$$f_i(\bar{x}) \leq f_i(\bar{x}^1, ..., \bar{x}^{i-1}, y_i, \bar{x}^{i+1}, ..., \bar{x}^n), \ \ \forall y_i \in K_i.$$

Isto significa o seguinte: nenhum jogador tem qualquer ganho por mudar apenas suas estratégias, ver Nash [87].
Agora, se $f : K \times K \to I\!R$ definido como se segue

$$f(x,y) = \sum_{i\in I}(f_i(x^1, x^2, ...x^{i-1}, y_i, x^{i+1}, ..., x^n) - f_i(x)),$$

então, $\bar{x}$ é um ponto de equilíbrio de Nash, se e somente se, $\bar{x}$ é uma solução do problema (1.1). Finalmente o (PE) também generaliza os problemas de complementaridade linear, como também problemas de minimização vetorial, ver Flores-Bazán [45]. Devido a esta razão que o (PE) é muito atraente, tanto na teoria quanto nas aplicações, ver Aoyama et al. [5], Quoc e Muu [98], Crouzeix e Ocaña [37], Nasri e Sosa [88], Castellani e Giuli [28], Santos e Scheimberg [104], Blum e Oettli [12], Flores-Bázan [44], Flores-Bázan e Sosa [43], Oliveira et al. [61], Iusem e Nasri [53], Bianchi e Pini [15], Chadli et al. [27], Bianchi et al. [16], Iusem e Sosa [55], Jafari et al. [59] e Iusem et al. [56].

O problema de equilíbrio foi estudado em espaços mais gerais, por exemplo, em espaços de Banach, ver Burachik [18], Iusem e Narsi [53], em variedades de Hadamard, veja Cruz Neto et al. [35] e Colao et al. [33], e em espaços vetoriais, ver Balaj [9], Flores-Bazán et al. [46] e Bianchi et al. [13].

Em trabalhos anteriores, a bifunção $f$ em (1.1) era monótona ou pseudomonotona, ver Flores-Bazán [45], Chadli et al. [24], Konnov e Schaible [67], Bianchi e Schaible [14], Bianchi e Pini [15] e Van [111].

Os (PE) também podem ser resolvidos por métodos diferentes: métodos proximais splitting, veja Moudafi [83]; métodos splitting Douglas-Rachford, veja Briceño-Arias [20]; método bundle, veja Nguyen et al. [90]; métodos de proyecion relajada, veja Scheimberg e Santos [105]; métodos extragradient hybrid, veja Anh [2]; métodos extragradient, veja Nguyen et al. [89] e Da Cruz Neto et al. [35]; método de doble projeção, veja Quoc and Muu [99] e algoritmo de ponto proximal (lembrar que o método proximal foi introducido por Martinet [77] e desenvolvido por Rockafellar [102]), veja Khatibzadeh et al. [66].

Em espaços euclidianos alguns métodos proximais para resolver (PE) tem sido considerada, por exemplo Konnov [68] utilizando a norma euclidiana; Mashreghi e Nasri [80], Iusem e Sosa [53], Langenberg [72] com distâncias Bregman; Nguyen et al. [89] com distâncias $\varphi-$divergentes; da Cruz Neto et al. [34] com distâncias homogêneas de segunda ordem. Em todos eles foram considerados tanto a caso monótono como caso pseudomonotono. Contudo, o caso quase-monótona não foi considerado, isso o que estamos interessados em desenvolver nesta dissertação, um método proximal inexato para resolver (PE) considerando a quase-monotonicidade da função $f$.

Neste trabalho, propomos a seguinte iteração: dado $x^{k-1} \in C$, encontrar

$$x^k \in C,$$

de tal modo que:

$$g^k + \lambda_k \nabla_1 d(x^k, x^{k-1}) = e^k,$$

onde $d$ é uma distância proximal, veja Subsection 2.2, $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$, é o subdiferencial diagonal, veja Seção 2, $e^k$ é um erro de aproximação e $\lambda_k$ é um parâmetro positivo de regularização. Para assegurar a convergência do algoritmo proposto, vamos considerar algumas condições apropriadas para $e^k$, que serão introduzidas na Seção 3.1.

Notamos que outros tipos de regularização para o problema (1.1) foram introduzidos, por exemplo considere $\{\gamma_k\} \subset (a, b]$, $\forall k \in I\!N$, $0 \leq a < b$ e defina outra bifunção

$$f_k : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$$

dada por

$$f_k(x, y) = f(x, y) + \gamma_k \langle x - x^k, y - x \rangle, \quad \forall x, y \in \bar{C}, \tag{1.2}$$

dizemos que $f_k$ é uma bifunção regularizada para (1.1), pois se acrescenta o termo $\gamma_k \langle x - x^k, y - x \rangle$. Note-se que este tipo de regularização não considera um erro de aproximação. A regularização (1.2), foi proposto em Iusem e Sosa [55], para uma bifunção pseudo-monótona, nós também podemos observar que o artigo [55] usa a distância euclidiana para assegurar a convergência da sequência gerada pelo algoritmo.

Outros tipos de regularização para o problema (1.1) podem ser vistos em Konnov [68]. Seja $\bar{x}^0 \in \bar{C}$, $\bar{b} > 0$, e seja $\{\epsilon_k\}$ uma sequência de números positivos. Encontrar $\bar{x}^{k+1} \in \bar{C}$ tal que

$$\|\bar{x}^{k+1} - x^{k+1}\| \leq \epsilon_{k+1},$$

onde

$$x^{k+1} \in \bar{C}_{k+1} = \{x \in \bar{C} : f(x,y) + \frac{1}{\bar{b}}\langle x - \bar{x}^k, y - x\rangle \geq 0 \quad \forall y \in \bar{C}\}.$$

Observe que cada iteração $\bar{x}^{k+1}$ gerada por este algoritmo é uma aproximação da solução exata $x^{k+1}$ com precisão $\epsilon_{k+1}$. Notemos que este algoritmo utiliza a norma euclidiana, por outro lado, em nosso algoritmo proposto, utilizamos uma distância proximal.

Outros tipos de regularização para o problema (1.1), podem ser vistos em Moudafi [82]. Consideremos o seguinte método proximal que gera, a partir de um ponto arbitrário $x_0 \in \bar{C}$, uma sequência $\{x_n\}$ definida por

$$f(x_{k+1}, y) + \frac{1}{r_n}\langle y - x_{k+1}, x_{k+1} - x_k\rangle \geq 0, \forall y \in \bar{C}, \tag{1.3}$$

onde $\{r_k\}$ é uma sequência de parâmetros positivos que satisfazem

$$\liminf_{k\to+\infty} r_k > 0, \tag{1.4}$$

este algoritmo proposto por Moudafi [82], exige duas condições sobre o parâmetro $r_k$. Nós apenas precisamos que $r_k$ seja um parâmetro positivo (usamos apenas uma condição).

Outros tipos de regularização para o problema (1.1) podem ser vistos em Moudafi [81]. Ele considera o seguinte esquema: encontrar $x_{k+1} \in \bar{C}$ tal que

$$f(x_{k+1}, x) + \frac{1}{\lambda_k}\langle x_{k+1} - y_k, x - x_{k+1}\rangle \geq -\epsilon_k, \forall x \in \bar{C},$$

onde

$$y_k = x_k + \alpha_k(x_k - x_{k+1}), \tag{1.5}$$

$\lambda_k$, $\alpha_k$, $\epsilon_k$ são números reais não negativos. Eles impuseram os seguintes critérios de tolerância no termo $\epsilon_k$ que é padrão na literatura

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k\epsilon_k < +\infty,$$

e que é tipicamente necessário para estabelecer a convergência global. Note-se que este algoritmo requer (1.5) para garantir a convergência para uma solução. Nós só precisamos de uma regularização.

Por outro lado, nosso algoritmo proposto é motivado por nosso recente trabalho [96] onde introduzimos um método proximal inexato para resolver problemas de desigualdade variacional e também é motivado pelo artigo de Da Cruz Neto et al. [34] que resolve (PE), quando $f(x,.)$ é quase-convexa, utilizando um método proximal exato com distâncias homogéneas de segunda ordem.

As principais contribuições deste trabalho são as seguintes:

i) Propomos um algoritmo ponto proximal inexato para resolver o PE quando $f$ em (1.1) é quase-monótono, observa-se que esta condição não foi considerada em trabalhos anteriores.

ii) Introduzimos no nosso algoritmo a distância proximal do Auslender e Teboulle [8], por esta razão nós cobrimos uma grande classe de distâncias na literatura, por exemplo, Bregman, $\varphi-$divergencias e distâncias homogêneas de segunda ordem.

iii) Também propomos na iteração do algoritmo proposto, um erro de aproximação $e^k$, após o teste sob algumas suposições naturais sobre o erro de aproximação, nós garantimos a convergência da sequência gerada pelo algoritmo proposto.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: Seção 2, dá alguns resultados básicos utilizados em todo o trabalho. Na seção 3, introduzimos o método proposto e estudamos a convergência da sequência gerada pelo método, analisando o caso quase-monótono. Na seção 4, mostramos resultados numéricos do algoritmo proposto. Na seção 5, damos conclusões e trabalhos futuros.

# Capítulo 2

# Preliminares

Ao longo deste trabalho $I\!R^n$ é o espaço euclidiano munido com o produto interno $\langle , \rangle$ separado norma de $x$ dado por $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$, e $bd(C)$, $\bar{C}$ denota o limite e fechamento do subconjunto $C \subset I\!R^n$, respetivamente e também definimos os seguintes conjuntos, $I\!R^n_+ = \{x \in I\!R^n : x_j \geq 0, \forall j\}$, $I\!R^n_{++} = \{x \in I\!R^n : x_j > 0, \forall j\}$.
Dada uma função $h : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$, nós definimos, o domínio efetivo de $h$ por $dom(h) = \{x \in I\!R^n : h(x) < +\infty\}$.
Uma função $h : I\!R^n \to I\!R \cup \{-\infty, +\infty\}$ é chamado própria se $dom(h) \neq \emptyset$ e $h(x) > -\infty$, $\forall x \in dom(f)$.

**Definição 2.0.1** *Um conjunto $L \subset I\!R^n$ é dito convexo se, para quaisquer $x, y \in L$ e $\lambda \in (0, 1)$, tem-se que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in L$.*

**Definição 2.0.2** *O conjunto de nível de uma função $g : I\!R^n \to I\!R$ em relação a $\nu$, é denotado e definido da seguinte forma*

$$L_g(\nu) = \{x \in I\!R^n : g(x) \leq \nu\}.$$

**Definição 2.0.3** *Uma função $g : I\!R^n \to I\!R \cup \{+\infty\}$ é dita semicontínua inferiormente (denotado por sci) no ponto $x^* \in I\!R^n$, quando para qualquer sequência $\{x^l\} \subset I\!R^n$ tal que $\lim_{l\to\infty} x^l = x^*$, tem-se*

$$\liminf_{l\to\infty} g(x^l) \geq g(x^*).$$

*Sob as mesmas condições, $g$ é dita semicontínua superiormente (denotado por scs) em $x^* \in I\!R^n$ quando*

$$\limsup_{l\to\infty} g(x^l) \leq g(x^*).$$

**Definição 2.0.4** *Seja $L \subseteq I\!R^n$ um conjunto convexo não vazio e seja $x \in L$. O cone normal $L$ em $x$, denotado por $N_L(x)$, é definido como segue*

$$N_L(x) = \{g \in I\!R^n : \langle g, y - x\rangle \leq 0, \forall y \in L\}.$$

**Exemplo 2.0.1** *$N_L(x)$ é um conjunto convexo. De fato, fixemos $g_1, g_2 \in N_L(x)$ e consideramos $t \in (0,1)$, sendo assim*

$$\langle g_1, y - x\rangle \leq 0, \forall y \in L,$$

*e*

$$\langle g_2, y - x\rangle \leq 0, \forall y \in L,$$

*então*

$$\langle tg_1 + (1-t)g_2, y - x\rangle = t\langle g_1, y - x\rangle + (1-t)\langle g_2, y - x\rangle,$$

*agora, nós temos*

$$\langle tg_1 + (1-t)g_2, y - x\rangle = t\langle g_1, y - x\rangle + (1-t)\langle g_2, y - x\rangle \leq 0,$$

$$\langle tg_1 + (1-t)g_2, y - x\rangle \leq 0,$$

*agora, por definição,*

$$tg_1 + (1-t)g_2 \in N_L(x),$$

*então $N_L(x)$ é um conjunto convexo.*

**Definição 2.0.5** *Seja $\bar{C}$ um conjunto convexo não vazio. A função $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$ diz-se ser*

*(i) Monótona em $\bar{C}$ se*

$$f(x,y) + f(y,x) \leq 0, \ \forall x, y \in \bar{C}.$$

*A função $f$ é chamada estritamente monótona se por qualquer $x, y \in \bar{C}$, e $x \neq y$, temos*

$$f(x,y) + f(y,x) < 0.$$

*$f$ é chamada fortemente monótona com módulo $\nu > 0$, se para todos os $x, y \in \bar{C}$,*

$$f(x,y) + f(y,x) \leq -\nu\|x - y\|^2.$$

*Notemos que, para $\nu = 0$, a desigualdade acima torna-se uma função monótona.*

*(ii) Pseudo-monótona em $\bar{C}$ se*

$$f(x,y) \geq 0 \Rightarrow f(y,x) \leq 0, \forall x, y \in \bar{C},$$

*ou de modo equivalente, se para algum $x, y \in \bar{C}$,*

$$f(x, y) > 0 \Rightarrow f(y, x) < 0.$$

*A função $f$ é chamada estritamente pseudo-monótona, se para qualquer $x, y \in \bar{C}$ e $x \neq y$,*

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) < 0,$$

*é chamada fortemente pseudo-monótona em $\bar{C}$ com o módulo $\beta > 0$, se*

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq -\beta\|x - y\|^2.$$

*Notemos que, se $\beta = 0$, em seguida, a desigualdade acima torna-se ama função pseudo-monótona.*

*(iii) Quase-monótona em $\bar{C}$ se para todos os $x, y \in \bar{C}$,*

$$f(x, y) > 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0, \forall x, y \in \bar{C}.$$

Notamos que $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.

