

André da Silva Ramos de Faria

*Movimento parabólico de projéteis e suas
características*

Rio de Janeiro – RJ

Dezembro / 2012



André da Silva Ramos de Faria

***Movimento parabólico de projéteis e suas
características***

Orientador:
Prof. Vitorvani Soares

INSTITUTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Rio de Janeiro – RJ
Dezembro / 2012

M732b Faria, André da Silva Ramos de
Movimento parabólico de projéteis e suas características /
André da Silva Ramos de Faria —
Rio de Janeiro: UFRJ/IF, 2012.
vii. 25 f.; il.; 30 cm.
Orientador: Vitorvani Soares.
Monografia de final de curso. Universidade Federal
Rio de Janeiro / Instituto de Física / 2012.
Referências bibliográficas: f. 25.
1. Ensino de Física. 2. Cinemática. 3. Movimento
parabólico.
I. Soares, Vitorvani. II. Universidade Federal do Rio de
Janeiro / Instituto de Física. III. Introdução à
Dinâmica. III. Ensino de Física.

Dedico este trabalho à minha avó Elzira da Silva Ramos, que não teve a oportunidade de me acompanhar diretamente nesta minha etapa mas está sempre presente em minhas lembranças.

Agradeço à Deus, à minha família e aos meus professores, em especial ao Prof. Vitorvani Soares, pela orientação deste trabalho, e aos membros da banca pela leitura e apreciação desta monografia.

[Gravity] was one of the first great laws to be discovered and it has an interesting history. You may say, 'Yes, but then it is old hat, I would like to hear something about a more modern science'. More recent perhaps, but not more modern. ... I do not feel at all bad about telling you about the Law of Gravitation because in describing its history and methods, the character of its discovery, its quality, I am being completely modern.

Messenger Lectures (1964); publicado em *The Character of Physical Law (1967)*. — R. FEYNMAN

Resumo

É muito comum encontrarmos em livros didáticos a representação do movimento de projéteis no vácuo por meio do movimento parabólico, onde a aceleração gravitacional à qual o projétil está submetido é considerada constante ao longo do movimento. Entretanto, as propriedades geométricas do problema é pouco comentadas e, em geral, somente a figura da trajetória parabólica do projétil é apresentada. Reunimos nesta monografia um material didático para também descrever este movimento sob esta representação e esperamos que este material possa auxiliar a discussão do movimento de projéteis através das suas propriedades geométricas. Apresentamos neste trabalho as propriedades características da trajetória parabólica que o projétil realiza, de acordo com as condições iniciais às quais ele está submetido, e mostramos também que podemos determinar a curva de segurança que envolve as possíveis trajetórias do projétil sem utilizarmos o cálculo diferencial de forma explícita.

Sumário

1	Introdução	p. 8
2	Um pouco de geometria	p. 10
3	O movimento parabólico do projétil	p. 12
3.1	A trajetória da partícula	p. 12
3.2	A família de possíveis trajetórias e o seu envelope	p. 18
	Considerações finais	p. 24
	Referências	p. 25

1 Introdução

É muito comum no currículo do Ensino Médio a descrição do movimento parabólico de uma partícula e a sua associação ao movimento de projéteis no vácuo, onde a aceleração gravitacional à qual o projétil está submetido é considerada constante ao longo do movimento. O movimento parabólico é uma das abordagens clássicas da Física Newtoniana, onde estão embutidos os conceitos de Movimento Retilíneo Uniforme (MRU) e Movimento Retilíneo Uniformemente Variável (MRUV), nas direções horizontal e vertical, respectivamente.

Observamos, entretanto, que na literatura atual quase nada é apresentado sobre o movimento de projéteis também explorando as suas características geométricas. Com este propósito, reunimos nesta monografia um material didático para descrever este movimento também sob este aspecto. Determinamos a forma parabólica da trajetória do projétil e mostramos também que a curva de segurança que envolve as possíveis trajetórias também é uma parábola, chamada de parábola de segurança, que pode ser determinada através das propriedades geométricas destas curvas.

Usamos como referências os livros de Chorlton (1965), McMillan (1958), Moulton (1984) Roy (2004) e Montenbruck (1989) e a monografia de final de Curso de Licenciatura de Gonçalves (2012) também nos serviu de orientação. Esperamos que o material apresentado neste trabalho sirva de apoio ao professor na organização dos conteúdos par a descrição do movimento de projéteis em um campo gravitacional constante.

Esperamos também que a metodologia aqui apresentada ajude o aluno a compreender que um mesmo movimento pode ser apresentado de formas diferentes. Esperamos ainda que o estudante desenvolva varias competências e habilidades neste estudo tais como, por exemplo, a formulação de hipóteses, o estabelecimento de relações de causa e efeito e a construção e interpretação de gráficos, conforme as sugestões dos Programas Curriculares Nacionais (PCNs) (BRASIL, 1996, 1998, 2000, 2002a, 2006, 2002b).

O presente trabalho está organizado da seguinte forma. No Capítulo 2 fazemos uma revisão dos conceitos geométricos envolvidos na construção da parábola e, no Capítulo 3, determinamos

o movimento parabólico e suas principais características na forma geométrica. Finalmente, no último capítulo apresentamos as nossas considerações finais e conclusões.

