



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

ESCOLA POLITÉCNICA

Curso de Engenharia Civil

Departamento de Mecânica das Estruturas

**ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE CABOS DE ANCORAGEM
DE PLATAFORMAS FLUTUANTES**

MARY ELLEN ALBUQUERQUE SIQUEIRA

Projeto de Final de Curso apresentado ao corpo docente do Departamento de Mecânica Aplicada as Estruturas da Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito para obtenção do título de Engenheiro Civil.

Aprovado por:

Luiz Eloy Vaz
Prof. Titular, Dr.-Ing., DME/EP/UFRJ(Orientador)

Gilberto Bruno Ellwanger
Prof. Associado, D.Sc., DME/EP/UFRJ

Sergio Hampshire C. Santos
Prof. Associado, D.Sc., DME/EP/UFRJ

Nelson Szilard Galgoul
Prof. Adjunto, Dr.-Ing., DME/EP/UFRJ

Dezembro / 2007

AGRADECIMENTOS

A Deus que me capacitou e me deu força nos momentos mais difíceis.

Aos meus pais, Paulo e Rosangela, por terem me esculpido e lapidado da maneira que eu sou hoje. Sou grata a vocês pelo esforço que fizeram para que eu chegasse até aqui.

Ao meu querido esposo, Eduardo, que me ajudou na elaboração e correção desse projeto, e me apoiou em todos os momentos em que eu fiquei desmotivada.

Ao professor Luis Eloy Vaz, pela excelente orientação e contribuição neste trabalho. E por ter sido, ao longo desses anos, não só um orientador mas também um grande amigo.

A ANP pelo incentivo dado ao meu projeto, pois tive a oportunidade de participar do 1º Programa de Recursos Humanos (PRH-35) concedido à Engenharia Civil. Sendo, no entanto, a 1ª aluna da Engenharia Civil a concluir o projeto de graduação apoiado pela ANP.

ÍNDICE

1 - Introdução	1
1.1 Motivação e Objetivos	1
1.2 Apresentação do Problema	3
1.3 Descrição do Trabalho	3
2 - Fundamentos de Análise de Confiabilidade Estrutural	5
2.1 Variáveis Aleatórias	5
2.2 Funções de Distribuição de Probabilidades	7
2.2.1 Distribuição Normal ou Gaussiana	10
2.2.2 Distribuição Lognormal	11
2.2.3 Distribuições de Probabilidades de Valores Extremos	13
2.3 Funções de Distribuição de Probabilidades de Várias Variáveis	15
2.4 Probabilidade de Falha	18
2.5 Sistemas do Tipo R-S (Resistência-Solicitação)	19
2.5.1 Espaço Reduzido	20
2.6 Distribuições Normais Equivalentes	23
2.7 Métodos de Análise	24
2.7.1 Método FORM (First Order Reliability Method)	25
2.7.1.1 Transformação de Variáveis	26
2.7.1.2 Pesquisa do Ponto de Projeto	29
2.7.1.3 Análise de Confiabilidade de Sistemas pelo Método FORM	30
2.7.2 Método de Monte Carlo	33
2.7.2.1 Variáveis Aleatórias Independentes	33
2.7.2.2 Variáveis Aleatórias Correlacionadas	34
2.7.2.3 Integração pelo Método de Monte Carlo	37
3 - Estruturas Offshore	41
3.1 Tipos de Sistemas Flutuantes	41
3.1.1 Semi-Submersível	42
3.1.2 Navios de Produção	43
3.1.3 Plataforma com Pernas Atirantadas (TLP)	45
3.1.4 Spar-Buoy	46
3.2 Linhas de Ancoragem	46
3.2.1 Escolha de um Sistema de Ancoragem	49
3.2.1.1 Amarras	50
3.2.1.2 Cabos de Aço	51
3.2.1.3 Cabos de Poliéster	51
3.2.1.4 Cabos de ARAMIDA	51
3.2.2 Configuração Geométrica da Ancoragem	52
3.2.2.1 Catenária	52
4 - Análise Não-Linear Geométrica	55
5 - Análise de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem	59
5.1 Programa de Análise de Confiabilidade pelo Método FORM	59
5.2 Programa de Análise de Cabos de Ancoragem	63
5.3 Programa de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem pelo Método FORM	70

5.4 Programa de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem pelo Método de Monte Carlo	71
5.5 Modos de Falha	71
6 - Exemplos de aplicação	74
6.1 Análise pelo Método FORM	78
6.2 Análise pelo Método de Monte Carlo.....	79
6.3 Análise pelo Método FORM (considerando correlação).....	80
6.4 Análise pelo Método de Monte Carlo (considerando correlação).....	81
6.5 - Resumo da análise.....	83
7 - Conclusão e Sugestões	84
8 - Bibliografia	85
9 - Anexos.....	86

1 - Introdução

1.1 Motivação e Objetivos

Com o aumento do custo do barril de petróleo nas últimas décadas, houve a necessidade cada vez maior de produzir mais petróleo no Brasil em busca da auto-suficiência. O esgotamento das reservas em águas rasas foi empurrando a exploração e produção para águas profundas e ultra profundas. Essa busca por novos campos petrolíferos em águas cada vez mais profundas fez com que estruturas fixas, utilizadas em menores lâminas d'água, dessem lugar aos sistemas flutuantes de produção, visto que as plataformas fixas são utilizadas preferencialmente em campos localizados em lâminas d'água de até 400m. Já os sistemas flutuantes são utilizados para produzir petróleo a uma profundidade que hoje já ultrapassa os 2000m.

Os sistemas flutuantes empregados no Brasil são basicamente navios e plataformas semi-submersíveis e vêm sendo largamente empregados para produção, completação e perfuração “offshore”. Uma unidade flutuante sofre movimentações devido à ação das ondas, correntes e ventos, com possibilidade de danificar os equipamentos a serem descidos no poço. Por isso, torna-se necessário que ela fique posicionada na superfície do mar, dentro de um círculo com raio de tolerância ditado por equipamentos. Dois tipos de sistema são responsáveis pelo posicionamento da unidade flutuante: o sistema de ancoragem e o sistema de posicionamento dinâmico.

O sistema de ancoragem é um conjunto de linhas de ancoragem compostas de diferentes materiais (amarras, cabos de aço, cabos de poliéster e cabos de nylon) e âncoras ou estacas, que transferem os esforços ao solo atuando como molas que produzem esforços capazes de restaurar a posição do flutuante quando é modificada pela ação das ondas, ventos e correntes. Na figura 1.1 é mostrado um exemplo de linha de ancoragem.

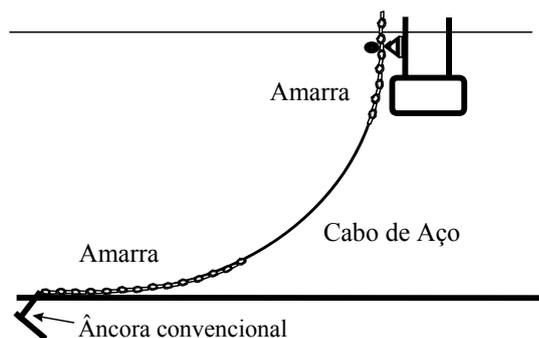


Figura 1.1 – Linha de ancoragem

No sistema de posicionamento dinâmico, não existe ligação física da plataforma com o fundo do mar, exceto a dos equipamentos de perfuração. Sensores acústicos determinam a deriva, e propulsores no casco acionados por computador restauram a posição da plataforma.

As unidades flutuantes podem ou não ter propulsão própria. De qualquer forma, apresentam grande mobilidade, sendo as preferidas para a perfuração de poços exploratórios.

Ao se instalar uma plataforma existe a preocupação de que a estrutura venha a atender critérios de projeto com um índice de segurança aceitável. É preciso considerar uma série de incertezas como os carregamentos ambientais, a resistência do material, etc. O alto custo de investimentos necessários para a exploração de petróleo em águas profundas exige que tais empreendimentos sejam cobertos por seguros e para tal é necessário efetuar uma análise onde seja possível considerar a incerteza das cargas e das propriedades do material. Esta análise é denominada análise de confiabilidade.

A análise de confiabilidade de estruturas consiste em definir a probabilidade de um sistema continuar executando sua função de maneira satisfatória, ou seja, o complemento da probabilidade de falha da estrutura. Ela faz com que as aleatoriedades das resistências e solicitações sejam consideradas no dimensionamento da estrutura. Com o auxílio da confiabilidade estrutural é possível dimensionar a estrutura para que ela atenda a uma determinada probabilidade de falha considerada aceitável. É possível também baixar o custo de seguros já que a probabilidade de falha foi controlada ao projetar a estrutura.

Este trabalho tem como objetivo analisar um sistema de ancoragem, utilizando a análise de confiabilidade estrutural. Serão avaliadas diferentes situações considerando como variáveis aleatórias as cargas e os parâmetros de resistência. O estudo será limitado pelo estado limite de ruptura por tração de uma linha de ancoragem, levando em conta o comportamento do cabo como um sistema em série. Para a avaliação da função de falha as linhas de ancoragem serão consideradas em configuração de catenária extensível, sendo verificado o seu comportamento através de uma análise não-linear geométrica da estrutura. A análise de confiabilidade será feita por dois métodos, o método analítico FORM e o Método de Monte Carlo. Serão comparados os resultados entre os dois métodos.

1.2 Apresentação do Problema

Neste trabalho, os conceitos de análise de confiabilidade serão aplicados em cabos de ancoragem. Serão utilizados dois métodos de análise de confiabilidade, o método FORM e o método de Monte Carlo. No método FORM, é utilizado um processo iterativo na busca do ponto de falha com máxima probabilidade de ocorrer. Através desse ponto, que também é chamado ponto de projeto, a probabilidade de falha é estimada. No método de Monte Carlo, são gerados números aleatórios para todas as variáveis aleatórias com os respectivos parâmetros estatísticos. Com a combinação desses números são formados pontos de análise, a estrutura é analisada para cada um dos pontos verificando se ocorre falha e a probabilidade é calculada pela relação do número de falhas com o número total de pontos.

Para aplicar os conceitos de confiabilidade em um cabo de ancoragem é necessário analisar esta estrutura considerando sua configuração geométrica de catenária. Este tipo de estrutura deve ser analisada considerando sua não linearidade geométrica sendo que para isto, foi elaborado um programa de análise não linear de treliças planas em FORTRAN. Este programa serve como auxílio aos métodos de análise de confiabilidade avaliando a falha da estrutura para cada ponto analisado.

1.3 Descrição do Trabalho

Este projeto está organizado de forma que no Capítulo 2 é apresentada a análise de confiabilidade estrutural como ferramenta para a consideração de incertezas nas variáveis de projeto. São introduzidos alguns conceitos básicos da confiabilidade estrutural. Em seguida, são apresentados os dois métodos de análise que serão utilizados no projeto, o método FORM e o método de Monte Carlo.

No Capítulo 3, é apresentado um resumo sobre sistemas flutuantes e sistemas de ancoragens, bem como os materiais usualmente utilizados.

O Capítulo 4 apresenta uma breve discussão sobre o comportamento não-linear, o objetivo da análise não-linear, e o seu lugar na engenharia estrutural. Este capítulo também mostra a matriz de rigidez geométrica como instrumento na análise não-linear geométrica e sua aplicação em análise de estruturas que apresentam grandes deslocamentos. No caso das

linhas de ancoragens, o comportamento não linear é devido à modificação da geometria de referência ao longo do processo de deformação do corpo

No Capítulo 5, encontra-se a descrição da análise de confiabilidade de ancoragens de plataformas, onde são descritos os programas que foram elaborados para efetuar as análises de confiabilidade, bem como, suas etapas construtivas.

No Capítulo 6, são apresentados os exemplos que serão analisados e os resultados obtidos.

Finalmente no Capítulo 7, são apresentadas as conclusões do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 - Fundamentos de Análise de Confiabilidade Estrutural

A maioria dos cálculos de dimensionamento estrutural são baseados no método semi-probabilístico. Esse método usa fatores de segurança parciais para as variáveis aleatórias, no sentido mais desfavorável, para se obter os valores de cálculo. A partir daí, o dimensionamento é feito como se as variáveis aleatórias fossem determinísticas, tendo valores iguais aos valores de projeto. Espera-se com isso, obter uma probabilidade aceitável de ruptura. Porém, para uma avaliação mais precisa da segurança de uma estrutura, o seu comportamento aleatório deve ser considerado. É a análise de confiabilidade que leva em consideração as diversas incertezas próprias aos carregamentos aplicados, as propriedades dos materiais, às imperfeições geométricas, aos modelos de análise utilizados e etc. Ela permite que, através da teoria das probabilidades, as aleatoriedades dos parâmetros físicos relevantes do projeto sejam tratadas de forma mais racional na análise estrutural.

O comportamento das variáveis associadas à resistência e às cargas atuantes em uma estrutura é normalmente de natureza randômica. Isso faz com que exista uma probabilidade não nula de que a estrutura venha a não atender aos objetivos para os quais ela foi projetada. Essa probabilidade é definida como probabilidade de falha. O complemento da probabilidade de falha da estrutura é chamado de confiabilidade estrutural, sendo este, o objetivo desta análise. Logo, a análise de confiabilidade consiste em definir a probabilidade de um sistema continuar executando sua função de maneira satisfatória.

2.1 Variáveis Aleatórias

Dos procedimentos de um experimento é possível extrair os conceitos de variável aleatória, sendo uma variável aleatória aquela que ao longo de uma série de experimentos tem o seu resultado variando. Desses experimentos resultam conjuntos de dados que serão posteriormente apresentados sob forma de gráficos e medidas numéricas.

A partir da existência de uma amostra da variável aleatória X (que representa o fenômeno de interesse) igual a $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, podem ser calculados vários parâmetros e definidas algumas representações gráficas. Uma representação gráfica bastante usada é o chamado histograma de frequência relativa, conforme mostra a Figura 2.1. Neste diagrama, a variável aleatória é dividida em pequenos intervalos. Para cada intervalo é observado o

número de ocorrências dos valores da amostra. Depois disto então, o diagrama é montado representando cada intervalo versus a frequência relativa dos mesmos.

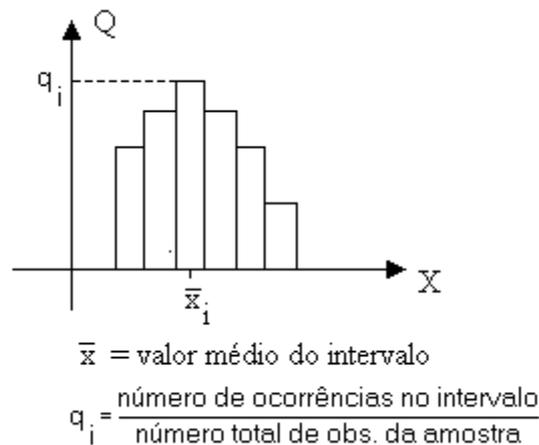


Figura - 2.1 - Histograma de Frequências Relativas

A partir dos dados contidos numa determinada amostra de tamanho n da variável aleatória X , podem ser definidos os valores característicos da mesma. Para a representação sob forma de medidas numéricas, é feita uma análise descritiva de dados para calcular algumas medidas de posição e variabilidade, como média e variância. Abaixo, serão introduzidos conceitos de medidas numéricas das variáveis aleatórias.

A **média** é a medida da tendência central dos dados e pode ser fisicamente interpretada como centróide da área da distribuição dos dados.

$$\mu \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n {}^{(j)}X \quad (2.1)$$

A **variância** da amostra é a medida da dispersão dos dados. Fisicamente pode ser visualizada como a cópia estatística do momento de inércia. A variância é definida como:

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [{}^{(j)}x - \mu]^2 \quad (2.2)$$

O **desvio padrão** é definido como a raiz quadrada da variância.

$$\sigma \equiv \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [{}^{(j)}x - \bar{X}]^2} \quad (2.3)$$

Se mais de duas variáveis são observadas, então a **covariância da amostra** entre as variáveis aleatórias é definida como:

$$\text{cov}(x_1, x_2) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [(j) x_1 - \bar{X}_1] [(j) x_2 - \bar{X}_2] \quad (2.4)$$

O **coeficiente de correlação** entre duas variáveis é definido como a covariância da amostra dividida pelo produto do desvio padrão das duas variáveis.

$$\rho_{12} = \frac{\text{cov}(x_1, x_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \quad (2.5)$$

O **coeficiente de variação** é o desvio padrão dividido pela média.

$$\delta = \frac{\sigma}{\mu} \quad (2.6)$$

Ao experimento é associado um valor de probabilidade de ocorrência do evento relacionado ao fenômeno em observação, onde se pode observar que:

- (a) a probabilidade está relacionada com a frequência de ocorrência do evento ao longo de um número grande de experimentos;
- (b) ela deverá estar situada entre 0 e 1;
- (c) a soma da probabilidade de todos os possíveis resultados do fenômeno deverá ser igual a 1.

2.2 Funções de Distribuição de Probabilidades

O histograma é muito usado para a representação de dados experimentais, mas para a análise de confiabilidade é desejável ter uma função matemática contínua que descreva os dados. Essa função é chamada função de densidade de probabilidade. De acordo com o comportamento da variável é escolhida uma função de densidade de probabilidade. Os parâmetros da função de densidade de probabilidade são geralmente estimados usando a média e o desvio padrão dos dados.

A função de densidade de probabilidade é escrita em função da variável aleatória que é usualmente representada por uma letra maiúscula, já os valores específicos de uma variável aleatória são representados por letras minúsculas.

Sendo X uma variável aleatória, a sua função densidade de probabilidades $f_X(x)$ é a probabilidade de a variável estar em um intervalo dx , como definido na equação abaixo:

$$P\left(x - \frac{dx}{2} \leq X \leq x + \frac{dx}{2}\right) = f_X(x)dx \quad (2.7)$$

Onde $P(\cdot)$ significa a probabilidade de (\cdot) . Usualmente, uma função densidade de probabilidade é identificada por PDF (*Probability Density Function*).

Analogamente, a probabilidade da variável aleatória X estar entre dois valores x_a e x_b , é:

$$P(x_a \leq X \leq x_b) = \int_{x_a}^{x_b} f_X(x) \quad (2.8)$$

A função de densidade de probabilidade deve satisfazer certas condições:

- A função de densidade de probabilidade sempre é igual ou maior que zero;

$$f_X(x) \geq 0 \quad (2.9)$$

- A área da função de densidade de probabilidade é unitária.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (2.10)$$

Qualquer função matemática que satisfaça essas condições pode ser escolhida como função de densidade de probabilidade.

Outra função importante é a função cumulativa de probabilidades que indica a probabilidade da variável X ter valores iguais ou menores que um limite. Esta função também é chamada de CDF (*Cumulative Density Function*) e é a integral da função de densidade de probabilidade até o limite x_a . A CDF é definida como:

$$F_X(x_a) = \int_{-\infty}^{x_a} f_X(x) dx = P[X \leq x_a] \quad (2.11)$$

Onde $F_X(x_a)$ é a probabilidade da variável X ter valores iguais ou menores que x_a .

Uma função cumulativa de probabilidades deve satisfazer as seguintes propriedades:

- Para valores tendendo a menos infinito, a função cumulativa de probabilidade tende a ser igual a zero.

$$F_X(-\infty) = 0.0 \quad (2.12)$$

- Os valores da função cumulativa de probabilidade variam no intervalo entre zero e um.

$$0.0 \leq F_X(x) \leq 1.0 \quad (2.13)$$

- Para valores tendendo a infinito, a função cumulativa de probabilidade tende a ser igual um.

$$F_X(\infty) = 1.0 \quad (2.14)$$

Na Figura 2.2, apresentada a seguir, são apresentados exemplos gráficos de $f_X(x)$ e $F_X(x)$.

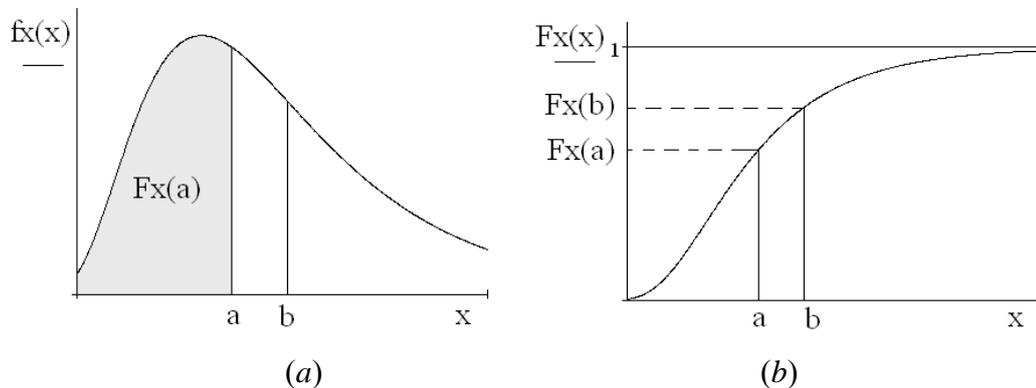


Figura 2.2 - Funções (a) densidade e (b) cumulativa de probabilidades

Existem muitas funções teóricas que satisfazem as condições descritas anteriormente. A escolha de uma delas para representar uma variável deve passar por um processo de ajuste em relação aos dados coletados. A seguir, serão apresentadas algumas das funções mais utilizadas.

2.2.1 Distribuição Normal ou Gaussiana

A PDF de uma variável X com distribuição normal ou Gaussiana é apresentada a seguir:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu_x}{\sigma_x}\right)^2\right] \quad (2.15)$$

Esta distribuição tem como parâmetros a média μ_x e o desvio padrão σ_x da variável aleatória e é geralmente denotada por $N(\mu_x, \sigma_x)$. A função cumulativa da distribuição normal (CDF) só pode ser avaliada por integração numérica, ou usando tabelas disponíveis em livros de estatística. A Figura 2.3 mostra as formas de duas distribuições normais com diferentes médias e desvios padrões.

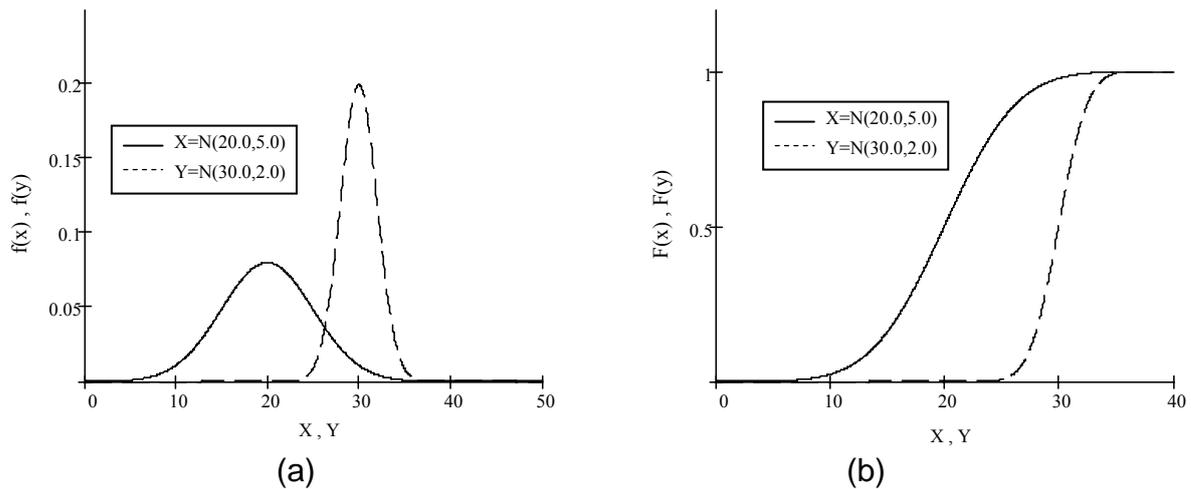


Figura 2.3 - Funções (a) densidade e (b) cumulativa de probabilidades de variáveis aleatórias normais.

Pode ser uma boa alternativa a introdução de uma variável auxiliar, também conhecida como variável reduzida, definida como:

$$Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X} \quad (2.16)$$

que conduz à conhecida distribuição normal *padrão* de probabilidades sendo esta função mostrada a seguir:

$$f_Y(y) = \phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}y^2\right] \quad (2.17)$$

cuja média e desvio padrão são iguais a 0 e 1, respectivamente. A função cumulativa de probabilidades da distribuição normal padrão é usualmente denotada por $\Phi(y)$ e é definida por:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y f_Y(y) dy \quad (2.18)$$

Como já foi mencionado, a função $\Phi(y)$ não é de fácil avaliação. Para estimá-la pode ser utilizada uma função aproximadora [10].

Se uma variável X segue uma distribuição normal, i.e. $X = N(\mu_x, \sigma_x)$, a probabilidade desta variável assumir valores entre a e b conforme a Figura 2.4, pode ser obtida da seguinte forma:

$$P(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(a-\mu_x)/\sigma_x}^{(b-\mu_x)/\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds = \Phi\left(\frac{b-\mu_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu_x}{\sigma_x}\right) \quad (2.19)$$

onde $\Phi(\cdot)$ é a função cumulativa normal padrão.

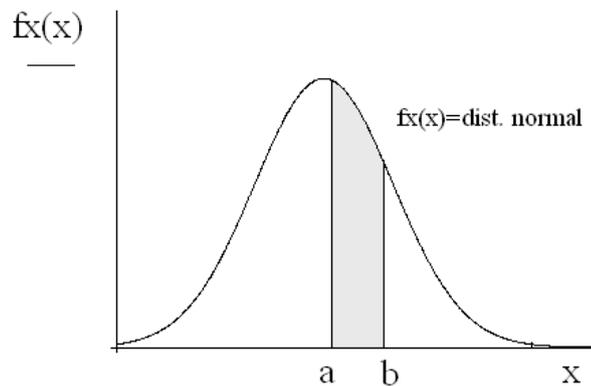


Figura 2.4 - Ilustração gráfica da probabilidade $P(a \leq X \leq b)$

2.2.2 Distribuição Lognormal

Uma variável X tem uma distribuição lognormal quando estatisticamente $\ln(X)$ pode ser representado por uma distribuição normal. A CDF de uma variável lognormal é definida como:

$$f_x(x) = \frac{1}{\xi \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\ln x - \lambda}{\xi}\right)^2\right] \quad (2.20)$$

onde λ é o valor esperado de $\ln(X)$, i.e. $\lambda = E(\ln x) = \mu_{\ln x}$, e ξ é o desvio padrão de $\ln(X)$, i.e. $\xi = \sqrt{\text{Var}(\ln x)} = \sigma_{\ln x}$. λ e ξ se relacionam com a média e o desvio padrão de X através das seguintes relações:

$$\xi^2 = \ln\left[1 + \left(\frac{\sigma_x}{\mu_x}\right)^2\right] \quad (2.21)$$

$$\lambda = \ln \mu_x - \frac{1}{2} \xi^2 \quad (2.22)$$

A Figura 2.5 mostra as formas de duas distribuições lognormais com diferentes médias e desvios padrões.

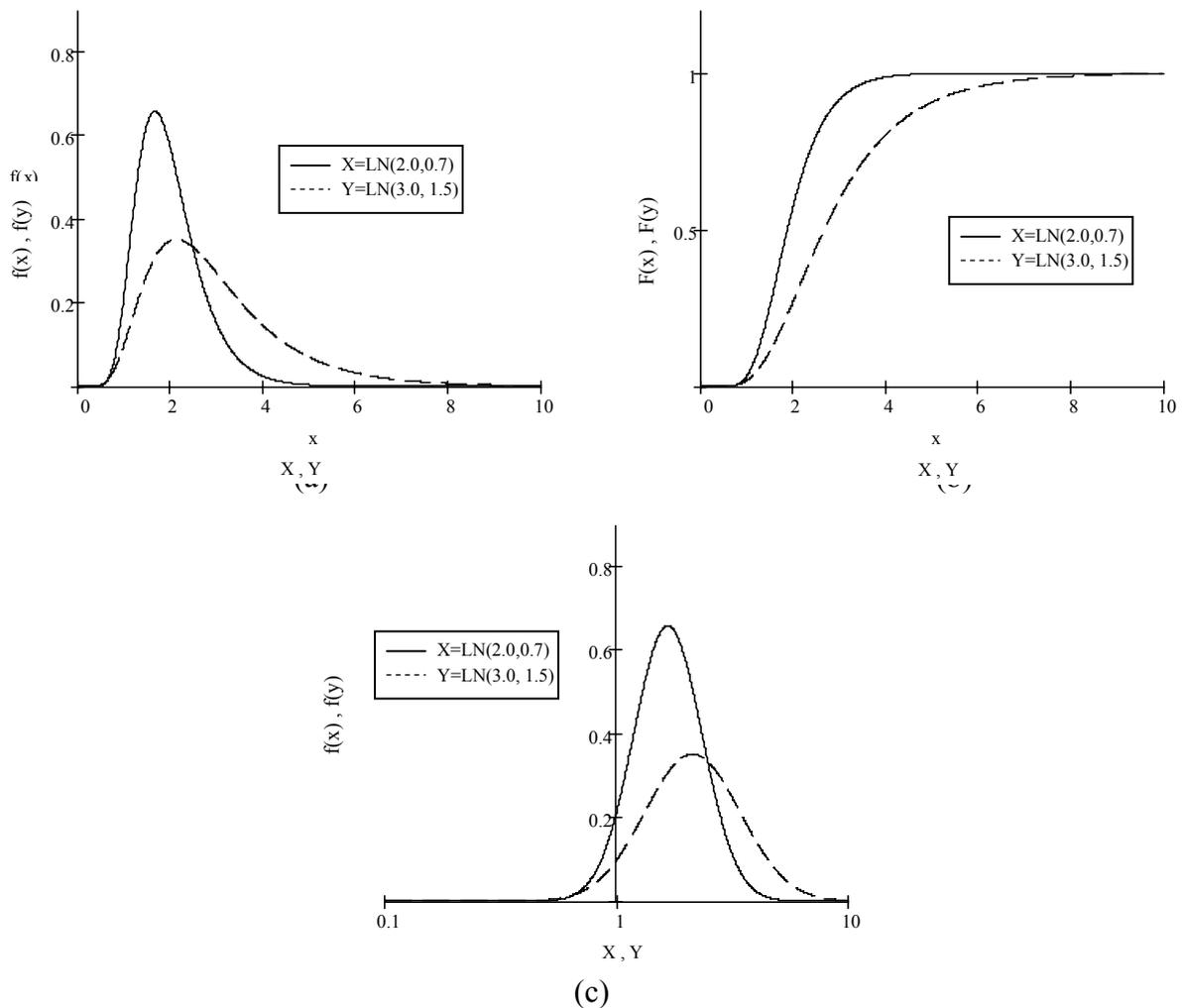


Figura 2.5 - Funções (a) de densidade e (b) cumulativa da distribuição lognormal e (c) função de densidade em escala logarítmica.