**Exemplo 2.0.2** *Defina $f : [0, 1] \times [0, 1] \to I\!R$, tal que $f(x, y) = (y_1 - y_2)^2 - (x_1 - x_2)^2$ para cada $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$. Então $f$ é monótona.*
*De fato, da Definição 2.0.5, (i), tem-se*

$$f(x, y) + f(y, x) = (y_1 - y_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 = 0,$$

*em seguida*

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0,$$

*ver, Nguyen et al. [91].*

**Exemplo 2.0.3** *Defina $g : [1, +\infty) \times [1, +\infty) \to I\!R$, tal que $g(x, y) = -3x^2y + xy^2 + 2y^3$ para cada $x, y \in [1, +\infty)$. Então $g$ é pseudo-monótona.*
*De fato, da Definição 2.0.5, (ii), tem-se*

$$g(x, y) = -3x^2y + xy^2 + 2y^3 = y(3x + 2y)(y - x) \geq 0,$$

*com $y \geq x$, assim então*

$$g(y, x) = -3y^2x + yx^2 + 2x^3 = x(3y + 2x)(x - y) \leq 0,$$

*ver, Chen et al. [31].*

**Exemplo 2.0.4** *Defina* $f : [0,1] \times [0,1] \to I\!R$, *como segue* $f(x,y) = (y_1 - x_1)(2y_1 - x_1)$ *para cada* $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$. *Então* $f$ *é pseudo-monótona.*
*De fato, da Definição 2.0.5, (ii), tem-se*

$$f(x,y) = (y_1 - x_1)(2y_1 + x_1) \geq 0.$$

*tem-se* $y_1 - x_1 \geq 0$, *por outro lado,*

$$f(y,x) = (x_1 - y_1)(2x_1 + y_1) \leq 0,$$

*desde que* $y_1 - x_1 \geq 0$, *ver, Nguyen et al. [91].*

**Exemplo 2.0.5** *Seja* $K = \left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset I\!R$ *e defina* $f : K \times K \to I\!R$ *como*

$$f(x,y) = x(x-y),$$

*então* $f$ *é pseudo-monótona.*
*De fato, desde que* $f(x,y) \geq 0, \forall x, y \in [\frac{1}{2}, 1]$, *em particular, notamos que* $x \geq \frac{1}{2}$, *então temos que,* $0 \leq x - y$, *por outro lado, considerando agora* $y \geq \frac{1}{2}$ *e* $x - y \geq 0$ *obtém-se*

$$f(y,x) = y(y-x) \leq 0.$$

*Por Definição 2.0.5, (i), notemos o seguinte:*

$$f(x,y) + f(y,x) = x(x-y) + y(y-x) = (x-y)^2 \geq 0,$$

*então* $f$ *não é monótono. ver, Iusem e Sosa [55].*

**Exemplo 2.0.6** *Considere a bifunção*

$$f(x,y) = y^2(y-x),$$

*em* $I\!R \times I\!R$, *assim* $f$ *é quase-monótono.*
*De fato, desde que* $f(x,y) > 0$ *implica* $y > x$, $y \neq 0$, *em seguida*

$$f(y,x) = x^2(x-y) \leq 0, \;\; com \;\; x - y < 0,$$

*assim,* $f$ *é quase-monótona. Além disso,* $f$ *não é pseudo-monótona, desde que*

$$f(1,0) = 0 \;\; e \;\; f(0,1) = 1 > 0.$$

*Ver, Bianchi e Schaible [14].*

**Exemplo 2.0.7** *Suponha que* $b > 0$, $K = [-3, +\infty]$ *e* $f : K \times K \to I\!R$, *com* $f(x,y) = \frac{1}{b}(x^2+2)(y-x)$, $f$ *é pseudo-monótona mas não é monótona.*
*De fato, por Definição 2.0.5, (ii),*

$$f(x,y) = \frac{1}{b}(x^2+2)(y-x) \geq 0,$$

*com* $y - x \geq 0$, *então* $x - y \leq 0$. *Agora*

$$f(y,x) = \frac{1}{b}(y^2+2)(x-y) \leq 0.$$

*verifica-se que* $f$ *é pseudo-monótona. Também, podemos verificar que* $f$ *não é monótona. De fato*

$$f(x,y) + f(y,x) = \frac{1}{b}(x^2+2)(y-x) + \frac{1}{b}(y^2+2)(x-y) > 0,$$

*com* $x = -3$ *e* $y = 0$, *ver Hung e Muu [51].*

**Definição 2.0.6** *Uma bifunção* $f(x,.) : L \subset I\!R^n \to I\!R$ *é dita convexa para cada* $v, w \in L$, *e para cada* $\lambda \in [0,1]$ *se a seguinte desigualdade se cumpre:*

$$f(x,(1-\lambda)v + \lambda w) \leq (1-\lambda)f(x,v) + \lambda f(x,w).$$

**Exemplo 2.0.8** *A bifunção* $f(x,y) = y^2 - xy$, *definido em* $I\!R \times I\!R$ *é convexa, com relação a segunda variável* $y$. *Desde que*

$$f(-1,1) = 1^2 - (-1)(1) = 2,$$

*e*

$$f(1,-1) = (-1)^2 - (1)(-1) = 2,$$

$f$ *não é pseudo-monótona. Ver Castellani e Giuli em [29].*

**Exemplo 2.0.9** *Seja* $C = I\!R$. *Defina a função* $f : C \times C \to I\!R$ *por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^4 - x^4}{65} & , x = 2, \\ y^4 - x^4, x \neq 2. \end{cases}$$

*Para verificar que* $f$ *é convexa em sua segunda variável, deixe* $x \in C$ *fixo, então:*

*Se* $x = 2$, *então* $f(2,y) = \frac{y^4-16}{65}$ *para cada* $y \in C$, *logo, a função* $y \to \frac{y^4-16}{65}$ *é convexa em* $C$.

*Se $x \neq 2$, então $f(x,y) = y^4 - x^4$ para cada $y \in C$, logo, a função $y \to y^4 - x^4$ é convexa em $C$. Ver, Alleche [4].*

**Lema 2.0.1** *Seja $\{v_k\}$,$\{\gamma_k\}$, e $\{\beta_k\}$ sequências não-negativas de números reais satisfazendo $v_{k+1} \leq (1+\gamma_k)\, v_k + \beta_k$ e tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty$, $\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k < \infty$. Então, a sequência $\{v_k\}$ converge.*

**Proof.** Ver, Lema 2, pp. 44, em Polyak [97]. ■

**Definição 2.0.7** *Seja $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$ uma bifunção. Para cada $z \in \bar{C}$ fixo, a diagonal do subdiferencial de $f(z,.)$ no ponto $x \in \bar{C}$, denotado $\partial_2 f(z,x)$, é definida e denotada por*

$$\partial_2 f(z,x) = \{g \in I\!R^n : f(z,y) \geq f(z,x) + \langle g, y-x \rangle, \forall y \in \bar{C}\}.$$

*Além disso, se $f(x,x) = 0$, então*

$$\partial_2 f(x,x) = \{g \in I\!R^n : f(x,y) \geq \langle g, y-x \rangle, \forall y \in \bar{C}\}.$$

**Observação 2.0.1** *Notemos que a subdiferencial diagonal foi amplamente estudada em diversos artigos tais como: Iusem [57], Iusem e Svaiter [58]. Além disso, Castellani e Giuli [28] utilizam um subdiferencial diagonal pseudo-monótono.*

**Exemplo 2.0.10** *Seja $\bar{C} = [\frac{1}{2}, 1] \subset I\!R$ e defina $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$ como $f(x,y) = x(x-y)$. Agora vamos calcular o $\partial_2 f(x,x)$.*
*De fato, assuma que $g \in \partial_2 f(x,x)$, então, por Definição 2.0.7*

$$x(x-y) \geq g(y-x), \quad \forall y \in \bar{C},$$

*com isso, tem-se*

$$(g+x)(x-y) \geq 0, \quad \forall y \in \bar{C}, \tag{2.1}$$

*agora, considere os seguintes casos:*

*i) Se $x \in (\frac{1}{2}, 1) = int(\bar{C})$, então, nós temos $-\frac{1}{2} \leq x-y \leq \frac{1}{2}$, por $\frac{1}{2} \leq y \leq 1$. E de (2.1), temos os seguintes casos: $g \leq -x$ e $g \geq -x$, assim obtém-se $g = -x$, então*

$$\partial_2 f(x,x) = -x, \quad \forall y \in [\frac{1}{2}, 1].$$

*ii) Se $x = \frac{1}{2}$, e de (2.1), e $(g+\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-y) \geq 0$, então com $\frac{1}{2} - y \leq 0$, porque,*

$\frac{1}{2} \leq y \leq 1$, *deste modo obtemos o seguinte resultado*

$$\partial_2 f(x,x) = \langle -\infty, -\frac{1}{2}], \quad \forall y \in [\frac{1}{2}, 1].$$

*Analogamente para os seguintes casos.*

*iii)* *Se* $x = 1$, *e de (2.1), obtém-se* $(g+1)(1-y) \geq 0$, *então*

$$\partial_2 f(x,x) = [-1, \frac{1}{2}\rangle, \quad \forall y \in [\frac{1}{2}, 1].$$

**Observação 2.0.2** *Seja* $\varepsilon > 0$ *e seja* $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$ *uma bifunção com as seguintes propriedades:* $f(x,x) = 0$ *e* $f(x,.)$ *é convexa para cada* $x \in \bar{C}$. *O* $\varepsilon-$*subdiferencial de* $f(x,.)$ *em* $x$, *denotado* $\partial_2^{\varepsilon} f(x,x)$, *é definido por*

$$\partial_2^{\varepsilon} f(z,x) = \{g \in I\!R^n : f(z,y) \geq f(z,x) + \langle g, y-x \rangle - \varepsilon, \forall y \in \bar{C}\}.$$

**Observação 2.0.3** *O subdifferential acima foi usado por Iusem [57], Vuong et al. [113] e Bello et al. [10]. Observe também que se* $x \in C$ *e* $f(x,.)$ *é convexa em* $\bar{C}$ *e* $f(x,x) = 0$, *então* $\partial_2 f(x,x) \neq \emptyset$.

**Observação 2.0.4** *Suponha que* $f(x,x) = 0$ *e* $f(x,.)$ *é convexo em* $I\!R^n$ *para cada* $x \in I\!R^n$. *Então, para cada* $\bar{x} \in S(f,K)$, *existe* $\bar{g} \in \partial_2 f(\bar{x},\bar{x})$ *tal que* $\langle \bar{g}, z - \bar{x} \rangle \geq 0$ *para cada* $z \in K$, *onde* $K \neq \emptyset$ *é convexa e fechada e* $S(f,K)$ *conjunto solução do problema (1.1).*
*De fato, seja* $\bar{x} \in S(f,K)$. *Então* $\bar{x} \in K$ *e* $f(\bar{x},y) \geq 0$ *para cada* $y \in K$ *assim* $\bar{x}$ *é um mínimo da função convexa* $f(\bar{x},.)$ *e pela condição de otimalidade,*

$$0 \in \partial_2 f(\bar{x},\bar{x}) + N_K(\bar{x}),$$

*onde* $N_K(\bar{x})$ *denota o cone de* $K$ *em* $\bar{x}$. *Por conseguinte, utilizando-se a definição de cone, existe* $\bar{g} \in \partial_2 f(\bar{x},\bar{x})$ *tal que* $\langle \bar{g}, z - \bar{x} \geq 0$ *para cada* $z \in K$, *então assim* $\partial_2 f(\bar{x},\bar{x}) \neq \emptyset$. *Ver Vuong et al. [113].*

## 2.1 Resultados de Existencia

Nesta parte do trabalho, estamos interessados em estudar a existência de soluções para o problema de equilíbrio, para o caso pseudo-monótono (porque no Capítulo 3 da presente dissertação, nós garantimos a convergência do nosso algoritmo proposto para um problema de equilíbrio com a bifunção pseudo-monotona) . Nós também apresentamos alguns resultados de existência, para problemas de equilíbrio, obtido por diferentes pesquisadores.

Nesta primeira parte, somos guiados pelo trabalho de Iusem et al. [56].

O problema de equilíbrio, consiste em encontrar um ponto $\bar{x} \in \bar{C}$ tal que

$$PE(f, \bar{C}) \quad f(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in \bar{C}, \tag{2.2}$$

onde, $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$ é uma bifunção satisfazendo $f(x,x) = 0$, $\forall x \in \bar{C}$, $\bar{C}$ é subconjunto não vazio, fechado e convexo de $I\!R^n$. Por outro lado, o conjunto solução de $PE(f, \bar{C})$ é denotado por

$$S(f, \bar{C}) = \{\bar{x} \in \bar{C} : f(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in \bar{C}\}.$$

Agora considere, o problema de viabilidade convexa, que consiste em encontrar, $\check{x} \in \bar{C}$ tal que

$$\check{x} \in \bigcap_{y \in \bar{C}} L_f(y),$$

onde

$$L_f(y) = \{x \in \bar{C} : f(y, x) \leq 0\},$$

para cada $y \in \bar{C}$, observamos que, $L_f(y)$ é diferente de vazio, convexo e fechado pois $f(y, y) = 0$, para cada $y \in \bar{C}$, o conjunto solução do problema de viabilidade convexa será denotado por

$$M(f, \bar{C}) = \{z \in \bar{C}, f(y, z) \leq 0, \forall y \in \bar{C}\}.$$

Vamos considerar as seguintes condições:

**V0.** $f(x, x) = 0$ para cada $x \in \bar{C}$.

**V1.** $f(x, .)$ é convexa e semicontínua inferior para cada $x \in \bar{C}$.

**V2.** $f(., y)$ é semicontínua superior para cada $y \in \bar{C}$.

**V3.** $f$ é pseudo-monótona.

**V4.** Para qualquer sequência $\{z^k\} \subset \bar{C}$ tal que $\lim_{k\to\infty} \|z^k\| = \infty$, existe $u \in \bar{C}$ e $k_0 \in I\!N$ tal que $f(z^k, u) \leq 0$ para todo $k \geq k_0$.

**Lema 2.1.1** *Sob as seguintes condições* **V0**, **V1** *e* **V2**, *obtemos* $M(f,\bar{C}) \subset S(f,\bar{C})$.

**Prova.** De fato, seja $x \in M(f,\bar{C})$ e $y \in \bar{C}$, por **V0**, **V1** obtém-se

$$0 = f(v_t, v_t) = f(v_t, (1-t)x + ty) \leq (1-t)f(v_t, x) + tf(v_t, y), \tag{2.3}$$

onde, $v_t = (1-t)x + ty$, para cada $t \in ]0,1[$, porque $\bar{C}$ é convexo. Agora de (2.3) temos

$$0 \leq (1-t)f(v_t, x) + tf(v_t, y),$$

desde que $x \in M(f,\bar{C})$ $(f(v_t, x) \leq 0)$ logo

$$0 \leq tf(v_t, y),$$

desta forma temos $0 \leq f(v_t, y)$, para cada $t \in ]0,1[$, tomando $t_k = \frac{1}{k}$ com $k > 1$ e por **V2**, tem-se $0 \leq \limsup_{k\to\infty} f(v_{t_k}, y) \leq f(x,y), \forall y \in \bar{C}$, então temos que $x \in S(f,\bar{C})$. Ver Iusem et al. [56]. ■

**Lema 2.1.2** *Se $f$ satisfaz* **V3**, *obtemos* $S(f,\bar{C}) \subset M(f,\bar{C})$.

**Prova.** Seja $x \in S(f,\bar{C})$, então, temos que $f(x,y) \geq 0, \forall y \in \bar{C}$, por **V3**, obtém-se diretamente o resultado. Ver Iusem et al. [56]. ■

**Proposição 2.1.1** *Se $f$ satisfaz* **V0**, **V1**, **V2** *e* **V3** *então* $S(f,\bar{C}) = M(f,\bar{C})$

**Prova.** Obtido diretamente do Lema 2.1.1 e Lema 2.1.2. Ver, Iusem et al. [56]. ■

**Teorema 2.1.1** *Se $f$ satisfaz as condições* **V0**, **V1**, **V2** *e* **V3**. *Então $PE(f,\bar{C})$ tem solução se, e somente se,* **V4** *é válida.*

**Prova.** Ver, Iusem et al. [56]. ■

Agora, apresentamos outros resultados de existência, propostas por diferentes artigos.