2 Um pouco de geometria

A parábola é a curva definida pelo conjunto de pontos do plano tais que a distância de cada um deles até um ponto determinado, o foco f , é igual à distância deste mesmo ponto a uma reta particular, denominada a reta diretriz da parábola. Na figura 1 definimos por f o foco ou ponto focal e por KL a diretriz da parábola. A linha fz é a linha dos apses, é perpendicular a KL , passa por f e define o eixo de simetria da parábola.

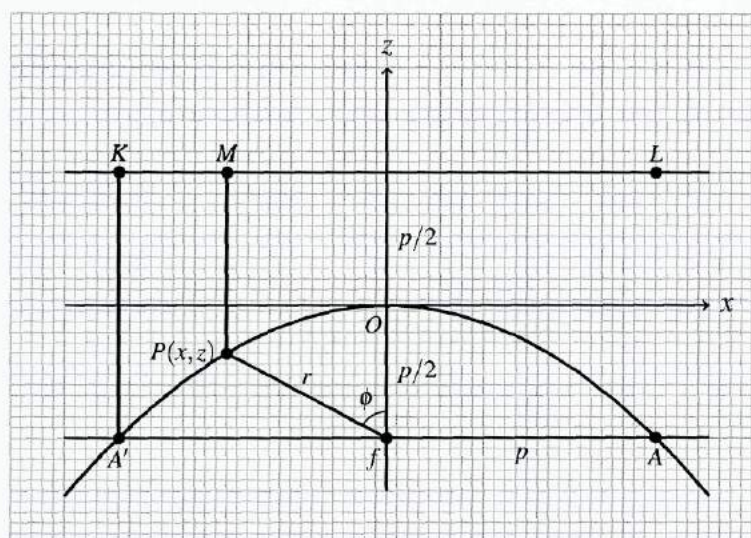


Figura 1: A parábola e suas características: o ponto focal f , o semilatus rectum $p = fA$, a sua diretriz KL e a relação $PM = fP$.

Se escolhermos um ponto P sobre a curva parabólica, os comprimentos fP e PM estão sempre relacionados pela expressão

$$\frac{fP}{PM} = 1, \quad (2.1)$$

Ao movermos o ponto P ao longo da curva parabólica, a sua trajetória — como representado na figura 1 pela curva $AOPA'$ —, obedece a equação (2.1), donde

$$z = -\frac{x^2}{2p}, \quad (2.2)$$

quando usamos um referencial em coordenadas cartesianas Ox e Oz e origem das coordenadas no vértice da curva, como indicado na mesma figura.

Observamos também que a corda AA' que passa pelo foco f e é perpendicular a linha dos apses fz é denominada *latus rectum*, da curva. Deste modo, o semi-latus rectum fA ($= fA'$) tem então comprimento $p = 2fO$.

Se adotarmos as coordenadas polares r e ϕ , onde r corresponde ao comprimento fP e ϕ corresponde ao ângulo OfP , com a origem na posição focal, a equação polar da curva é dada por

$$r = \frac{p}{1 + \cos \phi}. \quad (2.3)$$

As demonstrações dessas equações podem ser encontradas em qualquer livro sobre seções cônicas como, por exemplo, em Lockwood (2007).

3 *O movimento parabólico do projétil*

O movimento real de um projétil é influenciado por vários fatores tais como a resistência do meio em que ele se propaga, que exigem modificações dos resultados determinados pelas condições ideais representadas pelo movimento de um projétil movendo-se sem rotação no vácuo. Neste caso, representamos o projétil por uma partícula e o seu movimento é estudado considerando-se as componentes do movimento nas direções x e z como a seguir.

3.1 A trajetória da partícula

A partícula é lançada a partir da posição O com velocidade v_0 em uma direção que descreve um ângulo de elevação igual a θ_0 com a horizontal e a posição de lançamento é a origem das coordenadas, como representado na figura 2. A direção horizontal é definida por Ox e a direção vertical por Oz , o eixo das ordenadas passando por O .

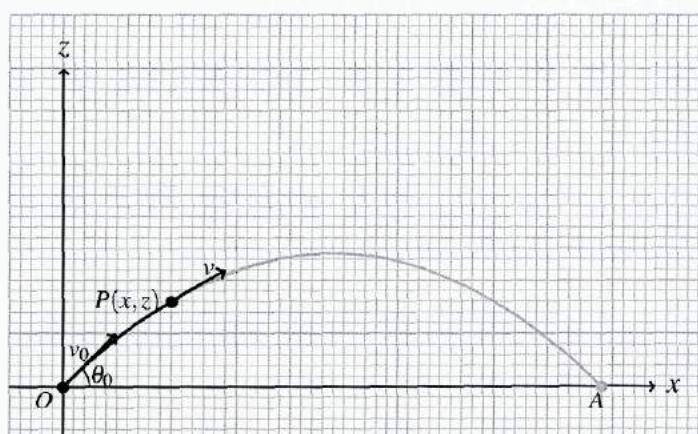


Figura 2: As condições iniciais do movimento onde v_0 é a velocidade inicial do projétil em uma direção que descreve um ângulo de elevação igual a θ_0 com a horizontal. Na posição $P(x, z)$ o projétil tem velocidade v e após o tempo de vôo t_v ele alcança a posição A .

A aceleração do projétil durante seu vôo é constante e está orientada verticalmente, de cima para baixo. Esta aceleração constante, representada por g , é a aceleração devida a gravidade

terrestre.

