UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

UFRJ

INSTITUTO DE FÍSICA
LICENCIATURA EM FÍSICA

PROJETO DE INSTRUMENTAÇÃO PARA O ENSINO DE FÍSICA

# UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA AS LEIS DE KEPLER NO ENSINO MÉDIO

Carla de Souza Lucas

Orientador: Prof. Vitorvani Soares

2007/1

Ficha catalográfica

Lucas, Carla de Souza

Uma Abordagem Alternativa para as Leis de Kepler no Ensino Médio, Carla de Souza Lucas — Rio de Janeiro: Projeto de Instrumentação para o Ensino de Física — Instituto de Física/UFRJ, 2007.

1. Leis de Kepler. 2. Ciência – Ensino Médio. 3. Órbitas Planetárias.

I. Título

# Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus, pela força espiritual, a minha mãe Maria e a minha irmã Cláudia pelo estímulo em todos os momentos difíceis em minha vida.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que estiveram presentes em minha vida ao longo do meu curso universitário, aos professores e, em especial ao meu orientador de monografia Vitorvani Soares que com sua paciência e atenção desenvolveu juntamente comigo este trabalho. Gostaria de também agradecer ao meu orientador de Iniciação Científica Marcelo M. Sant'Anna pelas longas horas de estudo e pela introdução ao meu gosto pela pesquisa. Agradeço também aos meus amigos, pelo apoio e, finalmente, quero agradecer a banca de professores responsáveis pela leitura crítica do trabalho.

# ÍNDICE

# Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma aula alternativa para a determinação das leis de Kepler, convidando os alunos a participar junto com o professor na definição das leis e mostrando como Kepler conseguiu postular cada uma delas. Abordaremos os aspectos didáticos, o atual quadro da física no ensino médio e a evolução da ciência desde os modelos de cosmos dos gregos até Kepler.

Apresentamos uma abordagem diferente da que é habitualmente exposta nos livros didáticos, que está subdividida em três etapas: (i) Inicialmente, posicionamos o planeta a ser estudado ao longo da sua órbita em doze datas a intervalos iguais ao longo dos seus respectivos períodos de revolução em torno do Sol. Discutimos geometricamente porque esta figura é uma elipse e não um círculo; (ii) Em seguida, calculamos a área de cada intervalo e determinamos a lei das áreas; (iii) Tomamos agora os dados já tabelados para as órbitas dos planetas, e construímos um gráfico, do período de revolução em função do eixo maior da órbita elíptica; A partir da curva obtida, discutimos com os alunos os diferentes métodos gráficos para a determinação da relação funcional entre as grandezas físicas envolvidas no problema.

Este trabalho foi apresentado no VI Encontro de Licenciatura em Física do Instituto de Física – UFRJ (2006) [1] e no XVII Simpósio Nacional de Ensino de Física, realizado em São Luís, MA (2007) [2], ambos na forma de painel. Os professores com quem conversamos nestes encontros, de modo geral, admitem a dificuldade de abstração dos alunos com o método tradicional, já que as três leis são apenas enunciadas, e receberam muito bem esta nova abordagem, mostrando-se estimulados a adotar este modelo em suas aulas.

# 1. Introdução

Podemos abordar as leis de Kepler numa variedade de formas. Porém, no ensino médio, essas leis são simplesmente enunciadas sem fazer menção ao trabalho experimental e observacional que os cientistas realizaram até chegar a elas. As leis se tornam algo abstrato e os alunos simplesmente ficam imaginando como foi que Kepler conseguiu chegar a essas conclusões. Pretendemos com este trabalho sanar estas dúvidas, abordando o contexto histórico dos acontecimentos e mostrando como Kepler explorou os dados coletados por Tycho Brahe para chegar as três leis que inauguram a mecânica celeste. Pretendemos também despertar a curiosidade dos alunos levando-os a observar e descrever a natureza ao formular perguntas a partir da observação.

Ao apresentar as suas leis empíricas, Kepler enfrentou diversas dificuldades tendo que ir contra um modelo aceito durante séculos. Adepto ao modelo copernicano, ele teve que considerar em seus cálculos as distâncias e as posições dos planetas em relação ao Sol e não em relação a Terra. Ele percebe então que as órbitas dos planetas estão contidas aproximadamente num mesmo plano que incluía o Sol. Por fim, liberta-se da noção de movimento uniforme em círculos perfeitos, uma das idéias fundamentais da cosmologia de Platão. Kepler foi o primeiro a unir fisica a astronomia, e a buscar explicações fisicas por trás dos fenômenos celestes [3].

Nos livros de ensino médio as leis de Kepler são abordadas convencionalmente da mesma forma. Os autores fazem uma pequena introdução histórica e postulam as três leis. Para a primeira fazem um desenho de uma elipse com excentricidade grande [4], e somente alguns poucos advertem que a órbita é quase circular [5]. A segunda lei e a terceira são somente enunciadas e os alunos simplesmente as aceitam. Como normalmente é utilizada a elipse em que foi demonstrada a primeira lei, estes imaginam que próximo ao Sol a velocidade do planeta será muito maior do que em qualquer outro ponto da órbita.

Ao se *falar que o quadrado do período orbital dos planetas é diretamente proporcional ao cubo* de sua distância média ao Sol, e não revelar de onde vem este resultado, só resta aos alunos aceitarem esta definição. Observaremos que a criação dos logaritmos, em 1614, foi de grande importância para a terceira lei (1618) [3]. Kepler tomou conhecimento da descoberta dos logaritmos pelo seu próprio autor, John Napier. É sabido também que Kepler teve contato com Jobst Bürgi, outro possível inventor dos logaritmos. Então, somente após dezessete anos de trabalho com as observações de Tycho Brahe e, acredita-se, com o uso dos logaritmos, Kepler conseguiu chegar a sua relação de proporcionalidade entre os períodos e o eixo maior das órbitas elípticas.

# 2. Aspectos didáticos

### Quadro atual do ensino de Física

Os Parâmetros Curriculares Nacional Ensino Médio (PCNEM), [6, 7] Ministério da Educação e Cultura, destacam bem os problemas atuais do ensino, em geral, e do ensino de física, em particular. Segundo os PCNEM, o ensino tem se apresentado de forma desarticulada, não sabe priorizar uma formação contextualizada, matematizando extensivamente os conteúdos e deixando de lado a abstração conceitual, o que leva o aluno a não conseguir resolver sozinho qualquer tipo de problema com o qual vai se deparar fora do ambiente escolar. Vale citar um trecho dos PCNEM:

> *"O ensino de física tem-se realizado freqüentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, distanciados do mundo vivido pelos alunos e professores e não só, mas também por isso, vazios de significado. Privilegia a teoria e a abstração, desde o primeiro momento, em detrimento de um desenvolvimento gradual da abstração que, pelo menos, parta da prática e de exemplos concretos. Enfatiza a utilização de fórmulas, em situações artificiais, desvinculando a linguagem matemática que essas fórmulas representam de seu significado físico efetivo."*

Um dos papéis do ensino em física é, portanto, o aprimoramento do educando, tanto no desenvolvimento da sua autonomia intelectual e do seu pensamento crítico quanto no relacionamento entre a teoria e a prática. Nós professores somos, juntamente com os pais e com o meio externo, uma das fontes de educação a partir da qual os alunos constroem seus conhecimentos, e precisamos portanto exercer esse papel com responsabilidade, mesmo que muitas vezes nos deparemos com condições precárias de ensino. Deste modo, tornar a física mais atraente deve ser um dos principais objetivos do docente.

### Justificativa da inserção de trabalhos experimentais para o Ensino de Física

Seguindo as orientações dos PCNEM queremos levar o aluno a identificar questões e problemas a serem resolvidos, estimular a observação, a classificação e a organização dos fatos e fenômenos que estão à sua volta, segundo os aspectos físicos e funcionais relevantes. Estabeleceremos junto com os alunos as três leis de Kepler, partindo de dados reais — medidas obtidas em um sítio eletrônico de astronomia profissional e de fácil acesso, [8] estimulando assim o uso da internet de forma educativa —, e não apenas postulando as leis, como tem sido feito em diversos livros de física [4]. Considerando a realidade dos alunos, o contexto social que cada grupo está inserido e as dificuldades encontradas pelos professores durante o ano letivo, podemos observar que a falta de tempo leva os professores a reduzir o conteúdo didático, e um dos pontos sacrificados é, em geral, a apresentação das leis de Kepler.

**Propostas dos PCNEM e contextualização para o ensino de Física**

Nos deparamos no Ensino Médio com as dificuldades matemáticas dos alunos. Então, se fizermos um enfoque na física conceitual e, aos poucos, inserirmos elementos matemáticos — estimulando a investigação, a abstração e incentivando-os a lerem jornais e revistas científicas —, estes conseguirão construir melhor o conteúdo apresentado. Um ensino contextualizado ajuda no aprendizado dos alunos. Introduzindo assuntos do cotidiano conseguiremos estimular a curiosidade e a maneira como percebem os fenômenos ao seu redor. Citando uma vez mais os PCNEM,

> *"[...] A Física é um conhecimento que permite elaborar modelos de evolução cósmica, investigar os mistérios do mundo submicroscópico, das partículas que compõem a matéria, ao mesmo tempo que permite desenvolver novas fontes de energia e criar novos materiais, produtos e tecnologias.*
>
> *Não se trata, portanto, de elaborar novas listas de tópicos de conteúdo, mas sobretudo de dar ao ensino de Física novas dimensões. Isso significa promover um conhecimento contextualizado e integrado à vida de cada jovem. Apresentar uma Física que explique a queda dos corpos, o movimento da lua ou das estrelas no céu, o arco-íris e também os raios laser, as imagens da televisão e as formas de comunicação. Uma Física que discuta a origem do universo e sua evolução. Que trate do refrigerador ou dos motores a combustão, das células fotoelétricas, das radiações presentes no dia-a-dia, mas também dos princípios gerais que permitem generalizar todas essas compreensões. Uma Física cujo significado o aluno possa perceber no momento em que aprende, e não em um momento posterior ao aprendizado.*
>
> *A Física percebida enquanto construção histórica, como atividade social humana, emerge da cultura e leva à compreensão de que modelos explicativos não são únicos nem finais, tendo se sucedido ao longo dos tempos, como o modelo geocêntrico, substituído pelo heliocêntrico, a teoria*

*do calórico pelo conceito de calor como energia, ou a sucessão dos vários modelos explicativos para a luz. O surgimento de teorias físicas mantém uma relação complexa com o contexto social em que ocorreram."[6]*

Com as leis de Kepler tivemos um grande desenvolvimento da astronomia e também da física, pois elas são a base para a lei da Gravitação Universal de Newton, que possibilitou um grande desenvolvimento de diversas áreas da ciência como: química (análise qualitativa e quantitativa de elementos químicos), meteorologia (clima e estrutura das atmosferas planetárias), geologia (sensoriamento remoto), geofísica (magnetosfera e auroras), geografia, história, direito, ciência espacial (telecomunicações, medicina espacial, medicamentos, novos materiais como teflon, isopor e cristais), biologia (vida no universo, planetas extra-solares), podemos utilizar estes e outros, exemplos de interdisciplinaridade para estimular os alunos. Os PCNEM nos ensinam que:

*"A possibilidade de um efetivo aprendizado de Cosmologia depende do desenvolvimento da teoria da gravitação, assim como de noções sobre a constituição elementar da matéria e energética estelar. Essas e outras necessárias atualizações dos conteúdos apontam para uma ênfase à Física contemporânea ao longo de todo o curso, em cada tópico, como um desdobramento de outros conhecimentos e não necessariamente como um tópico a mais no fim do curso. Seria interessante que o estudo da Física no Ensino Médio fosse finalizado com uma discussão de temas que permitissem sínteses abrangentes dos conteúdos trabalhados. Haveria, assim, também, espaço para que fossem sistematizadas idéias gerais sobre o universo, buscando-se uma visão cosmológica atualizada." [6]*

**Habilidades e competências a serem desenvolvidas com a metodologia sugerida.**

Desenvolveremos neste trabalho a capacidade de leitura de gráficos, de tabelas e a abstração dos alunos com noções qualitativas e conceituais, utilizando dados reais [8], o que permite a qualquer aluno acessar os dados e verificar que as órbitas são realmente elípticas e observar também a dificuldade que foi encontrada pelos pensadores antigos pela proximidade com uma órbita circular. Observaremos também a lei das áreas, utilizando o papel milimetrado, que possibilitará que o aluno veja que realmente podemos estabelecê-las a partir dos dados observacionais, assim como a terceira lei, desenvolvida através da analise gráfica e do uso de logaritmos. Conseguiremos mostrar a utilidade das ferramentas matemáticas no uso da física e da astronomia, tornando a aprendizagem destas ciências mais prazerosa para os alunos.

