

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Escola Politécnica

Departamento de Engenharia Eletrônica e de Computação

**Um Estudo de Técnicas de Anti-Reset Windup**

Autor:

---

Paola Varela Delfino

Orientador:

---

Jomar Gozzi, M. Sc.

Examinador:

---

Oswaldo Pereira Filho, M. Sc.

Examinador:

---

Lilian Kawakami Carvalho, D. Sc.

DEL

Janeiro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Escola Politécnica – Departamento de Eletrônica e de Computação

Centro de Tecnologia, bloco H, sala H-217, Cidade Universitária

Rio de Janeiro – RJ CEP 21949-900

Este exemplar é de propriedade da Universidade Federal do Rio de Janeiro, que poderá incluí-lo em base de dados, armazenar em computador, microfilmear ou adotar qualquer forma de arquivamento.

É permitida a menção, reprodução parcial ou integral e a transmissão entre bibliotecas deste trabalho, sem modificação de seu texto, em qualquer meio que esteja ou venha a ser fixado, para pesquisa acadêmica, comentários e citações, desde que sem finalidade comercial e que seja feita a referência bibliográfica completa.

Os conceitos expressos neste trabalho são de responsabilidade do(s) autor(es) e do(s) orientador(es).

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço aos meus pais, Elias e Gilvana, pelo apoio que me permitiu concluir este nível de educação, ao professor Jomar pela orientação minuciosa e paciente e aos colegas de curso, em especial Bernardo e Trevor, pelas discussões proveitosas.

## RESUMO

Este trabalho aborda o estudo de sistemas munidos de controle PID, nos quais é considerado que o sinal de controle pode sofrer saturação.

É visto como a saturação do controle pode ocasionar o fenômeno chamado de reset windup e as consequências deste fenômeno são estudadas para duas plantas específicas, sendo uma delas uma planta estável de terceira ordem e a outra o duplo integrador, que é, por sua vez, uma planta instável.

São avaliadas cinco técnicas de anti-reset windup, que têm como função mitigar os efeitos do reset windup. Elas são aplicadas nos sistemas constituídos por estas plantas e seus desempenhos são comparados.

Um estudo de estabilidade é feito para o caso do controle do duplo integrador, no qual são estabelecidas condições a serem respeitadas na escolha dos ganhos do controle PID e dos parâmetros ajustáveis de cada técnica de anti-reset windup.

Primeiramente a estabilidade é avaliada através de uma abordagem simplificada que permite tratar o sistema do duplo integrador como se este fosse linear. Posteriormente o critério de Popov é utilizado para uma reavaliação que corrobora a validade da primeira abordagem.

Palavras-Chave: saturação de controle, reset windup, anti-reset windup

## **ABSTRACT**

This work concerns a study of PID controlled systems in which the control signal is subject to saturation.

It is shown how control saturation may lead to the occurrence of the so-called reset windup phenomenon and its consequences on two specific systems, one of which is composed of a third order stable transfer function, whereas the other is composed of the double integrator, which is an instable transfer function.

Five anti-reset windup techniques, designed to prevent reset windup, are presented. They are applied to the aforementioned systems and a performance comparison is conducted.

Stability is evaluated for the double integrator control system and restrictions concerning the choice of PID gains and reset windup parameters are established.

Initially, a simplified approach to stability is used so as to allow us to deal with this system as if it were a linear one. The Popov criterion is then used in a reevaluation that corroborates the first approach.

Key-words: control saturation, reset windup, anti-reset windup

## **SIGLAS**

PID – Proporcional Integral Diferencial

PD – Proporcional Diferencial

RW – Reset Windup

ARW – Anti-reset Windup

SPLE – Semi-plano Lateral Esquerdo

SPLD – Semi-plano Lateral Direito

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
	1.1 – Tema .....	1
	1.2 – Delimitação .....	1
	1.3 – Justificativa .....	1
	1.4 – Objetivos .....	2
	1.5 – Metodologia .....	2
	1.6 – Descrição do Documento .....	2
<b>2</b>	<b>Saturação do Controle</b> .....	<b>4</b>
	2.1 – Controle PID .....	4
	2.2 – Limitação Físicas e Ocorrência da Saturação .....	7
	2.3 – Reset Windup .....	9
	2.4 – Modelagem da Saturação .....	9
<b>3</b>	<b>Consequências do Reset Windup</b> .....	<b>12</b>
	3.1 – Planta Estável .....	13
	3.1.1 – Referência Constante .....	14
	3.1.2 – Troca de Referência .....	16
	3.1.3 – Perturbação no Controle .....	19
	3.2 – Planta Instável .....	23
	3.2.1 – Primeiro Ajuste do PID .....	24
	3.2.2 – Segundo Ajuste do PID .....	27
	3.3 – Interpretação para a Instabilidade Através do Root Locus .....	29
<b>4</b>	<b>Anti Reset Windup</b> .....	<b>36</b>

4.1 – Back Calculation. . . . .	37
4.2 – Zona Morta. . . . .	38
4.3 – Integração Condicional. . . . .	40
4.4 – Técnica Proposta por C. T. Chen. . . . .	41
4.5 – External Reset. . . . .	42
<b>5 Abordagem Simplificada para a Estabilidade. . . . .</b>	<b>45</b>
5.1 – Considerações Iniciais. . . . .	45
5.1.1 – Estabilidade do Caso Sem Saturação do Controle . . . . .	46
5.1.2 – Não-linearidades Interpretadas como Ganhos Constantes. . . . .	47
5.1.3 – Equações Típicas. . . . .	49
5.2 – Back Calculation. . . . .	49
5.3 – Zona Morta. . . . .	54
5.4 – Integração Condicional. . . . .	56
4.5 – Técnica de C.T. Chen. . . . .	58
4.6 – External Reset. . . . .	59
<b>6 Estabilidade – Critério de Popov. . . . .</b>	<b>62</b>
6.1 – Critério de Popov. . . . .	62
6.2 – Adaptação do Diagrama de Blocos do Sistema. . . . .	65
6.3 – Estabilidade Assintótica. . . . .	70
6.3.1 – Estabilidade de $F^{-1}$ . . . . .	70
6.3.2 – Estabilidade de $GF$ . . . . .	71
6.4 – Estabilidade Absoluta. . . . .	73
<b>7 Comparações Entre as Técnicas. . . . .</b>	<b>78</b>
7.1 – Planta Estável. . . . .	78

7.2 – Duplo Integrador. ....	83
<b>8 Conclusões. ....</b>	<b>92</b>
<b>Bibliografia. ....</b>	<b>95</b>
<b>Apêndice A – Critério de Hurwitz. ....</b>	<b>96</b>

# Lista de Figuras

2.1 – Controlador PID e planta a ser controlada. . . . .	4
2.2 – Controlador PID. . . . .	4
2.3 – Comportamento da posição de uma válvula, do seu controle e da temperatura. . . . .	7
2.4 – Planta controlada por um PID e com possível saturação do controle. . . . .	10
2.5 – Saturação. . . . .	10
3.1 – Planta estável de 3ª ordem controlada por um PID. . . . .	13
3.2 – Simulação para a referência $0.5 u(t)$ . . . . .	15
3.3 – Simulação para a referência $u(t)$ . . . . .	15
3.4 – Simulação para a referência $0.5 u(t) - u(t - 20)$ . . . . .	17
3.5 – Simulação para a referência $u(t) - 2 u(t - 20)$ . . . . .	17
3.6 – Simulação para a referência $2 u(t) - 4 u(t - 20)$ . . . . .	18
3.7 – Controle perturbado pelo pulso $d = -u(t - 20) + u(t - 40)$ . . . . .	20
3.8 – Controle perturbado pelo pulso $d = -0.75 [u(t - 20) + u(t - 40)]$ . . . . .	20
3.9 – Controle perturbado pelo pulso $d = -0.5 [u(t - 20) + u(t - 40)]$ . . . . .	21
3.10 – Duplo integrador controlado por um PID. . . . .	23
3.11 – Resposta ao degrau unitário para o caso linear do primeiro ajuste do PID . . . . .	24
3.12 – Simulação para a referência $0.5 u(t)$ . . . . .	25
3.13 – Simulação para a referência $u(t)$ . . . . .	25
3.14 – Simulação para a referência $1.5 u(t)$ , com saturação do controle . . . . .	26
3.15 – Resposta ao degrau unitário para o caso linear do segundo ajuste do PID . . . . .	27
3.16 – Simulação para a referência $1.5 u(t)$ – A resposta não diverge para este ajuste. . . . .	28
3.17 – Rootlocus do controle PID (1º ajuste) em série com o duplo integrador . . . . .	30
3.18 – Root locus do controle PID (2º ajuste) em série com o duplo integrador . . . . .	31

3.19 – Root locus do controle PD em série com o duplo integrador – Sempre estável em malha fechada. . . . .	32
3.20 – Root locus do controle PID em série com a planta estável – Sempre estável em malha fechada. . . . .	33
3.21– Simulação da planta marginalmente estável para a referência $50. u(t)$ . . . .	34
3.22 – Root locus do controle PID em série com a planta marginalmente estável – Sempre estável em malha fechada. . . . .	35
4.1 – Back-calculation num sistema controlado por PID. . . . .	37
4.2 – Zona morta. . . . .	38
4.3 – Técnica da zona morta num sistema controlado por PID. . . . .	39
4.4 – Integração condicional num sistema controlado por PID. . . . .	40
4.5 – Técnica proposta por C. T. Chen num sistema controlado por PID . . . . .	41
4.6 – External Reset. . . . .	42
4.7 – Saída do filtro $y(t)$ do filtro do external reset, para $sat = \tau = 1$ . . . . .	44
5.1 – Saturação interpretada como um ganho $\frac{w}{v}$ . . . . .	47
5.2 – Zona morta interpretada como um ganho $\frac{y_{zm}}{v}$ . . . . .	48
5.3 – Estrutura básica dos sistemas analisados nesse capítulo. . . . .	48
5.4 – PID com back-calculation no controle do duplo integrador. . . . .	49
5.5 – Resultado estável para $r = 100 u(t)$ quando $\frac{1}{t_t} = 0.046$ . . . . .	52
5.6 – PID com a técnica da zona morta no controle do duplo integrador. . . . .	54
5.7 – PID com integração condicional no controle do duplo integrador. . . . .	56
5.8 – Resultado estável para $r = 100 u(t)$ quando $sat_i = \frac{sat}{k_p} = 0.0909$ . . . . .	57
5.9– PID com a técnica de C. T. Chen no controle do duplo integrador. . . . .	58
5.10 – Resultado estável para $r = 100 u(t)$ . . . . .	59
5.11 – PID com external reset no controle do duplo integrador. . . . .	59

5.12 – Resultado estável para $r = 100 u(t)$ quando $k_2 = 1.01$ . . . . .	61
6.1 – Representação de um sistema sobre o qual o critério de Popov pode ser aplicado. . . . .	63
6.2 – Setor $(0,k)$ do plano $e \times \Phi(e)$ , hachurado. . . . .	63
6.3 – Realimentação feita estabilizar a planta instável e permitir a utilização do critério de Popov . . . . .	65
6.4 – Diagrama de blocos original. . . . .	66
6.5 – Primeira alteração - Ponto de tomada do sinal de controle $w$ é alterado. . . . .	66
6.6 – PID é aberto para ressaltar a mudança que será feita sobre a realimentação de ganho $\frac{1}{t_t}$ , do back-calculation. . . . .	67
6.7 – Ramo de realimentação do back-calculation tem seu ponto de chegada alterado e, conseqüentemente, seu ganho também. . . . .	68
6.8 – PID é novamente fechado e o ganho do back-calculation é chamado de H. . . . .	68
6.9 – PID é movido de sua posição original para posições equivalentes. . . . .	69
6.10 – Manipulações algébricas permitiram condensar a representação do diagrama da figura 6.9. . . . .	69
6.11 – Bloco F é movido de sua posição original para posições equivalentes. . . . .	70
6.12 – F é novamente movido para posições equivalentes. . . . .	70
6.13 – GF é estabilizada através da realimentação de $\alpha$ . . . . .	72
6.14 – Diagrama de Nyquist modificado para $\frac{1}{t_t} = 0.046$ . . . . .	75
6.15 – Saturação no pertence ao setor $(0,\infty)$ . . . . .	76
6.16 – Diagrama de Nyquist modificado para $\frac{1}{t_t} = 0.044$ . . . . .	76
7.1 – Resposta da planta estável para o back-calculation. . . . .	79
7.2 – Resposta da planta estável para a técnica da zona morta. . . . .	79
7.3 – Resposta da planta estável para a técnica de integração condicional. . . . .	80
7.4 – Ramo integral para a técnica de integração condicional. . . . .	80

