



Universidade Federal
do Rio de Janeiro
Escola Politécnica

**FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA:
SUPERFÍCIE DE RESISTÊNCIA, CURVAS DE
INTERAÇÃO, VERIFICAÇÃO E DIMENSIONAMENTO
DE SEÇÃO QUALQUER**

Vinício da Silva Lopes Avelino

Projeto de Graduação apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Engenheiro.

Orientador:

Cláudia Ribeiro Eboli

Rio de Janeiro

Setembro de 2012

FLEXÃO COMPOSTA OBLÍQUA: SUPERFÍCIE DE RESISTÊNCIA, CURVAS DE INTERAÇÃO, VERIFICAÇÃO E DIMENSIONAMENTO DE SEÇÃO QUALQUER

Vinício da Silva Lopes Avelino

PROJETO DE GRADUAÇÃO SUBMETIDO AO CORPO DOCENTE DO CURSO DE ENGENHARIA CIVIL DA ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE ENGENHEIRO CIVIL.

Examinado por:

Prof. Cláudia Ribeiro Eboli, D. Sc.

Prof. Sérgio Hampshire de Carvalho Santos, D. Sc.

Prof. Luiz Eloy Vaz, Dr-Ing.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

SETEMBRO de 2012

Avelino, Vinício da Silva Lopes

Flexão Composta Oblíqua: superfície de Resistência, Curvas de Interação, Verificação e Dimensionamento de Seção Qualquer/
Vinício da Silva Lopes Avelino – Rio de Janeiro: UFRJ/ Escola Politécnica, 2012.

ix, 65 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Cláudia Ribeiro Eboli

Projeto de Graduação – UFRJ/ Escola Politécnica/ Curso de Engenharia Civil, 2012.

Referência Bibliográficas: p. 65.

1. Introdução 2. Flexão Composta Oblíqua (FCO) 3. Seção – Entrada de Dados 4. Superfície Resistente 5. Curvas de Interação $N - M_x$ e $N - M_y$ 6. Curvas de Interação $M_x - M_y$ 7. Verificação da Resistência à FCO 8. Dimensionamento da Seção.

I. Cláudia Ribeiro Eboli. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Escola Politécnica. Curso de Engenharia Civil. III. Flexão Composta Oblíqua: Superfície de Resistência, Curvas de Interação, Verificação e Dimensionamento de Seção Qualquer.

Resumo do Projeto de Graduação apresentado à Escola Politécnica/ UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Engenheiro Civil.

Flexão Composta Oblíqua: Superfície de Resistência, Curvas de Interação, Verificação e Dimensionamento de Seção Qualquer

Vinício da Silva Lopes Avelino

Setembro/2012

Orientador: Cláudia Ribeiro Eboli

Curso: Engenharia Civil

Neste trabalho são apresentadas algumas ferramentas, desenvolvidas em MathCAD, para o problema de seções de concreto armado submetidas à flexão composta oblíqua. As seções podem ter geometria qualquer e são geradas: superfície resistente da seção para uma taxa de armadura mecânica específica; curvas de interação $N - M_x$ e $N - M_y$ para uma inclinação de linha neutra fixa e taxa de armadura mecânica específica; curvas de interação $M_x - M_y$ para um determinado valor de esforço normal e taxa de armadura mecânica específica; verificação quanto à resistência da seção, para um determinado caso de carga e; dimensionamento da seção para um determinado caso de carga.

Palavras-chave: flexão composta oblíqua, superfície resistente, curvas de interação, verificação, dimensionamento.

Abstract of Undergraduate Project presented to POLI/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Engineer.

Combined Biaxial Bending and Axial Forces: Failure Surfaces, Interaction Curves,
Check and Design for Any Section

Vinício da Silva Lopes Avelino

September/2012

Advisor: Cláudia Ribeiro Eboli

Course: Civil Engineering

This work presents a formulation for reinforced concrete sections, subjected to combined biaxial bending and axial forces, developed in MathCAD. The sections can be of any shape and are developed: the failure surface for a given reinforcement rate; interaction curves $N - M_x$ and $N - M_y$ for a given reinforcement rate; interaction curves $M_x - M_y$ for a given axial force and reinforcement rate; a check tool for a given load case and; a design tool for a given load case.

Keywords: combined biaxial bending, failure surface, interaction curves, check, design.

Agradecimentos

- À professora Cláudia Ribeiro Eboli, pela orientação, atenção e dedicação durante a realização deste trabalho.
- Ao meu pai, por me despertar o interesse em Engenharia Civil e pelo apoio durante o curso.
- À minha mãe, por tudo que representa em minha vida.

Sumário

1. Introdução	1
2. Flexão Composta Oblíqua (FCO).....	3
2.1. Definição da geometria da seção	3
2.2. Configuração deformada.....	4
2.2.1. Hipóteses básicas	4
2.2.2. Estado limite último (ELU)	4
2.2.3. Parâmetros de descrição da deformada	6
2.3. Características dos Materiais	9
2.3.1. Concreto	9
2.3.2. Aço para concreto armado	11
2.4. Esforços solicitantes e resistentes	12
2.4.1. Esforços solicitantes	12
2.4.2. Esforços resistentes	12
2.4.3. Adimensionalização de esforços e área de armadura	14
3. Seção – Entrada de Dados	16
3.1. Materiais	16
3.2. Geometria da seção	16
3.3. Exemplos	19
3.3.1. Seção 1 - retangular	20
3.3.2. Seção 2 – coroa circular.....	22
3.3.3. Seção 3 – paralelogramo.....	23

3.3.4. Seção 4 – L	25
4. Superfície Resistente	27
4.1. Introdução	27
4.2. Entrada de dados	28
4.3. Implementação em MathCAD	28
4.4. Exemplos	29
5. Curvas de Interação $N - M_x$ e $N - M_y$	31
5.1. Introdução	31
5.2. Entrada de dados	32
5.3. Implementação em MathCAD	32
5.4. Exemplos	33
6. Curvas de Interação $M_x - M_y$	37
6.1. Introdução	37
6.2. Entrada de dados	37
6.3. Implementação em MathCAD	38
6.4. Exemplos	38
7. Verificação da Resistência à FCO	42
7.1. Introdução	42
7.2. Entrada de dados	43
7.3. Exemplos	44
7.3.1. Seção 1 - retangular	44
7.3.2. Seção 2 – coroa circular.....	46

7.3.3. Seção 3 – paralelogramo.....	47
7.3.4. Seção 4 – L	48
8. Dimensionamento da Seção	50
8.1. Introdução	50
8.2. Entrada de dados.....	51
8.3. Exemplos	52
8.3.1. Seção 1 - retangular	52
8.3.2. Seção 2 – coroa circular.....	54
8.3.3. Seção 3 – Paralelogramo	55
8.3.4. Seção 4 – L	57
9. Conclusão	59
Apêndice 1: Integração Numérica	61
Apêndice 2: Propriedades Mecânicas da Seção	63
A2.1. Metodologia	63
A2.2. Implementação em MathCAD	64
Bibliografia.....	65

Índice de figuras

Figura 2.1 – Discretização da seção	3
Figura 2.2 – Caracterização do Estado Limite Último (NBR-6118, 2007).....	5
Figura 2.3 – Deformada da seção	7
Figura 2.4 – Funções ϵ_{SD} e ϵ_{iD}	7
Figura 2.5 – Configurações de deformada.....	9
Figura 2.6 – Diagrama tensão-deformação do Concreto (NBR-6118, 2007).....	10
Figura 2.7 – Diagrama tensão-deformação do Aço CA (NBR-6118, 2007).....	11
Figura 2.8 – Regiões 0, 1 e 2 da seção	13
Figura 3.1 – Definição dos materiais.....	16
Figura 3.2 – Escolha do tipo de seção a ser utilizada	17
Figura 3.3 – Seção genérica – discretização.....	18
Figura 3.4 – Seção retangular – <i>template</i>	18
Figura 3.5 – Informações adicionais.....	19
Figura 3.6 – Seção 1 – Configuração da <i>template</i>	20
Figura 3.7 – Seção 1 – Características gerais	20
Figura 3.8 – Seção 1 – Vetores x_c , y_c , x_b , y_b e P_s	21
Figura 3.9 – Seção 1 – Esquema.....	21
Figura 3.10 – Seção 2 – Configuração da <i>template</i>	22
Figura 3.11 – Seção 2 – Vetores x_c , y_c , x_b , y_b e P_s	22
Figura 3.12 – Seção 2 – Esquema	23
Figura 3.13 – Seção 3 – Coordenadas dos pontos	23
Figura 3.14 – Seção 3 – Configuração da <i>template</i>	24
Figura 3.15 – Seção 3 – Vetores x_c , y_c , x_b , y_b e P_s	24
Figura 3.16 – Seção 3 – Esquema	25

Figura 3.17 – Seção 4 – Configuração do <i>template</i> – Módulos I, II, III e V.....	25
Figura 3.18 – Seção 4 – Vetores x_c , y_c , x_b , y_b e P_s	26
Figura 3.19 – Seção 4 – Esquema	26
Figura 4.1 – Esquemática de superfície resistente	27
Figura 4.2 – Geração da superfície resistente – entrada de dados.....	28
Figura 4.3 – Seção 1 – retangular ($\omega S = 0.3$).....	29
Figura 4.4 – Seção 2 – coroa circular ($\omega S = 0.2$).....	29
Figura 4.5 – Seção 3 – paralelogramo ($\omega S = 0.5$).....	30
Figura 4.6 – Seção 4 – L ($\omega S = 0.8$).....	30
Figura 5.1 – Curva de interação N - Mx – Exemplo.....	31
Figura 5.2 – Geração de curvas N - Mx e N - My – entrada de dados.....	32
Figura 5.3 – Seção 1 – retangular – Curva $v - \mu_x$ para os valores de ω	33
Figura 5.4 – Seção 2 – coroa circular – Curva $v - \mu_x$ para os valores de ω	34
Figura 5.5 – Seção 3 – paralelogramo – Curva $v - \mu_x$ para os valores de ω	34
Figura 5.6 – Seção 4 – L – Curva $v - \mu_x$ para os valores de ω	35
Figura 5.7 – Seção 1 – retangular – Curva N - Mx ($\omega = 0.637$)	36
Figura 5.8 – Seção 1 – retangular – Curva N - Mx ($\omega = 0.637$) – Normal 1.3	36
Figura 6.1 – Geração de curvas Mx - My – entrada de dados	38
Figura 6.2 – Seção 1 – retangular – Curva Mx – My ($\omega C = 0.3$) ($N = 0$)	39
Figura 6.3 – Seção 2 – coroa circular – Curva $\mu_x - \mu_y$ ($\omega C = 0.2$) ($v = 0.045$).....	39
Figura 6.4 – Seção 3 – paralelogramo – Curva $\mu_x - \mu_y$ ($\omega C = 0.5$) ($v = -0.187$).....	40
Figura 6.5 – Seção 4 – L – Curva Mx – My ($\omega = 0.544$) ($N = -2009\text{kN}$).....	40
Figura 6.6 – Seção 4 – L – Curva Mx – My ($\omega = 0.544$) ($N = -2009\text{kN}$) – Oblíqua 1.0	41
Figura 7.1 – Vetores S_d e R_d	42

Figura 7.2 – Verificação da resistência – entrada de dados.....	44
Figura 7.3 – Seção 1 – retangular – Inicialização das variáveis.....	45
Figura 7.4 – Seção 1 – retangular – Verificação da Resistência – Resultados.....	45
Figura 7.5 – Seção 1 – retangular – Esquema com posição da L.N.....	46
Figura 7.6 – Seção 2 – coroa circular – Esquema com posição da L.N.	46
Figura 7.7 – Seção 2 – coroa circular – Verificação da Resistência – Resultados.....	47
Figura 7.8 – Seção 3 – paralelogramo – Verificação da Resistência – Resultados.....	48
Figura 7.9 – Seção 4 – L – Verificação da Resistência – Resultados.....	49
Figura 7.10 – Seção 4 – L – Esquema com posição da L.N.....	49
Figura 8.1 – Dimensionamento – entrada de dados.....	52
Figura 8.2 – Seção 1 – retangular – Inicialização das variáveis.....	53
Figura 8.3 – Seção 1 – retangular – Dimensionamento – Resultados.....	53
Figura 8.4 – Seção 1 – retangular – Esquema com posição da L.N.....	54
Figura 8.5 – Seção 2 – coroa circular – Esquema com posição da L.N.	54
Figura 8.6 – Seção 2 – coroa circular – Dimensionamento – Resultados.....	55
Figura 8.7 – Seção 3 – paralelogramo – Dimensionamento – Resultados.....	56
Figura 8.8 – Seção 3 – paralelogramo – Esquema com posição da L.N.	56
Figura 8.9 – Seção 4 – L – Esquema com posição da L.N.....	57
Figura 8.10 – Seção 4 – L – Dimensionamento – Resultados.....	58
Figura 8.11 – Seção 4 – L – Verificação – Oblíqua 1.0.....	58
Figura A1.1 – Definição da variável paramétrica t.....	62

1. Introdução

O dimensionamento e verificação de seções de concreto armado submetidas à Flexão Composta Oblíqua (FCO) é um problema frequente na prática de Engenharia Civil. Para as seções mais usuais, encontram-se ábacos na literatura que direcionam os procedimentos de dimensionamento e verificação das seções. Mas não é possível prever todas as configurações geométricas que as seções de concreto armado podem assumir.

Conforme citado por EBOLI (1989), já são bastante conhecidas formulações numéricas para o dimensionamento e verificação de seções de concreto armado à FCO, através de integrações numéricas de domínio, propostas por SANTATHADAPORN (1972), CHEN (1975) e GALGOUL (1978).

Durante a década de 80, devido à crescente facilidade de automação, foram desenvolvidos diversos programas computacionais relacionados à FCO.

Mais recentemente, foram desenvolvidas na UFPR ferramentas de verificação de seções sujeitas à FCO (Oblíqua 1.0) e à Flexão Composta Reta, FCR (Normal 1.3), seguindo às ideias de MARINO (1979) e FUSCO (1981). Estas ferramentas serão utilizadas como meio de validação de resultados obtidos neste trabalho.

Neste trabalho, foram desenvolvidas algumas ferramentas para o problema da FCO. O pacote recebeu o nome de FCOTools e é dividido em 5 módulos:

- Módulo I: Geração da superfície de resistência para uma taxa de armadura mecânica específica;
- Módulo II: Geração de curvas de interação $N - M_x$ e $N - M_y$ para uma inclinação de linha neutra fixa e taxas de armadura mecânicas específicas;
- Módulo III: Geração de curvas de interação $M_x - M_y$ para um determinado valor de esforço normal e taxa de armadura mecânica específica;

- Módulo IV: Verificação quanto à resistência da seção sujeita a esforços solicitantes $M_{x_{sd}}$, $M_{y_{sd}}$, N_{sd} , apresentando o traçado da linha neutra correspondente; e
- Módulo V: Dimensionamento de seção sujeita a esforços solicitantes $M_{x_{sd}}$, $M_{y_{sd}}$, N_{sd} , apresentando o traçado da linha neutra correspondente.

Além destas ferramentas principais, o programa também determina algumas propriedades mecânicas da seção, referentes à seção bruta de concreto. Como plataforma de programação foi utilizado o MathCAD (Parametric Technology Corporation) versão 14.0, que torna bastante simples a confecção de programas voltados para engenharia.

A estrutura do trabalho será descrita a seguir:

No capítulo 2 são apresentadas as equações da FCO, a definição da geometria da seção compatível com a técnica de integração utilizada, as configurações deformadas de ELU e suas discretizações. Neste capítulo também são definidos os comportamentos mecânicos dos materiais, as solicitações referentes à FCO, os esforços resistentes para uma dada configuração de seção e deformada e as formulações para a obtenção destes esforços.

No capítulo 3 é apresentada a entrada de dados da seção. Nos capítulos 4 a 8 são apresentados os módulos I a V, respectivamente, com os conceitos, entrada de dados e exemplos ilustrativos. As rotinas de implementação em MathCAD são apresentadas ao longo do trabalho, conforme os conceitos são introduzidos.

Por último, no capítulo 9 são apresentadas conclusões sobre a formulação proposta e resultados obtidos.

2. Flexão Composta Oblíqua (FCO)

2.1. Definição da geometria da seção

A seção de concreto é descrita por seu contorno, através de uma poligonal fechada e orientada no sentido anti-horário, cujos N_C vértices são descritos no plano $Z \equiv 0$ do sistema global de coordenadas (X, Y, Z) . Caso exista abertura no interior da seção, estas devem ser descritas orientadas no sentido horário. O eixo Z aponta para fora da seção transversal, com sentido positivo obedecendo à regra da mão direita.

Barras ou feixes de barras existentes na seção são definidos por N_B pontos de coordenadas $(X, Y, Z \equiv 0)$, aos quais são associadas percentagens $pas_i = a_{s_i}/A_s$ da armadura total A_s , onde $i = 1 \dots N_B$ e $\sum pas_i = 1$. No texto, estes pontos passam a ser referenciados como barras.

A figura 2.1 apresenta um exemplo de discretização de uma seção.

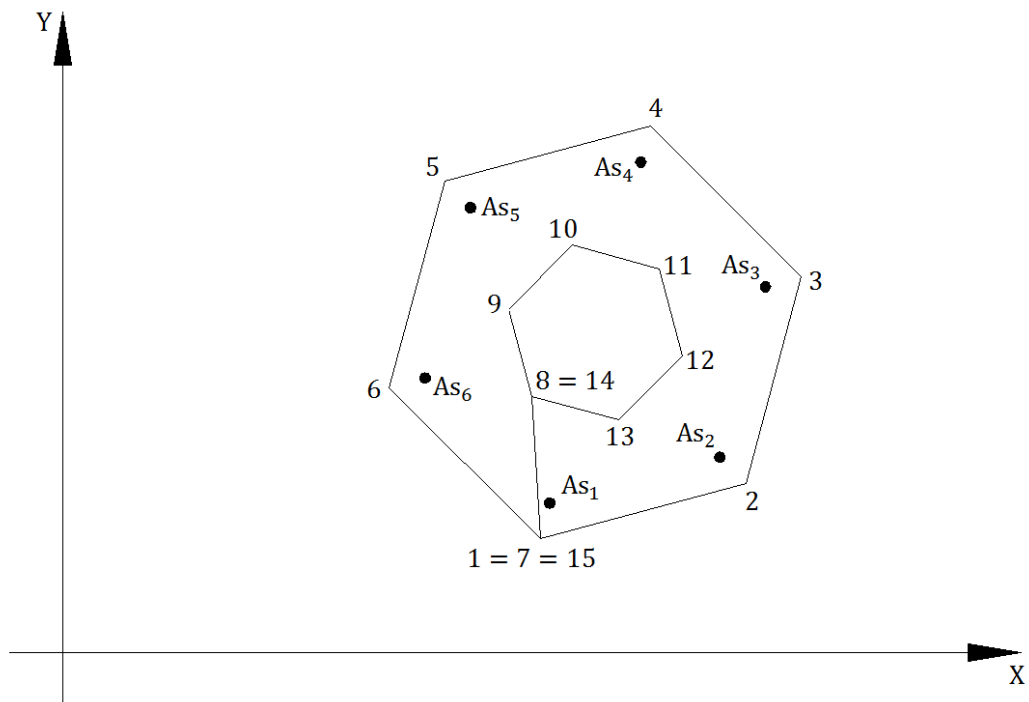


Figura 2.1 – Discretização da seção

2.2. Configuração deformada

2.2.1. Hipóteses básicas

Neste trabalho, são consideradas apenas seções transversais de elementos esbeltos, nos quais exista a possibilidade de serem negligenciadas as deformações por força cortante em presença das deformações por flexão.

Toma-se como hipótese básica a hipótese de Bernouilli, onde as seções transversais de peças fletidas permanecem planas após a deformação.

Admite-se, também, que exista perfeita aderência entre as barras de armadura e o concreto, sendo assim, quando localizados em uma mesma fibra, estes elementos apresentam a mesma deformação. Será também admitido que a configuração deformada corresponda a um estado limite último (ELU) de ruína por ruptura ou deformação plástica excessiva, prescritos pela NBR-6118 (2007) e apresentados a seguir.

2.2.2. Estado limite último (ELU)

Um estado limite último de ruína por deformação plástica excessiva ou ruptura, é caracterizado como aquele em que a configuração deformada plana corresponde a um dos casos ilustrados na figura 2.2 (NBR-6118, 2007). A configuração deformada plana deve ser tal que passe por pelo menos um dos pontos A, B ou C que caracterizam os limites de deformação prescritos para um estado limite último.

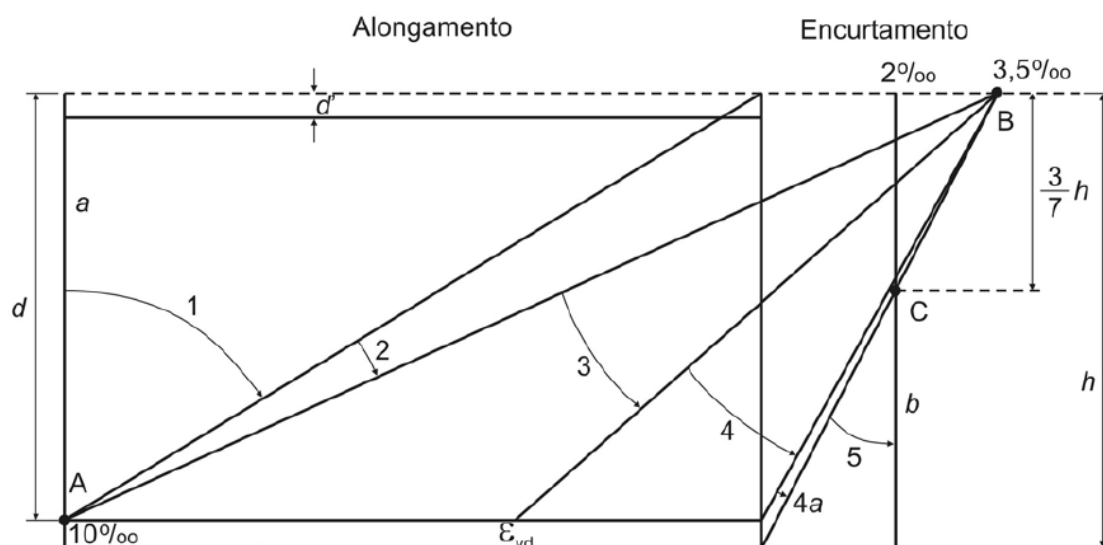


Figura 2.2 – Caracterização do Estado Limite Último (NBR-6118, 2007)

A figura 2.2 (NBR-6118, 2007), representa um corte longitudinal na peça, normal à LN, onde são representadas as configurações deformadas últimas possíveis da seção transversal, classificadas em seis domínios de ruína por:

- Deformação Plástica Excessiva: alongamento máximo permitido à armadura tracionada de 10‰.

reta a: alongamento uniforme.

domínio 1: tração com pequena excentricidade.

domínio 2: flexão simples ou composta sem ruptura à compressão.