Se X é uma variável aleatória lognormal, $P(a \leq X \leq b)$ pode ser calculada como:

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{\ln b - \lambda_X}{\xi_X}\right) - \Phi\left(\frac{\ln a - \lambda_X}{\xi_X}\right) \quad (2.23)$$

Notar que a equação acima corresponde exatamente à equação da probabilidade de uma variável de distribuição normal, onde a variável reduzida é definida como:

$$Y = \frac{\ln X - \lambda_X}{\xi_X} \quad (2.24)$$

2.2.3 Distribuições de Probabilidades de Valores Extremos

Em muitos problemas da engenharia, os valores relevantes de uma determinada variável são os extremos, ou seja, os valores mínimos ou máximos da mesma. Na engenharia estrutural, este interesse está nos valores máximos extremos dos carregamentos acidentais atuantes sobre a estrutura durante sua vida útil. Alguns exemplos destes carregamentos são ventos, terremotos, ondas, etc.

O ajuste de uma função de valores extremos deveria ser baseado em um banco de dados contendo os valores máximos de uma determinada variável, sendo estes valores máximos observados em cada ano durante muitos anos. E então uma distribuição de probabilidades seria ajustada a estes valores. Na prática, os dados de valores extremos máximos ou mínimos não constituem uma amostragem significativa. Em virtude disto, surgiu a chamada Estatística de Extremos onde é possível definir a distribuição dos valores extremos (máximos e mínimos) de uma variável aleatória X a partir da função distribuição de probabilidades da mesma em todo o seu intervalo de variação.

Como já dito anteriormente, existem muitas outras funções de distribuição de probabilidade. Na Tabela 2.1 [3] é apresentado um resumo contendo as funções mais empregadas para modelar as variáveis relacionadas à análise de confiabilidade estrutural.

Distribuição	$f_x(x)$, PDF	$F_x(x)$, CDF	$E(X)$, (média)	$\sqrt{\text{Var}(X)}$, (des. padrão)
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$	$\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$	μ	σ
Lognormal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\xi x} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right)^2\right)$	$\Phi\left(\frac{\ln(x)-\lambda}{\xi}\right)$	$\exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\xi^2\right)$	$E(X)\sqrt{\exp(\xi^2)-1}$
Exponencial	$\lambda \exp(-\lambda x)$	$1 - \exp(-\lambda x)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda}$
Rayleigh	$\frac{x}{\sigma_R^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_R}\right)^2\right)$	$1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma_R}\right)^2\right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_R$	$\left(\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}\right)\sigma_R$
Uniforme	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{x-a}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{b-a}{\sqrt{12}}$
Tipo I (máx.) (Gumbel)	$\alpha \exp(-\alpha(x-u) - \exp(-\alpha(x-u)))$	$\exp(-\exp(-\alpha(x-u)))$	$u + \frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}\alpha}$
Tipo I (mínimos)	$\alpha \exp(\alpha(x-u) - \exp(\alpha(x-u)))$	$1 - \exp(-\exp(\alpha(x-u)))$	$u - \frac{0.5772}{\alpha}$	$\frac{\pi}{\sqrt{6}\alpha}$
Tipo II (máximos)	$k \left(\frac{v}{x}\right)^{k+1} \exp\left(-\left(\frac{v}{x}\right)^k\right)$	$\exp\left(-\left(\frac{v}{x}\right)^k\right)$	$v\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$	$v\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$
Tipo III (min.) (Weibull)	$k \left(\frac{x}{v}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{v}\right)^k\right)$	$1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{v}\right)^k\right)$	$v\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)$	$v\left(\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

Nota: $\Gamma(\)$ é a função Gamma [11].

Tabela 2.1 - Algumas Distribuições de Probabilidades

2.3 Funções de Distribuição de Probabilidades de Várias Variáveis

Se mais de uma variável é associada à análise, então uma função de densidade de probabilidade conjunta é usada para representar o comportamento conjunto dessas variáveis. Analogamente à função de uma variável, esta função deve satisfazer às condições abaixo:

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad (2.25)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 \quad (2.26)$$

$$P[a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2, \dots, a_n \leq X_n \leq b_n] = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (2.27)$$

A função cumulativa de probabilidade de variáveis múltiplas é definida como:

$$F_X[x_a, x_b, \dots, x_n] = \int_{-\infty}^{x_a} \int_{-\infty}^{x_b} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = P[X_1 \leq x_a, X_2 \leq x_b, \dots, X_n \leq x_n] \quad (2.28)$$

Onde x_a, x_b, \dots, x_n são constantes.

Utilizando as funções de densidade de probabilidade conjunta é possível calcular os parâmetros estatísticos que representam cada variável, como a média, o desvio padrão e a variância.

A média é definida como:

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{+\infty} x_j f(x_j, x_k) dx_j \quad (2.29)$$

A variância da variável aleatória, σ^2 ou $\text{var}(x)$, é definida como:

$$\text{var}(X_j) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x_j - \mu_j)^2 f(x_j, x_k) dx_j \quad (2.30)$$

A desvio padrão é a raiz quadrada da variância.

$$\sigma_{X_j} = +\sqrt{\text{var}(X_j)} \quad (2.31)$$

A covariância entre x_j e x_k é definida como:

$$\text{cov}(X_j, X_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_j - \mu_j)(x_k - \mu_k) f(x_j, x_k) dx_j dx_k \quad (2.32)$$

onde μ_j e μ_k são os valores das médias de X_j e X_k .

O coeficiente de correlação é definido como:

$$\rho_{X_j, X_k} = \frac{\text{cov}(X_j, X_k)}{\sqrt{\text{var}(X_j) \text{var}(X_k)}} \quad (2.33)$$

As variáveis aleatórias podem ser independentes ou correlacionadas. Quando as variáveis são estatisticamente independentes, ou seja, a ocorrência de um valor de x_j não interfere na ocorrência de um valor x_k , a função de densidade de probabilidade multivariável é igual ao produto da função de densidade de probabilidade das duas variáveis X_j e X_k . A PDF de cada variável é conhecida como função de distribuição marginal.

$$f(x_j, x_k) = f(x_j) \cdot f(x_k) \quad (2.34)$$

sendo $f(x_j)$ e $f(x_k)$ as funções densidade de probabilidades de X_j e X_k respectivamente.

Se as variáveis X_j e X_k forem independentes então:

$$\text{cov}(X_j, X_k) = 0 \quad (2.35)$$

Dois variáveis aleatórias independentes têm covariância igual à zero. Porém, a covariância zero pode existir sem que as variáveis aleatórias sejam independentes.

A Figura 2.6 ilustra uma função densidade de probabilidades conjunta para duas variáveis X_j e X_k .

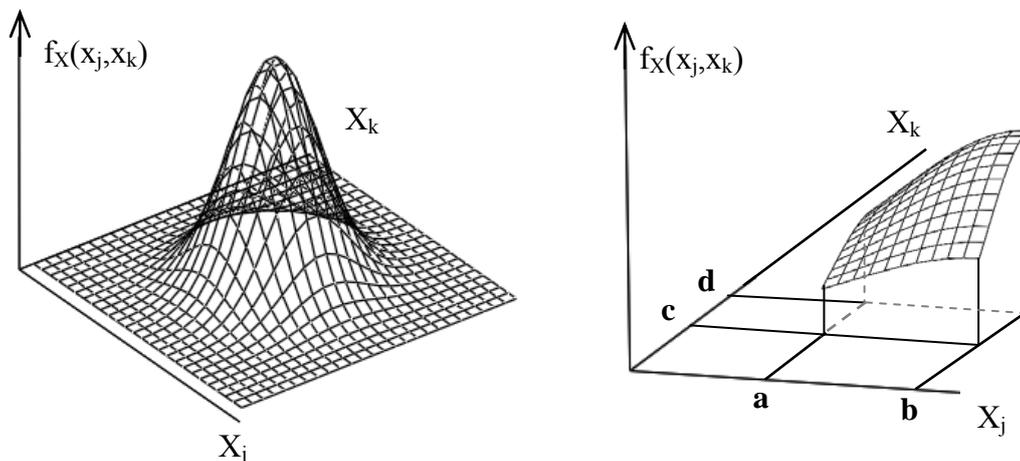


Figura 2.6 - Ilustração da função densidade de probabilidades conjunta

Através do coeficiente de correlação, definido em (2.33), é possível entender melhor o significado da covariância.

É possível demonstrar que $\rho_{X_j, X_k}^2 \leq 1.0$ e que quando $\rho_{X_j, X_k} = \pm 1.0$, existe uma forte relação linear entre X_j e X_k . Quando $\rho_{X_j, X_k} = 0.0$ significa que não há uma relação linear entre X_j e X_k . Isto, contudo, não significa que não possa haver um outro tipo de relação entre elas. A ilustração do significado do coeficiente de correlação é mostrada na Figura 2.7 [3].

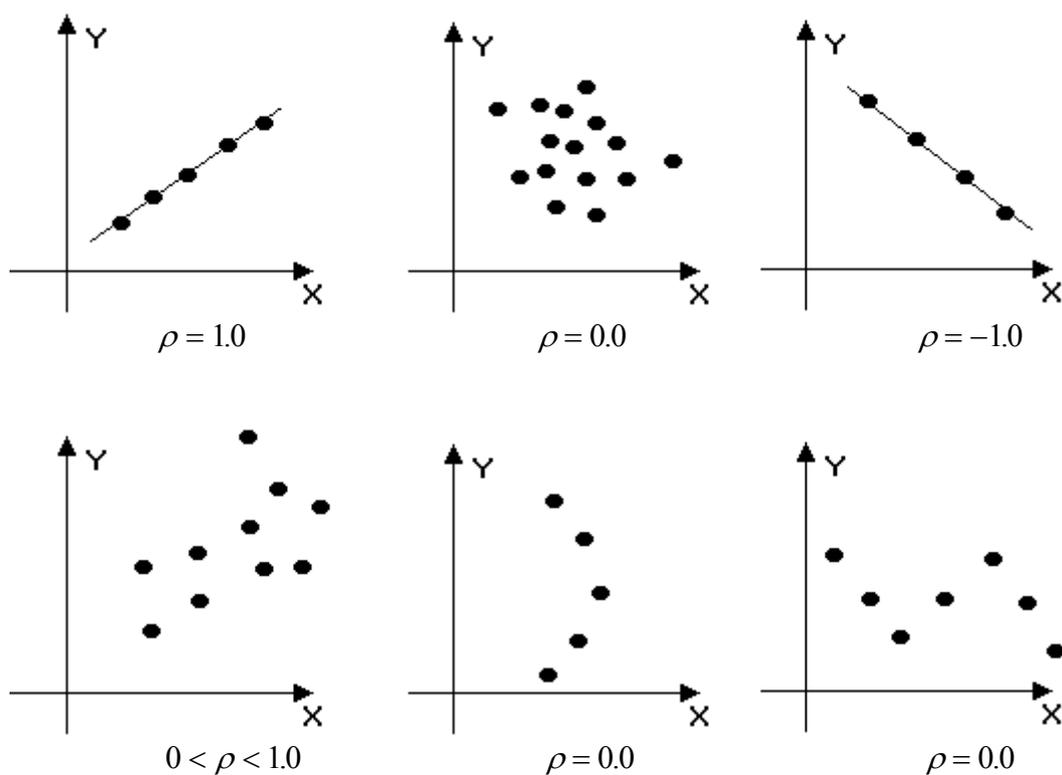


Figura 2.7 - Interpretação gráfica do coeficiente de correlação

Para várias variáveis aleatórias X_1, X_2, \dots, X_n , a matriz de correlação entre as mesmas é definida por:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{X_1, X_1} & \rho_{X_1, X_2} & \dots & \rho_{X_1, X_n} \\ & \rho_{X_2, X_2} & \dots & \rho_{X_2, X_n} \\ \text{Sim.} & & \dots & \dots \\ & & & \rho_{X_n, X_n} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

onde ρ_{X_i, X_j} é o coeficiente de variação entre as variáveis X_i e X_j .

2.4 Probabilidade de Falha

Como já foi mencionado anteriormente, um dos principais objetivos da confiabilidade estrutural é avaliar a segurança de uma estrutura, ou seja, estimar a probabilidade de que a mesma não falhe durante a sua vida útil. Nenhuma estrutura pode ser 100% confiável, sempre existe o risco dela falhar, mas este risco deve ser mantido em níveis aceitáveis de acordo com critérios de segurança e economia.

A confiabilidade de uma estrutura, C , é definida como o complemento da probabilidade de falha Pf , ou seja,

$$C = 1 - Pf \quad (2.37)$$

É comum usar Pf como a medida de confiabilidade de uma estrutura, já que geralmente Pf anual é muito pequena para estruturas, na ordem de 10^{-3} a 10^{-6} por ano. A avaliação da probabilidade de falha de estruturas é identificada como análise de confiabilidade estrutural.

A confiabilidade estrutural é baseada numa função de performance do sistema em estudo. Esta função também é conhecida como função de falha e é denominada $G(\mathbf{U})$, onde \mathbf{U} é um vetor que inclui todas as variáveis aleatórias consideradas na análise. Na função de falha, para valores na região onde $G(\mathbf{U}) > 0.0$, a estrutura não falha e para valores onde $G(\mathbf{U}) < 0.0$ a estrutura falha, como mostra a figura 2.8 para o caso bidimensional. O limite $G(\mathbf{U}) = 0.0$ é conhecido como superfície de falha.

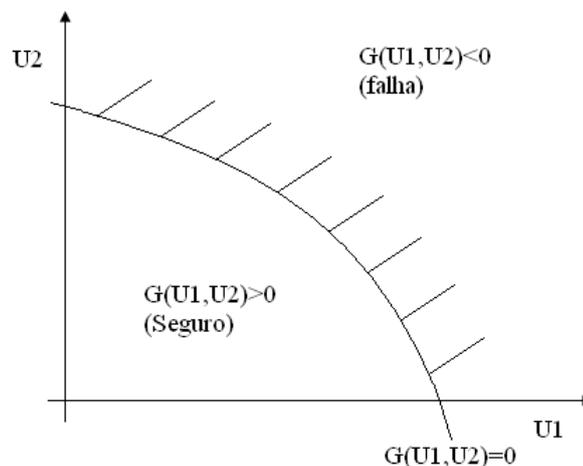


Figura 2.8 - Definição da função de falha

O interesse na avaliação da segurança de uma estrutura é a possibilidade de acontecerem falhas, ou seja, na probabilidade da função de falha assumir valores pertencentes ao domínio de falha ($G(\mathbf{U}) \leq 0$). Esta probabilidade é usualmente definida como probabilidade de falha e é definida por:

$$pf = P(G(\mathbf{U}) \leq 0.0) \quad (2.38)$$

Sabendo-se que $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{U})$ representa a função de densidade de probabilidades conjunta de todas as variáveis randômicas \mathbf{U} envolvidas na análise, a probabilidade de falha pode ser reescrita como:

$$pf = \int_F f_{\mathbf{u}}(\mathbf{U}) d\mathbf{u} \quad (2.39)$$

onde F indica o domínio de falha ($G(\mathbf{U}) \leq 0$), conforme ilustra a figura 2.8 para o caso bidimensional (duas variáveis aleatórias).

Para problemas onde a função de falha é complexa, a avaliação da expressão (2.39) é muito difícil, pois uma integral n-dimensional deve ser avaliada num domínio complexo ($G(\mathbf{U}) \leq 0.0$), onde n é o número de variáveis aleatórias pertencentes a \mathbf{U} . Devido a isto, outros métodos para avaliar a probabilidade de falha foram desenvolvidos, como será visto mais adiante.

A seguir, será apresentado o problema básico de confiabilidade que consiste em avaliar um sistema do tipo R-S (resistência - solicitação).

2.5 Sistemas do Tipo R-S (Resistência-Solicitação)

Um problema de confiabilidade pode ser definido como avaliação da probabilidade de que a demanda (i.e., a carga máxima na estrutura) exceda a capacidade de suprimento (i.e., a resistência da estrutura), durante a vida útil da mesma. Para um elemento de treliça, por exemplo, pode ser definido:

R = capacidade de suprimento = resistência do elemento

S = demanda = carga máxima na estrutura

Assim a função de falha $G(\mathbf{U})$, com $\mathbf{U} = (R, S)$, pode ser escrita como:

$$G(\mathbf{U}) = R - S \quad (2.40)$$

Assumindo que as distribuições de probabilidades de R e S são conhecidas e estatisticamente independentes, a probabilidade de falha pode ser calculada como:

$$pf = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^s f_R(r) f_S(s) dr ds = \int_{-\infty}^{\infty} F_R(s) f_S(s) ds \quad (2.41)$$

ou como:

$$pf = \int_{-\infty}^{\infty} \int_r^{\infty} f_R(r) f_S(s) ds dr = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_S(r)) f_R(r) dr \quad (2.42)$$

onde $f_R(r)$ e $f_S(s)$ são as funções de densidade de probabilidades e $F_R(r)$ e $F_S(s)$ são as funções cumulativas de probabilidades de R e S, respectivamente.

Uma combinação linear de variáveis aleatórias normais resulta em uma variável normal. Se as distribuições de R e S são normais, o cálculo da probabilidade de falha é:

$$pf = P(G(\mathbf{U}) \leq 0.0) = \Phi\left(\frac{0.0 - \mu_{G(\mathbf{U})}}{\sigma_{G(\mathbf{U})}}\right) = \Phi(-\beta) \quad (2.43)$$

onde $\mu_{G(\mathbf{U})} = \mu_R - \mu_S$, $\sigma_{G(\mathbf{U})} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$ e $\Phi(\cdot)$ é a distribuição cumulativa da normal padrão.

$$\beta = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (2.44)$$

A equação (2.44) representa o mesmo que as expressões (2.41) e (2.42), sendo que devido às propriedades da distribuição normal o cálculo se torna bem mais simples.

2.5.1 Espaço Reduzido

Para que o problema se torne mais simples, a probabilidade de falha para um sistema R-S, com R e S normais, pode ser avaliada utilizando as variáveis reduzidas (variáveis

normais com média 0 e desvio padrão 1, conforme item 2.2.1). Sendo assim, as variáveis reduzidas são:

$$s = \frac{S - \mu_S}{\sigma_S} \quad (2.45)$$

$$r = \frac{R - \mu_R}{\sigma_R}$$

No espaço das variáveis reduzidas, a função de falha $G(\mathbf{U})$ é escrita como:

$$G(\mathbf{U}) = r\sigma_R + \mu_R - s\sigma_S - \mu_S \quad (2.46)$$

Na Figura 2.9 [3], é mostrada a superfície de falha ($G(\mathbf{U}) = 0.0$) no espaço das variáveis reduzidas.

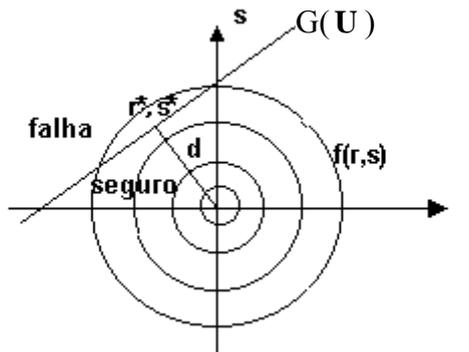


Figura 2.9 - Representação da superfície de falha no espaço reduzido

Por geometria analítica, é fácil demonstrar que a distância da reta $G(\mathbf{U}) = 0.0$ até a origem, no espaço das variáveis reduzidas, é igual a:

$$d = \frac{\mu_R - \mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}} \quad (2.47)$$

Como é possível perceber, o valor de d na equação (2.47) coincide com o índice de confiabilidade β definido na equação (2.44) e é a distância da origem até o ponto sobre a superfície de falha que mais se aproxima da origem, no espaço das variáveis normais reduzidas, o próprio índice de confiabilidade. Este ponto sobre a superfície de falha que é mais próximo à origem (r^*, s^*) é também o ponto sobre a reta, cujo valor da função densidade

de probabilidades conjunta ($f_{R,S}(r,s) = \phi(r)\phi(s)$) das duas variáveis é maior. Este ponto é chamado de ponto de projeto ou ponto mais provável de falha MPP (*Most Probability Point*).

Pode-se demonstrar que as coordenadas do ponto mais próximo à origem, \mathbf{u}^* , no espaço das variáveis reduzidas são dadas por:

$$u_i^* = -\alpha_i \beta \quad (2.48)$$

onde α_i é a componente do vetor normal à superfície de falha, calculado no ponto de projeto, que é definida por:

$$\alpha_i = \frac{\frac{\partial G(\mathbf{U})}{\partial u_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial G(\mathbf{U})}{\partial u_i} \right)^2}} \quad (2.49)$$

onde $\frac{\partial G(\mathbf{U})}{\partial u_i}$ é a componente do vetor gradiente da função de falha $G(\mathbf{U})$ que se relaciona à variável u_i . E α_i é o cosseno diretor do vetor que une o ponto de projeto à origem com relação ao eixo da variável u_i , como mostra a figura 2.10 [3].

Através da generalização da expressão (2.45), pode ser obtido o ponto de projeto no espaço original.

$$U_i^* = u_i^* \sigma_i + \mu_i \quad (2.50)$$

De acordo com as equações (2.40) e (2.46), observa-se que o gradiente da função de falha no espaço reduzido se relaciona ao gradiente avaliado no espaço original através da seguinte expressão:

$$\frac{\partial G(\mathbf{U})}{\partial u_i} = \sigma_i \frac{\partial G(\mathbf{U})}{\partial U_i} \quad (2.51)$$

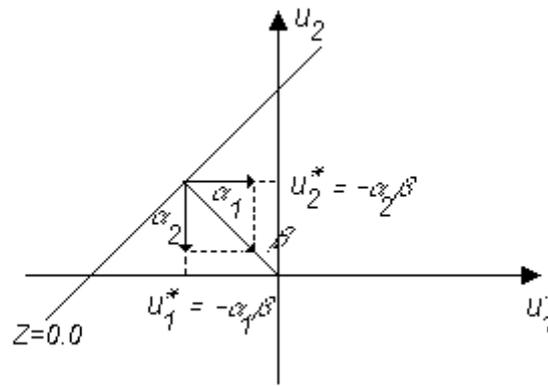


Figura 2.10 - Relações geométricas no espaço das variáveis reduzidas

2.6 Distribuições Normais Equivalentes

Como já mencionado anteriormente, para um problema com várias variáveis aleatórias e não normais, a avaliação da probabilidade de falha é muito complexa. Uma forma de simplificar o problema é transformar as variáveis não normais em variáveis normais equivalentes, o que faz com que a avaliação da probabilidade de falha seja bem mais simples como mostrado no item 2.5.

Sendo X uma variável aleatória cuja distribuição de probabilidades não é normal, pode ser encontrada uma distribuição normal equivalente num ponto x^* igualando-se as funções cumulativas e densidade de probabilidades de uma normal e da distribuição real de X no referido ponto. A Figura 2.11 [3] mostra o procedimento de normalização.

Obter uma normal equivalente significa obter a média e o desvio padrão desta distribuição. Estas grandezas são calculadas através da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\Phi\left(\frac{x^* - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) = F_X(x^*)$$

$$\frac{1}{\sigma_X^N} \phi\left(\frac{x^* - \mu_X^N}{\sigma_X^N}\right) = f_X(x^*)$$
(2.52)

onde $\phi(\cdot)$ e $\Phi(\cdot)$ correspondem, respectivamente, às funções de densidade e cumulativa da distribuição normal padrão; $f_X(\cdot)$ e $F_X(\cdot)$ correspondem, respectivamente, às funções

densidade e cumulativa da variável X e σ_X^N e μ_X^N são, respectivamente, a média e desvio padrão da normal equivalente no ponto x^* .

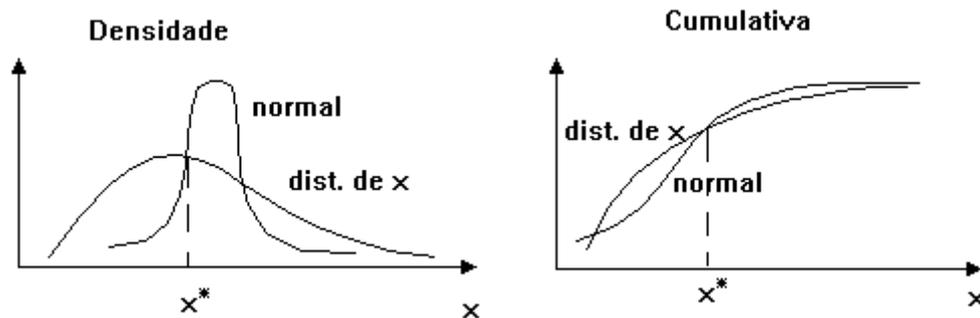


Figura 2.11 - Princípio da Normal Equivalente

A solução do sistema de equações (2.52) é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma_X^N &= \frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_X(x^*)]\}}{f_X(x^*)} \\ \mu_X^N &= x^* - \sigma_X^N \Phi^{-1}[F_X(x^*)] \end{aligned} \quad (2.53)$$

sendo que $\Phi^{-1}(\cdot)$ corresponde à inversa da distribuição cumulativa normal padrão. Em outras palavras, $\Phi^{-1}(p)$ corresponde ao valor da variável reduzida cuja probabilidade de apresentar valores menores ou iguais a ela seja igual a p.

2.7 Métodos de Análise

Para a análise da probabilidade de falha, a integral apresentada na equação (2.39) deve ser avaliada. Em problemas reais, podem existir várias variáveis dependentes uma das outras e não-normais fazendo com que a função de falha seja muito complexa. Por este motivo, métodos alternativos são geralmente empregados na sua avaliação. Estes métodos se dividem basicamente em métodos analíticos e métodos baseados na simulação de Monte Carlo que nada mais é do que um método de integração numérica. A seguir, será apresentado o método analítico conhecido como FORM.

2.7.1 Método FORM (First Order Reliability Method)

No espaço reduzido das variáveis normais padrão estatisticamente independentes, para uma função de falha linear, a confiabilidade pode ser facilmente obtida através da distância da função até a origem, como mostrado no item 2.5.1. É nesta idéia que se baseia o método FORM.

No método FORM, as variáveis aleatórias U , cujas distribuições são quaisquer e podem ser dependentes entre si ou não, são transformados em variáveis V normais padrões estatisticamente independentes. A função de falha $G(U)$ é escrita em função das variáveis V como $g(V)$. Depois disto, a superfície de falha $g(V)=0.0$ é aproximada por uma superfície linear (ou hiperplano) no ponto com a menor distância até a origem, identificado como V^* (ponto de projeto no espaço das variáveis reduzidas). A partir disto, a probabilidade de falha, de acordo com o que foi apresentado no item 2.4, pode ser simplesmente calculada como:

$$pf = \Phi(-\beta) \quad (2.54)$$

onde β é a distância do ponto V^* até a origem e é calculada como:

$$\beta = \text{sign}(G(m)) \cdot |V^*| \quad (2.55)$$

Sendo m o vetor das médias das variáveis no espaço original

Como mostrado no item 2.5.1, temos que:

$$\begin{aligned} V^* &= -\alpha \beta \\ g(V) &= \beta - \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde α é o vetor normal à superfície de falha no ponto de projeto.

A Figura 2.12 [3] ilustra o procedimento de cálculo da probabilidade de falha pelo método FORM, mostrando a aproximação da superfície de falha por um plano.

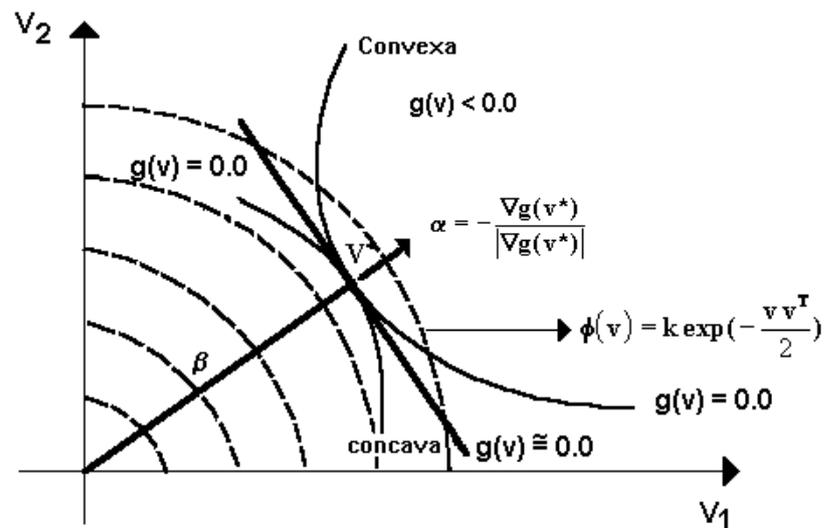


Figura 2.12 - Representação gráfica do método FORM

O método FORM é um método que calcula a probabilidade de falha de forma aproximada. Esta aproximação pode ser a favor da segurança quando $g(V)$ for convexa em torno do ponto de projeto ou ser contra a segurança no caso contrário, como mostrado na figura 2.12.

No método FORM, existem dois principais desafios, a busca ao ponto de projeto V^* e a transformação das variáveis em variáveis normais padrão. Como será mostrado a seguir, a transformação das variáveis pode ser feita utilizando as distribuições normais equivalentes e o ponto de projeto pode ser obtido através da solução de um problema de otimização (ou programação não-linear).

2.7.1.1 Transformação de Variáveis

Para a transformação de variáveis aleatórias em variáveis normais padrão estatisticamente independentes, utilizam-se vários métodos, porém o método mais utilizado em confiabilidade estrutural é baseado na transformação de variáveis normais correlacionadas em variáveis normais estatisticamente independentes. Esta transformação é conhecida como transformação de Nataf [10].

No caso de problemas envolvendo variáveis não normais, as distribuições normais equivalentes devem ser encontradas para que seja possível aplicar a transformação de Nataf.