**Observação 2.1.1** *Em Muu e Quy, [85], Proposição 1, propõem um resultado existência do problema de equilíbrio, considerando as seguintes condições.*

*t1. $f$ é $\beta-$fortemente pseudomonotone em $\bar{C}$*

*t2. Para cada $x \in \bar{C}$ a função $f(x, .)$ é semicontínua inferior, convexa (não necessariamente diferenciável em todos os lugares), e para cada $y \in \bar{C}$ a função $f(., y)$ é hemicontinua em $\bar{C}$.*

**Teorema 2.1.2** *Seja $V$ um não vazio fechado e subconjunto convexo de $I\!R^n$, $h : V \times V \to I\!R$ uma bifunção de equilíbrio e supondo que as seguintes premissas sejam válidas:*

*j1. $h(x, x) = 0$, para cada $x \in V$.*

*j2. $h$ é quase-convexa em sua segunda variável sobre $V$.*

*j3. existe um subconjunto compacto $U$ de $V$ e $y_0 \in U$ de tal modo que*

$$h(x, y_0) < 0, \forall x \in V \setminus U.$$

*j4. $h$ é semicontínua superior em sua primeira variável sobre $U$ no que diz respeito a $V$. Então, o problema de equilíbrio*

$$\textit{encontrar } \bar{x} \in V \textit{ de tal modo que } h(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in V,$$

*tem uma solução. Ver Teorema 1, em Alleche [4].*

Antes de fazer a prova do Teorema 2.1.2. Primeiro, vamos enunciar alguns resultados propostos no artigo de Alleche [4].
Seja $V$ um subconjunto fechado convexo e não vazio de $I\!R^n$.

**Lema 2.1.3** *Seja $h : V \to I\!R$ uma função, $W$ um subconjunto de $V$ e $a \in I\!R$.*

*1. Se $h$ é uma função semicontinua superior em $W$ em relação a $V$, então*

$$\overline{\{x \in V : h(x) \geq a\}} \cap W = \{x \in W : h(x) \geq a\}.$$

*2. Se $h$ é uma função semicontinua inferior em $W$ em relação a $V$, então*

$$\overline{\{x \in V : h(x) \leq a\}} \cap W = \{x \in W : h(x) \leq a\}.$$

**Prova.** Ver Alleche [4], Lema 1.
Agora, seguindo o artigo de Alleche [4], definimos os seguintes conjuntos.
Seja, $\theta : V \times V \to I\!R$ e $y \in V$, nós definimos os seguintes conjuntos:

$$\theta^+(y) = \{x \in V : \theta(x, y) \geq 0\},$$

e

$$\theta^-(y) = \{x \in V : \theta(y,x) \leq 0\}.$$

Claramente, $x^* \in V$ é uma solução do problema de equilíbrio, $EP(V,\theta)$ : encontrar $x^* \in V$ tal que $\theta(x^*,y) \geq 0, \forall y \in V$, se e somente se

$$x^* \in \bigcap_{y \in V} \theta^+(y).$$

**Prova.** (Teorema 2.1.2). Por quasiconvexidade de $\theta$ na sua segunda variável e uma vez que $\theta^+(y_0)$ está contido no compacto $U$, então as condições del Lema de Ky Fan são satisfeitas para a família $\left(\overline{\theta^+(y)}\right)_{y \in V}$. Isto é, para cada $y \in V$, $\overline{\theta^+(y)}$ são não vazios e fechados, note que o conjunto $\theta^+(y)$ é fechada, seja $x^k \to \bar{x}$, com $x^k \in \theta^+(y)$, agora por $j4$, obtemos,

$$0 \leq \limsup_{k \to +\infty} \theta(x^k, y) \leq \theta(\bar{x}, y),$$

assim $\overline{\theta^+(y)}$ é compacto e o casco convexo de cada subconjunto finito $\{y_1, ..., y_n\}$ de $V$ está contida em $\bigcup_{n=1}^{n} \overline{\theta^+(y)}$. Então, temos

$$\bigcap_{y \in V} \overline{\theta^+(y)} \neq \emptyset.$$

Por outro lado, temos

$$\bigcap_{y \in V} \overline{\theta^+(y)} = \left(\bigcap_{y \in V} \overline{\theta^+(y)}\right) \cap U = \bigcap_{y \in V} \left(\overline{\theta^+(y)} \cap U\right).$$

Pelo Lema 2.1.3, temos

$$\overline{\theta^+(y)} \cap U = \theta^+(y) \cap U, \ \forall y \in V.$$

Assim,

$$\bigcap_{y \in V} \theta^+(y) = \bigcap_{y \in V} \overline{\theta^+(y)} \neq \emptyset,$$

que completa a prova. Ver Alleche [4].

**Observação 2.1.2** *Outro resultado da existência de soluções para o problema de equilíbrio é a seguinte. Este resultado para conjuntos* **compactos** *foi proposta em Bianchi et al. [16], Proposição 3.2, eles consideram, $D \subset I\!R^n$ um subconjunto compacto (não necessariamente convexo) e $f : D \times D \to I\!R$ satisfaz as seguintes condições:*

*l1. $f(x,.)$ é semicontínua inferior, para cada $x \in D$.*

*l2.* $f(t,t) = 0$, *para cada* $t \in D$.

*l3.* $f(z,x) \leq f(z,y) + f(y,x)$, *para cada* $x, y, z \in D$

*l4.* $f(.,y)$ *é semicontínua superior, para cada* $y \in D$.

*Em seguida, o conjunto de soluções para o problema de equilíbrio não é vazio.*

**Observação 2.1.3** *Este resultado da existência de equilíbrio em conjuntos* **compactos** *foi proposta em Farkas e Molnár [41]. Eles consideram* $C \subset I\!R^n$ *um subconjunto compacto (não necessariamente convexo) e* $f : C \times C \to I\!R$ *satisfaz as seguintes condições:*

*l1.* $f(x,.)$ *é delimitada inferior e semicontínua inferior, para cada* $x \in C$.

*l2.* $f(t,t) = 0$, *para cada* $t \in C$.

*l3.* $f(z,x) \leq f(z,y) + f(y,x)$, *para cada* $x, z, y \in C$.

*l4.* $f(.,y)$ *é semicontínua superior, para cada* $y \in C$.

*Em seguida, o conjunto de soluções para o problema de equilíbrio não é vazio.*

**Observação 2.1.4** *Outros trabalhos onde você pode encontrar resultados de existência de soluções para os problemas de equilíbrio são: Chadli et al. [25], Bianchi e Schaible [14], [13], Fakhar e Zafarani [40], Flores-Bazán [44], Kassay e Miholca [65], Iusem et al. [54], László e Viorel [74], Konnov [69] e Castellani et al. [29].*

## 2.2 Distância Proximal

Agora vamos apresentar as definições de distância proximal e a distância proximal induzida, propostos inicialmente por Auslender e Teboulle [8]. Esta abordagem tem sido utilizada nos trabalhos de Villacorta e Oliveira [112], Papa Quiroz e Oliveira [94], Papa Quiroz et al. [95] e Papa Quiroz et al. [96], também é utilizada em cones simétricos, ver López e Papa Quiroz [75].

**Definição 2.2.1** *Uma função* $d : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R_+ \cup \{+\infty\}$ *é chamada distância proximal em relação a um conjunto convexo não vazio aberto* $C$ *se para cada* $y \in C$ *se satisfaz as seguintes propriedades:*

**i.** $d(\cdot, y)$ *é própria, semicontínua inferior, convexa continuamente diferenciável em* $C$*;*

**ii.** dom $(d(\cdot,y)) \subset \bar{C}$ *e* dom$(\partial_1 d(\cdot,y)) = C$, *onde* $\partial_1 d(\cdot,y)$ *denota o operador subgradiente clássico da função* $d(\cdot,y)$ *no que diz respeito à primeira variável;*

**iii.** $d(\cdot,y)$ *é coerciva em* $I\!R^n$ *(isto é,* $\lim_{||u||\to\infty} d(u,y) = +\infty$);

**iv.** $d(y,y) = 0$.

*Denotamos por* $D(C)$ *a família de funções que satisfazem a definição anterior.*

A propriedade **i**. da Definição anterior é necessária para preservar a convexidade de $d(\cdot,y)$, a propriedade **ii** forçará a iteração do método proximal para permanecer em $C$, e a propriedade **iii** é útil para garantir a existência das iterações proximais. Para cada $y \in C$, $\nabla_1 d(\cdot,y)$ denota o gradiente da função $d(\cdot,y)$ com respeito à primeira variável. Note-se que, por Definição $d(\cdot,\cdot) \geq 0$ e de **iv**. o mínimo global de $d(\cdot,y)$ é obtido em $y$, que mostra que $\nabla_1 d(y,y) = 0$.

**Definição 2.2.2** *Dado* $d \in D(C)$, *uma função* $H : I\!R^n \times I\!R^n \to I\!R_+ \cup \{+\infty\}$ *denomina-se distância proximal induzida com respeito a* $d$ *se* $H$ *é uma função de valor finita em* $C \times C$ *e para cada* $a, b \in C$ *temos:*

**(Ii)** $H(a,a) = 0$.

**(Iii)** $\langle c - b, \nabla_1 d(b,a)\rangle \leq H(c,a) - H(c,b), \quad \forall\, c \in C$.

Denotaremos por $(d,H) \in \mathcal{F}(C)$ para a distância proximal que satisfaz as condições da Definição 2.2.2.

Nós também denotamos por $(d,H) \in \mathcal{F}(\bar{C})$ Se existe $H$ de tal modo que:

**(Iiii)** $H$ é de valor finito em $\bar{C} \times C$ e satisfaz **(Ii)** e **(Iii)**, para cada $c \in \bar{C}$.

**(Iiv)** Para cada $c \in \bar{C}$, $H(c,\cdot)$ tem conjuntos de nível limitados em $C$.

Finalmente, denotamos por $(d,H) \in \mathcal{F}_+(\bar{C})$ se

**(Iv)** $(d,H) \in \mathcal{F}(\bar{C})$.

**(Ivi)** $\forall\, y \in \bar{C}$ e $\forall\, \{y^k\} \subset C$ limitada com $\lim_{k\to+\infty} H(y,y^k) = 0$, então $\lim_{k\to+\infty} y^k = y$.

**(Ivii)** $\forall\, y \in \bar{C}$, e $\forall\, \{y^k\} \subset C$ de tal modo que $\lim_{k\to+\infty} y^k = y$, então $\lim_{k\to+\infty} H(y,y^k) = 0$.

O principal resultado do método de ponto proximal será quando $(d,H) \in \mathcal{F}_+(\bar{C})$. Vários exemplos de distâncias proximais que satisfazem as definições acima, por exemplo distâncias Bregman, distancias baseadas em $\varphi-$divergências e as distâncias proximais homogêneas de segunda ordem, foram dadas por Auslender e Teboulle [8], Seção 3. Temos os seguintes exemplos de distância proximal:

**Exemplo 2.2.1** *(Distância Proximal de Bregman)*
*Seja $W \neq \emptyset$, um subconjunto convexo e aberto do $I\!R^n$, e $h : \bar{W} \to I\!R$ uma função convexa e diferenciável. Seja $D_h : \bar{W} \times W \to I\!R$ tal que*

$$D_h(x, y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle, \tag{2.4}$$

onde $\bar{C}$ denota o encerramento de $C$.

**Definição 2.2.3** *A função h é chamada uma função de Bregman com zona $W$ se:*

*(t1)* *$h$ é estritamente convexa e contínua sobre $\bar{W}$.*

*(t2)* *$h$ é continuamente diferenciável sobre $W$.*

*(t3)* *Dados quaisquer $x \in \bar{W}$ e $M \in I\!R$, o conjunto de nível parcial à direita $L_{D_h}(x, M) = \{y \in W : \ D_h(x, y) \leq M\}$ é limitado.*

*(t4)* *Se $\{y^k\} \subset W$ converge para $y$, então $D_h(y, y^k)$ converge a $0$.*

*A propriedade a seguir segue de (2.4) e das condições $(t1) - (t4)$.*

***Proposição 2.2.1*** *Seja $h$ uma função de Bregman com zona $K$, então*

*a)* $D_h(x, y) - D_h(x, z) - D_h(z, y) = \langle \nabla h(y) - \nabla h(z), z - x \rangle$, *para todo* $x \in \bar{K}$, *e* $z, y \in K$.

*b)* $\nabla_1 D_h(x, y) = \nabla h(x) - \nabla h(y)$, *para todo* $x, y \in K$.

*c)* $D_h(., y)$ *é estritamente convexa para todo* $y \in K$.

***Observação 2.2.1*** *Notamos que a distância proximal induzida de Auslender e Teboulle [8] coincide com a função $D_h$, como se segue $H \equiv D_h$. Alguns exemplos onde é amplamente utilizada a distância de Bregman, são as seguintes artigos, Chuang e Lin [32], Ceng et al. [23], Mashreghi e Nasri [80], Hadjisavvas e Schaible [48], Eckstein [38], Chen e Teboulle [30] e Resmerita [101].*

**Exemplo 2.2.2** *Seja $C = I\!R^n$, com $h : I\!R^n \to I\!R$, definida por $h(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$, então $D_h$ é definida por*

$$D_h(x, y) = \frac{1}{2}\|x - y\|^2.$$

*De fato.*

$$D_h(x, y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x - y \rangle,$$

*lembrar que h é diferenciável*

$$D_h(x, y) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 - \lim_{t \to 0^+} \frac{\frac{\|y + t(x-y)\|^2}{2} - \frac{\|y\|^2}{2}}{t},$$

$$D_h(x,y) = \frac{1}{2}\|x\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2 - \lim_{t\to 0^+} \frac{\|y\|^2 + 2t\langle y, x-y\rangle + t^2\|x-y\|^2 - \|y\|^2}{2t},$$

$$D_h(x,y) = \frac{1}{2}\langle x,x\rangle - \frac{1}{2}\langle y,y\rangle - \langle y, x-y\rangle,$$

$$D_h(x,y) = \frac{1}{2}\langle x-y,x\rangle - \frac{1}{2}\langle x-y,y\rangle,$$

*em seguida, obtemos o resultado.*

**Observação 2.2.2**

*p1)* $D_h(x,y) \geq 0$.

*Em efeito, seja* $x \in \bar{W}$ *e* $y \in W$, *e sabendo que* $h$ *é uma função convexa*

$$h(x) \geq h(y) + \langle \nabla h(y), x-y\rangle,$$

*em seguida, obtemos*

$$h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x-y\rangle \geq 0,$$

*assim, então* $D_h(x,y) \geq 0$.

*p2)* $D_h(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

*De fato, seja* $x \in \bar{W}$ *e* $y \in W$, *com* $x \neq y$, *então*

$$h(x) - h(y) > \langle \nabla h(y), x-y\rangle,$$

*da desigualdade acima, notamos o seguinte*

$$0 = D_h(x,y) = h(x) - h(y) - \langle \nabla h(y), x-y\rangle > 0,$$

*Logo, temos uma contradição, então* $D_h(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$. *é verdadeiro.*

*Agora, se* $x = y$, *obtemos a seguinte*

$$D_h(x,x) = h(x) - h(x) - \langle \nabla h(x), x-x\rangle = 0.$$

Outro exemplo é o seguinte.

Seja $C = I\!R^n_{++}$. Para $0 < \alpha < 1$, considere a família de funções $h_\alpha(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha x_i - x_i^\alpha}{1-\alpha}$.