- Ruptura: encurtamento máximo do concreto de 3,5‰ para seção parcialmente comprimida e de 2‰ a 3,5‰ para seção totalmente comprimida, mantendo-se constante e igual a 2‰ no ponto C.

domínios 3 e 4: flexão simples ou composta com ruptura à compressão do concreto, com escoamento do aço para o domínio 3.

domínios 4a e 5: compressão com pequena excentricidade.

reta b: encurtamento uniforme.

2.2.3. Parâmetros de descrição da deformada

No ELU são necessários apenas dois parâmetros para descrição do plano deformado, como: a inclinação da linha neutra (α) e um parâmetro que caracterize uma deformada nos domínios do ELU de solicitações normais. Para tanto, utiliza-se o parâmetro adimensional (D), introduzido por WERNER (1974). Sendo assim, a descrição da deformada no ELU é dada por:

- ângulo α de inclinação da LN.
- parâmetro D de deformação, caracterizando um estado limite último.

Inclinação da Linha Neutra (α):

No sistema de eixos (x,y,z) local, paralelo ao sistema (X,Y,Z) global, com origem no CG da seção bruta de concreto, conforme figura 2.3, a inclinação da LN é definida pelo ângulo de giro (α) em torno do eixo Z, necessário para que o eixo x fique paralelo à LN. A partir desta rotação, fica definido um terceiro sistema de coordenadas (ξ, η, z), local, com origem no CG, sendo o eixo ξ paralelo à LN.

No sistema local (ξ, η, z), definem-se as fibras extremas da seção, conforme figura 2.3:

- fibra superior: tem máxima ordenada $\eta = \eta_s$ com deformação $\varepsilon = \varepsilon_s$
- fibra inferior: tem mínima ordenada $\eta = \eta_i$ com deformação $\varepsilon = \varepsilon_i$

Como a resistência à tração do concreto é desprezada, para deformações de encurtamento (negativas), as fibras extremas estão associadas a pontos do contorno da seção de concreto e, no caso contrário, as fibras extremas estão associadas às barras.

Teoricamente, o ângulo α pode assumir qualquer valor, mas por motivos computacionais será considerado nos seguintes intervalos:

- Módulos I e III: $0 \leq \alpha < 2\pi$
- Módulos II, IV e V: $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$

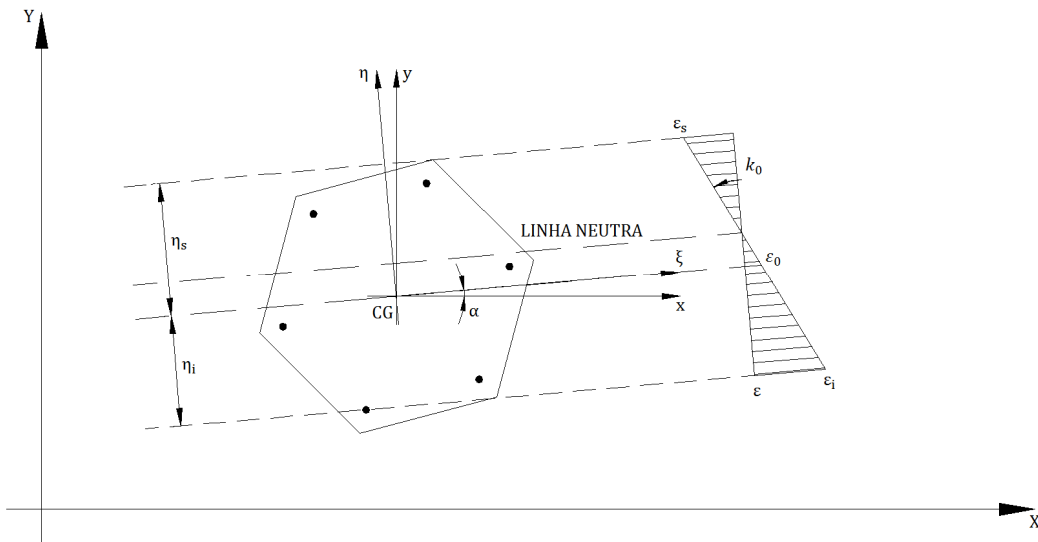


Figura 2.3 – Deformada da seção

Parâmetro de Deformação (D):

Segundo WERNER (1974), as deformações das fibras extremas em um estado limite último podem ser expressas como funções lineares de um parâmetro adimensional (D), conforme figura 2.4, para um período arbitrário $D = 13$.

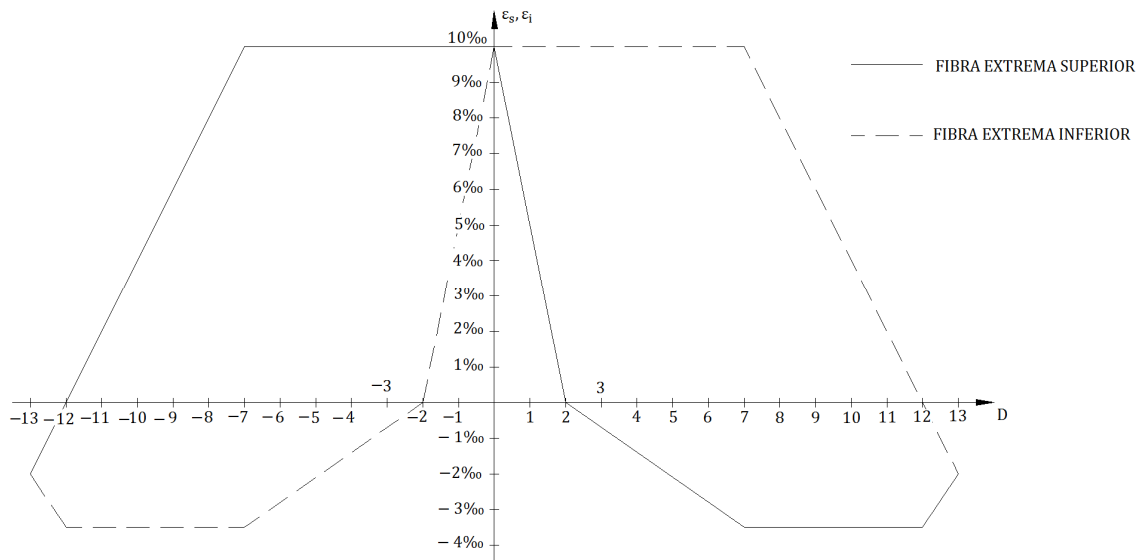


Figura 2.4 – Funções $\epsilon_s(D)$ e $\epsilon_i(D)$

Na tabela 2.1, são apresentadas as relações para determinação das deformações das fibras extremas nos domínios 1 a 5 em função do valor de D, para $0 \leq D \leq 13$. Os valores negativos do parâmetro representam a inversão da curvatura (figura 2.5).

ESTADO	DOMÍNIO	D	$\varepsilon_s(D)$ ‰	$\varepsilon_i(D)$ ‰
alongamento uniforme	–	$D = 0$	10	10
flexo – tração	1	$0 < D < 2$	$10 - 5D$	10
flexão simples / composta	2	$2 \leq D < 7$	$1.4 - 0.7D$	10
flexão simples / composta	3 e 4	$7 \leq D < 12$	-3.5	$24 - 2D$
flexo – compressão	4a e 5	$12 \leq D < 13$	$1.5D - 21.5$	$24 - 2D$
encurtamento uniforme	–	$D = 13$	-2	-2

Tabela 2.1 – Correspondência entre os domínios do ELU, D e deformações das fibras extremas

Teoricamente, o parâmetro D pode assumir qualquer valor, mas como para um período de $D = 13$ as deformações $\varepsilon_s(D)$ e $\varepsilon_i(D)$ ficam completamente definidas nos 6 domínios, o parâmetro D fica restringido aos seguintes intervalos:

- Módulos I e III: $0 \leq D \leq 13$
- Módulos II, IV e V: $-13 \leq D \leq 13$

A deformação $\varepsilon(\eta)$ de uma fibra da seção pode ser escrita como:

$$\varepsilon(\eta) = k_0 \times \eta + \varepsilon_0 \quad (2.1)$$

onde,

η , é a distância da fibra considerada ao centro de gravidade (CG) da seção, medida perpendicularmente à linha neutra (LN);

ε_0 , a deformação da fibra que passa pelo CG da seção bruta de concreto; e

k_0 , a curvatura da seção na direção perpendicular à linha neutra.

A curvatura da seção (k_0) e a deformação do CG (ε_0) podem ser expressas em termos das deformações e ordenadas das fibras extremas:

$$k_0 = \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_i)}{(\eta_s - \eta_i)}$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_s - k_0 \times \eta_s \quad (2.2)$$

Na figura 2.5, para uma seção transversal sujeita à flexão oblíqua, estão esquematizadas situações possíveis de compressão em cada quadrante do plano x, y.

Como podem ser observados, os domínios prescritos para α e D são suficientes para descrever qualquer configuração de deformada.

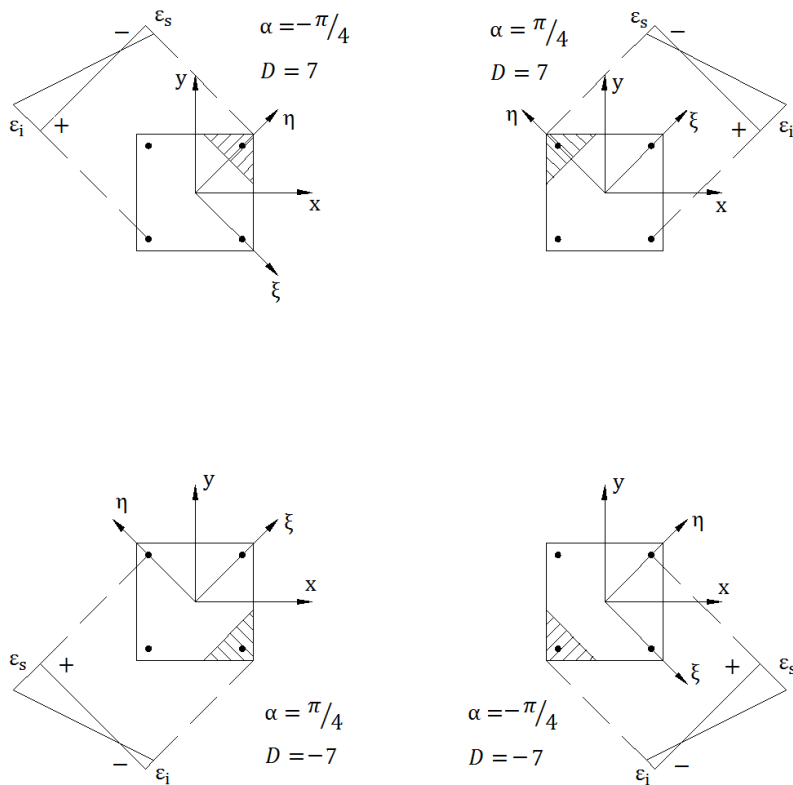


Figura 2.5 – Configurações de deformada

2.3. Características dos Materiais

2.3.1. Concreto

Para o comportamento do concreto, tem-se o diagrama tensão-deformação simplificado da figura 2.6. A resistência à tração do concreto é desprezada.

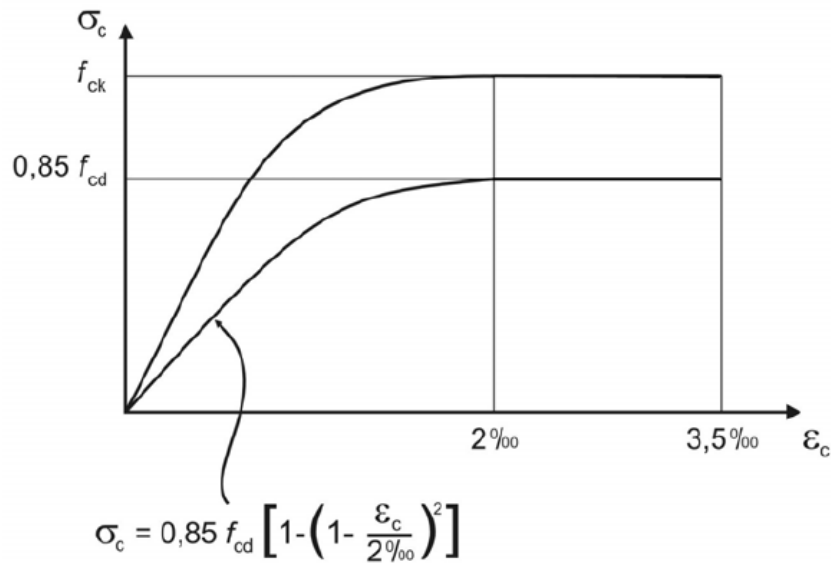


Figura 2.6 – Diagrama tensão-deformação do Concreto (NBR-6118, 2007)

As relações que definem o diagrama tensão-deformação do concreto são:

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & , & 0 \leq \varepsilon & \text{(região 0)} \\ \psi \times f_{cd} \times (250000 \times \varepsilon^2 + 1000 \times \varepsilon) & , & -2.0\text{‰} < \varepsilon < 0 & \text{(região 1)} \\ -\psi \times f_{cd} & , & -3.5\text{‰} \leq \varepsilon \leq -2.0\text{‰} & \text{(região 2)} \end{cases} \quad (2.3)$$

onde,

ψ , é o coeficiente de Rüsck, $\psi = 0.85$;

$f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c$, o valor de cálculo da resistência à compressão;

f_{ck} , o valor característico da resistência à compressão; e

γ_c , o coeficiente de minoração aplicado à resistência.

Substituindo-se as expressões (2.1) e (2.2) em (2.3), a relação tensão-deformação é expressa por:

$$\sigma_c(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & , & 0 \leq \varepsilon \\ \psi \times f_{cd} \times (D_0 + D_1 \times \eta + D_2 \times \eta^2) & , & -2.0\text{‰} < \varepsilon < 0 \\ -\psi \times f_{cd} & , & -3.5\text{‰} \leq \varepsilon \leq -2.0\text{‰} \end{cases} \quad (2.4)$$

onde,

$$D_0 = 1000 \times \varepsilon_0 + 250000 \times \varepsilon_0^2$$

$$D_1 = 1000 \times k_0 + 500000 \times k_0 \times \varepsilon_0$$

$$D_2 = 250000 \times k_0^2$$

2.3.2. Aço para concreto armado

O comportamento do aço à tração e compressão segue o diagrama representado na figura 2.7.

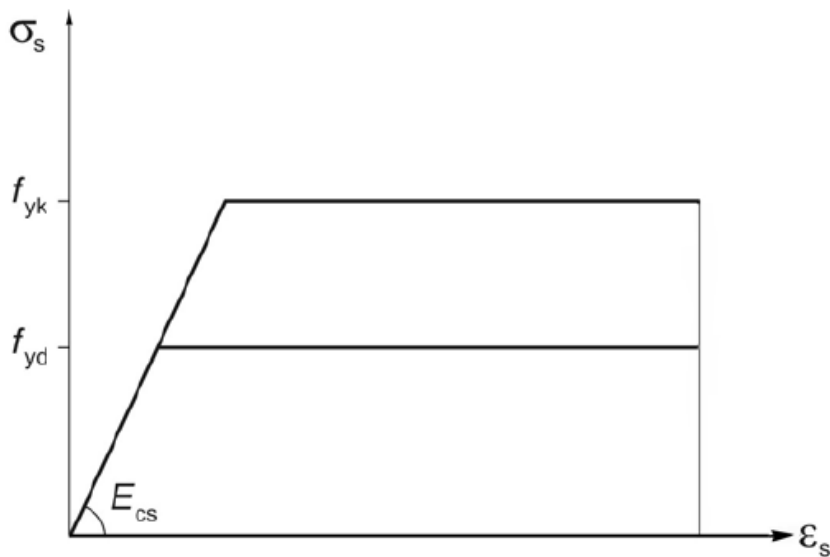


Figura 2.7 – Diagrama tensão-deformação do Aço CA (NBR-6118, 2007)

As relações que definem o diagrama tensão-deformação do aço são:

$$\sigma_s(\varepsilon) = \begin{cases} E_s \times \varepsilon & , \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_{yd} \\ \text{sign}(\varepsilon) \times f_{yd} & , \quad \varepsilon_{yd} \leq |\varepsilon| < 10.0\% \end{cases} \quad (2.5)$$

Onde,

$$\varepsilon_{yd} = f_{yd} / E_s, \quad \text{é a deformação de escoamento;}$$

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s, \quad \text{o valor de cálculo da tensão de escoamento;}$$

f_{yk} , o valor característico da tensão de escoamento;

γ_s , o coeficiente de minoração da resistência; e

$E_s = 210 \times 10^6 \text{ kPa}$, o módulo de elasticidade longitudinal.

2.4. Esforços solicitantes e resistentes

Os esforços solicitantes e resistentes descritos a seguir, estão definidos de forma vetorial, segundo os sentidos positivos dos eixos x, y e z e referidos ao CG da seção.

2.4.1. Esforços solicitantes

Os esforços solicitantes de cálculo na seção são:

M_{xSd} e M_{ySd} , momentos fletores solicitantes em torno dos eixos x e y, respectivamente, N_{Sd} , esforço normal atuante de tração (positivo) ou de compressão (negativo).

Estes esforços configuram um caso de carga e são representados pelo vetor

$$S_d = [M_{xSd} \quad M_{ySd} \quad N_{Sd}]^T.$$

2.4.2. Esforços resistentes

Os esforços resistentes de cálculo da seção são:

M_{xRd} e M_{yRd} , momentos fletores resistentes em torno dos eixos x e y, respectivamente, N_{Rd} , esforço normal resistente de tração (positivo) ou de compressão (negativo).

Estes esforços, obtidos pela integração das tensões na seção de concreto armado para uma determinada configuração de armadura e de deformação da seção no ELU, são representados pelo vetor $R_d = y[M_{xRd} \quad M_{yRd} \quad N_{Rd}]^T$. Eles são determinados no sistema local de coordenadas (ξ, η, z) e transformados para o sistema local (x, y, z) :

$$\begin{bmatrix} M_{xRd} \\ M_{yRd} \\ N_{Rd} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_{\xi Rd} \\ M_{\eta Rd} \\ N_{Rd} \end{bmatrix}$$

(2.6)

Os valores de $MR_{d\xi}$, $MR_{d\eta}$ e NR_{dz} , são obtidos pelas expressões:

$$M\xi_{Rd} = \int_{A_c} (\sigma_c(\varepsilon) \times \eta) dA + \sum_{i=1}^{NB} as_i \times \sigma_s(\varepsilon_i) \times \eta_i$$

$$M\eta_{Rd} = - \int_{A_c} (\sigma_c(\varepsilon) \times \xi) dA - \sum_{i=1}^{NB} as_i \sigma_s(\varepsilon_i) \times \xi_i$$

$$N_{Rd} = \int_{A_c} (\sigma_c(\varepsilon)) dA + \sum_{i=1}^{NB} as_i \times \sigma_s(\varepsilon_i)$$
(2.7)

Para contribuição da parcela do concreto, estas integrações são divididas em 3 regiões (figura 2.8) de acordo com as relações em (2.3) e (2.4).

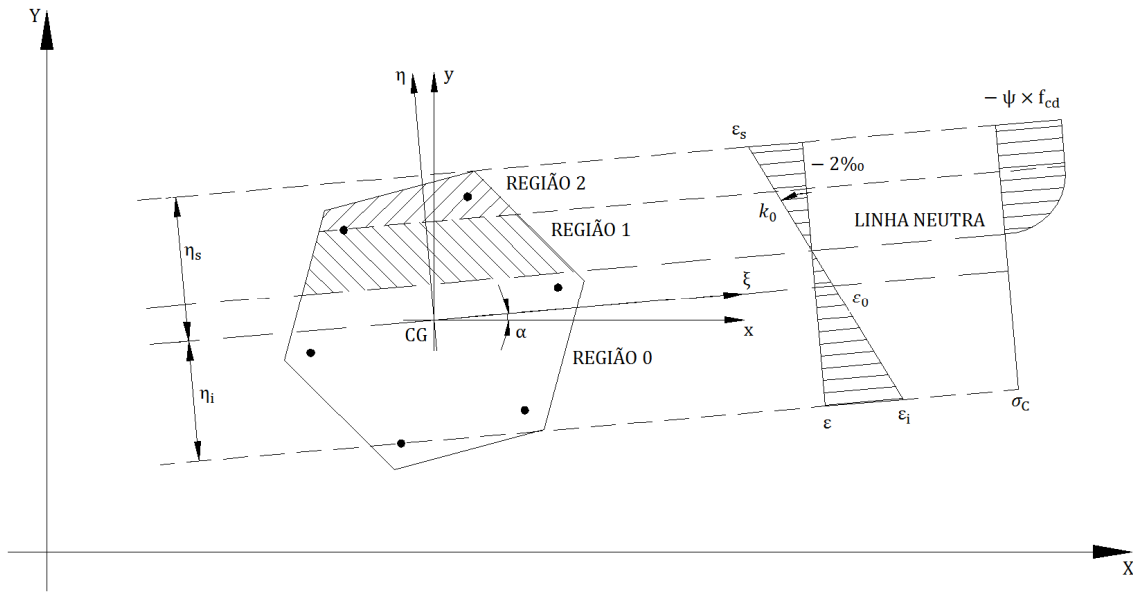


Figura 2.8 – Regiões 0, 1 e 2 da seção

Substituindo-se (2.4) em (2.7), obtém-se a contribuição do concreto por integrais de domínio de polinômios em ξ, η, z :

$$M\xi_{RdC} = \psi \times f_{cd} \times \int_{A_{c1}} ((D_0 + D_1 \times \eta + D_2 \times \eta^2) \times \eta) dA + \psi \times f_{cd} \times \int_{A_{c2}} (\eta) dA$$

$$M\eta_{RdC} = \psi \times f_{cd} \times \int_{A_{c1}} ((D_0 + D_1 \times \eta + D_2 \times \eta^2) \times \xi) dA + \psi \times f_{cd} \times \int_{A_{c2}} (\xi) dA$$

$$N_{RdC} = \psi \times f_{cd} \times \int_{A_{c1}} (D_0 + D_1 \times \eta + D_2 \times \eta^2) dA + \psi \times f_{cd} \times \int_{A_{c2}} dA \quad (2.8)$$

WERNER (1974) introduziu a ideia de transformar integrais de domínio em integrais de contorno, facilitando o tratamento de seções de forma qualquer, e esta técnica (apresentada no apêndice 1) será utilizada para a integração destes polinômios.