Assim, da segunda lei de Newton podemos determinar a aceleração e a velocidade da partícula:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t} = 0, \quad v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta_0, \quad (3.1)$$

e

$$a_z = \frac{v_z - v_{0z}}{t} = -g, \quad v_z = v_{0z} - gt = v_0 \sin \theta_0 - gt, \quad (3.2)$$

considerando v_{0x} e v_{0z} positivas quando dirigidas para cima.

A distância horizontal, x , percorrida em um dado intervalo de tempo t é

$$x = v_x t = (v_0 t) \cos \theta_0 \quad (3.3)$$

e a distância vertical, z , percorrida no mesmo intervalo de tempo t , é a velocidade média do percurso vezes o intervalo de tempo. Deste modo,

$$z = \frac{v_0 \sin \theta_0 + (v_0 \sin \theta_0 - gt)}{2} t = (v_0 t) \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2. \quad (3.4)$$

Estas equações são empregadas na determinação do alcance na direção horizontal, A , da altura máxima alcançada durante o vôo, h , e da duração do vôo, t_v , necessária para o projétil alcançar o solo.

Tempo de vôo.— Como a coordenada z é igual a zero quando o projétil alcança o eixo horizontal, o tempo de vôo t_v é determinado a partir da condição

$$\begin{aligned} z &= \frac{v_0 \sin \theta_0 + (v_0 \sin \theta_0 - g t_v)}{2} t_v \\ &= t_v \left(v_0 \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t_v \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Portanto, o tempo de vôo é determinado pela expressão

$$t_v = \frac{2v_0}{g} \sin \theta_0. \quad (3.6)$$

Alcance.— O alcance A corresponde a posição horizontal x quando $t = t_v$. Assim,

$$A = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (3.7)$$

Observamos também que o alcance A é dado por

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(v_0 \operatorname{sen} \theta_0)(v_0 \cos \theta_0)}{g} = \frac{2v_{z0}v_{x0}}{g} \\ &= \frac{v_{z0}^2 + v_{x0}^2 - (v_{z0} - v_{x0})^2}{g} \\ &= \frac{v_0^2 - (v_{z0} - v_{x0})^2}{g}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

A equação (3.8) nos mostra que se os valores das componentes da velocidade forem trocadas uma pela outra, o alcance não é alterado. Isto significa que o projétil realiza o mesmo alcance para dois ângulos complementares. Podemos então concluir que o maior alcance possível A_{\max} corresponde a

$$A_{\max} = \frac{v_0^2}{g}, \quad (3.9)$$

quando $v_{z0} = v_{x0}$. Neste caso, o maior alcance possível corresponde a

$$\tan \theta_0 = \frac{v_{z0}}{v_{x0}} = 1 \quad (3.10)$$

ou um ângulo de elevação $\theta_0 = \pi/4$.

Intervalo de tempo para alcançar a altura máxima.— Quando o projétil alcança a sua altura máxima, a componente vertical da sua velocidade é nula, e temos então que $v_z = 0$. Deste modo, o intervalo de tempo t_h necessário para o projétil alcançar esta posição é determinado a partir da equação

$$v_z = v_0 \operatorname{sen} \theta_0 - gt_h = 0. \quad (3.11)$$

Portanto, o intervalo de tempo para alcançar a altura máxima é

$$t_h = \frac{v_0}{g} \operatorname{sen} \theta_0 \quad (3.12)$$

Altura máxima.— A altura máxima $z = h$ corresponde à distância percorrida pelo projétil, na direção vertical, de duração igual a t_h . Assim, substituindo (3.12) em (3.4), obtemos

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \theta_0. \quad (3.13)$$

A equação (3.13) pode ser reescrita na forma

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \operatorname{sen}^2 \theta_0 = \frac{v_0^2 - v_{0x}^2}{2g} \quad (3.14)$$

e, deste modo, teremos a maior altura possível quando a componente horizontal da velocidade inicial do projétil for nula. De fato, como o $\operatorname{sen}^2 \theta_0$ varia entre 0 e 1, o maior valor da altura

máxima, $h_{\max} = H$, corresponde a

$$H = \frac{v_0^2}{2g}, \quad (3.15)$$

quando $\theta_0 = \pi/2$.

A trajetória do projétil.— A equação do caminho percorrido pelo projétil pode ser obtida eliminando-se t das equações (3.3) e (3.4) e, deste modo, obtemos

$$z = x \tan \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta_0} x^2. \quad (3.16)$$

A identidade trigonométrica

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta \quad (3.17)$$

permite reescrever a equação (3.16) na forma

$$z = x \tan \theta_0 - \frac{g}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \theta_0) x^2 \quad (3.18)$$

Lembrando que $H = v_0^2/(2g)$ e fazendo

$$a = \frac{1}{4H} (1 + \tan^2 \theta_0), \quad (3.19)$$

$$b = \tan \theta_0, \quad (3.20)$$

$$m = \frac{b^2}{4a}, \quad (3.21)$$

transformamos z da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} z &= -a \left(x^2 - \frac{b}{a} x \right) \\ &= -ax \left(x - \frac{b}{a} \right) \\ &= \frac{b^2}{4a} - a \left(x^2 - 2 \frac{b}{2a} x + \frac{b^2}{4a^2} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

e, finalmente, em

$$z = m - a \left(x - \frac{b}{2a} \right)^2. \quad (3.23)$$

O lado direito de (3.22) é nulo quando $x = 0$ ou

$$x = \frac{b}{a} = 8H \frac{\tan \theta_0}{1 + \tan^2 \theta_0} = \frac{2v_0^2}{g} \sin 2\theta_0. \quad (3.24)$$