Então

$$D_{h_\alpha}(x,y) = \sum_{i=1}^n y_i^{\alpha-1}\left(y_i + \frac{\alpha}{1-\alpha}x_i\right) - \frac{1}{1-\alpha}x_i^\alpha.$$

Agora, no caso de $\alpha = \frac{1}{2}$, que resulta em $h(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sqrt{x_i}$ e a distância

$$D_h(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(\sqrt{x_i} - \sqrt{y_i})^2}{\sqrt{y_i}},$$

$\forall (x,y) \in I\!R_+^n \times I\!R_{++}^n$.
Seja, $C = I\!R_+^n$, $g(x) = \sum_{j=1}^{n} (x_j^\alpha - x_j^\beta)$, com $\alpha \geq 1$, $0 < \beta < 1$, note que para $\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{2}$ obtemos

$$D_g(x,y) = \|x-y\|^2 + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{y_j}} \left(\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j}\right)^2,$$

e para $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ obtemos

$$D_g(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{y_j}} \left(\sqrt{x_j} - \sqrt{y_j}\right)^2.$$

Ver, Burachik et al. [17].

**Exemplo 2.2.3** *(Distância $\phi-$Divergência)*
*Seja $\phi : I\!R \to I\!R \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, própria e fechada com $dom(\phi) \subseteq I\!R_+$ e $dom(\partial\phi) = I\!R_{++}$ que satisfaz o seguinte.*

*(a) $\phi$ é duas vezes continuamente diferenciável no $int(dom(\phi)) = (0, +\infty)$.*

*(b) $\phi$ é estritamente convexa sobre seu domínio.*

*(c) $\lim_{t \to 0^+} \phi'(t) = -\infty$.*

*(d) $\phi(1) = \phi'(1) = 0$ e $\phi''(1) > 0$.*

*Seja $\Phi$ a classe das funções satisfazendo $(a) - (d)$ e por $\Phi_1$ a subclasse:*

$$\Phi_1 = \{\phi \in \Phi : \phi''(1)(1 - \frac{1}{t}) \leq \phi'(t) \leq \phi''(1)\log(t), \forall t > 0\}.$$

*Agora, para $\phi \in \Phi_1$, a distância proximal $\phi-$divergência é definida por*

$$d_\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} y_i \phi(\frac{x_i}{y_i}).$$

*Note-se que a função $\varphi : I\!R \to I\!R \cup \{+\infty\}$, definido como $\varphi(t) = t - ln(t) - 1$, se $t > 0$ e $\varphi(t) = +\infty$, caso contrário; pertencem a $\Phi_1$, ver Teboulle [109].*
*Podemos ver também que a função $\varphi : I\!R \to I\!R \cup \{+\infty\}$, definido como $\varphi(t) =$*

*$tln(t) - t + 1$, se $t > 0$ e $\varphi(t) = +\infty$, caso contrário; pertencem a $\Phi_1$, ver Teboulle [109].*

Além disso, dada $\phi$ a distância proximal induzida $H$, associada a distância $d_\phi$, é definido como

$$H(x,y) = d_\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i log(\frac{x_i}{y_i}) + y_i - x_i,$$

$\forall x \in I\!\!R^n_+$, $\forall y \in I\!\!R^n_{++}$, para mais detalhes ver, Auslender e Teboulle [8].

**Exemplo 2.2.4** *(Distância proximal homogênea de segundo ordem)*
*Seja $\varphi : I\!\!R \to I\!\!R \cup \{+\infty\}$ uma função própria, convexa e fechada, tal que $dom(\partial\varphi) = I\!\!R_{++}$. Suponhamos que $\varphi$ seja estritamente convexa em seu domínio, e $\varphi$ seja $C^2$ em $I\!\!R_{++}$ com $\varphi(1) = \varphi'(1) = 0$. A classe $\Phi_2$ (subclasse de $\Phi$) consiste em kernels $p \in \Phi$ que satisfazem*

$$p''(1)\left(1 - \frac{1}{t}\right) \leq p'(t) \leq p''(1)(t-1), \tag{2.5}$$

*$\forall t > 0$. Dado $\varphi \in \Phi$, a distância proximal $\phi$-divergente é definida por*

$$d_\varphi(x,y) = \sum_{j=1}^{2} y_j^2 \varphi\left(\frac{x_j}{y_j}\right), \tag{2.6}$$

*onde $d_\phi \in D(I\!\!R^n_{++})$, $p \in \Phi_2$ e*

$$\phi(t) = \ell p(t) + \frac{\nu}{2}(t-1)^2, \tag{2.7}$$

*com $0 < \ell p''(1) \leq \nu$ tem-se*

$$\langle c - b, \nabla_1 d_\phi(b,a)\rangle \leq \frac{\nu + \ell p''(1)}{2}\left(\|c-a\|^2 - \|c-b\|^2 - \left(\frac{\nu - \ell p''(1)}{\nu + \ell p''(1)}\right)\|b-a\|^2\right)$$

*$\forall a, b \in I\!\!R^n_{++}$, $\forall c \in I\!\!R^n_+$, portanto, com*

$$H(x,y) = \left(\frac{\nu + \ell p''(1)}{2}\right)\|x-y\|^2$$

*segue-se que $(d_\phi, H)$ é um par proximal compatível associado com $\bar{C} = I\!\!R^n_+$, ou seja, $(d_\phi, H) \in \mathcal{F}(I\!\!R^n_+)$ para mais detalhes, ver Auslender [6]-[7]. Em particular, $p(t) = -log(t) + t - 1$, então temos*

$$d_\phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \ell\left(y_i^2 log\left(\frac{y_i}{x_i}\right) + x_i y_i - y_i^2\right) + \frac{\nu}{2}(x_i - y_i)^2, \forall x, y \in I\!\!R_{++}.$$

**Observação 2.2.3** *As condições* (**Ivi**) *e* (**Ivii**) *irão assegurar a convergência glo-*

*bal da sequência gerada pelo algoritmo proposto neste trabalho. Como veremos na Proposição 2.2.3, a condição* (**Ivii**) *pode ser substituída pela seguinte:*

**(Iviii)** *$H(.,.)$ é contínua em $C \times C$ e se $\{y^k\} \subset C$, de tal modo que $\lim_{k\to+\infty} y^k = y \in bd(C)$ e $\bar{y} \neq y$ é outro ponto em $bd(C)$, então $\lim_{k\to+\infty} H(\bar{y}, y^k) = +\infty$.*

*De acordo com Langenberg e Tichatschke [70], página 643, que é baseado nos trabalhos de Kaplan e Tichatschke [63] e Kaplan e Tichatschke [64], a condição acima cumpre para distâncias Bregman induzidas quando as restrições não-lineares são ativas em $y = \lim_{k\to+\infty} y^k$, enquanto a condição* (**Ivii**) *cumpre quando somente as restrições afins são ativas em $y$.*

**Definição 2.2.4** *Seja $(d, H) \in \mathcal{F}(\bar{C})$. Dizemos que a sequência $\{z^l\} \subset C$ e $H$-quase-Fejér converge para um conjunto $U \subset \bar{C}$ se para cada $u \in U$ existe uma sequência $\{\epsilon_l\}$, com $\epsilon_l \geq 0$ e $\sum\limits_{l=1}^{+\infty} \epsilon_l < +\infty$ de tal modo que*

$$H(u, z^l) \leq H(u, z^{l-1}) + \epsilon_l.$$

**Proposição 2.2.2** *Seja $(d, H) \in \mathcal{F}_+(\bar{C})$ e $\{z^l\} \subset C$ uma sequência $H$-quase-Fejér convergente para $U \subset \bar{C}$ então $\{z^l\}$ é limitada. Além disso, se existir um ponto de acumulação $\bar{z}$ de $\{z^l\}$, pertencente a $U$, em seguida, toda a sequência $\{z^l\}$ converge para $\bar{z}$.*

**Prova.** Seja $u \in U$, da hipótese de $H$-quase-Fejér convergência obtemos

$$H(u, z^l) \leq H(u, z^0) + \sum_{l=1}^{+\infty} \epsilon_l,$$

assim,

$$z^l \in L_H(u, \alpha) = \{y \in C : H(u, y) \leq \alpha\},$$

onde $\alpha = H(u, z^0) + \sum_{l=1}^{+\infty} \epsilon_l$. Da Definição 2.2.2, **Iiv**, $L_H(u, \alpha)$ é limitado e, assim $\left\{z^l\right\}$ é uma sequência limitada.

Seja $\bar{z}$ e $z^*$ dois pontos de acumulação de $\{z^l\}$ onde $z^{l_j} \to \bar{z}$ e $z^{l_k} \to z^*$ com $\bar{z} \in U$, em seguida, pela Definição 2.2.2 **Ivii**,

$$H(\bar{z}, z^{l_j}) \to 0,$$

e

$$H(z^*, z^{l_k}) \to 0,$$

como $H(\bar{z}, z^l)$ é convergente, ver Lema 2.0.1, e a sequência $H(\bar{z}, z^{l_j})$ converge para zero, obtemos que

$$H(\bar{z}, z^l) \to 0,$$

e em particular

$$H(\bar{z}, z^{l_k}) \to 0,$$

da Definição 2.2.2, **Ivi**, obtemos $z^{l_k} \to \bar{z}$ e devido à unicidade do limite temos $z^* = \bar{z}$. Assim, $\{z^l\}$ converge a $\bar{z}$. ■

A seguinte proposição enfraquece o resultado anterior e será importante para estabelecer a convergência global do algoritmo proposto, quando substituímos a condição (**Iviii**) em vez de (**Ivii**) na Definição 2.2.2.

**Proposição 2.2.3** *Seja* $(d, H) \in \mathcal{F}_+(\bar{C})$ *satisfazendo a condição* (**Iviii**) *em vez de* (**Ivii**) *e* $\{z^l\} \subset C$ *uma sequência* $H$*-quase-Fejér convergente a* $U \subset \bar{C}$ *então* $\{z^l\}$ *é limitada. Além deisso, se qualquer ponto de acumulação de* $\{z^l\}$ *pertence a* $U$*, em seguida toda a sequência* $\{z^l\}$ *converge.*

**Prova.** A limitação de $\{z^l\}$ é imediata. Seja $\bar{z}$ e $z^*$ dois pontos de acumulação de $\{z^l\}$ onde $z^{l_j} \to \bar{z}$ e $z^{l_k} \to z^*$, em seguida da condição $\bar{x}, x^* \in U$ temos que $\{H(\bar{z}, z^l)\}$ e $\{H(z^*, z^l)\}$ convergem. Analisamos três possibilidades:

*i.* Se $z^*$ e $\bar{z}$ pertencem a $bd(C)$ e suponha que $\bar{z} \neq z^*$ da condição (**Iviii**), $H(z^*, z^{l_j}) \to +\infty$ que contradiz a convergência de $\{H(z^*, z^l)\}$, então devemos ter $\bar{z} = z^*$.

*ii.* Se $z^*$ e $\bar{z}$ pertencem a $C$ a partir da continuidade $H(.,,)$ em $C$ temos $H(z^*, z^{l_k}) \to 0$. Como $\{H(z^*, z^l)\}$ converge, consequentemente $H(z^*, z^{l_j}) \to 0$. Usando a condição (**Ivi**) temos $z^{l_j} \to z^*$, assim $\bar{z} = z^*$.

*iii.* Sem perda de generalidade podemos supor que $z^* \in C$ e $\bar{z} \in bd(C)$. Assim, utilizando o mesmo argumento do item anterior temos que $\bar{z} = z^*$, que é uma contradição de modo que este caso não é possível . Ver Proposição 2.3 em Papa et al. [96]. ■

# Capítulo 3

# Método Proximal Inexato para o Problema de Equilíbrio

O problema de equilíbrio, $EP(f, \bar{C})$, consiste em encontrar um ponto $\bar{x} \in \bar{C}$, de tal modo que

$$EP(f, \bar{C}) \quad f(\bar{x}, y) \geq 0, \forall y \in \bar{C}, \tag{3.1}$$

onde $C$ é um conjunto convexo não-vazio aberto e $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$ é uma bifunção de equilíbrio, isto é, satisfaz $f(x, x) = 0$ para cada $x \in \bar{C}$.
Em particular, o problema acima é motivado a partir da teoria da demanda do consumidor não transitivo na economia. De fato, considere uma economia com um número finito $n$ de produtos básicos e seja $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I\!R^n$ a cesta de consumo, onde para cada $i = 1, 2, ...n$; $x_i$ é interpretado como o consumo de $x_i$ de mercadoria $i$. Observa-se que $x_i \geq 0$ representa entradas (e.g. bens de consumo) e $x_i < 0$ representa saídas (e.g. serviços de trabalho). Nós assumimos que os consumos viáveis são dados por um conjunto convexo $X \subset I\!R^n$ chamado conjunto consumo do consumidor. O objetivo do consumidor é descrever uma relação binária $\mathcal{R}$ em $X$ onde $x\mathcal{R}y$ é interpretado como "$x$ é pelo menos tão bom quanto $y$", ou como "$x$ é (fracamente) preferido em relação a $y$".
Se $\mathcal{R}$ é completa e contínua, mas não transitiva, Shafer [110] provou que $\mathcal{R}$ pode ser representada por uma função contínua $r : X \times X \to I\!R$ de tal modo que

$$\begin{cases} x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow r(x, y) \geq 0 \\ r(x, y) = -r(y, x). \end{cases}$$

Assim, para encontrar o melhor pacote consumo $X$, podemos resolver o problema (3.1) considerando $f = r$.
Por outro lado, observa-se que se $\mathcal{R}$ é uma preferência transitiva, então, $\mathcal{R}$ pode ser representada por uma função de utilidade contínua $u(x)$, de tal modo que $x\mathcal{R}y$ se é apenas $u(x) \geq u(y)$, ver Reinhard [100], pp 299.

O conjunto de soluções do $EP(f,\bar{C})$, é denominado $S(f,\bar{C})$. A seguir, apresentamos as seguintes primeiras e naturais condições para a bifunção de equilíbrio $f$:

**Hipótese H1.** $f(.,y) : \bar{C} \to I\!R$ é semicontínua superior para todo $y \in \bar{C}$.

**Hipótese H2.** $f(x,.) : \bar{C} \to I\!R$ é convexa para todo $x \in \bar{C}$.

**Observação 3.0.1** *Observe que as hipóteses* **H1** *e* **H2** *são padrões para o estudo dos problemas de equilíbrio, ver [53]. A hipótese* **H1**, *é usado em Bianchi et al. [15].*

Agora, propomos uma extensão do método de ponto proximal utilizando uma distância proximal para resolvermos o problema (3.1).

**Algoritmo Inexacto**

**Inicialização:** Seja $\{\lambda_k\}$ uma sequência de parâmetros positivos e um ponto de partida:

$$x^0 \in C. \tag{3.2}$$

**Passo Principal:** Para $k = 1, 2, \ldots,$ e $x^{k-1} \in C$, encontrar $x^k \in C$ e $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ de forma que

$$g^k + \lambda_k \nabla_1 d(x^k, x^{k-1}) = e^k, \tag{3.3}$$

onde $d$ é uma distância proximal de tal modo que $(d, H) \in \mathcal{F}_+(\bar{C})$ e $e^k$ é um erro de aproximação que satisfaz algumas condições especificadas mais adiante.

**Critério de Parada:** Se $x^k = x^{k-1}$ ou $e^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$, então, terminar. Caso contrario, fazer $k-1 \leftarrow k$ e retornar ao Passo Principal.