2.4.3. Adimensionalização de esforços e área de armadura

Como usual, curvas de interação e superfície resistente são traçadas para as grandezas adimensionais.

$$\mu_x = M_x / A_c \times h_x \times f_{cd}$$

$$\mu_y = M_y / A_c \times h_y \times f_{cd}$$

$$v = N / A_c \times f_{cd}$$

$$\omega = A_s \times f_{yd} / A_c \times f_{cd}$$

(2.9)

onde,

$h_x = y_{\max} - y_{\min}$, é a altura resistente em relação à flexão em torno do eixo x;

$h_y = x_{\max} - x_{\min}$, a altura resistente em relação à flexão em torno do eixo y;

A_c , a área da seção bruta de concreto; e

A_s , a área total de armadura da seção.

Implementação em MathCAD:

A rotina para o cálculo da contribuição do concreto nos esforços resistentes, pelo somatório das integrações dos polinômios ao longo dos segmentos da poligonal do contorno da seção, realiza o procedimento listado a seguir:

Dados α e D:

1. Zera o vetor R_p , correspondente a contribuição do concreto nos esforços da seção;
2. Para cada segmento i da poligonal de contorno da seção:
 - 2.1. Determina coordenadas (ξ, η) e deformações ϵ dos pontos extremos;
 - 2.2. Avalia a parcela R_i correspondente à parcela da integração ao longo do segmento i , de acordo com as deformações ao longo deste (regiões 0, 1 e 2);
 - 2.3. Adiciona R_i a R_p ;
3. Multiplica por f_c e transforma R_p para o sistema local (x, y, z) .

A rotina para o cálculo da contribuição da armadura nos esforços, onde se considera que a área total de armadura é unitária ($A_s = 1$) e o vetor pas ($pas = a_{s_i}/A_s$) contendo a distribuição percentual desta pelas barras, realiza o seguinte procedimento:

Dados α , D e pas :

1. Zera o vetor R_p , correspondente a contribuição da armadura unitária;
2. Para cada barra i :
 - 2.1. Determina coordenadas (ξ, η) e deformação ϵ da barra;
 - 2.2. Calcula a contribuição R_i da barra associada à taxa pas ;
 - 2.3. Adiciona R_i a R_p ;
3. Transforma R_p para o sistema local (x, y, z) .

3. Seção – Entrada de Dados

Em todos os módulos, o usuário deve utilizar como unidades kN e m, os valores devem ser inseridos sem as unidades (ver figura 3.1).

3.1. Materiais

A figura 3.1 apresenta um exemplo da entrada dos dados dos materiais, os valores definidos serão os utilizados em todas as aplicações numéricas desenvolvidas ao longo do trabalho.

Materiais:

▼ Materiais

- Concreto:
 - Resistência à compressão característica: $f_{ck} := 30 \times 10^3$ (kPa)
 - Coeficiente de ponderação da resistência: $\gamma_c := 1.4$
 - Coeficiente de Rüsck: $\eta := 0.85$
- Aço (CA):
 - Resistência característica: $f_{yk} := 500 \times 10^3$ (kPa)
 - Coeficiente de ponderação da resistência: $\gamma_s := 1.15$
 - Módulo de Elasticidade: $E_s := 210 \times 10^6$ (kPa)

▲ Materiais

Figura 3.1 – Definição dos materiais

3.2. Geometria da seção

Para definir a seção, é necessária a montagem dos seguintes vetores:

- Xc e Yc, das coordenadas X e Y dos vértices da poligonal fechada de contorno da seção;
- Xs e Ys, das coordenadas X e Y de cada barra da seção; e

- P_s , da percentagem da armadura total associada a cada barra.

A partir destes vetores, o programa gera as coordenadas referentes ao sistema local (x, y, z) , com origem no CG da seção. Neste sistema, temos:

- x_c e y_c , com as coordenadas x e y do contorno da seção de concreto; e
- x_b e y_b , com as coordenadas x e y de cada barra da seção.

Vale ressaltar que, apesar da liberdade de escolha do sistema global (X, Y, Z) para a definição da geometria, os esforços solicitantes e resistentes estarão sempre referenciados ao sistema local (x, y, z) .

A fim de facilitar a entrada de dados, o programa disponibiliza 7 padrões correspondentes aos tipos mais comuns de seção além da definição de uma seção genérica, aqui denominadas *templates* (figura 3.2).

Seção:

Escolha o tipo de seção desejada:

- 1.Retangular
- 2.Retangular Vazada
- 3.Circular
- 4.Circular Vazada
- 5. Seção L
- 6. Seção T
- 7. Seção I
- 8.Genérica

Figura 3.2 – Escolha do tipo de seção a ser utilizada

Após a opção do tipo de seção, o usuário deve expandir a aba correspondente. Em cada uma destas abas, são apresentadas figuras indicativas da utilização da *template*. A figura 3.3 mostra a aba para a seção genérica, na qual devem ser inseridos os vetores que a definem. A figura 3.4 mostra a aba para a seção retangular, definida pelas

dimensões b_1 e h_1 ($0.5\text{m} \times 0.3\text{m}$) e barras de armadura nas faces descritas na matriz n_{1f} (no exemplo, 4 barras com a mesma percentagem da área total em cada face).

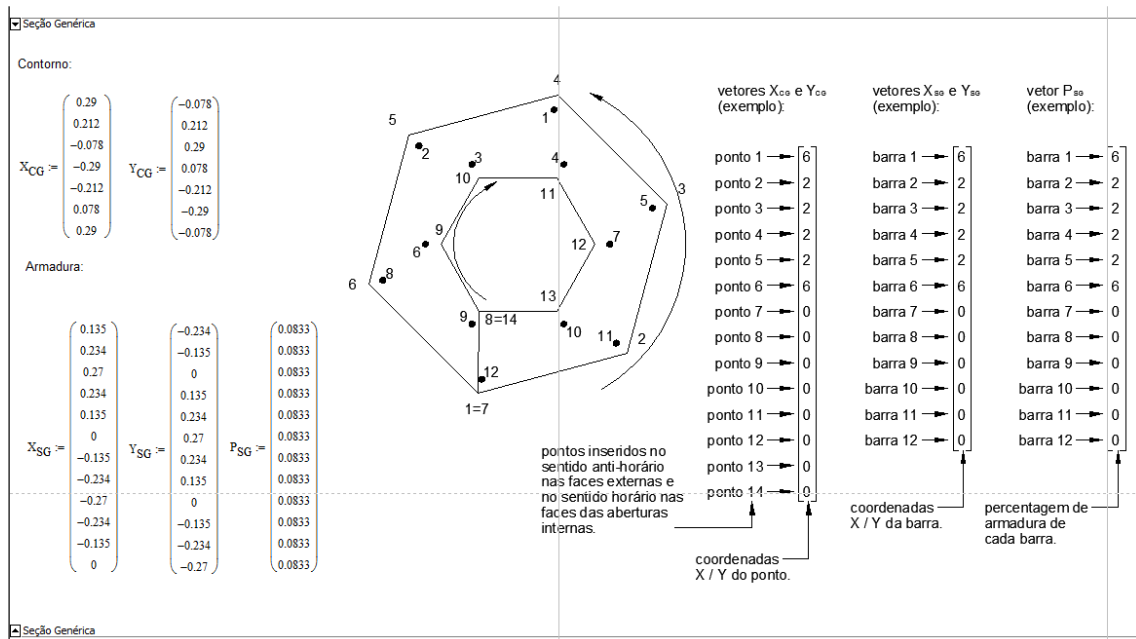


Figura 3.3 – Seção genérica – discretização

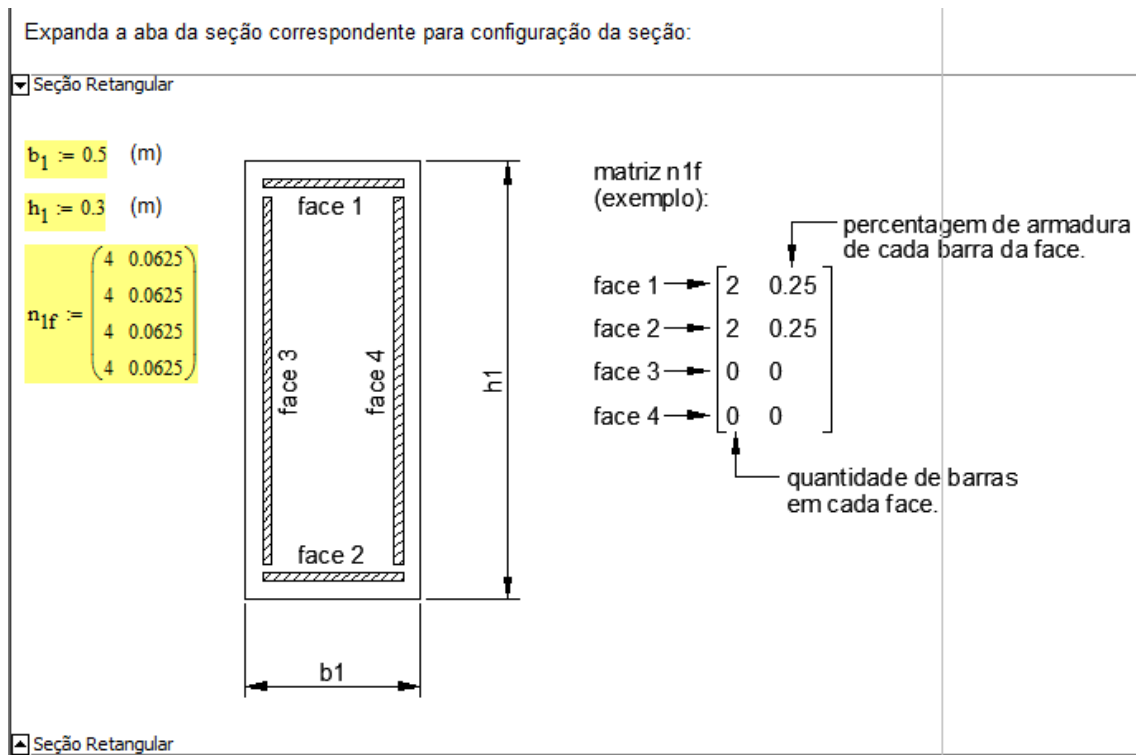


Figura 3.4 – Seção retangular – template

Na figura 3.5 são apresentadas informações adicionais sobre ferramentas desenvolvidas e dados necessários para a definição da seção, são elas:

- Armadura personalizada: Caso a *template* não apresente a distribuição de armadura desejada, ainda é possível aproveitá-la para a geração do contorno da seção, personalizando somente a armadura. Para isto, basta marcar a caixa “Armadura Personalizada” e inserir os vetores correspondentes a armadura.
- Rotação da seção em torno do CG: basta fornecer o ângulo θ (em graus, em torno do eixo z) que o programa aplica uma rotação em torno do seu CG; e
- Distância entre a face e o eixo das armaduras: este dado não é necessário no caso de seção genérica ou armadura personalizada, nos demais casos, é um dado obrigatório.

Armadura Personalizada

Entre com os vetores de armadura:

Vetor de coordenadas X (m):	Vetor de coordenadas Y (m):	Vetor da distribuição percentual:
$X_{SP} := \begin{pmatrix} 0.03 \\ 0.97 \\ 0.03 \\ 0.97 \end{pmatrix}$	$Y_{SP} := \begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.97 \\ 0.03 \\ 0.03 \end{pmatrix}$	$P_{SP} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Características Gerais:

- Rotação da Seção (em torno do C.G.): $\theta := 15$ (graus)
- Distância entre a face e o eixo das armaduras: $d := 0.03$ (m)

Figura 3.5 – Informações adicionais

3.3. Exemplos

Nos exemplos desenvolvidos nos próximos capítulos, são utilizadas quatro seções que têm as entradas de dados apresentadas a seguir.

3.3.1. Seção 1 - retangular

A seção de 0.3m × 0.6m, com 4 barras nas faces 1 e 2 e 5 barras nas faces 3 e 4, totalizando 18 barras, cada barra representa 5.55% da área de armadura total (figura 3.6). Não foi aplicada nenhuma rotação à seção, e a distância entre a face e o eixo das armaduras é de 0.04m (figura 3.7). Os vetores gerados pelo programa são apresentados na figura 3.8 e, na figura 3.9, é apresentado o esquema da seção gerado pelo programa, com as características mecânicas da seção bruta avaliadas para os eixos centroidais.

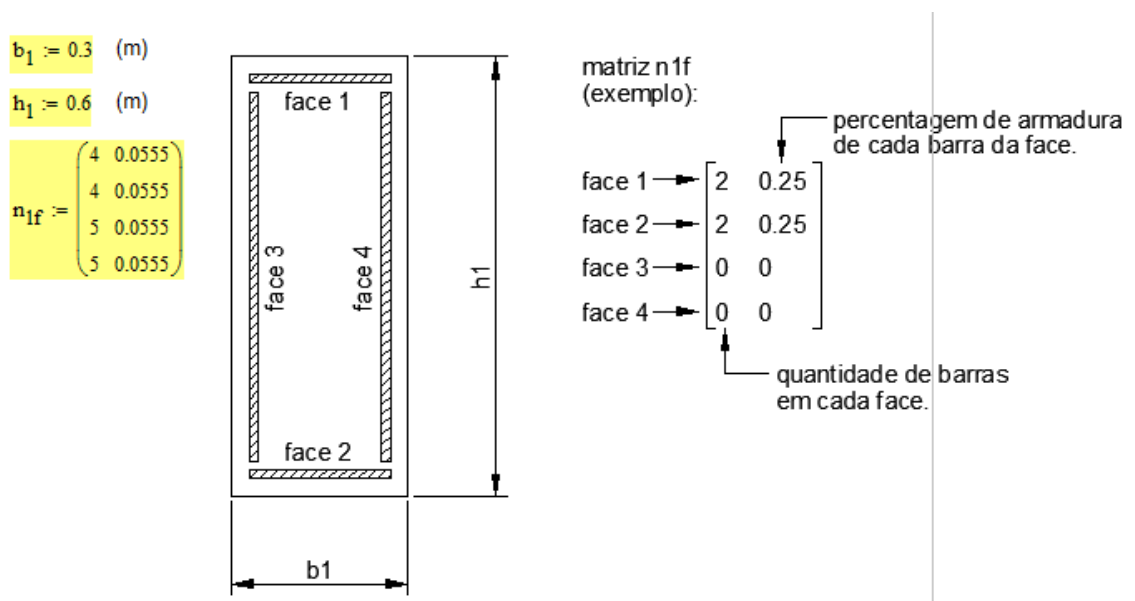


Figura 3.6 – Seção 1 – Configuração da *template*

Características Gerais:

- Rotação da Seção (em torno do C.G.): $\theta := 0$ (graus)
- Distância entre a face e o eixo das armaduras: $d := 0.04$ (m)

Figura 3.7 – Seção 1 – Características gerais

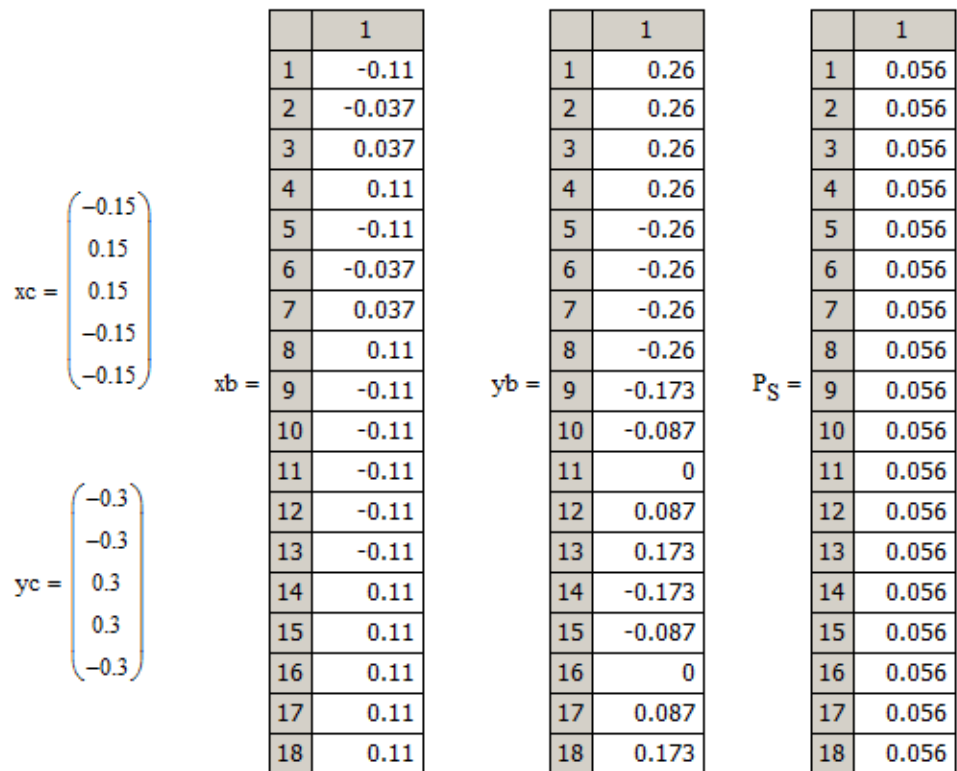
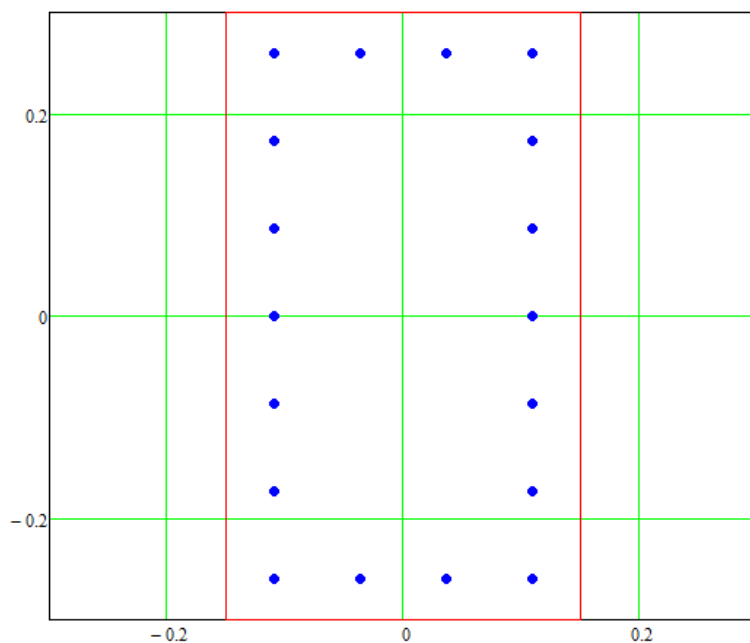


Figura 3.8 – Seção 1 – Vetores x_c , y_c , x_b , y_b e P_S

Seção = "Retangular"



$A_c = 0.18$ (m2)

$I_x = 5.4 \times 10^{-3}$ (m4)

$I_y = 1.35 \times 10^{-3}$ (m4)

$I_{xy} = 0$ (m4)

Figura 3.9 – Seção 1 – Esquema

3.3.2. Seção 2 – coroa circular

A seção tem seu raio externo de 0.3m e espessura de 0.15m, com 18 barras distribuídas na face externa e 9 barras na interna, totalizando 27 barras, cada barra representa 3.7% da área de armadura total. Foram utilizados 24 pontos para discretização do contorno (figura 3.10). A distância entre a face e o eixo das armaduras é de 0.04m. Nas figuras 3.11 e 3.12 são apresentados os resultados da manipulação dos dados gerados pelo programa.