Sendo o vetor \mathbf{U} um vetor que contém somente variáveis normais e estas forem correlacionadas entre si (ou não), um conjunto de variáveis normais padrão estaticamente independentes pode ser obtido pela seguinte transformação:

$$\mathbf{V} = \Gamma \sigma^{-1}(\mathbf{U} - \mathbf{m}) \quad (2.57)$$

onde \mathbf{m} é o vetor com as médias das variáveis normais equivalentes em \mathbf{U} , σ é uma matriz diagonal contendo os desvios padrões das variáveis normais equivalentes em \mathbf{U} e $\Gamma = \mathbf{L}^{-1}$, sendo \mathbf{L} a matriz triangular inferior obtida da decomposição de Choleski da matriz dos coeficientes de correlação de \mathbf{U} , conhecida como matriz ρ .

A transformação de Choleski consiste em decompor uma matriz positiva definida e simétrica em uma matriz triangular, ou seja, $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ onde \mathbf{L} (pode ser visto como raiz quadrada de \mathbf{A}) é a matriz triangular inferior com elementos positivos na diagonal.

Para definir $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, deve-se simplesmente encontrar os coeficientes a_{ij} da equação

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \\ 0 & l_{22} & \cdots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

sendo assim

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11}^2 \rightarrow l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ a_{21} &= l_{21} \cdot l_{11} \rightarrow l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}, \dots, l_{n1} = \frac{a_{n1}}{l_{11}} \\ a_{22} &= l_{21}^2 \cdot l_{22}^2 \rightarrow l_{22} = \sqrt{\frac{a_{22}}{l_{21}^2}} \\ a_{32} &= l_{31} \cdot l_{12} + l_{32} \cdot l_{22} \rightarrow l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} \cdot l_{12}}{l_{22}}, \dots, etc. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Generalizando temos para $i = 1, \dots, n$ e $j = i+1, \dots, n$:

$$l_{ii} = \sqrt{\left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2 \right)} \quad (2.60)$$

$$l_{ji} = \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot l_{ik}}{l_{ii}}$$

Fazendo-se $[A] = [\rho]$ a matriz triangular inferior L pode ser obtida e é expressa por:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 & 0 & 0 \\ L_{12} & L_{22} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{1n} & L_{2n} & \cdot & L_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

onde n é o número de variáveis aleatórias envolvidas na transformação.

Para a determinação do ponto de projeto, é necessária a definição do Jacobiano da transformação, ou seja:

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathcal{U}} \quad (2.62)$$

A partir da equação (2.57) temos:

$$\mathbf{J} = \Gamma \sigma^{-1} \quad (2.63)$$

Como já mencionado anteriormente, na maioria dos casos, as variáveis não são normais, então uma transformação em normal equivalente, como apresentada no item 2.6, pode ser empregada para podermos operar com a equação (2.57).

A transformação das variáveis em normais equivalentes não considera casos onde as variáveis são correlacionadas. Para este caso é possível usar a transformação para obtermos normais equivalentes, desde que os coeficientes de correlações entre as variáveis originais sejam corrigidos para coeficientes de correlações entre as normais equivalentes [10].

Sejam duas variáveis U_i e U_j com distribuições de probabilidades quaisquer e dependentes entre si, cuja dependência é definida pelo coeficiente de correlação ρ_{ij} . Então, o coeficiente de correlação equivalente entre as duas distribuições normais equivalentes às variáveis U_i e U_j pode ser definido como:

$$\rho_{ij}^E = F\rho_{ij} \quad (2.64)$$

onde F é um valor que depende somente de ρ_{ij} e dos coeficientes de variação das variáveis U_i e U_j . Este valor não depende do ponto onde transformação está sendo realizada, sendo assim F não muda ao longo das iterações. Kiureghian and Liu [10] desenvolveram expressões analíticas para o fator F para um grande número de distribuições de probabilidades.

Sendo definidas as normais equivalentes para as variáveis \mathbf{U} e as suas correlações equivalentes, a expressão (2.57) pode ser então empregada para obter variáveis normais padrões estatisticamente independentes \mathbf{V} .

A transformação de Nataf exposta anteriormente simplesmente opera com a distribuição marginal das variáveis aleatórias e com o coeficiente de correlação entre as variáveis, ou seja, a função densidade de probabilidades conjunta $f_{\mathbf{u}}(\mathbf{U})$ não é conhecida. Essas informações são consideradas informações probabilísticas incompletas, sendo que este é o caso da grande maioria das aplicações práticas.

2.7.1.2 Pesquisa do Ponto de Projeto

O próximo passo para o cálculo da probabilidade de falha pelo método FORM é o de encontrar o ponto \mathbf{V}^* sobre a superfície de falha mais próximo à origem. Isto pode ser formulado como um problema de otimização P1 (ou programação não-linear) com uma restrição de igualdade

$$\begin{aligned} &P1 \text{ minimize } |\mathbf{V}| \\ &\text{sujeito a } g(\mathbf{V}) = 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Existem vários algoritmos de otimização para resolver este problema. O algoritmo mais usado na análise de confiabilidade estrutural é aquele desenvolvido por Hasofer and Lind em 1974 e aprimorado por Rackwitz and Fiessler em 1978 [3]. Este algoritmo é comumente identificado como HLRF e é resumido pela seguinte expressão recursiva:

$$\mathbf{V}^{K+1} = \frac{1}{|\nabla g(\mathbf{V}^K)|^2} [\nabla g(\mathbf{V}^K)^T \mathbf{V}^K - g(\mathbf{V}^K)] \nabla g(\mathbf{V}^K)^T \quad (2.66)$$

onde $\nabla g(\mathbf{V}^K)$ é o gradiente da função de falha no espaço reduzido e $g(\mathbf{V}^K)$ é o valor da função de falha, ambos avaliados no ponto \mathbf{V}^K .

Para a utilização do método HL-RF, são de extrema utilidade as seguintes relações:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{V}) &= G(\mathbf{U}) \\ \mathbf{V} &= \Gamma \sigma^{-1}(\mathbf{U} - \mathbf{m}) \\ \nabla g(\mathbf{V}) &= (\mathbf{J}^{-1})^T \nabla G(\mathbf{U}) \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde $\nabla G(\mathbf{U})$ é o gradiente da função de falha no espaço original avaliado no ponto \mathbf{U} . As demais variáveis já foram definidas previamente.

A experiência tem mostrado que embora na maioria das vezes este método alcance a convergência rapidamente, ele pode não convergir em algumas situações.

A avaliação da probabilidade de falha pelo método FORM envolve além da avaliação da função de falha nos pontos calculados pelo algoritmo, a avaliação de suas derivadas para compor o vetor gradiente. Para problemas práticos, o cálculo das derivadas da função de falha pode ser feito numericamente via diferenças finitas. No caso de problemas onde a avaliação da função de falha $G(\mathbf{U})$ é computacionalmente trabalhosa, é melhor, se possível, trabalhar com derivadas analíticas e não numéricas.

2.7.1.3 Análise de Confiabilidade de Sistemas pelo Método FORM

Existem problemas que envolvem mais de uma função de falha. Como um simples exemplo, uma viga-coluna pode falhar por colapso plástico ou por flambagem, mais de um modo de falha e cada um deles representado por sua função de falha particular. Neste caso, a probabilidade de falha pode ser calculada, usando o método FORM, para cada modo de falha, sendo depois avaliada a probabilidade do sistema falhar como um todo, considerando a contribuição de todos os modos. A representação gráfica de alguns destes casos é mostrada na Figura 2.13 [3]. Estes problemas são tratados na análise de confiabilidade estrutural dentro de uma linha denominada confiabilidade de sistemas.

Um sistema é denominado em *série* quando a falha de um dos seus modos (ou componentes) leva o mesmo a falhar também. Por outro lado, um sistema é chamado de

sistema em *paralelo* quando a falha do mesmo só ocorre depois da falha de todos os seus modos (ou componentes).

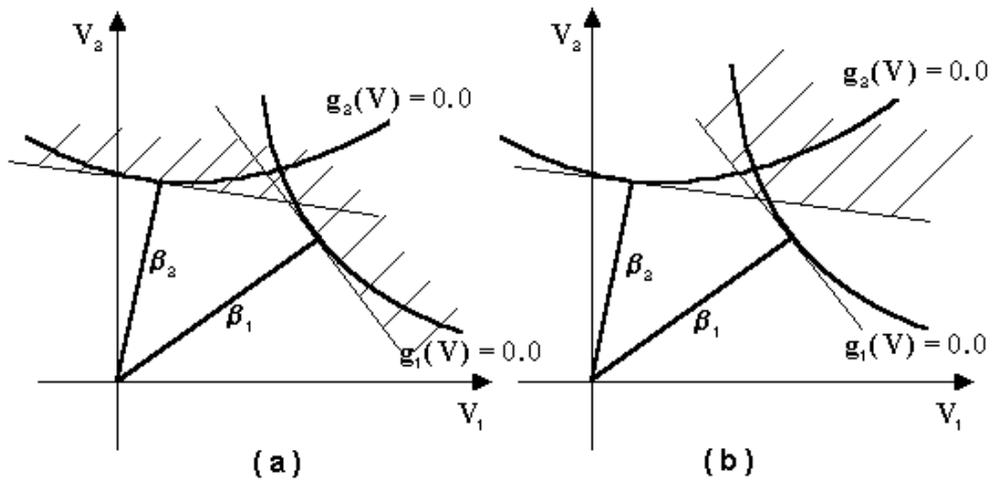


Figura 2.13 - Definições de Sistemas na Análise de Confiabilidade Estrutural
(a) sistemas em série e (b) sistemas em paralelo

Em um sistema em série, quando ocorre a falha de um dos seus componentes, o sistema inteiro é comprometido, ocorrendo a falha do sistema. Neste caso, a probabilidade de falha do sistema é dada pela probabilidade de qualquer um dos componentes falhar. Esta probabilidade é expressa pela união dos eventos que representam a falha dos componentes individuais, ou seja:

$$pf^s = P\left[\bigcup_{i=1}^j (g_i(\mathbf{V}) \leq 0.0)\right] \quad (2.68)$$

onde j é o número de componentes individuais identificados na análise. No caso de cabos de ancoragem, se algum elemento do cabo vir a falhar, o cabo inteiro fica comprometido. Sendo assim, a estrutura a ser analisada neste trabalho se comporta como sistema em série.

Quando um sistema é em paralelo, o mesmo só falha após a falha de todos os seus componentes. A probabilidade de falha deste sistema é expressa pela intersecção dos eventos que representam a falha dos componentes individuais, sendo:

$$pf^s = P\left[\bigcap_{i=1}^j (g_i(\mathbf{V}) \leq 0.0)\right] \quad (2.69)$$

Utilizando os conceitos básicos da teoria das probabilidades para a união de eventos, a probabilidade de falha de um sistema em série pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 pf^s &= P\left[\bigcup_{i=1}^j (g_i(\mathbf{V}) \leq 0.0)\right] \\
 &= \sum_{i=1}^j P_i - \sum_{i=1}^j \sum_{k>i}^j P_{ik} + \sum_{i=1}^j \sum_{k>i}^j \sum_{l>k}^j P_{ikl} - \dots
 \end{aligned}
 \tag{2.70}$$

onde

$$\begin{aligned}
 P_i &= P(g_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \\
 P_{ik} &= P[P(g_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \cap P(g_k(\mathbf{V}) \leq 0.0)] \\
 P_{ikl} &= P[P(g_i(\mathbf{V}) \leq 0.0) \cap P(g_k(\mathbf{V}) \leq 0.0) \cap P(g_l(\mathbf{V}) \leq 0.0)]
 \end{aligned}$$

e g_i identifica o i -ésimo componente do sistema.

Como as probabilidades de falha dos componentes individuais geralmente são baixas na análise de problemas estruturais, os termos P_{ikl} são desprezados. Pelo FORM, o domínio de falha $\bigcup_{i=1}^j (g_i(\mathbf{V}) \leq 0.0)$ é delimitado pela superfície poliédrica formada pelos hiperplanos tangentes em cada ponto de mínimo, como mostra a figura 2.13. Sendo assim, a probabilidade de falha de um sistema em série na equação (2.70) pode ser calculada utilizando as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 P_i &= \Phi(-\beta_i) \\
 P_{ik} &= \Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{ik})
 \end{aligned}
 \tag{2.71}$$

sendo β_i, β_j os índices de confiabilidade de cada um dos componentes;

ρ_{ik} a correlação entre dois componentes, i.e., $\rho_{ik} = \alpha_i \alpha_k$, onde α_i e α_j são

os vetores normais nos pontos de mínimo de cada um dos componentes;

$\Phi(\)$ é a função cumulativa de probabilidades normal padrão;

$\Phi(\ , \ , \rho)$ é a função cumulativa bidimensional normal padrão.

A função cumulativa bidimensional normal padrão, utilizando algumas propriedades da distribuição normal, pode ser calculada como:

$$\Phi(-\beta_i, -\beta_j, \rho_{i,j}) = \Phi(-\beta_i) \Phi(-\beta_j) + \int_0^{\rho_{i,j}} \varphi(-\beta_i, -\beta_j, z) dz
 \tag{2.72}$$

onde $\varphi(x, y, \rho)$ é a função densidade de probabilidades bidimensional padrão mostrada a seguir.

$$\varphi(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{1-\rho^2}\right)\right] \quad (2.73)$$

2.7.2 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo envolve o uso de programas computacionais para gerar valores aleatórios para as variáveis envolvidas. Os valores gerados devem ter propriedades estatísticas pré-determinadas e a partir deles são efetuadas simulações computacionais de experimentos para se avaliar valores para a função de falha. Este método é mais preciso que o Método FORM para funções de falha altamente não lineares e eficiente quando o custo computacional para a avaliação da função de falha não é alto.

O fundamento da análise pelo método de Monte Carlo é o de gerar um conjunto de variáveis aleatórias com propriedades estatísticas e função de densidade de probabilidade pré-definidas. Para cada parâmetro aleatório da função, é gerado um conjunto de n valores. Com estes n valores são realizados experimentos computacionais. A função de falha é avaliada para cada um dos conjuntos de valores dos parâmetros, ou seja, a função é avaliada n vezes. Por fim, os parâmetros estatísticos da função de falha e a probabilidade de falha associada e essa função de falha são obtidos através das n respostas calculadas.

2.7.2.1 Variáveis Aleatórias Independentes

Para gerar n números aleatórios relativos a uma dada variável com uma determinada função de densidade de probabilidade, é necessário utilizar a correspondente função de distribuição de probabilidade dessa variável. Inicialmente são gerados n números aleatórios com distribuição uniforme entre 0 e 1 correspondentes aos valores das probabilidades acumuladas.

Geralmente, utiliza-se uma aproximação da função de distribuição de probabilidade, onde a mesma é transformada numa poligonal, como mostra a figura 2.14. O eixo vertical da função de distribuição de probabilidade é dividido em m intervalos com variação de

probabilidades iguais. Cada intervalo é limitado por dois valores de P que terão os valores de x correspondentes. E em cada intervalo, a função será aproximada por uma reta [12].

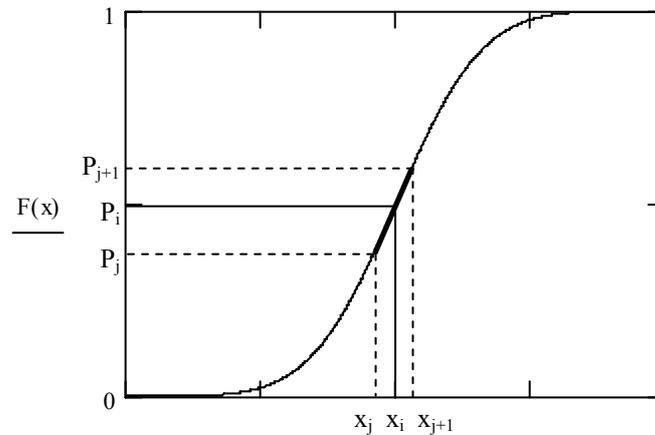


Figura 2.14 – Aproximação da função de distribuição por uma poligonal

Após gerar os números aleatórios entre 0 e 1, verifica-se a qual intervalo da poligonal estes valores de probabilidade pertencem. Com os valores limitantes do intervalo é feita a interpolação linear. Sendo assim, para qualquer valor de probabilidade, a variável aleatória correspondente pode ser determinada por interpolação. A equação da interpolação é mostrada abaixo:

$$x_i = x_j + \left[\frac{x_{j+1} - x_j}{P_{j+1} - P_j} \right] (P_i - P_j) \quad (2.74)$$

Também é possível calcular os valores de x pelo Método de Newton-Raphson de modo que, para um dado valor de P, $F(x) - P = 0$.

2.7.2.2 Variáveis Aleatórias Correlacionadas

O modo de gerar números aleatórios para variáveis estatisticamente independentes é o mesmo usado para gerar isoladamente uma única variável aleatória, o qual foi mostrado anteriormente. Porém, quando é preciso analisar uma estrutura, nem sempre se pode considerar que as variáveis aleatórias sejam independentes. Nesses casos, é necessário gerar variáveis aleatórias correlacionadas. Será mostrado a seguir como gerar variáveis aleatórias correlacionadas para o caso de função de densidade de probabilidade de variáveis com distribuição normal.

Considere n variáveis aleatórias correlacionadas (x_1, x_2, \dots, x_n) com função de densidade de probabilidade normal. Sendo conhecidas a média, a variância e a covariância das variáveis, a função de densidade de probabilidade está definida.

Conhecendo o vetor das médias

$$\{\bar{X}\} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \\ \vdots \\ \bar{X}_n \end{Bmatrix}$$

e a matriz de covariância

$$[S_x] = \begin{bmatrix} \text{var}(x_1) & \text{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_1, x_n) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & \text{var}(x_2) & \cdots & \text{cov}(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x_n, x_1) & \text{cov}(x_n, x_2) & \cdots & \text{var}(x_n) \end{bmatrix}$$

deseja-se gerar m valores para cada uma das n variáveis aleatórias correlacionadas x_i .

$$\begin{matrix} {}^{(j)}x_i & j = 1, 2, \dots, m \\ & i = 1, 2, \dots, n \end{matrix}$$

Sejam n variáveis aleatórias estatisticamente independentes y_k e considere que as variáveis aleatórias correlacionadas x_i sejam uma combinação linear das variáveis y_k , como indicado a seguir.

$$\begin{aligned} {}^{(j)}x_i &= \sum_{k=1}^n C_{ik}^{(j)} y_k \\ \text{ou} & \\ \{x\} &= [C] \{y\} \end{aligned} \tag{2.75}$$

Pode-se demonstrar que as médias e as covariâncias de x_i podem ser obtidas respectivamente das médias e das covariâncias de y_k como definido a seguir.

$$\{X\} = [C] \{Y\}$$

então

$$\{\bar{X}\} = [C] \{\bar{Y}\}$$

e

(2.76)

$$[S_x] = [C][S_y][C]^T$$

onde $\{\bar{X}\}$ e $\{\bar{Y}\}$ são os vetores das médias e $[S_x]$ e $[S_y]$ são as matrizes de covariância das variáveis x_i e y_k , respectivamente.

Para se encontrar a matriz C é necessário fazer uma outra decomposição de Choleski da matriz $[S_x]$ como indicado a seguir.

Seja uma matriz $[A]$ simétrica de ordem n . Essa matriz é decomposta via uma transformação de Choleski num produto de matrizes do tipo indicado a seguir

$$[A] = [V][D][V]^T$$

sendo $[V]$ uma matriz triangular inferior de ordem n com a diagonal principal positiva e $[D]$ uma matriz diagonal de ordem n . Os elementos das matrizes $[V]$ e $[D]$ são obtidos conforme indicado a seguir:

$$\begin{aligned} D_{11} &= A_{11} \\ V_{ii} &= 1 & i = 1, 2, \dots, n \\ V_{j1} &= \frac{A_{1j}}{D_{11}} & j \geq 2 \\ D_{ii} &= A_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} V_{ik}^2 D_{kk} & i \geq 2 \\ V_{ji} &= \frac{1}{D_{ii}} \left[A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} V_{ik} V_{jk} D_{kk} \right] & i \geq 2, j \geq i+1 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Fazendo-se $[A] = [S_x]$, $[V] = [C]$ e $[D] = [S_y]$, são obtidas as matrizes C , que é a matriz de transformação linear, e S_y , que é a matriz de covariância das variáveis independentes Y . A independência das variáveis aleatórias Y pode ser verificada pelo fato da matriz de covariância das variáveis Y ser uma matriz diagonal.

Através da matriz $[C]$, é possível calcular o vetor das médias das variáveis Y . Com o vetor $\{\bar{Y}\}$ e a matriz $[S_y]$, são gerados m valores para cada uma das n variáveis independentes Y , e cada um desses valores são transformados, através da matriz $[C]$, em valores para as variáveis X que são correlacionadas com valores pré-definidos para a média $\{\bar{X}\}$ e a matriz de covariância $[S_x]$.

No caso das variáveis não serem normais, deve ser feita, a priori, uma transformação das variáveis em variáveis normais equivalentes, como apresentado no item 2.6, e ainda a correção dos coeficientes de correlação para coeficientes de correlação entre as normais equivalentes [10] conforme descrito em 2.7.1.1.

As variáveis aleatórias sem correlação são geradas e em seguida para cada ponto das variáveis é encontrada uma normal equivalente, ou seja, para cada ponto são encontrados valores de média e desvio padrão da normal equivalente. Com esses valores de média e desvio padrão, cada ponto gerado para as variáveis é transformado em normal padrão.

A matriz de correlação corrigida das variáveis é usada para calcular a matriz de transformação linear [C]. Depois de conhecida a matriz [C], cada ponto transformado em normal equivalente padrão é multiplicado pela matriz [C], gerando valores de variáveis normais padrão correlacionados. Em seguida, com os valores de média e desvio padrão das normais equivalentes, podem ser calculados os valores que serão utilizados para as variáveis, sendo estes correlacionados.

2.7.2.3 Integração pelo Método de Monte Carlo

Por definição, a probabilidade de falha, P_f , de uma estrutura é calculada pela integral n -dimensional:

$$P_f = \int_{G(\mathbf{X}) \leq 0} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.78)$$

onde:

$\mathbf{X} = \{ X_1, X_2, \dots, X_n \}^T$ é o vetor das n variáveis aleatórias básicas do problema;

$f(\mathbf{x})$ é a função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias \mathbf{X} ;

$G(\mathbf{X})$ é a função de estado limite, utilizada para definir os critérios de falha do sistema.

A função de estado limite é construída de tal forma que $G(\mathbf{X}) \leq 0$ quando a estrutura viola qualquer um dos critérios de falha, e $G(\mathbf{X}) > 0$ quando a estrutura está segura. A superfície de estado limite, $G(\mathbf{X}) = 0$, é a superfície de separação entre os estados de falha e os estados de segurança do sistema estrutural.

Observa-se que as variáveis aleatórias X_i podem ser normalizadas em relação à média μ_i e ao desvio padrão σ_i . Sendo Z_i as variáveis aleatórias normalizadas, correspondentes às variáveis X_i , a probabilidade de falha, definida em (2.78), fica então expressa por:

$$P_f = \int_{G(Z) \leq 0} f(z) dz \quad (2.79)$$

onde: $Z = \{ Z_1, Z_2, \dots, Z_n \}^T$ é o vetor das n variáveis aleatórias normalizadas.

A função de densidade de probabilidade conjunta $f(z)$, correspondente às variáveis normalizadas e estatisticamente dependentes Z_i , pode ser expressa por um produto de funções de densidade de probabilidade de Gauss, associadas às variáveis aleatórias normais equivalentes e estatisticamente independentes S_i , calculadas pelas transformações de Nataf [3]. Assim, a equação (2.79) expressa em termos das variáveis normais equivalentes S_i ficará, portanto, com o seguinte aspecto:

$$P_f = \int_{G(X(S)) \leq 0} \prod_{i=1}^n \phi(s_i) ds_i \quad (2.80)$$

onde: $\phi(\cdot)$ é a função densidade de probabilidade de Gauss.

A probabilidade de falha é calculada pela integral (2.80), com o domínio de integração definido pela função de estado limite, $G(X(S))$. Observa-se que os valores das variáveis X são calculados em função dos valores das variáveis normalizadas S .

Para estender o domínio de integração para todo o espaço R^n , pode-se utilizar a função indicadora definida por:

$$I[G(X) \leq 0] = \begin{cases} 1 & \text{if } (G(X) \leq 0) \\ 0 & \text{if } (G(X) > 0) \end{cases} \quad (2.81)$$

Desta forma a Eq.(2.80) pode ser rescrita como:

$$P_f = \int_{G(X(S)) \leq 0} \prod_{i=1}^n \phi(s_i) ds_i = \int_{R^n} I[G(S) \leq 0] \prod_{i=1}^n \phi(s_i) ds \quad (2.82)$$

onde $G(S) \leq 0$ representa de forma mais compacta a função $G(X(S)) \leq 0$.

A integração pelo método Monte Carlo baseia-se no conceito do valor esperado de uma função. Seja, por exemplo, a seguinte integral multidimensional:

$$\int g(x)f(x)dx \quad (2.83)$$

onde:

$f(x)$ é a função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias X ;

$g(x)$ é uma função qualquer das variáveis aleatórias X

Neste caso, a integral (2.83) representa o valor esperado (média) da função $g(x)$, ou seja:

$$\int g(x)f(x)dx = E[g(x)] = \frac{1}{NP} \sum_{k=1}^{NP} g(x^k) \quad (2.84)$$

onde:

$E[\bullet]$ representa o valor esperado (média) de \bullet ;

x_k são os valores das variáveis x gerados a partir da função de densidade de probabilidade $f(x)$;

NP é o número de pontos x gerados.

Desta forma, aplicando-se diretamente o método Monte Carlo na integral (2.83), resulta:

$$P_f = \int_{R^n} I[G(S) \leq 0] \prod_{i=1}^n \phi(s_i) ds = E[I[G(S) \leq 0]] = \frac{1}{NP} \sum_{k=1}^{NP} I[G(S^k) \leq 0] \quad (2.85)$$

onde:

S_k são os valores das variáveis S gerados a partir da função de densidade de probabilidade $\prod_{i=1}^n \phi(s_i)$ correspondentes ao ponto k ;

Pode ser observado que para pequenos valores da probabilidade de falha, a aplicação da equação (2.85) requer a geração de um número relativamente grande de pontos U_i , para atingir uma precisão aceitável nos cálculos. Por exemplo, para um dado nível de confiança C para a probabilidade de falha P_f , o número de pontos gerados pode ser estimado pela expressão:

$$NP > \frac{-\ln(1-C)}{P_f} \quad (2.86)$$

Portanto, para um nível de confiança $C = 0,95$ e uma probabilidade de falha $P_f = 10^{-4}$, o número de simulações necessárias seria da ordem de 30000.

3 - Estruturas Offshore

Nos últimos anos, a exploração de petróleo tem avançado para águas cada vez mais profundas, inviabilizando o uso de estruturas fixas, do tipo plataformas fixas de aço e de concreto. Com isso, surgiram as plataformas flutuantes que passaram a viabilizar a exploração em águas profundas e em campos distantes da costa.

Para que este tipo de estrutura permaneça numa determinada localização é necessário um sistema de posicionamento, o qual confere à unidade flutuante a capacidade de conservar sua posição no mar e é fundamental importância nas características operacionais e de segurança.

Utilizam-se dois tipos de sistema de posicionamento da unidade flutuante: o sistema de ancoragem e o sistema de posicionamento dinâmico.

O sistema de ancoragem é um conjunto de linhas de ancoragem compostas de diferentes materiais (amarras, cabos de aço, cabos de poliéster e cabos de nylon) e âncoras ou estacas, que transferem os esforços ao solo. As linhas de ancoragem atuam como molas que produzem esforços capazes de restaurar a posição do flutuante quando esta é modificada pela ação das ondas, ventos e correntes, sendo possível resistir a severas condições climáticas. Este sistema de posicionamento é mais utilizado nas unidades de produção e exploração sendo o projeto direcionado para o campo onde será instalado.

No sistema de posicionamento dinâmico, não existe ligação física da plataforma com o fundo do mar, exceto a dos equipamentos de perfuração. Sendo assim, o sistema de posicionamento dinâmico é adaptável e não tem limite de profundidade. São utilizados sensores acústicos para determinar a deriva. Propulsores no casco, acionados por computador, restauram a posição da plataforma.

3.1 Tipos de Sistemas Flutuantes

Um sistema flutuante é uma estrutura complacente que é posicionada através de um sistema de ancoragem (linhas de ancoragem ou tendões). As estruturas complacentes caracterizam-se por apresentarem grandes deslocamentos sob a ação de cargas ambientais. Os

sistemas flutuantes se dividem em dois grupos, sendo estes grupos definidos em função do tipo da árvore de natal.

- Plataformas com árvore de natal molhada (Semi-submersível, FPSO)
- Plataformas com árvore de natal seca (TLP, Spar-Buoy)

3.1.1 Semi-Submersível

Este tipo de plataforma se apóia em flutuadores submarinos, cujo calado pode ser alternado através do bombeio de água para os tanques de lastro. As plataformas semi-submersíveis podem ser de produção e/ou perfuração. As plataformas de produção que permanecem fixas numa locação por um período de tempo longo são denominadas semi-submersíveis de produção (SS). Já as plataformas de perfuração, geralmente denominadas MODU (*Mobile Offshore Drilling Unit*), permanecem por um período curto numa dada locação, com o objetivo de perfuração e/ou completação de poços ou de efetuar operações de manutenção (*workover*).

Plataforma Semi-submersível é uma plataforma de produção com completação molhada e que pode apresentar sistema de ancoragem convencional ou *Taut-leg*. O sistema de ancoragem convencional é constituído por linhas em forma de catenária compostas por cabos de aço, amarras ou uma combinação de ambos. Este sistema é o mais empregado na Bacia de Campos. O sistema *Taut-leg* é formado por linhas que são constituídas, nas suas extremidades, por cabos de aço ou amarras e, no seu trecho intermediário, por cabos de poliéster. A utilização do sistema de ancoragem "*Taut-leg*" iniciou-se no Brasil no ano de 1997, reduzindo drasticamente o raio de ancoragem [5] em lâminas d'água em torno de 700 metros.