7.5 – Resposta da planta estável para a técnica de C. T. Chen . . . . .	81
7.6 – Resposta da planta estável para o external reset. . . . .	82
7.7 – Primeira resposta do duplo integrador para o back-calculation. . . . .	84
7.8 – Respostas para diferentes valores de $\frac{1}{t_t}$ , para $r = 18.4 \cdot u(t)$ . . . . .	85
7.9 – Segunda resposta do duplo integrador para o back-calculation. . . . .	86
7.10 – Resposta para dois valores de $\frac{1}{t_t}$ , para $r = 24 \cdot u(t)$ . . . . .	87
7.11 – Resposta do duplo integrador para a técnica da zona morta. . . . .	87
7.12 – Primeira resposta do duplo integrador para a integração condicional com $sat_i = 0.0909$ . . . . .	88
7.13 – Respostas do duplo integrador para a integração condicional para três valores de $sat_i$ . . . . .	89
7.14 – Resposta da planta estável para a técnica da zona morta. . . . .	89
7.15 – Resposta do duplo integrador para o external reset. . . . .	90

# Lista de Tabelas

3.1 –Valores dos ganhos do controle PID para a planta estável de 3 <sup>a</sup> ordem . . . . .	14
3.2 –Tempos de assentamento pós-perturbação e comparação com o tempo de assentamento normal . . . . .	22
3.3 –Primeiro ajuste do controle PID para o duplo integrador. . . . .	24
3.4 –Segundo ajuste do controle PID para o duplo integrador. . . . .	27
5.1 – Resultados de estabilidade para mais degraus de referência. . . . .	53
7.1 – Resumo dos resultados obtidos para a planta estável. . . . .	82
7.2 – Resumo dos resultados obtidos para o duplo integrador. . . . .	91

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 – Tema

Este trabalho aborda o fenômeno do reset windup, através do estudo de sistemas não-lineares com saturação do controle.

### 1.2 – Delimitação

Este é um trabalho da área de sistemas não-lineares, que aborda o funcionamento de sistemas com controle PID que podem sofrer saturação do controle. Serão estudados dois sistemas específicos, o primeiro deles composto por uma planta estável de terceira ordem e o segundo, pelo duplo integrador.

### 1.3 – Justificativa

Não-linearidades são representações de características comumente encontradas nos sistemas de controle utilizados na prática. Frequentemente, as não-linearidades podem ser desprezadas, assim como é feito no estudo de sistemas lineares. Porém, em algumas situações, os efeitos não-lineares acarretam em distorções muito significativas em relação ao que é apresentado por modelos lineares. Desta forma, o estudo de sistemas não-lineares nos oferece soluções para problemas comuns que são desconsiderados no estudo de sistemas lineares.

Uma característica particularmente importante em sistemas de controle é a limitação dos atuadores que pode ser modelada por uma característica não-linear do tipo saturação. Interessa, neste trabalho, avaliar os problemas decorrentes dos atuadores em saturação. Este tipo de estudo nos permite entender e solucionar os danos decorrentes do fenômeno do reset windup, que pode ocorrer em consequência da saturação.

## **1.4 – Objetivos**

O objetivo deste trabalho é realizar um estudo sobre as consequências do reset windup e sobre como as técnicas de anti-reset windup são capazes de coibir os efeitos danosos deste fenômeno.

## **1.5 – Metodologia**

A ocorrência do reset windup é estudada através da utilização de modelos teóricos implementados e simulados no MatLab. Uma primeira abordagem para o estudo de estabilidade utilizou um artifício de simplificação no qual não-linearidades são interpretadas como ganhos constantes e a aplicação do critério de Hurwitz. A segunda abordagem para o estudo de estabilidade utilizou o critério de Popov.

## **1.6 – Descrição do Documento**

O capítulo 2 se inicia com uma breve revisão de controle PID. Em seguida, um exemplo de controle de temperatura é utilizado para ilustrar a ocorrência da saturação do controle, para então entendermos o fenômeno do reset windup. Por fim, é apresentado o modelo que representa a saturação, que é utilizado ao longo de todo o trabalho para representar uma limitação de atuação.

No capítulo 3 dois sistemas são estudados: um deles composto por uma planta estável e o outro por uma planta instável. Estes sistemas são avaliados para diferentes entradas de referência e o fenômeno do reset windup é observado para cada um deles.

No capítulo 4 são apresentadas as cinco técnicas de anti-reset windup, que têm como função coibir os efeitos danosos do reset windup.

No capítulo 5 as técnicas apresentadas no capítulo 4 são utilizadas num estudo mais aprofundado do sistema composto pela planta instável, cujo enfoque é a garantia de estabilidade.

No capítulo 6 a estabilidade proporcionada pelo anti-reset windup ao sistema composto pela planta instável é reavaliada através da utilização do critério de Popov.

No capítulo 7 um estudo comparativo de desempenho das técnicas de anti-reset windup é realizado para ambos os sistemas da planta estável e instável.

No capítulo 8 é apresentado um resumo do trabalho.

# Capítulo 2

## Saturação e Reset Windup

Este capítulo inicia-se com uma breve revisão teórica sobre o controle PID. Em seguida, um exemplo será utilizado para visualizarmos como o controle saturado pode ocasionar a ocorrência do fenômeno conhecido como reset windup, no qual a parcela integral do controle PID pode assumir valores que atrapalham o bom funcionamento de alguns sistemas.

### 2.1 – Controle PID

O controlador PID é o controlador mais comumente utilizado e pode ser implementado de algumas formas diferentes. A figura 2.1 mostra seu posicionamento numa malha fechada de controle.

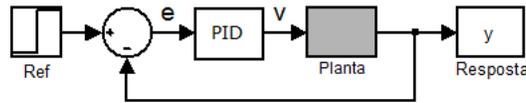


Figura 2.1: Controlador PID e planta a ser controlada

Neste trabalho, será utilizada a configuração do controlador PID apresentada na figura abaixo.

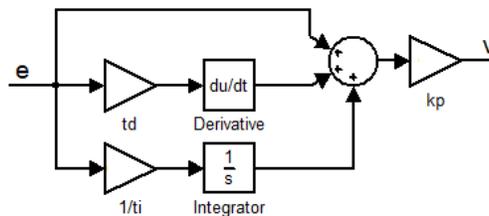


Figura 2.2: Controlador PID

Podemos ver que o sinal de controle  $v$  é o resultado da soma das três parcelas proporcional, integral e diferencial que, por sua vez, são funções do erro. Esta soma é descrita pela equação abaixo, na qual  $k_p$  representa a constante de ganho proporcional,  $t_d$ , a constante de tempo derivativo e  $t_i$ , a constante de tempo integral.

$$v(t) = k_p \left( e(t) + t_d \cdot \frac{de(t)}{dt} + \frac{1}{t_i} \cdot \int_0^t e(\tau) d\tau \right) \quad (1.1)$$

Cada parcela do controle tem uma função distinta. A parcela proporcional é a mais primordial delas e atua no sentido de diminuir a diferença entre a saída e a referência do sistema através da realimentação proporcional do erro. Quanto maior for o erro, maior será o valor do controle proporcional, ou seja, maior será o esforço do controle.

Na prática, o controle pode sofrer algumas perturbações que tenham como consequência erros de regime permanente, para os quais o controle puramente proporcional não garante solução. Nestes casos, faz-se necessário também o uso do controle integral, que é capaz de fazer com que esse erro se anule.

Para entendermos a ação do controle integral, suponhamos que a resposta de um sistema com controle somente proporcional tenha assentado com erro de regime permanente. O erro, neste caso, é uma constante que chamaremos de  $e_0$  e, adaptando a equação (1.1), temos que

$$v = k_p \cdot e_0, \quad k_p > 0$$

Podemos ver pela equação acima que, nesta situação, o controle  $v$  se manterá constante, fazendo com que a situação de erro de regime se perpetue, dado que o controle continuará a fornecer o valor que leva a resposta a assentar com erro.

Supondo  $v$  constante ao adicionarmos o controle integral, temos que

$$v = k_p \left( e_0 + \frac{e_0}{t_i} \cdot t \right)$$

No entanto, como  $e_0$  é não nulo quando há erro de regime, a equação acima claramente mostra que  $v$  não se manterá constante nesta situação, impedindo que o sistema estabilize com erro. Se a resposta convergir, situação na qual o controle deve ser constante, ela o fará com erro nulo, dado que para que  $v$  seja constante,  $e_0$  deve ser nulo.

Além das parcelas proporcional e integral temos a parcela derivativa, que pode ser interpretada como um controle que é proporcional à predição da resposta do sistema  $t_d$  instantes no futuro, se considerarmos a seguinte expansão em Taylor do sinal de erro

$$e(t + t_d) \approx e(t) + t_d \cdot \frac{de(t)}{dt}$$

e o controle  $v$  no tempo para um controlador PD

$$v = k_p \left( e(t) + t_d \cdot \frac{de(t)}{dt} \right).$$

No caso de um controle puramente proporcional, alterações no valor da variável de controle  $v$  não afetam instantaneamente a resposta do sistema por causa do atraso causado pela dinâmica da planta, o que pode levar o sistema à instabilidade. Ao agir como um preditor do sentido do controle, a adição da parcela derivativa proporciona uma ação mais rápida sobre a resposta, auxiliando na melhoria do comportamento transitório e na convergência da mesma.

Outra interpretação da ação do controle derivativo sobre a estabilidade pode ser feita se pensarmos no root locus de um sistema em malha fechada. A inserção da parcela derivativa no controle adiciona um zero no SPLE do plano complexo, atraindo o traçado para este semi-plano e proporcionando a possibilidade de estabilização para uma planta com pólos instáveis.

Em relação à escolha dos parâmetros  $k_p$ ,  $t_d$  e  $t_i$ , ela pode ser feita por tentativa e erro, como será feito neste trabalho, ou através de métodos de ajuste como os de Ziegler-Nichols para plantas estáveis.

Mais sobre controle PID pode ser visto em [1].

## 2.2 – Limitações Físicas e Ocorrência da Saturação do Controle

Quando uma malha de controle tal como a da figura 2.1 é implementada fisicamente, um elemento final de controle é o mecanismo responsável por modificar o valor da resposta de acordo com o sinal de saída do controlador. Tal elemento é em geral constituído por um atuador e pelo dispositivo acionado pelo atuador. Bombas, motores, resistências elétricas, chaves de posição e válvulas são exemplos de elementos finais de controle [2].

Dado que os atuadores operam somente dentro de um alcance limitado de valores, a variável  $v$  gerada pelo controlador pode assumir valores impossíveis de serem reproduzidos por eles. O controlador pode gerar valores que, por exemplo, exijam que uma válvula se feche mais mesmo que ela já esteja completamente fechada, como será ilustrado adiante.

Nesta situação, na qual o controle gera valores fisicamente inconsistentes e exige além do que o elemento final pode atuar, dizemos que o controle está saturado. Isto ocorre porque o controlador é função apenas do erro  $e$  e desconhece as limitações físicas encontradas na prática.

O exemplo que segue, baseado em [3], ilustra melhor esta ideia.

Consideremos uma válvula que pode se mover de forma a diminuir ou aumentar a pressão dentro de um tanque. O gráfico da figura 2.3 ilustra a descrição que segue.