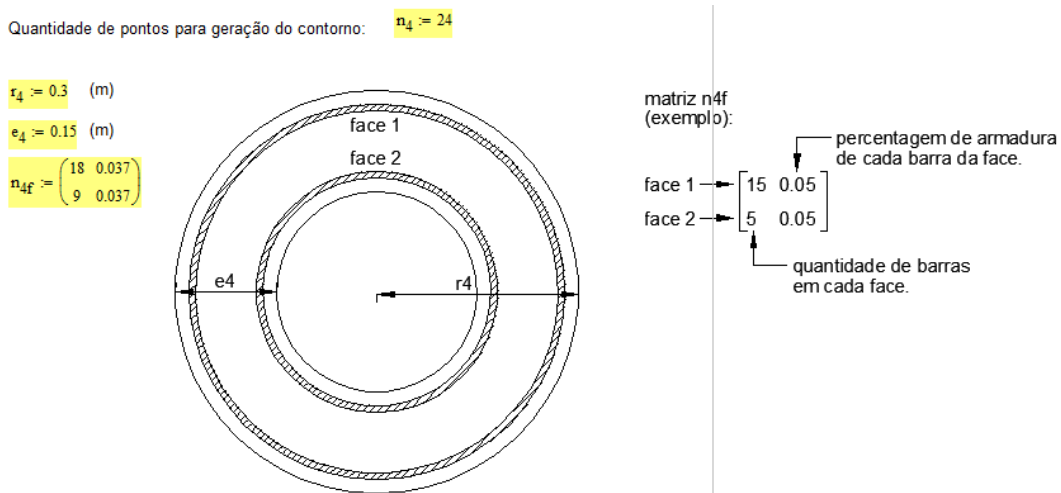


Figura 3.10 – Seção 2 – Configuração da *template*

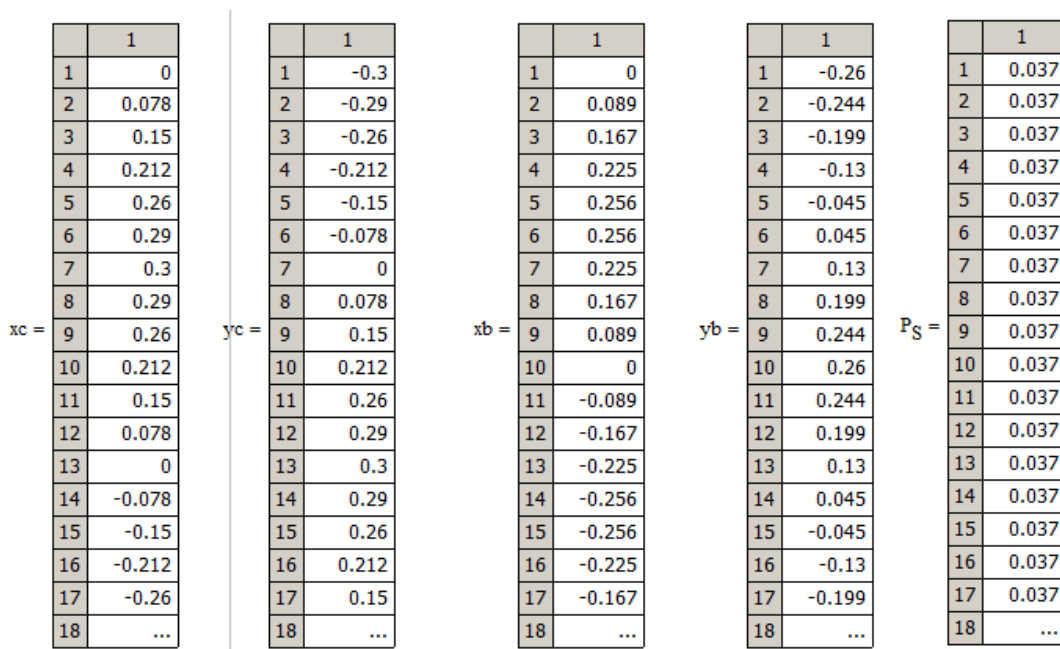
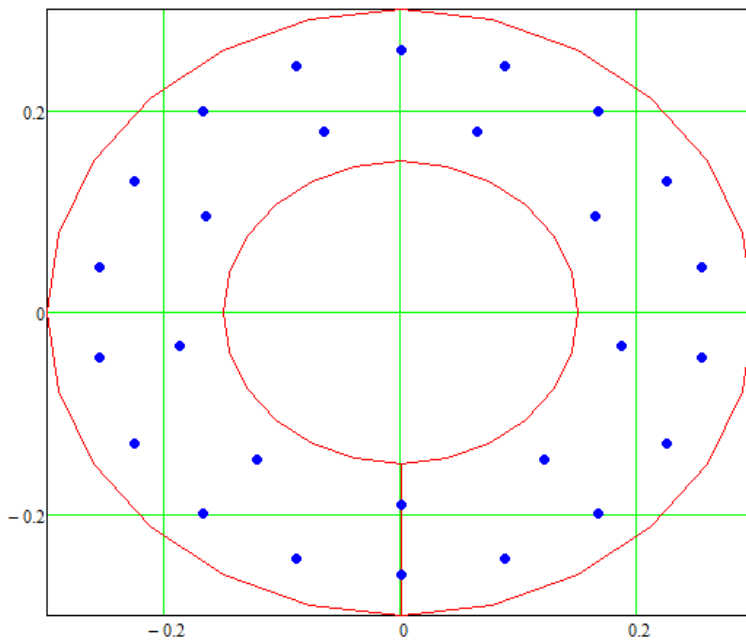


Figura 3.11 – Seção 2 – Vetores x_c , y_c , x_b , y_b e P_s

Seção = "Circular Vazada"



$$A_c = 0.21 \quad (m^2)$$

$$I_x = 5.829 \times 10^{-3} \quad (m^4)$$

$$I_y = 5.829 \times 10^{-3} \quad (m^4)$$

$$I_{xy} = 0 \quad (m^4)$$

Figura 3.12 – Seção 2 – Esquema

3.3.3. Seção 3 – paralelogramo

Neste exemplo é utilizado o tipo seção genérica. A figura 3.13 apresenta a geometria da seção, com as coordenadas (em metros) dos pontos necessárias para montagem dos vetores.

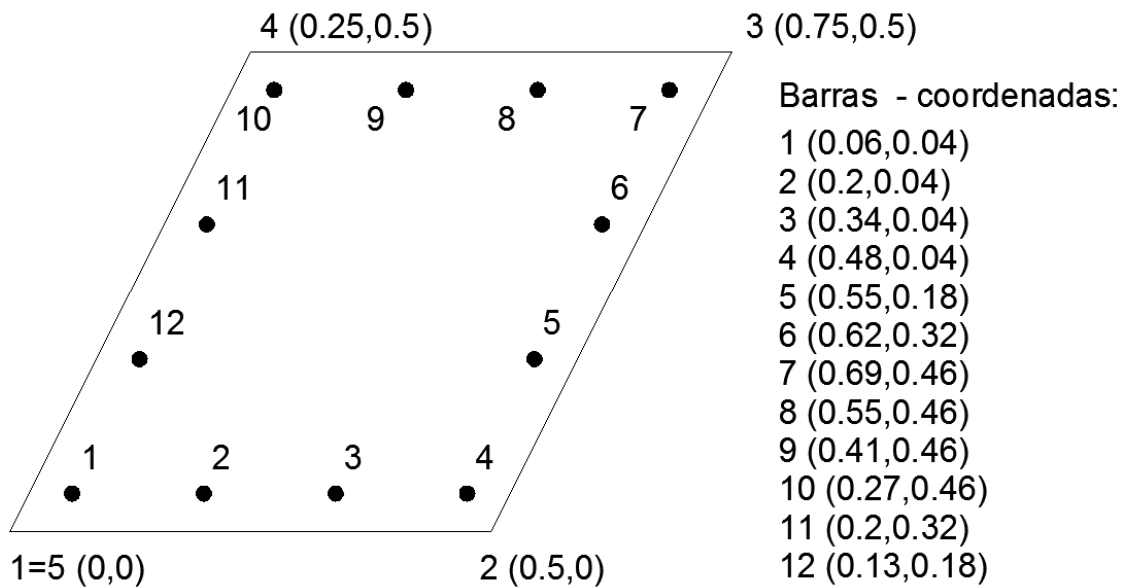


Figura 3.13 – Seção 3 – Coordenadas dos pontos

Cada uma das 12 barras representa 6.25% da área de armadura total (figura 3.14). Nas figuras 3.15 e 3.16 são apresentados os resultados da manipulação dos dados gerados pelo programa.

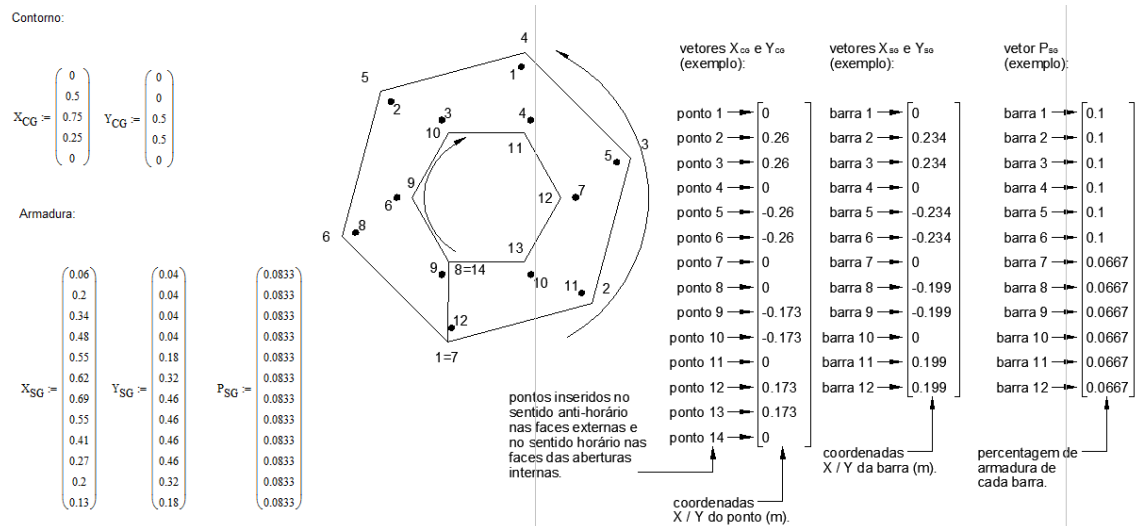


Figura 3.14 – Seção 3 – Configuração da *template*

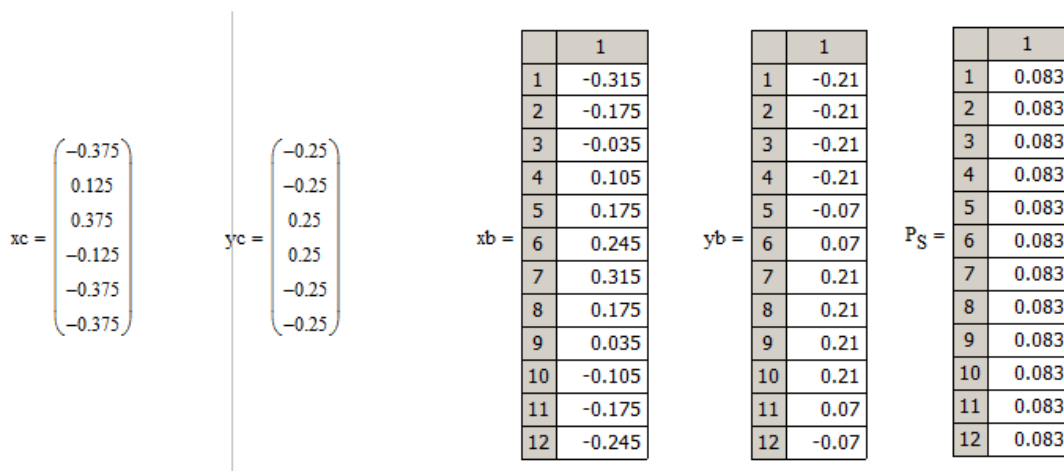
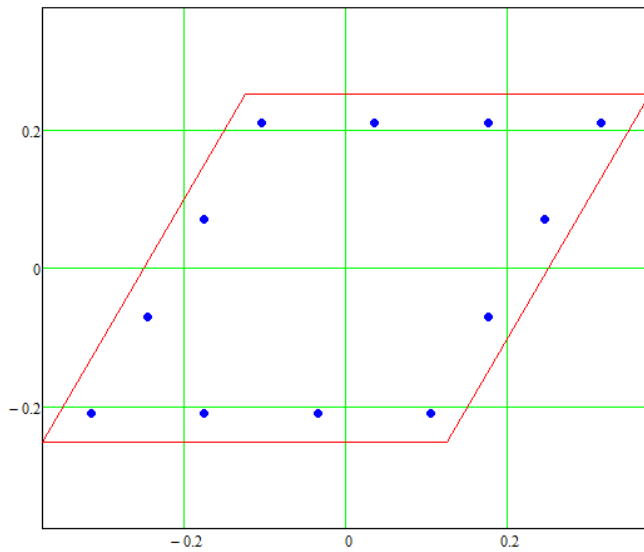


Figura 3.15 – Seção 3 – Vetores x_c , y_c , x_b , y_b e P_s

Seção = "Genérica"



$$A_c = 0.25 \quad (\text{m}^2)$$

$$I_x = 5.208 \times 10^{-3} \quad (\text{m}^4)$$

$$I_y = 6.51 \times 10^{-3} \quad (\text{m}^4)$$

$$I_{xy} = 2.604 \times 10^{-3} \quad (\text{m}^4)$$

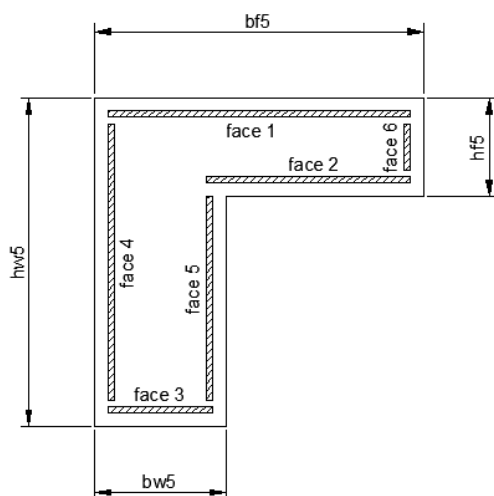
Figura 3.16 – Seção 3 – Esquema

3.3.4. Seção 4 – L

A seção tem as dimensões (figura 3.17): $b_f = 0.5\text{m}$, $h_f = 0.25\text{m}$, $b_w = 0.25\text{m}$ e $h_w = 0.5\text{m}$. A armadura é composta por 5 barras distribuídas na face 1, 3 barras na face 2, 3 barras na face 3, 3 barras na face 4, 1 barra na face 5 e 1 barra na face 6, totalizando 16 barras. Cada barra representa 6.25% da área de armadura total (figura 3.17). A distância entre a face e o eixo das armaduras é de 0.04m. Nas figuras 3.18 e 3.19 são apresentados os resultados da manipulação dos dados gerados pelo programa.

$bf_5 := 0.5$ (m)
 $hf_5 := 0.25$ (m)
 $bw_5 := 0.25$ (m)
 $hw_5 := 0.5$ (m)

$n_{5f} := \begin{pmatrix} 5 & 0.0625 \\ 3 & 0.0625 \\ 3 & 0.0625 \\ 3 & 0.0625 \\ 1 & 0.0625 \\ 1 & 0.0625 \end{pmatrix}$



matriz n_{5f}
(exemplo):

face 1	→	6	0.05
face 2	→	3	0.05
face 3	→	3	0.05
face 4	→	5	0.05
face 5	→	3	0.05
face 6	→	0	0

↑ percentagem de armadura de cada barra da face.
↑ quantidade de barras em cada face.

Figura 3.17 – Seção 4 – Configuração do *template* – Módulos I, II, III e V

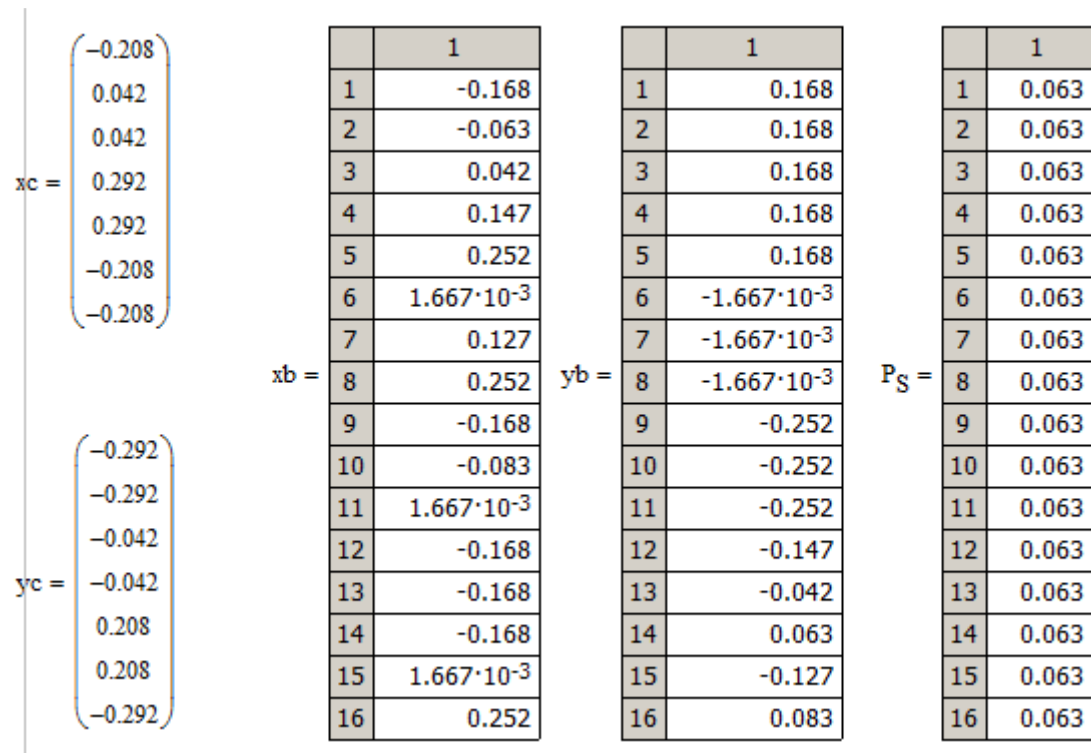
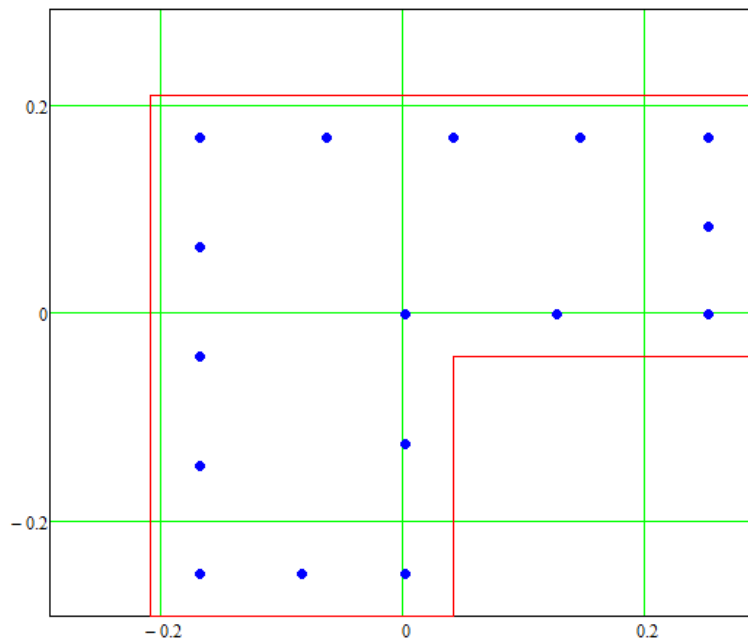


Figura 3.18 – Seção 4 – Vetores x_c , y_c , x_b , y_b e P_S

Seção = "Seção L"



$A_c = 0.187 \quad (m^2)$
 $J_x = 3.581 \times 10^{-3} \quad (m^4)$
 $J_y = 3.581 \times 10^{-3} \quad (m^4)$
 $J_{xy} = 1.302 \times 10^{-3} \quad (m^4)$

Figura 3.19 – Seção 4 – Esquema

4. Superfície Resistente

4.1. Introdução

A superfície resistente de uma determinada seção de concreto armado é a representação gráfica do conjunto de esforços resistentes correspondentes a todas as configurações deformadas possíveis desta (figura 4.1).

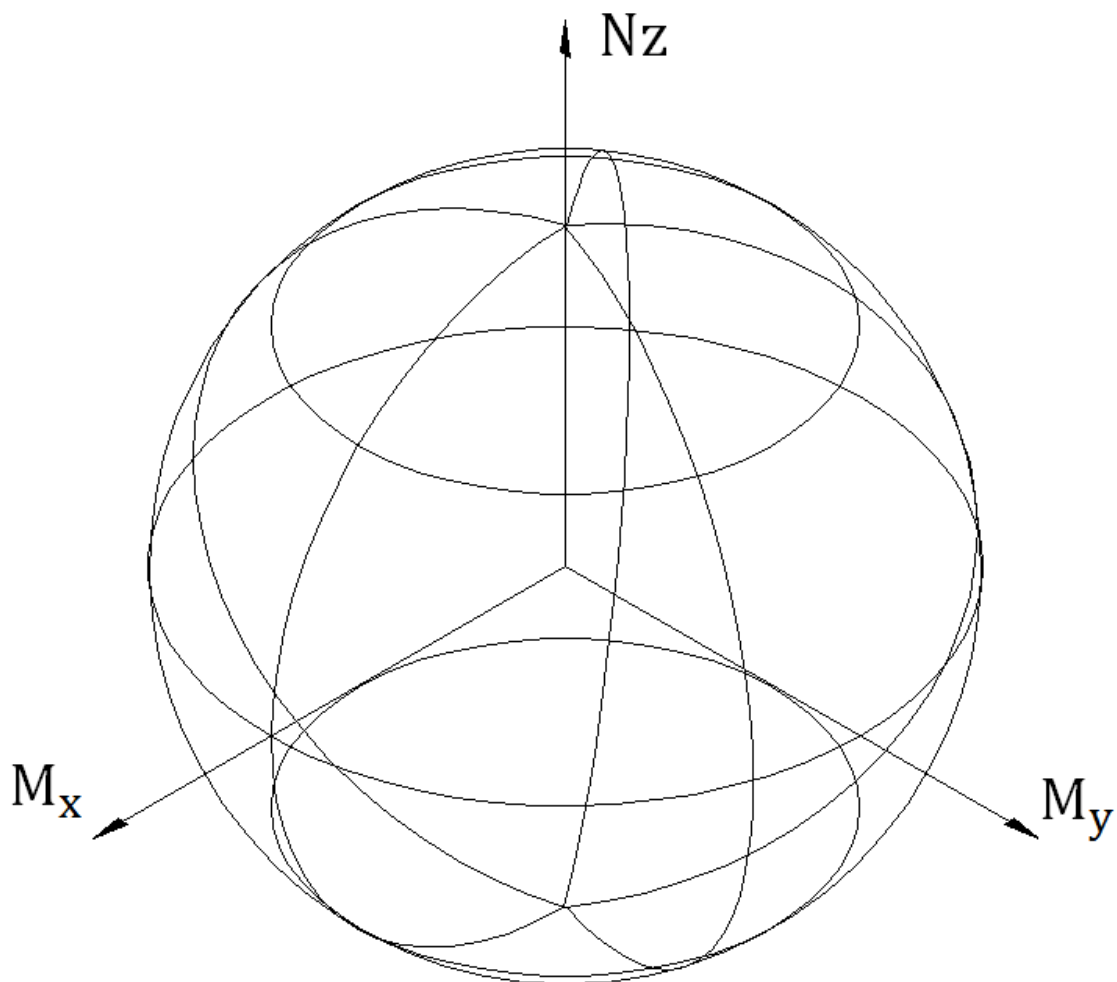


Figura 4.1 – Esquematização de superfície resistente

Na prática, para a geração destas superfícies, é utilizado um número finito de configurações deformadas, definidas dentro dos intervalos da inclinação da LN (α) e do

parâmetro de deformação (D). Na literatura técnica, é também usual se apresentar superfícies resistentes em função da taxa de armadura mecânica da seção (ω).