Como a é sempre positivo, a segunda parcela do lado direito de (3.23) é sempre positiva e z terá um valor máximo $z = \bar{z} = m$ quando $x = \bar{x} = b/(2a)$. Portanto, o projétil alcança altura máxima

em

$$\bar{z} = \frac{b^2}{4a} = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta_0, \quad (3.25)$$

quando

$$\bar{x} = \frac{b}{2a} = 4H \frac{\tan \theta_0}{1 + \tan^2 \theta_0} = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\theta_0, \quad (3.26)$$

e tem altitude nula na origem de coordenadas e após percorrer o dobro da distância \bar{x} . Deste modo, a trajetória é uma parábola com seu eixo vertical e o seu vértice para cima. Estes resultados correspondem, respectivamente, aos resultados calculados anteriormente para a altura h e a metade do alcance A realizados pelo projétil.

Podemos representar as propriedades básicas da trajetória parabólica na figura 3.

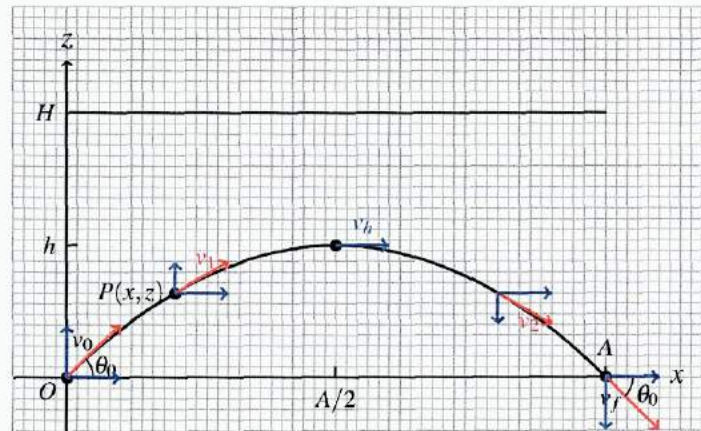


Figura 3: Algumas características básicas do movimento parabólico: o alcance A e a sua altura h . A velocidade se reduz durante o movimento mas a sua componente horizontal permanece a mesma ao longo da trajetória. Ao mudarmos a orientação do lançamento a altura alcançada varia entre zero e H .

Na figura 3 podemos observar a trajetória parabólica do projétil, o seu alcance A e a sua altura h . A velocidade do projétil se reduz durante sua ascensão, alcança o seu valor mínimo na altura máxima e volta a aumentar durante a queda. Entretanto, a sua componente horizontal permanece a mesma ao longo de todo o movimento. Ao mudarmos a orientação do lançamento a altura alcançada varia entre zero e H . Mais ainda, a velocidade do projétil ao tocar o solo corresponde a sua velocidade inicial e o ângulo formado entre a horizontal e a tangente á curva parabólica no instante em que o projétil intercepta a horizontal é igual ao ângulo de elevação.

O foco da parábola.— Após as substituições

$$X = x - 2H \sin \theta_0 \cos \theta_0 \quad (3.27)$$

$$Z = z - H \sin^2 \theta_0, \quad (3.28)$$

podemos descrever a equação da trajetória na forma

$$Z = -\frac{X^2}{4H \cos^2 \theta_0}, \quad (3.29)$$

que é a equação da parábola com o referencial no vértice da curva. Da discussão do Capítulo 2, a parábola é o lugar geométrico dos pontos em um plano cuja distância ao foco f é igual à distância deste mesmo ponto à diretriz da curva. O semilatus rectum p é, deste modo, igual ao dobro da distância do foco à diretriz. Quando $X = p$ temos $Z = -p/2$ e, assim, substituindo estes valores na equação (3.29) e resolvendo para p a equação obtida, obtemos o semilatus rectum p em função dos parâmetros iniciais do problema:

$$p = 2H \cos^2 \theta_0. \quad (3.30)$$

A distância do foco ao vértice é igual a $p/2$ e, neste caso, as suas coordenadas em relação à origem do lançamento do projétil são

$$x_f = H \operatorname{sen} 2\theta_0, \quad (3.31)$$

$$z_f = -H \cos 2\theta_0. \quad (3.32)$$

A diretriz se localiza a uma distância vertical igual a $p/2$ a partir do vértice da parábola. Portanto, a localização da diretriz é $z_d = v_0^2/(2g)$, como indicado na figura 4.

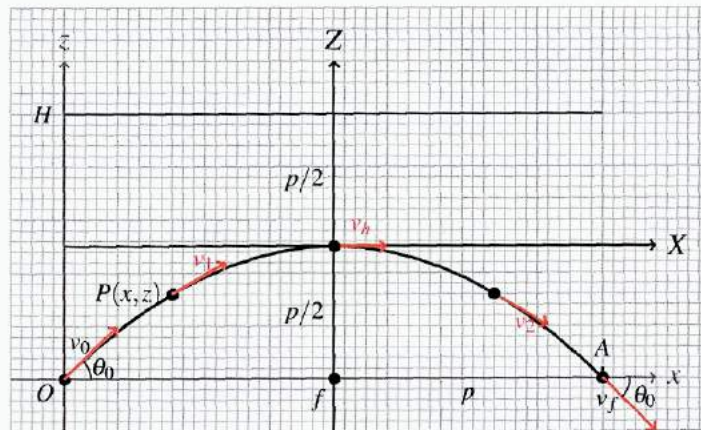


Figura 4: Algumas características básicas do movimento parabólico: Para um ângulo de elevação θ_0 igual a $\pi/4$, o alcance A e a sua altura h correspondem ao parâmetro p e a distância focal da parábola, respectivamente. A diretriz se localiza na altura máxima H em relação ao foco.