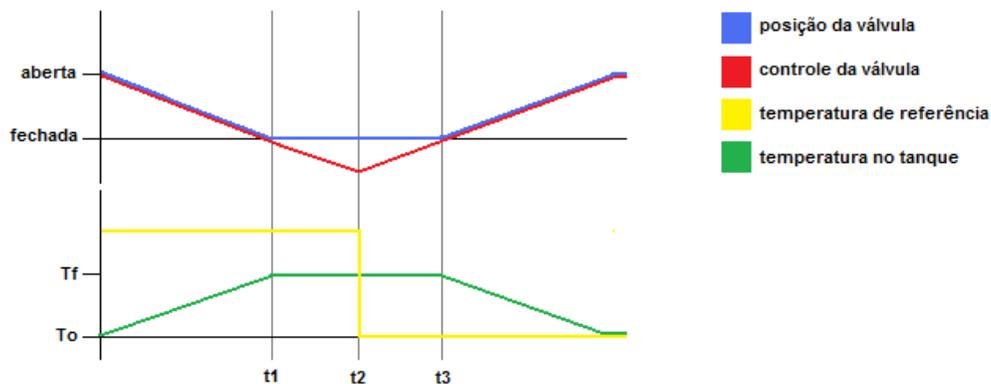


Figura 2.3: Comportamento da posição de uma válvula, do seu controle (acima) e da temperatura (abaixo).

Suponha que queiramos elevar a temperatura dentro deste tanque de  $T_0$  para uma temperatura de referência  $T_{ref}$  e, portanto, a válvula é fechada até o instante  $t_1$  de forma a elevar a pressão e, conseqüentemente, a temperatura.

Em  $t_1$  a válvula está totalmente fechada, mas a temperatura final dentro do tanque é  $T_f$ , que é menor que  $T_{ref}$ . A consequência disto é que o erro, que é a diferença entre  $T_{ref}$  e a temperatura no tanque, não se anula.

Um erro não nulo faz com que o controle continue se esforçando para elevar a temperatura à  $T_{ref}$ . O controlador PID desconhece a limitação física da válvula e gera valores que comandam que ela feche ainda mais, mesmo ela já estando fechada. Isto pode ser visto acontecer entre  $t_1$  e  $t_2$ , quando o valor do controle se encontra abaixo do valor no qual a válvula está fechada. Neste intervalo, no qual o valor do controle continua diminuindo e se distanciando da faixa de valores fisicamente consistentes, diz-se que o controle está se carregando.

Em  $t_2$ , a temperatura de referência muda de volta para  $T_0$  e o controle troca de sentido para acompanhar a referência. No entanto, como o controle havia se carregado até  $t_2$ , ele demora de  $t_2$  a  $t_3$  para se descarregar e, desta forma, assumir valores fisicamente consistentes e mover de fato a válvula. Em outras palavras, há um atraso de resposta correspondente ao tempo necessário para que o controle se descarregue.

Em suma, neste exemplo, o controle esteve saturado entre  $t_1$  e  $t_2$ , causando um atraso de  $t_3 - t_2$  entre a mudança da temperatura de referência e o início da atuação sobre a válvula.

Atrasos na resposta não são, no entanto, a única má consequência sobre a resposta de um sistema que a saturação do controle pode causar, como será visto posteriormente neste trabalho.

## 2.3 – Reset Windup

O exemplo da válvula de pressão nos permitiu visualizar como o controle pode assumir valores que se distanciam de valores fisicamente consistentes ou, em outras palavras, carregar-se.

Voltando a considerar o controlador PID representado na figura 2.2, temos que o controle  $v$  é o resultado da soma das três parcelas proporcional, integral e derivativa. Sabemos de imediato que apenas a parcela integral do controle é capaz de crescer indefinidamente e, conseqüentemente, fazer com que o controle  $v$  se carregue.

Devido ao fato do controle integral ser a parcela do controle que de fato se carrega, o fenômeno no qual  $v$  cresce além da capacidade de atuação do elemento final de controle é chamado de integral windup ou reset windup, como será chamado neste trabalho.

É importante entender que o reset windup é uma consequência da saturação do controle mas que nem sempre estes dois fenômenos estão atrelados. Para que isto fique claro, considere o caso no qual o controle está saturado e ainda assim a resposta rastreia a referência corretamente. Neste caso, o erro realimentado no sistema seria nulo e, conseqüentemente, não haveria reset windup.

## 2.4 – Modelagem da Saturação

Entenderemos, agora, como a limitação física de um atuador pode ser modelada, para fins de estudo, através do bloco de saturação. Este bloco será utilizado para quase todas as simulações deste trabalho, a não ser para as simulações de caso linear, que representam a situação ideal na qual não o controle não sofre saturação.

No diagrama da figura 2.4, temos novamente a representação de uma planta controlada por um controlador PID e, desta vez, representamos que o controle pode sofrer saturação. O bloco de saturação recebe o controle ideal e fornece à planta um controle com valor físico consistente, ou seja, que tenha valores contidos dentro da faixa de operação do atuador.

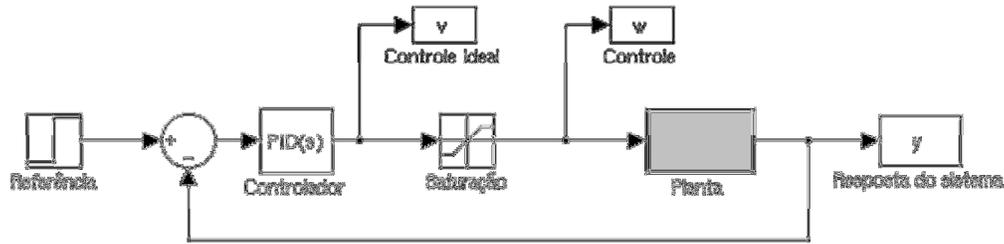


Figura 2.4: Planta controlada por um PID e com possível saturação do controle.

O controle gerado pelo PID é representado pela variável  $v$  que, a partir de agora, será chamado de controle ideal. Pode-se dizer que esta variável representa a intenção do controle. Ela representa o valor que seria passado ao elemento final de controle caso não houvesse limitações de atuação sobre os elementos finais de controle.

Representando a limitação de atuação, temos em seguida, na malha da figura 2.4, o bloco de saturação. Ao passar por este bloco,  $v$  se transforma no controle que de fato é aplicado à planta, representado pela variável  $w$ .

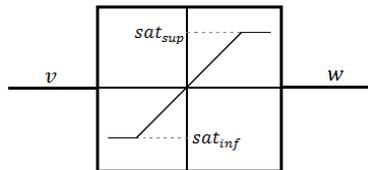


Figura 2.5: Saturação.

A transformação de  $v$  em  $w$  ocasionada pela saturação é dada por:

$$w = \begin{cases} sat_{inf}, & \text{se } v \leq sat_{inf} \\ v, & \text{se } sat_{inf} < v < sat_{sup} \\ sat_{sup}, & \text{se } v \geq sat_{sup} \end{cases}$$

Em prol da simplicidade, neste trabalho será utilizado  $|sat_{inf}| = sat_{sup} = sat$ . Desta forma, o modelo a ser utilizado nos capítulos a seguir se resume a

$$w = \begin{cases} -sat, & \text{se } v < -sat \\ v, & \text{se } |v| < sat \\ sat, & \text{se } v > sat \end{cases}$$

No capítulo seguinte, uma planta instável e outra estável serão utilizadas para compor o sistema representado pelo diagrama da figura 2.4 e, para cada um destes casos,

a situação de controle saturado será forçada através da manipulação dos sinais de referência. Estudaremos, então, as consequências do reset windup para as duas plantas escolhidas.

# Capítulo 3

## Consequências do Reset Windup

Neste capítulo serão analisadas as possíveis consequências da saturação do controle sobre dois sistemas com controle PID, cada um deles composto por plantas de características dinâmicas distintas entre si. No primeiro sistema a ser estudado é utilizada uma planta estável e no segundo, uma planta instável.

Para a planta estável, serão conduzidos três tipos de simulação: primeiramente, será utilizada uma referência constante; em seguida, a referência constante sofrerá uma troca de valor num determinado momento; por último, teremos uma simulação na qual um pulso de perturbação será adicionado ao controle. Já para a planta instável serão feitas apenas simulações com referência constante, sem perturbação do controle.

Para todos os casos supracitados, exceto aquele no qual o controle é perturbado, a saturação do controle será forçada através do aumento da amplitude da referência. Veremos então quais danos são causados às respostas quando há saturação. Veremos, ainda, que é possível que o controle esteja saturado e que o reset windup não ocorra.

Uma análise adicional será realizada utilizando o método do lugar das raízes, que apesar de ser uma ferramenta utilizada no estudo de sistemas lineares, nos fornecerá uma interpretação do problema causado pelo reset windup sobre o duplo integrador. Esta análise nos conduzirá, por fim, à possibilidade de classificarmos qualquer planta numa dentre duas categorias, no que diz respeito ao tipo de dano causado pelo reset windup.

### 3.1 – Planta Estável

A planta estável escolhida para o estudo seguinte é representada pela função de transferência  $\frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$ , que possui uma resposta monótona a uma referência degrau, característica frequentemente encontrada nos sistemas de controle industriais.

Foi escolhida uma planta de terceira ordem, em detrimento de uma de segunda, porque é desejável que a planta sob estudo possa ser instabilizada em malha fechada. Caso contrário, seria impossível perceber uma possível divergência da resposta, ainda que o reset windup fosse capaz de causar este tipo de dano.

Considere agora o sistema representado abaixo, na figura 3.1.

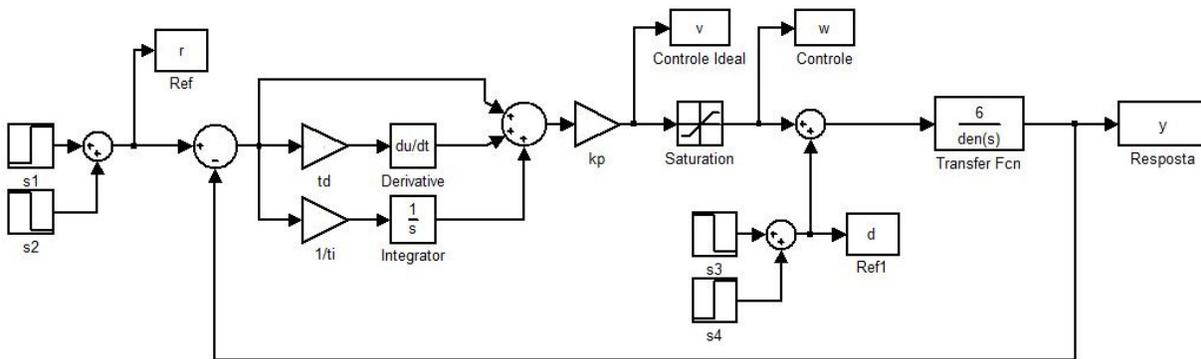


Figura 3.1: Planta estável de 3ª ordem controlada por um PID

A planta é controlada por um PID, ajustado por tentativa e erro, conforme descrito na tabela abaixo. A referência é gerada através da soma de dois degraus para que seja possível realizar uma troca no valor da mesma, quando isto for pertinente. O controle pode ser perturbado pelo sinal  $d$ , também gerado a partir da soma de dois degraus, de forma a obtermos um pulso de perturbação. Os limites inferior e superior da saturação valem  $-1$  e  $1$ , respectivamente.

Tabela 3.1: Valores dos ganhos do controle PID para a planta estável de 3ª ordem.

Parâmetros do Controle PID	Valor
$k_p$	0.5
$\frac{1}{t_i}$	0.2
$t_d$	1

A seguir, o sistema descrito é simulado para uma referência constante e, posteriormente, para uma situação onde há troca do valor da referência constante. Em ambos os casos, a amplitude da referência é inicialmente escolhida de tal forma que não haja saturação do controle. Com o aumento da amplitude, o controle é então forçado a uma situação de saturação, na qual seremos capazes de identificar possíveis danos à resposta. Por fim, o sistema será simulado para o caso no qual o controle sofre uma perturbação externa.

### 3.1.1 – Referência Constante

Abaixo, na figura 3.2, temos a resposta do sistema sob estudo para a referência constante  $0.5 \cdot u(t)$ , aonde  $u(t)$  é a função degrau unitário, que é suficientemente pequena para que não ocorra saturação do controle. Em seguida, na figura 3.3, temos a resposta para a referência  $u(t)$  que, por sua vez, faz com que o controle sature.