4.2. Entrada de dados

A figura 4.2 apresenta a entrada de dados do módulo, onde devem ser informados o número $n\alpha$ que define a variação $\Delta\alpha = 2\pi/n\alpha$ do ângulo de inclinação da linha neutra e a taxa mecânica ω_S de armadura da seção.

Geração da superfície resistente:

- Número de inclinações da linha neutra: $n\alpha := 36$

- Taxa de armadura mecânica: $\omega_S := 0.3$

Ctrl+F9 para geração dos resultados
(a operação pode levar alguns segundos)

Figura 4.2 – Geração da superfície resistente – entrada de dados

4.3. Implementação em MathCAD

Procede-se a montagem do vetor v_α de inclinações da linha neutra α e v_D contendo os valores de D correspondentes às 22 configurações deformadas analisadas. No total, são gerados $22 \times (n\alpha + 1)$ pontos da superfície.

A rotina de geração dos pontos da superfície segue o seguinte procedimento:

Dados os vetores v_α e v_D e taxa ω_S :

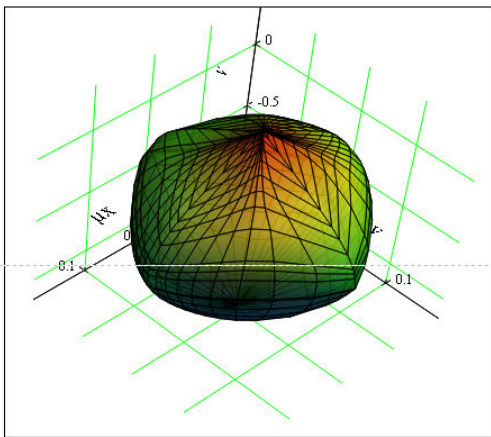
1. Calcula A_S correspondente a ω_S ;
2. Para a inclinação $v\alpha_j$ da linha neutra:
 - 2.1. Para a deformada v_{D_i} da seção:
 - 2.1.1. Avalia os esforços resistente R_i ;
 - 2.1.2. Acrescenta a linha R_i na matriz R_p ;
3. Normaliza os esforços resistentes em R_p ;

4. Cria vetores de pontos para plotar o gráfico 3D do MathCAD.

4.4. Exemplos

Nas figuras 4.3 a 4.6 estão representadas as superfícies resistentes obtidas para as seções 1 a 4, respectivamente, definidas com taxas mecânicas ω_s indicadas. Nestas figuras também são apresentados os gráficos no plano $\mu x - \mu y$, contendo as curvas de nível de valores de v . Em todos os exemplos foi utilizado $n\alpha = 36$.

Superfície resistente (tri-dimensional):



Curvas $\mu x - \mu y$, para valores de v (Curvas de nível):

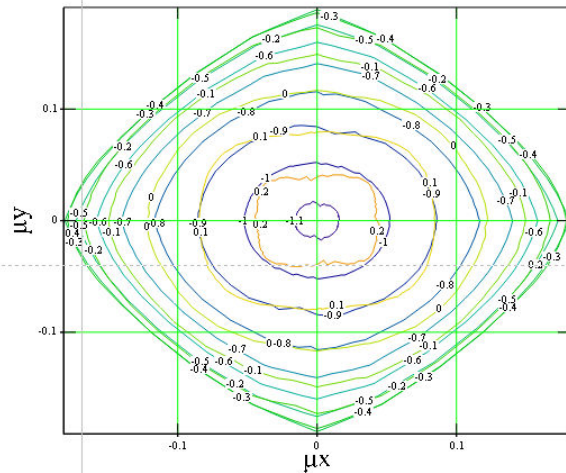
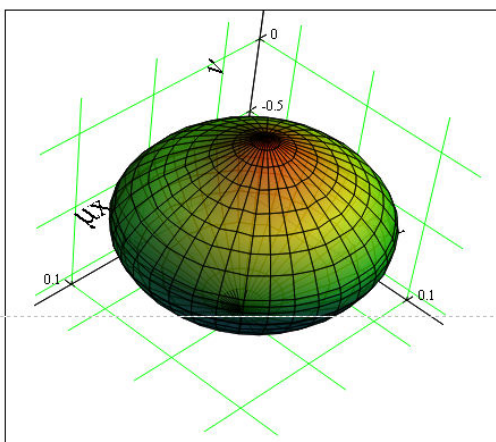


Figura 4.3 – Seção 1 – retangular ($\omega_s = 0.3$)

Superfície resistente (tri-dimensional):



Curvas $\mu x - \mu y$, para valores de v (Curvas de nível):

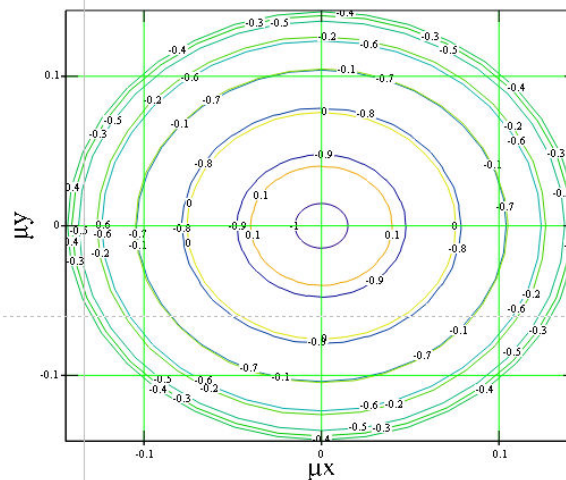
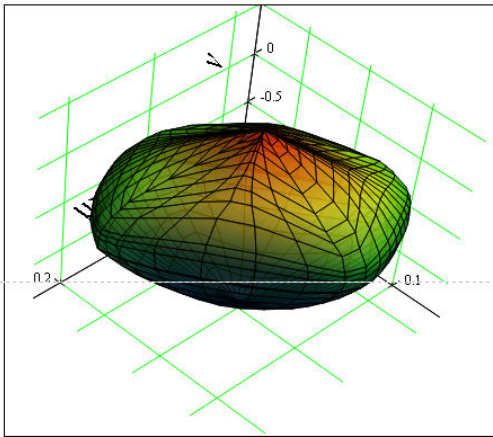


Figura 4.4 – Seção 2 – coroa circular ($\omega_s = 0.2$)

Superfície resistente (tri-dimensional):



Curvas $\mu_x - \mu_y$, para valores de ν (Curvas de nível):

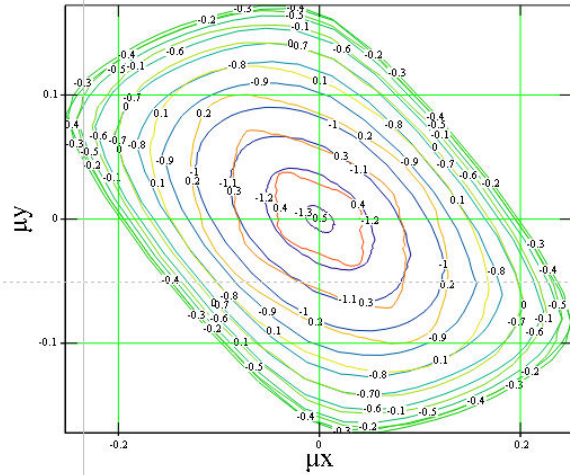
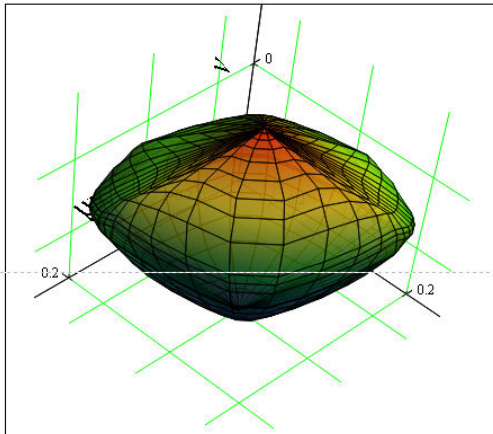


Figura 4.5 – Seção 3 – paralelogramo ($\omega_s = 0.5$)

Superfície resistente (tri-dimensional):



Curvas $\mu_x - \mu_y$, para valores de ν (Curvas de nível):

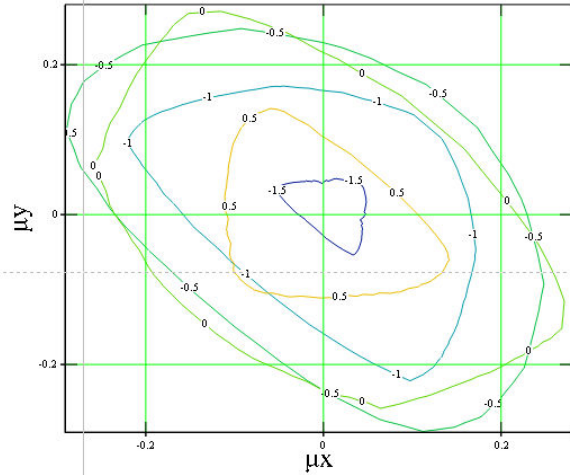


Figura 4.6 – Seção 4 – L ($\omega_s = 0.8$)

5. Curvas de Interação N - Mx e N - My

5.1. Introdução

A visualização da superfície resistente de uma seção através de planos N - Mx e N - My é bastante comum. Estes gráficos, usuais na literatura, são denominados curvas de interação e são principalmente utilizadas para seções sujeitas a Flexão Composta Reta (FCR), mas podem ser combinadas e utilizadas para a verificação de seções sujeitas à FCO.

Estas curvas são obtidas para valores pré-determinados da inclinação α da linha neutra e para valores específicos da taxa mecânica ω . Na figura 5.1 é apresentado um exemplo deste tipo de gráfico para seção retangular, para $\alpha = 0$ e valores de ω variando de 0 a 1. Observa-se que a curva $\omega = 0$ representa apenas a contribuição do concreto e, que as demais curvas são afins à ela. Isto é, conforme se aumenta ω , tem-se um aumento na resistência devido somente a contribuição da armadura.

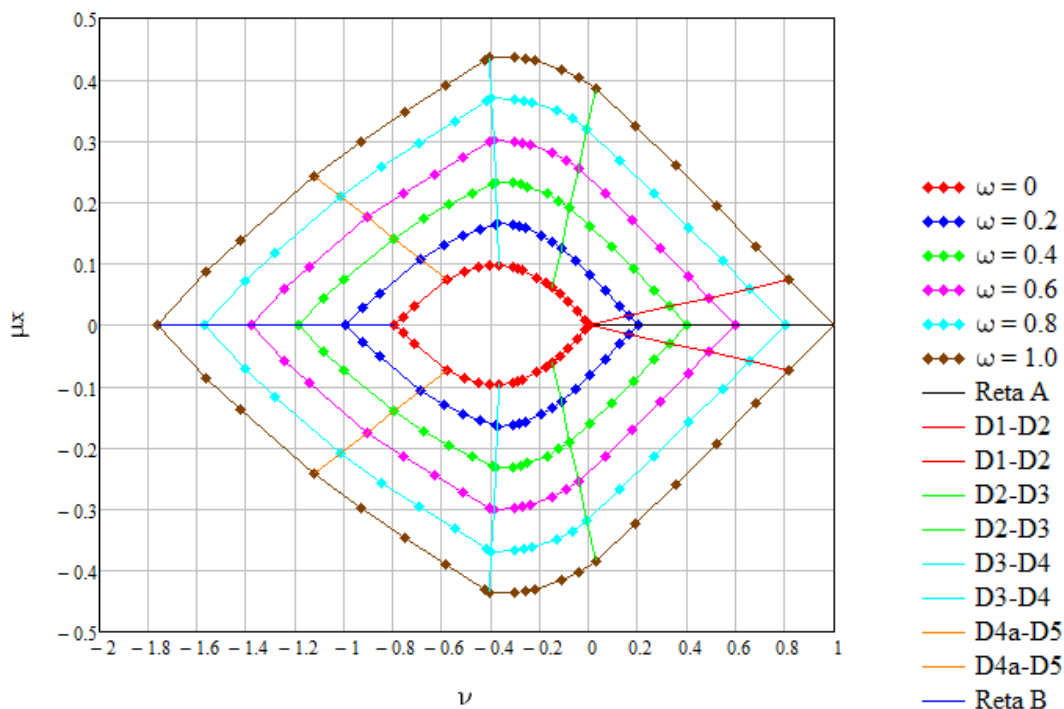


Figura 5.1 – Curva de interação N - Mx – Exemplo

Nesta figura também podem ser observadas retas correspondentes às configurações limite entre os domínios do ELU e a legenda correspondente às curvas apresentadas nos exemplos deste capítulo.

5.2. Entrada de dados

O programa gera um par de gráficos N - Mx e N - My para um conjunto de valores pré-estabelecidos de ω ou apenas para a taxa ω_C especificada pelo usuário. A figura 5.2 apresenta a entrada de dados do módulo, onde deve ser informado o ângulo desejado para a inclinação da linha neutra α_C , sendo $-90^\circ \leq \alpha_C \leq 90^\circ$.

Geração de curvas N - Mx e N - My:

- Inclinação da Linha Neutra: $\alpha_C := 0$ (graus) ($-90 \leq \alpha_C \leq 90$)

- Taxa de armadura mecânica $\omega_C := 0.637$

Ctrl+F9 para geração dos resultados
(a operação pode levar alguns segundos)

Figura 5.2 – Geração de curvas N - Mx e N - My – entrada de dados

5.3. Implementação em MathCAD

Procede-se a montagem do vetor v_D com os valores de D que definem as 44 configurações deformadas no ELU que serão utilizadas.

A rotina para a montagem das curvas de interação segue o procedimento:

Dados α_C e ω_C :

1. Determina a matriz CIC, da contribuição do concreto nos esforços resistentes para as deformadas em v_D ;
2. Determina a matriz CIS, da contribuição de uma área de armadura unitária nos esforços resistentes, para as deformadas em v_D ;
3. Monta os vetores $\mu_{x\omega}$, $\mu_{y\omega}$ e v_ω dos esforços adimensionais para a taxa de armadura ω_C definida pelo usuário, para cada ponto de iteração;

4. Monta as matrizes $\mu_{x_{CI}}$, $\mu_{y_{CI}}$ e v_{CI} dos esforços adimensionais para valores padrões de ω . Cada coluna desta matriz é formada pelo vetor correspondente a cada um dos valores de ω ; e

5. Monta os vetores para visualização das retas limites entre os domínios do ELU.

5.4. Exemplos

Nas figuras 5.3 a 5.6 são apresentadas as curvas de interação geradas, considerando-se $\alpha_c = 0$, para as quatro seções definidas no capítulo 3.