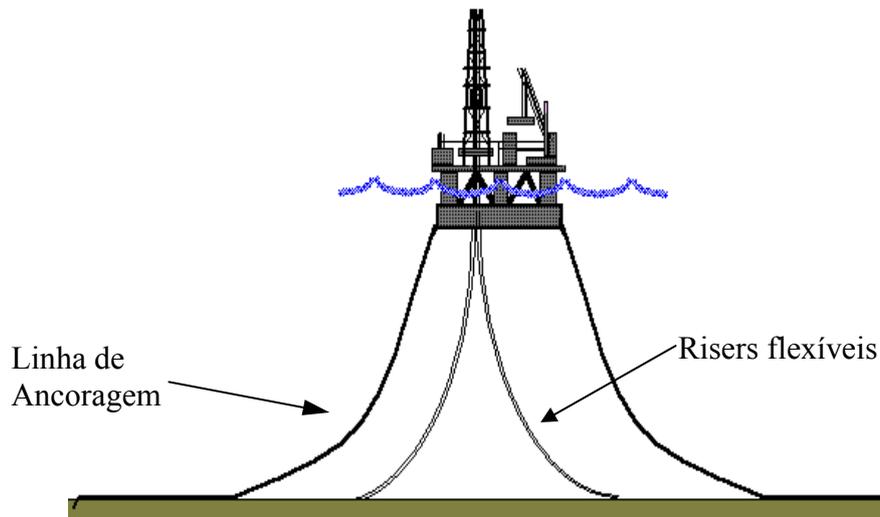


Figura 3.1 - Semi-Submersível com Sistema de Ancoragem Convencional.

Denomina-se MODU a plataforma flutuante de perfuração que pode apresentar o sistema de ancoragem convencional ou *Taut-leg*

3.1.2 Navios de Produção

Com a descoberta de petróleo em lâminas d'água cada vez mais profundas, a tecnologia para exploração tende a se aproximar cada vez mais da indústria naval. Além da necessidade de se ter uma unidade de produção localizada em águas profundas, existe o desafio de como escoar a produção, considerando as distâncias da costa e a profundidade do mar.

Para atender a estes desafios, surgiu a alternativa de utilizar navios de produção entre os quais se têm o FSO (*Floating Storage and Offloading*) e o FPSO (*Floating Production Storage Offloading*). Estes são constituídos por navios tanques novos ou convertidos para ter um sistema de produção (no caso do FPSO), armazenamento e escoamento do petróleo adequado às necessidades do campo petrolífero. Este tipo de estrutura é principalmente usado quando o sistema de produção está localizado em regiões onde a instalação de dutos submarinos para a condução de óleo até a costa não é conveniente ou economicamente viável. Esta estrutura permite o escoamento da produção para outro navio, chamado aliviador, que é periodicamente amarrado no FPSO para receber e transportar o óleo até os terminais petrolíferos [5].

Os navios compostos por um Ponto Simples de Ancoragem “SPM” (*Single Point Mooring*) do tipo *Turret* interno podem apresentar ancoragem convencional ou *Taut-leg*. O fato de o navio estar ancorado em um único ponto permite que o navio gire livremente ao redor das linhas de ancoragem e risers, ficando orientado na direção das cargas ambientais reduzindo a atuação destas na estrutura.

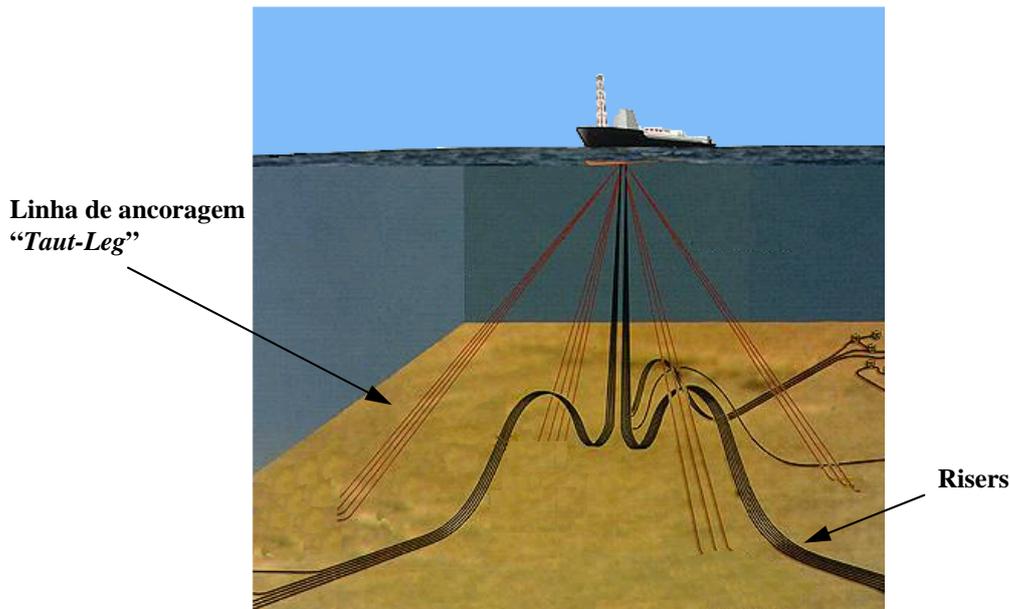


Figura 3.2 - Navio ancoragem “taut-leg”.

Outro tipo de navio é o que utiliza o sistema DICAS, que é um sistema de ancoragem desenvolvido pela PETROBRAS, constituído basicamente por um sistema de amarração disperso com diferentes resistências na proa e na popa do navio, ou seja, é um sistema de ancoragem com complacência diferenciada.

A diferença básica entre o sistema DICAS e um SPM (*Single Point Mooring*) é que este último se alinha com a direção da resultante das ações ambientais, enquanto o DICAS realiza isto parcialmente, havendo, portanto, situações em que fica efetivamente com o mar incidindo de través, ou seja, a 90° com o eixo do navio [5]. O sistema DICAS por dispensar o “*Turret*” é um sistema mais simples sob o ponto de vista de construção.

Tanto no sistema DICAS quanto nos FPSO’s convencionais, as linhas de ancoragem podem ser constituídas parcialmente por cabos de poliéster, o que diminui sensivelmente o peso submerso do sistema de ancoragem.

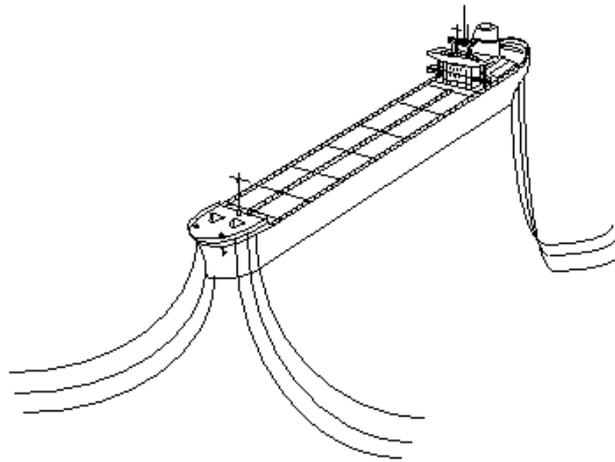


Figura 3.3 - Navio sistema DICAS de ancoragem

3.1.3 Plataforma com Pernas Atirantadas (TLP)

A Tension Leg Platform é uma plataforma complacente mantida numa posição na qual o empuxo é bem maior do que o seu peso, sendo a diferença absorvida por um conjunto de tendões tracionados com grande rigidez axial. O casco da TLP é semelhante ao casco de uma semi-submersível e é constituído por seções tubulares ou retangulares horizontais (*pontoons*) e cilindros verticais enrijecidos (*columns*), ver Figura 3.4.

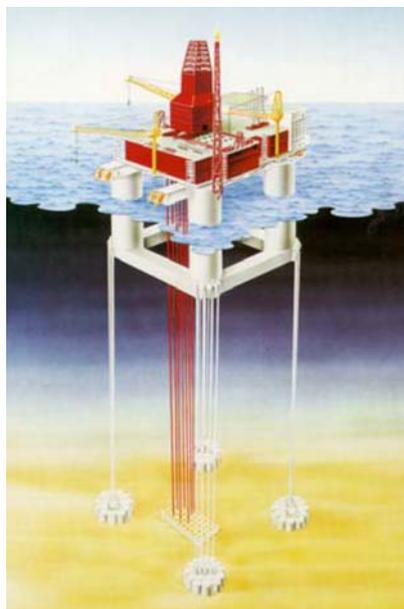


Figura 3.4 - Plataforma TLP

A ancoragem da TLP é realizada por tendões que podem ser internos às colunas, onde são acoplados ao sistema de tensionamento, ou podem ser externos, onde o tensionamento é realizado pela diminuição do lastro.

3.1.4 Spar-Buoy

O sistema flutuante do tipo Spar-Buoy consiste em um único cilindro vertical de aço com grande diâmetro que se encontra ancorado (Figura 3.5). Este opera com um calado de profundidade constante de cerca de 200 metros, gerando apenas pequenos movimentos verticais e, conseqüentemente, possibilita a adoção de risers rígidos verticais de produção.

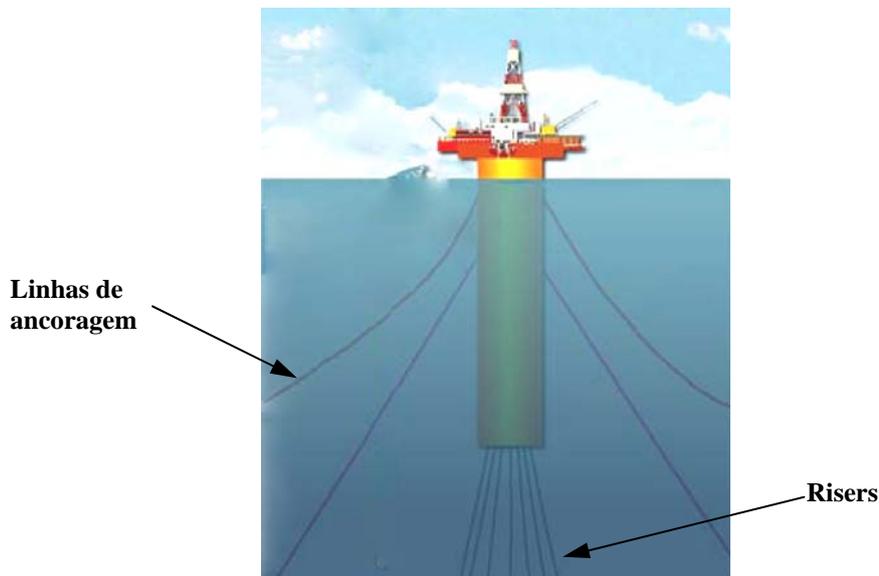


Figura 3.5 – Spar-Buoy

3.2 Linhas de Ancoragem

Em termos de engenharia, a linha de ancoragem é considerada um membro estrutural que possui uma relação diâmetro/comprimento muito pequena de forma que os efeitos de flexão são desprezíveis, sendo necessária apenas a consideração da rigidez na direção axial. Entretanto, a análise estrutural das linhas de ancoragem é complexa devida às não-linearidades envolvidas no problema e aos tipos de carregamentos a que o sistema flutuante está submetido.

Um sistema flutuante de produção, para permanecer fixo numa locação, necessita de um sistema de ancoragem que é responsável em conectar a unidade flutuante ao fundo do mar. A figura 3.6 mostra um arranjo típico de uma semi-submersível ancorada por 16 linhas.

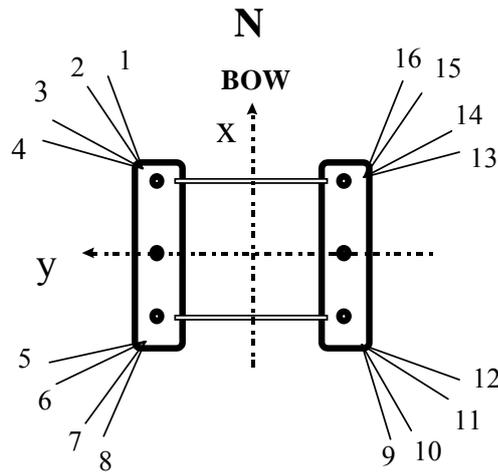


Figura 3.6 – Arranjo de um sistema de ancoragem

Como já mencionado, sistema de ancoragem é um conjunto de linhas de ancoragem compostas de diferentes materiais que transferem esforços ao solo por meio de âncoras ou estacas. O sistema de ancoragem pode ser classificado como convencional ou “*Taut-Leg*” [5].

No sistema convencional, as linhas podem estar trabalhando como catenárias simples ou compostas devendo o trecho de amarras inferior tangenciar o solo garantindo que não hajam esforços verticais na âncora. Devido ao efeito da catenária, em alguns casos, o comprimento da ancoragem pode atingir até 3 vezes a lamina d’água (LDA).

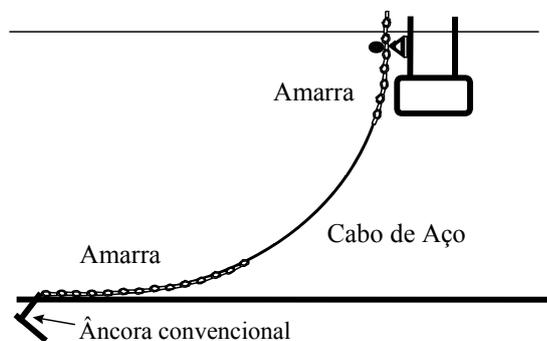


Figura 3.7 - Linha de ancoragem convencional.

O objetivo do sistema de ancoragem é conferir à unidade flutuante a capacidade de conservar sua posição no mar. No sistema convencional, as forças de restauração são geradas pelo peso da linha de ancoragem que é presa ao fundo do mar por âncoras dinâmicas. Estas âncoras necessitam de um grande comprimento de amarra (catenária) e sua pega aumenta com a solicitação horizontal como mostra a figura 3.8.

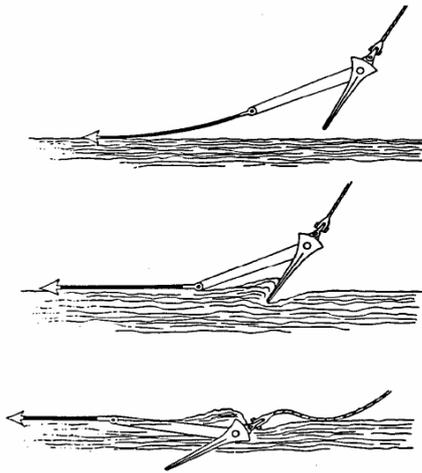


Figura 3.8 – Instalação de âncoras dinâmicas

Já nos sistemas *Taut-leg*, a linha de ancoragem fica tracionada e pode formar um ângulo de até 45 graus com o solo, havendo neste caso, transferência de carga vertical à fundação. As forças de restauração nesta configuração são geradas pela elasticidade da linha.

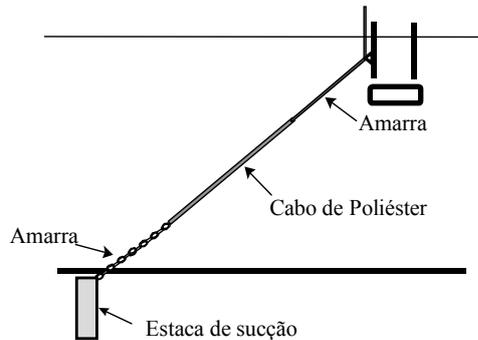


Figura 3.9 - Linha de ancoragem tipo “taut-leg”.

Como na configuração *Taut-leg* ocorre transferência de carga vertical à fundação e o raio de ancoragem do sistema diminui. Por tal motivo, este tipo de configuração é muito utilizado em águas profundas.

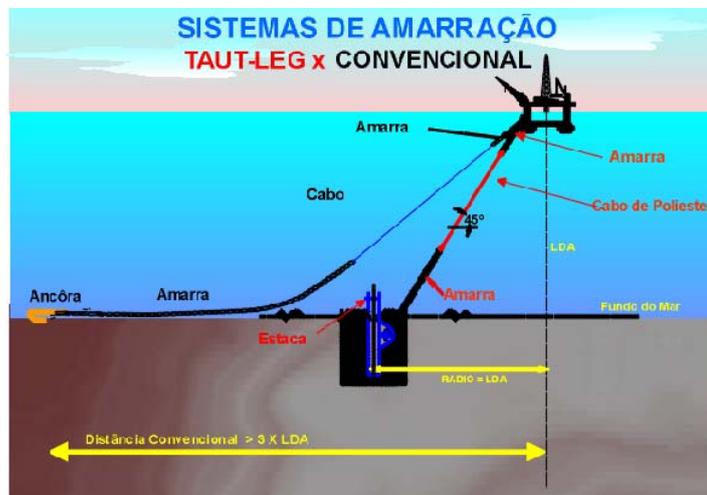


Figura 3.10 – convencional X taut-leg

No sistema *Taut-leg*, as linhas de ancoragem são fixas nas suas extremidades inferiores por meio de estacas de sucção [5]. Para o sistema *Taut-leg* também podem ser utilizadas outras opções de fundação tais como, VLA (*Vertical Load Anchor*) e estacas torpedo.

As estacas de sucção são compostas por um cilindro vazio de grande diâmetro (ver figura 3.11). São instaladas através de uma bomba que cria uma zona de baixa pressão no interior do cilindro fazendo com que ocorra o cravamento. A pega desta âncora é gerada pelo atrito do solo.

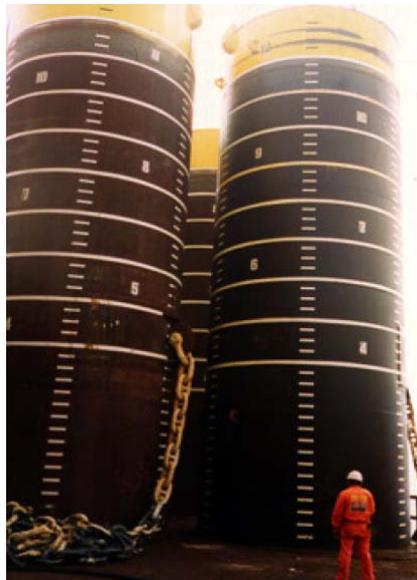


Figura 3.11 – Estacas de sucção

3.2.1 Escolha de um Sistema de Ancoragem

A escolha do padrão de ancoragem é feita através da análise de vários fatores, que são:

- Função da unidade flutuante.
- Assimetria da unidade flutuante em relação à geometria e solicitações.
- Direcionalidade das condições ambientais.

Para as plataformas flutuantes de produção, normalmente utilizam-se oito linhas de ancoragem. Para as novas gerações de semi-submersíveis de produção, em lâminas d'água profundas, o número de linhas cresce em decorrência do acréscimo das forças sobre o corpo

flutuante. Este acréscimo é devido ao aumento das dimensões do casco e do aumento do número de risers flexíveis.

Quanto à constituição, as linhas de ancoragem podem ser compostas de amarras, cabos de aço, cabos sintéticos, ou pela combinação destes. A utilização dos cabos de aço ou materiais sintéticos ou amarras está relacionada diretamente com o tipo de sistema a ser utilizado (convencional ou “*Taut-Leg*”) [5].

3.2.1.1 Amarras

As amarras quanto à sua resistência podem ser classificadas pelos graus: 3, 4 e O.R.Q. O grau 4 é o mais resistente. A utilização de um determinado grau vai depender da necessidade e dos custos envolvidos. Na Figura 3.12, são apresentados dois tipos de elos de amarras.

As dimensões de um elo de amarra são múltiplos dos diâmetros da amarra. O passo é igual a seis vezes o diâmetro.

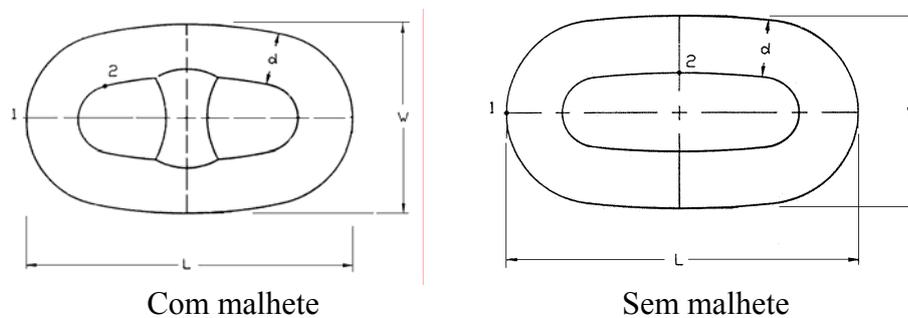


Figura 3.12 - Elos de amarras

A amarra pode romper ao ser ultrapassada a carga de ruptura nominal ou por fadiga [5]. O número de ciclos para romper a amarra será função principalmente dos movimentos induzidos pelo corpo flutuante. Em FPSO's, a amarra terá sua vida reduzida se estiver trabalhando com trações elevadas. Com o objetivo de se prolongar a vida das amarras é recomendável que se trabalhe com trações correspondentes a 1/3 da tração de ruptura.

Durante o processo de fabricação, cada trecho de sete metros é testado com uma carga de aproximadamente 70% da carga nominal de ruptura.

3.2.1.2 Cabos de Aço

A classificação do cabo consiste de dois números, como por exemplo 6x19. O primeiro número indica a quantidade de pernas torcidas e o segundo indica a quantidade de fios em cada perna.

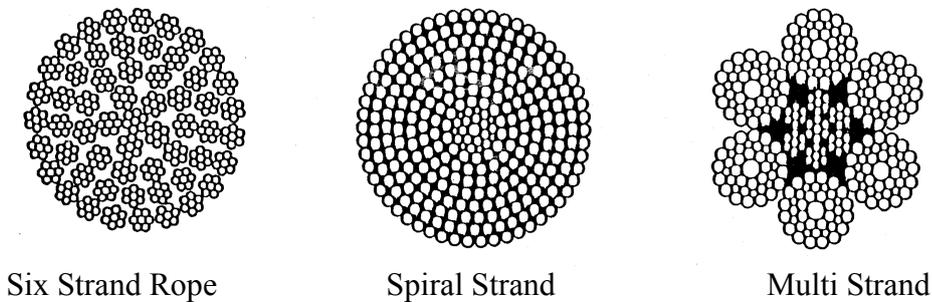


Figura 3.13 - Cabos de Aço

As falhas por fadiga do cabo de aço geralmente ocorrem nas proximidades às terminações e aos componentes adjacentes à âncora ou outras conexões.

3.2.1.3 Cabos de Poliéster

O cabo de poliéster é um cabo de material sintético, que apresenta uma flexibilidade axial bem maior que do cabo de aço e das amarras, com a mesma carga de ruptura nominal e um peso submerso por unidade de comprimento bem menor.

A PETROBRAS foi a pioneira na utilização do cabo de poliéster na exploração de petróleo em águas profundas e ultra-profundas da costa brasileira. A utilização do cabo de poliéster permitiu que a PETROBRAS levasse o sistema de completação molhada para águas mais profundas, pois existe uma limitação com amarras e cabos de aço devido ao peso submerso dos mesmos que inviabiliza o sistema de ancoragem para grandes lâminas d'água. A outra grande vantagem está associada ao raio bem mais curto já que a restauração agora é realizada pela elasticidade do cabo de poliéster e não pelo caráter geométrico da linha de ancoragem constituída por amarras e cabo de aço

3.2.1.4 Cabos de ARAMIDA

O cabo de aramida é também um cabo de material sintético quase auto-flutuante, mas que apresenta uma flexibilidade axial similar à do cabo de aço. Desta forma, a resistência do

cabo de aramida torna-se bem maior do que a do cabo de poliéster. No entanto, existem ainda problemas para a sua utilização em sistemas definitos de produção: deformação lenta, etc.

3.2.2 Configuração Geométrica da Ancoragem

O cabo é um elemento estrutural de grande importância, muito usado em ancoragens, nas pontes pênséis, linhas de transmissão, etc. No cálculo dessas estruturas, é necessário conhecer as relações entre as trações, o vão e o comprimento do cabo. Para isso, estuda-se o cabo como um corpo em equilíbrio, admitindo-se que, por hipótese, não haja nenhuma resistência à flexão.

Um cabo submetido a uma carga uniformemente distribuída ao longo de seu comprimento assumirá uma configuração deformada dada por uma catenária.

3.2.2.1 Catenária

O cabo de ancoragem deformado tem a configuração de uma catenária. Trata-se da curva obtida pela suspensão de uma linha flexível por suas extremidades, quando submetida apenas a seu peso próprio.

Por hipótese, o fundo do mar é plano, o cabo não tem rigidez à flexão e se encontra no plano x-y. As forças que atuam sobre o cabo são as forças hidrodinâmicas, o peso submerso por unidade de comprimento e a tração na extremidade superior. A seguir, será mostrada a formulação da catenária inextensível [2]. A figura 3.14 mostra os principais parâmetros de uma catenária.

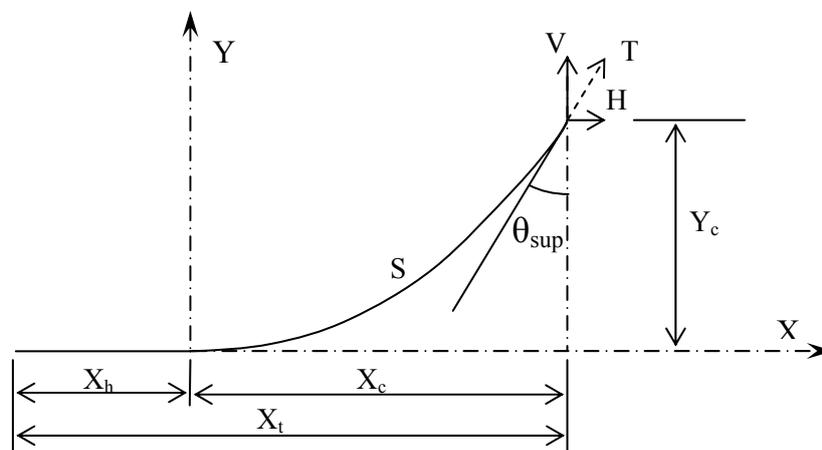


Figura 3.14 – Parâmetros da catenária

Na Figura 3.14 é mostrado um elemento da linha de ancoragem e as forças atuantes.

Parâmetros:

H → Força horizontal

V → Força vertical

T → Tração atuante no cabo

θ → Ângulo entre a tração e o eixo vertical

X_h → Comprimento do cabo no solo

X_c → Projeção horizontal do trecho suspenso do cabo

$X_t = X_h + X_c$

Y_c → Projeção vertical

S_t → Comprimento total do cabo

S → Comprimento suspenso do cabo

W → Peso por unidade de comprimento

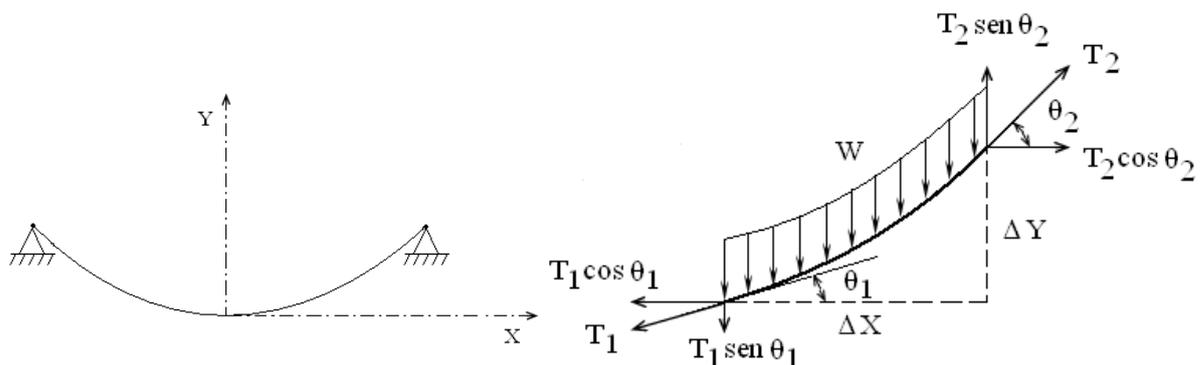


Figura 3.15 – Trecho infinitesimal de uma catenária

Considerando-se um elemento ΔS da catenária, conforme mostrado na figura 3.14, aplicando-se o balanço de forças, temos:

$$\sum F_H = T_2 \cdot \cos(\theta_2) - T_1 \cdot \cos(\theta_1) = 0 \quad (3.1)$$

ou

$$\Delta[T \cdot \cos(\theta)] = 0 \quad (3.2)$$

e

$$H = T \cdot \cos(\theta) = \text{constante} \quad (3.3)$$

$$\sum F_v = T2 \cdot \text{sen}(\theta_2) - T1 \cdot \text{sen}(\theta_1) - W \cdot \Delta S = 0 \quad (3.4)$$

ou

$$\Delta[T \cdot \text{sen}(\theta)] = W \cdot \Delta S \quad (3.5)$$

$$H \cdot \Delta[\text{tg}(\theta)] = W \cdot \Delta S \quad (3.6)$$

Trabalhando com as relações geométricas, é possível determinar, através de integração e aplicação das condições de contorno [2], os parâmetros da catenária.

$$X_c = \frac{\cosh^{-1}(Yc \cdot a + 1)}{a} \quad (3.7)$$

onde X_c é a projeção horizontal do trecho suspenso e $a = W/H$

$$S = \frac{\sinh^{-1}(Xc \cdot a)}{a} \quad (3.8)$$

$$X_h = S_t - S \quad (3.9)$$

É possível ainda, obter as seguintes relações.

$$X_t = X_c + X_h \quad (3.10)$$

Substituindo a equação (3.9) na equação (3.10) se obtém:

$$X_t = X_c + S_t - S \quad (3.11)$$

Logo

$$X_t = \frac{\cosh^{-1}\left(Yc \cdot \frac{W}{H} + 1\right)}{\frac{W}{H}} + S_t - \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{\cosh^{-1}\left(Yc \cdot \frac{W}{H} + 1\right)}{\frac{W}{H}} \cdot \frac{W}{H}\right)}{\frac{W}{H}} \quad (3.12)$$

A solução da catenária inextensível é obtida encontrando-se a força horizontal H. Para isso a equação (3.12) deve ser resolvida por Newton-Raphson.

4 - Análise Não-Linear Geométrica

O objetivo da análise estrutural é determinar a resposta da estrutura quando submetida a ações externas, ou seja, obter tensões, deformações e deslocamentos. Para algumas estruturas, valores relativamente grandes de deslocamentos transversais à barra podem trazer como consequência, o aparecimento de esforços normais adicionais (denominado de segunda ordem). A esse tipo de comportamento não-linear, dá-se o nome de não-linearidade geométrica. Neste caso, os efeitos não lineares estão associados às equações de equilíbrio, que consideram a configuração deformada, e as relações deformação-deslocamento.