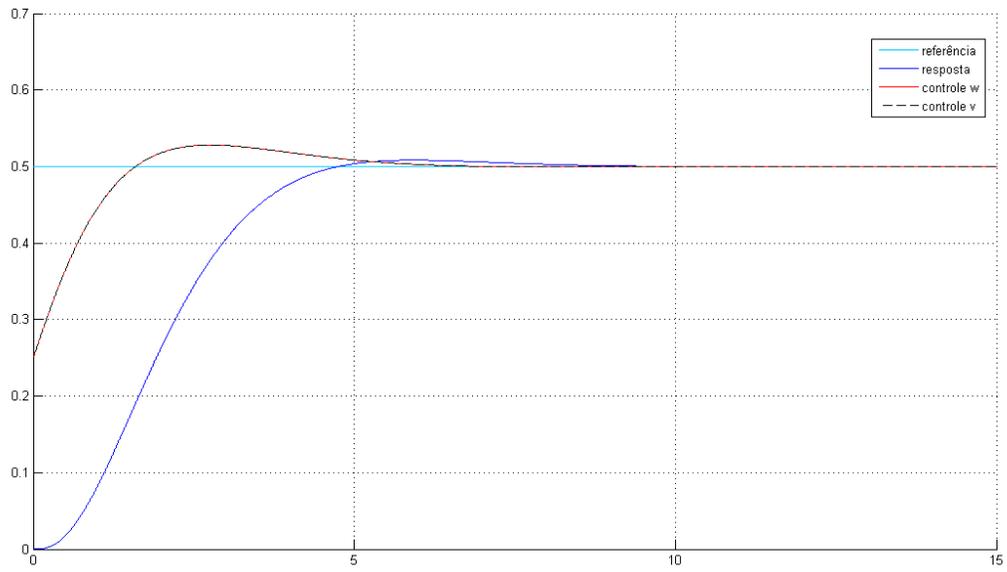


Figura 3.2: Simulação para a referência  $0.5 u(t)$ .

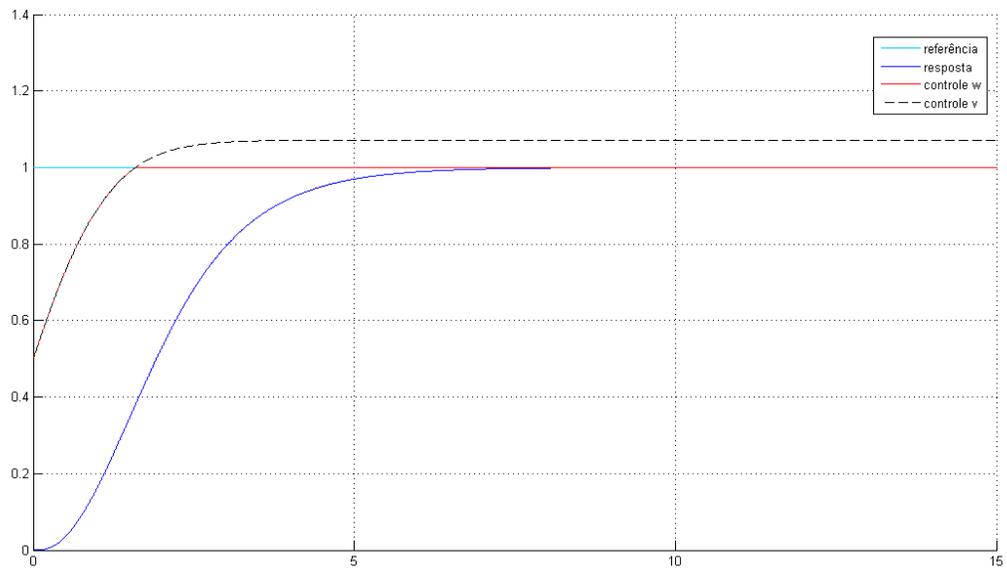


Figura 3.3: Simulação para a referência  $u(t)$ .

Comparando as duas respostas acima, vemos que, quando o controle satura, a resposta adquire um tempo de subida levemente maior. Além disso, o pequeno overshoot existente na primeira simulação é eliminado. Isto acontece porque o controle, ao saturar no valor unitário, deixa de ultrapassar o valor de referência, impossibilitando que a resposta também o ultrapasse.

Estas alterações não podem ser consideradas danos à resposta do sistema, a não ser numa situação na qual se desejasse obter o menor tempo de subida possível. Numa outra situação na qual a total ausência de overshoot fosse uma prioridade, elas poderiam, na realidade, ser consideradas benéficas.

A resposta apresentada na figura 3.3 se mantém bem comportada porque o fenômeno do reset windup não ocorre, a despeito da saturação do controle. Isso se deve ao fato do controle, ainda que saturado, ser capaz de fornecer uma resposta convergente que gera, conseqüentemente, um erro nulo que estabiliza a saída do integrador.

Numa situação de reset windup, o sinal de controle  $v$  não se manteria constante no regime permanente. Dado que este sinal é composto pelo somatório dos três valores de controle, ele deveria adotar um comportamento crescente, já que o controle integral estaria se carregando ao longo do tempo.

O fato do controle  $v$  se manter constante acima do nível da saturação nos motiva a investigar o que ocorreria caso a referência tivesse seu valor trocado. Possivelmente, o tempo que levaria para este sinal descer e voltar à faixa linear de controle poderia acarretar num atraso no chaveamento da resposta.

### **3.1.2 – Troca de Referência**

Alteremos agora a referência, de modo que haja uma troca do seu valor em  $t = 20$ . Ao invés de um degrau constante teremos, então, a soma de degraus  $0.5 \cdot u(t) - u(t - 20)$  como referência para a simulação da figura 3.4. Em seguida, na figura 3.5, vemos a resposta do sistema quando a referência tem sua amplitude dobrada, passando então a ser representada pela soma de degraus  $u(t) - 2 \cdot u(t - 20)$ , ocasionando a saturação do controle.

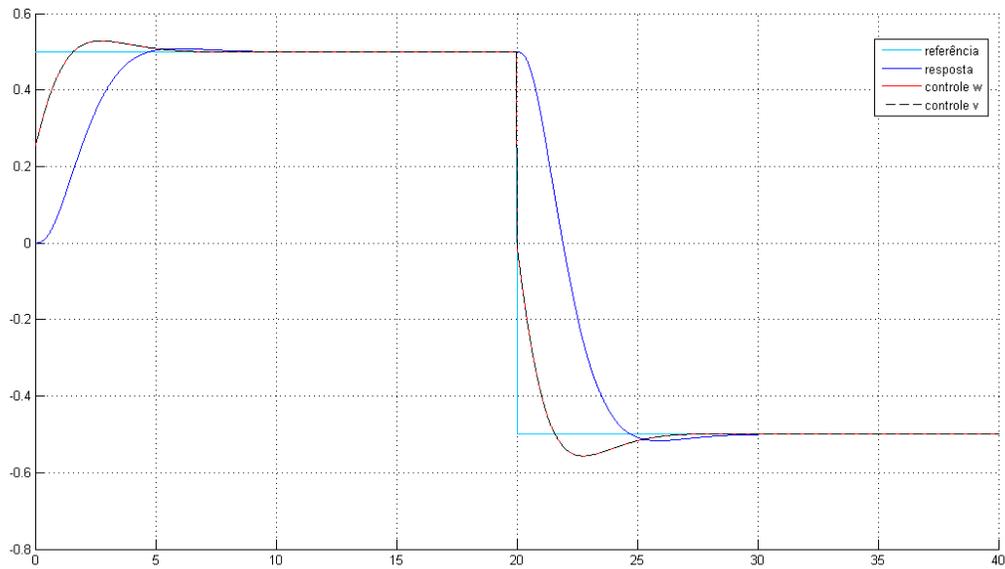


Figura 3.4: Simulação para a referência  $0.5 \cdot u(t) - u(t - 20)$ .

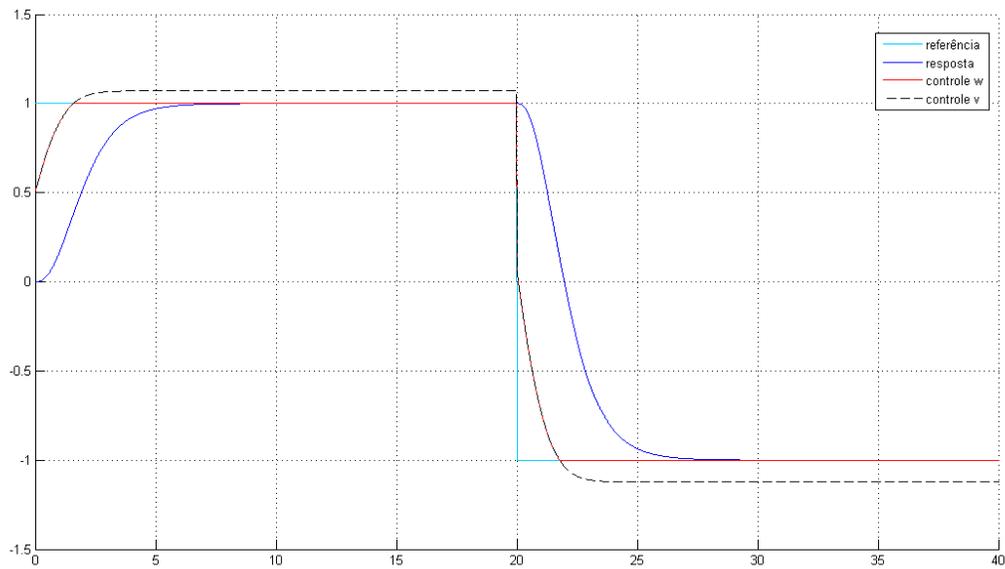
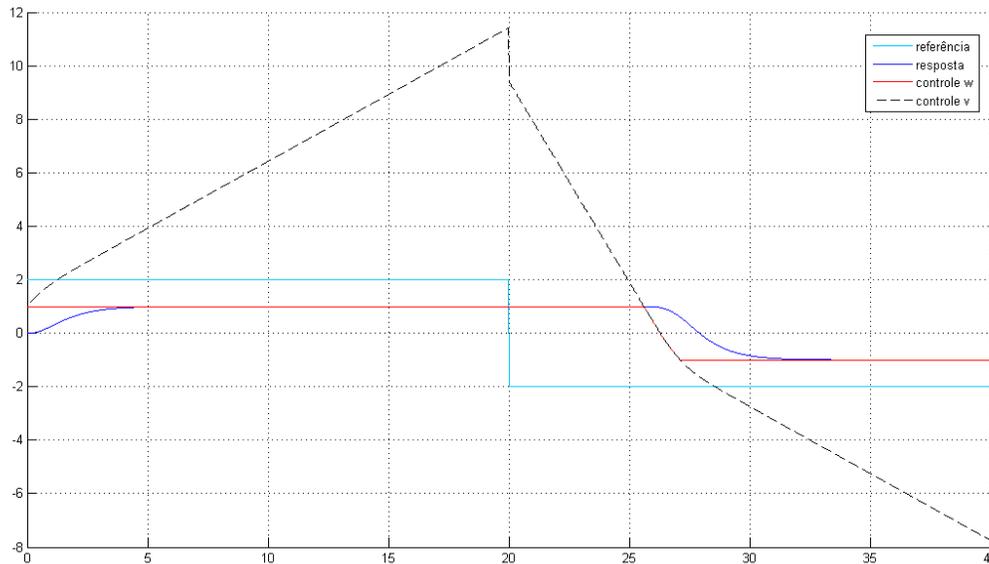


Figura 3.5: Simulação para a referência  $u(t) - 2 \cdot u(t - 20)$ .

Podemos ver que, na situação de controle saturado, o transiente da resposta sofre as mesmas alterações vistas para a referência constante em 3.1.1, como era de se esperar. A hipótese de que poderia ocorrer um atraso no chaveamento da resposta quando o controle estivesse saturado não se confirma, no entanto.