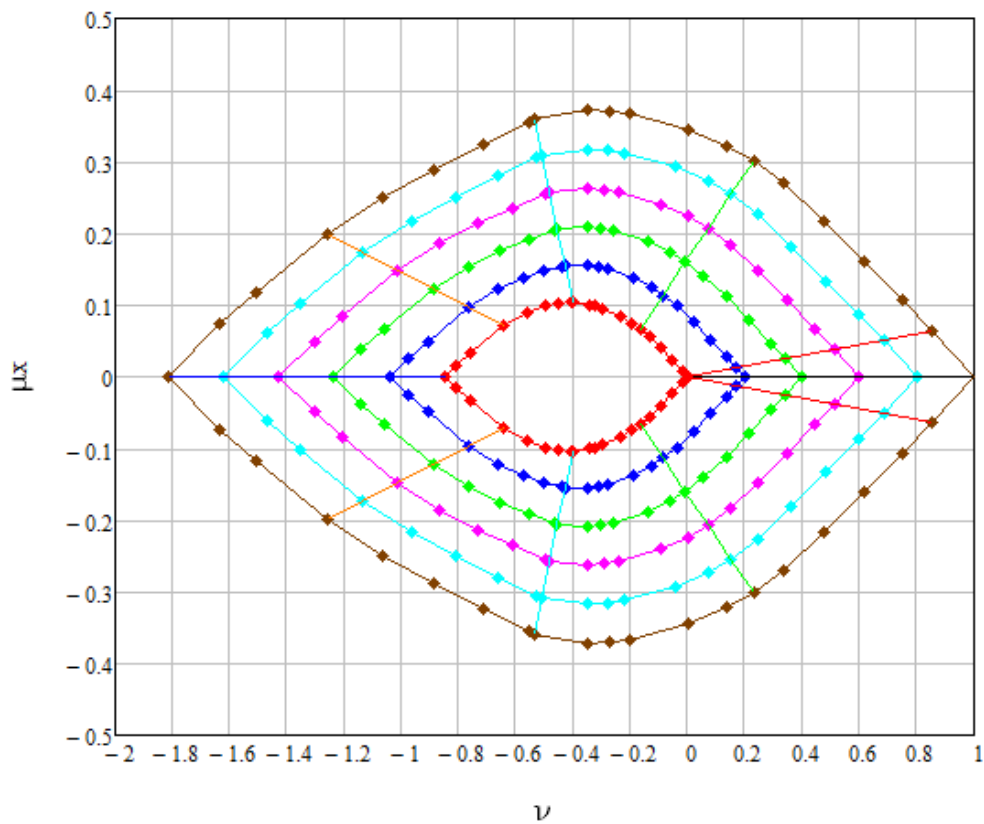


Figura 5.3 – Seção 1 – retangular – Curva v - μ_x para os valores de ω

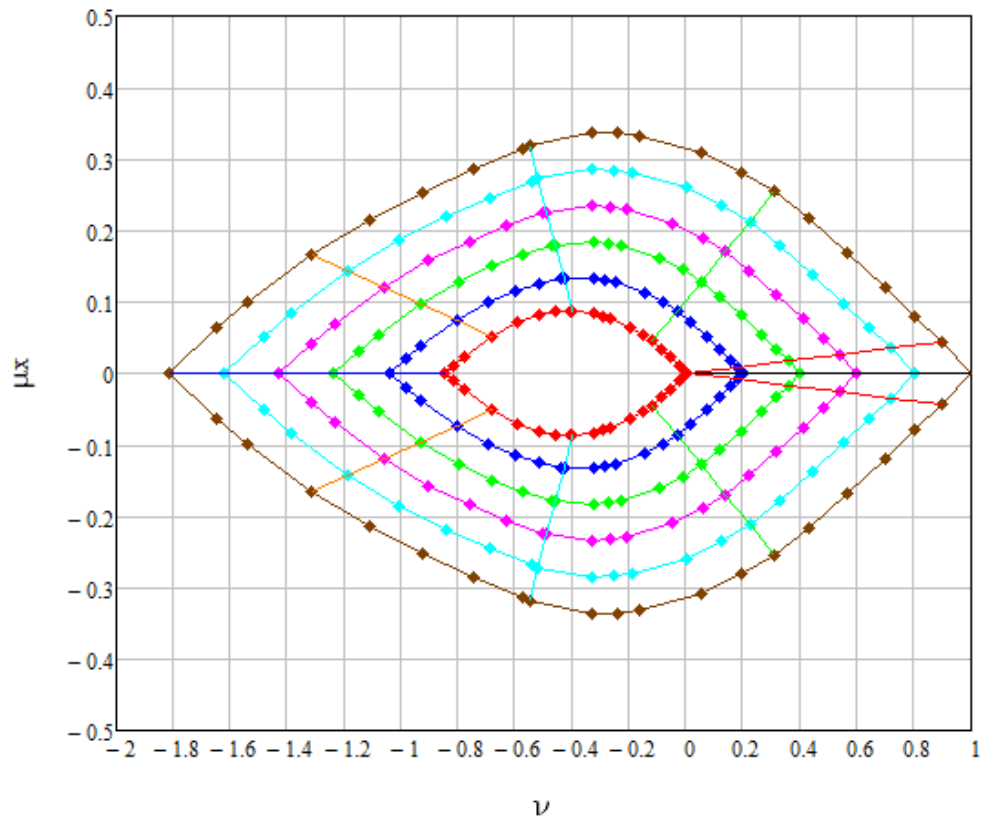


Figura 5.4 – Seção 2 – coroa circular – Curva ν - μ_x para os valores de ω

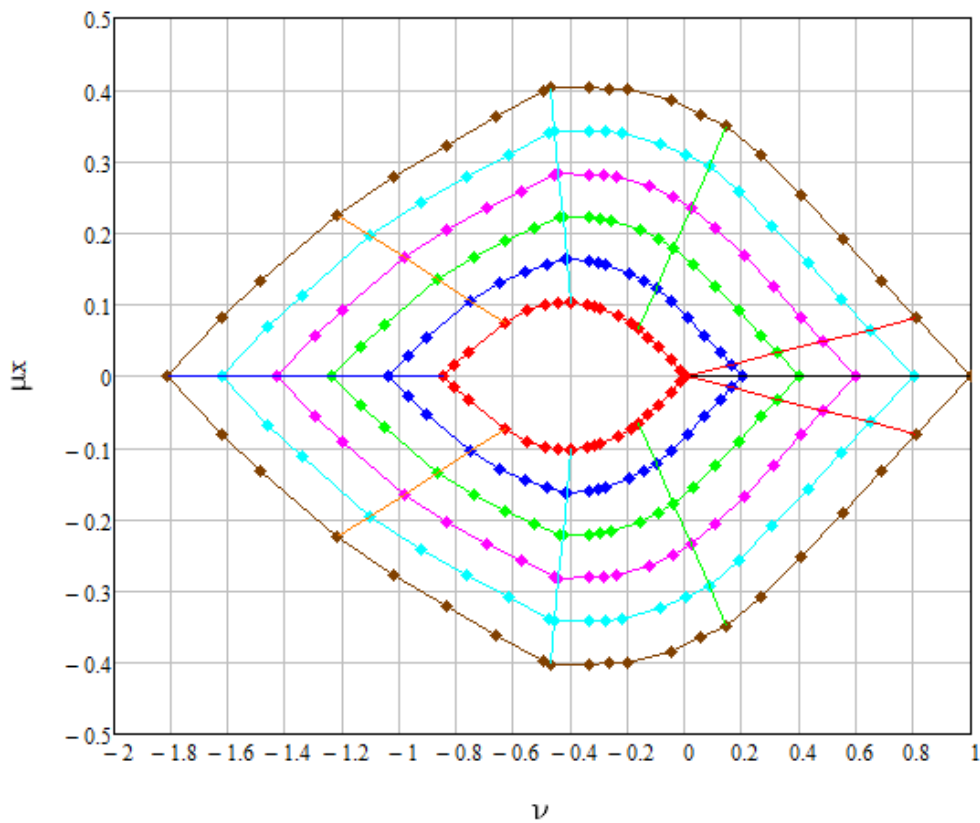


Figura 5.5 – Seção 3 – paralelogramo – Curva ν - μ_x para os valores de ω

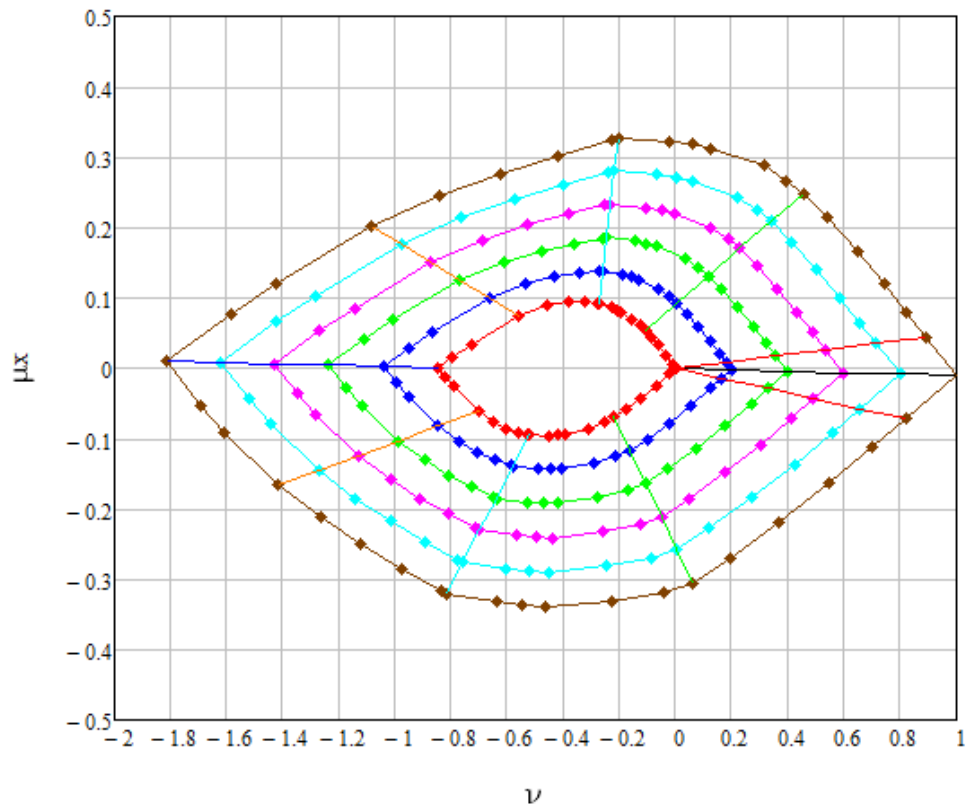


Figura 5.6 – Seção 4 – L – Curva $v - \mu x$ para os valores de ω

Para comparação de resultados, será apresentada na figura 5.7 uma curva gerada pelo programa para a seção 1, com uma armadura total $A_S = 56.52\text{cm}^2$ ($\omega = 0.637$). Na figura 5.8 é mostrada a curva gerada pelo programa “Normal 1.3” (UFPR) para a mesma seção. Observam-se resultados bem próximos nas duas curvas.

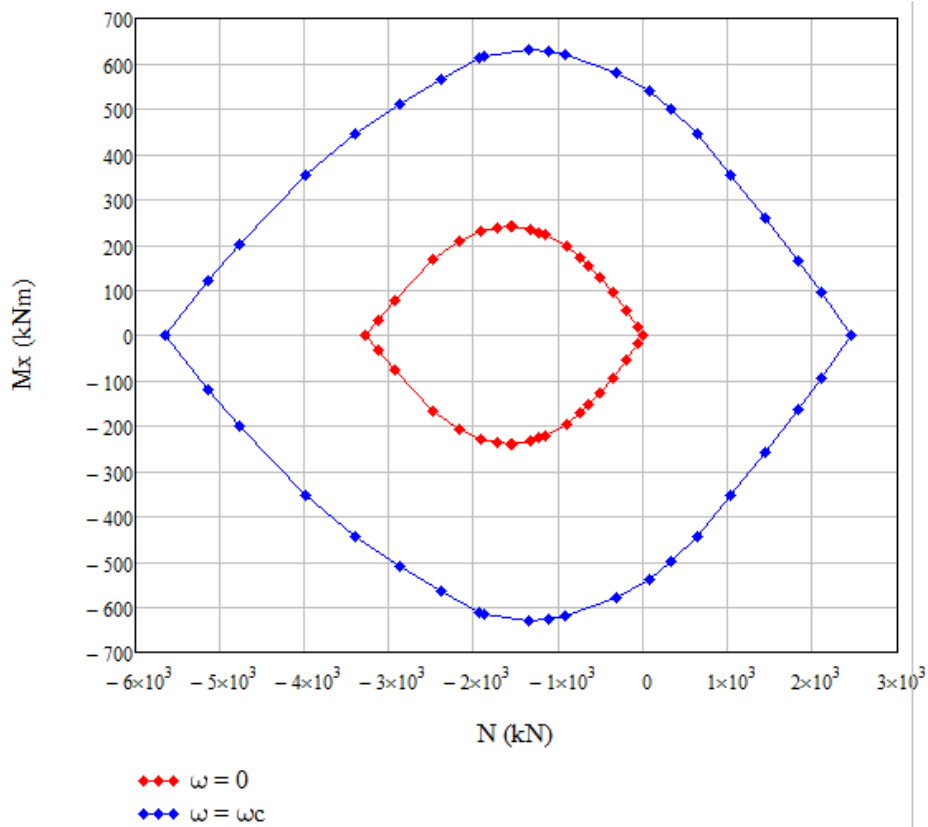


Figura 5.7 – Seção 1 – retangular – Curva N - Mx ($\omega = 0.637$)

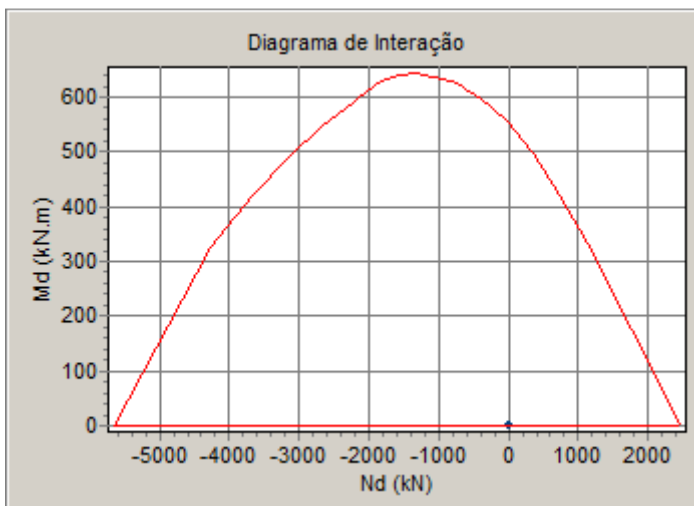


Figura 5.8 – Seção 1 – retangular – Curva N - Mx ($\omega = 0.637$) – Normal 1.3

6. Curvas de Interação Mx - My

6.1. Introdução

A visualização das curvas resistentes Mx - My para um determinado plano N cortando a superfície resistente de uma seção é mais interessante do que curvas N - Mx e N - My para o caso da FCO. Um exemplo deste tipo de curva é apresentado na figura 6.4. Estas curvas, conhecidas como Ábacos de Roseta, são obtidas para valores pré-determinados de N e ω , considerando-se um número finito de ângulos α de inclinação da linha neutra. Devido ao custo computacional envolvido, a rotina implementada neste trabalho gera apenas a curva para um valor de ω , definido pelo usuário.

Para o traçado destas curvas, dados os valores de \bar{v} e $\bar{\omega}$ e um vetor de ângulos $\bar{\alpha}$, obtém-se o vetor D, onde D_i é a raiz da equação não-linear $v_i(\bar{\alpha}_i, \bar{\omega}, D) = \bar{v}$. São então determinados os momentos resistentes correspondentes $\mu_x(\bar{\alpha}_i, \bar{\omega}, D_i)$ e $\mu_y(\bar{\alpha}_i, \bar{\omega}, D_i)$.

6.2. Entrada de dados

A figura 6.1 apresenta a entrada de dados do módulo, devem ser informados: a quantidade $n\alpha$ de ângulos α ; a taxa de armadura mecânica ω_C ; e o valor do esforço normal referente à curva, informado na forma dimensional (N_C) ou adimensional (v_C).

Geração de curvas Mx - My:

- Número de inclinações da linha neutra: $n\alpha := 36$

- Taxa de armadura mecânica: $\omega_C := 0.3$

Gerar curva a partir do:

Esforço normal $N_C := -1500$ (kN)

Esforço normal adimensionalizado $\nu_C := -0.5$

**Ctrl+F9 para geração dos resultados
(a operação pode levar alguns segundos)**

Figura 6.1 – Geração de curvas Mx - My – entrada de dados

6.3. Implementação em MathCAD

A montagem do vetor v_α de ângulos α segue o procedimento exposto no capítulo 4. Procede-se a montagem do vetor vD_{CN} com valores do parâmetro D , correspondentes às raízes das equações não lineares $v(\bar{\alpha}_i, \bar{\omega}, D) = \bar{v}$, definidas para os valores de $\bar{\alpha}_i$ em v_α e a montagem dos vetores $\mu_{x_{CN}}$ e $\mu_{y_{CN}}$ dos momentos adimensionais e dos vetores $M_{x_{CN}}$ e $M_{y_{CN}}$ dos momentos dimensionais, correspondentes às deformadas definidas em v_α e vD_{CN} .

6.4. Exemplos

Nas figuras 6.2 a 6.5 são apresentadas as curvas de interação geradas, considerando-se $n\alpha = 36$, para as quatro seções definidas no capítulo 3.

Curva $M_x - M_y$: $N = 0$ (kN)

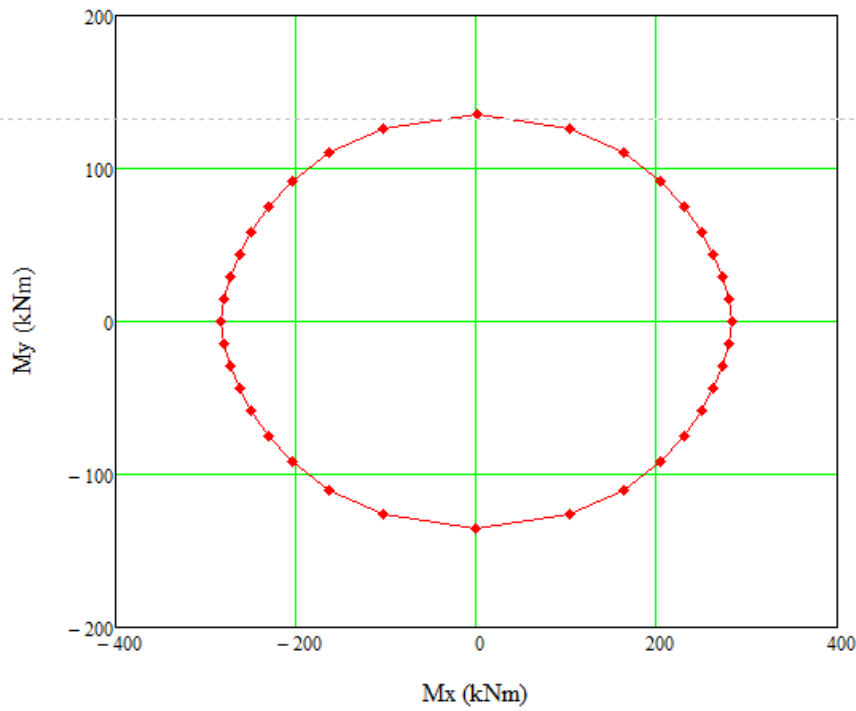


Figura 6.2 – Seção 1 – retangular – Curva $M_x - M_y$ ($\omega_c = 0.3$) ($N = 0$)

Curva $\mu_x - \mu_y$: $\nu = 0.045$

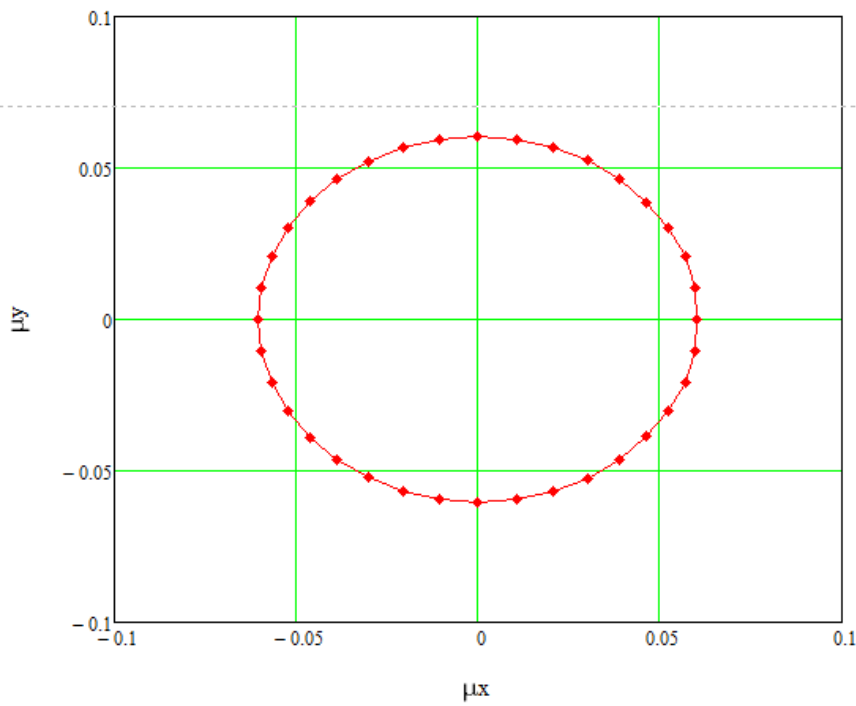


Figura 6.3 – Seção 2 – coroa circular – Curva $\mu_x - \mu_y$ ($\omega_c = 0.2$) ($\nu = 0.045$)

Curva $\mu_x - \mu_y$: $\nu = -0.187$

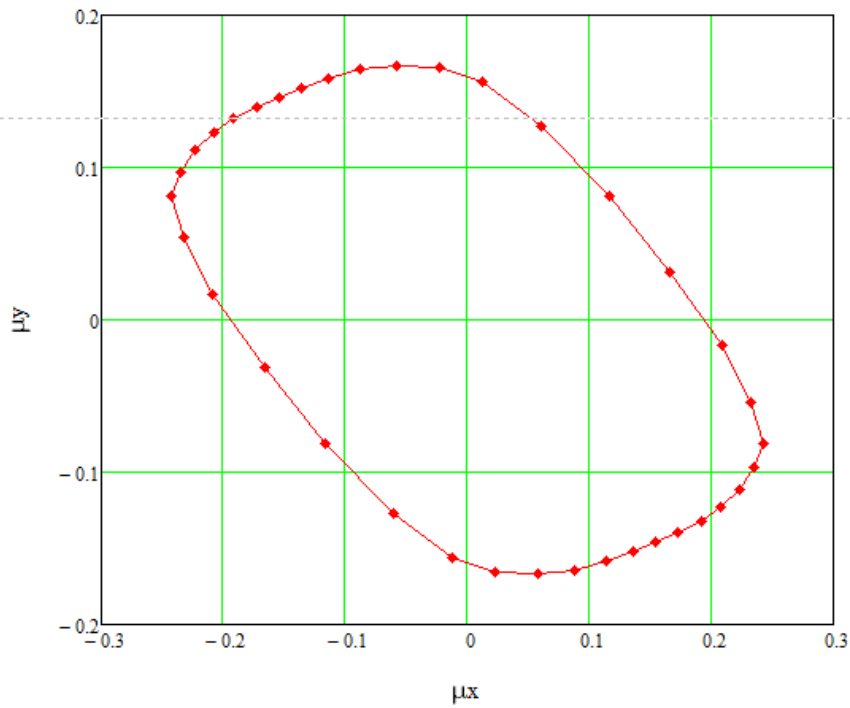


Figura 6.4 – Seção 3 – paralelogramo – Curva $\mu_x - \mu_y$ ($\omega_c = 0.5$) ($\nu = -0.187$)

Curva $M_x - M_y$: $N = -2.009 \times 10^3$ (kN)

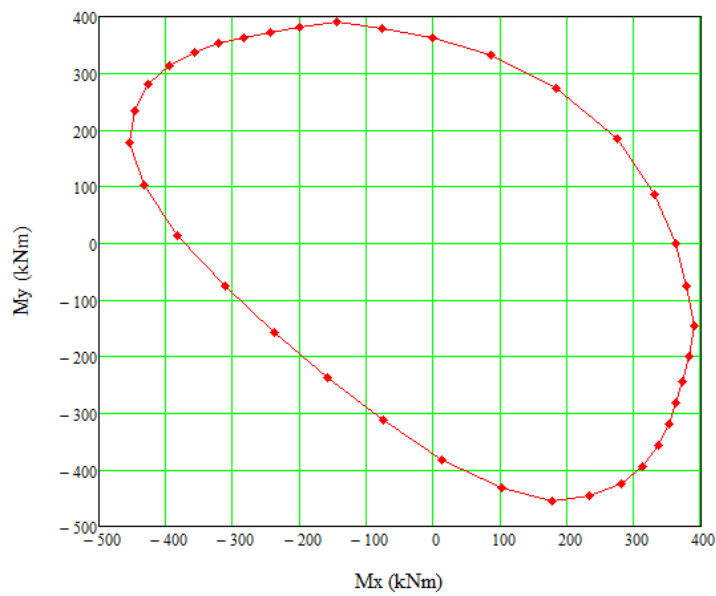


Figura 6.5 – Seção 4 – L – Curva $M_x - M_y$ ($\omega = 0.544$) ($N = -2009$ kN)

Para comparação de resultados, será apresentada na figura 6.6 uma curva gerada pelo programa “Oblíqua 1.0” (UFPR) para a seção 4, com uma armadura total $A_S = 50.24\text{cm}^2$ ($\omega = 0.544$) e $N = -2009\text{kN}$. Observam-se resultados bem próximos nas duas curvas, apresentando somente diferença na orientação do sentido positivo de M_x .

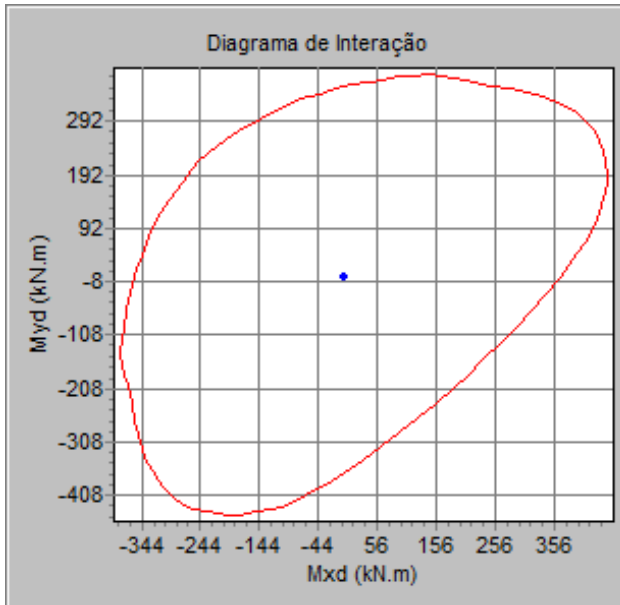


Figura 6.6 – Seção 4 – L – Curva $M_x - M_y$ ($\omega = 0.544$) ($N = -2009\text{kN}$) – Oblíqua 1.0

7. Verificação da Resistência à FCO

7.1. Introdução

Uma seção de concreto armado, com a sua armadura completamente definida, é dita resistente aos esforços solicitantes de cálculo $S_d = [M_{xS_d} \quad M_{yS_d} \quad N_{S_d}]^T$ se o vetor S_d estiver contido no interior ou sobre a superfície resistente da seção (figura 7.1). Isto é, existe um vetor $R_d = [M_{xR_d} \quad M_{yR_d} \quad N_{R_d}]^T$ de esforços resistentes de cálculo, colinear e de mesmo sentido de S_d , que está posicionado exatamente sobre a superfície de resistência da seção, para o qual $|R_d| \geq |S_d|$.