# 3. Contexto Histórico.

**A evolução da astronomia.**

Apesar das limitações da observação do céu a olho nu, os astrônomos da antiguidade elaboraram modelos muito sofisticados e bem sucedidos para explicar o movimento dos astros no céu. A astronomia antiga reproduzia matematicamente os fenômenos sob o ponto de vista instrumentalista. Entretanto, há tentativas de descrever a realidade fisica dos movimentos celestes por modelos mecânicos, como o das esferas cristalinas dos gregos. Segundo esse sistema, os planetas estariam presos a esferas transparentes giratórias, cujos movimentos eram transmitidos por outras esferas, formando um todo: um sistema hipoteticamente fisico e real.

**Filolau (século V a.C.),** [3, 9, 10, 11] sugeriu que no centro do Universo haveria um fogo central, em torno do qual revolucionavam o Sol, a Terra, e uma anti-Terra. **Heráclides do Ponto (século IV a.C.)** sugeriu que o movimento diurno da Terra explicaria melhor o movimento das estrelas, e que o fato de Mercúrio e Vênus sempre aparecerem próximos ao Sol indicaria que esses planetas giravam ao redor dessa estrela. *"Heráclides do Ponto e Ecfanto, o pitagórico, moviam a Terra, mas não no sentido de translação e sim no sentido de rotação, como uma roda fica em um eixo, de oeste para leste, em torno de seu próprio centro"* (Aetius, apud HEATH, op. cit., p.94). [10] **Aristarco de Samos (310-230 a.C.),** astrônomo e matemático grego, **argumentou que os** movimentos celestes seriam explicados se a Terra girasse diariamente em torno de seu eixo e também se movesse em torno do Sol. Esse modelo, porém, não foi trabalhado matematicamente. Foi um dos primeiros a promulgar a teoria heliocêntrica. A obra em que ele descreve essas idéias se perdeu.

No sistema de **Eudoxio de Cnido (406-355 a.C.)** com suas esferas homocêntricas e de **Aristóteles (384-322 a.C.)**, com um número suficiente de círculos era possível dar conta de movimentos tão complexos como a precessão dos equinócios e a retrogradação dos planetas contra um fundo de estrelas, mas não explicava porque periodicamente o Sol, a Lua e os planetas pareciam estar a diferentes distâncias da Terra, uma vez que seu tamanho aparente ou brilho variam. O cosmos aristotélico é apresentado como um círculo gigantesco, porém finito, no qual se verifica uma rigorosa subordinação das novas esferas, girando em torno da Terra, que se mantém imóvel no centro do sistema, pois não havia nenhum fenômeno terrestre que fosse explicável pela rotação da Terra. Os corpos celestes não seriam formados por nenhum dos chamados quatro elementos transformáveis (terra, água, ar e fogo), mas por um elemento não transformável designado "quinta essência". Os movimentos circulares dos objetos celestes seriam, além de naturais, eternos.

Posteriormente, o sistema aristotélico foi reformulado por **Hiparco (190-125 a.C.)** para eliminar as imprecisões. O princípio, de origem platônica, de que tudo no céu tem de se mover em circunferências, aliado à exigência de serem as velocidades angulares constantes, tornou necessário introduzir para cada planeta vários ciclos – os epiciclos (círculo ou esferas menores que se apóiam sobre o deferente). Hiparco teve, a sua disposição, importantes e refinados registros babilônicos que remontam a 700 a.C., e teria sido através das efemérides babilônicas que ele teve a idéia da possibilidade e da importância de uma descrição quantitativa dos fenômenos astronômicos.

O trabalho de Hiparco foi completado por **Cláudio Ptolomeu (90-168 d.C.)** astrônomo e matemático grego, três séculos depois, no *Almagesto*. Este livro, escrito por volta de **140 d.C.**, trata da teoria astronômica dos movimentos planetários e do sistema geocêntrico ou geostático, como preferem alguns historiadores, pois a Terra embora imóvel não era o centro de todos os movimentos dos orbes. Tal concepção do cosmos foi adotada pela religião e pela filosofia da época e foi idéia dominante até a Idade Média.

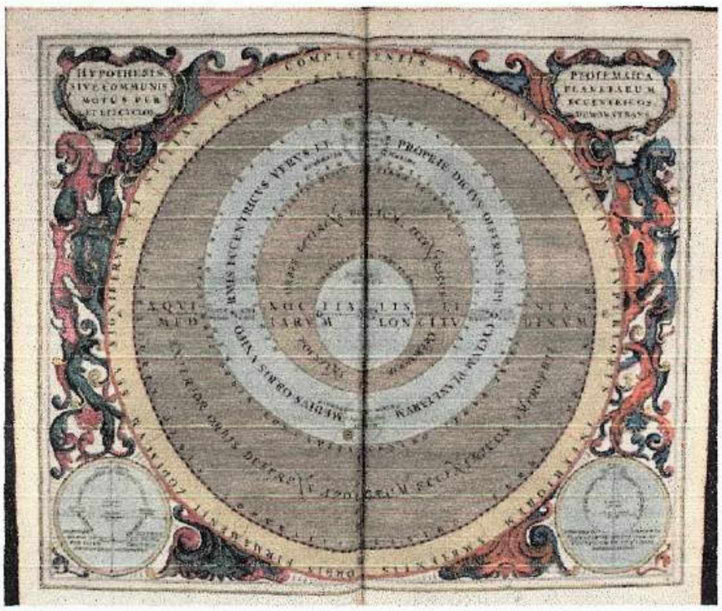


Figura 1. Sistema de Ptolomeu, universo centrado na Terra em torno da qual orbitam a Lua, o Sol e os outros planetas. [12]

**Ptolomeu e Copérnico**

O sistema de Ptolomeu, que em sua versão simplificada tem 40 círculos, era um sofisticado sistema astronômico que dava conta das observações que prediziam com bom grau de precisão os movimentos dos astros, utilizando para seus cálculos informações de dezenas de séculos. Sua vulnerabilidade residia na complexidade do sistema de círculos. Este método era muito artificial e era considerado como um mero modelo instrumental para predições: um grande tratado matemático com poucas considerações físicas e com centenas de páginas de cálculos, números e argumentos.

Apoiado pela igreja durante toda a Idade Média, o modelo de Ptolomeu impediu o progresso da astronomia durante mais de um milênio. Ele explicava as órbitas do Sol e da Lua em termos de simples círculos. Para explicar o movimento retrógrado de alguns planetas ele desenvolveu a teoria de círculos dentro de círculos. Um modelo terrivelmente complexo cheio de epiciclos, que se empilhavam sobre deferentes (órbita do centro hipotético em torno da Terra), equantes (ponto geométrico, o centro do círculo está exatamente entre o equante e a posição da Terra) e excêntricos. Porém o modelo ptolomaico satisfazia uma das exigências básicas de um modelo científico, já que previa a posição e o movimento de cada planeta com um grau de precisão maior do que qualquer modelo anterior.

Outro livro de Ptolomeu é *As hipóteses dos planetas*, onde encontramos uma sucinta descrição matemática e uma descrição do modelo de esferas físicas, que se encaixam umas nas outras sem deixar nenhum espaço vazio e formando um pequeno sistema semelhante às esferas homocêntricas de Eudoxio. Como este modelo permite explicar a rotação diária das estrelas e a precessão dos equinócios, acabou sendo adotado por quase todos os astrônomos árabes.

Somente em 1543, 1800 anos depois de Aristarco, o Sol voltou ao centro do universo. Nicolau Copérnico, um clérigo polaco, publicou uma nova hipótese explicativa do movimento aparente dos planetas: no centro do universo passava a estar o Sol, enquanto a Terra passava a ser apenas mais um dos planetas, o terceiro a contar do Sol, movendo-se numa órbita circular. Copérnico apresentou esta teoria na sua obra *De Revolutionibus Orbium Coelestium* (As revoluções dos orbes celestes) em 1543, o ano da sua morte.

**Nicolau Copérnico (1473-1543)** - O conceito de universo heliocêntrico de Copérnico (heliostático seria um termo melhor, uma vez que Copérnico não coloca o Sol exatamente no centro) é divulgado pela primeira vez em um manuscrito chamado *Commentariolus* (Pequeno Comentário), não publicado durante a vida do autor, circulou entre poucas pessoas e foi escrito por volta de 1510. O esboço de sua teoria e, algumas de suas conseqüências são apresentadas advertindo ao leitor que estava trabalhando em um estudo mais aprofundado do tema [10].

A obra maior de Copérnico, *De revolutionibus*, foi muito pouco lida, mesmo por estudiosos no assunto. Nela, Copérnico expõe uma das razões que o levaram a optar pelo heliocentrismo:

> *"No centro de tudo reside o Sol. Quem, deveras, no mais magnífico templo, colocaria a luz em um outro lugar que não aquele em que esta poderia iluminar ao mesmo tempo a totalidade do templo? (...) Portanto, seguramente, residindo no lugar sério, o Sol governa a família de estrelas circundante".*

Copérnico não ficou conhecido por suas observações, pois eram poucas e menos precisas que as de seus predecessores. Ele também não simplificou muito a astronomia antiga, pois embora o seu sistema heliocêntrico fornecesse uma melhor explicação da retrogradação dos planetas, manteve-se preso ao princípio, de origem platônica, de que tudo no céu tem de se mover em circunferências, elaborou uma teoria matemática detalhada que pudesse dar conta das observações, seu trabalho foi uma tarefa de reinterpretação de dados. Seu grande mérito foi ter rompido revolucionariamente com o geocentrismo escolático oficial, herdado de Aristóteles e de Ptolomeu, e incorporado à filosofia de São Tomás de Aquino. O sistema copernicano gerou uma série de novos problemas para astrônomos e filósofos naturais que seriam assunto de debate por todo o século que se seguiu à morte de Copérnico.

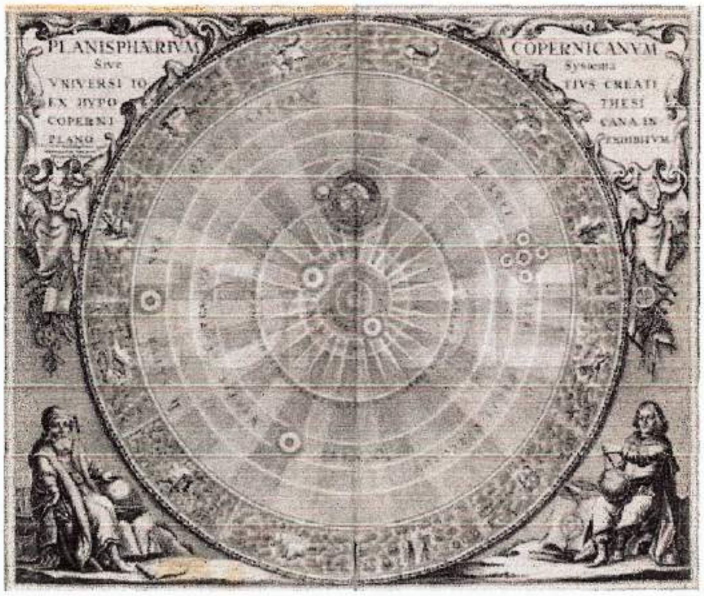



Figura 2. O universo heliocêntrico de Copérnico, com a Terra e outros planetas girando em torno do Sol [13]

## As medidas e a importância de Tycho Brahe

**Tycho Brahe (1546-1601)** – O dinamarquês Tycho Brahe tinha dificuldade em aceitar a teoria copernicana. A ausência de paralaxe estelar implicava em distâncias muito grandes entre a Terra e as estrelas, e isso era inconcebível para ele. Percebeu que as tabelas de medições planetárias tanto de Ptolomeu como as de Copérnico não forneciam medidas precisas e que ambas discordavam de certos fatos. Quando estava já com 17 anos, teve a oportunidade de observar um evento especial, a conjunção de Júpiter e Saturno. Achando que este evento poderia ser predito com a ajuda das tabelas astronômicas, e comparando o período da observação com o predito pelas Tabelas Afonsinas (que eram baseadas no sistema de Ptolomeu), observou um erro de aproximadamente um mês, enquanto que, nas tabelas astronômicas de Copérnico, um erro de vários dias, em relação ao observado. A partir daí, para Tycho, antes que qualquer teoria astronômica construída fosse satisfatória, era necessário novas observações com a maior precisão possível, e, como poucas medidas aleatórias não poderiam decidir entre qual sistema estaria correto (o de Ptolomeu ou Copérnico), ele inicia a sua devoção por toda a vida à realização de observações mais precisas das posições das estrelas, do Sol, da Lua e dos planetas, através da construção de melhores tabelas astronômicas.