O que ocorre na situação de controle saturado é que, quando a referência troca de valor em  $t = 20$ , o controle  $v$  é capaz de chavear instantaneamente, dado que seu valor está apenas ligeiramente acima da faixa linear de controle. Sendo assim, a resposta do sistema não é prejudicada por nenhum tipo de atraso.

Dobrando novamente a amplitude da referência, numa tentativa de encontrar um possível atraso no chaveamento da resposta, chegamos a uma situação análoga àquela descrita na seção 2.2, na qual a ocorrência do reset windup foi ilustrada numa situação de controle de temperatura. A resposta do sistema para a referência  $2 \cdot u(t) - 4 \cdot u(t - 20)$  pode ser vista abaixo, na figura 3.6.



**Figura 3.6: Simulação para a referência  $2 \cdot u(t) - 4 \cdot u(t - 20)$ .**

Podemos observar que, desta vez, como a resposta estabiliza com erro de regime permanente, o controle  $v$  cresce em decorrência do carregamento do termo integral de controle, que é ocasionado pela realimentação de um erro não nulo. Quando a referência troca de valor em  $t = 20$ , o controle  $v$  demora mais de  $5 u.t.$  para se descarregar e retornar à faixa linear de controle, para então permitir o chaveamento atrasado da resposta.

Apesar desta situação ilustrar o acontecimento do fenômeno do reset windup, é esperado que, na prática, ela não ocorra, dado que não faria sentido exigir que um sistema responda a uma referência que ele é incapaz de rastrear sem erro de regime.

A seguir, voltaremos a adotar uma referência constante, sem troca de valores e, desta vez, com a presença de uma perturbação aditiva ao controle, na tentativa de visualizarmos o fenômeno do reset windup em outra situação.

### 3.1.3 – Perturbação no Controle

As próximas simulações terão como referência o degrau  $0.5 u(t)$ , assim como na primeira simulação feita para a planta estável. Nesta seção, no entanto, um pulso  $d$ , representando uma possível perturbação do atuador, é adicionado ao sinal de controle  $w$ . Retornando à figura 3.1 é possível visualizar esta adição.

O pulso  $d$  ocorrerá no intervalo de tempo de  $t = 20$  a  $t = 40$ , sendo portanto descrito pela soma de degraus  $u(t - 20) - u(t + 40)$ . As três simulações que seguem representam os resultados para as três amplitudes utilizadas para  $d$ . São elas:  $-1$ ,  $-0.75$  e  $-0.5$ . Estes valores de amplitude foram escolhidos de tal forma que o sinal recebido pela planta se mantenha dentro do intervalo  $[-1, 1]$ .

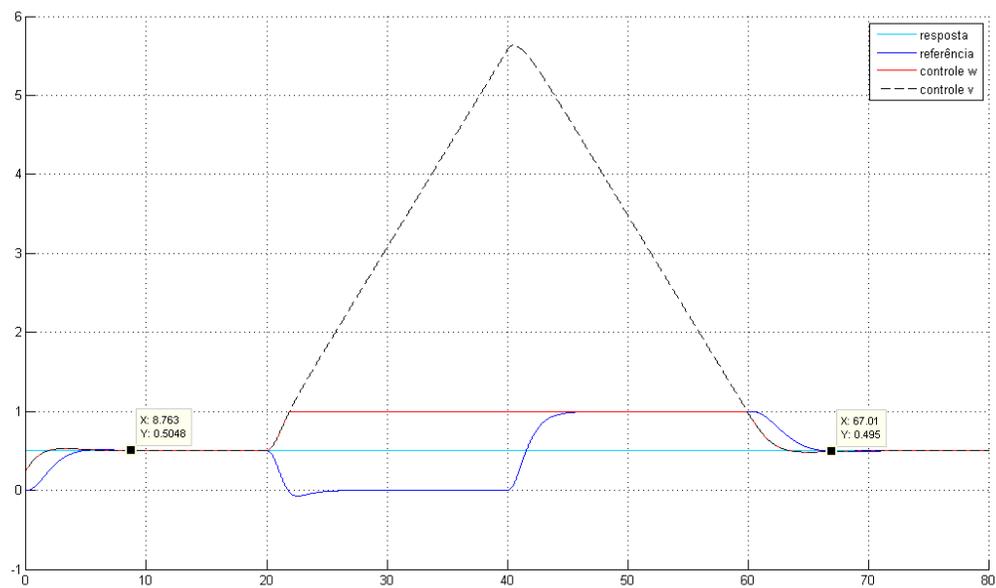


Figura 3.7: Controle perturbado pelo pulso  $d = -u(t - 20) + u(t - 40)$ .

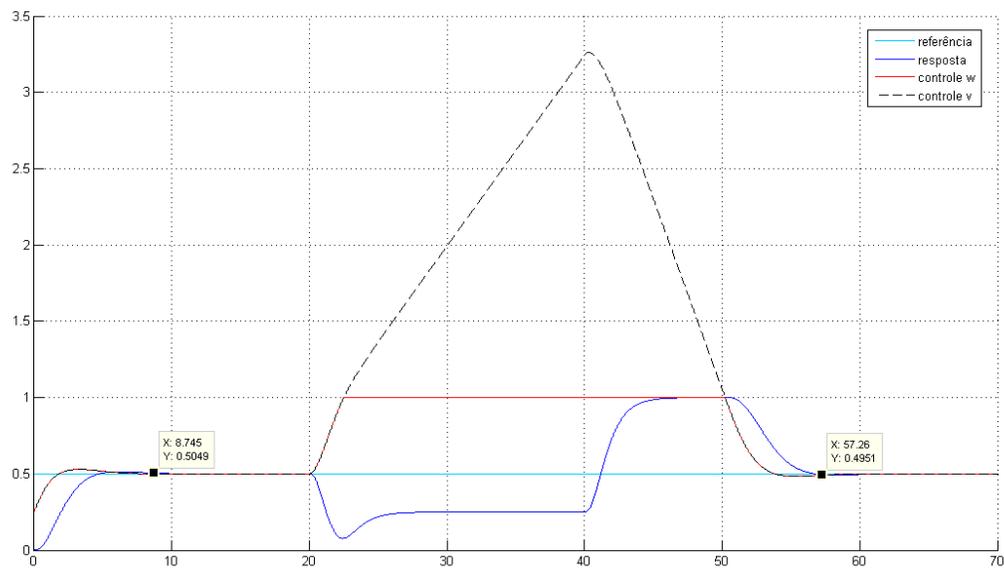


Figura 3.8: Controle perturbado pelo pulso  $d = -0.75 \cdot [u(t - 20) - u(t - 40)]$ .

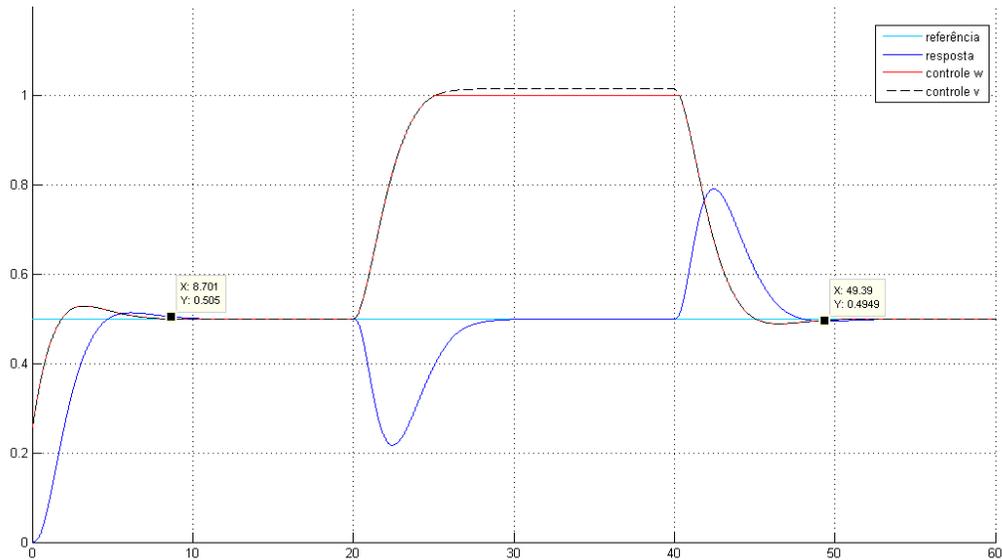


Figura 3.9: Controle perturbado pelo pulso  $d = -0.5 \cdot [u(t - 20) - u(t - 40)]$ .

Podemos ver, nas três figuras anteriores, que o tempo de assentamento do sistema é de aproximadamente  $8.7 \text{ u.t.}$ , considerando que a resposta deva atingir e se manter numa faixa de erro de no máximo  $1\%$  em relação à referência. A partir de  $t = 20$ , o controle se eleva, em oposição ao pulso de perturbação, mas logo atinge a saturação.

Nos dois primeiros casos, referentes às perturbações de amplitudes  $-1$  e  $-0.75$ , é mais notório que, durante a ocorrência da perturbação, as respostas assentam temporariamente com erro de regime. Estes valores nos quais as respostas assentam correspondem ao resultado da soma do valor do controle saturado com o valor da perturbação. Sendo assim, na figura 3.7, a resposta assenta temporariamente em  $0$  porque o controle vale  $1$  e a perturbação,  $-1$ . Analogamente, na figura 3.8, a resposta assenta em  $-0.25$  porque o controle vale  $1$  e a perturbação,  $-0.75$ .

Por causa do erro de regime provocado pela presença da perturbação, o controle  $v$  se carrega, caracterizando uma situação de reset windup. Em  $t = 40$ , quando a perturbação cessa, a resposta se eleva ao nível do controle saturado, assumindo novamente um valor errado, que só é capaz de ser corrigido com o advento do descarregamento do controle.

No caso da perturbação de amplitude  $-1$ , na figura 3.7, a resposta volta a rastrear a referência aproximadamente em  $t = 67$ , ou seja,  $27 u. t$  após o término da perturbação em  $t = 40$ . Em comparação com o tempo de assentamento normal deste sistema, de  $8.7 u. t.$ , temos um atraso de  $18.3 u. t.$ .

Como seria de se esperar, com a diminuição da amplitude da perturbação, o atraso provocado na resposta também é diminuído. A tabela abaixo resume os resultados obtidos nas três simulações dessa seção.

**Tabela 3.2: Tempos de assentamento pós-perturbação e comparação com o tempo de assentamento normal**

Amplitude da perturbação	Tempo de assentamento após o fim da perturbação	Atraso em relação ao tempo de assentamento normal ( $t = 8.7 u. t.$ )
$-1$	$27 u. t.$	$18.3 u. t.$
$-0.75$	$17.3 u. t.$	$8.6 u. t.$
$-0.5$	$9.4 u. t.$	$0.7 u. t.$

Podemos ver que, para a perturbação de amplitude  $-0.5$ , o atraso de resposta em relação ao tempo de assentamento normal do sistema é bem pequeno, o que nos leva a concluir que o atraso no retorno à normalidade após a ocorrência da perturbação não é significativo para níveis de perturbação usuais. Apenas nos casos nos quais o nível de perturbação supera a referência, o que seria uma situação inesperada, o erro de regime que ocorre provoca um atraso significativo no retorno à normalidade.

Diferentemente da referência a ser rastreada, para a qual há total liberdade de escolha, a perturbação pode assumir valores inesperados. Sendo assim, a resposta danificada pela perturbação de amplitude  $-1$ , que representa o pior caso possível de perturbação, será utilizado adiante no estudo das técnicas de anti-reset windup.

### 3.2 – Planta Instável

A planta instável escolhida para o estudo que segue foi o duplo integrador, que é frequentemente utilizado para discutir técnicas de controle por representar sistemas mecânicos sem atrito e pela facilidade matemática que este modelo proporciona.

Consideremos agora o sistema representado na figura 3.10, no qual o duplo integrador é controlado por um PID.