Também assumimos as seguintes hipóteses:

**Hipótese H3.** $f$ é quase-monótono.

**Hipótese H4.** Para cada $k \in I\!N$, existe um $x^k \in C$.

**Observação 3.0.2** *A hipótese* **H4** *está satisfeita, por exemplo, quando* $f(z,.)$ *é* *limitada inferiormente e a hipótese* **H2***. De fato, seja $z \in I\!R^n$ (arbitrário) e considerando o problema.*

$$\min\{f(z,x) + \lambda_k d(x, x^{k-1}) : x \in I\!R^n\}.$$

*De $(d, H) \in \mathcal{F}(\bar{C})$ obtém-se $\bar{x} = \bar{x}(z) \in C$ tal que*

$$0 \in \partial_2 f(z, \bar{x}) + \lambda_k \nabla_1 d(\bar{x}, x^{k-1}).$$

*Considerando, em particular, $z = \bar{x}$ temos*

$$0 \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{x}) + \lambda_k \nabla_1 d(\bar{x}, x^{k-1}).$$

*Definindo $x^k = \bar{x}$, obtemos que existe $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ de tal forma que*

$$0 = g^k + \lambda_k \nabla_1 d(x^k, x^{k-1}).$$

## 3.1 Resultados de Convergência

Nesta secção, estamos interessados em analisar as iterações quando $x^k \neq x^{k-1}$ para cada $k = 1, 2, ...,$ já que, se $x^k = x^{k-1}$, para algum $k$, então $\nabla_1 d(x^k, x^{k-1}) = 0$, assim, obtém-se

$$g^k = e^k \in \partial_2 f(x^k, x^k),$$

por conseguinte, o algoritmo termina.
Agora, nós definimos o seguinte conjunto solução particular de $S(f, \bar{C})$.

$$S^*(f, \bar{C}) = \{x \in S(f, \bar{C}) : f(x, w) > 0, \forall w \in C\}. \tag{3.4}$$

A definição do conjunto acima é uma variante de Bianchi e Schaible, ver pp.41 de [14] e que será muito importante para obter a convergência do algoritmo proposto. Usaremos a seguinte hipótese adicional.

**Hipótese H5.** $S^*(f, \bar{C}) \neq \emptyset$.

**Proposição 3.1.1** *Assumindo que são verdadeiras as hipóteses* **H2**, **H3**, **H4**, **H5** *e $(d, H) \in \mathcal{F}(\bar{C})$, temos*

$$H(x^*, x^k) \leq H(x^*, x^{k-1}) + \frac{1}{\lambda_k}\left\langle e^k, x^k - x^* \right\rangle, \tag{3.5}$$

*para todo $x^* \in S^*(f, \bar{C})$.*

**Prova.** Dado $x^* \in S^*(f, \bar{C})$ então

$$f(x^*, w) > 0, \quad \forall w \in C,$$

e como $x^k \in C$, obtemos

$$f(x^*, x^k) > 0.$$

Como $f$ é quase-monótono, por **H3**, temos

$$f(x^k, x^*) \leq 0.$$

Desde que $g^k \in \partial_2 f(x^k, x^k)$, temos de **H2** e da Definição 2.0.7

$$\left\langle g^k, x^* - x^k \right\rangle \leq f(x^k, x^*) \leq 0,$$

e assim

$$\left\langle g^k, x^* - x^k \right\rangle \leq 0, \tag{3.6}$$

substituindo (3.3) em (3.6) obtemos

$$\left\langle e^k - \lambda_k \nabla_1 d(x^k, x^{k-1}), x^* - x^k \right\rangle \leq 0,$$

que resulta em

$$\left\langle e^k, x^* - x^k \right\rangle - \left\langle \lambda_k \nabla_1 d(x^k, x^{k-1}), x^* - x^k \right\rangle \leq 0, \tag{3.7}$$

que implica

$$\frac{1}{\lambda_k} \left\langle e^k, x^* - x^k \right\rangle \leq \left\langle x^* - x^k, \nabla_1 d(x^k, x^{k-1}) \right\rangle,$$

agora, usando a propriedade **(Iii)** da Definição 3.2 obtemos

$$\frac{1}{\lambda_k} \left\langle e^k, x^* - x^k \right\rangle \leq \left\langle x^* - x^k, \nabla_1 d(x^k, x^{k-1}) \right\rangle \leq H(x^*, x^{k-1}) - H(x^*, x^k),$$

assim temos

$$\frac{1}{\lambda_k} \left\langle e^k, x^* - x^k \right\rangle \leq H(x^*, x^{k-1}) - H(x^*, x^k),$$

então nós conseguimos o que queremos.

$$H(x^*, x^k) \leq H(x^*, x^{k-1}) + \frac{1}{\lambda_k} \left\langle e^k, x^k - x^* \right\rangle.$$

∎

**Proposição 3.1.2** *Suponha que as seguintes hipóteses* **H2**, **H3**, **H4**, **H5** *são ver-*

*dadeiras e $(d,H) \in \mathcal{F}(\bar{C})$. Se as seguintes condições adicionais também se cumprem*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\|e^k\|}{\lambda_k} < +\infty \tag{3.8}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\langle e^k, x^k\rangle|}{\lambda_k} < +\infty \tag{3.9}$$

*então*

**a).** *$\{x^k\}$ é $H$-quase-Fejér convergente ao conjunto $S^*(f,\bar{C})$.*

**b).** *$\{H(x^*,x^k)\}$ converge para todo $x^* \in S^*(f,\bar{C})$.*

**c).** *$\{x^k\}$ é limitado.*

**Prova.**
**a).** De (3.5) temos que

$$H(x^*,x^k) \le H(x^*,x^{k-1}) + \frac{1}{\lambda_k}(\langle e^k, x^k\rangle - \langle e^k, x^*\rangle),$$

por outro lado, lembre que

$$-\|e^k\|\|x^*\| \le \langle e^k, x^*\rangle \le \|e^k\|\|x^*\|,$$

e

$$\langle e^k, x^k\rangle \le |\langle e^k, x^k\rangle|,$$

então temos para todo $x^* \in \bar{C}$ :

$$H(x^*,x^k) \le H(x^*,x^{k-1}) + \frac{1}{\lambda_k}\left(\|e^k\|\|x^*\| + |\langle e^k, x^k\rangle|\right), \tag{3.10}$$

seja, $\epsilon^k = \frac{1}{\lambda_k}\left(\|e^k\|\|x^*\| + |\langle e^k, x^k\rangle|\right)$, então

$$H\left(x^*,x^k\right) \le H\left(x^*,x^{k-1}\right) + \epsilon^k,$$

e de (3.8) e (3.9) temos $\sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon^k < \infty$.

**b).** É imediato de **a)** do Lema 2.0.1.

**c).** É também imediatamente a partir de **a)** e Proposição 2.2.2. ■

As condições (3.8) e (3.9) foram introduzidas por Eckstein [38] e usadas por muitos pesquisadores, por exemplo, ver Iusem e Nasri [52], Xu et al. [114], Auslender et al. [6], Solodov e Svaiter [106], Han [49], Tang e Wang [108], Kaplan e Tichatschke [62]. É possível se livrar da condição (3.9) na Proposição 3.1.2, para obter $\{H(x, x^k)\}$ convergente e $\{x^k\}$ limitada, para uma classe de distâncias proximais induzidas que inclui distâncias Bregman, distâncias $\phi-$divergência e distâncias homogêneas de segunda ordem, veja Kaplan e Tichatsche, [**?** ]. Nós provamos este fato na seguinte proposição.

**Observação 3.1.1** *Se* $0 \leq r \leq \frac{1}{2}$, *então*

$$1 \leq (1-r)^{-1} \leq 1 + 2r \leq 2. \tag{3.11}$$

**Proposição 3.1.3** *Suponha que as hipóteses* **H2**, **H3**, **H4**, **H5** *e* $(d, H) \in \mathcal{F}(\bar{C})$, *são satisfeitas. Se apenas a condição* (3.8) *é satisfeita e supondo que a distância proximal induzida* $H(.,.)$ *satisfaz as seguintes propriedades adicionais:*

**(Iix)** *Para cada* $x \in \bar{C}$ *existem* $\alpha(x) > 0$ *e* $c(x) > 0$ *de tal modo que:*

$$H(x, v) + c(x) \geq \alpha(x)||x - v||, \forall v \in C;$$

*então*

**a.** *Para todo* $x^* \in S^*(f, \bar{C})$, *temos*

$$H(x^*, x^k) \leq \left(1 + 2\frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right) H(x^*, x^{k-1}) + 2\frac{\|e^k\| \, c(x^*)}{\lambda_k \alpha(x^*)},$$

*para* $k$ *suficientemente grande e, portanto,* $\{H(x^*, x^k)\}$ *converge.*

**b.** $\{x^k\}$ *é limitado.*

**Prova.** Seja $x^* \in S^*(f, \bar{C})$, de (3.5) temos

$$H(x^*, x^k) \leq H(x^*, x^{k-1}) + \frac{1}{\lambda_k} \left\|e^k\right\| \left\|x^k - x^*\right\|, \tag{3.12}$$

por outro lado, tomando $x = x^*$ e $v = x^k$ em (**Iix**)

$$H(x^*, x^k) + c(x^*) \geq \alpha(x^*)\|x^* - x^k\|,$$

então

$$\|x^* - x^k\| \leq \frac{c(x^*)}{\alpha(x^*)} + \frac{1}{\alpha(x^*)} H(x^*, x^k),$$

da desigualdade acima, obtemos

$$\|e^k\| \|x^* - x^k\| \leq \frac{\|e^k\| H(x^*, x^k)}{\alpha(x^*)} + \frac{c(x^*)\|e^k\|}{\alpha(x^*)},$$

em seguida, como $\lambda_k > 0$

$$\frac{1}{\lambda_k}\|e^k\|\|x^* - x^k\| \leq \frac{\|e^k\|H(x^*, x^k)}{\lambda_k \alpha(x^*)} + \frac{c(x^*)\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}, \tag{3.13}$$

de (3.12) e (3.13) obtemos

$$H(x^*, x^k) \leq H(x^*, x^{k-1}) + \frac{\|e^k\|H(x^*, x^k)}{\lambda_k \alpha(x^*)} + \frac{c(x^*)\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)},$$

e assim,

$$H(x^*, x^k) - \frac{\|e^k\|H(x^*, x^k)}{\lambda_k \alpha(x^*)} \leq H(x^*, x^{k-1}) + \frac{c(x^*)\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)},$$

logo obtemos

$$\left(1 - \frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right) H(x^*, x^k) \leq H(x^*, x^{k-1}) + \frac{c(x^*)\,\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}. \tag{3.14}$$

De (3.8), existe $k_0 \equiv k_0(x^*)$ tal que $\frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)} \leq \frac{1}{2}$, para todo $k \geq k_0$ e também de (3.11) temos

$$1 \leq \left(1 - \frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right)^{-1} \leq 1 + 2\frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)} \leq 2, \ \ \forall k \geq k_0. \tag{3.15}$$

De (3.14)

$$H(x^*, x^k) \leq \left(1 - \frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right)^{-1} H(x^*, x^{k-1}) + \left(1 - \frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right)^{-1} \frac{c(x^*)\,\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}, \tag{3.16}$$

de (3.16) e (3.15) finalmente

$$H(x^*, x^k) \leq \left(1 + 2\frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right) H(x^*, x^{k-1}) + 2\frac{\|e^k\|\,c(x^*)}{\lambda_k \alpha(x^*)}, \forall k \geq k_0.$$

Assim, do Lema 2.0.1, $\{H(x^*, x^k)\}$ é convergente e da Definição 2.2.2, (**Iiv**), $\{x^k\}$ é limitada. ∎

**Observação 3.1.2** *A condição* (**Iix**) *é amplamente utilizada no trabalho de Huebner e Tichatschke [50], Papa Quiroz et al. [96], [95], Mallma Ramirez et al. [76] e Kaplan e Tichatschke [62].*

Denotamos $Acc(x^k)$ como o conjunto de todos os pontos de acumulação de $\{x^k\}$

$$Acc(x^k) = \{z \in \bar{C} : \exists \{x^{k_l}\} \subseteq \{x^k\} \text{ } with \text{ } x^{k_l} \to z\}.$$

**Teorema 3.1.1** *Assumindo que as hipóteses* **H1**, **H2**, **H3**, **H4** *e* **H5** *são satisfeitos. Se* $(d, H) \in \mathcal{F}_+(\bar{C})$*,* $0 < \lambda_k < \bar{\lambda}$*, para algun* $\bar{\lambda} > 0$*, uma das seguintes condições são satisfeitas:*

*i) As condições* (3.8)-(3.9) *são satisfeitas,*

*ii)* $(d, H)$ *satisfaz* **(Iix)** *e somente a condição* (3.8) *é satisfeita,*

*então,*

*(a)* $\{x^k\}$ *converge fracamente para um elemento de* $S(f, \bar{C})$*, isto é,* $Acc(x^k) \neq \emptyset$ *e cada elemento de* $Acc(x^k)$ *e cada elemento de* $S(f, \bar{C})$*.*

*(b) Se* $Acc(x^k) \cap S^*(f, \bar{C}) \neq \emptyset$ *então* $\{x^k\}$ *converge para um elemento de* $S^*(f, \bar{C})$*.*

**Prova.** Considere verdade o primeiro caso $i$).
Da Proposição 3.1.2, **c**, $\{x^k\}$ é limitada, e portanto, existe uma subsequência convergente e assim $Acc(x^k) \neq \emptyset$. Definimos $L = \{k_1, k_2, ..., k_j, ...\}$, então do resultado precedente obtém-se $\{x^{k_l}\} \to x^*$ e de (3.3) e $g^l \in \partial_2 f(x^l, x^l)$ temos que

$$f(x^l, x) \geq \left\langle g^l, x - x^l \right\rangle,$$

a partir de (3.3)

$$f(x^l, x) \geq \left\langle g^l, x - x^l \right\rangle = \left\langle e^l, x - x^l \right\rangle - \lambda_l \left\langle \nabla_1 d(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle,$$

então

$$f(x^l, x) \geq \left\langle e^l, x - x^l \right\rangle - \lambda_l \left\langle \nabla_1 d(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle, \tag{3.17}$$

para todo $l \in L$ e para cada $x \in \bar{C}$. Tendo em vista (3.8) e que $\{\lambda_l\}$ é limitada superiormente temos que

$$||e^l|| \to 0.$$

Então, como $\{x^l\}$ é limitada, obtém-se

$$\left\langle e^l, x - x^l \right\rangle \to 0.$$

Assim, somente é necessário analisar a convergência da sequência

$$-\lambda_l \left\langle \nabla_1 d(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle.$$

De Definição 2.2.2, (**Iii**), temos

$$\langle x - x^l, \nabla_1 d(x^l, x^{l-1})\rangle \leq H(x, x^{l-1}) - H(x, x^l),$$

em seguida

$$-\lambda_l \left\langle \nabla_1 d(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle \geq \lambda_l \left[H(x, x^l) - H(x, x^{l-1})\right].$$