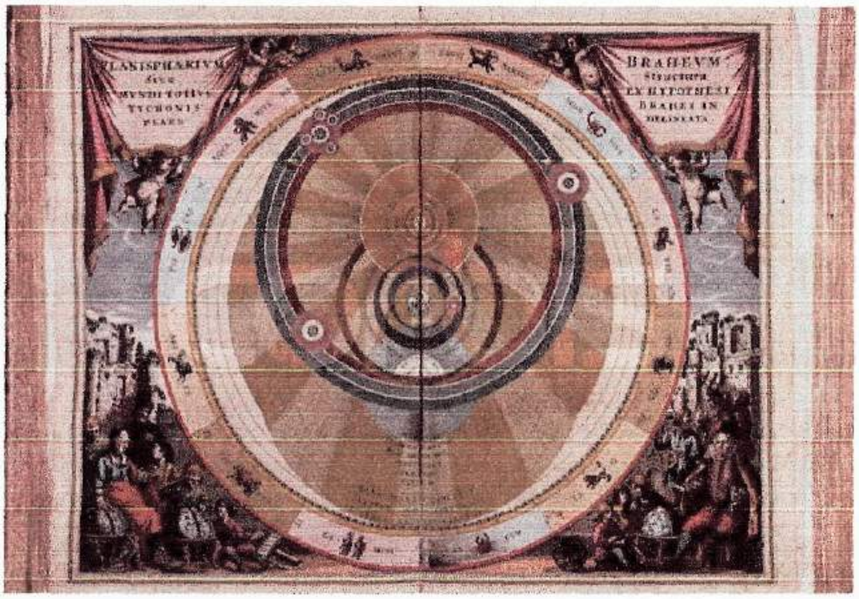


Figura 3. O modelo de Tycho Brahe, coloca a Terra no centro do universo, sendo orbitada pela Lua e pelo Sol. E os planetas orbitando o Sol.[14]

Em 1572, Tycho descobre uma brilhante estrela nova (hoje em dia conhecida por supernova) na constelação da Cassiopéia, mais brilhante que Vênus. A estrela era tão brilhante que podia ser vista à luz do dia, e durou 18 meses, Ticho determinou com precisão extraordinária para época, a posição dessa nova estrela. Ao analisar suas medidas e compará-la com a de outros astrônomos, descobriu que ela estava muito além da Lua. Esta observação foi fundamental porque significava um rompimento com a tradição aristotélica, que acreditava que qualquer objeto que se movesse no céu deveria estar na esfera sublunar, ou seja, entre a Terra e a Lua. Tycho tinha recém terminado a construção de um sextante com braços de 1,6 metros, com uma escala calibrada em minutos de arco, muito mais preciso do que qualquer outro já construído até então, e demonstrou que a estrela se movia menos do que a Lua e os planetas em relação às outras estrelas, e portanto estava na esfera das estrelas. Ticho Brahe publicou os resultados das suas observações no opúsculo *De stella nova* (Da nova estrela).

Tycho propõe uma Terra estacionária, em torno da qual se encontraria o Sol em movimento circular. Os planetas se moveriam em torno do Sol, e não da Terra. A esfera das estrelas fixas se manteria a uma distância razoável do Sol, da Terra e dos planetas. Matematicamente seu sistema era parecido com o de Copérnico, e Tycho manteve vários dispositivos circulares ptolomaicos para garantir a precisão do sistema. Reconhecido como o melhor astrônomo observacional da Europa, ele observou por cerca de 20 anos o movimento dos planetas. Ele também projetou os melhores instrumentos da época, instalando-os no seu maravilhoso templo em Uraniborg (Castelo dos Céus), na ilha de Hven, onde seus assistentes faziam observações noturnas de estrelas, medindo e anotando com impressionante precisão seus dados astronômicos. Depois da morte de Frederico II, seu sucessor Cristiano IV, reduziu consideravelmente a pensão anual de Tycho que não estando disposto a considerar qualquer redução em seus custos, aceitou o convite do rei Rodolfo II da Boemia. Partiu então para Praga levando seus registros e vários instrumentos. Ele se instalou no castelo de Benatky, colocado pelo rei à sua disposição.

Em 1598, Tycho publicou o livro *Astronomiae instauratae mechanica (Digressões sobre Mecânica Astronômica)*, dedicado a Rodolfo II, onde descreve os instrumentos inventados por ele mesmo e no qual ajudou a construir. Sua obra prima só foi editada depois de sua morte, em 1603, por seu mais ilustre discípulo Johannes Kepler, sob o título *Tychonis Brahe astronomiae instauratae progymnasmata* (*Novos conceitos astronômicos de Tycho Brahe*). Ele, Tycho, não só fez observações regulares dos planetas como preparou o caminho para o mais preciso conjunto de tabelas de estrelas jamais feito. O avanço científico exige tanto a observação como a teoria. Esses dados foram tabelados e foram a base do trabalho de Kepler que se mostrou um excelente intérprete dessas observações. Após a morte de Tycho Brahe, Kepler estudou os dados deixados por seu mestre durante 17 anos, concebendo as três leis sobre o movimento dos planetas e dando origem à mecânica celeste.

## Outros nomes importantes na história da astronomia

**Giordano Bruno (1548-1600)** – Giordano Bruno escreveu sobre um universo infinito e descentralizado. A visão desafiadora de mundo de Bruno foi associada com especulações teológicas igualmente controvertidas, o que fez com que morresse, na fogueira, em Roma. A Inquisição acusou Giordano Bruno de oito heresias, mas os registros existentes não especificam quais eram. O descarte da esfera fixa de estrelas, proposto por Bruno, porém, foi aceito sem reações adversas por outros. Na Inglaterra, por exemplo, Thomas Digges (1543-1595) publica um almanaque com um diagrama no qual elimina a esfera fixa de estrelas.

**Galileu Galilei (1564-1642)** - Um teórico brilhante, um mestre de experimentação, um observador meticuloso e um hábil inventor. Procurava matematizar o universo inteiro. Graças à invenção do telescópio por Hans Lippershey, em 1608, Galileu descobriria evidências provando que

Aristarco, Copérnico e Kepler estavam corretos, transformando o telescópio num instrumento verdadeiramente extraordinário.

EM 1610, no seu livro *Sidereus Nuncius* (*A mensagem das estrelas*), obra na qual anuncia o famoso conjunto de observações astronômicas, Galileu discute sobre a paisagem lunar, a desenha e mede as sombras das montanhas lunares para calcular suas alturas. Ele nota que através do telescópio é possível observar inúmeras estrelas que nunca haviam sido vistas. De especial interesse foi a sua descoberta das luas de Júpiter, que circundavam aquele planeta como um sistema solar em miniatura. Ele também descobriu que Vênus exibia fases, assim como a Lua. Deste modo, ele concluiu que Vênus deveria se mover em torno do Sol. Essa era uma confirmação poderosa da teoria heliocêntrica copernicana.

O trabalho de Galileu sobre as marés o convenceu de que afinal tinha a prova do movimento da Terra. Escreve então, em 1632, o seu principal livro, o *Diálogo sobre os dois máximos sistemas,* composto por quatro partes que tratam da destruição do cosmos aristotélico, das objeções mecânicas ao movimento de rotação da Terra, das objeções astronômicas do movimento de translação da Terra e da teoria das marés. Não é uma obra de astronomia, pois evita discutir as dificuldades matemáticas da teoria de Copérnico. Isso só foi feito por Kepler, em sua obras, como veremos mais adiante. Entretanto, o *Diálogo* espelha a tensão entre os programas matemáticos de Galileu e dos jesuítas nas várias passagens que trata da matemática e de suas aplicações a natureza. [15]

Todas essas observações e o fato de Galileu defender publicamente a teoria copernicana aconteceram num período difícil para a Igreja Católica, que estava no meio de seu movimento de Reforma. Um sistema centrado no Sol tinha implicações teológicas perigosas. Em 1616, o Santo Ofício acusou a teoria de ser "tola e filosoficamente herética, uma vez que esta contradiz as doutrinas da Escritura Sagrada em vários lugares...". Galileu foi forçado a abjurar, negar a verdade de seus argumentos.

### Johannes Kepler

**Johannes Kepler (1571–1630)** – Kepler nasceu em 27 de dezembro de 1571, no sul da atual Alemanha, que naquela época pertencia ao Sacro Império Romano, em uma cidade chamada Weil der Stadt, região da Swabia. Era filho de Heinrich Kepler, um soldado mercenário, e de sua esposa Katharina, que foi acusada de bruxaria pela Inquisição. Seu avô paterno, Sebald Kepler, era prefeito da cidade, apesar de ser protestante (Luterano), numa cidade católica. Esta era a época da Renascença e da Reforma Protestante. Sua família conheceu a miséria e Kepler pôde estudar e se formar graças a bolsas de estudo do Estado que amparavam jovens promissores. Estudava teologia no seminário Stif, em Tübingen, e se preparava para ser padre mas antes de completar seus estudos foi convidado a ensinar matemática no seminário protestante (Stiftsschule) de Graz, na Áustria.

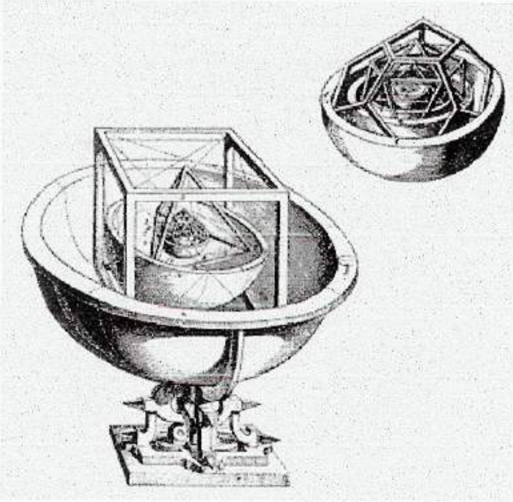


Figura 4. Os cinco sólidos regulares de Kepler: O Sol estaria no centro, com as esferas planetárias de Mercúrio, Vênus, Terra, Marte, Saturno e Júpiter separadas entre si por um octaedro, um icosaedro, um dodecaedro, um tetraedro e um cubo, respectivamente. [16]

Seu primeiro livro, *Mysterium cosmographicum* (Mistério Cosmográfico), de 1596, era um relatório completo e detalhado de sua trajetória intelectual, onde descrevia um modelo de sistema Solar que lhe permitia responder o seu enigma da quantidade de planetas e o porque deles estarem dispostos de certa forma, procurando uma relação entre esse sistema e os sólidos geométricos. Seu livro foi enviado ao mesmo tempo para Tycho Brahe, a quem admirava por seu trabalho observacional, e para Galileu Galilei. O trabalho impressiona a Tycho e Kepler posteriormente torna-se seu discípulo. Ele busca uma ordem matemática universal. Convencido de que há uma interrelação consistente entre as órbitas planetárias, recalcula incessantemente suas distâncias ao Sol. Conclui que os planetas têm relação com os cinco sólidos regulares. Esse resultado é um reflexo claro do interesse de Kepler no misticismo numérico neo-pitagórico, na moda em sua época.

Em 1600, Kepler se muda para Praga para trabalhar com Tycho Brahe, onde tem acesso aos seus extensos dados observacionais sobre planetas. Essa colaboração levaria a reinvenção do universo, com o avanço científico que abrange tanto a observação quanto a teoria. Quando Tycho morreu, Kepler "herdou" seu posto e seus dados, a cujo estudo se dedicou pelos 20 anos seguintes. Tendo acesso às observações, achava que poderia resolver o problema de Marte e remover as imprecisões do modelo em apenas oito dias, porém levou seis anos.

Influenciado pelo trabalho de William Gilbert sobre forças magnéticas em seu tratado *De magnete*, publicado em 1600, Kepler postula que a atração entre o Sol e os planetas seria similar à ação de um ímã. Essas especulações viriam a se tornar a segunda lei de Kepler, na qual uma linha do Sol ao planeta varre áreas iguais em tempos iguais. Desde a época do *Mistério Cosmográfico*, ele já havia compreendido que o movimento dos planetas não era uniforme.

Kepler abandona então os antigos dogmas de que os planetas se moviam descrevendo um círculo perfeito, com velocidade constante e que o Sol se encontrava no centro dessas órbitas. Ele elabora seu modelo usando os dados observacionais de Tycho e expõe os erros de Copérnico: Revela que as órbitas dos planetas em torno do Sol são elipses; que os planetas se movem com velocidade variando constantemente; e o Sol não está exatamente o centro dessas órbitas. De fato, Kepler estabelece a lei das áreas em 1602, mas não consegue ajustar a forma da órbita. Isto ocorrerá somente em 1605, quando ele percebe que a órbita era elíptica e o Sol está em um dos focos. Estes resultados foram publicados em 1609 no livro *Astronomia Nova,* no qual ele detalha seis anos de trabalho meticuloso, incluindo numerosas linhas de investigação que o levaram apenas a becos sem saída.