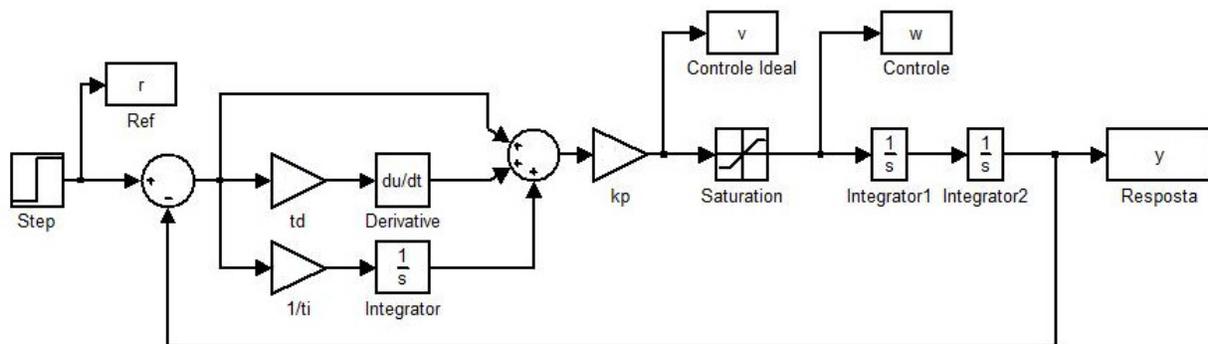


Figura 3.10: Duplo integrador controlado por um PID

Este sistema será simulado a seguir para dois ajustes distintos do PID, utilizando-se somente referências constantes. Para cada ajuste, será apresentada primeiramente a resposta ao degrau unitário do caso linear, isto é, o caso no qual não há limites de saturação para o controle. Em seguida, serão apresentadas as respostas do caso não-linear, no qual os limites inferior e superior da saturação valem  $-1$  e  $1$ , respectivamente.

As respostas do caso linear nos permitirão estabelecer uma comparação entre os dois ajustes do PID, enquanto as respostas do caso não-linear nos mostrarão o problema causado pela ocorrência do reset windup.

### 3.2.1 – Primeiro Ajuste do PID

O primeiro ajuste do PID foi escolhido arbitrando-se os valores de  $\frac{1}{t_i}$  e de  $t_d$ , para então escolher-se  $k_p$  através do posicionamento dos pólos no root locus do sistema. Os valores para este ajuste estão discriminados na tabela 3.3 abaixo. Eles acarretam, no caso linear, numa resposta ao degrau unitário convergente com um overshoot de aproximadamente 19% e tempo de assentamento de 6  $u. t.$ , como pode ser visto na figura 3.11.

Tabela 3.3: Primeiro ajuste do controle PID para o duplo integrador

Parâmetros do Controle PID	Valor
$k_p$	11
$\frac{1}{t_i}$	0.5
$t_d$	0.5

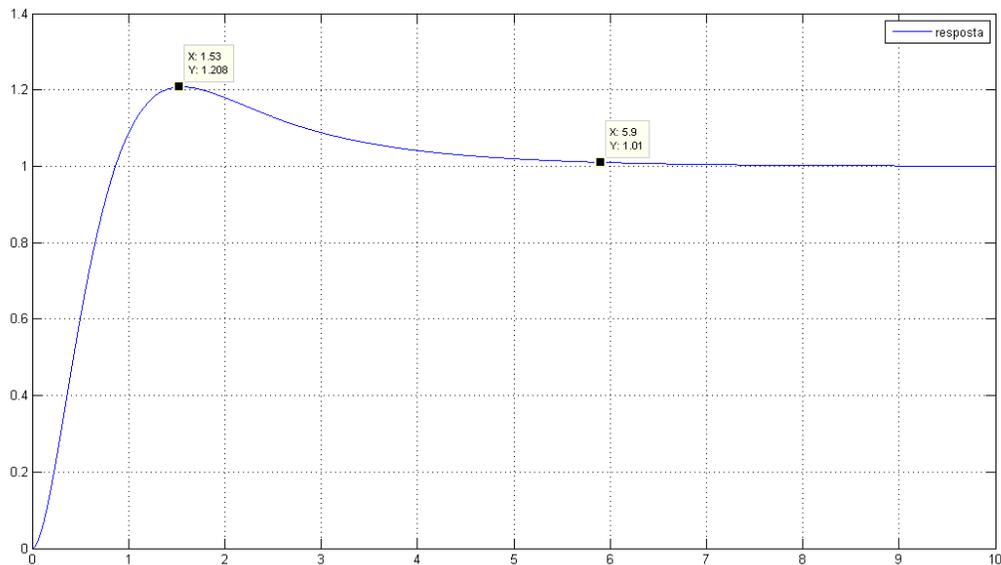


Figura 3.11: Resposta ao degrau unitário para o caso linear do primeiro ajuste do PID

Veremos a seguir as respostas do caso não linear, para os degraus de referência de amplitude 0.5, 1 e 1.5.

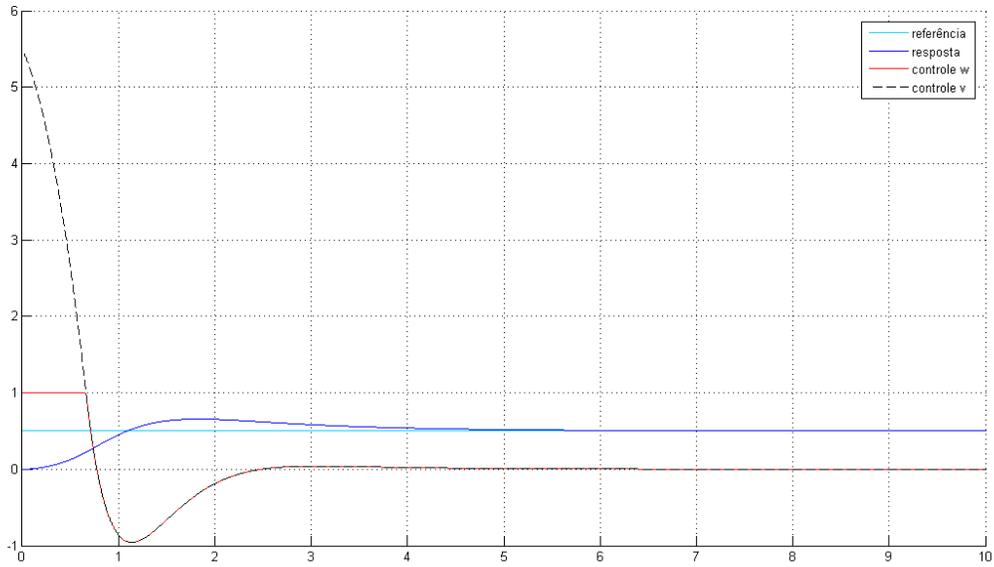


Figure 3.12: Simulação para a referência  $0.5 u(t)$

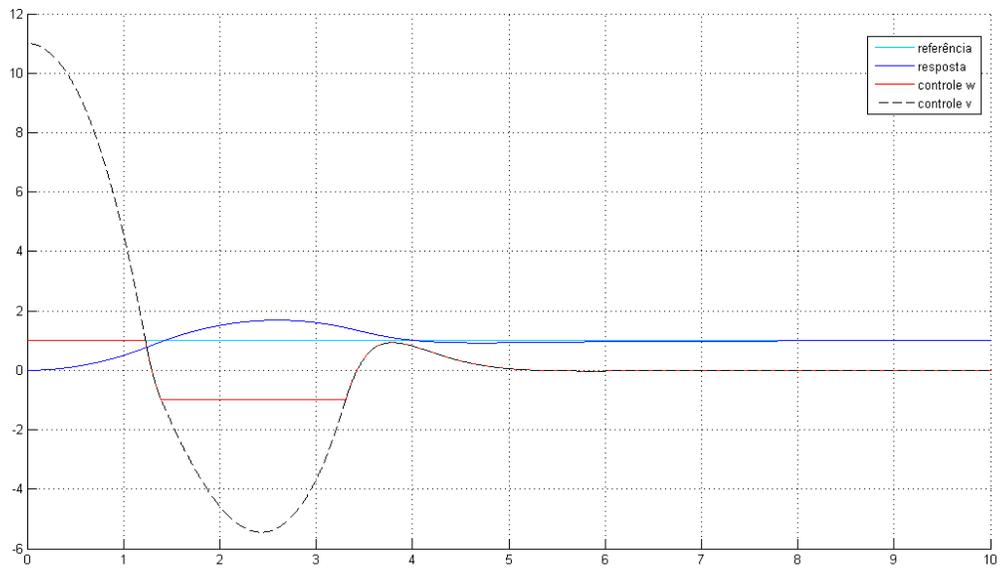
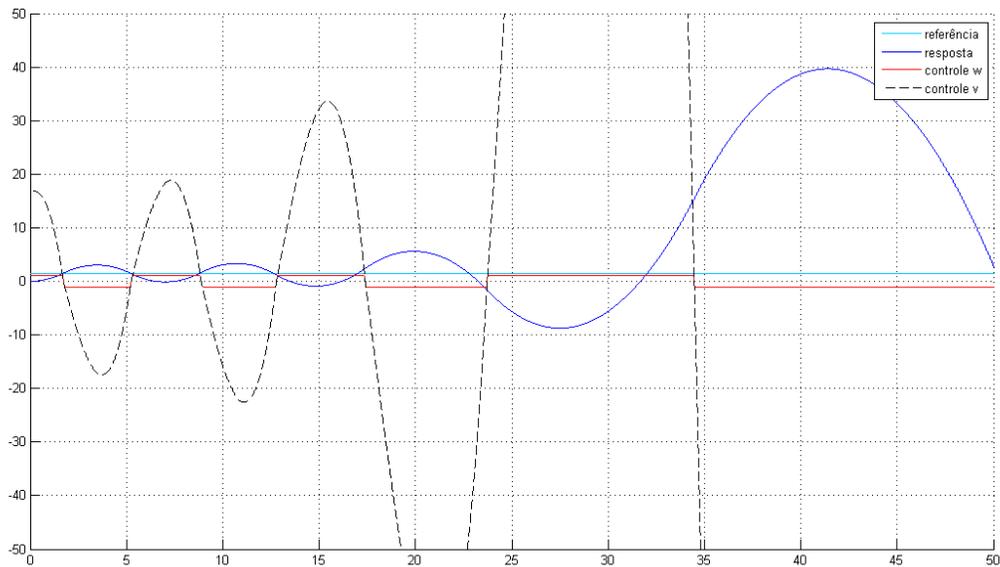


Figura 3.13: Simulação para a referência  $u(t)$



**Figura 3.14: Simulação para a referência  $1.5 \cdot u(t)$ , com saturação do controle**

Podemos ver, nas figuras acima, que a resposta do sistema se torna progressivamente mais mal comportada com o aumento do degrau de referência. Para o degrau de amplitude unitária, na figura 3.13, a resposta apresenta maior nível de overshoot em relação à resposta para o degrau  $0.5 \cdot u(t)$ , da figura 3.12.

Para o degrau  $1.5 \cdot u(t)$ , na figura 3.14, o controle deixa de saturar apenas no transitório e passa a adotar um comportamento chaveado, que leva a resposta à instabilidade. O comportamento oscilatório, característico do duplo integrador, passa a ser divergente. A cada chaveamento do controle  $w$ , podemos ver que o controle  $v$  se carrega mais, caracterizando uma situação de reset windup.

A seguir, utilizaremos um segundo ajuste do PID, que nos ajudará a estabelecer conclusões sobre a instabilidade causada no sistema.

### 3.2.2 – Segundo Ajuste do PID

Os valores do segundo ajuste do PID a ser experimentado foram escolhidos por tentativa e erro de modo a obter-se uma resposta ao degrau unitário do caso linear mais bem comportada do que aquela obtida para o primeiro ajuste. Estes valores encontram-se discriminados na tabela 3.4 e resposta ao degrau unitário do caso linear, com overshoot de aproximadamente 14% e tempo de assentamento de 14.7 u. t., na figura 3.15.