A equação energia.— Na posição P a velocidade v do projétil é dada por

$$v^2 = v_x^2 + v_z^2 = v_0^2 \cos^2 \theta_0 + (v_0 \sin \theta_0 - gt)^2 \quad (3.33)$$

$$= v_0^2 - 2(v_0 gt \sin \theta_0 + g^2 t^2) \quad (3.34)$$

$$= v_0^2 - 2gz. \quad (3.35)$$

Deste modo, multiplicando ambos os lados por $m/2$, podemos escrever que

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgz \quad (3.36)$$

$$= mg(H - z). \quad (3.37)$$

Assim, como podemos observar na figura 5, em qualquer posição P sobre a trajetória parabólica, a energia cinética da partícula, na altura z , é igual à energia cinética adquirida pelo projétil se ele, na posição x , caísse livremente sob a ação da gravidade de uma altura entre a diretriz e a posição P .

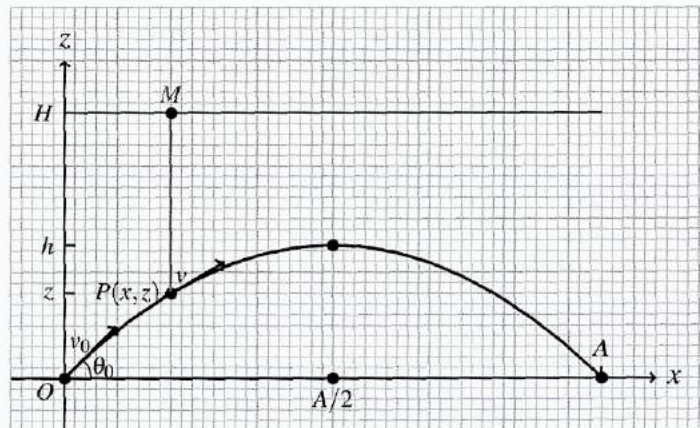


Figura 5: Características básicas do movimento parabólico: Em qualquer posição P sobre a trajetória parabólica, a energia cinética da partícula, na altura z , é igual à energia cinética adquirida pelo projétil se ele, na posição x , caísse livremente sob a ação da gravidade de uma altura entre a diretriz e a posição P .

3.2 A família de possíveis trajetórias e o seu envelope

Como vimos na seção anterior, a trajetória do projétil é uma curva contida no plano- xz e descrita por uma parábola (equação (3.18)). Portanto, atribuindo-se diferentes valores para o ângulo de lançamento inicial θ_0 , obtemos uma família de curvas, todas contidas no mesmo plano. Alguns exemplos da família de trajetórias estão representados na figura 6.

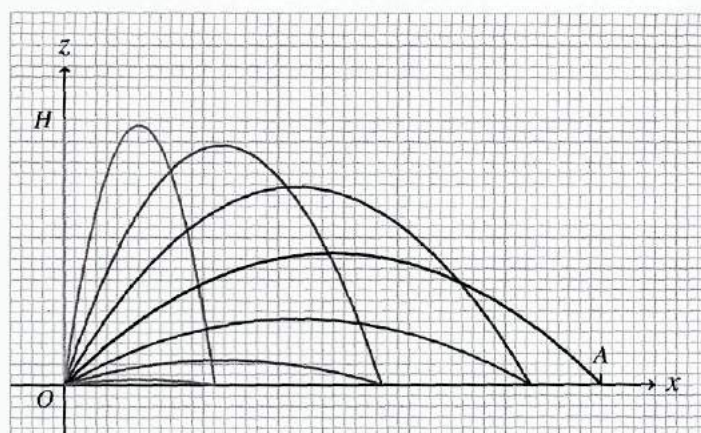


Figura 6: Família de curvas parabólicas para os respectivos ângulos de elevação $\theta_0 = \pi/2, 11\pi/24, 5\pi/12, \pi/3, \pi/4, \pi/6, \pi/12$ e $\pi/24$. Observe que o alcance é o mesmo para ângulos de elevação complementares. O maior alcance A corresponde à $\theta_0 = \pi/4$ e a maior altura corresponde ao lançamento vertical OH , quando $\theta_0 = \pi/2$.

Deste modo, podemos afirmar que a altura alcançada pelo projétil, z , é uma função das variáveis distância horizontal x , da velocidade inicial v_0 e do ângulo de lançamento θ_0 .

Uma elipse inesperada.— As equações (3.25) e (3.26) correspondem as coordenadas do vértice da parábola. Eliminando o ângulo de elevação θ_0 entre elas, obtemos a localização no plano das posições dos vértices para todos os ângulos de elevação permitidos.