Figura 5. Johannes Kepler foi uma das figuras chave da "revolução científica" dos séculos XVI e XVII. Com uma obra que se situa historicamente entre o heliocentrismo coperniciano e a física newtoniana, foi ele que estabeleceu a ponte entre estes dois acontecimentos decisivos que marcaram o nascimento da ciência moderna. [17]

Entre 1617 e 1621, Kepler publicou os sete volumes do *Epitome Astronomiae Copernicanae* (*Compêndio da Astronomia Copernicana*), que se tornou a introdução mais importante à astronomia heliocêntrica e um livro texto de grande uso. A primeira parte do *Epitome*, publicada em 1617, foi colocada no Index de livros proibidos pela Igreja Católica em 10 de maio de 1619. A proibição por parte da Igreja Católica às obras sobre o modelo heliocêntrico começou pelo fato de Galileu ter escrito seu livro *A Mensagem das Estrelas*, despertando o interesse do povo. A razão da proibição se apoiava no Salmo 104:5 do Antigo Testamento da Bíblia, onde está escrito que "Deus colocou a Terra em suas fundações, para que nunca se mova".

Em 1619, Kepler publicou *Harmonices Mundi* (*Harmonia do Mundo*). Em termos modernos, ele anuncia que a razão entre os quadrados dos períodos de revolução de quaisquer dois planetas é proporcional ao cubo da razão entre as suas respectivas distâncias médias até o Sol. Ele pretende demonstrar que as leis da harmonia regem todo o cosmos. Aplica essas relações harmônicas interligando três temáticas: geometria, música e astronomia. Este livro é o ápice de todos os seus estudos nas áreas da astronomia, matemática, filosofia, música, geometria, política, física e teologia. Uma obra compacta, na qual o objetivo se estrutura ao longo de todo o texto.

**A primeira e a segunda Lei de Kepler**

Na época de Kepler, o planeta para o qual havia o maior número de dados astronômicos disponíveis era Marte. Em 1602, Kepler descobre a lei das áreas para os planetas mas não consegue ajustar a forma das órbitas. Kepler tinha um questionamento: se a rapidez do nosso planeta não é constante, como poderíamos prever sua posição num instante determinado? Começou por pesquisar o tempo que leva o planeta para percorrer uma distância dada. Supondo que a rapidez era inversamente proporcional a distância da Terra ao Sol, ele dividiu uma meia órbita em 180 partes: em cada porção, a rapidez da Terra é aproximadamente constante e, portanto, por triangulação, podemos dizer que o arco de órbita percorrido pelo planeta entre duas posições próximas é proporcional à razão entre a área varrida pela distância do planeta ao Sol e esta mesma distância.

Kepler via uma analogia entre o seu problema e uma tentativa de quadratura do círculo efetuada por Arquimedes: dividindo-se a semi-órbita não em 180 partes, mas em um número infinito de partes, e substituindo a soma infinita de todas as distâncias assim obtidas pela área situada entre a porção da órbita considerada e os dois raios vetores unindo suas extremidades ao Sol, poderíamos então determinar a posição do planeta. Surgiu, assim, a segunda lei de Kepler.

Entretanto, Kepler sabe que a velocidade não é constante ao longo de toda a trajetória: ela é mínima quando o planeta está mais afastado do Sol e máxima quando mais próximo. Além disso, ele também estava consciente que os dois conceitos "áreas dos triângulos" e "soma de um número infinito de distâncias" não eram exatamente equivalentes. Mesmo assim, colocando a lei a prova, ao compará-la com os dados observacionais relativos à Terra, Kepler confirmou que a teoria das áreas fornecia excelentes resultados.

Agora faltava determinar a forma da órbita. Se a órbita fosse circular, bastariam três observações, pois três pontos definem um círculo. Os pontos deveriam ser observados em oposição, já que em oposição é irrelevante se é a Terra ou o Sol que se move, pois as três posições estão alinhadas. Tycho tinha observado dez oposições de Marte entre 1580 e 1600, às quais Kepler depois adicionou as de 1602 e 1604. Naturalmente, qualquer conjunto de três observações deveria resultar na mesma órbita. Como bem sabemos hoje, Marte era o planeta externo, entre os então conhecidos, com maior excentricidade, , e um círculo não se ajustava às observações. Mesmo introduzindo um equante, Kepler não conseguia ajustar as observações a um círculo com um erro menor que 8', enquanto a precisão das observações de Tycho eram da ordem de 1'. Prosseguindo em seus estudos, concluiu que a órbita de Marte não deveria ser um círculo, o que constituía uma ruptura com a tradição, uma vez que o movimento circular era considerado um conceito de perfeição dos céus. Kepler conseguiu determinar as diferentes posições da Terra após cada período sideral de Marte, e assim conseguiu traçar a órbita da Terra. Encontrou que essa órbita era muito bem ajustada por um círculo excêntrico, isto é, com o Sol um pouco afastado do centro. Finalmente, passou à tentativa de representar a órbita de Marte com uma oval, mais achatada perto do periélio e mais dilatada perto do afélio. Utilizou todos os termos clássicos da geometria astronômica para descobrir alguma regularidade ou similaridade para explorar, pois precisava ligar um círculo a um ovóide e descobriu que uma elipse se ajustava muito bem aos dados. A posição do Sol coincidia com um dos focos da elipse. Ficou assim explicada também a trajetória quase circular da Terra, com o Sol afastado do centro. Um extensivo estudo sobre outras possíveis curvas resultou na elipse como a melhor descrição das órbitas (primeira lei de Kepler).

As órbitas elípticas não foram bem acolhidas por seus contemporâneos. Mästlin, Fabricius e Longomontanus chegaram até mesmo a criticar Kepler por sua obstinação em exigir justificativas físicas em seus modelos. Ele, Kepler, sustentava que a astronomia não deve se fundamentar em hipóteses fictícias, mas em causas físicas. Até Galileu que conhecia suas leis ainda conservaria as órbitas circulares no *Diálogo sobre os dois máximos sistemas*.

O livro em que Kepler divulgou a primeira e a segunda lei, o *Astronomia Nova*, foi terminado em 1606 mas só foi publicado em 1609, devido às dificuldades de Kepler em imprimir suas obras e também pela dificuldade em obter a concordância dos herdeiros de Tycho Brahe, pois a obra foi concebida a partir dos trabalhos deste.

**A importância da invenção dos logaritmos para a terceira Lei de Kepler**

Kepler pretendia demonstrar que as leis da harmonia regem todo o cosmos e, para alcançar tal objetivo, em sua obra *Harmonia do Mundo* ele procura proporções harmônicas nos movimentos celestes. Ele observa que a consonância seleciona apenas certas relações numéricas e que, entre todos os intervalos, destaca-se a superioridade da quinta, definida pela relação 3/2. Dedica numerosas páginas a estas questões, citando diversas teorias e notando interessantes particularidades. A maior parte das reconstituições históricas considera que Kepler chegou ao expoente correto 3/2 depois de múltiplas tentativas. Certos historiadores da ciência, dentre os quais Alexandre Koyré, julgam o procedimento bem pouco kleperiano, e acreditam que os interesses harmônicos do astrônomo orientaram sua busca. O número 3/2 é base do sistema musical pitagórico e está em perfeito acordo com as intenções da Harmonia do mundo. Pitágoras de Samos por volta de 540 a.C. demonstrou como números e equações podiam ser usados para ajudar a formular teorias científicas. Pitágoras explica a harmonia da música através da harmonia dos números. Kepler afirmava que os movimentos do Sol, da Lua e dos planetas através do céu geravam notas musicais especiais, determinadas pelo comprimento de suas órbitas. Segundo Kepler, com proporções numéricas específicas o universo permaneceria sempre em harmonia.

"Na conclusão de *Harmonia do Mundo* o autor resume o percurso que, em 24 anos, o conduziu à descoberta da terceira lei. Numa síntese lúcida, ele reconstitui a sucessão das diversas hipóteses, a maneira pela qual chegou a descobrir seus erros e, por fim, a iluminação final, que lhe permitiu confirmar sua própria concepção harmônica do Universo." [18] Mas é curioso que depois de longos 17 anos de busca, Kepler encontra sua relação logo após a invenção dos logaritmos, e como é sabido, ele teve o conhecimento destes antes de publicar a sua terceira lei.

Ao se findar o século XVI, um dos grandes desafios da matemática consistia em encontrar meios de simplificar os cálculos aritméticos, visando em especial às necessidades da astronomia. Alguns procedimentos então usados com essa finalidade estavam longe do ideal. Era o caso da prostaférese (adição e subtração, em grego), consistindo na conversão de produtos em somas, mediante relações trigonométricas como, por exemplo,

$$2\cos(x)\cos(y) = \cos(x+y) + \cos(x-y). \tag{1}$$

Esse ponto de estrangulamento seria eliminado com a criação dos logaritmos, no século XVII. É interessante notar que, embora os logaritmos resultem da relação inversa da potenciação, à época em que surgiram ainda não se usavam expoentes em matemática [19].

Jobst Bürgi (1552-1632) foi o homem mais hábil e o mais famoso que trabalhou com relógios na sua época. Ele também fez instrumentos científicos importantes para o Landgraf de Hesse-Kassel Wilhelm der Weise, que combinou regendo o seu estado com sendo um astrônomo de primeira classe (embora os historiadores normalmente não mencionem o fato, as observações de Landgraf, particularmente as das estrelas fixas, foram em geral pelo menos tão precisas quanto Tycho Brahe). Depois, Bürgi também trabalhou em Praga para o Imperador Rodolfo II, e o sucessor dele Mathias. Ele se interessou por matemática e parece ter sido Kepler, o então matemático imperial, que persuadiu-o a escrever seu trabalho original e interessante em logaritmos (o manuscrito está em grande parte na letra de Kepler). O seu método é diferente do método de Napier e parece ter sido inventado independentemente por volta do ano 1600, mas só em 1620 publicou um trabalho a respeito, seis anos depois de Napier anunciar sua descoberta ao mundo. Bürgi afirmava ser o inventor dos logaritmos Acredita-se que Napier teve a idéia primeiro, porque a abordagem de Napier era geométrica ao passo que a de Bürgi era algébrica. Uma grande questão a ser resolvida. [20]

Figura 6. Jobst Bürgi e John Napier são os criadores da idéia de logaritmos em trabalhos independentes, quase concomitantes, o primeiro a partir de noções algébricas e o segundo a partir de noções geométricas. [21, 22]

John Napier (1550-1617) era um matemático amador escocês, educado inicialmente na universidade de St. Andrew, na Inglaterra e, posteriormente, em local desconhecido no continente europeu, provavelmente na universidade de Paris. Em 1571, voltou à Escócia e se dedicou à sua propriedade e tomou parte nas controvérsias religiosas do seu tempo. Seu estudo de matemática era, portanto, só um passatempo. Em 1614, Napier publicou o seu *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* que continha uma descrição dos logaritmos, um conjunto de tabelas e regras para o uso deles. Suas tabelas de logaritmos de funções trigonométricas foram usadas durante quase um século. Napier dedicou pelo menos vinte anos a essa teoria, tendo finalmente explanado os princípios de seu trabalho em termos geométricos, que são abordados no livro. Napier estava inteirado do método da prostaférese tanto que, inicialmente, restringiu seus logaritmos aos senos dos ângulos. Em 1615, Henry Briggs viajou até Edimburgo para dar o tributo de seu reconhecimento ao grande inventor dos logaritmos. Nesta visita, Napier e Briggs concordaram que as tábuas de logaritmos fossem na base 10, devido ao fato do nosso sistema de numeração ser decimal, o que originou os logaritmos briggsianos ou comuns (decimais), como são conhecidos desde então. A palavra *logaritmo* significa "número de razão" e foi adotada por Napier depois de ter usado inicialmente a expressão *número artificial*. Briggs introduziu a palavra *mantissa*, que é um termo latino de origem etrusca que significava inicialmente "adição" ou "contrapeso" e que, no século XVI, passou a significar "apêndice". O termo *característica* também foi sugerido por Briggs e foi usado por Vlacq. Uma curiosidade: as primeiras tábuas de logaritmos comuns costumavam trazer impressas tanto a característica como a mantissa; foi no século XVIII que começou a praxe atual de só se imprimir a mantissa. [23, 24]

# 4. Proposta de apresentação em aula.

Utilizando papel milimetrado, papel log-log, e um pouco de geometria, álgebra e análise gráfica, determinaremos as três leis do movimento planetário de Kepler.

### A primeira lei de Kepler

Os pontos das Tabelas 1 e 2 com as coordenadas das posições da órbita de Marte e Terra, respectivamente, foram retirados do sitio eletrônico do *Institut de Mécanique Celeste et de Calcul des Ephémérides* [8], instituição pública francesa responsável oficial pelo cálculo das efemérides. Neste sitio podemos escolher não apenas o nome do planeta, mas, também, o sistema de referência (heliocêntrico, no nosso caso), o número de posições na órbita que desejamos e o intervalo de tempo entre elas. Este procedimento pode ser repetido para todos os planetas do Sistema Solar, porém escolhemos esses dois planetas para apresentar a nossa abordagem de aula.