Para se efetuar a análise estrutural das linhas de ancoragem deve ser considerado o comportamento não-linear geométrico da estrutura. Para este caso, a não-linearidade surge devido à modificação da geometria de referência da análise ao longo do processo de deformação do corpo. Isto pode ocorrer devido a grandes deformações, grandes deslocamentos ou rotações da configuração de referência.

Para que os efeitos de não linearidade sejam considerados, é utilizada a matriz $[k_\sigma]$ que é somada à matriz de rigidez convencional $[k]$. A matriz $[k_\sigma]$ é chamada de matriz de rigidez geométrica e é definida pelo campo de deslocamentos geométricos do elemento e pelo estado de tensões. Logo, $[k_\sigma]$ é independente das propriedades elásticas do material. A matriz de rigidez geométrica da estrutura $[K_\sigma]$ é construída pelo somatório das matrizes de rigidez geométrica de cada elemento $[k_\sigma^i]$, do mesmo modo que a matriz de rigidez $[K]$ é formada pelo somatório dos termos dos elementos da matriz $[k^i]$.

A alteração de rigidez provocada por uma carga axial será ilustrada usando conceitos de energia de deformação em um elemento infinitesimal [6].

Supõe-se um elemento infinitesimal de comprimento dx , onde um pequeno deslocamento lateral $w = w(x)$ é aplicado, o comprimento do elemento dx é alterado para um novo comprimento ds , onde $ds > dx$, como mostra a figura 4.1. Em problemas lineares o alongamento devido a deslocamentos transversais é desprezado. Essa consideração é válida para problemas onde a rotação $w_{,x}$ é muito pequena, porém em estruturas com grandes deslocamentos transversais este alongamento deve ser considerado.

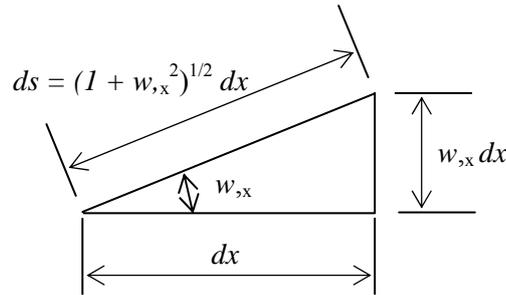


Figura 4.1 – Relações geométricas de um elemento infinitesimal com comprimento dx

Sendo assim, ds é igual a:

$$ds = (1 + w_{,x}^2)^{1/2} dx \approx \left(1 + \frac{w_{,x}^2}{2}\right) dx \quad (4.1)$$

Logo, a deformação na barra devido a deslocamentos transversais é:

$$\varepsilon = \frac{ds - dx}{dx} = \frac{w_{,x}^2}{2} \quad (4.2)$$

Em uma barra, podem-se ter deslocamentos axiais $u = u(x)$ e deslocamentos transversais $w = w(x)$. Logo, a deformação axial total na barra é:

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \quad (4.3)$$

Com isso, é possível calcular a energia de deformação da barra

$$U = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dV = \int_0^L \int_A \frac{1}{2} E \varepsilon^2 dA \cdot dx \quad (4.4)$$

Substituindo a equação (4.3) na (4.4) e notando que

$$\int_A E u_{,x} dA = N \quad (4.5)$$

onde N é a força axial atuante na barra, positiva na tração. Se o termo que depende de $w_{,x}^4$ é descartado por ser desprezível comparado aos outros termos, obtém-se:

$$U = \int_0^L \frac{AE}{2} u_{,x}^2 dx + \int_0^L \frac{N}{2} w_{,x}^2 dx \quad (4.6)$$

Na equação (4.6), a primeira integral fornece a matriz de rigidez elementar $[k]$ e está associada aos deslocamentos u_1 e u_2 . A matriz de rigidez elementar geométrica $[k_\sigma]$ que

descreve o trabalho realizado e a energia armazenada quando um deslocamento transversal w é aplicado a uma barra é obtida da segunda integral.

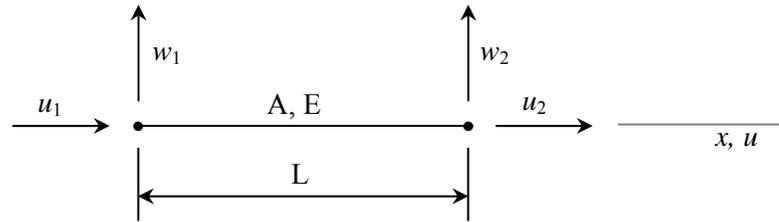


Figura 4.2 – Elemento de barra, A = seção transversal, E = módulo de elasticidade.

Da segunda integração temos:

$$\int_0^L \frac{N}{2} w_{,x}^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^L w_{,x}^T N w_{,x} = \frac{1}{2} \{d\}^T [k_\sigma] \{d\} \quad (4.7)$$

Associando os termos da matriz de rigidez geométrica $[k_\sigma]$ aos deslocamentos transversais se obtém:

$$w_{,x} = [G] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad \text{Onde} \quad [G] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Consequentemente temos:

$$[k_\sigma] = [G]^T N [G] = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{para} \quad \{d\} = [w_1 \quad w_2]^T \quad (4.9)$$

Assim, a matriz de rigidez geométrica completa fica:

$$[k_\sigma] = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{para} \quad \{d\} = [u_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad w_2]^T \quad (4.10)$$

Com a matriz de rigidez geométrica é possível efetuar uma análise de estruturas levando em consideração o comportamento não-linear geométrico. Para isso, a matriz de rigidez geométrica deve ser somada à matriz de rigidez de cada elemento da estrutura. Para elementos de treliça, a matriz de rigidez elementar fica:

$$[k_i^L] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

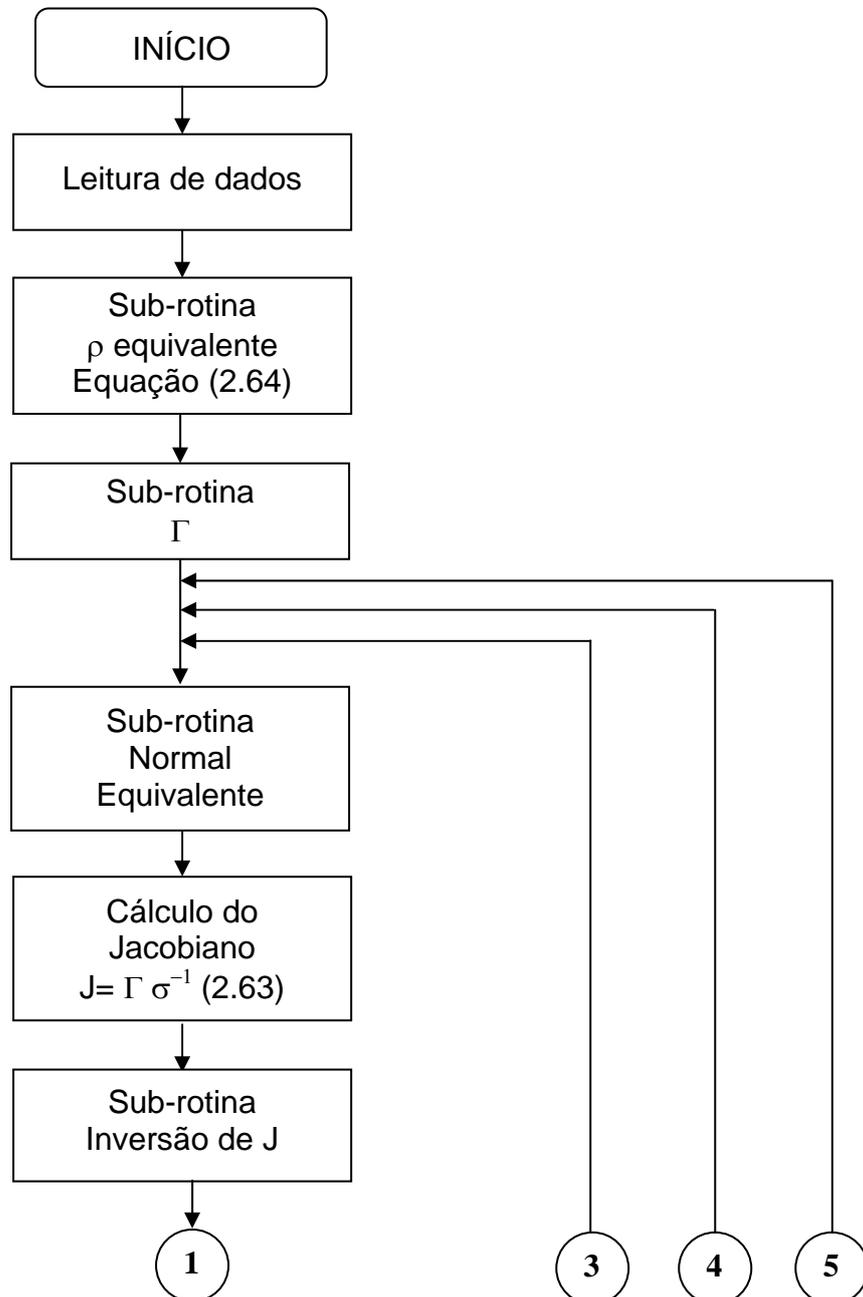
Como a matriz de rigidez geométrica depende do esforço axial na barra, a análise da estrutura não linear é um processo iterativo. Este processo termina com a convergência dos esforços ou dos deslocamentos.

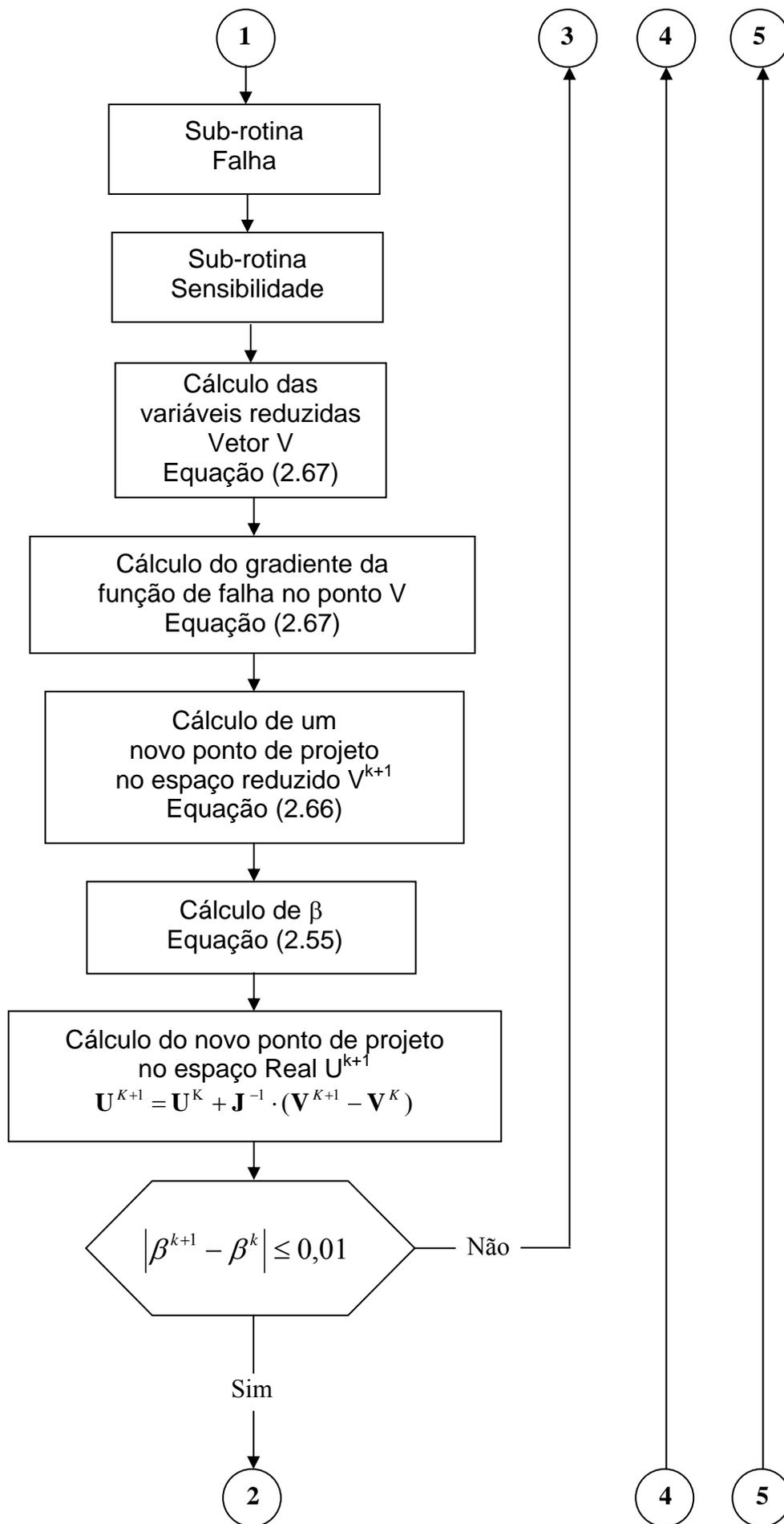
5 - Análise de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem

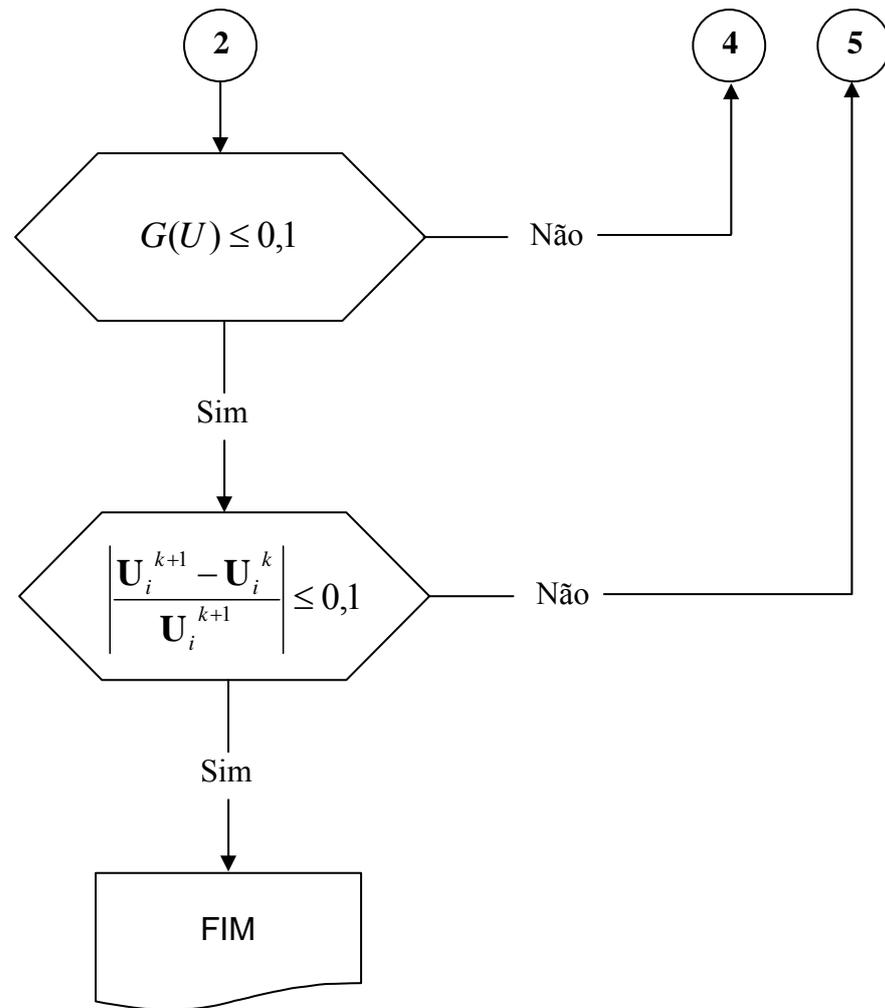
Para esta análise, foram elaborados dois programas computacionais em linguagem de programação FORTRAN.

5.1 Programa de Análise de Confiabilidade pelo Método FORM

O primeiro programa contém todas as etapas do método de análise de confiabilidade FORM. É feita a correção da matriz dos coeficientes de correlação, a transformação das variáveis em normais equivalentes e a transformação das variáveis normais correlacionadas em variáveis independentes; após, inicia-se a busca pelo ponto de projeto. Abaixo, é mostrado um fluxograma do programa de confiabilidade.







Para este programa de confiabilidade estrutural, foram elaboradas as seguintes subrotinas:

- ρ equivalente – Calcula os fatores de correção para a matriz de correlação e encontra a matriz de correlação normal equivalente.
- Normal equivalente – Encontra uma distribuição normal equivalente reduzida para o valor da variável ao qual se deseja analisar. São obtidas a média e o desvio padrão da variável normal equivalente reduzida.
- Γ – Encontra a matriz Γ fazendo a decomposição de Choleski e em seguida invertendo a matriz decomposta (L).
- Inversão J – Esta sub-rotina foi criada para inverter a matriz jacobiana $J = \Gamma \sigma^{-1}$
- Falha – Calcula a função de falha no ponto a ser analisado
- Sensibilidade – Efetua o cálculo da derivada da função de falha, matriz de sensibilidade da estrutura, por diferenças finitas.
- $\Phi(\beta)$ – Nesta sub-rotina foi inserida a função aproximadora de $\Phi(\beta)$ [10].

Este programa tem como entrada o número de variáveis aleatórias, as respectivas distribuições, as médias e os desvios padrão de cada variável e a matriz de correlação.

A seguir, é mostrado um exemplo de entrada do programa.

3		Número de Variáveis
l og l og gum		Tipo das Funções Distribuição
40 50 1000		Médias
5 2.5 200		Desvios Padrão
1 0.4 0		Matriz de Correlação
0.4 1 0		
0 0 1		

Neste exemplo, a função de falha é $G(x)=x(1)*x(2) - x(3)$

O resultado obtido é mostrado abaixo:

Programa de Análise de Confiabilidade

A análise é feita pelo Método FORM.
É utilizada a Transformação de NATAF.

Arquivo de Entrada: pag64.txt

Dados de Entrada:

Número de Variáveis:	3
Distribuições:	l og l og gum
Médias:	4.000E+01 5.000E+01 1.000E+03
Desvios Padrão:	5.000E+00 2.500E+00 2.000E+02
Matriz de correlação:	1.000E+00 4.000E-01 0.000E+00 4.000E-01 1.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 1.000E+00

Resumo da Análise:

Iteração	Variável Aleatória	Ponto de Projeto	Desvio Padrão no espaço V	Média no espaço V	Beta	G(U)	Novo Ponto de Projeto
----------	--------------------	------------------	---------------------------	-------------------	------	------	-----------------------

1	1	4.00E+01	4.98E+00	3.97E+01	2.8335	1.0000E+03	2.76E+01
	2	5.00E+01	2.50E+00	4.99E+0			4.83E+01
	3	1.00E+03	1.91E+02	9.66E+02			1.26E+03
2	1	2.76E+01	3.43E+00	3.76E+01	2.7615	7.8428E+01	3.13E+01
	2	4.83E+01	2.42E+00	4.99E+0			4.60E+01
	3	1.26E+03	2.86E+02	8.94E+02			1.54E+03
3	1	3.14E+01	3.91E+00	3.88E+01	2.6482	-9.5744E+01	3.44E+01
	2	4.60E+01	2.30E+00	4.98E+0			4.72E+01
	3	1.54E+03	3.89E+02	7.20E+02			1.62E+03
4	1	3.44E+01	4.29E+00	3.93E+01	2.6643	9.0977E+00	3.41E+01
	2	4.72E+01	2.36E+00	4.99E+0			4.79E+01
	3	1.62E+03	4.14E+02	6.64E+02			1.61E+03
5	1	3.41E+01	4.24E+00	3.93E+01	2.6641	1.8970E+01	3.37E+01
	2	4.79E+01	2.39E+00	4.99E+0			4.78E+01
	3	1.61E+03	4.13E+02	6.67E+02			1.61E+03
6	1	3.37E+01	4.20E+00	3.92E+01	2.6644	7.0609E-01	3.37E+01
	2	4.78E+01	2.39E+00	4.99E+0			4.77E+01
	3	1.61E+03	4.12E+02	6.69E+02			1.61E+03
PF =		3.856441389306853E-003					

5.2 Programa de Análise de Cabos de Ancoragem

Para a análise de confiabilidade de cabos de ancoragem, a função de falha não pode ser expressa por uma função analítica, sendo necessária a elaboração de um programa auxiliar de análise de estruturas para a sua determinação. Foi então elaborado um programa de análise de cabos de ancoragem para avaliar a ocorrência de falha da estrutura em cada ponto da análise. Para as linhas de ancoragem, a rigidez à flexão é desprezada, com isso optou-se por fazer um programa de análise de treliças planas com não-linearidade geométrica [1, 6].

O programa de análise de cabos de ancoragem efetua a análise a partir de uma geometria inicial do cabo que é composto por elementos de barra. A partir dessa geometria, é possível montar a matriz de rigidez de cada elemento. Como este programa considera a não linearidade da estrutura, a matriz de rigidez geométrica elementar é somada à matriz de rigidez convencional.

$$k_i = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Depois de obtida a matriz de rigidez de cada elemento, efetua-se a rotação da matriz de rigidez de cada elemento dos eixos locais para os eixos globais.

$$[k_i^G] = [R]^T \cdot [k_i^L] \cdot [R] \quad (5.2)$$

Para a matriz de rotação [R] igual a:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

sendo θ o ângulo que a barra faz com o eixo X

A matriz elementar nos eixos globais é posicionada na matriz de rigidez global. Após a montagem da matriz de rigidez, são inseridas as restrições de apoio para que o sistema possa ser resolvido encontrando assim os deslocamentos nodais.

O processo de análise não-linear é um processo iterativo, pois a matriz de rigidez depende do esforço axial atuante na barra. Sendo assim, foi arbitrado um valor inicial para o esforço normal. Em cada iteração, são calculados novos esforços normais. O processo iterativo termina quando os deslocamentos convergirem.

Ao se efetuar a análise de um cabo, verificou-se a necessidade de simulação do solo, pois com a deformação da linha, um trecho que antes era suspenso vai tender a se apoiar no solo. Sem essa simulação ocorre um erro na análise como mostrado na figura 5.1.

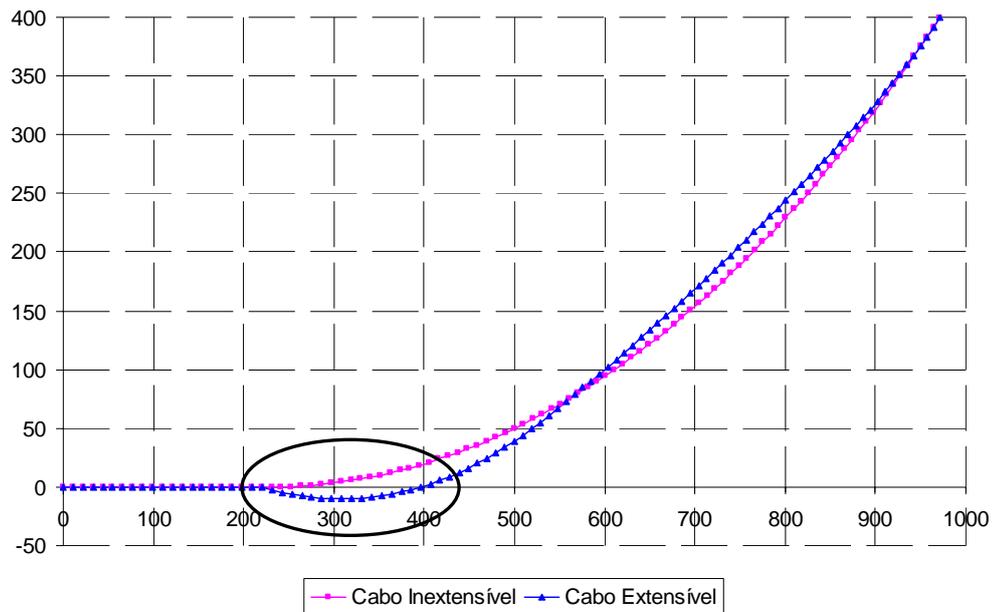


Figura 5.1 – Análise de cabos sem simulação de solo

Para simular o solo foi feita uma programação condicional, onde, se o nó deslocado tiver coordenada Y negativa então este nó vai passar a ter um apoio de restrição vertical. O mesmo foi feito para o caso do nó que está apoiado no solo tentar se levantar. Se a reação em Y tiver o sentido negativo, se o solo estiver “puxando” o cabo, então este nó vai ser liberado. Deve ser mencionado que o problema de interação solo-estrutura, é um problema bem mais complexo. Porém, como se trata de um projeto de graduação, essa interação foi simplificada.

A figura abaixo ilustra as modificações para a simulação do solo.

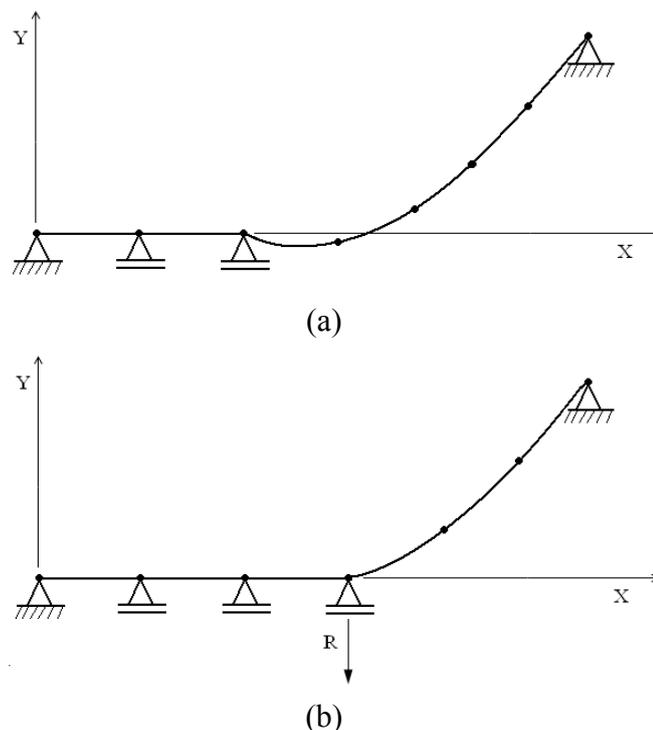


Figura 5.2 – Modificação da estrutura para a simulação do solo (a) coordenada nodal negativa (b) reação negativa.

Com isso o problema da simulação do solo foi resolvido como pode ser verificado na figura abaixo.