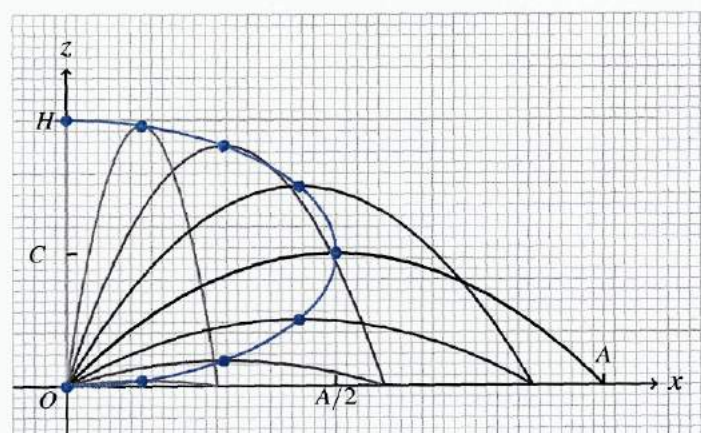


Figura 7: Família de curvas parabólicas para os respectivos ângulos de elevação $\theta_0 = \pi/2, 11\pi/24, 5\pi/12, \pi/3, \pi/4, \pi/6, \pi/12$ e $\pi/24$. Os vértices das parábolas formam uma elipse de eixo maior igual a A e eixo menor igual a H .

Esta equação é

$$\bar{x}^2 + (2\bar{z} - H)^2 = H^2, \quad (3.38)$$

e representa uma elipse que passa pela origem de coordenadas e pela altura H e tem o centro em $H/2$.

A curva de sincronia.— Se θ_0 é eliminado entre as duas equações (3.3) e (3.4), observamos que o projétil deve estar em um ponto da circunferência definida por

$$x^2 + \left(z + \frac{1}{2}gt^2\right)^2 = v_0^2 t^2. \quad (3.39)$$

Deste modo, se vários projeteis forem lançados simultaneamente a partir do mesmo ponto com a mesma velocidade mas com diferentes ângulos de elevação, os projeteis a cada instante definem um arco de circunferência de raio $v_0 t$.

A figura 8 representa a curva de sincronia formada pelo lançamento simultâneo de vários projéteis com a mesma velocidade inicial mas diferentes ângulos de elevação.

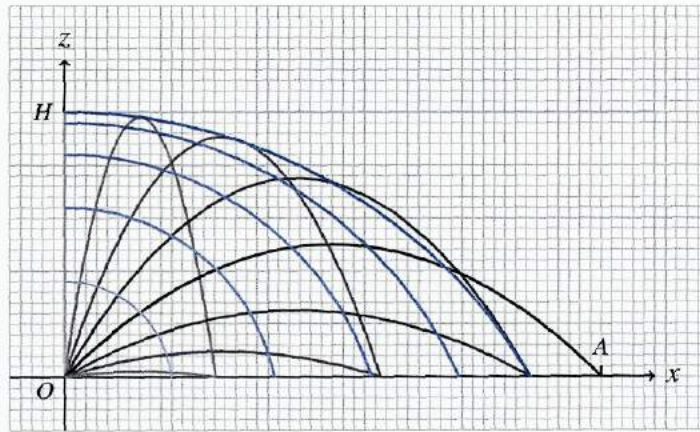


Figura 8: Família de curvas parabólicas para os respectivos ângulos de elevação $\theta_0 = \pi/2, 11\pi/24, 5\pi/12, \pi/3, \pi/4, \pi/6, \pi/12$ e $\pi/24$. As curvas azuis revelam a curva de sincronia entre os projéteis lançados com a mesma velocidade inicial v_0 mas com diferentes ângulos de elevação θ_0 . A interseção dos arcos de circunferência com as parábolas indicam a posição dos projeteis em um mesmo instante, para os instantes $t/\tau = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ e 1.0 , onde $\tau = \sqrt{2gH}$.

Um círculo inesperado.— As coordenadas do foco em relação à origem do lançamento do projétil são dadas pelas expressões (3.31) e (3.32) e, deste modo, os focos das diferentes trajetórias descrevem uma circunferência com a origem de coordenadas como centro e raio igual a H :

$$x_f^2 + z_f^2 = H^2. \quad (3.40)$$

A figura 9 representa a circunferência formada pelas posições dos focos das diferentes parábolas.

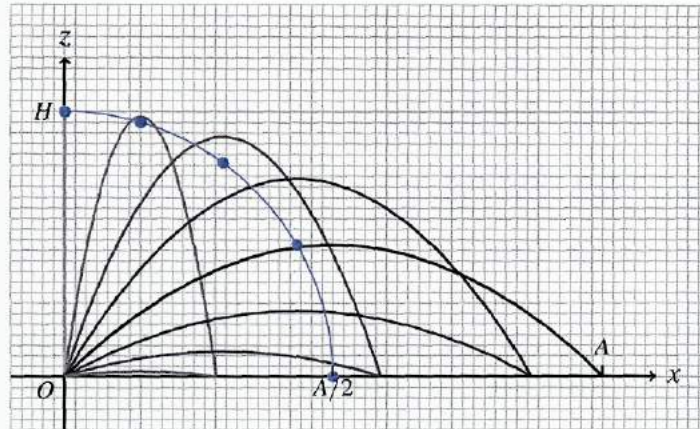


Figura 9: Família de curvas parabólicas para os respectivos ângulos de elevação $\theta_0 = \pi/2, 11\pi/24, 5\pi/12, \pi/3, \pi/4, \pi/6, \pi/12$ e $\pi/24$. Os círculos azuis representam os focos das diferentes parábolas e formam uma circunferência de raio igual a H .