Tabela 3.4: Segundo ajuste do controle PID para o duplo integrador

Parâmetros do Controle PID	Valor
$k_p$	5
$\frac{1}{t_i}$	0.2
$t_d$	1

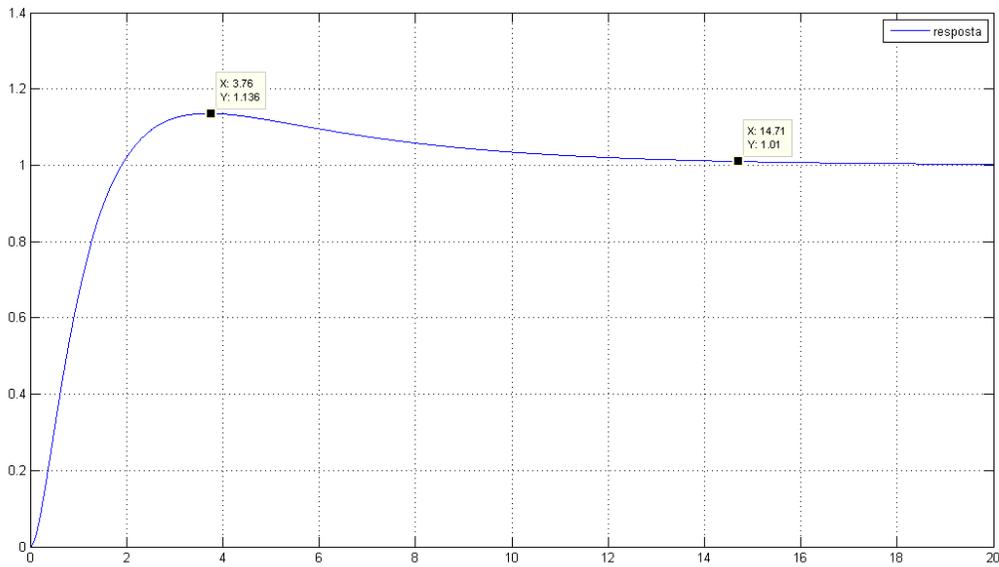
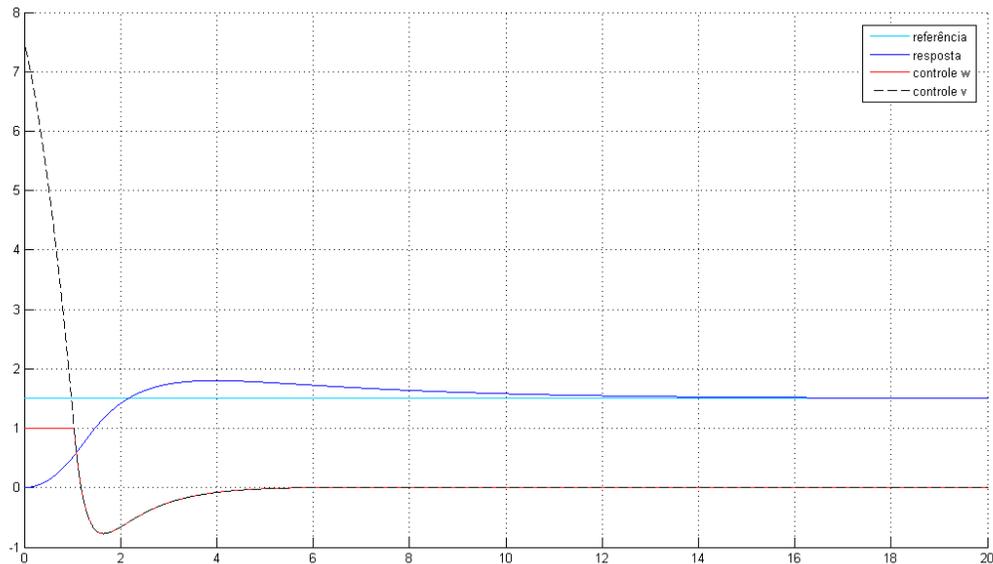


Figura 3.15: Resposta ao degrau unitário para o caso linear do segundo ajuste do PID

Simulando o caso não-linear e utilizando o degrau de referência de amplitude 1.5, para o qual havia ocorrido instabilidade no primeiro ajuste do PID, temos que a resposta agora converge, como pode ser visto na figura 3.16.



**Figura 3.16:** Simulação para a referência  $1.5 \cdot u(t)$  – A resposta não diverge para este ajuste.

Se continuarmos a aumentar o valor da referência em busca da instabilidade, veremos que, para este ajuste do PID, ela ocorre apenas a partir de  $r = 7.5 u(t)$ . O fato do sistema agora requerer um degrau cinco vezes maior do que aquele para o qual houve instabilidade para o primeiro ajuste do PID mostra o quanto um bom ajuste pode tornar um sistema menos suscetível à ocorrência do reset windup.

Se compararmos as duas respostas ao degrau do caso linear para os ajustes estudados, veremos que, neste segundo ajuste, a resposta tem menos overshoot e maior tempo de assentamento, indicativos de um sistema com menor tendência à instabilidade. Isto será melhor visualizado ao realizarmos, a seguir, uma interpretação da instabilidade causada pelo reset windup através da utilização do método do lugar das raízes, através do qual poderemos ver a localização dos pólos em malha fechada para cada ajuste utilizado.

### 3.3 – Interpretação para a instabilidade através do Root Locus

O método do lugar das raízes ou root locus é um método para se traçar o lugar geométrico dos pólos de uma planta em malha fechada em função do ganho de realimentação, que é tipicamente utilizado no estudo de estabilidade de sistemas lineares.

Embora a ocorrência do reset windup faça com que o sistema opere de modo não-linear, utilizaremos este método numa abordagem não-usual para analisar o caso do controle do duplo integrador com saturação. Para tal, consideraremos que, quando há saturação do controle e reset windup, a variável de controle  $w$  mantém seu valor enquanto  $v$  aumenta arbitrariamente, o que pode ser interpretado como uma diminuição do ganho da malha. Desta forma, desconsideremos, para a análise seguinte, a não-linearidade saturação e tratemos o sistema como se ele fosse constituído apenas pelo controle PID em série com o duplo integrador, numa situação de ganho de realimentação pequeno.

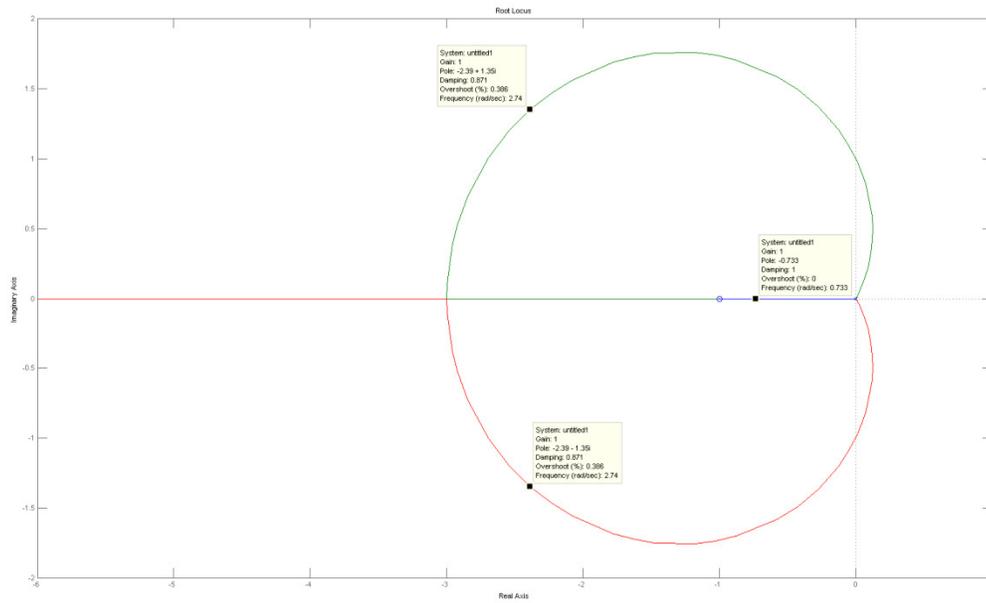
Seja  $A(s)$  a função de transferência correspondente ao controlador PID em série com o duplo integrador.

$$A(s) = k_p \cdot \frac{t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i}}{s^3}$$

Utilizando os valores da tabela 3.3, correspondentes ao primeiro ajuste do PID, temos que

$$A_1(s) = 11 \cdot \frac{0.5 \cdot s^2 + s + 0.5}{s^3}$$

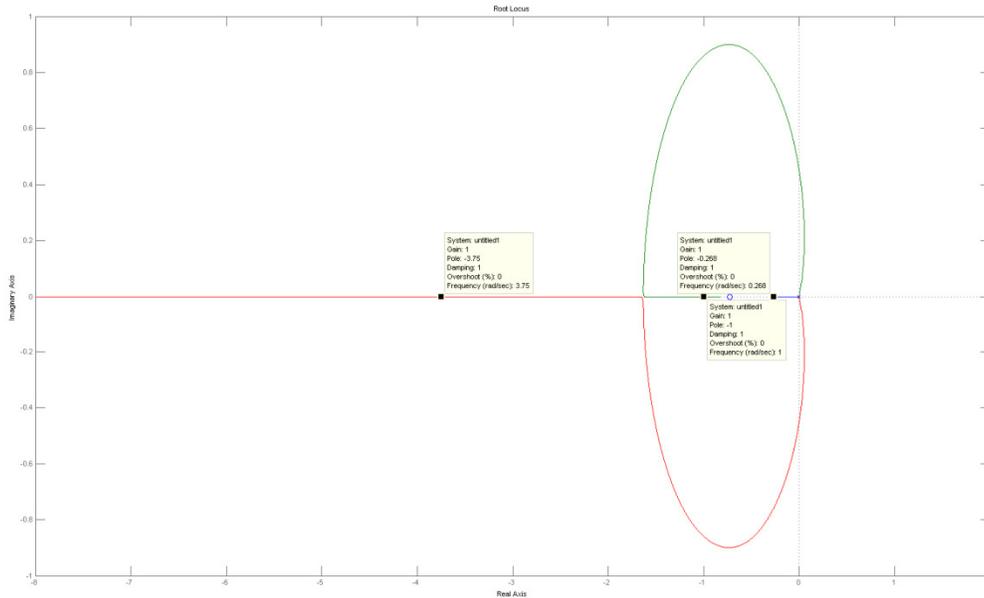
Se traçarmos o root locus para  $A_1(s)$  veremos que, para ganhos pequenos, os pólos do sistema realimentado estão no SPLD. Ou seja, o duplo integrador em série com o controlador PID é um sistema que pode ser instabilizado pela saturação do controle se  $w$  crescer o suficiente para que o ganho aparente da malha seja pequeno o suficiente.