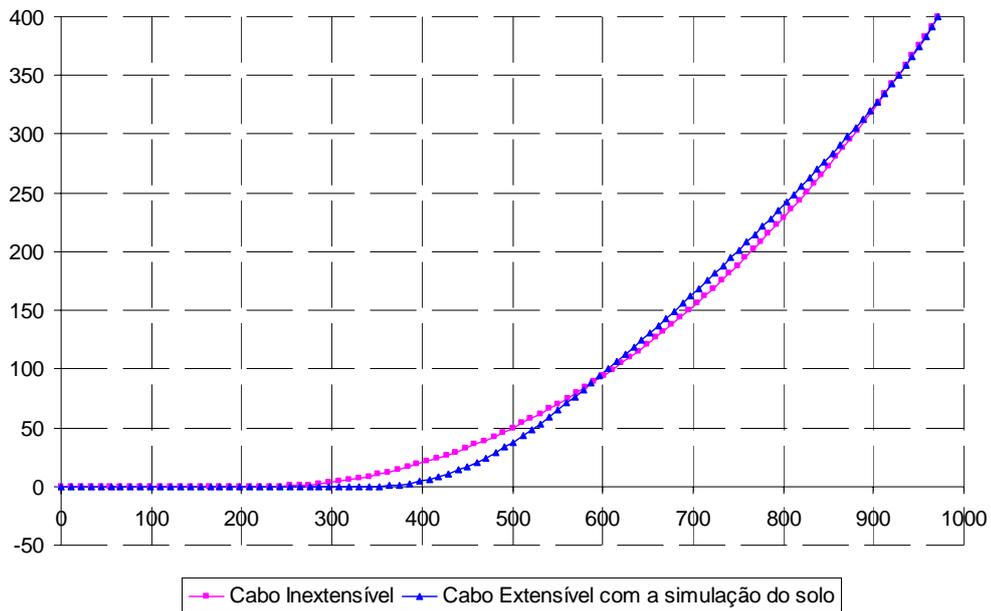
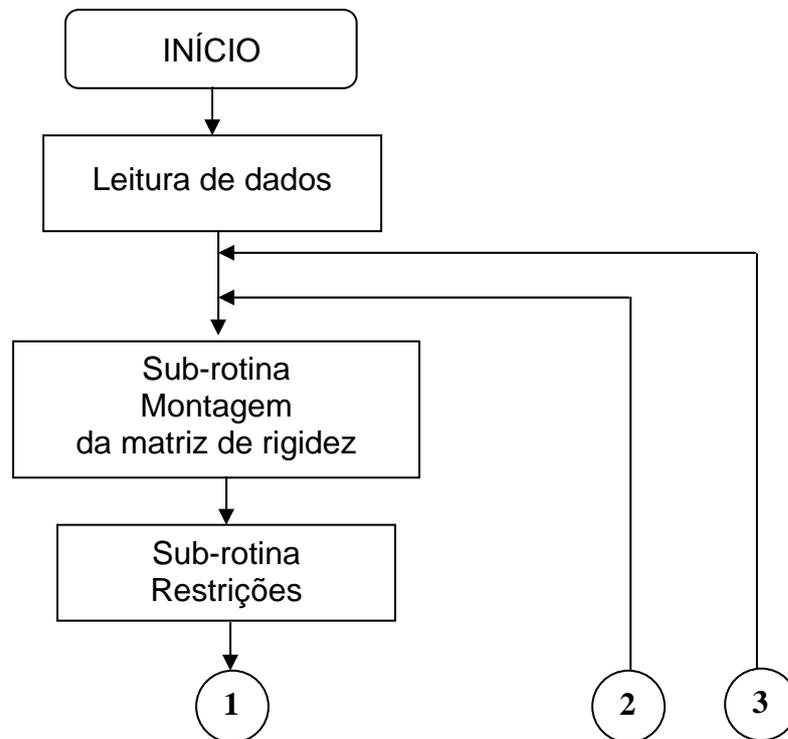
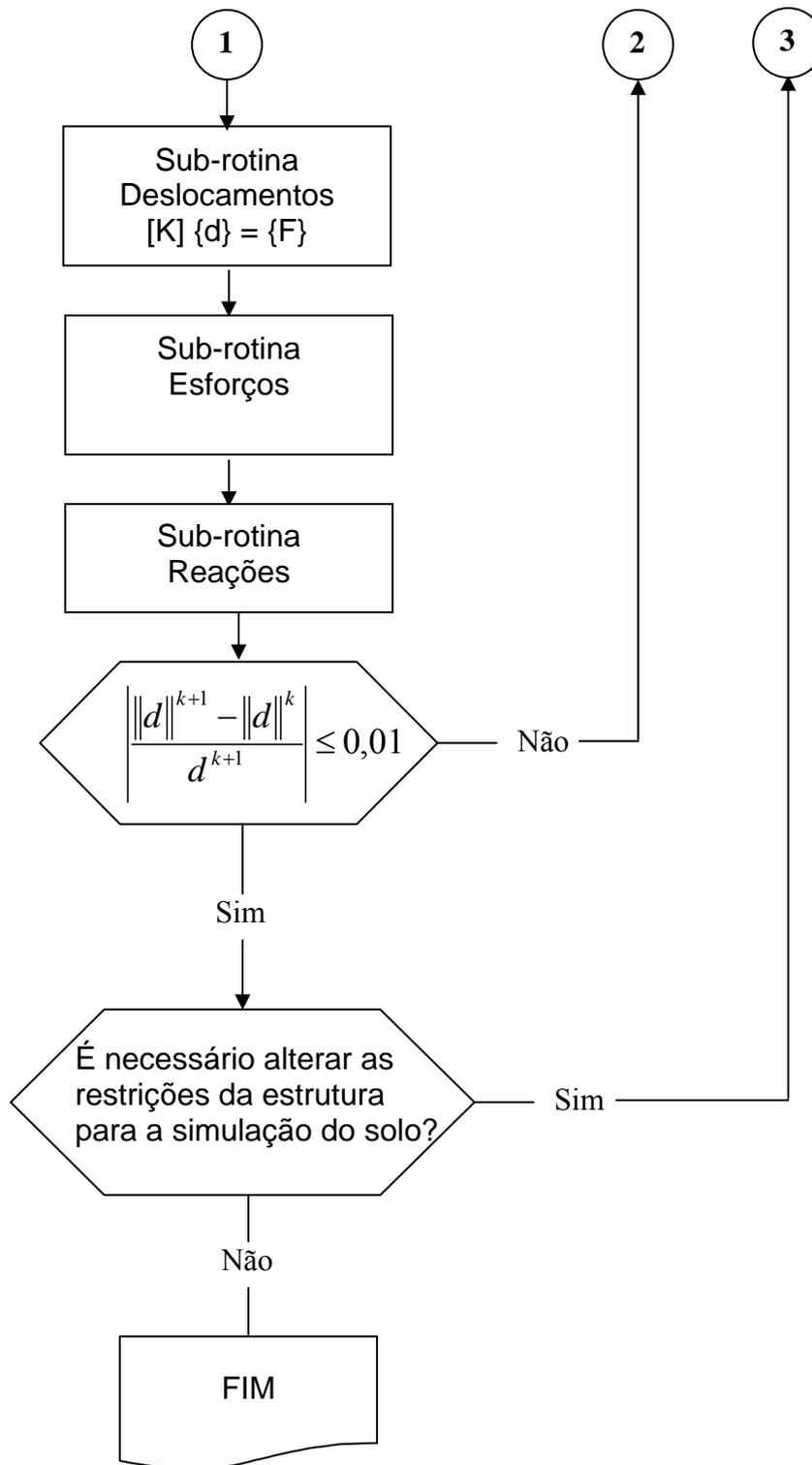


Figura 5.3 – Análise de cabos com a simulação do solo

Abaixo é mostrado um fluxograma do programa.





Para o programa de análise de cabos, foram elaboradas as seguintes subrotinas:

- Montagem – Calcula a matriz de rigidez de cada elemento, considerando a matriz de rigidez geométrica. Em seguida, a matriz de rigidez elementar é rotacionada para os eixos globais e posicionada na matriz de rigidez da estrutura.

- Restrições – Modifica a matriz de rigidez impondo restrições; é utilizado o método dos números grandes.
- Deslocamentos – Calcula os deslocamentos nodais através da solução do sistema $[K]\{d\} = \{F\}$
- Esforços – Calcula os esforços normais em cada elemento
- Reações - Calcula as reações de apoio

Para a análise de cabos, as cargas ambientais serão aplicadas como *offsets* (deslocamentos) no topo da linha para simular movimentos causados por ondas e ventos. Com isso, o programa foi adaptado para receber um valor de deslocamento a ser aplicado no topo da linha, ou seja, no ultimo nó.

O programa de análise de cabos de ancoragem tem como entrada as coordenadas dos nós, a conectividade das barras com os nós, os módulos de elasticidade, as áreas de seção transversal, as restrições, as cargas nodais atuantes e o *offset* no topo da linha.

```

1      0      0
2      99     0
3      209    0
4      318.78  5.5
5      426.67  26.45
6      530.73  61.89
7      629.57  110.02
8      722.45  168.86
9      809.15  236.49
10     889.82  311.23
0
    
```

Nós e respectivas coordenadas

```

5.27E+7
5.13E+7
0
    
```

Módulos de Elasticidade dos trechos de cabo

```

0.020414069
0.008332289
0
    
```

Área da seção transversal dos trechos de cabo

Conectividade

Mod. de Elasticidade

```

      ↙     ↘
1      1      2
2      2      3
3      3      4
4      4      5
5      5      6
6      6      7
7      7      8
8      8      9
9      9     10
0
    
```

Seção transversal

Matriz de conectividade dos nós e relação dos elementos com os módulos de elasticidade e as áreas.

O número que relaciona os elementos às propriedades corresponde à ordem na qual foram inseridas

```

      ↙     ↘
1      1      1
    
```

Dir. X Dir. Y

Restrições em X e Y de cada nó, se 0 liberado se

2	0	1		
10	1	1		1 restringido
0				
			Dir. X	Dir. Y
1	0	-11.3355		Forças nodais atuantes em X e Y
2	0	-22.671		
3	0	-22.671		
4	0	-13.7115		
5	0	-4.752		
6	0	-4.752		
7	0	-13.7115		
8	0	-22.671		
9	0	-22.671		
10	0	-22.671		
0				
0				Offset no topo da linha
0				

O programa tem como saída os deslocamentos nodais, as reações de apoio e os esforços normais nas barras. A seguir é mostrado um exemplo de saída.

Programa de análise de Trel i ças Planas

arqui vo de entrada: exempl o. txt

Desl ocamentos nodais

nó	X	Y
1	7.176773263284055E-051	-1.015319423828677E-051
2	7.373305243151557E-003	-2.030638847657355E-051
3	1.556586662443106E-002	-1.451275277773804E-051
4	-0.143989809732740	3.34879333468667
5	-1.27500182663206	9.28465536689337
6	-0.312224852915029	6.52463714079059
7	4.45633610335483	-3.21814867201462
8	8.49028964350613	-9.56845585534053
9	6.66744500776719	-7.21436263119963
10	-7.176773263282929E-051	-9.978827231528022E-051

Reações de apoi o

nó	X	Y
1	-80.1248468380366	11.3355000000000
2	0.000000000000000E+000	22.6710000000000
3	0.000000000000000E+000	16.2061576786917
10	79.8084017978353	111.055065964246

Esforços nas barras

Barra	Esf. normal
1	80.1248468380366
2	80.1248468380366
3	80.3481343102960
4	82.5023349474629
5	83.8844970140190
6	85.0335832354285
7	90.9089726535967
8	103.811573484050
9	119.084525081544

5.3 Programa de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem pelo Método FORM

Após concluído o programa de análise de cabos, ele é acoplado ao programa de análise de confiabilidade para se obter os valores das funções de falha. Neste projeto, as variáveis estão dispostas da seguinte forma:

1	Módulo de elasticidade da amarra
2	Força de ruptura da amarra
3	Módulo de elasticidade do cabo de aço
4	Força de ruptura do cabo de aço
5	Offset no topo da linha

Tabela 5.1 – Ordem de entrada das variáveis

A entrada do programa final é análoga às entradas já mostradas anteriormente. A seguir é mostrado um exemplo dados de entrada:

1	0	0							Nós e respectivas coordenadas
2	209	0							
3	426.67		26.45						
4	629.57		110.02						
5	809.15		236.49						
0									
0.	020414069								Área da seção transversal
0.	008332289								
0									
1	1	2	1	1					Matriz de conectividade dos nós
2	2	3	1	1					e relação dos elementos com os
3	3	4	1	1					módulos de elasticidade e as
4	4	5	2	2					áreas.
0									
1	1	1							Restrições em X e Y de cada nó
2	0	1							
5	1	1							
0									
1	0	-11.3355							Forças nodais atuantes em X e Y
2	0	-13.7115							
3	0	-4.75							
4	0	-13.7115							
5	0	-11.3355							
0									
5									Número de variáveis aleatórias
l og	l og	l og	l og	nor					Funções de distribuição
50000000		10000	55000000	5000	10				Médias
25000000		2000	3000000	500	5				Desvios padrão
1	0	0	0	0					Matriz de Correlação
0	1	0	0	0					
0	0	1	0	0					
0	0	0	1	0					
0	0	0	0	1					

5.4 Programa de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem pelo Método de Monte Carlo

Para o programa de análise de confiabilidade pelo método de Monte Carlo é utilizado somente o programa de análise de cabos. Este programa foi adaptado para receber valores para as variáveis aleatórias; ele analisa a estrutura para cada conjunto de variáveis aleatórias. A seguir é mostrado um exemplo de entrada:

1	0	0			Nós e respectivas coordenadas
2	209	0			
3	426.67		26.45		
4	629.57		110.02		
5	809.15		236.49		
0					
0.020414069					Área da seção transversal
0.008332289					
0					
1	1	2	1	1	Matriz de conectividade dos nós
2	2	3	1	1	e relação dos elementos com os
3	3	4	1	1	módulos de elasticidade e as
4	4	5	2	2	áreas.
0					
1	1	1			Restrições em X e Y de cada nó
2	0	1			
5	1	1			
0					
1	0	-11.3355			Forças nodais atuantes em X e Y
2	0	-13.7115			
3	0	-4.75			
4	0	-13.7115			
5	0	-11.3355			
0					
5					Número de valores para as variáveis aleatórias
0					
5.09E+07	1.30E+04	4.95E+07	7.62E+03	54.731	
5.14E+07	1.69E+04	5.00E+07	8.69E+03	38.547	
50200000	13910	48840000	7.88E+03	46.225	
4.84E+07	1.10E+04	47080000	7.01E+03	49.834	
5.28E+07	2.18E+04	5.13E+07	9.89E+03	50.599	
0					

Valores das variáveis aleatórias. Cada coluna representa uma variável seguindo a ordem mostrada na tabela 5.1.

5.5 Modos de Falha

Para a análise de confiabilidade de cabos de ancoragem foram considerados dois modos de falha que foram mostrados a seguir.

a) Ocorrência de uma componente de força vertical na âncora.

b) Ruptura de um dos três segmentos: amarra inferior, cabo de aço, amarra superior.

Neste caso, serão analisadas três funções de falha. Duas das funções de falha correspondem à falha por ruptura no trecho de amarras e no trecho de cabo de aço. A função de falha por ruptura da amarra é

$$G1(U) = NR_{amarra} - NS_{Max-amarra}$$

sendo NR_{amarra} a força normal resistente da amarra e $NS_{Max-amarra}$ a força normal solicitante máxima atuando no trecho de amarra.

A função de falha por ruptura do cabo de aço é

$$G2(U) = NR_{aço} - NS_{Max-aço}$$

sendo $NR_{aço}$ a força normal resistente do cabo de aço e $NS_{Max-aço}$ a força normal solicitante máxima atuando no trecho de cabo de aço.

A terceira função de falha corresponde ao aparecimento uma força de arrancamento na âncora. Esta falha é detectada pelo aparecimento de uma reação de apoio vertical de sentido negativo no nó inicial da linha de ancoragem.

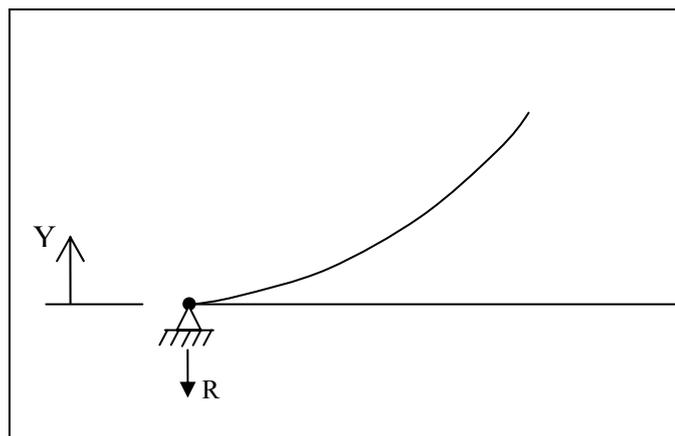


Figura 6.1 – reação negativa

Assim a função de falha por arrancamento da âncora é

$$G3(U) = R$$

sendo R a reação de apoio no nó inicial do cabo. Assim, quando a reação é negativa a estrutura falha.

Após a elaboração dos programas e a definição das funções de falha, é possível analisar um exemplo de linha de ancoragem.

6 - Exemplos de aplicação

A seguir serão mostradas as análises de confiabilidade de uma linha de ancoragem na configuração de catenária. A linha é analisada pelo método de FORM e pelo método de Monte Carlo.

A linha a ser analisada está instalada em lamina d'água (LDA) de 400m e o comprimento total da linha é 1100m. Cada linha é constituída por três segmentos: dois de amarras e um de cabo de aço. Na tabela 6.1, são fornecidas as principais características da linha a ser analisada:

Material	L (m)	Diâmetro (m)	W(kN/m)		MBL (kN)	EA (kN)
			Seco	Molhado		
Amarra inferior	220	0.114	2.792	2.061	12420	1076000
Cabo de aço	715	0.103	0.432		7063	427276
Amarra superior	165	0.114	2.792	2.061	12420	1076000

Tabela 6.1 – características da linha a ser analisada

Sendo L o comprimento de cada trecho da linha de ancoragem, W é o peso linear do material, MBL é a tração mínima de ruptura.

Os valores que serão considerados como aleatórios neste problema são as forças resistentes e o módulo de elasticidade das seções dos dois materiais, amarra e cabo de aço. As cargas ambientais, que também são aleatórias, serão aplicadas como *offsets* (deslocamentos) no topo da linha para simular movimentos causados por ondas e ventos. O valor adotado como valor médio do *offset* corresponde a 5% da LDA e seu coeficiente de variação é 0,3. O valor médio da resistência dos cabos foi adotado como sendo é igual a 1,10 vezes o valor da resistência nominal (MBL = *Minimum Breaking Load*), o coeficiente de variação é de 0,2 para as amarras e de 0,1 para o cabo de aço. Os valores médios dos módulos de elasticidade foram calculados de acordo com a tabela acima sendo adotado um coeficiente de variação igual a 0,05. Na tabela a seguir, é apresentado um resumo das propriedades estatísticas das variáveis aleatórias.

		Distribuição	μ	δ	$\sigma = \mu \times \delta$
Amarra	Módulo de elasticidade (kN/m ²)	Lognormal	52708747	0.05	2635437
	Força de ruptura (kN)	Lognormal	13662	0.2	2732.4
cabo de aço	Módulo de elasticidade (kN/m ²)	Lognormal	51279546	0.05	2563977
	Força de ruptura (kN)	Lognormal	7769.3	0.1	776.93
Offset (m)		Normal	20	0.3	6

Tabela 6.2 – parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias

Os cabos de ancoragem devem ser instalados com uma pré-tensão, neste exemplo será adotada a pré-tração igual a 1000kN.

Para utilizar o programa de análise de confiabilidade é necessário encontrar uma configuração que sirva como geometria de referência para a análise. Optou-se por utilizar o programa de catenária inextensível em “Mathcad” [9] para definir a geometria inicial do cabo de ancoragem. Sendo o programa de catenária inextensível um programa para análise de um cabo uniforme, foram inseridos dados como se a linha fosse composta apenas por cabo de aço. A partir das características do cabo de aço (tabela 6.1) foi encontrada a configuração da catenária inextensível.

Para o programa da catenária inextensível os dados de entrada são:

$X_t := 972$	$X_t =$ projeção horizontal (m)
$Y_c := 400$	$Y_c =$ projeção vertical (m)
$w := .432$	$w =$ peso por metro de cabo (kN/m)
$S_t := 1100$	$S_t =$ comprimento total do cabo (m)

Foram obtidos os seguintes resultados:

$H = 324.202$	$H =$ resultante horizontal da força na saída (kN)
$V(H) = 376.702$	$V =$ resultante vertical da força na saída (kN)
$T(H) = 497.002$	$T =$ tração no cabo na saída (kN/m)
$X_h(H) = 228.006$	$X_h =$ projeção horizontal do cabo que toca o solo (m)
$X_c(H) = 743.994$	$X_c =$ projeção horizontal do trecho em catenária (m)

Com estes resultados é possível traçar a equação geométrica da linha de ancoragem

$$y_{cc}(x) := \frac{H}{w} \cdot \left(\cosh \left(\frac{w}{H} \cdot x_c(x) \right) - 1 \right)$$

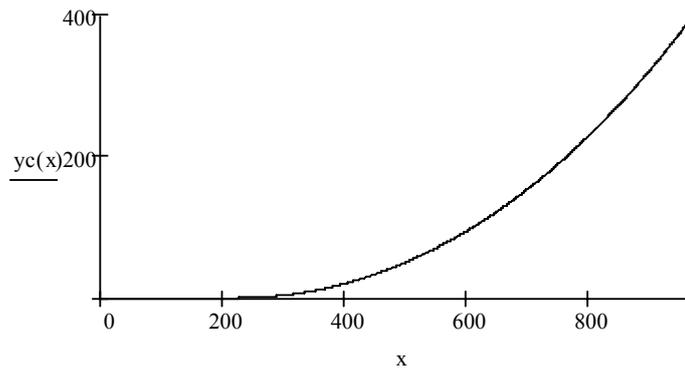


Figura 6.1 – configuração geométrica da catenária inextensível

Após a obtenção da geometria da linha, o cabo de 1100m foi dividido em 100 segmentos de 11m para se gerar a geometria inicial do modelo de barras.

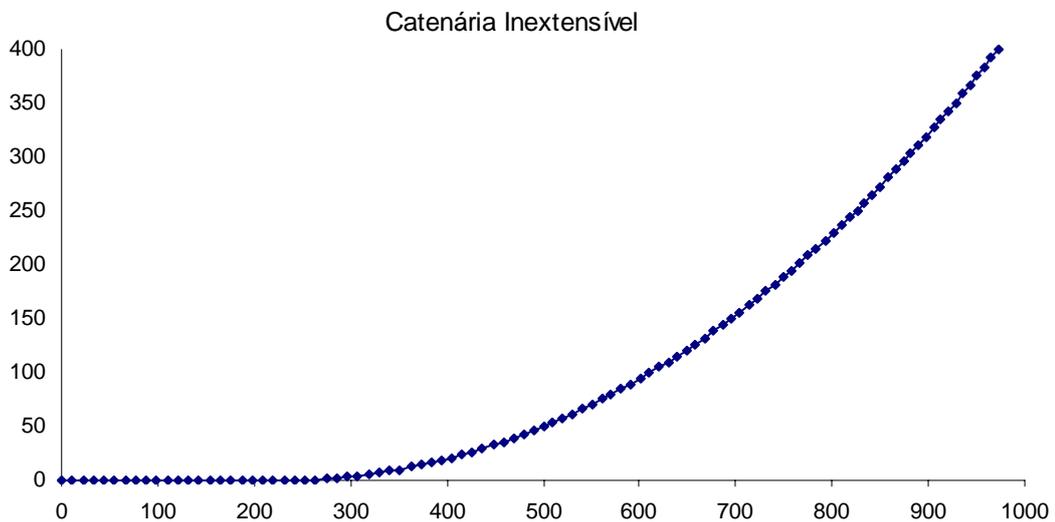


Figura 6.2 – Catenária inextensível – modelo de barras

O modelo de barras foi inserido no programa de análise não linear geométrica para encontrar a pré-tração de 1000kN. Este programa tem como dados de entrada, além da configuração geométrica, os valores dos módulos de elasticidade, a área da seção transversal e o peso linear da amarra e do cabo de aço. Como resultado a pré-tração de 1000kN foi encontrada para um *offset* de 27m.

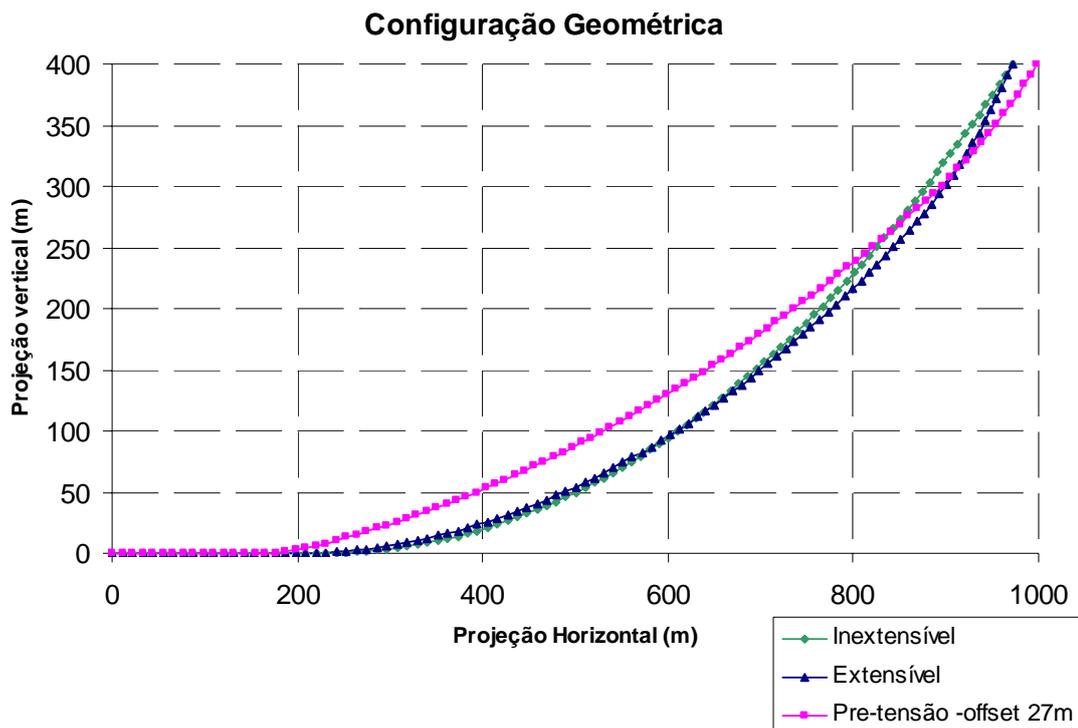


Figura 6.3 – Configuração geométrica - Aplicação da pré-tensão

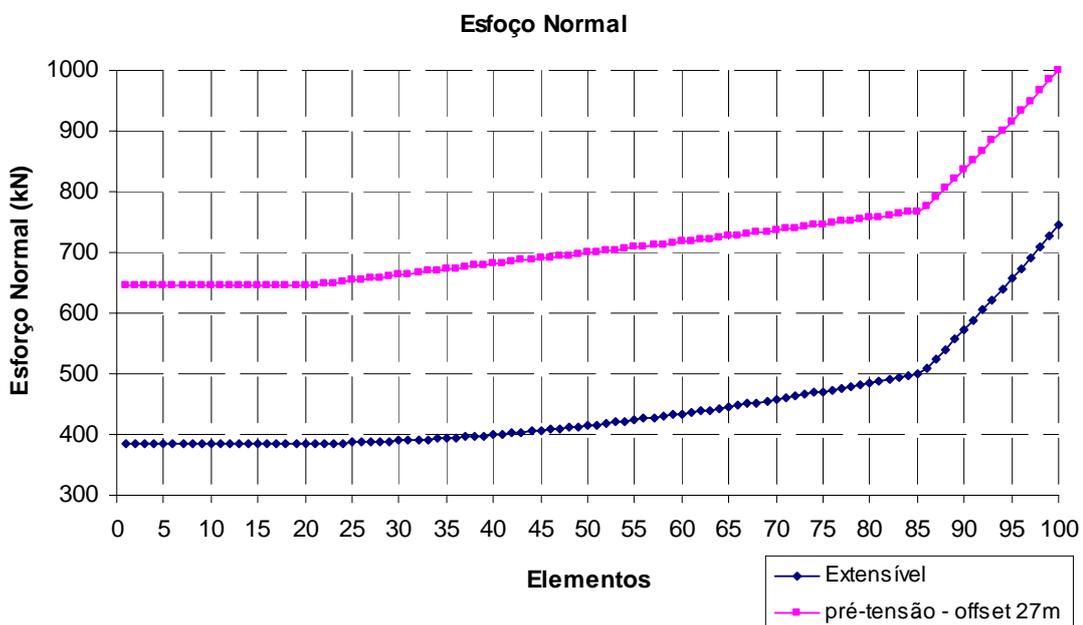


Figura 6.3 – Esforços Normais por elemento - Aplicação da pré-tensão

O *offset* médio que era de 20m vai passar a ser 47m para que seja considerada a pré-tensão. Então os parâmetros estatísticos passam a ser como mostrado na tabela abaixo:

		Distribuição	μ	δ	$\sigma = \mu \times \delta$
Amarra	Módulo de elasticidade (kN/m ²)	Lognormal	52708747	0.05	2635437
	Força de ruptura (kN)	Lognormal	13662	0.2	2732.4
Cabo de aço	Módulo de elasticidade (kN/m ²)	Lognormal	51279546	0.05	2563977
	Força de ruptura (kN)	Lognormal	7769.3	0.1	776.93
Offset (m)		Normal	47	0.3	6

Tabela 6.3 – Parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias com pré-tração

6.1 Análise pelo Método FORM

A análise foi feita, para as três funções de falha, pelo programa de análise de confiabilidade que utiliza o método FORM. Os resultados são mostrados a seguir:

Para a função de falha G1

Função de falha	Número de iterações	Variável		Ponto de projeto	β - índice de confiabilidade	G(U) - valor da função de falha
G1(U) - Falha por ruptura na amarra	9	Amarra	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	5.28E+07	10.1822	-9.80E-02
			Força de Ruptura (kN)	3.21E+03		
		Cabo de aço	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	5.22E+07		
			Força de Ruptura (kN)	7.73E+03		
			Offset (m)	9.00E+01		

Tabela 6.4 - Resultados da análise de confiabilidade pelo método FORM para G1

$$Pf = \Phi[-\beta] \cong 0$$

Para a função de falha G2

Função de falha	Número de iterações	Variável		Ponto de projeto	β - índice de confiabilidade	G(U) - valor da função de falha
G2(U) - Falha por ruptura no cabo de aço	6	Amarra	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	5.31E+07	10.0137	1.22E-02
			Força de Ruptura (kN)	1.34E+04		
		Cabo de aço	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	5.33E+07		
			Força de Ruptura (kN)	5.38E+03		
			Offset (m)	1.03E+02		

Tabela 6.5 - Resultados da análise de confiabilidade pelo método FORM para G2

$$Pf = \Phi[-\beta] \cong 0$$

Para a função de falha G3

Função de falha	Número de iterações	Variável		Ponto de projeto	β - índice de confiabilidade	G(U) - valor da função de falha
G3(U) - Falha pelo aparecimento de componente vertical da âncora	8	Amarra	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	5.27E+07	3.138	-3.73E-03
			Força de Ruptura (kN)	1.34E+04		
		Cabo de aço	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	5.14E+07		
			Força de Ruptura (kN)	7.73E+03		
			Offset (m)	6.58E+01		

Tabela 6.6 - Resultados da análise de confiabilidade pelo método FORM para G3

$$Pf = \Phi[-\beta] = 8,51 \times 10^{-4}$$

Como os índices de confiabilidade β das funções de falha G1 e G2 são muito grandes, a probabilidade de falha do sistema será calculada considerando apenas o β da função G3. Que resulta em uma probabilidade de falha igual a:

$$Pf = \Phi[-\beta] = 8,51 \times 10^{-4}$$

Como o valor do índice de confiabilidade β obtido foi inferior a 3,4 o resultado não satisfaz às recomendações do JCSS (*Joint Committee on Structural Safety*).

6.2 Análise pelo Método de Monte Carlo

Para efetuar a análise pelo método de Monte Carlo, são gerados 30000 valores aleatórios para cada variável, para isto foi utilizado o programa Mathcad. Em seguida, os valores aleatórios foram inseridos no programa de análise pelo método de Monte Carlo. Os resultados obtidos foram:

Na análise das funções de falha G1 e G2, não foi encontrado nenhum ponto de falha. O número de pontos utilizados nas análises foi obtido através a equação (2.86) para de identificar uma probabilidade de falha de 10^{-4} , logo para identificar a Pf do problema seria necessário um número maior de pontos. Sendo assim, será considerado que a probabilidade das funções de falha G1 e G2 são aproximadamente iguais a zero.

Para a função de falha G1 e G2

$$Pf \cong 0$$

Na análise da função de falha G3, foram encontrados 21 pontos de falha logo a probabilidade de falha de G3 é:

$$P_f = \frac{1}{NP} \sum_{k=1}^{NP} I[G(U^k) \leq 0] = \frac{1}{30000} \cdot 21$$

$$P_f = 7 \times 10^{-4}$$

O β correspondente a essa probabilidade de falha é

$$\beta = \Phi^{-1}[P_f] = 3,195$$

Como para as funções de falha G1 e G2 não houve pontos de falha, o número de pontos de falha do sistema é igual ao número de pontos de falha da função G3. O resultado obtido pela análise de Monte Carlo para o sistema foi:

$$P_f = 7 \times 10^{-4}$$

$$\beta = 3,195$$

Assim como na análise pelo método FORM, a análise pelo método de Monte Carlo constatou a estrutura não satisfaz às recomendações do JCSS (*Joint Committee on Structural Safety*).