O envelope das trajetórias.— Observamos, a partir das figuras, que existe uma região que não é alcançada pelo projétil. Isto significa que existe uma região de segurança que nenhum projétil que possua velocidade inicial v_0 poderá alcançar, não importando qual o ângulo de lançamento escolhido.

Vamos definir a fronteira da zona efetiva que os projéteis alcançam. Da figura 10, observamos que cada ponto da fronteira também deve ser um ponto de uma das trajetórias correspondente a um ângulo de elevação $0 < \theta_0 \leq \pi/2$.

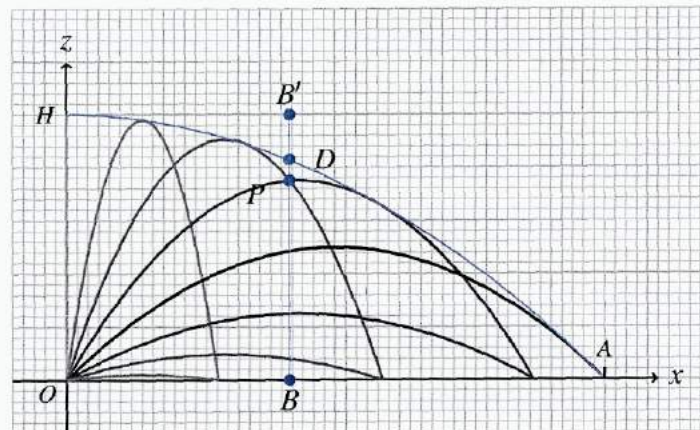


Figura 10: Família de curvas parabólicas para os respectivos ângulos de elevação $\theta_0 = \pi/2, 11\pi/24, 5\pi/12, \pi/3, \pi/4, \pi/6, \pi/12$ e $\pi/24$. A reta auxiliar BB' determina o ponto P , a altitude que um projétil alcança para um ângulo de elevação particular. Observe que para $P \leq D$ existem dois ângulos que alcançam o ponto escolhido. Para $P = D$ temos somente um ponto e não existem nenhum ângulo de elevação para para pontos além de D .

Para determinar a equação da curva envelope, desenhamos uma reta BB' perpendicular ao

eixo horizontal e localizamos o ponto D no qual a linha vertical cruza com a curva envelope. Definimos assim a posição x que localiza a reta vertical. O ponto D corresponde a altitude que o projétil alcança após percorrer a distância x para um dado ângulo de elevação θ_0 . Assim, determinamos o máximo de $z(x)$ para um valor fixo de x .

Por simplicidade, usamos as relações $H = v_0^2/(2g)$ e $b = \tan \theta_0$, definidas em (3.15) e (3.21), respectivamente, e podemos reescrever a equação das trajetórias, dada por (3.18), na forma

$$z = bx - \frac{1}{4H} (1 + b^2) x^2. \quad (3.41)$$

Como podemos observar da figura 10, existem duas trajetórias que passam por um ponto P no interior do envelope mas existe apenas um ponto sobre a curva envelope e nenhum na região exterior a ele. Se o ponto $P(x, z)$ é escolhido e procuramos o valor do ângulo θ_0 que vai permitir que o projétil passe por ele, então temos que determinar os possíveis valores de b que satisfazem a equação (3.41) para um ponto $P(x, z)$ determinado. Esta equação pode ser reescrita na forma

$$x^2 b^2 - 4Hb + (x^2 + 4Hz) = 0. \quad (3.42)$$

Como esta é uma equação de segundo grau em b , podem existir duas soluções reais, uma dupla solução ou nenhuma solução real, de acordo com o discriminante

$$16H^2 x^2 - 4x^2 (x^2 + 4Hz) = 4x^2 (4H^2 - 4Hz - x^2) \geq 0. \quad (3.43)$$

A condição limite

$$x^2 + 4Hz - 4H^2 = 0 \quad (3.44)$$

define os pontos sobre a trajetória da curva envelope. Portanto, a equação da curva envelope corresponde a

$$z = H - \frac{1}{4H} x^2, \quad (3.45)$$

a equação de uma parábola, com o foco f na origem de coordenadas, o vértice para cima, à uma altura do foco igual à H , e com o semilatus rectum p igual ao alcance máximo. Deste modo, o projétil só pode alcançar a região externa ao envelope se aumentarmos a velocidade inicial dele.

Trajetórias correspondentes a $\theta_0 < \pi/4$ também são tangentes à fronteira da zona efetiva abaixo do eixo dos x . Esta parte da fronteira é de interesse prático se o projétil é dirigido para um alvo abaixo da do nível horizontal.