**Tabela 1. Coordenadas das posições da órbita de Marte.**

| Data dos pontos | Ângulo (θ) | Distância R (U.A.) | R cos (θ) | R sen (θ) |
|---|---|---|---|---|
| 01/01/2007 | -21° 30' 42.0319" | 1.514322551 | -0,9782 | 0,2079 |
| 27/02/2007 | -24° 38' 21.6264" | 1.442968616 | 0,9904 | 0,1385 |
| 25/04/2007 | -19° 19' 46.6079" | 1.393038335 | 0,3211 | -0,9470 |
| 21/06/2007 | -06° 46' 47.4975" | 1.383473633 | 0,2914 | -0,9566 |
| 17/08/2007 | 07° 47' 4.9487" | 1.418283866 | -0,0118 | 0,9999 |
| 13/10/2007 | 19° 9' 33.3813" | 1.483470715 | 0,6549 | 0,7558 |
| 09/12/2007 | 24° 24' 7.8002" | 1.556914974 | 0,8238 | -0,5669 |
| 04/02/2008 | 23° 14' 40.0596" | 1.619124996 | 0,3326 | -0,9431 |
| 01/04/2008 | 17° 15' 47.2034" | 1.657257850 | 0,6874 | -0,7262 |
| 28/05/2008 | 08° 21' 1.2608" | 1.664813873 | -0,4943 | 0,8693 |
| 24/07/2008 | -02° 1' 14.3929" | 1.640599688 | -0,6333 | -0,7739 |
| 19/09/2008 | -12° 30' 59.6602" | 1.588490471 | 0,5995 | -0,8004 |

* 1 UA – $1,495\times10^{13}$cm. Uma unidade astronômica (UA) corresponde a distância média entre a Terra e o Sol.

O sítio nos fornece a data das distâncias R do planeta em relação ao Sol e o ângulo que esta posição R faz com um determinado eixo de referência. Mais adiante revelamos que este eixo é o eixo maior da órbita elíptica do planeta, considerando a reta que une o planeta em sua posição mais próxima do Sol (periélio), o Sol e o planeta em sua posição mais afastada do Sol (afélio). As coordenadas (Rcos $\theta$, Rsen $\theta$) foram calculadas a partir desses dados. Esse procedimento pode ser feito junto com os alunos para algumas posições e para os demais podemos simplesmente apresentar à eles a tabela com o cálculo já realizado.

Com as coordenadas das posições das órbitas de Marte fazemos um gráfico no papel milimetrado, utilizando doze intervalos de tempo regulares do ano marciano, conforme indicado na Figura 7. Ressaltando que no ponto marcado com um *x (0,0)* está localizado o Sol, pois estamos utilizando o sistema heliocêntrico como referência.

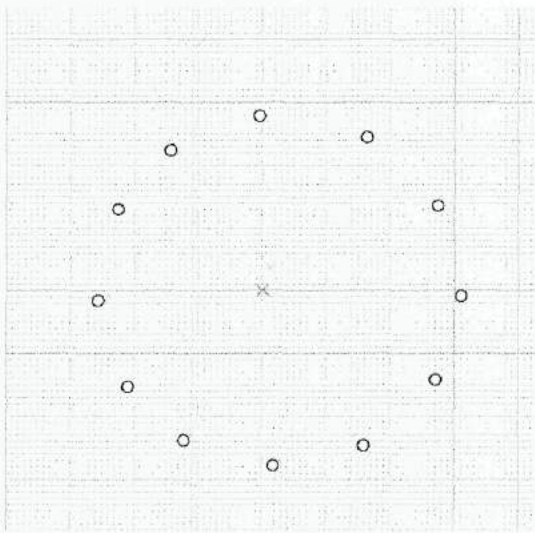


Figura 7 Localizando o planeta Marte em sua órbita em torno do Sol (indicado pelo "x"), em 12 intervalos de tempo regulares do ano marciano, sobre uma folha de papel milimetrado.

Logo em seguida tentamos, geometricamente, traçar um círculo por esses pontos. Ao traçarmos a mediatriz dos segmentos de reta que unem dois pontos, essas mediatrizes se cruzam em um único ponto de concorrência que é chamado de circuncentro. Ele é o centro do círculo que circunscreve os triângulos. Aos traçarmos as outras mediatrizes elas não se encontram nesse ponto. Como ilustrado na Figura 8, observamos que este círculo não consegue passar por todas as posições indicadas do planeta em sua órbita. Então, concluímos que a órbita deste planeta não pode ser circular em torno do Sol.

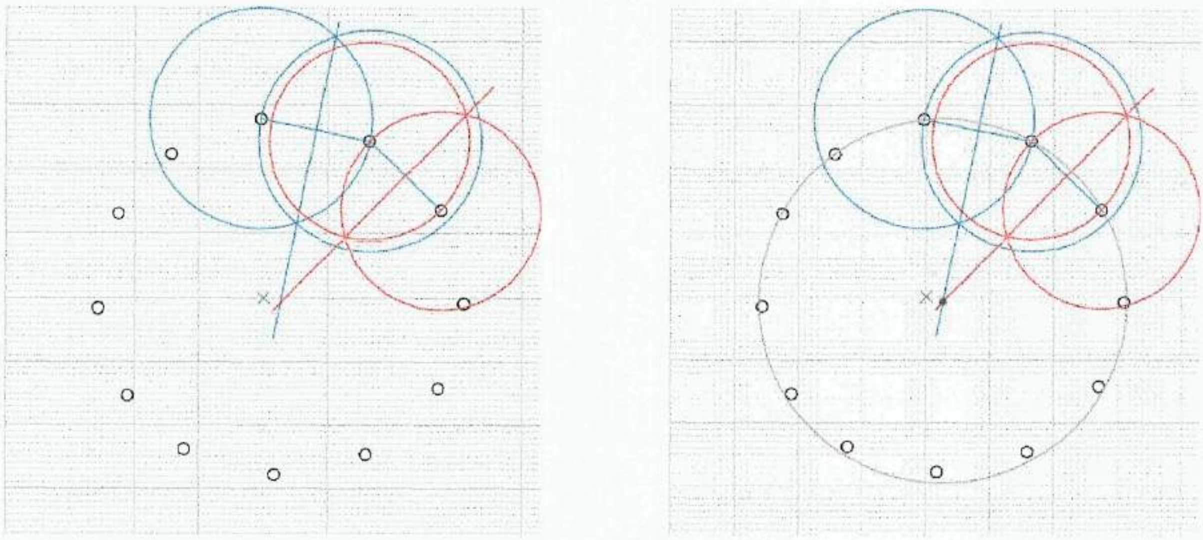


Figura 8 Mostrando geometricamente a impossibilidade de se descrever uma órbita circular para Marte a partir das posições medidas.

Se repetirmos este procedimento para as órbitas de todos os outros planetas do Sistema Solar (Mercúrio, Vênus, Terra, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno), observamos que também não conseguiremos traçar um círculo por elas.

Um observador atento como Kepler com certeza perceberia, a partir da Tabela 1, que os valores de distâncias entre Marte e o Sol já indicam que a órbita do Marte não pode ser um círculo centrado no Sol. Entretanto, vale lembrar que Kepler não possuía a quantidade de dados disponíveis hoje e, inicialmente, teve que trabalhar com apenas dez coordenadas, estabelecidas inicialmente por Ptolomeu e Copérnico e corrigidas por Tycho Brahe entre 1580 e 1600. Kepler terá total acesso a esses dados corrigidos somente após a morte de Tycho, em 1601.

Kepler percebe a dificuldade em ajustar um círculo aos coordenadas astronômicas de Tycho Brahe e decide acrescentar mais duas observações, o que lhe custou mais dois anos de trabalho. Para tornar as coisas ainda piores, a distância Terra-Sol assim como de outros planetas apresenta uma variação bem menor em torno do seu valor médio, sugerindo fortemente que as órbitas apresentavam um padrão circular.

Esta dificuldade em definir as órbitas como círculos perfeitos não pode ser verificada, por exemplo, a partir dos dados da Tabela 2, com as coordenadas das posições da órbita da Terra em relação ao Sol. Observemos que, neste caso, as distâncias entre a Terra e o Sol variam essencialmente somente quando são medidas com uma incerteza relativa menor que 1%. Do contrario, não poderemos distinguir duas distâncias diferentes em datas diferentes.

**Tabela 2. Coordenadas das posições da órbita da Terra.**

| Data dos pontos | Ângulo (θ) | Distância R (U.A.) | R cos (θ) | R sen (θ) |
|---|---|---|---|---|
| 01/1/2007 | 07° 24' 32.3982" | 0.983283251 | 0,0509 | -0,9987 |
| 31/1/2007 | -04° 19' 57.7897" | 0.985134925 | 0,8017 | -0,5977 |
| 02/3/2007 | -14° 54' 46.1219" | 0.990945023 | -0,0859 | 0,9963 |
| 01/4/2007 | -21° 50' 10.3160" | 0.999097238 | 0,5375 | 0,8433 |
| 01/5/2007 | -23° 12' 6.8661" | 1.007.412.942 | -0,9992 | -0,0393 |
| 31/5/2007 | -18° 38' 18.5266" | 1.013.771.204 | -0,9999 | 0,0141 |
| 30/6/2007 | -09° 32' 59.7678" | 1.016.614.214 | -0,2450 | 0,9695 |
| 30/7/2007 | 01° 48' 23.2936" | 1.015.258.104 | 0,9957 | -0,0924 |
| 29/8/2007 | 12° 55' 50.8643" | 1.010.016.346 | -0,4494 | 0,8933 |
| 28/9/2007 | 21° 1' 14.8762" | 1.002.156.857 | -0,5789 | 0,8154 |
| 28/10/2007 | 07° 24' 32.3982" | 0.993663825 | 0,3642 | 0,9313 |
| 27/11/2007 | 04° 19' 57.7897" | 0.986779167 | -0,7475 | 0,6643 |

Na Figura 9, a seguir, localizamos a Terra em sua órbita em doze intervalos de tempo regulares do ano terrestre:

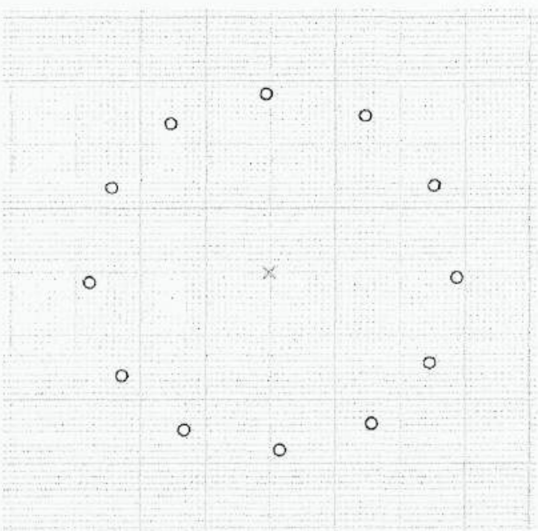


Figura 9 Localizando o planeta Terra em sua órbita em torno do Sol (indicado pelo "x"), em 12 intervalos de tempo regulares do ano terrestre, sobre uma folha de papel milimetrado.

Após realizarmos os procedimentos geométricos descritos anteriormente, a Figura 10 nos revela que também a órbita da Terra não é bem descrita por um círculo perfeito tendo o Sol como centro:

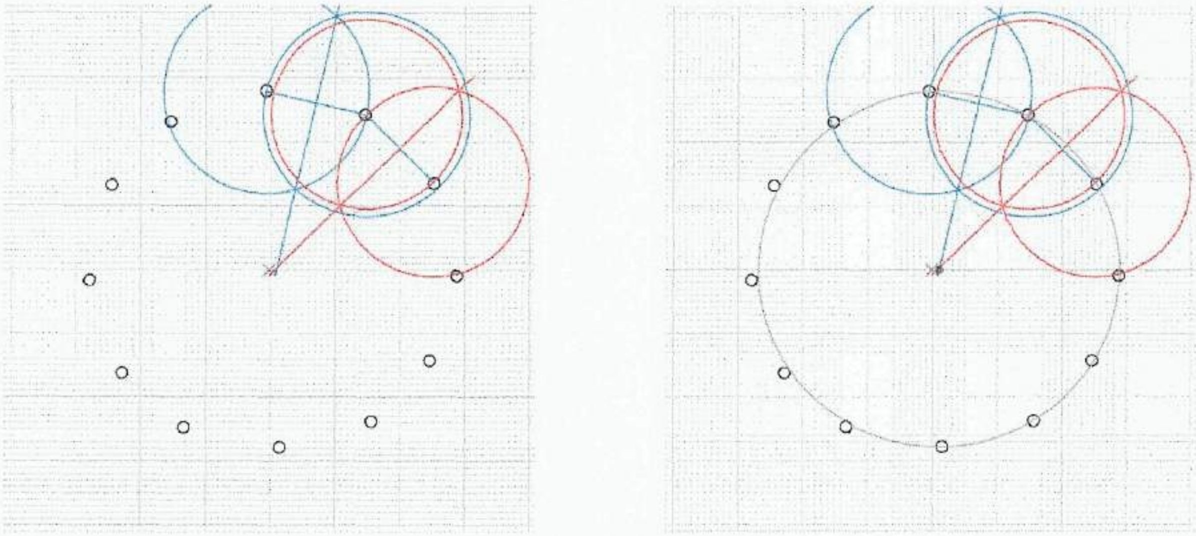
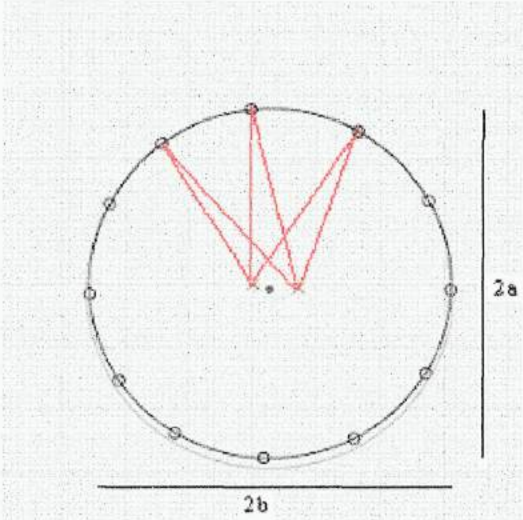


Figura 10 Mostrando geometricamente a impossibilidade de se descrever uma órbita circular para Terra a partir das posições medidas.