Fixando $x \in \bar{C}$, analisamos dois casos:
Se $\{H(x, x^l)\}$ converge, então

$$\lambda_l \left[H(x, x^l) - H(x, x^{l-1})\right] \to 0.$$

Desde que $\{\lambda_l\}$ seja limitada, a partir de (3.17) e **H1**, temos

$$f(x^*, x) \geq \limsup_{l\to\infty} f(x^l, x) \geq \limsup_{l\to\infty}[\langle e^l, x - x^l\rangle - \lambda_l \left\langle \nabla_1 d(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle],$$

então

$$f(x^*, x) \geq \limsup_{l\to\infty} f(x^l, x) \geq \limsup_{l\to\infty}[\langle e^l, x - x^l\rangle + \lambda_l \left(H(x, x^l) - H(x, x^{l-1})\right)],$$

assim

$$f(x^*, x) \geq \limsup_{l\to\infty} f(x^l, x) \geq \limsup_{l\to\infty}\langle e^l, x - x^l\rangle + \limsup_{l\to\infty} \lambda_l \left(H(x, x^l) - H(x, x^{l-1})\right),$$

a desigualdade acima, pode ser reescrita da seguinte forma

$$f(x^*, x) \geq \limsup_{l\to\infty} f(x^l, x) \geq \lim_{l\to\infty}\langle e^l, x - x^l\rangle + \lim_{l\to\infty} \lambda_l \left(H(x, x^l) - H(x, x^{l-1})\right),$$

então

$$f(x^*, x) \geq \limsup_{l\to\infty} f(x^l, x) \geq 0 + 0,$$

logo temos

$$f(x^*, x) \geq 0.$$

Se $\{H(x, x^l)\}$ não é convergente, então, a sequência não é monotonamente decrescente e por isso existe infinito $l \in L$ de tal modo que

$$H(x, x^l) \geq H(x, x^{l-1}).$$

Seja $\{l_j\} \subset L$ de tal forma que

$$H(x, x^{l_j}) \geq H(x, x^{l_j - 1}),$$

para todo $j \in I\!N$, então, a partir de **H1** nós obtemos

$$f(x^*, x) \geq \limsup_{j\to\infty} f(x^{l_j}, x) \geq \limsup_{j\to\infty} \lambda_{l_j} \left[H(x, x^{l_j}) - H(x, x^{l_j-1})\right] \geq 0,$$

assim,

$$f(x^*, x) \geq 0,$$

logo, em ambos os casos, obtém-se

$$f(x^*, x) \geq 0,$$

o que implica que $x^* \in S(f, \bar{C})$. Assuma que $x^* \in S^*(f, \bar{C})$.
Se a condição $i)$ está satisfeita e usando a Proposição 3.1.2, **a)** e Proposição 2.2.2, temos que $\{x^k\}$ converge para $x^*$.
Agora vamos considerar verdadeiro o segundo caso $ii)$.
Da Proposição 3.1.3, **b.**, $\{x^k\}$ é limitada, assim $Acc(x^k) \neq \emptyset$. Tome uma subsequência $\{x^{k_j}\}$ de tal modo que $x^{k_j} \to \bar{x}$, então

$$\bar{x} \in S(f, \bar{C}),$$

e da Definição 2.2.2 (**Ivii**),

$$H(\bar{x}, x^{k_l}) \to 0.$$

Como $H(\bar{x}, x^k)$ é convergente, ver Proposição 3.1.3, **a.**, e a sequência $H(\bar{x}, x^{k_l})$ converge para zero, então obtém-se que

$$H(\bar{x}, x^{k_j}) \to 0.$$

Da Definição 2.2.2, (**Ivi**), obtemos $x^{k_j} \to \bar{x}$ e, devido à unicidade do limite temos

$$x^* = \bar{x}.$$

Assim, $\{x^k\}$ converge para $x^*$. ∎

**Teorema 3.1.2** *Suponha-se que as hipóteses* **H1**, **H2**, **H3**, **H4** *e* **H5** *são satisfeitas. Se* $(d, H) \in \mathcal{F}_+(\bar{C})$ *satisfazendo a condição* (**Iviii**) *em vez de* (**Ivii**), $0 < \lambda_k < \bar{\lambda}$, *para algum* $\bar{\lambda} > 0$, *e uma das seguintes condições é satisfeita:*

*i. As condições* (3.8)-(3.9) *são satisfeitas;*

*ii.* $(d, H)$ *satisfaz* **(Iix)** *e a condição* (3.8) *é satisfeita;*

*então*

*a1)* $\{x^k\}$ *converge fracamente a um elemento de* $S(f, \bar{C})$*, isto é,* $Acc(x^k) \neq \emptyset$ *e cada elemento de* $Acc(x^k)$ *é um ponto de* $S(f, \bar{C})$*.*

*a2) Se* $Acc(x^k) \subset S^*(f, \bar{C})$ *então* $\{x^k\}$ *converge para um elemento de* $S^*(f, \bar{C})$*.*

**Prova.** Considere verdade o primeiro caso $i)$.
Da Proposição 3.1.2, **c)**, $\{x^k\}$ é limitada, e portanto $Acc(x^k) \neq \emptyset$. Tome uma subsequência $\{x^{k_j}\}$, de tal modo que $x^{k_j} \to \bar{x}$. Da prova do Teorema 3.1.1 obtemos que $\bar{x} \in S(f, \bar{C})$. Da Proposição 3.1.2, **a,** $\{x^k\}$ é $H-$quasi-Féjer convergente para $S^*(f, \bar{C})$ e se $Acc(x^k) \subset S^*(f, \bar{C})$, a partir de Proposição 2.2.3 obtemos o resultado.
Agora vamos considerar verdadeiro as hipóteses do segundo caso $ii)$.
Da Proposição 3.1.3, **b**, $\{x^k\}$ é limitada, $Acc(x^k) \neq \emptyset$. Tome uma subsequência $\{x^{k_j}\}$, tal que $x^{k_j} \to \bar{x}$, exigindo os mesmos passos da prova do Teorema 3.1.1 obtemos que $\bar{x} \in S(f, \bar{C})$. Se $Acc(x^k) \subset S^*(f, \bar{C})$, seja $\bar{x}$ e $x^*$ dois pontos de acumulação de $\{x^k\}$ com

$$x^{k_j} \to \bar{x},$$

e

$$x^{k_l} \to x^*.$$

Como $\bar{x}, x^* \in S^*(f, \bar{C})$,

$$\{H(\bar{x}, x^k)\} \ \ converge,$$

e

$$\{H(x^*, x^k)\} \ \ converge.$$

Analizamos as seguintes três possibilidades.
Se $x^*$ e $\bar{x}$ pertencem a $bd(C)$ e suponha que $\bar{x} \neq x^*$, em seguida, a partir da suposição (**Iviii**), $H(x^*, x^{k_j}) \to +\infty$, que contradiz a convergência de $\{H(x^*, x^k)\}$, então devemos ter $\bar{x} = x^*$.
Se $x^*$ e $\bar{x}$ pertencem a $C$, da continuidade de $H(.,.)$ em $C$ temos $H(x^*, x^{k_l}) \to 0$. Como $\{H(x^*, x^k)\}$ converge, em seguida $H(x^*, x^{k_j}) \to 0$. Usando a condição (**Ivi**) temos $x^{k_j} \to x^*$, assim $\bar{x} = x^*$.
Agora vamos supor que $x^* \in C$ e $\bar{x} \in bd(C)$. Então, usando o mesmo argumento que o último caso, temos que $\bar{x} = x^*$, que é uma contradição, portanto, este caso, não é possível. ∎

## 3.2 Caso Pseudo-Monótono

Nesta seção substituindo a condição de quase monótonicidade de $f$, veja **H3**, pela pseudomonotonicidade obteremos a convergência da sequência sem a hipótese **H5** mas assumindo que o conjunto $S(f, \bar{C})$ é não vazio. Ao longo desta seção, vamos substituir as hipóteses **H3** e **H5**, da seção anterior, pelas seguintes condições:

**Hipótese H3'.** $f$ é pseudo-monótono.

**Hipótese H5'.** $S(f, \bar{C}) \neq \emptyset$.

**Observação 3.2.1** *Note-se que a condição* **H3'** *é amplamente utilizado nos trabalhos de Vuong et al. [113], Iusem et al. [55], Iusem e Sosa [56], Tang e Wang [108], Iusem e Nasri [53], Santos e Scheimberg [103], Konnov [68], Mashreghi e Nasri [80], Hung e Muu [51], Anh e Kim [1], Oliveira et al. [61], Da Cruz Neto et al. [35], Nguyen et al. [89] e Noor [93].*

**Observação 3.2.2** *Alguns trabalhos utilizando uma bifunção monótona, para resolver o problema do equilibrio são, Briceño-Arias [20], Bello Cruz et al. [10], Moudafi [81] e Eslamian [39] e, finalmente, observar que o trabalho de Muu e Quoc utilizan $f$ fortemente monotona como condição para resolver o problema. (3.1).*

**Proposição 3.2.1** *Sob as hipóteses* **H2**, **H3'**, **H4** *e* **H5'** *com $(d, H) \in \mathcal{F}(\bar{C})$, e para todos $x^* \in S(f, \bar{C})$ temos*

$$H(x^*, x^k) \leq H(x^*, x^{k-1}) + \frac{1}{\lambda_k} \left\langle e^k, x^k - x^* \right\rangle. \tag{3.18}$$

**Prova.** Dado $x^* \in S(f, \bar{C})$ então $f(x^*, w) \geq 0, \forall w \in C$. Consideremos agora $w = x^k$ e como $f$ é pseudomonotona obtemos

$$f(x^k, x^*) \leq 0.$$

Imitando a prova da proposição 3.1.1 nós temos (3.18). ■

**Proposição 3.2.2** *Seja $(d, H) \in \mathcal{F}(\bar{C})$, e suponha que as hipóteses* **H2**, **H3'**, **H4**, *and* **H5'** *são satisfeitas. Se as seguintes condições adicionais são satisfeitas:*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left\| e^k \right\|}{\lambda_k} < +\infty \tag{3.19}$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\left| \langle e^k, x^k \rangle \right|}{\lambda_k} < +\infty \tag{3.20}$$

*então*

**a).** $\{x^k\}$ *é* $H$*-quasi-Fejér convergente para o conjunto* $S(f,\bar{C})$, *e*

$$H\left(x^*,x^k\right) \leq H\left(x^*,x^{k-1}\right) + \epsilon^k,$$

*para cada* $k \in I\!N$ *e todo* $x^* \in S(f,\bar{C})$, *onde* $\epsilon^k = \frac{1}{\lambda_k}\left(\|e^k\|\|x^*\| + |\langle e^k, x^k\rangle|\right)$ *com* $\sum_{k=1}^{+\infty} \epsilon^k < +\infty$.

**b).** $\{H(x^*,x^k)\}$ *converge para todo* $x^* \in S(f,\bar{C})$.

**c).** $\{x^k\}$ *é limitado.*

**Prova.** É semelhante à Proposição 4.2, mas considerando $S(f,\bar{C})$ em vez de $S^*(f,\bar{C})$.

**Proposição 3.2.3** *Seja* $(d,H) \in \mathcal{F}\ (\bar{C})$, *e suponha que as hipóteses* **H2**, **H3'**, **H4** *e* **H5'** *são satisfeitos. Se apenas a condição* (3.19) *está satisfeita e suponha que a distância proximal induzida* $H(.,.)$ *satisfaz a seguinte propriedade adicional:*

**(Iix)** *Para cada* $x \in \bar{C}$ *existem* $\alpha(x) > 0$ *e* $c(x) > 0$ *tal que:*

$$H(x,v) + c(x) \geq \alpha(x)||x-v||, \forall v \in C;$$

*então*

**a.** *Para todo* $x^* \in S(f,\bar{C})$, *temos*

$$H(x^*,x^k) \leq \left(1 + 2\frac{\|e^k\|}{\lambda_k \alpha(x^*)}\right) H(x^*,x^{k-1}) + 2\frac{\|e^k\|\, c(x^*)}{\lambda_k \alpha(x^*)},$$

*para* $k$ *suficientemente grande e, portanto,* $\{H(x^*,x^k)\}$ *converge.*

**b.** $\{x^k\}$ *é limitada.*

**Prova.** É semelhante à Proposição 4.3. ■

O seguinte resultado é motivado pelo Teorema 9 de Langenberg e Tichatschke [70].

**Teorema 3.2.1** *Suponha que as hipóteses* **H1**, **H2**, **H3'**, **H4** *e* **H5'** *são satisfeitas. Se* $(d,H) \in \mathcal{F}_+(\bar{C})$, $0 < \lambda_k < \bar{\lambda}$, *para algum* $\bar{\lambda} > 0$, *e uma das seguintes condições é satisfeita:*

*i). As condições* (3.19)-(3.20) *são satisfeitas.*

*ii).* $(d, H)$ *satisfaz* **(Iix)** *e apenas a condição* (3.19) *é satisfeita.*

*Então,* $\{x^k\}$ *converge para um ponto de* $S(f, \bar{C})$.

**Prova.** Desde que a Proposição 3.2.2 (para a condição de $i$)) e Proposição 3.2.3 (para a condição $ii$)) garantem que $\{x^k\}$ é limitada, seja $x^*$ um ponto de acumulação de $\{x^k\}$ e $\{x^{k_j}\}$ uma subsequência que converge para $x^*$. Defina $L := \{k_1, k_2, ..., k_j, ...\}$, em seguida, obtém-se $\{x^l\}_{l\in L} \to x^*$. De (3.3) e $u^l \in \partial_2 f(x^l, x^l)$ temos

$$f(x^l, x) \geq \left\langle u^l, x - x^l \right\rangle = \left\langle e^l, x - x^l \right\rangle - \lambda_l \left\langle \nabla_1 d(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle, \tag{3.21}$$

para todo $l \in L$ e para cada $x \in \bar{C}$. Em vista de (3.19) e que $\{\lambda_l\}$ é limitada superiormente, temos que $||e^l|| \to 0$. Então, como $\{x^l\}$ é limitada, obtém-se $\left\langle e^l, x - x^l \right\rangle \to 0$. Assim, é apenas necessário analisar a convergência da sequência

$$-\lambda_l \left\langle \nabla_1 d(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle.$$

De Definição 2.2.2 (**Iii**), temos

$$-\lambda_l \left\langle \nabla_1 d(x^l, x^{l-1}), x - x^l \right\rangle \geq \lambda_l \left[ H(x, x^l) - H(x, x^{l-1}) \right].$$

Fixando $x \in \bar{C}$, analisamos dois casos:
Se $\{H(x, x^l)\}$ converge, então

$$\lambda_l \left[ H(x, x^l) - H(x, x^{l-1}) \right] \to 0,$$

desde que $\{\lambda_l\}$ seja limitada, e a partir de (3.21) e assumindo **H1**,

$$f(x^*, x) \geq \limsup_{l\to\infty} f(x^l, x) \geq 0.$$

Se $\{H(x, x^l)\}$ não é convergente, a sequência não é monotonamente decrescente e por isso existem infinitos $l \in L$ tal que

$$H(x, x^l) \geq H(x, x^{l-1}).$$

Seja $\{l_j\} \subset L$ tal que $H(x, x^{l_j}) \geq H(x, x^{l_j - 1})$, para todo $j \in I\!N$, utilizando **H1**, temos

$$f(x^*, x) \geq \limsup_{j\to\infty} f(u^{l_j}, x) \geq \limsup_{j\to\infty} \lambda_{l_j} \left[ H(x, x^{l_j}) - H(x, x^{l_j - 1}) \right] \geq 0,$$

assim,

$$f(x^*, x) \geq 0,$$

o que implica que $x^* \in S(f,\bar{C})$. Se a condição $i)$ é satisfeita e, então (3.20) é verdadeiro e usando a Proposição 3.2.2, **a)** e Proposição 2.2.2, temos que $\{x^k\}$ converge para $x^*$.
Agora, se a condição $ii)$ é satisfeita, então $(d,H)$ cumpre a condição **(Iix)**. Seja $\bar{x}$ um outro ponto de acumulação de $\{x^k\}$ onde $x^{k_l} \to \bar{x}$, então $\bar{x} \in S(f,\bar{C})$, e da Definição 2.2.2 (**Ivii**), $H(\bar{x},x^{k_l}) \to 0$. Como $H(\bar{x},x^k)$ é convergente, veja Proposição 3.2.3, **a**, e a sequência $H(\bar{x},x^{k_l})$ converge para zero, obtemos que $H(\bar{x},x^{k_j}) \to 0$. Da Definição 2.2.2, (**Ivi**), obtemos que $x^{k_j} \to \bar{x}$ e, devido à unicidade do limite temos

$$x^* = \bar{x}.$$

Assim, $\{x^k\}$ converge para $x^*$. ∎

**Teorema 3.2.2** *Suponha que as hipóteses* **H1**, **H2**, **H3'**, **H4** *e* **H5'** *são satisfeitas. Se* $(d,H) \in \mathcal{F}_+(\bar{C})$ *satisfazendo a condição* (**Iviii**) *em vez de* (**Ivii**), $0 < \lambda_k < \bar{\lambda}$, *para algun* $\bar{\lambda} > 0$, *e uma das seguintes condições é satisfeita:*

*i. as condições* (3.19)-(3.20) *são satisfeitas;*

*ii* $(d,H)$ *satisfaz* **(Iix)** *e a condição* (3.19) *é satisfeita*

*então,* $\left\{x^k\right\}$ *converge para um ponto de* $S(f,\bar{C})$.