6.3 Análise pelo Método FORM (considerando correlação)

O fato das variáveis serem correlacionadas é um complicador na análise, pois exige que sejam feitas correções nos coeficientes de correlação e decomposição de Choleski da matriz de correlação. Apesar de, no problema de cabos de ancoragem, as variáveis não terem correlação, os programas elaborados neste trabalho admitem que exista correlação entre as variáveis. A seguir, serão feitas análises pelo método FORM e pelo método de Monte Carlo considerando que haja correlação entre o módulo de elasticidade e a força resistente na amarra e cabo de aço com um coeficiente de correlação igual a 0.4.

Pelo programa de análise de confiabilidade que utiliza o método FORM foram obtidos os seguintes resultados:

Para a função de falha G1

Função de falha	Número de iterações	Variável		Ponto de projeto	β - índice de confiabilidade	G(U) - valor da função de falha
G1(U) - Falha por ruptura na amarra	10	Amarra	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	4.56E+07	10.2047	-2.88E-02
			Força de Ruptura (kN)	3.18E+03		
		Cabo de aço	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	5.21E+07		
			Força de Ruptura (kN)	7.84E+03		
			Offset (m)	8.99E+01		

Tabela 6.7 - Resultados da análise de confiabilidade pelo método FORM para G1

$$Pf = \Phi[-\beta] \cong 0$$

Para a função de falha G2

Função de falha	Número de iterações	Variável		Ponto de projeto	β - índice de confiabilidade	G(U) - valor da função de falha
G2(U) - Falha por ruptura no cabo de aço	6	Amarra	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	5.31E+07	10.1384	1.03E-01
			Força de Ruptura (kN)	1.36E+04		
		Cabo de aço	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	4.96E+07		
			Força de Ruptura (kN)	5.46E+03		
		Offset (m)	1.04E+02			

Tabela 6.8 - Resultados da análise de confiabilidade pelo método FORM para G2

$$Pf = \Phi[-\beta] \cong 0$$

Para a função de falha G3

Função de falha	Número de iterações	Variável		Ponto de projeto	β - índice de confiabilidade	G(U) - valor da função de falha
G3(U) - Falha pelo aparecimento de componente vertical da âncora	8	Amarra	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	5.27E+07	3.138	-8.25E-05
			Força de Ruptura (kN)	1.34E+04		
		Cabo de aço	Mod. Elasticidade (kN/m ²)	5.14E+07		
			Força de Ruptura (kN)	7.75E+03		
		Offset (m)	6.58E+01			

Tabela 6.9 - Resultados da análise de confiabilidade pelo método FORM para G3

$$Pf = \Phi[-\beta] = 8,51 \times 10^{-4}$$

Da mesma forma que na outra análise, os índices de confiabilidade β das funções de falha G1 e G2 são muito grandes, logo a probabilidade de falha do sistema será calculada considerando apenas o β da função G3. Que resulta em uma probabilidade de falha igual a:

$$Pf = \Phi[-\beta] = 8,51 \times 10^{-4}$$

6.4 Análise pelo Método de Monte Carlo (considerando correlação)

Para efetuar a análise pelo método de Monte Carlo, são gerados números aleatórios para cada variável; desta vez foi necessário gerar variáveis correlacionadas, como mostrado no item 2.7.2.2. Para isso foi utilizado o programa Mathcad.

Como o *offset* não tem correlação com nenhuma outra variável, o modo de gerar valores aleatórios para o *offset* é o mesmo da análise sem correlação. O resultado obtido pela análise de Monte Carlo foi:

Como na análise anterior, para as funções de falha G1 e G2 não foram encontrados nenhum ponto de falha. Sendo assim seria necessário um número maior de pontos para detectar a P_f . Será considerado que a probabilidade das funções de falha G1 e G2 são aproximadamente iguais a zero.

Para a função de falha G1 e G2

$$P_f \cong 0.$$

Na análise da função de falha G3 foram encontrados 29 pontos de falha logo a probabilidade de falha de G3 é:

$$P_f = \frac{1}{NP} \sum_{k=1}^{NP} I[G(U^k) \leq 0] = \frac{1}{30000} \cdot 29$$

$$P_f = 9,67 \times 10^{-4}$$

O β correspondente a essa probabilidade de falha é

$$\beta = \Phi^{-1}[P_f] = 3,1$$

Como para as funções de falha G1 e G2 não houve pontos de falha o número de pontos de falha do sistema é igual ao número de pontos de falha da função G3. O resultado obtido pela análise de Monte Carlo para o sistema foi:

$$P_f = 9,67 \times 10^{-4}$$

$$\beta = \Phi^{-1}[P_f] = 3,1$$

6.5 - Resumo da análise

A tabela a seguir apresenta um resumo dos resultados das análises.

Método de Análise		Função de falha
FORM	Variáveis não correlacionadas	G1 = 0
		G2 = 0
		G3 = 8.51E-04
		Sistema = 8.51E-04
	Variáveis correlacionadas	G1 = 0
		G2 = 0
		G3 = 8.51E-04
		Sistema = 8.51E-04
Monte Carlo	Variáveis não correlacionadas	G1 = 0
		G2 = 0
		G3 = 7.00E-04
		Sistema = 7.00E-04
	Variáveis correlacionadas	G1 = 0
		G2 = 0
		G3 = 9.67E-04
		Sistema = 9.67E-04

Tabela 6.10 – Resumo dos resultados das análises

Para o resultado da probabilidade de falha do sistema nas duas análises o índice de confiabilidade β foi maior que 3,4, sendo assim a estrutura não está atendendo às recomendações do JCSS (*Joint Committee on Structural Safety*). Deve ser mencionado que este índice de confiabilidade acontece no modo de falha representado por G3 e que este modo de falha não representa colapso da estrutura. Uma âncora pode sofrer uma pequena carga vertical que para arrancar a âncora precisaria vencer o peso próprio da âncora e a resistência do solo.

A análise é considerada válida, pois para os dois métodos de análises foram obtidos resultados muito próximos. Os resultados com Monte Carlo têm precisão similar ao SORM que é um método mais preciso que o FORM. Este método aproxima a superfície de falha por uma superfície de segunda ordem.

Para o método FORM, não houve diferença de resultado entre a análise com variáveis correlacionadas e a análise com variáveis não correlacionadas. Já o método de Monte Carlo se mostrou mais sensível a esta alteração. Isto pode ter ocorrido porque o método FORM faz uma aproximação da superfície de falha por um hiperplano e pelo fato do coeficiente de correlação ser muito baixo, igual a 0,4.

7 - Conclusão e Sugestões

Neste trabalho, um sistema de ancoragem foi analisado utilizando a análise de confiabilidade estrutural. Foram utilizados dois métodos de análise de confiabilidade, o método FORM e o método de Monte Carlo. Para avaliar a função de falha da estrutura, foi utilizado, nos dois métodos de análise, a análise não linear geométrica para simular o comportamento do cabo de ancoragem. Foram elaborados dois programas, o programa de análise de confiabilidade pelo método FORM e o programa de análise não linear de treliças planas. Para efetuar a análise pelo método FORM, os dois programas trabalham em conjunto. E para a análise pelo método de Monte Carlo, é utilizado apenas o programa de análise não linear de treliças planas.

Os resultados são válidos, pois os dois métodos de análise apresentaram resultados muito semelhantes.

Foi constatado que a estrutura analisada possui um índice de confiabilidade β menor que 3,4 sendo assim não atende às recomendações do JCSS (*Joint Committee on Structural Safety*). A falha correspondente a este β é devido a uma carga vertical na âncora que não representa o colapso da estrutura mais sim um critério de projeto. A confiabilidade do sistema poderia aumentar se houvesse o aumento o comprimento da amarra inferior.

Trabalhos posteriores podem considerar mais precisamente a aleatoriedade de carregamentos ambientais como vento, ondas e correntes. Sugere-se também efetuar a análise de um sistema de ancoragem e não só de um cabo. Para isso seria necessário efetuar uma análise tridimensional da estrutura. Poderia ser feita também a análise de um sistema de ancoragem na configuração *Tout-leg*.

8 - Bibliografia

- 1 – *Análise de estruturas em computadores : Estruturas reticuladas*, Soriano, H.L., Lima, S.S., UFRJ, Vol.1,1997
- 2 – *Análise de Sistemas de Ancoragem de plataformas flutuante*, Thiago Ângelo, Projeto Final, Departamento de Mecânica das estruturas, Escola Politécnica, 2005
- 3 – *Apostila do Curso de Confiabilidade Estrutural*, Lima, E.C.P. e Sagrilo, L.V.S., COPPE.
- 4 – *Apostila do Curso de Confiabilidade Estrutural - Monte Carlo*, Lima, E.C.P. e Sagrilo, L.V.S., COPPE, 2003.
- 5 – *Apostila do Curso de Offshore Mestrado*, MBP, MSO, Ellwanger, Gilberto, 2004.
- 6 – *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 3rd edition, Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., John Wiley & Sons, 1989.
- 7 – *Finite Element Method in Engineering Science*, 2nd Edition, Zienkiewicz, O. C., editora McGraw-Hill, 1971.
- 8 – *Metodologia de Calibração de Fatores Parciais de Segurança para Projeto de Linhas de Ancoragem Baseada em Confiabilidade*, Alberto Omar Vazquez Hernández, tese de doutorado, COPPE/UFRJ, 2004.
- 9 – *Programa de catenária inextensível*, Claudia Eboli, 2005.
- 10 – *Structural Reliability Analysis and Prediction*, Melchers, R.E., John Wiley and Sons, Chichester, 1999.
- 11 – *Taschenbuch der Mathematik*, Bronstein, I.N. und Semendjajew, K.A., Verlag Harri Deutsch, 1976.
- 12 – *Uncertainty Analysis, Loads, and Safety in Structural Engineering*, Gary C. Hart, Prentice-Hall, 1982.

9 - Anexos

Saída do programa de análise pelo método FORM

Análise sem consideração de correlação entre as variáveis

Para a função de falha G1

Programa de Análise de Confiabilidade

A análise é feita pelo Método FORM.
É utilizada a Transformação de NATAF.

Arquivo de Entrada: formscorr.txt

Dados de Entrada:

Número de Variáveis: 5

Distribuições: log log log log nor

Médias: 5.271E+07 1.366E+04 5.128E+07 7.769E+03 4.700E+01

Desvios Padrão: 2.635E+06 2.732E+03 2.564E+06 7.770E+02 6.000E+00

Matriz de correlação: 1.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 1.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 1.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 1.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 1.000E+00

Resumo da Análise:

Iteração	Variável	Ponto de Projeto	Desvio Padrão	Média	Beta	G(U)	Novo Ponto de Projeto
1	1	5.2709E+07	2.6338E+06	5.2643E+07	4.4553	1.2334E+04	5.2645E+07
	2	1.3662E+04	2.7053E+03	1.3394E+04			1.3545E+03
	3	5.1280E+07	2.5624E+06	5.1216E+07			5.1224E+07
	4	7.7690E+03	7.7507E+02	7.7303E+03			7.7303E+03
	5	4.7000E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			4.8245E+01
2	1	5.2645E+07	2.6306E+06	5.2643E+07	10.4831	5.1757E-01	5.2684E+07
	2	1.3545E+03	2.6821E+02	4.4585E+03			1.9342E+03
	3	5.1224E+07	2.5596E+06	5.1216E+07			5.1410E+07
	4	7.7303E+03	7.7121E+02	7.7304E+03			7.7304E+03
	5	4.8245E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			7.4698E+01
3	1	5.2684E+07	2.6326E+06	5.2643E+07	10.2186	-1.9159E+02	5.2736E+07
	2	1.9342E+03	3.8299E+02	5.6774E+03			2.5076E+03
	3	5.1410E+07	2.5689E+06	5.1215E+07			5.1673E+07
	4	7.7304E+03	7.7122E+02	7.7304E+03			7.7304E+03
	5	7.4698E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			8.2944E+01
4	1	5.2736E+07	2.6352E+06	5.2643E+07	10.1580	-1.0199E+02	5.2782E+07
	2	2.5076E+03	4.9654E+02	6.7096E+03			2.9227E+03
	3	5.1673E+07	2.5820E+06	5.1214E+07			5.1901E+07
	4	7.7304E+03	7.7122E+02	7.7304E+03			7.7304E+03
	5	8.2944E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			8.7225E+01
5	1	5.2782E+07	2.6374E+06	5.2643E+07	10.1545	-3.1808E+01	5.2813E+07
	2	2.9227E+03	5.7873E+02	7.3725E+03			3.1247E+03
	3	5.1901E+07	2.5934E+06	5.1211E+07			5.2060E+07
	4	7.7304E+03	7.7122E+02	7.7304E+03			7.7304E+03
	5	8.7225E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			8.9056E+01
	1	5.2813E+07	2.6390E+06	5.2643E+07			5.2825E+07
	2	3.1247E+03	6.1874E+02	7.6733E+03			3.1488E+03

Análise de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem de Plataformas Flutuantes

6	3	5. 2060E+07	2. 6014E+06	5. 1209E+0	10. 1833	1. 7930E+01	5. 2119E+07
	4	7. 7304E+03	7. 7122E+02	7. 7304E+03			7. 7304E+03
	5	8. 9056E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			8. 9470E+01
7	1	5. 2825E+07	2. 6396E+06	5. 2643E+07			5. 2830E+07
	2	3. 1488E+03	6. 2351E+02	7. 7083E+03			3. 1858E+03
	3	5. 2119E+07	2. 6043E+06	5. 1208E+0	10. 1825	-5. 0578E-01	5. 2143E+07
	4	7. 7304E+03	7. 7122E+02	7. 7304E+03			7. 7304E+03
	5	8. 9470E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			8. 9823E+01
8	1	5. 2830E+07	2. 6399E+06	5. 2643E+07			5. 2834E+07
	2	3. 1858E+03	6. 3083E+02	7. 7616E+03			3. 2055E+03
	3	5. 2143E+07	2. 6055E+06	5. 1207E+0	10. 1823	-3. 6392E-01	5. 2161E+07
	4	7. 7304E+03	7. 7122E+02	7. 7304E+03			7. 7304E+03
	5	8. 9823E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			9. 0006E+01
9	1	5. 2834E+07	2. 6400E+06	5. 2643E+07			5. 2836E+07
	2	3. 2055E+03	6. 3473E+02	7. 7898E+03			3. 2155E+03
	3	5. 2161E+07	2. 6064E+06	5. 1207E+0	10. 1822	-9. 8022E-02	5. 2171E+07
	4	7. 7304E+03	7. 7122E+02	7. 7304E+03			7. 7304E+03
	5	9. 0006E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			9. 0100E+01

PF = 0. 000000000000000E+000

Análise sem consideração de correlação entre as variáveis

Para a função de falha G2

Programa de Análise de Confiabilidade

A análise é feita pelo Método FORM.
É utilizada a Transformação de NATAF.

Arquivo de Entrada: formscorr. txt

Dados de Entrada:

Número de Variáveis: 5

Distribuições: log log log log nor

Médias: 5. 271E+07 1. 366E+04 5. 128E+07 7. 769E+03 4. 700E+01

Desvios Padrão: 2. 635E+06 2. 732E+03 2. 564E+06 7. 770E+02 6. 000E+00

Matriz de correlação: 1. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00
0. 000E+00 1. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00
0. 000E+00 0. 000E+00 1. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00
0. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00 1. 000E+00 0. 000E+00
0. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00 1. 000E+00

Resumo da Análise:

Iteração	Variável	Ponto de Projeto	Desvio Padrão	Média	Beta	G(U)	Novo Ponto de Projeto
1	1	5. 2709E+07	2. 6338E+06	5. 2643E+07			5. 2655E+07
	2	1. 3662E+04	2. 7053E+03	1. 3394E+04			1. 3394E+04
	3	5. 1280E+07	2. 5624E+06	5. 1216E+0	8. 4187	6. 6581E+03	5. 1274E+07
	4	7. 7690E+03	7. 7507E+02	7. 7303E+03			1. 2983E+03
	5	4. 7000E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			5. 5498E+01
2	1	5. 2655E+07	2. 6311E+06	5. 2643E+07			5. 2740E+07
	2	1. 3394E+04	2. 6522E+03	1. 3397E+04			1. 3397E+04
	3	5. 1274E+07	2. 5621E+06	5. 1216E+0	12. 1857	-1. 1907E+01	5. 1683E+07
	4	1. 2983E+03	1. 2952E+02	3. 6146E+03			2. 6319E+03
	5	5. 5498E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			1. 0420E+02
3	1	5. 2740E+07	2. 6354E+06	5. 2643E+07			5. 3069E+07
	2	1. 3397E+04	2. 6527E+03	1. 3397E+04			1. 3397E+04
	3	5. 1683E+07	2. 5825E+06	5. 1213E+0	9. 2340	-2. 9976E+03	5. 3358E+07
	4	2. 6319E+03	2. 6257E+02	5. 4677E+03			5. 0218E+03
	5	1. 0420E+02	6. 0000E+00	4. 7000E+01			1. 0122E+02

Análise de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem de Plataformas Flutuantes

4	1	5.3069E+07	2.6518E+06	5.2641E+07			5.3034E+07
	2	1.3397E+04	2.6527E+03	1.3397E+04			1.3397E+04
	3	5.3358E+07	2.6662E+06	5.1171E+0	10.0614	4.1010E+01	5.3147E+07
	4	5.0218E+03	5.0099E+02	7.1881E+03			5.3212E+03
	5	1.0122E+02	6.0000E+00	4.7000E+01			1.0289E+02
5	1	5.3034E+07	2.6500E+06	5.2642E+07			5.3064E+07
	2	1.3397E+04	2.6527E+03	1.3397E+04			1.3397E+04
	3	5.3147E+07	2.6557E+06	5.1180E+0	10.0136	-7.8383E+01	5.3306E+07
	4	5.3212E+03	5.3086E+02	7.3085E+03			5.3830E+03
	5	1.0289E+02	6.0000E+00	4.7000E+01			1.0279E+02
6	1	5.3064E+07	2.6515E+06	5.2641E+07			5.3062E+07
	2	1.3397E+04	2.6527E+03	1.3397E+04			1.3397E+04
	3	5.3306E+07	2.6637E+06	5.1173E+0	10.0137	1.2220E-02	5.3291E+07
	4	5.3830E+03	5.3703E+02	7.3312E+03			5.3609E+03
	5	1.0279E+02	6.0000E+00	4.7000E+01			1.0269E+02

PF = 0.000000000000000E+000

Análise sem consideração de correlação entre as variáveis

Para a função de falha G2

Programa de Análise de Confiabilidade

A análise é feita pelo Método FORM.
É utilizada a Transformação de NATAF.

Arquivo de Entrada: formscorr.txt

Dados de Entrada:

Número de Variáveis: 5

Distribuições: log log log log nor

Médias: 5.271E+07 1.366E+04 5.128E+07 7.769E+03 4.700E+01

Desvios Padrão: 2.635E+06 2.732E+03 2.564E+06 7.770E+02 6.000E+00

Matriz de correlação:

1.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
0.000E+00	1.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
0.000E+00	0.000E+00	1.000E+00	0.000E+00	0.000E+00
0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	1.000E+00	0.000E+00
0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	0.000E+00	1.000E+00

Resumo da Análise:

Iteração	Variável	Ponto de Projeto	Desvio Padrão	Média	Beta	G(U)	Novo Ponto de Projeto
1	1	5.2709E+07	2.6338E+06	5.2643E+07			5.2655E+07
	2	1.3662E+04	2.7053E+03	1.3394E+04			1.3394E+04
	3	5.1280E+07	2.5624E+06	5.1216E+0	8.4187	6.6581E+03	5.1274E+07
	4	7.7690E+03	7.7507E+02	7.7303E+03			1.2983E+03
	5	4.7000E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			5.5498E+01
2	1	5.2655E+07	2.6311E+06	5.2643E+07			5.2740E+07
	2	1.3394E+04	2.6522E+03	1.3397E+04			1.3397E+04
	3	5.1274E+07	2.5621E+06	5.1216E+0	12.1857	-1.1907E+01	5.1683E+07
	4	1.2983E+03	1.2952E+02	3.6146E+03			2.6319E+03
	5	5.5498E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			1.0420E+02
3	1	5.2740E+07	2.6354E+06	5.2643E+07			5.2960E+07
	2	1.3397E+04	2.6527E+03	1.3397E+04			1.3397E+04
	3	5.1683E+07	2.5825E+06	5.1213E+0	6.5515	-1.2821E+03	5.2757E+07
	4	2.6319E+03	2.6257E+02	5.4677E+03			5.4677E+03
	5	1.0420E+02	6.0000E+00	4.7000E+01			8.6138E+01
	1	5.2960E+07	2.6464E+06	5.2642E+07			5.2749E+07
	2	1.3397E+04	2.6527E+03	1.3397E+04			1.3397E+04

Análise de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem de Plataformas Flutuantes

4	3	5.2757E+07	2.6362E+06	5.1193E+0	4.4401	-4.0151E+02	5.1711E+07
	4	5.4677E+03	5.4548E+02	7.3612E+03			7.3612E+03
	5	8.6138E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			7.3613E+01
5	1	5.2749E+07	2.6358E+06	5.2643E+07			5.2696E+07
	2	1.3397E+04	2.6527E+03	1.3397E+04			1.3397E+04
	3	5.1711E+07	2.5839E+06	5.1213E+0	3.3525	-1.0791E+02	5.1467E+07
	4	7.3612E+03	7.3438E+02	7.7215E+03			7.7215E+03
	5	7.3613E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			6.7106E+01
6	1	5.2696E+07	2.6331E+06	5.2643E+07			5.2685E+07
	2	1.3397E+04	2.6527E+03	1.3397E+04			1.3397E+04
	3	5.1467E+07	2.5718E+06	5.1215E+0	3.1576	-1.4579E+01	5.1418E+07
	4	7.7215E+03	7.7033E+02	7.7304E+03			7.7304E+03
	5	6.7106E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			6.5939E+01
7	1	5.2685E+07	2.6326E+06	5.2643E+07			5.2684E+07
	2	1.3397E+04	2.6527E+03	1.3397E+04			1.3397E+04
	3	5.1418E+07	2.5693E+06	5.1215E+0	3.1380	-1.4290E+00	5.1412E+07
	4	7.7304E+03	7.7122E+02	7.7304E+03			7.7304E+03
	5	6.5939E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			6.5822E+01
8	1	5.2684E+07	2.6325E+06	5.2643E+07			5.2683E+07
	2	1.3397E+04	2.6527E+03	1.3397E+04			1.3397E+04
	3	5.1412E+07	2.5690E+06	5.1215E+0	3.1380	-3.7300E-03	5.1412E+07
	4	7.7304E+03	7.7122E+02	7.7304E+03			7.7304E+03
	5	6.5822E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			6.5822E+01

PF = 8.505591604635043E-004

Análise com consideração de correlação entre as variáveis

Para a função de falha G1

Programa de Análise de Confiabilidade

A análise é feita pelo Método FORM.
É utilizada a Transformação de NATAF.

Arquivo de Entrada: formccorr.txt

Dados de Entrada:

Número de Variáveis: 5

Distribuições: log log log log nor

Médias: 5.271E+07 1.366E+04 5.128E+07 7.769E+03 4.700E+01

Desvios Padrão: 2.635E+06 2.732E+03 2.564E+06 7.770E+02 6.000E+00

Matriz de correlação: 1.000E+00 4.000E-01 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
4.000E-01 1.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 1.000E+00 4.000E-01 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 4.000E-01 1.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 1.000E+00

Resumo da Análise:

Iteração	Variável	Ponto de Projeto	Desvio Padrão	Média	Beta	G(U)	Novo Ponto de Projeto
1	1	5.2709E+07	2.6338E+06	5.2643E+07			4.7916E+07
	2	1.3662E+04	2.7053E+03	1.3394E+04			1.3538E+03
	3	5.1280E+07	2.5624E+06	5.1216E+0	4.4556	1.2334E+04	5.1224E+07
	4	7.7690E+03	7.7507E+02	7.7303E+03			7.7314E+03
	5	4.7000E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			4.8245E+01
2	1	4.7916E+07	2.3943E+06	5.2424E+07			4.3357E+07
	2	1.3538E+03	2.6807E+02	4.4568E+03			1.9308E+03
	3	5.1224E+07	2.5596E+06	5.1216E+0	10.4931	6.4763E-01	5.1410E+07
	4	7.7314E+03	7.7131E+02	7.7304E+03			7.7539E+03

Análise de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem de Plataformas Flutuantes

	5	4. 8245E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01		7. 4695E+01	
3	1	4. 3357E+07	2. 1665E+06	5. 1771E+07		4. 4579E+07	
	2	1. 9308E+03	3. 8232E+02	5. 6709E+03		2. 4909E+03	
	3	5. 1410E+07	2. 5689E+06	5. 1215E+0	10. 2391	-1. 8782E+02	5. 1669E+07
	4	7. 7539E+03	7. 7356E+02	7. 7304E+03			7. 7851E+03
	5	7. 4695E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			8. 2812E+01
4	1	4. 4579E+07	2. 2276E+06	5. 1991E+07		4. 5193E+07	
	2	2. 4909E+03	4. 9324E+02	6. 6815E+03		2. 8877E+03	
	3	5. 1669E+07	2. 5818E+06	5. 1214E+0	10. 1823	-9. 6812E+01	5. 1887E+07
	4	7. 7851E+03	7. 7668E+02	7. 7302E+03			7. 8115E+03
	5	8. 2812E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			8. 7000E+01
5	1	4. 5193E+07	2. 2583E+06	5. 2089E+07		4. 5478E+07	
	2	2. 8877E+03	5. 7180E+02	7. 3190E+03		3. 0820E+03	
	3	5. 1887E+07	2. 5927E+06	5. 1211E+0	10. 1783	-2. 9529E+01	5. 2039E+07
	4	7. 8115E+03	7. 7931E+02	7. 7300E+03			7. 8297E+03
	5	8. 7000E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			8. 8822E+01
6	1	4. 5478E+07	2. 2725E+06	5. 2132E+07		4. 5518E+07	
	2	3. 0820E+03	6. 1028E+02	7. 6108E+03		3. 1085E+03	
	3	5. 2039E+07	2. 6003E+06	5. 1209E+0	10. 2060	1. 6853E+01	5. 2096E+07
	4	7. 8297E+03	7. 8113E+02	7. 7298E+03			7. 8366E+03
	5	8. 8822E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			8. 9262E+01
7	1	4. 5518E+07	2. 2745E+06	5. 2137E+07		4. 5577E+07	
	2	3. 1085E+03	6. 1552E+02	7. 6496E+03		3. 1460E+03	
	3	5. 2096E+07	2. 6032E+06	5. 1208E+0	10. 2051	-5. 4930E-01	5. 2120E+07
	4	7. 8366E+03	7. 8181E+02	7. 7297E+03			7. 8395E+03
	5	8. 9262E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			8. 9630E+01
8	1	4. 5577E+07	2. 2774E+06	5. 2146E+07		4. 5610E+07	
	2	3. 1460E+03	6. 2294E+02	7. 7041E+03		3. 1665E+03	
	3	5. 2120E+07	2. 6044E+06	5. 1208E+0	10. 2048	-3. 8353E-01	5. 2139E+07
	4	7. 8395E+03	7. 8210E+02	7. 7297E+03			7. 8418E+03
	5	8. 9630E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			8. 9826E+01
9	1	4. 5610E+07	2. 2791E+06	5. 2151E+07		4. 5628E+07	
	2	3. 1665E+03	6. 2701E+02	7. 7338E+03		3. 1772E+03	
	3	5. 2139E+07	2. 6053E+06	5. 1207E+0	10. 2048	-1. 0916E-01	5. 2149E+07
	4	7. 8418E+03	7. 8233E+02	7. 7296E+03			7. 8430E+03
	5	8. 9826E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			8. 9928E+01
10	1	4. 5628E+07	2. 2800E+06	5. 2153E+07		4. 5637E+07	
	2	3. 1772E+03	6. 2913E+02	7. 7493E+03		3. 1829E+03	
	3	5. 2149E+07	2. 6058E+06	5. 1207E+0	10. 2047	-2. 8844E-02	5. 2154E+07
	4	7. 8430E+03	7. 8245E+02	7. 7296E+03			7. 8436E+03
	5	8. 9928E+01	6. 0000E+00	4. 7000E+01			8. 9981E+01

PF = 0. 0000000000000000E+000

Análise com consideração de correlação entre as variáveis

Para a função de falha G2

Programa de Análise de Confiabilidade

A análise é feita pelo Método FORM.
É utilizada a Transformação de NATAF.