Então, analisando as Figura 8 e a Figura 10, concluímos que as órbitas não são círculos perfeitos mas sim ovais. Em seguida, testamos as propriedades das elipses nessa oval, conforme mostramos na Figura 11. Kepler, por fim, rompe com o dogma de considerar as órbitas como círculos perfeitos ou como uma combinação desses círculos e procura incansavelmente uma nova construção geométrica que se ajuste aos, agora, seus dados astronômicos.

Kepler experimenta várias figuras geométricas para representar as órbitas planetárias e ao final escolhe a elipse, cujo eixo maior $2b$ corresponde a reta que une o planeta em sua posição mais próxima do Sol (periélio), o Sol e o planeta em sua posição mais afastada do Sol (afélio). Sabemos que em qualquer ponto da curva, para uma elipse, a soma das distâncias desse ponto aos dois focos é constante e igual ao seu eixo maior. Os pontos (órbita do planeta) giram em torno de dois focos (indicados por $x$, na Figura 11) e, em um destes focos, está o Sol. As cordas, em vermelho, que ligam os dois focos ao planeta, quando somadas, dão o valor de $2b$.

Podemos demonstrar isto utilizando régua e compasso: Medimos inicialmente o valor de $2b$; depois, a distância $R$ do planeta ao Sol, que são os valores conhecidos; logo em seguida, fazemos a diferença dessas distâncias e obtemos a distância do outro foco. Com o compasso determinamos a posição geométrica deste segundo foco. Esta posição é dada pela interseção das diferentes circunferências de raio $2b - R$ centrada em cada um dos pontos das órbitas e concluímos que a curva para essas medidas pode ser uma elipse.



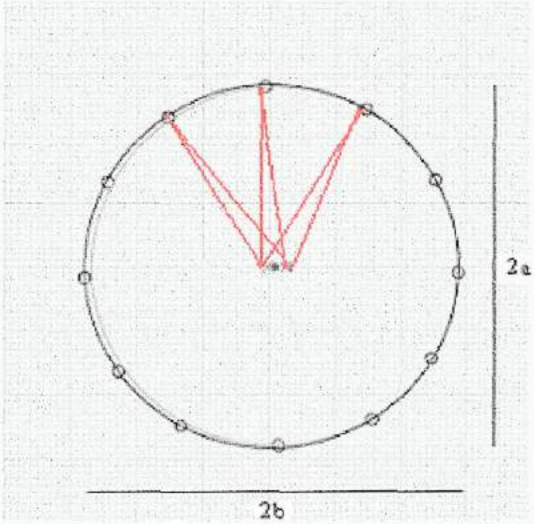




Figura 11. Verificação da órbita elíptica Marte e Terra respectivamente. Os focos da elipse estão indicados por "x" e o ponto é o centro do círculo.

Na mesma Figura 11 observamos também a tentativa de se passar um circulo pelos pontos (linha clara) e a órbita elíptica que acabamos de provar (linha escura). Observamos com os alunos que os eixos $2a$ e $2b$ são ortogonais e que os dois focos $F_1$ e $F_2$ da elipse se encontram sobre o eixo $2b$. A interseção desses dois eixos define o centro geométrico $O$ da elipse e os dois focos $F_1$ e $F_2$ são portanto eqüidistantes ao ponto $O$ e definem a semi-distância focal $c$. Podemos, ainda, definir os pontos $A_1$ e $B_1$ e $A_2$ e $B_2$ os pontos extremos dos eixos $2a$ e $2b$. Deste modo, os segmentos $OA_1$ e $OB_1$ definem os catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa $F_1 A_1$. Das figuras, e da definição de elipse, podemos escrever a seguinte relação entre as distâncias $b$ e $c$:

$$F_1A_1 + F_2A_1 = 2b \tag{2}$$

e, do teorema de Pitágoras, temos que

$$\begin{aligned} F_1A_1 &= \sqrt{a^2 + c^2}; \\ F_2A_1 &= \sqrt{a^2 + c^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Portanto,

$$\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}=2b\,. \tag{4}$$

Resolvendo a Eq. (3) para *c* obtemos

$$c=b\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}\,. \tag{5}$$

Se dividirmos a semi-distância focal *c* pelo semi-eixo maior *b*, definimos o achatamento da elipse ou a sua excentricidade *e*:

$$e=\frac{c}{b}=\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}\,. \tag{6}$$

Assim, menor é a razão entre os semi-eixos *a* e *b*, maior é a excentricidade da elipse; quanto mais a razão se aproxima da unidade, menor é a excentricidade da elipse; e, quando os eixo são iguais, nós temos o círculo. Deste modo, excentricidade *e*

$$e=\sqrt{1-(a/b)^2} \tag{7}$$

permite determinar o grau de achatamento da órbita elíptica do planeta. Acabamos, assim, por enunciar a primeira lei de Kepler:

> *"Qualquer planeta gira em torno do Sol descrevendo órbita elíptica, onde o Sol ocupa um dos focos"*.[25]

**A segunda lei de Kepler**

Podemos explorar as mesmas figuras representadas na Figura 11 para construir a segunda lei de Kepler. Empregando as elipses da figura, selecionamos dois pares de pontos a intervalos de tempos iguais e calculamos a área varrida pela reta que une Marte ou a Terra ao Sol, como representado na Figura 12. Como estamos utilizando papel milimetrado, fica fácil concluirmos que estas áreas são aproximadamente iguais, contando todos os quadradinhos de cada secção definida pelo perímetro composto pela distância planeta-Sol, no início e no fim do intervalo de tempo considerado, unidos pelo arco da órbita descrito pelo planeta no mesmo intervalo de tempo.

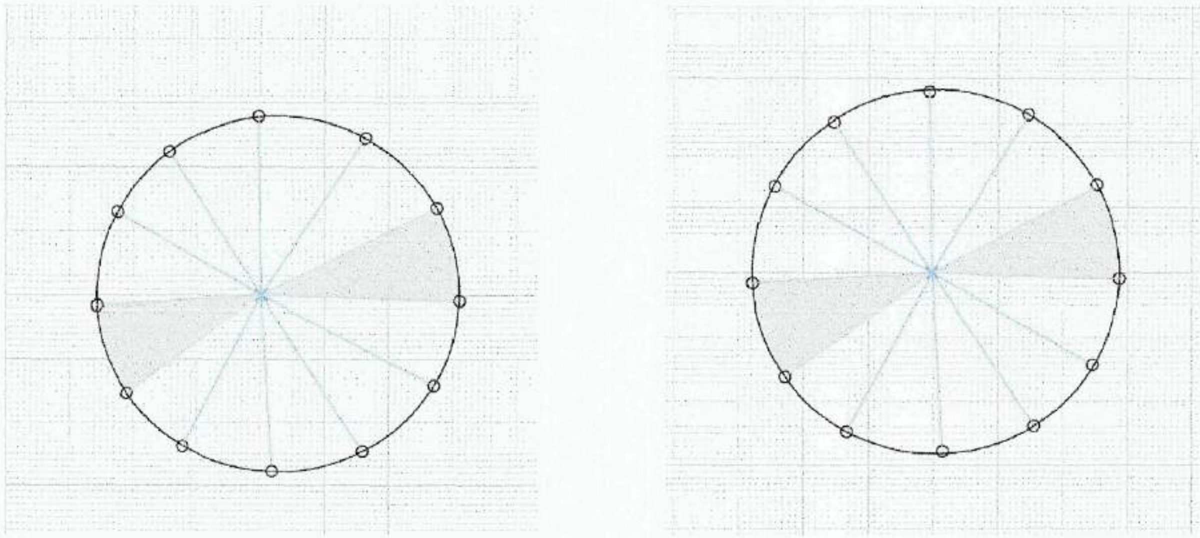


Figura 12. Observando a lei das áreas para Marte e Terra. Conta-se o número de milímetros quadrados do papel milimetrado, delimitados pela órbita e as posições radiais.

O cálculo das áreas está organizado na Tabela 3. Verificamos essa afirmação fazendo um gráfico da área varrida pelos planetas em um dado intervalo de tempo. Seguindo os dados da Tabela 3, obtidos a partir da Figura 12, traçamos os gráficos da Figura 13, onde observamos a variação linear da área com o tempo.

Podemos observar, a partir da Figura 13, que a área varrida pelo raio da órbita do planeta é a mesma para um mesmo intervalo de tempo dado, independente de qual ponto da órbita é considerado como ponto de partida. Como as distâncias entre o planeta e o Sol não são constantes (primeira lei), somos obrigados a concluir que os arcos da órbita para o dado intervalo de tempo também devem variar e, assim manter a área constante.

Sabemos da primeira lei que, próximo ao Sol (periélio) a distância planeta-Sol é a menor possível e, assim, podemos concluir que o arco de órbita em um dado intervalo de tempo é o maior possível. O mesmo raciocínio deve prevalecer quando o planeta se encontra na posição mais distante ao Sol (afélio). Neste caso, o arco da órbita deve ser o menor possível. Como o planeta deve percorrer estas distâncias em um mesmo intervalo de tempo, podemos concluir, portanto, que a a velocidade do planeta é maior no periélio do que quando ele se encontra no afélio. Percebemos, então que o planeta descreve a sua órbita em velocidades diferentes, dependendo da sua posição em relação ao Sol: Quando ele está mais afastado do Sol, ele se desloca mais lentamente; quando ele está mais próximo ao Sol, o planeta se desloca mais rapidamente. É interessante notar que estas observações foram feitas *antes* de Kepler estabelecer a primeira lei.

**Tabela 3. Áreas varridas por Marte e Terra em intervalos de tempo iguais.**

| Marte | | Terra | |
|---|---|---|---|
| **Intervalos de tempo (dias terrestres)** | **Área varrida ($mm^2$)** | **Intervalos de tempo (dias terrestres)** | **Área varrida ($mm^2$)** |
| 57 | 230 | 30 | 242 |
| 114 | 455 | 60 | 464 |
| 171 | 690 | 90 | 685 |
| 228 | 910 | 120 | 891 |
| 285 | 1139 | 150 | 1081 |
| 342 | 1367 | 180 | 1287 |
| 399 | 1594 | 210 | 1501 |
| 456 | 1759 | 240 | 1681 |
| 513 | 1976 | 270 | 1888 |
| 570 | 2178 | 300 | 2101 |
| 627 | 2346 | 330 | 2293 |
| 684 | 2575 | 360 | 2529 |

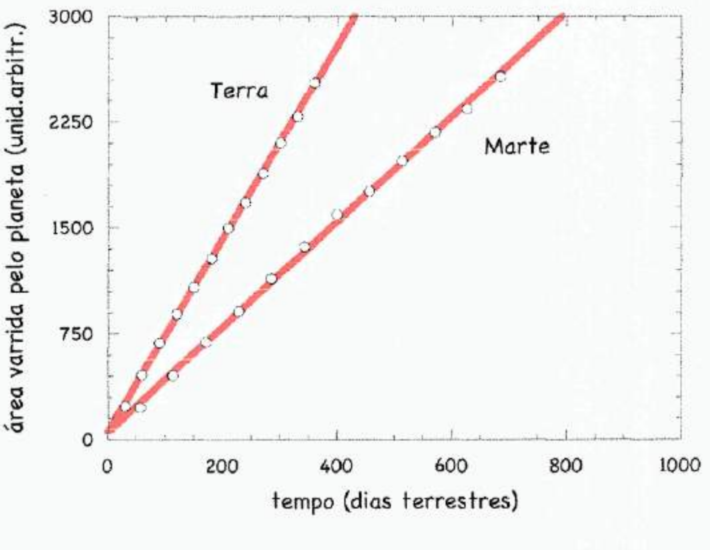



Figura 13. Curvas obtidas para a área varrida pelos planetas Marte e Terra, respectivamente, em função do tempo de varredura.