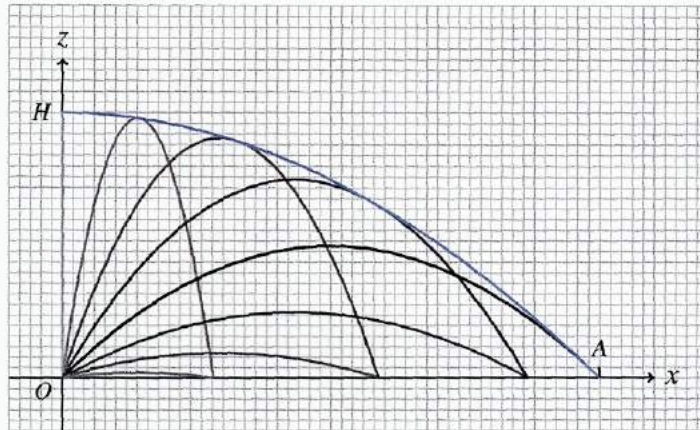


Figura 11: Família de curvas parabólicas para os respectivos ângulos de elevação $\theta_0 = \pi/2, 11\pi/24, 5\pi/12, \pi/3, \pi/4, \pi/6, \pi/12$ e $\pi/24$. A curva azul representa a curva envelope ou parábola de segurança dos diferentes movimentos parabólicos.

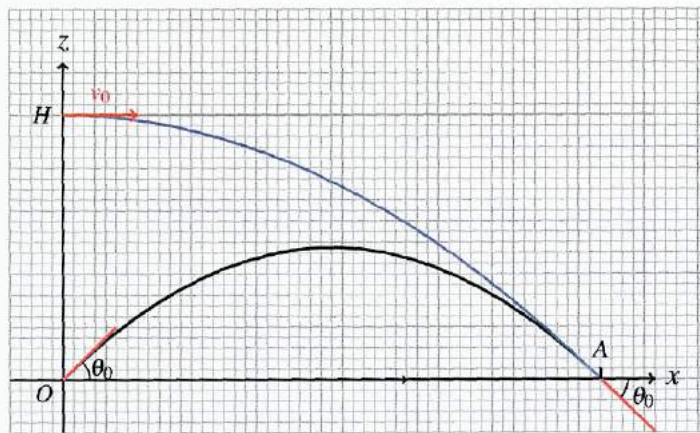


Figura 12: A trajetória parabólica de máximo alcance ($\theta_0 = \pi/4$) e, em azul, a curva envelope ou parábola de segurança dos diferentes movimentos parabólicos. Esta curva corresponde à trajetória de uma partícula lançada da altura H com velocidade v_0 e ângulo de elevação nulo. A tangente à parábola de segurança no ponto de interseção com a horizontal forma um ângulo igual ao ângulo de elevação para o alcance máximo.

Observamos na figura 12 que a parábola de segurança corresponde à trajetória de uma partícula lançada da altura H com velocidade v_0 e ângulo de elevação nulo. Neste caso, a tangente à curva parabólica de segurança no ponto de interseção com a horizontal forma um ângulo igual ao ângulo de elevação para o alcance máximo.

Considerações finais

Procuramos neste trabalho descrever o movimento parabólico, mostrando as suas características algébricas e físicas básicas e realçando os aspectos geométricos que estas expressões acarretam. Esperamos que este procedimento permita discutir e consolidar as leis da mecânica newtoniana, extremamente importantes para a ciência moderna. Tentamos com esta proposta também despertar o censo crítico de observação do aluno, ao extrair os parâmetros relevantes de um problema e, por meio deles, estabelecer uma representação matemática capaz de representar o comportamento de um sistema físico de uma forma clara e concisa.

Desta forma, esperamos alcançar os seguintes objetivos, segundo as orientações dos PCNs: revelar aos alunos que a física é construída com base na observação e na medida, mas também é desenvolvida com base em modelos; mostrar que podemos estabelecer estes modelos colocando em evidência as suas características à partir da representação e da análise gráfica; conceituar as variáveis básicas da Física, em geral, e, em particular, discutir os conceitos da cinemática, tais como a posição, o deslocamento, o intervalo de tempo e a velocidade de um corpo em mais de uma dimensão e os parâmetros geométricos correspondentes.

Este trabalho apresenta uma estratégia alternativa para a introdução da Dinâmica, e ela pode ser empregada pelos professores para o seu planejamento de aula. Uma atividade experimental envolvendo o movimento parabólico poderia servir como complemento ao estudo deste movimento e, ao mesmo tempo, servir como elemento motivador para os alunos consolidarem o conhecimento.

Referências

- BOLTIANSKI, V. G. *La envolvente*. Moscou: Mir, 1977. (Lecciones populares de matemáticas).
- BRASIL. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Brasília: Editora do Congresso Nacional, 1996. Lei no 9.394, de 20 de dezembro de 1996.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: MEC/SEF, 1998.
- BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio*. Brasília: SEMTEC/MEC, 2000.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais; Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Física: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.
- BRASIL. *PCN+Ensino Médio: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/Semtec, 2006.
- CHORLTON, F. *Textbook of dynamics*. London: van Nostrand, 1965.
- GONÇALVES, A. G. de O. Monografia de final de Curso de Licenciatura. *O movimento parabólico de projéteis: alcance e parábola de segurança*. Rio de Janeiro: Instituto de Física — UFRJ, 2012.
- LOCKWOOD, E. H. *Book of Curves*. London: Cambridge University Press, 2007.
- MCMILLAN, W. D. *Theoretical mechanics — Statics and the dynamics of a particle*. New York: Dover, 1958.
- MONTENBRUCK, O. *Practical Ephemeris Calculations*. New York: Springer-Verlag, 1989.
- MOULTON, F. R. *An Introduction to Celestial Mechanics*. 2. ed. New York: Dover, 1984.
- ROY, A. *Orbital Motion*. 4. ed. London: Taylor & Francis, 2004.