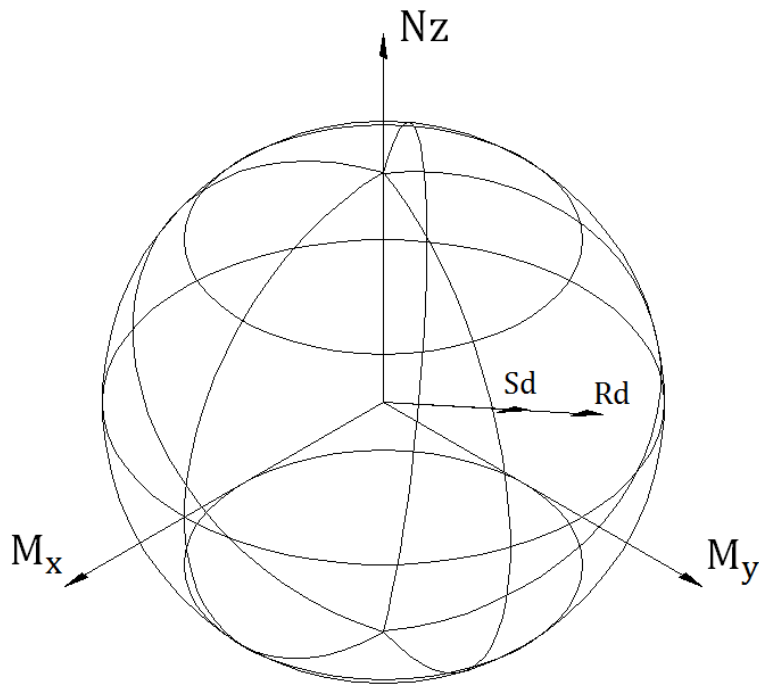


Figura 7.1 – Vetores S_d e R_d

Como visto em 2.4.2, o vetor R_d pode ser escrito em função da configuração deformada da seção: $R_d = f(\alpha, D)$. Desta forma, o critério de resistência pode ser expresso pelo sistema de 3 equações não-lineares $R_d(\alpha, D) = \lambda S_d$, onde λ é um escalar, positivo, que representa o fator de segurança global da seção à solicitação S_d .

$$M_{XRd}(\alpha, D) = \lambda M_{XSd}$$

$$M_{YRd}(\alpha, D) = \lambda M_{YSd}$$

$$N_{Rd}(\alpha, D) = \lambda N_{Sd}$$

(7.1)

As equações (7.1) formam um sistema com 3 incógnitas: α , D e λ . Em linhas gerais, sua resolução consiste em encontrar a configuração de deformada (α e D) em que os vetores R_d e S_d possuam mesma direção e sentido, e determinar o fator escalar λ positivo de forma que:

- Se $\lambda < 1$, $|S_d| > |R_d|$ e a seção não resiste à solicitação S_d ; e
- Se $\lambda \geq 1$, $|S_d| \leq |R_d|$ e a seção possui resistência suficiente.

7.2. Entrada de dados

A figura 7.2 apresenta a entrada de dados do módulo. Devem ser informados: M_{XSd} , M_{YSd} e N_{Sd} , valores de cálculo dos esforços solicitantes; os valores iniciais para as variáveis, inclinação da linha neutra α_i (em graus), para o parâmetro de deformação D_i , de acordo com o domínio do ELU e para o fator global de segurança λ_i e a área de armadura total da seção (m^2).

Para os valores iniciais de α e D , o usuário ainda pode escolher o cálculo automático, no qual o programa estima: a inclinação α da linha neutra correspondente à solução linear-elástica para seção com material homogêneo; e o parâmetro D dentro do domínio de deformação no ELU, estimado a partir de S_d . Estas estimativas automáticas buscam diminuir o custo da solução numérica do sistema não-linear. A inicialização automática de λ não é oferecida, sendo necessário o usuário determinar um valor inicial. Sugere-se o valor inicial de 1.

Verificação:

- Área de armadura total: $A_S = 33.6 \times 10^{-4}$ (m²)

- Esforços solicitantes (vetoriais, valores de cálculo):

- Momento em torno de X: $M_{xSd} := -1500$ (kNm)

- Momento em torno de Y: $M_{ySd} := 0$ (kNm)

- Esforço normal: $N_{Sd} := 0$ (kN)

- Inicialização das variáveis:

- Inclinação da L.N.: $\alpha_i := 0$ (graus) Automático

(A opção automática utiliza como valor inicial a inclinação da L.N. elástica) $(-90 \leq \alpha_i \leq 90)$

- Domínio do ELU:

Automático

Reta a - Alongamento uniforme

Domínio 1 - Flexo-tração

Domínios 2, 3 e 4 - Flexão simples ou composta

Domínios 4a e 5 - Flexo-compressão

Reta b - Encurtamento uniforme

- Fator de segurança global: $\lambda_i := 1$

Ctrl+F9 para geração dos resultados
(a operação pode levar alguns segundos)

Figura 7.2 – Verificação da resistência – entrada de dados

7.3. Exemplos

7.3.1. Seção 1 - retangular

A seção 1 definida com armadura total $A_S = 56.52 \times 10^{-4} \text{m}^2$ será verificada para $M_{xSd} = -350 \text{kNm}$, $M_{ySd} = 0$ e $N_{Sd} = 0$ (Flexão simples reta).

As variáveis foram inicializadas com os valores: $\lambda_i = 1$, $\alpha_i = 0$, $D_i = 7$, sendo os dois últimos definidos pelo método automático, conforme apresentado na figura 7.3. Os resultados são apresentados na figura 7.4, onde aparecem $\lambda = 1.562$, $\alpha = 0$, $D = 8.212$ e os valores de R_d . A figura 7.5 mostra o esquema da seção com o traçado da linha neutra.

Inicialização das variáveis:

- Inclinação da Linha Neutra: $\alpha_i = 0$ (graus)
- Parâmetro de deformação: $D_i = 7$
- Fator Global de Segurança: $\lambda_i = 1$

Figura 7.3 – Seção 1 – retangular – Inicialização das variáveis

- Fator Global de Segurança: $\lambda = 1.562$
- Esforços obtidos:
 - Solicitantes:

$M_{xSd} = -350$	(kNm)	$M_{xRd} = -546.692$	(kNm)
$M_{ySd} = 0$	(kNm)	$M_{yRd} = -5.517 \times 10^{-15}$	(kNm)
$N_{Sd} = 0$	(kN)	$N_{Rd} = 9.255 \times 10^{-5}$	(kN)
 - Resistentes:
- Detalhes do processo:
 - Valores finais:
 - Inclinação da Linha Neutra: $\alpha = 0$ (graus)
 - Domínio do ELU: DELU = "Domínios 3 e 4 - Flexão simples / composta"
 - Parâmetro de deformação correspondente: $D = 8.212$
 - Deformação na fibra superior: $\epsilon_s = -3.5$ (por mil)
 - Deformação na fibra inferior: $\epsilon_i = 7.576$ (por mil)

Figura 7.4 – Seção 1 – retangular – Verificação da Resistência – Resultados

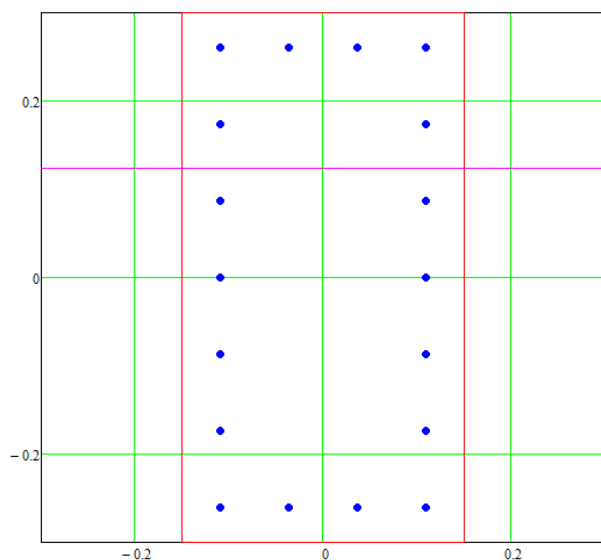


Figura 7.5 – Seção 1 – retangular – Esquema com posição da L.N.

7.3.2. Seção 2 – coroa circular

A seção 2, com armadura total de $A_S = 54.27 \times 10^{-4} \text{m}^2$, é verificada para a sollicitação $M_{xSd} = 360 \text{kNm}$, $M_{ySd} = 0$ e $N_{Sd} = 200 \text{kN}$.

As variáveis foram inicializadas com os valores: $\lambda_i = 1$, $\alpha_i = 0$, $D_i = -7$, sendo os dois últimos definidos pelo método automático. Os resultados são apresentados nas figuras 7.6 e 7.7.

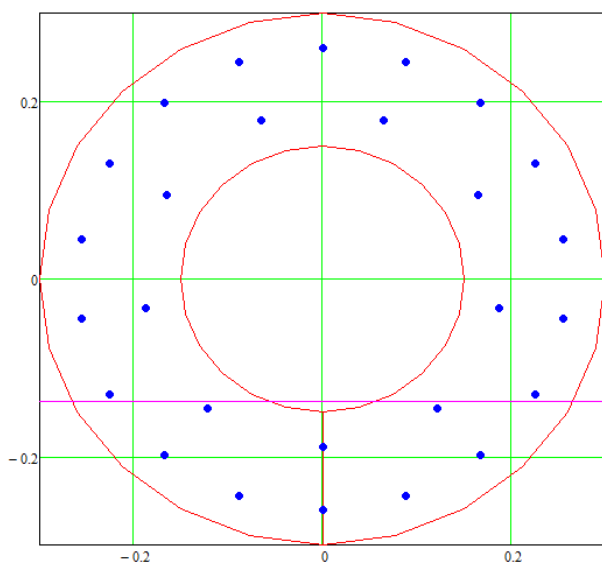


Figura 7.6 – Seção 2 – coroa circular – Esquema com posição da L.N.

- Fator Global de Segurança: $\lambda = 1.224$

- Esforços obtidos:

- Solicitantes:

$$M_{x_{Sd}} = 360 \quad (\text{kNm})$$

$$M_{y_{Sd}} = 0 \quad (\text{kNm})$$

$$N_{Sd} = 200 \quad (\text{kN})$$

- Resistentes:

$$M_{x_{Rd}} = 440.766 \quad (\text{kNm})$$

$$M_{y_{Rd}} = 7.809 \times 10^{-14} \quad (\text{kNm})$$

$$N_{Rd} = 244.87 \quad (\text{kN})$$

- Detalhes do processo:

- Valores finais:

- Inclinação da Linha Neutra: $\alpha = 0$ (graus)

- Domínio do ELU: DELU = "Domínios 3 e 4 - Flexão simples / composta"

- Parâmetro de deformação correspondente: $D = -7.691$

- Deformação na fibra superior: $\epsilon_s = 8.618$ (por mil)

- Deformação na fibra inferior: $\epsilon_i = -3.5$ (por mil)

Figura 7.7 – Seção 2 – coroa circular – Verificação da Resistência – Resultados

7.3.3. Seção 3 – paralelogramo

A seção 3, com armadura total de $A_S = 24.12 \times 10^{-4} \text{m}^2$, é verificada para a solicitação $M_{x_{Sd}} = 350 \text{kNm}$, $M_{y_{Sd}} = 0$ e $N_{Sd} = -1000 \text{kN}$. Apesar de o carregamento apresentar apenas momento em uma direção, a solicitação é de flexão composta oblíqua, devido à geometria da seção.

As variáveis foram inicializadas com os valores: $\lambda_i = 1$, $\alpha_i = 21.801^\circ$, $D_i = -7$, sendo os dois últimos definidos pelo método automático. Os resultados são apresentados na figura 7.8. Observa-se que a seção não apresenta segurança aos esforços solicitantes ($\lambda = 0.87$), esta seção será dimensionada para estes esforços no capítulo 8.

- Fator Global de Segurança: $\lambda = 0.87$

- Esforços obtidos:

- Solicitantes:

$$M_{xSd} = 350 \quad (\text{kNm})$$

$$M_{ySd} = 0 \quad (\text{kNm})$$

$$N_{Sd} = -1 \times 10^3 \quad (\text{kN})$$

- Resistentes:

$$M_{xRd} = 304.466 \quad (\text{kNm})$$

$$M_{yRd} = 1.728 \times 10^{-5} \quad (\text{kNm})$$

$$N_{Rd} = -869.903 \quad (\text{kN})$$

- Detalhes do processo:

- Valores finais:

- Inclinação da Linha Neutra: $\alpha = 22.816$ (graus)

- Domínio do ELU: DELU = "Domínios 3 e 4 - Flexão simples / composta"

- Parâmetro de deformação correspondente: $D = -9.754$

- Deformação na fibra superior: $\epsilon_s = 4.491$ (por mil)

- Deformação na fibra inferior: $\epsilon_i = -3.5$ (por mil)

Figura 7.8 – Seção 3 – paralelogramo – Verificação da Resistência – Resultados

7.3.4. Seção 4 – L

A seção 4, com armadura total $A_S = 50.24 \times 10^{-4} \text{m}^2$, é verificada para a solicitação $M_{xSd} = 208.5 \text{kNm}$, $M_{ySd} = 208.5 \text{kNm}$ e $N_{Sd} = -521.1 \text{kN}$ (FCO).

As variáveis foram inicializadas com os valores: $\lambda_i = 1$, $\alpha_i = 45^\circ$, $D_i = -7$, sendo os dois últimos definidos pelo método automático. Os resultados são apresentados nas figuras 7.9 e 7.10.

- Fator Global de Segurança: $\lambda = 1$

- Esforços obtidos:

- Solicitantes:

$$M_{x_{Sd}} = 208.5 \quad (\text{kNm})$$

$$M_{y_{Sd}} = 208.5 \quad (\text{kNm})$$

$$N_{Sd} = -521.1 \quad (\text{kN})$$

- Resistentes:

$$M_{x_{Rd}} = 208.439 \quad (\text{kNm})$$

$$M_{y_{Rd}} = 208.439 \quad (\text{kNm})$$

$$N_{Rd} = -520.948 \quad (\text{kN})$$

- Detalhes do processo:

- Valores finais:

- Inclinação da Linha Neutra: $\alpha = 45$ (graus)

- Domínio do ELU: DELU = "Domínios 3 e 4 - Flexão simples / composta"

- Parâmetro de deformação correspondente: $D = -9.299$

- Deformação na fibra superior: $\epsilon_s = 5.402$ (por mil)

- Deformação na fibra inferior: $\epsilon_i = -3.5$ (por mil)

Figura 7.9 – Seção 4 – L – Verificação da Resistência – Resultados

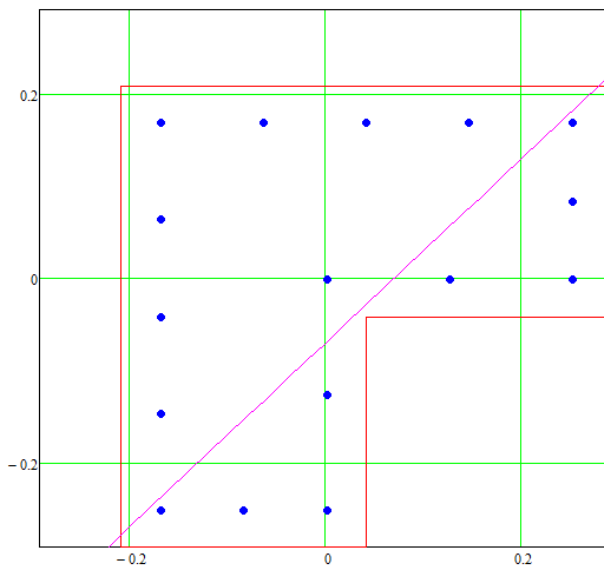


Figura 7.10 – Seção 4 – L – Esquema com posição da L.N.

8. Dimensionamento da Seção

8.1. Introdução

Para uma seção de concreto armado, com a distribuição percentual da armadura pelas barras já definida e submetida aos esforços solicitantes de cálculo $S_d = [M_{xSd} \quad M_{ySd} \quad N_{Sd}]^T$ o dimensionamento consiste na determinação da área total armadura A_s de forma que a seção apresente segurança adequada.

Seguindo-se os conceitos de segurança expostos no item 7.1 e utilizando-se, por razões de economia, o valor de $\lambda = 1$, o problema do dimensionamento pode ser equacionado pelo sistema de 3 equações não-lineares $R_d(\alpha, D, A_s) = \lambda S_d$, nas variáveis α, D e A_s (equações 8.1).

$$M_{xRd}(\alpha, D, A_s) = \lambda M_{xSd}$$

$$M_{yRd}(\alpha, D, A_s) = \lambda M_{ySd}$$

$$N_{Rd}(\alpha, D, A_s) = \lambda N_{Sd}$$

(8.1)

Em linhas gerais, a solução consiste na determinação da configuração de deformada (α e D) e a área total de armadura A_s tal que os vetor R_d tenha a mesma direção, sentido e módulo que o vetor S_d .

Na formulação do problema é necessário se impor uma restrição sobre a área de armadura, pois, matematicamente, a incógnita A_s pode assumir valores negativos para que $R_d(\alpha, D, A_s) = \lambda S_d$, com $\lambda = 1$, sejam satisfeitas.

Desta forma, para a obtenção de uma solução técnica e econômica, define-se o problema de programação matemática, nas variáveis $(\lambda, \alpha, D, A_s)$, que tem restrições de resistência dadas pelas equações 8.1, uma restrição de área mínima de armadura (A_{smin}) e restrições laterais sobre as variáveis λ, α e D . O problema é enunciado por:

minimizar λ sujeita a:

$$R_d(\alpha, D, A_S) = \lambda S_d;$$

$$A_S \geq A_{S\min};$$

$$\lambda \geq 1; -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2; -13 \leq D \leq 13.$$

(8.2)

8.2. Entrada de dados

A figura 8.1 apresenta a entrada de dados do módulo, onde devem ser informados: os esforços solicitantes $M_{x_{sd}}$, $M_{y_{sd}}$ e N_{sd} , a taxa geométrica de armadura mínima total ρ_{\min} e os valores iniciais para a inclinação da linha neutra α_i (em graus), o parâmetro de deformação D_i , e a taxa de armadura (geométrica) ρ_i . Para a inicialização de α e D , valem os mesmos métodos expostos no item 7.2. A inicialização automática de ρ não é oferecida, sendo necessário o usuário prescrever um valor. Para a inicialização de λ foi fixado um valor $\lambda = 1$.

Dimensionamento:

- Esforços solicitantes, referidos ao C.G., sistema de eixos local (vetoriais, valores de cálculo):

- Momento em torno de x: $M_{xSd} := -1500$ (kNm)

- Momento em torno de y: $M_{ySd} := 0$ (kNm)

- Esforço normal: $N_{Sd} := 0$ (kN)

- Detalhamento:

- Taxa de armadura mínima (geométrica): $\rho_{min} := 0.4$ (por cento)

- Inicialização das variáveis:

- Inclinação da L.N.: $\alpha_i := 0$ (graus) Automático

(A opção automática utiliza como valor inicial a inclinação da L.N. elástica)
($-90 \leq \alpha_i \leq 90$)

- Domínio do ELU:

- Automático
- Reta a - Alongamento uniforme
- Domínio 1 - Flexo-tração
- Domínios 2, 3 e 4 - Flexão simples ou composta
- Domínios 4a e 5 - Flexo-compressão
- Reta b - Encurtamento uniforme

- Taxa de armadura (geométrica): $\rho_i := 0.4$ (por cento)

Ctrl+F9 para geração dos resultados
(a operação pode levar alguns segundos)

Figura 8.1 – Dimensionamento – entrada de dados

8.3. Exemplos

8.3.1. Seção 1 - retangular

Para a seção 1 é dimensionada a armadura para solicitação $M_{xSd} = -350\text{kNm}$, $M_{ySd} = 0$ e $N_{Sd} = 0$.

A entrada de dados $\alpha_i = 0$ e $D_i = 7$ foi definida pelo método automático. O valor inicial para a taxa de armadura geométrica foi $\rho_i = 0.4\%$ ($\omega_i = 0.081$) (figura 8.2) e, para armadura mínima o valor $\rho_{min} = 0.4\%$ foi prescrito.

Na figura 8.3 os resultados mostram uma armadura necessária de $A_S = 33.65 \times 10^{-4} \text{m}^2$ ($\rho = 1.87\%$ e $\omega = 0.379$) para um fator de segurança global $\lambda = 1$, $\alpha = 0$, $D = 6.703$ e os valores de R_d . A figura 8.4 mostra o esquema da seção com o traçado da linha neutra.