**Prova.** *i.* Se as condições (3.19)-(3.20) são satisfeitas, em seguida, a partir da Proposição 3.2.2, **a)**, $\{x^k\}$ é $H$-quasi-Fejérconverge para $S(f,\bar{C})$. Como qualquer ponto de acumulação de $\{x^k\}$ pertence a $S(f,\bar{C})$, ver a primeira parte da prova do Teorema 3.2.1, em seguida, usando a Proposição 2.2.3 obtém-se o resultado.
*ii.* Da Proposition 3.2.3, **b**, $\{x^k\}$ é limitada, imitando a prova do Teorema 3.2.1 qualquer ponto de acumulação pertence a $S(f,\bar{C})$. Seja $\bar{x}$ e $x^*$ dois pontos de acumulação de $\{x^k\}$ com $x^{k_j} \to \bar{x}$ e $x^{k_l} \to x^*$, como $\bar{x}, x^* \in S(f,\bar{C})$, de a Proposição 3.2.3, **a**, ambos $\{H(\bar{x},x^k)\}$ e $\{H(x^*,x^k)\}$ convergem. Nós analisamos as três possibilidades.
Se $x^*$ e $\bar{x}$ pertencem a $bd(C)$ e suponha que $\bar{x} \neq x^*$, em seguida, a partir da suposição (**Iviii**), $H(x^*,x^{k_j}) \to +\infty$, que contradizem a convergência de $\{H(x^*,x^k)\}$, então temos $\bar{x} = x^*$.
Se $x^*$ e $\bar{x}$ pertencem a $C$, a partir de continuidade $H(.,,)$ em $C$ tem-se $H(x^*,x^{k_l}) \to 0$. Como $\{H(x^*,x^k)\}$ converge, em seguida $H(x^*,x^{k_j}) \to 0$. Usando a condição (**Ivi**) temos $x^{k_j} \to x^*$, assim $\bar{x} = x^*$.
Sem perda de generalidade podemos supor que $x^* \in C$ e $\bar{x} \in bd(C)$. Então, usando o mesmo argumento que o último caso, temos que $\bar{x} = x^*$, que é uma contradição, portanto, neste caso, também não é possível.. ∎

# Capítulo 4

# Resultados Numéricos

Nesta seção, vamos mostrar uma implementação do nosso algoritmo.
Antes de mostrar os resultados numéricos, damos algumas características do computador e software utilizados respectivamente: Windows, versão 7, Matlab R2010a, Para resolver os subproblemas gerados pela distância regularizada, usaremos $fmincon$, que é uma função da toolbox de otimização do Matlab.

A função a seguir foi estudado por Nguyen et al. [89], eles usan a norma euclidiana para resolver o problema de regularização, nós usaremos a distância proximal.

Seja $f : K \times K \to I\!R$ definida como segue

$$f(x, y) = (Px + Qy + q)^T(y - x), \tag{4.1}$$

supomos que as matrizes $P$ e $Q$ são escolhidas de tal forma que $Q$ é simetrica semidefinida positiva e $Q - P$ é semidefinida negativa, onde $P$ e $Q$ são matrizes $n \times n$, $q \in I\!R^n$, $K \subset I\!R^n$, $K = I\!R^n_{++}$. Assim, $f$ possui as seguintes propriedades:

$f$ é monótona

$$f(x, y) + f(y, x) = \langle Px + Qy + q, y - x\rangle + \langle Py + Qx + q, x - y\rangle,$$

assim, desde $P - Q$ seja semidefinida negativa, temos que

$$f(x, y) + f(y, x) = \langle (Q - P)(y - x), y - x\rangle \leq 0,$$

para cada $x, y \in K$. Note que $f(x,.)$ é diferenciável (assím $f(x,.)$ é semicontínua superior) e convexa,

$$\partial_y f(x,x) = \nabla_y f(x,x) = (P + 2Q)x + q.$$

Agora, considere as seguintes matrizes

$$P = \begin{pmatrix} 3.1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1.6 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1.6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$q = \begin{pmatrix} 1, & -2, & -1, & 2, & -1 \end{pmatrix}^T$$

$$x^0 = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 1, & 1, & 2 \end{pmatrix}^T,$$

$\lambda_k = 0.05$, $\epsilon = 10^{-3}$. Também considere a seguinte distância proximal:

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{5} (x_i log \frac{x_i}{y_i} + y_i - x_i).$$

A seguir, apresentamos no quadro os resultados obtidos com o nosso algoritmo proposto.

Tabela 4.1: Tempo (seg.)

| Algoritmo | AI | IPE | IPLE |
|---|---|---|---|
| Iteração | 8 | 19 | 1305 |
| Tempo | 1.6117 | 1.078 | 26.89 |

AI é nosso algoritmo proposto, IPE é o Interior Proximal Extragradient Algorithm, ver Nguyen et al. [89] e IPLE é o Interior Proximal Linesearch Extragradient Algorithm, ver Nguyen et al. [89].

Tabela 4.2: Iteração

| k | y | $\|x^k - x^{k-1}\|$ |
|---|---|---|
| 1 | (0.0108, 0.0256, 0.0196, 0.0196, 0.0247) | 3.9560 |
| 2 | (0.0058, 0.0126, 0.0099, 0.0099, 0.0124) | 0.0231 |
| 3 | (0.0040, 0.0083, 0.0066, 0.0066, 0.0083) | 0.0078 |
| 4 | (0.0031, 0.0062, 0.0050, 0.0050, 0.0062) | 0.0039 |
| 5 | (0.0025, 0.0049, 0.0040, 0.0040, 0.0050) | 0.0023 |
| 6 | (0.0022, 0.0041, 0.0033, 0.0033, 0.0042) | 0.0016 |
| 7 | (0.0019, 0.0035, 0.0028, 0.0028, 0.0036) | 0.0011 |
| 8 | (0.0017, 0.0030, 0.0025. 0.0025, 0.0031) | 8.3365e-004 |

Nesta tabela, podemos ver que as iterações obtidas pelo nosso algoritmo, também mostrado na tabela, o erro em cada iteração está a diminuir.

A função a seguir é estudado por Bianchi e Schaible [14], Seja $f : \mathbb{R}_{++} \times \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}$ definida como segue

$$f(x, y) = y^2(y - x), \tag{4.2}$$

Assim, $f$ possui as seguintes propriedades:

$f$ é quase-monótono, note que $f(x, .)$ é diferenciável (assím $f(x, .)$ é semicontínua superior)

$$x^0 = 10,$$

$\lambda_k = 0.05$, $\epsilon = 10^{-3}$. Também considere a seguinte distância proximal:

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{5}(x_i log\frac{x_i}{y_i} + y_i - x_i).$$

A seguir, apresentamos no quadro os resultados obtidos com o nosso algoritmo proposto.

Tabela 4.3: Iteração

| k | y | $\|x^k - x^{k-1}\|$ |
|---|---|---|
| 1 | 6.6679 | 3.3321 |
| 2 | 4.4472 | 2.2208 |
| 3 | 2.9676 | 1.4796 |
| 4 | 1.9826 | 0.9850 |
| ... | ... | ... |
| 32 | 0.0386 | 0.0012 |
| 33 | 0.0375 | 0.0011 |
| 34 | 0.0364 | 0.0011 |
| 35 | 0.0355 | 8.4615e-004 |

Nesta tabela, podemos ver que as iterações obtidas pelo nosso algoritmo, também mostrado na tabela, o erro em cada iteração está a diminuir.

# Capítulo 5

# Conclusões e Trabalhos Futuros

T1. Podemos concluir que esta dissertação mostra um progresso na resolução e estudo dos problemas de equilíbrio para o caso quase-monótono. Também pode-se concluir que a técnica desenvolvida neste trabalho para tratar com bifunções quase-monótonas estendido em outros algoritmos.

T2. Tomando em consideração as aplicações de algoritmos de ponto proximal no espaço de variedades Riemmanianas para resolver problemas de minimização, ver Ferreira e Oliveira [42], Bento et al. [11] e Da Cruz Neto et al. [36], um trabalho futuro seria então propor um algoritmo inexato de ponto proximal para resolver o problema de equilíbrio no âmbito das variedades Riemmanianas.

T3. No artigo de Oliveira et al. [61], se apresenta a regularização do tipo Tikhonov para resolver (3.1), dada por $f_\lambda : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$,

$$f_\lambda(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y), \tag{5.1}$$

onde $f : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$ é monótona, $g : \bar{C} \times \bar{C} \to I\!R$ é fortemente monótona e $\lambda > 0$.

Por outro lado, no artigo de Chadli et al. [26], os autores apresentam a seguinte regularização. Para $\xi > 0$, $\varphi_\xi$ definido em $K \times K$ dependendo de $\xi$, encontrar $x_\xi \in K$ ($K$ não vazio, conjunto convexo e fechado)

$$f(x_\xi, y) + \varphi_\xi(x_\xi, y) \geq 0, \forall y \in K, \tag{5.2}$$

onde $f : K \times K \to I\!R$ e $\varphi_\xi : K \times K \to I\!R$ são pseudo-monótonas. Em seguida um trabalho futuro seria comparar computacionalmente a nossa regularização proposta em (3.3) com as regularizações (5.1) e (5.2), para saber qual das atualizações é mais eficiente computacionalmente.

T4. Um trabalho futuro seria estudar o artigo de Shafer [110], com o objectivo de propor novas propriedades para bifunções quase-monótonas e depois encontrar novas aplicações em teoria económica.

# Referências Bibliográficas


[1] Anh PN, Kim JK. “ Outer approximation algorithms for pseudomonotone equilibrium problems”. Computers and Mathematics with Applications, vol. 61, pp. 2588-2595, 2011.

[2] Anh PN. “A hybrid extragradient method extended to fixed point problems and equilibrium problems”. Optimization, vol. 62, pp. 271-283, 2013.

[3] Ansari QH, Flores-Bazán F. “ Generalized vector quasi-equilibrium problems with applications”. J. Math. Anal. Appl., vol. 277, pp. 246-256, 2003.

[4] Alleche B. “Semicontinuity of bifunctions and applications to regularized methods for equilibrium problems”. Afr. Mat., vol. 26, pp. 1637-1649, 2015.

[5] Aoyama K, Kimura Y, Takahashi W. “Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems”. Journal of Convex Analysis, vol. 15, pp. 395-409, 2008.

[6] Auslender A, Teboulle M, Ben-Tiba S. “A logarithmic-quadratic proximal method for variational inequalities”. Computational Optimization and Applications, vol. 12, pp. 31-40, 1999.

[7] Auslender A, Teboulle M, Ben-Tiba S. “Interior proximal and multiplier methods based on second order homogeneous kernels”. Mathematics of Operations Research, vol. 24, pp. 645-668, 1999.

[8] Auslender A, Teboulle M. “Interior gradient and proximal methods for convex and conic optimization”. SIAM Journal of Optimization, vol. 16, pp. 697-725, 2006.

[9] Balaj M. “A common fixed point theorem with applications to vector equilibrium problems”. Applied Mathematics Letters, vol. 23, pp. 241-245, 2010.

[10] Bello Cruz JY, Santos PSM, Scheimberg S. “A two-phase algorithm for a variational inequality formulation of equilibrium problems”. J. Optim. Theory Appl., vol. 159, pp. 562-575, 2013.

[11] Bento GC, Da Cruz Neto JX, Oliveira PR. "A new approach to the proximal point method: convergence on general Riemannian manifolds". J. Optim. Theory Appl., vol. 168, pp. 743-755, 2016.

[12] Blum E, Oettli W. "From optimization and variational inequalities to equilibrium problems", Math. Student, vol. 63, pp. 123-145, 1994.

[13] Bianchi M, Hadjisavvas N, Schaible S. "Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions". J. Optim. Theory Appl., vol. 92, pp. 527-542, 1997.

[14] Bianchi M, Schaible S. "Generalized monotone bifunctions and equilibrium problems". Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 90, pp. 31-43, 1996.

[15] Bianchi M, Pini R. "Coercivity conditions for equilibrium problems". Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 124, pp. 79-92, 2005.

[16] Bianchi M, Kassay G, Pini R. "Exitence of equilibria via Ekeland's principle". J. Math. Anal. Appl., vol. 305, pp. 502-512, 2005.

[17] Burachik RS, Iusem AN, Svaiter BF. "Enlargement of monotone operators with applications to variational inequalities". Set-Valued Analysis, vol. 5, pp. 159-180, 1997.

[18] Burachik R, Kassay G. "On a generalized proximal point method for solving equilibrium problems in Banach spaces". Nonlinear Analysis, vol. 75, pp. 6456-6464, 2012.

[19] Bigi G, Castellani M, Pappalardo M, Passacantando M. "Existence and solution methods for equilibria". European Journal of Operational Research, vol. 227, pp. 1-11, 2013.

[20] Briceño-Arias LM. "A Douglas-Rachford splitting method for solving equilibrium problems". Nonlinear Analysis, vol. 75, pp. 6053-6059, 2012.

[21] Castellani M, Giuli M. "Pseudomonotone diagonal subdifferential operators". Journal of Convex Analysis, vol. 20, pp. 1-12, 2013.

[22] Castellani M, Giuli M. "Approximate solutions of quasiequilibrium problems in Banach spaces". J. Glob. Optim., vol. 64, pp. 615-620, 2016.

[23] Ceng LC, Mordukhovich BS, Yao JC. "Hybrid approximate proximal method with auxiliary variational inequality for vector optimization". J. Optim Theory Appl., vol. 146, pp. 267-303, 2010.

[24] Chadli O, Chbani Z, Riahi H. “Equilibrium problems with generalized monotone bifunction and applications to variational inequalities”. J. Optim Theory Appl., vol. 105, pp. 299-323, 2000.

[25] Chadli O, Chbani Z, Riahi H. “Equilibrium problems and noncoercive variational inequalities”. Optimization, vol. 50, pp. 17-27, 2001.