Temos assim a segunda Lei de Kepler:

*"O raio vetor que une o Sol a um planeta varre superfícies iguais em tempos iguais".*[25]

**A terceira lei de Kepler**

Analisamos agora a relação entre os períodos $T$ de revolução dos planetas em torno do Sol e o eixo maior $b$ da órbita elíptica que liga o planeta ao Sol. Estes dados estão organizados na Tabela 4, a seguir:

**Tabela 4. Período de revolução $T$ e o eixo maior $b$ e menor $a$ da órbita elíptica dos planetas.**

| Planeta | Período $T$ (anos terrestres) | Eixo maior $b$ (UA)* | Eixo menor $a$ (UA)* | Excentricidade $e$ |
|---|---|---|---|---|
| Mercúrio | 0,241 | 0,387 | 0,379 | 0,205 |
| Vênus | 0,615 | 0,723 | 0,723 | 0,006 |
| Terra | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 0,016 |
| Marte | 1,881 | 1,523 | 1,516 | 0,093 |
| Júpiter | 11,86 | 5,202 | 5,196 | 0,048 |
| Saturno | 29,60 | 9,554 | 9,540 | 0,055 |
| Urano [26] | 83,70 | 19,218 | 19,198 | 0,046 |
| Netuno [26] | 165,4 | 30,109 | 30,108 | 0,008 |
| Plutão [26] | 248,0 | 39,60 | 38,383 | 0,246 |

Estes mesmos dados podem ser analisados com o auxílio da representação gráfica, ilustrada na Figura 14. Ao observarmos a figura, percebemos claramente que a relação entre os parâmetros é não-linear, mas a figura não sugere qual a relação mais adequada para representar a função. Kepler vai se dedicar durante dezessete anos para determinar esta função e vai finalmente conseguir após a invenção dos logaritmos por Napier.

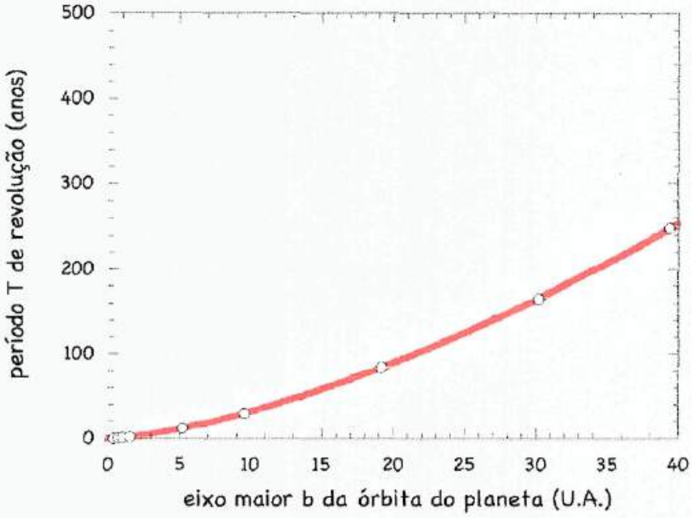



Figura 14. Curva obtida do período de revolução versus o eixo maior da órbita dos planetas.

Neste momento discutimos com os alunos a técnica de linearização desta curva, empregando logaritmos. Logaritmos é matéria de 1ª série do ensino médio assim como as leis de Kepler, logo podemos dar uma maior motivação aos alunos quando estes ficam sabendo da utilidade de ferramentas matemáticas na física, astronomia ou outras áreas.

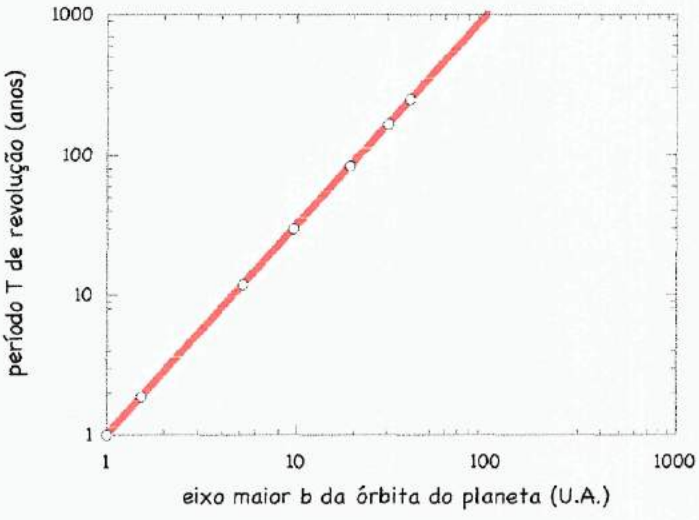



Figura 15. Gráfico da linearização da curva obtida na Figura 14.

Sugerimos aos alunos que façam um gráfico em escala logarítmica para podermos analisar a situação física envolvida no problema. Este procedimento está ilustrado na Figura 15. Verificamos agora o coeficiente linear $\alpha$ e angular $\beta$ da reta obtida. Do gráfico da Figura 15 temos uma reta que deve satisfazer a equação:

$$y = \alpha + \beta x \tag{8}$$

onde

$$\alpha = \log 1 = 0 \text{ e } \beta = 3/2. \tag{9}$$

Como

$$y = \log T \text{ e } x = \log b, \tag{10}$$

obtemos então o seguinte resultado:

$$\log T = \frac{3}{2}\log b. \tag{11}$$

Empregando as propriedades dos logaritmos, podemos reescrever o resultado da Eq. (11) na forma de potência: $T^2 = kb^3$, ressaltando que em unidades astronômicas temos $k = 1$.Com isto claramente podemos enunciar a terceira lei de Kepler, na sua forma moderna:

> *"Os quadrados dos períodos de revolução dos planetas são proporcionais aos cubos do semi-eixo maior de suas órbitas."* [25, 27]

# Conclusões

Com este modelo de aula conseguimos repetir alguns passos de Kepler para a determinação de suas leis, construindo-as junto com os alunos. Desenvolvemos instrumentos matemáticos de expressão e raciocínio, permitindo que os alunos construam abstrações matemáticas não somente no desenvolvimento das três leis do movimento planetário, mas também nas habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico contemplando os objetivos educacionais da Resolução CNE/98 e seguindo a orientação dos Programas Curriculares Nacional Ensino Médio – PCNEM.

Um modelo preliminar desta aula foi aplicado em uma turma de ensino médio e teve uma resposta satisfatória. Os alunos participaram ativamente na construção das leis de Kepler e demonstraram grande interesse durante a aula, pois esta saiu dos parâmetros habituais em que somente o professor fala e eles permanecem como ouvintes. Conseguimos construir em pouco tempo as idéias que custaram séculos para serem estruturadas.

Introduzimos uma abordagem alternativa na qual utilizamos os dados tabelados para construirmos o movimento planetário, evitando somente desenhar uma elipse, e demonstramos como esta é obtida a partir de uma curva; Calculamos a área varrida pelos planetas, fazendo uma análise geométrica e uma análise gráfica verificando a segunda lei; e enunciamos a terceira lei com a ajuda dos logaritmos, utilizando métodos de linearização de curvas. Um ponto de destaque é a proposta de interdisciplinaridade entre professores de matemática e física, propondo uma prática de ensino contextualizada.

Quando os alunos desenvolvem a teoria junto com o professor é permitido aos estudantes que estes organizem os seus conceitos, planejem as estratégias de trabalho, e desenvolvam métodos de investigação quando se encontram frente a uma situação desconhecida. Podemos observar, que a interação dos alunos com o professor desperta o interesse pelo conhecimento, e é capaz de influenciar positivamente na formação intelectual e cognitiva do aluno, o que é fundamental para que haja aprendizado em sala de aula.

Nesta proposta de trabalho, a preocupação quando da elaboração e aplicação dessa seqüência didática foi sempre a de propor ao aluno a construção de situações significativas, privilegiando as atividades de observação e reflexão para que o aluno pudesse tirar suas próprias conclusões e favorecesse a construção do seu conhecimento.

# Apêndices

**Como eram feitas as medidas das distâncias.**

Os gregos já tinham determinado que a Terra era uma esfera. O primeiro a medir o seu tamanho foi Eratóstenes, que nasceu em 276 a.C. Ele ficou sabendo de um poço (B) situado em Siena, no Sul do Egito, que ao meio-dia de 21 de junho, o dia do solstício de verão, o Sol brilhava diretamente dentro do poço e iluminava tudo até o fundo. Percebeu que, naquele dia em especial, o Sol deveria estar exatamente acima, ou seja, com raios paralelos a Siena, então ele fincou, ao mesmo tempo, em Alexandria, uma vareta (A) verticalmente no solo e mediu o ângulo (7,2°) entre a vareta e os raios do Sol (S). Eratóstenes mediu a distância entre Siena e Alexandria que era de 5.000 estádios que é equivalente a 7,2°/360°, ou 1/50 da circunferência da Terra. Então a circunferência total da Terra deve ser de 250.000 estádios. O estádio olímpico media 185 metros, então a circunferência da Terra ficaria em 46.250 quilômetros, que é apenas 15% maior do que valor verdadeiro de 40.100 quilômetros. O estádio egípcio era diferente do estádio olímpico e equivalia a 157 metros, o que nos dá uma circunferência de 39.250 quilômetros e uma precisão de 2% [28].

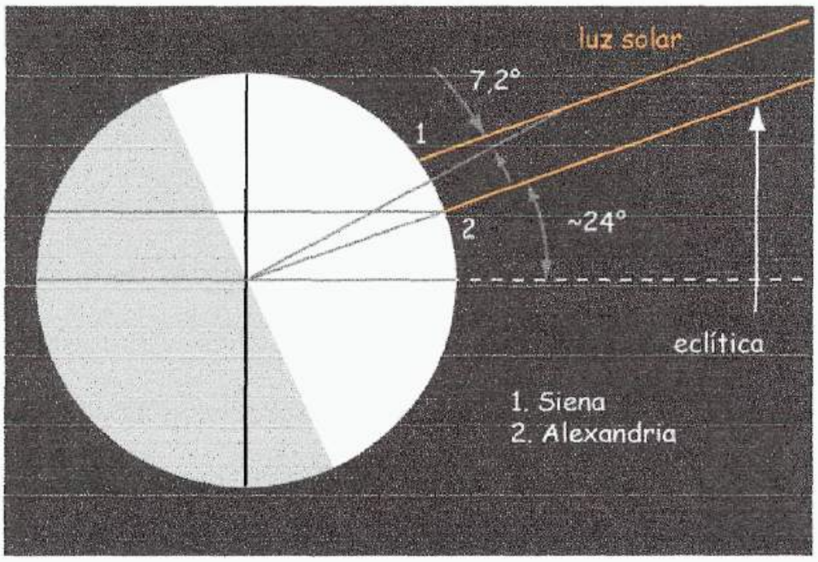



Figura 16. Medição da circunferência da Terra calculada por Eratóstenes.

Agora Eratóstenes podia deduzir o tamanho da Lua e do Sol, e calcular suas distâncias a Terra. Já se sabia que o diâmetro da Lua era de cerca de um quarto do da Terra, por observações realizadas durante o eclipse lunar comparando-se o tamanho da sombra da Terra projetada sobre a Lua. A circunferência da Terra media 40.000 Km, então o diâmetro é aproximadamente (40.000 : $\pi$) quilômetros, ou seja, em torno de 12.700 quilômetros, portanto o diâmetro da Lua é de aproximadamente 3.200 quilômetros. Tendo estimado o tamanho da Lua, é relativamente fácil determinar sua distância. Notamos primeiro que podemos tapar a Lua com a ponta do dedo na extremidade de um braço esticado, daí se torna claro que a proporção entre a altura da unha e o comprimento de um braço é, aproximadamente, a mesma que existe entre o diâmetro da Lua e sua distância da Terra. O comprimento do braço é aproximadamente cem vezes maior que a unha, assim a distância até a Lua é aproximadamente cem vezes o seu diâmetro, o que nos leva a uma distância de 320.000 quilômetros.

Aristarco afirmou que era possível estimar a distância até o Sol usando o fato de que a Terra, a Lua e o Sol, formam um triângulo reto quando a Lua se encontra na metade de sua fase. Na meia-lua, mediu o ângulo mostrado na Figura 17. Usando uma trigonometria simples e a distância conhecida entre a Terra e a Lua, podemos determinar a distância Terra-Sol. O valor encontrado foi que o Sol estava vinte vezes mais distante do que a Lua. O ângulo correto é 89,85° e o Sol está quatrocentas vezes mais distante do que a Lua.