Inicialização das variáveis:

- Inclinação da Linha Neutra: $\alpha_i = 0$ (graus)
- Parâmetro de deformação: $D_i = 7$
- Taxa de armadura mecânica: $\omega_i = 0.081$

Figura 8.2 – Seção 1 – retangular – Inicialização das variáveis

- Armadura encontrada:

- Armadura total: $A_{ST} = 33.653$ ($\times 10^{-4} \text{m}^2$)
- Taxa de armadura geométrica: $\rho = 1.87$ (por cento)
- Taxa de armadura mecânica: $\omega = 0.379$
- Fator global de segurança: $\lambda = 1$

- Esforços obtidos:

- | | | | |
|------------------|-------|------------------------------------|-------|
| - Solicitantes: | | - Resistentes: | |
| $M_{xSd} = -350$ | (kNm) | $M_{xRd} = -350$ | (kNm) |
| $M_{ySd} = 0$ | (kNm) | $M_{yRd} = -3.777 \times 10^{-14}$ | (kNm) |
| $N_{Sd} = 0$ | (kN) | $N_{Rd} = -1.029 \times 10^{-5}$ | (kN) |

- Detalhes do processo:

- Valores finais:

- Inclinação da Linha Neutra: $\alpha = 0$ (graus)
- Domínio do ELU: DELU = "Domínio 2 - Flexão simples / composta"
- Parâmetro de deformação correspondente: $D = 6.703$
- Deformação na fibra superior: $\epsilon_s = -3.292$ (por mil)
- Deformação na fibra inferior: $\epsilon_i = 10$ (por mil)

Figura 8.3 – Seção 1 – retangular – Dimensionamento – Resultados

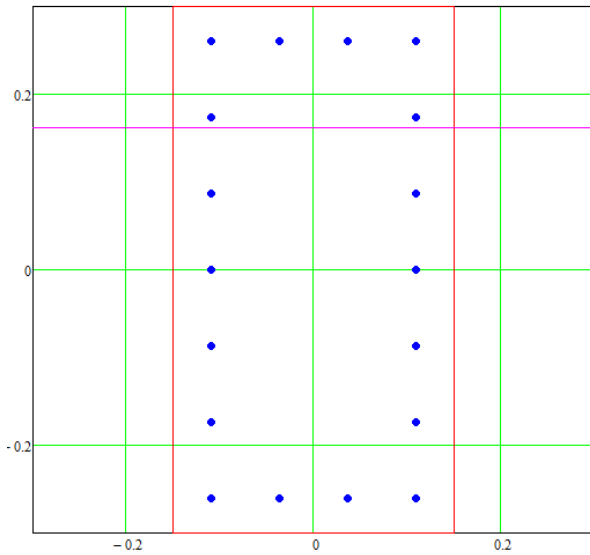


Figura 8.4 – Seção 1 – retangular – Esquema com posição da L.N.

8.3.2. Seção 2 – coroa circular

Para a seção 2 é dimensionada a armadura para solicitação $M_{xSd} = 360\text{kNm}$, $M_{ySd} = 0$ e $N_{Sd} = 200\text{kN}$.

A entrada de dados $\alpha_i = 0$ e $D_i = -7$ foi definida pelo método automático. O valor inicial para a taxa de armadura geométrica foi $\rho_i = 0.4\%$ ($\omega_i = 0.081$) e, para armadura mínima o valor $\rho_{\min} = 0.4\%$ foi prescrito. Os resultados são apresentados nas figuras 8.5 e 8.6.

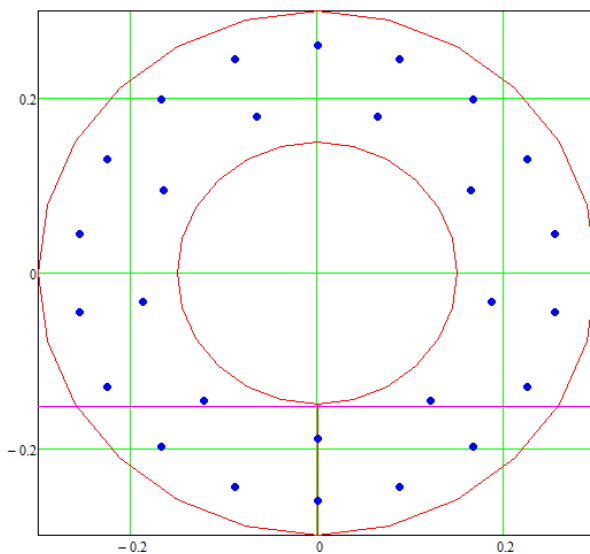


Figura 8.5 – Seção 2 – coroa circular – Esquema com posição da L.N.

- Armadura encontrada:
- Armadura total: $A_{ST} = 43.26$ ($\times 10^{-4}$ m²)
- Taxa de armadura geométrica: $\rho = 2.064$ (por cento)
- Taxa de armadura mecânica: $\omega = 0.419$
- Fator global de segurança: $\lambda = 1$
- Esforços obtidos:
- Solicitantes:

$M_{x_{Sd}} = 360$	(kNm)	- Resistentes:	
$M_{y_{Sd}} = 0$	(kNm)	$M_{x_{Rd}} = 360$	(kNm)
$N_{Sd} = 200$	(kN)	$M_{y_{Rd}} = 1.804 \times 10^{-13}$	(kNm)
		$N_{Rd} = 200$	(kN)
- Detalhes do processo:
- Valores finais:
 - Inclinação da Linha Neutra: $\alpha = 0$ (graus)
 - Domínio do ELU: DELU = "Domínios 3 e 4 - Flexão simples / composta"
 - Parâmetro de deformação correspondente: $D = -7.111$
 - Deformação na fibra superior: $\epsilon_s = 9.778$ (por mil)
 - Deformação na fibra inferior: $\epsilon_i = -3.5$ (por mil)

Figura 8.6 – Seção 2 – coroa circular – Dimensionamento – Resultados

8.3.3. Seção 3 – Paralelogramo

Para a seção 3 é dimensionada a armadura para solicitação $M_{x_{Sd}} = 350\text{kNm}$, $M_{y_{Sd}} = 0$ e $N_{Sd} = -1000\text{kN}$.

A entrada de dados $\alpha_i = 21.801^\circ$ e $D_i = -7$ foi definida pelo método automático. O valor inicial para a taxa de armadura geométrica foi $\rho_i = 0.4\%$ ($\omega_i = 0.081$) e, para armadura mínima o valor $\rho_{\min} = 0.4\%$ foi prescrito. Os resultados são apresentados nas figuras 8.7 e 8.8.

- Armadura encontrada:

- Armadura total: $A_{ST} = 30.504$ ($\times 10^{-4}$ m²)
- Taxa de armadura geométrica: $\rho = 1.22$ (por cento)
- Taxa de armadura mecânica: $\omega = 0.248$
- Fator global de segurança: $\lambda = 1$

- Esforços obtidos:

- | | | | |
|---------------------------|-------|-------------------------------------|-------|
| - Solicitantes: | | - Resistentes: | |
| $M_{x_{Sd}} = 350$ | (kNm) | $M_{x_{Rd}} = 350$ | (kNm) |
| $M_{y_{Sd}} = 0$ | (kNm) | $M_{y_{Rd}} = -7.22 \times 10^{-7}$ | (kNm) |
| $N_{Sd} = -1 \times 10^3$ | (kN) | $N_{Rd} = -1000$ | (kN) |

- Detalhes do processo:

- Valores finais:
 - Inclinação da Linha Neutra: $\alpha = 23.246$ (graus)
 - Domínio do ELU: DELU = "Domínios 3 e 4 - Flexão simples / composta"
 - Parâmetro de deformação correspondente: $D = -9.979$
 - Deformação na fibra superior: $\epsilon_s = 4.041$ (por mil)
 - Deformação na fibra inferior: $\epsilon_i = -3.5$ (por mil)

Figura 8.7 – Seção 3 – paralelogramo – Dimensionamento – Resultados

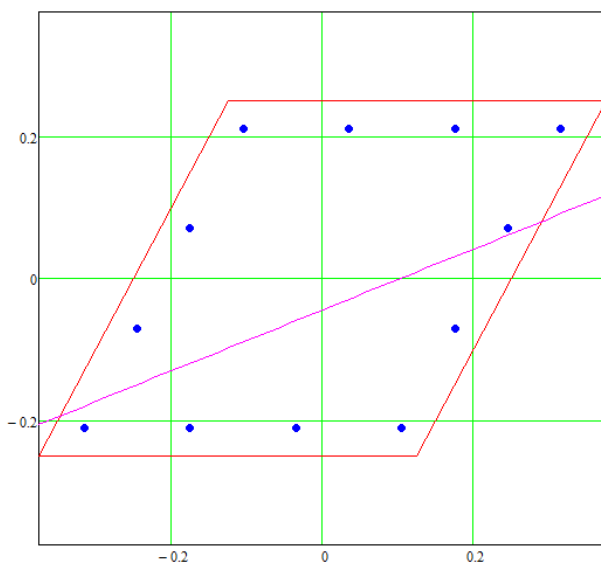


Figura 8.8 – Seção 3 – paralelogramo – Esquema com posição da L.N.

8.3.4. Seção 4 – L

Para a seção 4 é dimensionada a armadura para solicitação $M_{x_{sd}} = 208.5\text{kNm}$, $M_{y_{sd}} = 208.5\text{kNm}$ e $N_{sd} = -521.1\text{kN}$.

A entrada de dados $\alpha_i = 45^\circ$ e $D_i = -7$ foi definida pelo método automático. O valor inicial para a taxa de armadura geométrica foi $\rho_i = 0.4\%$ ($\omega_i = 0.081$) e, para armadura mínima o valor $\rho_{\min} = 0.4\%$ foi prescrito. Os resultados são apresentados nas figuras 8.9 e 8.10.

Observa-se que a armadura encontrada ($A_S = 50.26 \times 10^{-4}\text{m}^2$) é a mesma utilizada como entrada no exemplo do módulo IV ($A_S = 50.24 \times 10^{-4}\text{m}^2$), onde foi encontrado $\lambda = 1$. Ainda como comparação de resultados, na figura 8.11 é apresentada a verificação feita através do programa “Oblíqua 1.0” (UFPR) para esta seção. Observa-se que o ponto plotado está sobre a curva de interação conforme esperado ($\lambda = 1$).

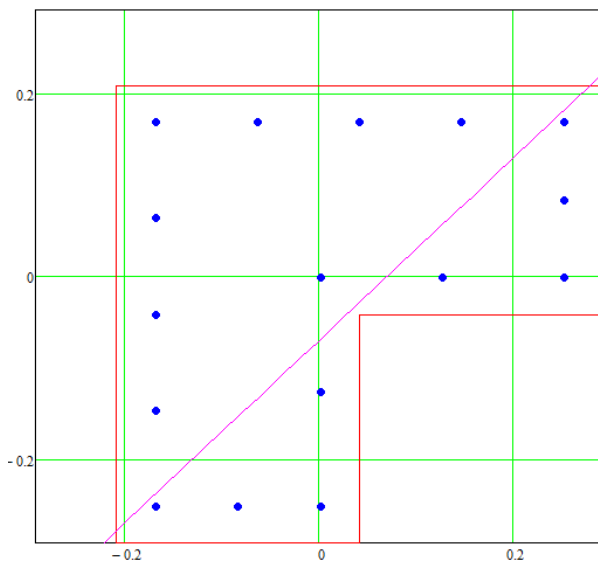


Figura 8.9 – Seção 4 – L – Esquema com posição da L.N.

- Armadura encontrada:

- Armadura total: $A_{ST} = 50.259$ ($\times 10^{-4}$ m²)

- Taxa de armadura geométrica: $\rho = 2.68$ (por cento)

- Taxa de armadura mecânica: $\omega = 0.544$

- Fator global de segurança: $\lambda = 1$

- Esforços obtidos:

- Solicitantes:

$M_{x_{Sd}} = 208.5$ (kNm)

$M_{y_{Sd}} = 208.5$ (kNm)

$N_{Sd} = -521.1$ (kN)

- Resistentes:

$M_{x_{Rd}} = 208.5$ (kNm)

$M_{y_{Rd}} = 208.5$ (kNm)

$N_{Rd} = -521.1$ (kN)

- Detalhes do processo:

- Valores finais:

- Inclinação da Linha Neutra: $\alpha = 45$ (graus)

- Domínio do ELU: DELU = "Domínios 3 e 4 - Flexão simples / composta"

- Parâmetro de deformação correspondente: $D = -9.299$

- Deformação na fibra superior: $\epsilon_s = 5.401$ (por mil)

- Deformação na fibra inferior: $\epsilon_i = -3.5$ (por mil)

Figura 8.10 – Seção 4 – L – Dimensionamento – Resultados

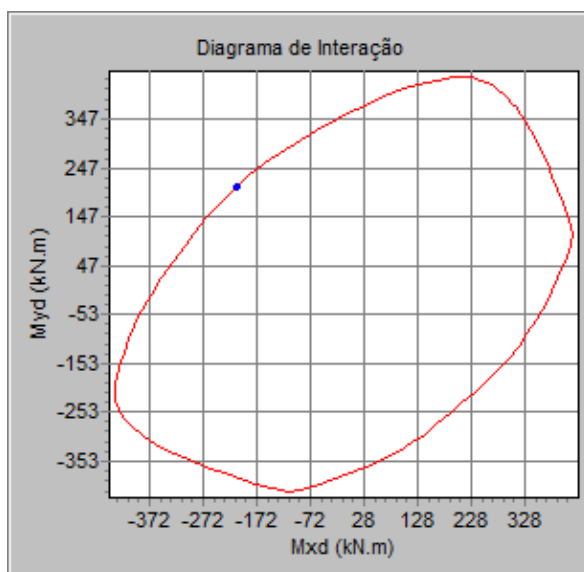


Figura 8.11 – Seção 4 – L – Verificação – Oblíqua 1.0

9. Conclusão

O traçado da superfície de resistência e curvas de interação como meio de verificação de projeto é bastante comum no problema de FCO. Com o auxílio das ferramentas desenvolvidas neste trabalho, explorando os recursos disponíveis em MathCAD, é possível a geração e a visualização da superfície tridimensional e das curvas para seções quaisquer.

A visualização da superfície de resistência de modo tridimensional aliadas com os traçados das curvas de interação nos planos $N - M_x$, $N - M_y$ e $M_x - M_y$, facilita o entendimento das técnicas e formulações de ferramentas para o problema de FCO. O processo de montagem destas superfícies e curvas abrange os conceitos de deformada da seção, domínios de ruptura (ELU) e comportamento dos materiais.

A utilização das variáveis α e D para a descrição das deformadas no ELU, permite a formulação do problema de maneira mais simples, facilitando a criação das superfícies resistentes e das curvas de interação. Além disto, esta formulação também simplifica a solução numérica do sistema não-linear (3 equações e 3 incógnitas) nos problemas de verificação e dimensionamento da seção e garantem sempre configurações deformadas no ELU, eliminando a possibilidade de soluções inviáveis.

Como observado ao longo do trabalho, os resultados obtidos com as ferramentas desenvolvidas foram bastante satisfatórios, em comparação com os resultados obtidos por outros programas de FCO e FCR.

As ferramentas de verificação e dimensionamento facilitam a obtenção de uma seção racional para seções quaisquer submetidas à FCO, o que é de grande utilidade prática.

Ficam algumas sugestões para desenvolvimento de outras ferramentas mais abrangentes, como apresentado por EBOLI (1989): otimização da distribuição da área de armadura, dada a posição das barras; o dimensionamento simultâneo para diversos casos de carga; e análise de confiabilidade de seções submetidas à FCO.

Outras ferramentas de interesse prático podem ser facilmente desenvolvidas a partir da plataforma atual. Por exemplo, introduzir armadura ativa para seções protendidas, análise de seções em serviço, considerando-se configurações deformadas livres e leis constitutivas dos materiais de interesse. A última abordagem é muito útil no estudo de pilares esbeltos, FUSCO (1981).

A plataforma de programação apresentada no MathCAD é bastante interessante para a formulação de problemas de engenharia, e foi o incentivo principal para o desenvolvimento deste trabalho. Sugere-se, porém, o desenvolvimento destas e novas ferramentas utilizando o programa MatLab, que parece ser mais adequado, principalmente na solução de problemas que envolvem um maior número de variáveis e de otimização.

Apêndice 1: Integração Numérica

Neste apêndice será descrita a técnica de integração numérica de um polinômio sobre um domínio plano Ω , sugerida por WERNER (1974).

Pela aplicação do teorema de Green, uma integral de domínio de um termo polinomial genérico pode ser transformada em uma integral de contorno do tipo:

$$\int_{\Omega} (\xi^k \times \eta^m) d\Omega = \oint_C \left(\frac{\xi^{k+1} \times \eta^m}{k+1} \right) d\eta = \sum_{i=1}^{NS} G_{km_i} \quad (A1.1)$$

Esta última pode ser discretizada pelos NS segmentos que compõem a poligonal de contorno, de forma que o termo

$$G_{km_i} = \frac{1}{k+1} \times \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} (\xi^{k+1} \times \eta^m) d\eta \quad (A1.2)$$

representa a parcela da integração sobre o segmento i , definido e orientado do vértice i ao $i+1$.

Considerando-se a parametrização das coordenadas (ξ, η) sobre este segmento i , conforme figura A1.1, definida por:

$$\eta = \eta_i + t$$

$$\xi = \xi_i + \frac{\Delta\xi_i}{\Delta\eta_i} \times t$$

Onde,

$$0 \leq t \leq \Delta\eta_i$$

$$\Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$$

$$\Delta\eta_i = \eta_{i+1} - \eta_i$$

(A1.3)

O termo G_{km_i} pode ser reescrito da forma:

$$G_{km_i} = \frac{1}{k+1} \times \int_0^{\Delta\eta} \left(\left(\xi_i + \frac{\Delta\xi_i}{\Delta\eta_i} \times t \right)^{k+1} \times (\eta_i + t)^m \right) dt$$

(A1.4)

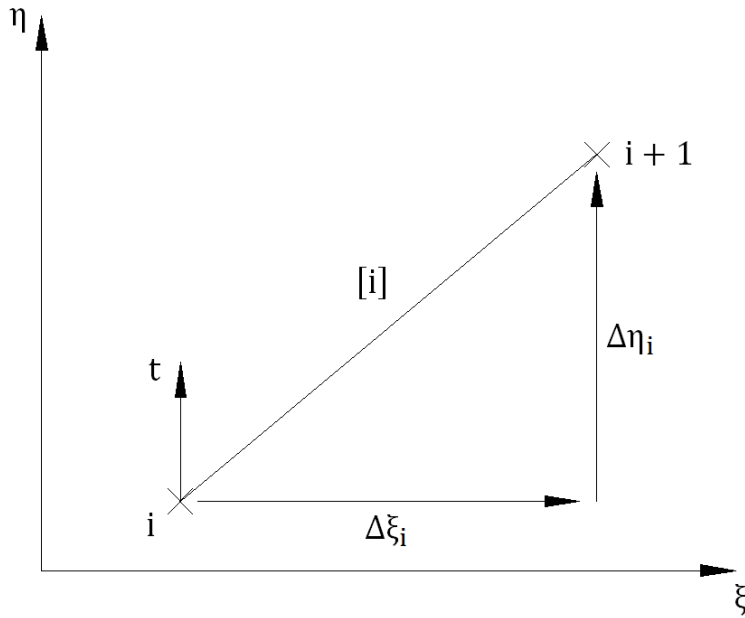


Figura A1.1 – Definição da variável paramétrica t

Apêndice 2: Propriedades Mecânicas da Seção

A2.1. Metodologia

Para o cálculo das propriedades mecânicas da seção, são utilizadas as expressões tradicionais da Resistência dos Materiais, segundo TIMOSHENKO (1984).

$$A = \int dA$$

$$Q_x = \int (y) dA$$

$$Q_y = \int (x) dA$$

$$x_c = Q_x/A \quad ; \quad y_c = Q_y/A$$

$$J_x = \int (y^2) dA$$

$$J_y = \int (x^2) dA$$

$$J_{xy} = \int (x \times y) dA$$

(A2.1)

Onde,

$A \rightarrow$ Área da seção.

$Q_x \rightarrow$ Momento estático da seção em relação ao eixo x.

$Q_y \rightarrow$ Momento estático da seção em relação ao eixo y.

$x_c, y_c \rightarrow$ coordenadas do centroide da seção.

$J_x \rightarrow$ Momento de inércia da seção em relação ao eixo x.

$J_y \rightarrow$ Momento de inércia da seção em relação ao eixo y.

$J_{xy} \rightarrow$ Produto de inércia da seção.

Para estas integrações em seções quaisquer, também será utilizada a técnica proposta por WERNER (1974), apresentada no apêndice 1.

Para o cálculo das inércias em relação ao CG da seção, faz-se necessária a utilização do teorema do eixo paralelo, segundo TIMOSHENKO (1984):

$$J = J_c + A \times d^2 \tag{A2.2}$$

Onde,

$J \rightarrow$ Momento de inércia em um eixo qualquer, paralelo a um eixo que passe pelo C.G.

$J_c \rightarrow$ Momento de inércia em um eixo que passe pelo C.G.

$d \rightarrow$ Distância entre os eixos paralelos.

Estas propriedades se referem a seção bruta de concreto no Estádio I, e não é considerada a contribuição da armadura.

A2.2. Implementação em MathCAD

A rotina que determina as propriedades mecânicas da seção realiza o somatório das integrações dos lados do contorno, utilizando a função G_{km} , apresentada no apêndice 1.

Bibliografia

ABNT, **NBR-6118 – Projeto de Estruturas de Concreto – Procedimento**, 2007.

CHEN, W.F. e SHORAKA, W.F., **Tangent Stiffness Method for Bending of Reinforced Concrete Columns**. International Association for Bridge and Structural Engineering, 1975.

EBOLI, C. R., **Dimensionamento Ótimo de Seções de Concreto Armado à Flexão Composta Oblíqua**. Tese de mestrado da Pontífica Universidade Católica, Rio de Janeiro, 1989.

FUSCO, P. B., **Estruturas de Concreto – Solicitações Normais**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S.A., 1981.

GALGOUL, N. S., **Beitrag zur Bemessung von schlanken Stahlbetonstützen für schiefe Biegung mit Achsdruck unter Kurzzeit-und Dauerbelastung**. Tese de doutorado da Universidade de Munique, 1978.

MARINO, M. A., **Seções Transversais de Concreto Armado Sujeitas a Solicitações Normais**. Curitiba: COPEL, 1979.

Parametric Technology Corporation, **MathCAD 14.0**, 2007

SANTATHADAPORN e CHEN, W.F., **Tangent Stiffness Method for Biaxial Bending**. Journal of Structural Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1972.

TIMOSHENKO, S. P. e GERE, J. E., **Mecânica dos Sólidos – vol II**. Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 1984.

UFPR, CESEC, **Oblíqua 1.0**, <http://www.cesec.ufpr.br/concretoarmado/>, 2001.

UFPR, CESEC, **Normal 1.3**, <http://www.cesec.ufpr.br/concretoarmado/>, 2001.

WERNER, H., **Schiefe Biegung Polygonal umrandeter Stahlbetonquerschnitte**. Beton- und Stahlbetonbau, 4, 1974.