[26] Chadli O, Schaible S, Yao JC. “Regularized equilibrium problems with applications to noncoercive hemivariational inequalities”. J. Optim Theory Appl., vol. 121, pp. 571-596, 2004.

[27] Chadli O, Lahmdani A, Yao JC. “Existence results for equilibrium problems with applications to evolution equations”. Applicable Analysis, vol. 94, pp. 1709-1737, 2015.

[28] Castellani M, Giuli M. “Pseudomonotone diagonal subdifferential operators”. Journal of Convex Analysis, vol. 20, pp. 1-12, 2013.

[29] Castellani M, Giuli M. “ On Equivalent equilibrium problems”. J Optim Theory Appl., vol. 147, pp. 157-168, 2010.

[30] Chen G, Teboulle M. “ Convergence analysis of a proximal-like minimization algorithm using Bregman function”. SIAM, vol. 3, pp. 538-543, 1993.

[31] Chen JW, Wan Z, Cho YJ. “The existence of solutions and well-posedness for bilevel mixed equilibrium problems in Banach spaces”. Taiwanese Journal of Mathematics, vol. 17, pp. 725-748, 2013.

[32] Chuang CS, Lin LJ. “ Minimax theorems with Bregman distances in Banach spaces”. Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 37, pp. 51-64, 2016.

[33] Colao V, López G, Marino G, Martín-Márquez V. “Equilibrium problems in Hadamard manifolds”. J. Math. Anal. Appl., vol. 388, pp. 61-77, 2012.

[34] Da Cruz Neto JS, Lopes JO, Soares PA. “A minimization algorithm for equilibrium problems with polyhedral constraints”. Optimization, vol. 65, pp. 1061-1068, 2016.

[35] Da Cruz Neto JS, Santos PSM, Soares Jr PA. “ An extragradient method for equilibrium problems on Hadamard manifolds”. Optim Lett, pp. 1-10, 2015.

[36] Da Cruz Neto JS, Oliveira PR, Soares Jr PA, Soubeyran A. "Proximal Point Method on Finslerian Manifolds and the Effort-Accuracy trade-off ". J. Optim Theory Appl., vol. 162, pp. 873-891, 2014.

[37] Crouzeix JP, Ocaña Anaya E. "Maximality is nothing but continuity". Journal of Convex Analysis, vol. 17, pp. 521-534, 2010.

[38] Eckstein J. "Approximate iterations in Bregman-function-based proximal algorithms". Mathematical Programming, vol. 83.pp. 113-123, 1998.

[39] Eslamian M. "Convergence theorems for nonspreading mappings and nonexpansive multivalued mappings and equilibrium problems". Optim Lett, vol. 7, pp. 547-557, 2013.

[40] Fakhar M, Zafarani J. "Equilibrium problems in the quasimonotone case". Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 126, pp. 125-136, 2005.

[41] Farkas C, Molnár AE. "A generalized variational and its application to equilibrium problems". Optimization, vol. 156, pp. 213-231, 2013.

[42] Ferreira OP, Oliveira PR. "Proximal point algorithm on Riemannian manifolds". Optimization, vol. 51, pp. 257-270, 2002.

[43] Flores-Bazán F, Sosa W. "Existence of solutions for noncoercive pseudomonotone equilibrium problems". Preprint, 17, 1999.

[44] Flores-Bazán F. "Existence theorems for generalized noncoercive equilibrium problems: the quasi-convex case". SIAM J. Optim., vol. 11, pp. 675-690, 2000.

[45] Flores-Bazán F. "Existence theory for finite dimensional pseudomnonotone equilibrium problems". Acta. Appl. Math., vol. 77, pp. 249-297, 2003.

[46] Flores-Bazán F, Flores-Bazán F. "Vector equilibrium problems under asymptotic analysis". Journal of Global Optimization, vol. 26, pp. 141-166, 2003.

[47] Hadjisavvas N, Schaible S. "Quasimonotone variational inequalities in Banach spaces". J. Optim. Theory Appl., vol. 90, pp. 95-111, 1996.

[48] Hadjisavvas N, Schaible S. "Peudomonotone maps and the cutting plane property". J. Glob. Optim., vol. 43, pp. 565-575, 2009.

[49] Han D. "A new hybrid generalized proximal point algorithm for variational inequality problems". Journal of Global Optimization, vol. 26, pp. 125-140, 2003.

[50] Huebner E, Tichatschke R. "Relaxed proximal point algorithms for variational inequalities with multi-valued operators". Optimization Methods Software, vol. 23, pp. 847-877, 2008.

[51] Hung PG, Muu LD. "The Tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions". Nonlinear Analysis, vol. 74, pp. 6121-6129, 2011.

[52] Iusem AN, Pennanen T, Svaiter BF. "Inexact variants of the proximal point algorithm without monotonicity". SIAM J. Optim., vol. 13, pp. 1080-1097, 2003.

[53] Iusem AN, Nasri M. "Inexact proximal point methods for equilibrium problems in Banach spaces". Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 28, pp. 1279-1308, 2007.

[54] Iusem AN, Kassay G, Sosa W. "An existence result for equilibrium problems with some surjectivity consequences". Journal of Convex Analysis, vol. 16, pp. 807-826, 2009.

[55] Iusem AN, Sosa W. "A proximal point method for equilibrium problems in Hilbert spaces". Optimization, vol. 59, pp. 1259-1274, 2010.

[56] Iusem AN, Kassay G, Sosa W. "On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems". Math. Program., vol. 11, pp. 259-273, 2009.

[57] Iusem AN. "On the maximal monotonicity of diagonal subdifferential operators". Journal of Convex Analysis, vol. 18, pp. 489-503, 2011.

[58] Iusem AN, Svaiter BF. "On diagonal subdifferential operators in nonreflexive Banach spaces". Set-Valued Anal., vol. 20, pp. 1-14, 2012.

[59] Jafari S, Farajzadeh A, Moradi S. "Locally densely defined equilibrium problems". J Optim Theory Appl., vol. 170, pp. 804-817, 2016.

[60] Jouymandi Z, Moradlou F. "Extragradient and linesearch algorithms for solving equilibrium problems and fixed point problems in Banach spaces". Preprint, 2016.

[61] Oliveira PR, Santos PSM, Silva AN. "A Tikhonov-type regularization for equilibrium problems in Hilbert spaces". J. Math. Anal. Appl., vol. 401, pp. 336-342, 2013.

[62] Kaplan A, Tichatschke R. "On inexact generalized proximal methods with a weakened error tolerance criterion". Optimization, vol. 53, pp. 3-17, 2004.

[63] Kaplan A, Tichatschke R. "Interior proximal method for variational inequalities on nonpolyhedral sets". Discuss. Math. Diff. Inclusions Control Optim., vol. 30, pp. 51-59, 2007.

[64] Kaplan A, Tichatschke R. "Note on the paper: interior proximal method for variational inequalities on non-polyhedral sets". Discuss. Math. Diff. Inclusions Control Optim., vol. 30, pp. 51-59, 2010.

[65] Kassay G, Miholca M. "Existence results for vector equilibrium problems given by a sum of two functions". J. Glob. Optim., vol. 63, pp. 195-211, 2015.

[66] Khatibzadeh H, Mohebbi V, Ranjbar S. "Convergence analysis of the proximal point algorithm for pseudo-monotone equilibrium problems". Optimization Methods Software, vol. 30, pp. 1146-1163, 2015.

[67] Konnov IV, Schaible S. "Duality for equilibrium problems under generalized monotonicity". Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 104, pp. 395-408, 2000.

[68] Konnov IV. "Application of the proximal point method to nonmonotone equilibrium problems". Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 119, pp. 317-333, 2003.

[69] Konnov IV. "Regularized penalty method for general equilibrium problems in Banach spaces". Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 164, pp. 500-513, 2015.

[70] Langenberg N, Tichatschke R. "Interior proximal methods for quasiconvex optimization". J. Glob Optim., vol. 52, pp. 641-661, 2012.

[71] Langenberg N. "Interior proximal methods for equilibrium programming: part II". Optimization, vol. 62, pp. 1603-1625, 2013.

[72] Langenberg N. "Interior point methods for equilibrium problems". Comput Optim Appl., vol. 53, pp. 453-483, 2012.

[73] Lai-Jiu L. "On some generalized quasi-equilibrium problems". Journal of mathematical analysis and applications, vol. 224, pp. 167-181, 1998.

[74] László S, Viorel A. "Densely defined equilibrium problems". J. Optim. Theory Appl., vol. 166, pp. 52-75, 2015.

[75] López J. Papa Quiroz EA, "Construction of proximal distances over symmetric cones". (to appear in Optimization).

[76] Mallma Ramirez L, Papa Quiroz EA, Oliveira PR. "An inexact proximal method with proximal distances for quasimonotone equilibrium problems". Submitted paper, 2016.

[77] Martinet B."Régularisation d'inéquations variationnelles par approximations successives ". Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle, 4(Ser. R-3), pp. 154–158, 1970.

[78] Maugeri A, Raciti F. " On existence theorems for monotone and nonmonotone variational inequalities". Journal of Convex Analysis, vol. 16, pp. 899-911, 2009.

[79] Mashreghi J, Nasri M. "Strong convergence of an inexact proximal point algorithm for equilibrium problems in Banach spaces". Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 31, pp. 1053-1071, 2010.

[80] Mashreghi J, Nasri M. "Strong convergence of an inexact proximal point algorithm for equilibrium problems in Banach spaces". Numerical Functional Analysis and Opimization, vol. 31, pp. 1053-1071, 2010.

[81] Moudafi A. "Second-order differential proximal methods for equilibrium problems". Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, vol. 4, art. 18, 2003.

[82] Moudafi A."On finite and strong convergence of a proximal method for equilibrium problems". Numerical Functional Analysis and Optimization, vol. 28, pp. 1347-1354, 2007.

[83] Moudafi A. "On the convergence of splitting proximal methods for equilibrium problems in Hilbert spaces". J. Math. Anal. Appl., vol. 359, pp. 508-513, 2009.

[84] Mohammad HA, Hadjisavvas N. "Local boundedness of monotone bifunctions". J. Glob. Optim., vol. 53, pp. 231-241, 2012.

[85] Muu LD, Quy NV. "On existence and solution methods for strongly pseudomonotone equilibrium problems"., Vietnam J. Math., vol. 43, pp. 229-238, 2015.

[86] Muu LD, Quoc TD. "Regularization algorithms for solving monotone Ky Fan inequalities with application to a Nash-Cournot equilibrium model". J. Optim Theory Appl., vol. 142, pp. 185-204, 2009.

[87] Nash J. “Non-Cooperative games”. The Annals of Mathematics, Second Series, vol. 54, pp. 286-295, 1951.

[88] Nasri M, Sosa W. “Equilibrium problems and generalized Nash games”. Optimization, vol. 60, pp. 1161-1170, 2011.

[89] Nguyen TTV, Strodiot JJ, Nguyen VH. “The interior proximal extragradient method for solving equilibrium problems”. J. Glob. Optim., vol. 44, pp. 175-192, 2009.

[90] Nguyen TTV, Strodiot JJ, Nguyen VH. “A bundle method for solving equilibrium problems”. Math. Program., vol. 116, pp. 529-552, 2009.

[91] Nguyen TTV, Strodiot JJ, Nguyen VH. “Hybrid methods for solving simultaneously an equilibrium problem and countably many fixed point problems in a hilbert space”. J. Optim. Theory Appl, vol. 160, pp. 809-831, 2014.

[92] Noor MA, Oettli W. “On general nonlinear complementarity problems and quasi-equilibria”. LE MATEMATICHE, vol. XLIX, pp. 313-331, 1994.

[93] Noor MA. “Auxiliary principle technique for equilibrium problems”. Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 122, pp. 371-386, 2004.

[94] Papa Quiroz EA, Oliveira PR. “An extension of proximal methods for quasiconvex minimization on the nonnegative orthant”. European Journal of Operational Research, vol. 216, pp. 26-32, 2012.

[95] Papa Quiroz EA, Mallma Ramirez L, Oliveira PR. “An inexact proximal method for quasiconvex minimization”. European Journal of Operational Research vol. 246, pp. 721-729, 2015.

[96] Papa Quiroz EA, Mallma Ramirez L, Oliveira PR. “An inexact algorithm with proximal distances for variational inequalities”. Submitted paper, 2015.

[97] Polyak BT. “Introduction to Optimization”, Optimization Software, New York. 1987.

[98] Quoc TD, Muu LD. “Regularization algorithms for solving monotone Ky Fan inequalities with application to a Nash-Cournot equilibrium model”. J. Optim Theory Appl., vol. 142, pp. 185-204, 2009.

[99] Quoc TD, Muu LD. “Iterative methods for solving monotone equilibrium problems via dual gap functions”. Comput Optim Appl., vol. 51, pp. 709-728, 2012.

[100] Reinhard J. “The concave nontransitive consumer”. Journal of Global Optimization, vol. 20, pp. 297-308, 2001.

[101] Resmerita E. “ On total convexity, Bregman projections and stability in Banach spaces”. Journal of Convex Analysis, vol. 11, pp. 1-16, 2004.

[102] Rockafellar RT. “Monotone operators and the proximal point algorithm”. SIAM Journal of Control and Optimization, vol. 14, pp. 877-898, 1976.

[103] Santos PSM, Scheimberg S. “An inexact subgradient algorithm for equilibrium problems”. Computational Applied Mathematics, vol. 30, pp. 91-107, 2011.

[104] Santos PSM, Scheimberg S. “A modified projection algorithm for constrained equilibrium problems”. Optimization, 2016.

[105] Scheimberg S, Santos PSM. “A relaxed projection method for finite-dimensional equilibrium problems”. Optimization, vol. 60, pp. 1193-1208, 2011.

[106] Solodov MV, Svaiter BF. “An inexact hybrid generalized proximal point algorithm and some new results on the theory of Bregman functions”. Mathematics of Operations Research, vol. 25, pp. 214-230, 2000.

[107] Strodiot JJ, Vuong PT, Nguyen TTV. “A class of shrinking projection extragradient methods for solving non-monotone equilibrium problems in Hilbert spaces”. J. Glob. Optim., vol. 64, pp. 159-178, 2016.

[108] Tang GJ, Wang X. “An inexact proximal point algorithm for nonmonotone equilibrium problems in Banach spaces”. Taiwanese Journal of Mathematics, vol. 17, pp. 2117-2133, 2013.

[109] Teboulle M. “Convergence of proximal-like algorithms”. SIAM J. Optim., vol. 7, pp. 1069-1083, 1997.

[110] Shafer WJ. “ The nontransitive consumer”. Econometrica, vol. 42, pp. 913-919, 1974.

[111] Van HD. “Cyclic subgradient extragradient methods for equilibrium problems”. Arab. J. Math., vol. 5, pp. 159-175, 2016.

[112] Villacorta KDV, Oliveira PR. “An interior proximal method in vector optimization”. European Journal of Operational Research, vol. 214, pp. 485-492, 2011.

[113] Vuong PT, Strodiot JJ. "Projected viscosity subgradient methods for variational inequalities with equilibrium problem constraints in Hilbert spaces". J. Glob. Optim., vol. 59, pp. 173-190, 2014.

[114] Xu Y, Bingsheng H, Xiaoming Y. "A hybrid inexact logarithmic-quadratic proximal method for nonlinear complementarity problems". J. Math. Anal., vol. 322, pp. 276-287, 2006.