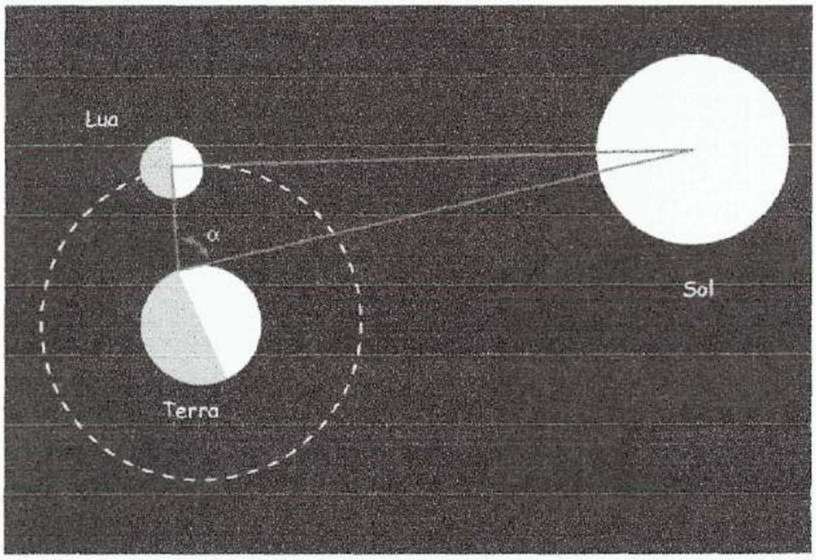



Figura 17. Medição da distância da Terra ao Sol.

A proporção entre o diâmetro do Sol e sua distância da Terra deve ser a mesma existente entre o diâmetro da Lua e sua distância da Terra, assim também pôde ser determinado o diâmetro do Sol.

As medições feitas eram imprecisas. Esses métodos de medidas não podiam ser aplicados aos planetas. Assim, além do Sol e da Lua, nada mais se sabia das distâncias celestes. Os únicos valores que os astrônomos podiam medir eram ângulos. A Tabela 5 corrige os valores citados.

**Tabela 5. Valores modernos das várias distâncias e diâmetros.**

| | |
|---|---|
| Circunferência da Terra | 40.100 km |
| Diâmetro da Terra | 12.750 km |
| Diâmetro da Lua | 3.480 km |
| Diâmetro do Sol | 1.390.000 km |
| Distância Terra – Lua | 384.000 km |
| Distância Terra – Sol | 150.000.000 km |
| Circunferência da Terra | 40.100 km |
| Diâmetro da Terra | 12.750 km |
| Diâmetro da Lua | 3.480 km |

**A Elipse e formas de construí-la**

As elipses são chamadas cônicas porque ficam configuradas pelo corte feito em um cone circular reto por um plano oblíquo em relação à sua base.

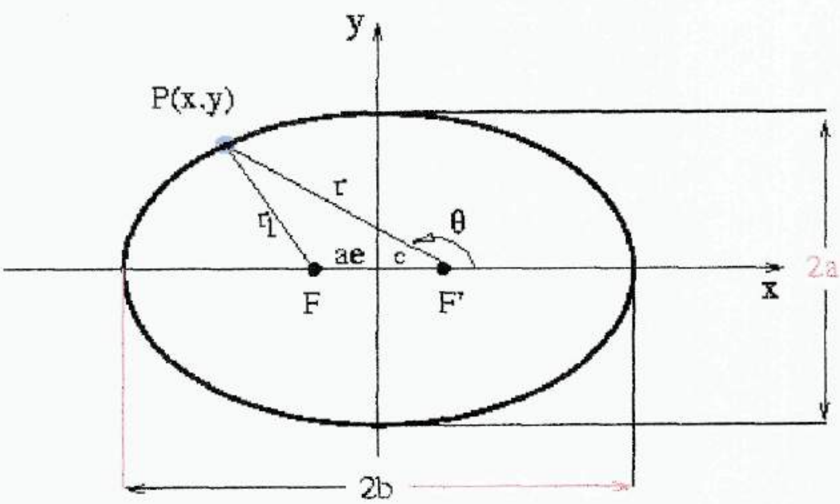



Figura 18. Representação geométrica de uma elipse. [29]

Elipse é um lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos do mesmo plano, denominados focos é constante e igual a $2b$. Sendo $F$ e $F'$ os focos, $P$ um ponto sobre a elipse, e $b$ o seu semi-eixo maior, então:

$$FP + F'P = 2b = constante\,. \tag{12}$$

Podemos traçar uma elipse pelo conhecimento do método do barbante, colocando uma tachinha em $F_1$ e outra em $F_2$, da Figura 19, e por elas amarrar um barbante de comprimento $L = L_1 + L_2$, podemos desenhar a elipse esticando o barbante e fazendo o lápis percorrer as posições que satisfazem $L = L_1 + L_2 = constante$.

Se dividirmos a semi-distância focal $c$ (distância do centro $O$ aos focos $F_1$ e $F_2$) pelo semi-eixo maior $b$, obteremos o achatamento da elipse, que é dado o nome de excentricidade $e$:

$$e = \frac{c}{b}. \tag{13}$$

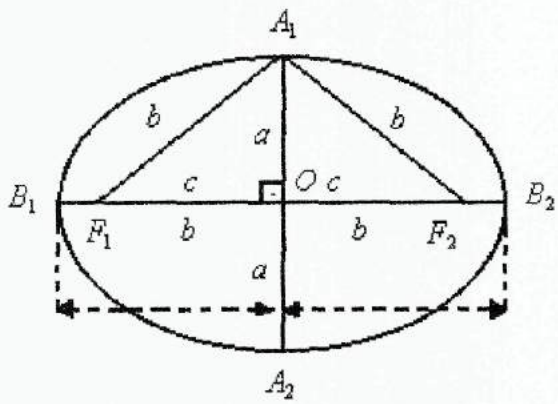



Figura 19. Representação da elipse com seus eixos: maior (b) e menor (a)

Pela definição de elipse, $2c < 2b$, então $c < b$ e, conseqüentemente, $0 < e < 1$. O círculo é um caso especial da elipse e poderíamos defini-lo como uma elipse de excentricidade nula. Quando a distância focal $2c$ e o semi-eixo maior $2b$ tenderem a valores infinitos, a elipse degenera numa parábola.

Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triangulo $OF_1A_1$ retângulo em $O$, da Figura 19, podemos escrever a seguinte relação fundamental:

$$b^2 = a^2 + c^2. \tag{14}$$

De onde obtemos:

$$e = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^2}. \tag{15}$$

Considerando um sistema de coordenadas conforme a Figura 20, em que $F = (-c, 0)$ e $F' = (c, 0)$, se um ponto $P = (x, y)$ pertence à elipse dada por $PF + PF' = 2b$ tem-se:

$$\sqrt{(x-c)^2 - y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2b. \tag{16}$$

Fazendo alguns cancelamentos, obtemos:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1. \tag{17}$$

Reescrevendo

$$a = \sqrt{b^2 - c^2}, \tag{18}$$

temos então a equação da elipse em coordenadas cartesianas:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{19}$$

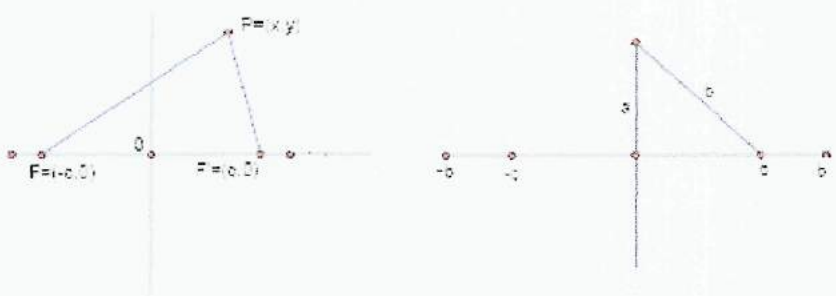


Figura 20. Sistema de coordenadas de F, F' e P.

Se fizermos uma mudança de coordenadas, podemos obter a equação da elipse em coordenadas polares. Seja um ponto $P(r, \vartheta)$ ou $P(x,y)$ sobre a elipse, onde $\vartheta$ é chamado de anomalia verdadeira. Pela lei dos cosenos:

$$r_1^2 = r^2 + (2be)^2 + 2r(2be)\cos\vartheta. \tag{20}$$

Por definição de elipse,

$$r_1 + r = 2b \,. \tag{21}$$

ou seja:

$$r_1 = 2b - r \,. \tag{22}$$

Substituindo (22) em (20), obtemos:

$$(2b - r)^2 = r^2 + 4b^2e^2 + 4rbe\cos\vartheta \,. \tag{23}$$

de onde obtemos a equação da elipse em coordenadas polares:

$$r = \frac{b\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\vartheta} \,. \tag{24}$$

**Potências e logaritmos**

Quando multiplicamos o número real e positivo $b$ por ele mesmo um número inteiro $n$ de vezes, obtemos as regras já familiares da potenciação:

$$b^0 = 1 \,; \quad b^n = b^{n-1}b \text{, se } n > 0 \,; \quad b^n = b^{n+1}/b \text{, se } n < 0 \,. \tag{25}$$

Estas regras definem a conhecida propriedade dos expoentes

$$b^{p+q} = b^p b^q \,; \quad \left(b^p\right)^q = b^{pq} \,, \tag{26}$$

onde $p$ e $q$ são dois inteiros quaisquer.

Seja $y$ um número real positivo tal que $y = b^r$, onde $r$ é um número racional diferente de zero. Dizemos que $b$ a $r$-ésima raiz de $y$ e escrevemos: $b = \sqrt[r]{x}$ . Desse modo,

$$y = b^{p/q} = \sqrt[q]{b^p} \,. \tag{27}$$

Esta definição é devida a Oresme (c. 1360) e estende a lei dos expoentes de forma a incluir os números racionais.

Finalmente, podemos definir $y = b^x$ para todos os valores reais de $x$ ao fazermos as seguintes considerações (para uma descrição mais detalhada, ver, por exemplo, Knuth [30]) Inicialmente definimos o número real $x$ tal que ele seja um número que apresenta uma expansão decimal

$$x = n + 0.d_1 d_2 d_3 \ldots = n + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \ldots + \frac{d_k}{10^k} + \ldots. \tag{28}$$

Esta representação significa que

$$n + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \ldots + \frac{d_k}{10^k} \leq x < n + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \ldots + \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}, \tag{29}$$

para todos os inteiros positivos $k$. Assim,

$$b^{n + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \ldots + \frac{d_k}{10^k}} \leq b^x < b^{n + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \ldots + \frac{d_k}{10^k} + \frac{1}{10^k}}. \tag{30}$$

Este procedimento define $b^x$ como um número real único, uma vez que a diferença entre os dois extremos pode ser feita diferente de zero para qualquer grau de acurácia desejado (definido pelo valor de $k$ considerado).

Dizemos então que o expoente $x$ é o logaritmo de $y$ na base $b$, e escrevemos esta afirmativa na forma: $x = \log_b y$. Com esta definição podemos escrever que

$$x = b^{\log_b x} = \log_b \left(b^x\right). \tag{31}$$

A partir da lei dos expoentes, também podemos escrever

$$\log_b (xz) = \log_b x + \log_b z \text{, se } x > 0 \text{, } z > 0 \text{,} \tag{32}$$

e

$$\log_b \left(z^x\right) = x \log_b z \text{, se } z > 0 \text{,} \tag{33}$$

No âmbito do Ensino Médio, usa-se bastante a base 10, uma vez que neste ambiente a base decimal recebe as preferências para o trabalho com o nosso sistema de numeração. Entretanto, podemos empregar os logaritmos em diferentes bases, segundo a conveniência do operador. Para passar de uma base a outra , empregamos a relação

$$\log_c(y) = \frac{\log_b y}{\log_b c}. \tag{34}$$

As equações (32), (33) e (34) formam as regras fundamentais para o emprego dos logaritmos. A escala loglog foi inventada em 1815 e foi só em 1850 que o oficial do exército francês Amédée Mannheim (1831-1906) padronizou as modernas réguas de cálculo.

nosso sistema solar pode ser encontrada em: SOBEL, D. Os Planetas. C.A. Malferrari. (trad.) Companhia das Letras. São Paulo, 2006.

[27] KITTEL, C., KNIGHT, W.D., RUDERMAN, M.A. Berkeley Physics Course. v.1, Mechanics, McGraw-Hill, NY, 1965, p.288; este livro foi traduzido para o português pelo prof. J. GOLDEMBERG, Curso de Física de Berkeley, v. 1, Mecânica, Edgar Blücher, 1970.

[28] SINGH, S., Big Bang, J. L. Calife (trad.). Editora Record, Rio de Janeiro, 2006, p.11-85.

[29] http://astro.if.ufrgs.br/movplan2/movplan2.htm

[30] KNUTH, D., The Art of Computer Programming, Vol. I: Fundamental Algorithms, 3a ed. Addison-Wesley, 1997, p. 21.