Arquivo de Entrada: formccorr.txt

Dados de Entrada:

Número de Variáveis: 5

Distribuições: log log log log nor

Médias: 5. 271E+07 1. 366E+04 5. 128E+07 7. 769E+03 4. 700E+01

Desvios Padrão: 2. 635E+06 2. 732E+03 2. 564E+06 7. 770E+02 6. 000E+00

Matriz de correlação: 1. 000E+00 4. 000E-01 0. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00
4. 000E-01 1. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00
0. 000E+00 0. 000E+00 1. 000E+00 4. 000E-01 0. 000E+00
0. 000E+00 0. 000E+00 4. 000E-01 1. 000E+00 0. 000E+00
0. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00 0. 000E+00 1. 000E+00

Resumo da Análise:

Iteração	Variável	Ponto de Projeto	Desvio Padrão	Média	Beta	G(U)	Novo Ponto de Projeto
1	1	5.2709E+07	2.6338E+06	5.2643E+07	8.4277	6.6581E+03	5.2655E+07
	2	1.3662E+04	2.7053E+03	1.3394E+04			1.3399E+04
	3	5.1280E+07	2.5624E+06	5.1216E+07			4.2732E+07
	4	7.7690E+03	7.7507E+02	7.7303E+03			1.2916E+03
	5	4.7000E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			5.5516E+01
2	1	5.2655E+07	2.6311E+06	5.2643E+07	12.4523	-5.8188E+00	5.2740E+07
	2	1.3399E+04	2.6532E+03	1.3397E+04			1.3436E+04
	3	4.2732E+07	2.1353E+06	5.0471E+07			4.4136E+07
	4	1.2916E+03	1.2886E+02	3.6027E+03			2.5901E+03
	5	5.5516E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			1.0495E+02
3	1	5.2740E+07	2.6354E+06	5.2643E+07	9.2161	-2.8004E+03	5.3044E+07
	2	1.3436E+04	2.6606E+03	1.3397E+04			1.3560E+04
	3	4.4136E+07	2.2054E+06	5.0702E+07			5.1067E+07
	4	2.5901E+03	2.5840E+02	5.4223E+03			5.0337E+03
	5	1.0495E+02	6.0000E+00	4.7000E+01			1.0132E+02
4	1	5.3044E+07	2.6505E+06	5.2641E+07	10.1872	1.2117E+02	5.3034E+07
	2	1.3560E+04	2.6851E+03	1.3396E+04			1.3556E+04
	3	5.1067E+07	2.5518E+06	5.1215E+07			4.9169E+07
	4	5.0337E+03	5.0218E+02	7.1932E+03			5.3749E+03
	5	1.0132E+02	6.0000E+00	4.7000E+01			1.0397E+02
5	1	5.3034E+07	2.6500E+06	5.2642E+07	10.1379	-7.7923E+01	5.3072E+07
	2	1.3556E+04	2.6843E+03	1.3396E+04			1.3572E+04
	3	4.9169E+07	2.4569E+06	5.1174E+07			4.9569E+07
	4	5.3749E+03	5.3622E+02	7.3283E+03			5.4631E+03
	5	1.0397E+02	6.0000E+00	4.7000E+01			1.0392E+02
6	1	5.3072E+07	2.6520E+06	5.2641E+07	10.1384	1.0298E-01	5.3072E+07
	2	1.3572E+04	2.6874E+03	1.3396E+04			1.3572E+04
	3	4.9569E+07	2.4769E+06	5.1189E+07			4.9520E+07
	4	5.4631E+03	5.4502E+02	7.3596E+03			5.4426E+03
	5	1.0392E+02	6.0000E+00	4.7000E+01			1.0384E+02

PF = 0.0000000000000000E+000

Análise com consideração de correlação entre as variáveis

Para a função de falha G3

Programa de Análise de Confiabilidade

A análise é feita pelo Método FORM.
É utilizada a Transformação de NATAF.

Arquivo de Entrada: formccorr.txt

Dados de Entrada:

Número de Variáveis: 5

Distribuições: log log log log nor

Médias: 5.271E+07 1.366E+04 5.128E+07 7.769E+03 4.700E+01

Desvios Padrão: 2.635E+06 2.732E+03 2.564E+06 7.770E+02 6.000E+00

Matriz de correlação: 1.000E+00 4.000E-01 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
4.000E-01 1.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 1.000E+00 4.000E-01 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 4.000E-01 1.000E+00 0.000E+00
0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 0.000E+00 1.000E+00

Resumo da Análise:

Iteração	Variável	Ponto de Projeto	Desvio Padrão	Média	Beta	G(U)	Novo Ponto de Projeto
1	1	5.2709E+07	2.6338E+06	5.2643E+07	8.4277	6.6581E+03	5.2655E+07
	2	1.3662E+04	2.7053E+03	1.3394E+04			1.3399E+04
	3	5.1280E+07	2.5624E+06	5.1216E+07			4.2732E+07
	4	7.7690E+03	7.7507E+02	7.7303E+03			1.2916E+03
	5	4.7000E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			5.5516E+01
2	1	5.2655E+07	2.6311E+06	5.2643E+07	12.4523	-5.8188E+00	5.2740E+07
	2	1.3399E+04	2.6532E+03	1.3397E+04			1.3436E+04
	3	4.2732E+07	2.1353E+06	5.0471E+07			4.4136E+07
	4	1.2916E+03	1.2886E+02	3.6027E+03			2.5901E+03
	5	5.5516E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			1.0495E+02
3	1	5.2740E+07	2.6354E+06	5.2643E+07	6.2012	-1.2084E+03	5.2927E+07
	2	1.3436E+04	2.6606E+03	1.3397E+04			1.3512E+04
	3	4.4136E+07	2.2054E+06	5.0702E+07			5.2079E+07
	4	2.5901E+03	2.5840E+02	5.4223E+03			5.4870E+03
	5	1.0495E+02	6.0000E+00	4.7000E+01			8.4012E+01
4	1	5.2927E+07	2.6447E+06	5.2642E+07	4.1846	-3.2844E+02	5.2734E+07
	2	1.3512E+04	2.6756E+03	1.3396E+04			1.3434E+04
	3	5.2079E+07	2.6023E+06	5.1208E+07			5.1650E+07
	4	5.4870E+03	5.4740E+02	7.3678E+03			7.4051E+03
	5	8.4012E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			7.2086E+01
5	1	5.2734E+07	2.6350E+06	5.2643E+07	3.2779	-8.5909E+01	5.2693E+07
	2	1.3434E+04	2.6600E+03	1.3397E+04			1.3417E+04
	3	5.1650E+07	2.5809E+06	5.1214E+07			5.1454E+07
	4	7.4051E+03	7.3876E+02	7.7235E+03			7.7510E+03
	5	7.2086E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			6.6659E+01
6	1	5.2693E+07	2.6330E+06	5.2643E+07	3.1405	-1.0370E+01	5.2684E+07
	2	1.3417E+04	2.6567E+03	1.3397E+04			1.3414E+04
	3	5.1454E+07	2.5711E+06	5.1215E+07			5.1416E+07
	4	7.7510E+03	7.7327E+02	7.7304E+03			7.7546E+03
	5	6.6659E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			6.5837E+01
7	1	5.2684E+07	2.6326E+06	5.2643E+07	3.1380	-1.8164E-01	5.2684E+07
	2	1.3414E+04	2.6561E+03	1.3397E+04			1.3413E+04
	3	5.1416E+07	2.5692E+06	5.1215E+07			5.1412E+07
	4	7.7546E+03	7.7363E+02	7.7304E+03			7.7542E+03
	5	6.5837E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			6.5822E+01
8	1	5.2684E+07	2.6325E+06	5.2643E+07	3.1380	-8.2485E-05	5.2683E+07
	2	1.3413E+04	2.6560E+03	1.3397E+04			1.3413E+04
	3	5.1412E+07	2.5690E+06	5.1215E+07			5.1412E+07
	4	7.7542E+03	7.7359E+02	7.7304E+03			7.7541E+03
	5	6.5822E+01	6.0000E+00	4.7000E+01			6.5822E+01

PF = 8.505591784419009E-004

Saída do programa de análise pelo método FORM

Análise sem consideração de correlação entre as variáveis

Programa de Análise de Confiabilidade de cabos pelo método de Monte Carlo

arquivo de entrada: mcccrr.txt

G(1) = 51698203.8963978	G(2) = 5652.37463164586	G(3) = -0.695249316046921
G(1) = 53398191.0433874	G(2) = 5118.05845318991	G(3) = -5.71818785645849
G(1) = 49098186.3361130	G(2) = 6022.73501450242	G(3) = -7.48013692313846
G(1) = 48998178.3144322	G(2) = 5203.81220364780	G(3) = -10.4893211260050
G(1) = 44398131.5299336	G(2) = 5051.28022216703	G(3) = -28.3340912126160
G(1) = 59098110.1244373	G(2) = 5327.46511704242	G(3) = -37.0872795645899
G(1) = 50698155.8812872	G(2) = 7558.73070263676	G(3) = -19.2094079369360
G(1) = 50798157.9481527	G(2) = 6391.05518839625	G(3) = -18.4023364186550

Análise de Confiabilidade de Cabos de Ancoragem de Plataformas Flutuantes

G(1) = 55298200.6872941	G(2) = 6288.83291314845	G(3) = -2.03778778401560
G(1) = 56498204.0850761	G(2) = 6772.62558138231	G(3) = -0.763754160578650
G(1) = 46998172.4753115	G(2) = 6527.26617642399	G(3) = -12.7016788212857
G(1) = 49397909.4439197	G(2) = 5730.87583189714	G(3) = -113.372321815154
G(1) = 57798126.4268903	G(2) = 7785.75657560211	G(3) = -30.7358854651984
G(1) = 50498197.3774359	G(2) = 5775.08854000876	G(3) = -3.18155177765719
G(1) = 51598162.1624531	G(2) = 6935.77165995445	G(3) = -16.9561311667219
G(1) = 47698091.7810931	G(2) = 6236.70731889363	G(3) = -43.7618177238912
G(1) = 50498156.1746452	G(2) = 6199.05234755157	G(3) = -19.1199717458066
G(1) = 50698176.2962236	G(2) = 5871.56021880219	G(3) = -11.4341655020764
G(1) = 49398139.2481206	G(2) = 6410.03365253238	G(3) = -25.5786374672635
G(1) = 51098180.9971620	G(2) = 7256.83236950729	G(3) = -9.51792069612474
G(1) = 54698195.4383473	G(2) = 4502.96535437927	G(3) = -4.07290637847914

Número de análises
30000

Número de pontos de falha
21

Análise com consideração de correlação entre as variáveis

Programa de análise de de confiabilidade de cabos pelo método de Monte Carlo

arquivo de entrada: mcccrr.txt

G(1) = 47798160.8603081	G(2) = 5564.28839885048	G(3) = -17.1950093644078
G(1) = 49198167.2957345	G(2) = 6131.51496796962	G(3) = -14.7962508147769
G(1) = 50598200.9914166	G(2) = 6419.11264688382	G(3) = -1.79689383003175
G(1) = 50698132.1075213	G(2) = 5752.03395047924	G(3) = -28.3975590889375
G(1) = 54598205.0179092	G(2) = 7583.65584661276	G(3) = -0.332269807147194
G(1) = 53498187.7107563	G(2) = 6594.33869590960	G(3) = -6.98875002135923
G(1) = 47798135.9874312	G(2) = 5286.30443057814	G(3) = -27.2141365306047
G(1) = 48798190.3815308	G(2) = 5147.27346666506	G(3) = -5.85448494936226
G(1) = 48998191.6665867	G(2) = 6978.70362613862	G(3) = -5.36872855444176
G(1) = 51498192.3196596	G(2) = 6569.44852425740	G(3) = -5.18623749877299
G(1) = 47398078.9006721	G(2) = 5092.25726738642	G(3) = -48.7447373991008
G(1) = 49898124.5612312	G(2) = 6023.52167991130	G(3) = -31.4462333887837
G(1) = 52598124.6385376	G(2) = 6473.67433998431	G(3) = -31.3350937433223
G(1) = 51198153.0488619	G(2) = 5725.55234471848	G(3) = -20.3275021200148
G(1) = 55198196.1911742	G(2) = 5993.81386847212	G(3) = -3.77302475203093
G(1) = 48698182.0550703	G(2) = 6347.98361240304	G(3) = -9.04188410954133
G(1) = 58198118.5663717	G(2) = 8126.92138729617	G(3) = -33.7823247830761
G(1) = 48898079.8313865	G(2) = 5593.31564742583	G(3) = -48.4085623216507
G(1) = 50498190.4967871	G(2) = 7397.41457953770	G(3) = -5.82811998774203
G(1) = 50498166.4544673	G(2) = 6590.60652294732	G(3) = -15.1396678407234
G(1) = 53798145.6729595	G(2) = 7077.31838839920	G(3) = -23.2359141837640
G(1) = 50998184.1109187	G(2) = 6150.29704591655	G(3) = -8.33626393205962
G(1) = 50298189.7179680	G(2) = 4336.52902804292	G(3) = -6.18076913882605
G(1) = 53298185.3866146	G(2) = 5041.74977026321	G(3) = -7.94153713928283

G(1) = 49798125.1928427	G(2) = 4624.25699047069	G(3) = -31.0331196732525
G(1) = 56398026.3097555	G(2) = 7903.22866190574	G(3) = -69.0367116761895
G(1) = 51598068.0936299	G(2) = 6190.17654033145	G(3) = -53.0783498361879
G(1) = 50998193.0555602	G(2) = 5710.26958325575	G(3) = -4.86978165360657
G(1) = 52398184.1659023	G(2) = 8280.36777567072	G(3) = -8.31304000924045

Número de análises	Número de pontos de falha
30000	29

Utilização do programa Mathcad para gerar valores para as variáveis aleatórias.

Apesar de terem sido gerados 30000 valores aleatórios para cada variável, apenas os 16 primeiros valores gerados estão apresentados a seguir.

ORIGIN:= 1
 m:= 30000 m = numero de variaveis a serem geradas

Variáveis aleatórias para o módulo de elasticidade da amarra

Média e desvio padrão

$$\mu_{Ea} := 52708747$$

$$\sigma_{Ea} := 2635437$$

Parâmetros da distribuição Lognormal

$$\xi_{Ea} := \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma_{Ea}^2}{\mu_{Ea}^2}\right)}$$

$$\lambda_{Ea} := \ln(\mu_{Ea}) - \frac{\xi_{Ea}^2}{2}$$

$$\xi_{Ea} = 0.05$$

$$\lambda_{Ea} = 17.779$$

$$Ea := \text{rlnorm}(m, \lambda Ea, \xi Ea)$$

rlnorm = comando do mathcad que gera variáveis com distribuição Lognormal

	1
1	4.912·10 ⁷
2	4.971·10 ⁷
3	5.109·10 ⁷
4	5.193·10 ⁷
5	5.101·10 ⁷
6	5.375·10 ⁷
7	5.692·10 ⁷
8	5.409·10 ⁷
9	5.143·10 ⁷
10	5.203·10 ⁷
11	5.802·10 ⁷
12	5.576·10 ⁷
13	5.064·10 ⁷
14	5.079·10 ⁷
15	4.884·10 ⁷
16	5.584·10 ⁷

Variáveis aleatórias para a carga de ruptura da amarra

Média e desvio padrão

$$\mu Ra := 13662$$

$$\sigma Ra := 2732$$

Parâmetros da distribuição Lognormal

$$\xi Ra := \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma Ra^2}{\mu Ra^2}\right)}$$

$$\lambda Ra := \ln(\mu Ra) - \frac{\xi Ra^2}{2}$$

$$\xi Ra = 0.198$$

$$\lambda Ra = 9.503$$

$$Ra := \text{rlnorm}(m, \lambda Ra, \xi Ra)$$

	1
1	1.46·10 ⁴
2	2.309·10 ⁴
3	1.303·10 ⁴
4	1.688·10 ⁴
5	1.391·10 ⁴
6	1.102·10 ⁴
7	2.184·10 ⁴
8	1.309·10 ⁴
9	1.71·10 ⁴
10	2.016·10 ⁴
11	1.349·10 ⁴
12	1.31·10 ⁴
13	1.456·10 ⁴
14	1.171·10 ⁴
15	1.576·10 ⁴
16	1.363·10 ⁴

Variáveis aleatórias para o módulo de elasticidade do cabo de aço

Média e desvio padrão

$$\mu_{Ec} := 51279546$$

$$\sigma_{Ec} := 2563977$$

Parâmetros da distribuição Lognormal

$$\xi_{Ec} := \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma_{Ec}^2}{\mu_{Ec}^2}\right)}$$

$$\lambda_{Ec} := \ln(\mu_{Ec}) - \frac{\xi_{Ec}^2}{2}$$

$$\xi_{Ec} = 0.05$$

$$\lambda_{Ec} = 17.752$$

$$Ec := \text{rlnorm}(m, \lambda_{Ec}, \xi_{Ec})$$

Ec =

	1
1	4.859·10 ⁷
2	5.036·10 ⁷
3	5.462·10 ⁷
4	4.773·10 ⁷
5	5.089·10 ⁷
6	5.244·10 ⁷
7	5.277·10 ⁷
8	5.537·10 ⁷
9	5.333·10 ⁷
10	5.053·10 ⁷
11	5.091·10 ⁷
12	5.082·10 ⁷
13	4.986·10 ⁷
14	5.161·10 ⁷
15	5.15·10 ⁷
16	4.778·10 ⁷

Variáveis aleatórias para a carga de ruptura do cabo de aço

Média e desvio padrão

$$\mu_{Rc} := 7769$$

$$\sigma_{Rc} := 777$$

Parâmetros da distribuição Lognormal

$$\xi_{Rc} := \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma_{Rc}^2}{\mu_{Rc}^2}\right)}$$

$$\lambda_{Rc} := \ln(\mu_{Rc}) - \frac{\xi_{Rc}^2}{2}$$

$$\xi_{Rc} = 0.1$$

$$\lambda_{Rc} = 8.953$$

$$Rc := \text{rlnorm}(m, \lambda Rc, \xi Rc)$$

Rc =

	1
1	6.855·10 ³
2	6.985·10 ³
3	7.649·10 ³
4	7.751·10 ³
5	6.688·10 ³
6	6.84·10 ³
7	7.424·10 ³
8	6.856·10 ³
9	8.062·10 ³
10	6.397·10 ³
11	6.923·10 ³
12	8.018·10 ³
13	6.401·10 ³
14	7.784·10 ³
15	6.837·10 ³
16	6.952·10 ³

Variáveis aleatórias para o Offset

Média e desvio padrão

$$\mu_{\text{Off}} := 47$$

$$\sigma_{\text{Off}} := 6$$

$$\text{Off} := \text{rnorm}(m, \mu_{\text{Off}}, \sigma_{\text{Off}})$$

rnorm = comando do mathcad que gera variáveis com distribuição Normal

Off =

	1
1	47.945
2	49.019
3	41.45
4	46.589
5	47.564
6	37.298
7	52.769
8	42.037
9	52.191
10	46.113
11	42.745
12	53.135
13	42.41
14	52.53
15	47.632
16	50.726

Utilização do programa Mathcad para gerar valores para as variáveis aleatórias correlacionadas com coeficiente de correlação de 0,4.

Variáveis aleatórias para o módulo de elasticidade e a carga de ruptura da amarra

ORIGIN:= 1

$$m := 30000$$

$\rho_{ET} := 0.40$ Coeficiente de correlação entre o módulo de elasticidade e a carga de ruptura da amarra

$\delta E := 0.05$ Coeficiente de variação do módulo de elasticidade da amarra

$\delta T := 0.20$ Coeficiente de variação da carga de ruptura

$$F := \frac{\ln(1 + \rho_{ET} \cdot \delta E \cdot \delta T)}{\rho_{ET} \cdot \sqrt{\ln(1 + \delta T^2) \cdot \ln(1 + \delta E^2)}} \quad F = 1.009 \quad \text{Fator de correção do coeficiente de correlação}$$

$$\rho_{ETe} := F \cdot \rho_{ET} \quad \rho_{ETe} = 0.4034$$

$$\rho := \begin{pmatrix} 1 & \rho_{ETe} \\ \rho_{ETe} & 1 \end{pmatrix} \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 0.403 \\ 0.403 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Matriz de correlação equivalente}$$

$C := \text{cholesky}(\rho)$ Decomposição de cholesky

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.403 & 0.915 \end{pmatrix} \quad C \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0.403 \\ 0.403 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mu E := 52708747$ Média do módulo de elasticidade da amarra

$\sigma E := \delta E \cdot \mu E \quad \sigma E = 2.635 \times 10^6$ Desvio padrão do módulo de elasticidade da amarra

Parâmetros da função Lognormal

$$\xi E := \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma E^2}{\mu E^2}\right)} \quad \lambda E := \ln(\mu E) - \frac{\xi E^2}{2}$$

$$\xi E = 0.05 \quad \lambda E = 17.779$$

$\mu T := 13662$ Média da carga de ruptura da amarra

$\sigma T := \delta T \cdot \mu T \quad \sigma T = 2.732 \times 10^3$ Desvio padrão da carga de ruptura da amarra

Parâmetros da função Lognormal

$$\xi_T := \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma_T^2}{\mu_T^2}\right)} \qquad \lambda_T := \ln(\mu_T) - \frac{\xi_T^2}{2}$$

$$\xi_T = 0.198$$

$$\lambda_T = 9.503$$

$$E := \text{rlnorm}(m, \lambda_E, \xi_E)$$

Gera-se m valores sem correlação para as duas variáveis

$$T := \text{rlnorm}(m, \lambda_T, \xi_T)$$

$$\text{mean}(E) = 5.271 \times 10^7$$

$$\text{stdev}(E) = 2.635 \times 10^6$$

$$\text{mean}(T) = 1.368 \times 10^4$$

$$\text{stdev}(T) = 2.737 \times 10^3$$

$$\text{cvar}(E, T) = 7.102 \times 10^7$$

$$\rho_{ET} := \frac{\text{cvar}(E, T)}{\text{stdev}(E) \cdot \text{stdev}(T)}$$

$$\rho_{ET} = 9.847 \times 10^{-3}$$

$$i := 1..m$$

$$E(i) := E_i$$

$$T(i) := T_i$$

Encontra-se a Média e desvio padrão da normal equivalente para cada valor gerado

$$\mu_{Ene(i)} := E(i) \cdot (1 - \ln(E(i)) + \lambda_E)$$

$$\sigma_{Ene(i)} := E(i) \cdot \xi_E$$

$$\mu_{Tne(i)} := T(i) \cdot (1 - \ln(T(i)) + \lambda_T)$$

$$\sigma_{Tne(i)} := T(i) \cdot \xi_T$$

$$E_{nep(i)} := \frac{E(i) - \mu_{Ene(i)}}{\sigma_{Ene(i)}}$$

$$T_{nep(i)} := \frac{T(i) - \mu_{Tne(i)}}{\sigma_{Tne(i)}}$$

$$\underline{E}_{nep,i} := E_{nep}(i)$$

$$\underline{T}_{nep,i} := T_{nep}(i)$$

$$\text{cvar}(E_{nep}, T_{nep}) = 7.658 \times 10^{-3}$$

$$\text{mean}(E_{nep}) = 2.055 \times 10^{-3}$$

$$\text{mean}(T_{nep}) = 7.657 \times 10^{-3}$$

$$\text{stdev}(E_{nep}) = 1.001$$

$$\text{stdev}(T_{nep}) = 1.001$$

$$\rho_{E_{nep}T_{nep}} := \frac{\text{cvar}(E_{nep}, T_{nep})}{\text{stdev}(E_{nep}) \cdot \text{stdev}(T_{nep})}$$

$$\rho_{E_{nep}T_{nep}} = 7.644 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} E_{nepc,i} \\ T_{nepc,i} \end{pmatrix} := C \cdot \begin{pmatrix} E_{nep,i} \\ T_{nep,i} \end{pmatrix}$$

Cada valor das variáveis normais equivalente padrão é multiplicado pela matriz C para que passe a ter correlação.

$$\text{cvar}(E_{nepc}, T_{nepc}) = 0.411$$

$$\text{mean}(E_{nepc}) = 2.055 \times 10^{-3}$$

$$\text{mean}(T_{nepc}) = 7.835 \times 10^{-3}$$

$$\text{stdev}(E_{nepc}) = 1.001$$

$$\text{stdev}(T_{nepc}) = 1.004$$

$$\rho_{E_{nepc}T_{nepc}} := \frac{\text{cvar}(E_{nepc}, T_{nepc})}{\text{stdev}(E_{nepc}) \cdot \text{stdev}(T_{nepc})}$$

$$\rho_{E_{nepc}T_{nepc}} = 0.409$$

Para cada variável normal equivalente padrão correlacionada, encontra-se um novo valor de variável que agora vai passar a ter correlação.

$$Ec_i := \mu Ene(i) + Enepc_i \cdot \sigma Ene(i)$$

$$Tc_i := \mu Tne(i) + Tnepc_i \cdot \sigma Tne(i)$$

$$cvar(Ec, Tc) = 2.943 \times 10^9$$

$$\text{mean}(Ec) = 5.271 \times 10^7 \quad \text{mean}(Tc) = 1.364 \times 10^4$$

$$\text{stdev}(Ec) = 2.635 \times 10^6 \quad \text{stdev}(Tc) = 2.744 \times 10^3$$

$$\rho_{EcTc} := \frac{cvar(Ec, Tc)}{\text{stdev}(Ec) \cdot \text{stdev}(Tc)}$$

$$\rho_{EcTc} = 0.407 \quad \text{correlação entre os valores gerados}$$

Ec =

	1
1	5.15·10 ⁷
2	5.089·10 ⁷
3	5.141·10 ⁷
4	5.02·10 ⁷
5	4.839·10 ⁷
6	5.276·10 ⁷
7	5.233·10 ⁷
8	5.413·10 ⁷
9	5.874·10 ⁷
10	5.481·10 ⁷
11	5.53·10 ⁷
12	5.496·10 ⁷
13	5.511·10 ⁷
14	5.444·10 ⁷
15	4.997·10 ⁷
16	5.283·10 ⁷

Tc =

	1
1	1.398·10 ⁴
2	2.077·10 ⁴
3	1.257·10 ⁴
4	1.527·10 ⁴
5	1.199·10 ⁴
6	1.124·10 ⁴
7	2.072·10 ⁴
8	1.37·10 ⁴
9	1.975·10 ⁴
10	2.076·10 ⁴
11	1.455·10 ⁴
12	1.402·10 ⁴
13	1.552·10 ⁴
14	1.247·10 ⁴
15	1.423·10 ⁴
16	1.369·10 ⁴

O mesmo procedimento é feito para gerar valores para o módulo de elasticidade e a carga de ruptura do cabo de aço.

Variáveis aleatórias para o módulo de elasticidade e carga de ruptura do cabo de aço

ORIGIN:= 1

m:= 30000

$\rho_{ET} := 0.40$

$\delta E := 0.05$

$\delta T := 0.10$

$$F := \frac{\ln(1 + \rho_{ET} \cdot \delta E \cdot \delta T)}{\rho_{ET} \cdot \sqrt{\ln(1 + \delta T^2) \cdot \ln(1 + \delta E^2)}} \quad F = 1.002$$

$\rho_{ETe} := F \cdot \rho_{ET}$

$\rho_{ETe} = 0.4008$

$$\rho := \begin{pmatrix} 1 & \rho_{ETe} \\ \rho_{ETe} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0.401 \\ 0.401 & 1 \end{pmatrix}$$

C := cholesky(ρ)

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.401 & 0.916 \end{pmatrix}$$

$$C \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0.401 \\ 0.401 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mu E := 51279546$

$\sigma E := \delta E \cdot \mu E$

$\sigma E = 2.564 \times 10^6$

$$\xi E := \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma E^2}{\mu E^2}\right)}$$

$$\lambda E := \ln(\mu E) - \frac{\xi E^2}{2}$$

$\xi E = 0.05$

$\lambda E = 17.752$

$\mu_{En}(E) := E \cdot (1 - \ln(E) + \lambda E)$

$\sigma_{En}(E) := E \cdot \xi E$

$\mu_{En}(\mu E) = 5.122 \times 10^7$

$\sigma_{En}(\mu E) = 2.562 \times 10^6$

$\mu T := 7769$

$\sigma T := \delta T \cdot \mu T$

$\sigma T = 776.9$

$$\xi T := \sqrt{\ln\left(1 + \frac{\sigma T^2}{\mu T^2}\right)}$$

$$\lambda T := \ln(\mu T) - \frac{\xi T^2}{2}$$

$\xi T = 0.1$

$\lambda T = 8.953$

$\mu_{Tn}(T) := T \cdot (1 - \ln(T) + \lambda T)$

$\sigma_{Tn}(T) := T \cdot \xi T$

$\mu_{Tn}(\mu T) = 7.73 \times 10^3$

$\sigma_{Tn}(\mu T) = 774.968$

$$E := \text{rlnorm}(m, \lambda E, \xi E)$$

$$T := \text{rlnorm}(m, \lambda T, \xi T)$$

$$\text{mean}(E) = 5.127 \times 10^7$$

$$\text{stdev}(E) = 2.56 \times 10^6$$

$$\text{mean}(T) = 7.763 \times 10^3$$

$$\text{stdev}(T) = 775.82$$

$$\text{cvar}(E, T) = 1.587 \times 10^6$$

$$\rho_{ET} := \frac{\text{cvar}(E, T)}{\text{stdev}(E) \cdot \text{stdev}(T)}$$

$$\rho_{ET} = 7.989 \times 10^{-4}$$

$$i := 1..m$$

$$E(i) := E_i$$

$$T(i) := T_i$$

$$\mu_{Ene}(i) := E(i) \cdot (1 - \ln(E(i)) + \lambda E)$$

$$\sigma_{Ene}(i) := E(i) \cdot \xi E$$

$$\mu_{Tne}(i) := T(i) \cdot (1 - \ln(T(i)) + \lambda T)$$

$$\sigma_{Tne}(i) := T(i) \cdot \xi T$$

$$E_{nep}(i) := \frac{E(i) - \mu_{Ene}(i)}{\sigma_{Ene}(i)}$$

$$T_{nep}(i) := \frac{T(i) - \mu_{Tne}(i)}{\sigma_{Tne}(i)}$$

$$Enep_1 := Enep(i)$$

$$Tnep_1 := Tnep(i)$$

$$cvar(Enep, Tnep) = 1.299 \times 10^{-3}$$

$$mean(Enep) = -1.869 \times 10^{-3}$$

$$mean(Tnep) = -8.345 \times 10^{-3}$$

$$stdev(Enep) = 0.999$$

$$stdev(Tnep) = 1$$

$$\rho_{EnepTnep} := \frac{cvar(Enep, Tnep)}{stdev(Enep) \cdot stdev(Tnep)}$$

$$\rho_{EnepTnep} = 1.301 \times 10^{-3}$$

$$\begin{pmatrix} Enepc_i \\ Tnepc_i \end{pmatrix} := C \cdot \begin{pmatrix} Enep_i \\ Tnep_i \end{pmatrix}$$

$$cvar(Enepc, Tnepc) = 0.401$$

$$mean(Enepc) = -1.869 \times 10^{-3}$$

$$mean(Tnepc) = -8.394 \times 10^{-3}$$

$$stdev(Enepc) = 0.999$$

$$stdev(Tnepc) = 1$$

$$\rho_{EnepcTnepc} := \frac{cvar(Enepc, Tnepc)}{stdev(Enepc) \cdot stdev(Tnepc)}$$

$$\rho_{EnepcTnepc} = 0.401$$

$$Ec_1 := \mu_{Ene}(i) + Enepc_1 \cdot \sigma_{Ene}(i)$$

$$Tc_1 := \mu_{Tne}(i) + Tnepc_1 \cdot \sigma_{Tne}(i)$$

$$cvar(Ec, Tc) = 7.946 \times 10^8$$

$$mean(Ec) = 5.127 \times 10^7$$

$$mean(Tc) = 7.756 \times 10^3$$

$$stdev(Ec) = 2.56 \times 10^6$$

$$stdev(Tc) = 775.093$$

$$\rho_{EcTc} := \frac{cvar(Ec, Tc)}{stdev(Ec) \cdot stdev(Tc)}$$

$$\rho_{EcTc} = 0.4$$