**Figura 3.17: Root locus do controle PID (1º ajuste) em série com o duplo integrador**

Na figura 3.18, o traçado do root locus é refeito para os valores da tabela 3.4, referentes ao segundo ajuste do PID. Desta vez, temos que

$$A_2(s) = 5 \cdot \frac{s^2 + s + 0.2}{s^3}$$

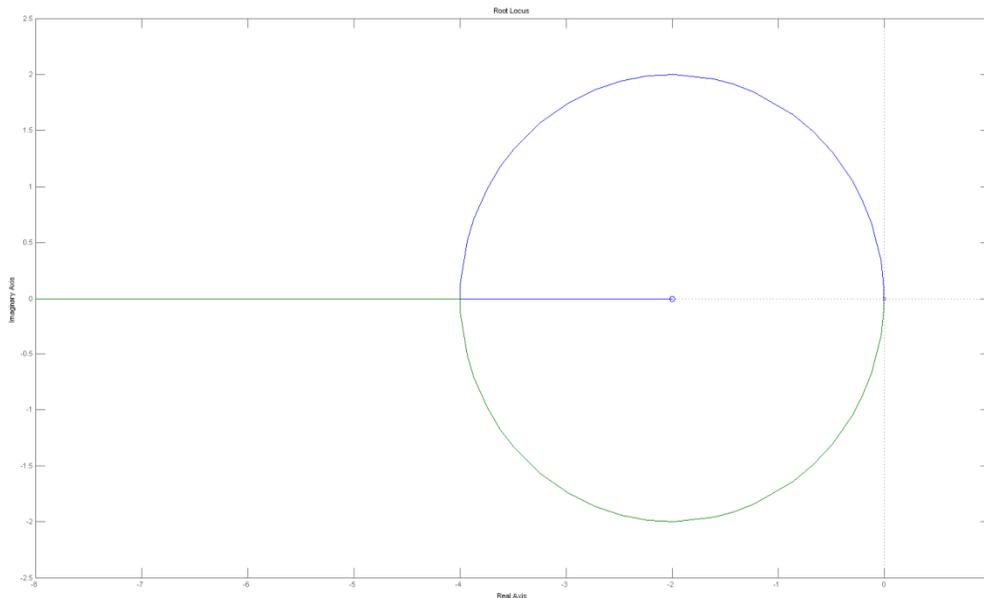


**Figura 3.18: Root locus do controle PID (2º ajuste) em série com o duplo integrador**

Os pólos de malha fechada para ganho unitário foram marcados nos root loci das figuras 3.17 e 3.18. Observando a posição destes pólos, podemos ver que, no traçado correspondente ao primeiro ajuste, eles se encontram mais próximos do SPLD do que aqueles marcados no traçado correspondente ao segundo ajuste. Isto corrobora a observação de que o primeiro ajuste do PID acarreta num sistema mais suscetível à instabilidade. A utilização do segundo ajuste do PID implica na necessidade de uma maior diminuição do ganho de malha para que os pólos sejam levados ao SPLD, de tal forma a ocasionar a instabilidade do sistema.

Adicionalmente, para corroborar o fato de que é o controle integral o responsável pela ocorrência do reset windup e, conseqüentemente, pela instabilidade do sistema, consideremos a função de transferência correspondente ao duplo integrador em série com um controlador PD, em detrimento do controlador PID. Tracemos então o root locus para este novo sistema, mantendo os valores do primeiro ajuste estudado.

$$A_1'(s) = k_p \cdot \frac{t_d \cdot s + 1}{s^2} = 11 \cdot \frac{0.5 \cdot s + 1}{s^2}$$



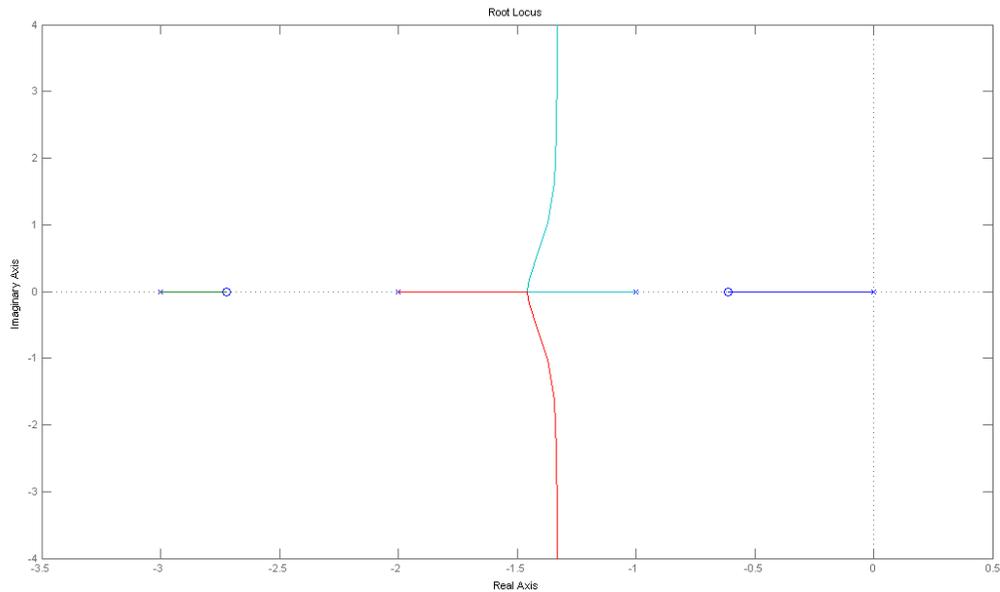
**Figura 3.19: Root locus do controle PD em série com o duplo integrador – Sempre estável em malha fechada**

É possível perceber que a eliminação do termo integral nos levou a um sistema cujos pólos não podem ser levados ao SPLD, não importa qual seja o ganho de malha. Em outras palavras, ao eliminarmos o controle integral, eliminamos também a possibilidade da instabilidade causada pela diminuição aparente do ganho de malha acarretada pelo reset windup.

No entanto, a parcela integral não pode ser eliminada devido a sua função corretiva no caso de haver perturbações aditivas ao controle. Resta-nos então lidar com o problema causado pelo reset windup, o que será feito nos capítulos seguintes através das técnicas de anti-reset windup.

Voltando ao sistema composto pela planta estável de terceira ordem estudado na seção 3.1 e considerando os valores discriminados na tabela 3.1, tracemos agora o root locus para

$$A(s) = k_p \left( t_d \cdot s + 1 + \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{s} \right) \cdot \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{0.6 \cdot s^2 + 2 \cdot s + 1}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$$



**Figure 3.20: Root locus do controle PID em série com a planta estável – Sempre estável em malha fechada**

Podemos ver que, para ganhos pequenos, os pólos deste sistema se mantêm no SPLE e, portanto, uma diminuição do ganho de malha causada pela ocorrência do reset windup seria incapaz de instabilizá-lo.

A conclusão de que o duplo integrador é instabilizado para ganhos de malha pequenos enquanto a planta estável se mantêm sempre estável em malha fechada poderia nos levar a generalização equivocada de que, devido ao reset windup, sistemas com plantas instáveis são levados à instabilidade enquanto sistemas com plantas estáveis não o são.

Como contra exemplo desta generalização, consideremos o caso da planta  $\frac{1}{s(s+1)}$ , classificada como marginalmente estável. O pólo na origem a impede de ser caracterizada como estável e, mesmo assim, o sistema em malha fechado para esta planta é estável ainda que haja saturação do controle. Utilizando uma referência propositalmente alta para facilitar a visualização do fenômeno, podemos ver na figura 3.21 que a resposta converge mesmo depois de um longo intervalo de controle saturado. O ajuste de PID utilizado para este caso é discriminado na tabela 3.5.

Tabela 3.5: Ajuste do controle PID para as simulações da planta marginalmente estável

Parâmetros do Controle PID	Valor
$k_p$	1.3
$\frac{1}{t_i}$	0.2
$t_d$	1

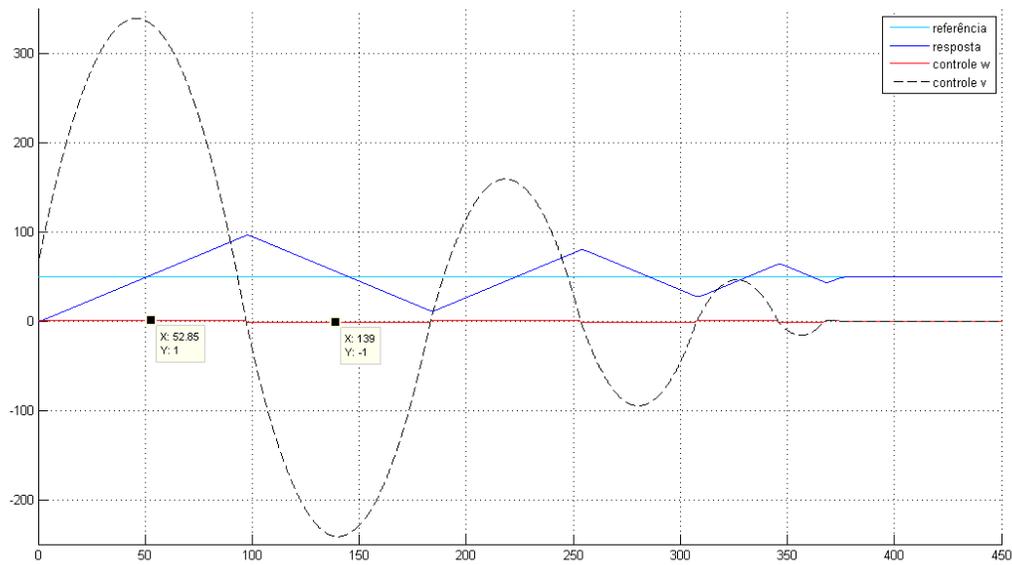
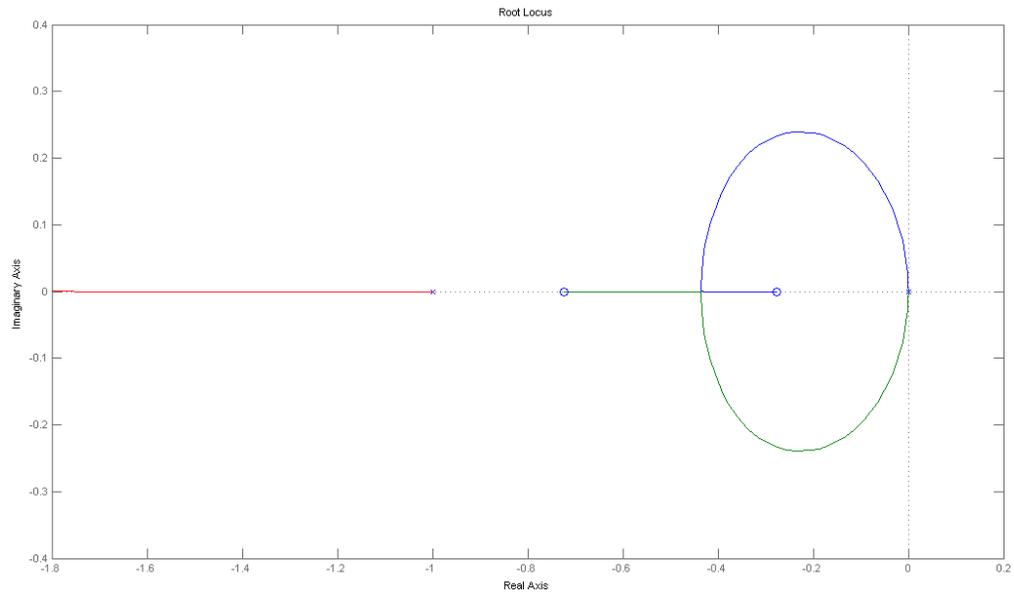


Figura 3.21: Simulação da planta marginalmente estável para a referência  $50 \cdot u(t)$

Isto ocorre porque o root locus do sistema em malha fechada, apresentado na figura 3.22 abaixo, está no SPLE, assim como o da planta estável apresentado anteriormente.



**Figura 3.22: Root locus do controle PID em série com a planta marginalmente estável – Sempre estável em malha fechada.**

Tendo entendido os danos causados pelo reset windup aos sistemas estudados neste capítulo, passaremos, no capítulo seguinte, à apresentação das técnicas de anti-reset windup, que foram projetadas para impedir o crescimento arbitrário da parcela integral do controle com o intuito de prevenir tais danos.

# Capítulo 4

## Anti-Reset Windup

O objetivo deste capítulo é apresentar cinco técnicas de anti-reset windup (ARW) de uma maneira qualitativa, de forma a promover o entendimento do funcionamento básico de cada uma delas.

Estas técnicas têm como função impedir que o controle integral assumira valores elevados o suficiente para fazer com que a saída do PID supere os limites de saturação do controle. Desta forma, são mitigados os efeitos danosos às respostas de sistemas quando estes se encontram em uma situação de reset windup, fenômeno decorrente da saturação do controle.

Primeiramente serão apresentadas as técnicas de back-calculation [1] e da zona morta [4], que atenuam o valor do sinal a ser integrado no ramo do controle integral quando há saturação. Será visto que estas duas técnicas são equivalentes. Em seguida, veremos a técnica de integração condicional [1], que simplesmente limita o valor do controle integral. A quarta técnica estudada será uma proposta por C. T. Chen [6], que desliga o controle integral quando há saturação e a última técnica é chamada external reset [5], que soluciona o reset windup através de uma modificação na configuração do controle PID.

## 4.1 – Back-Calculation

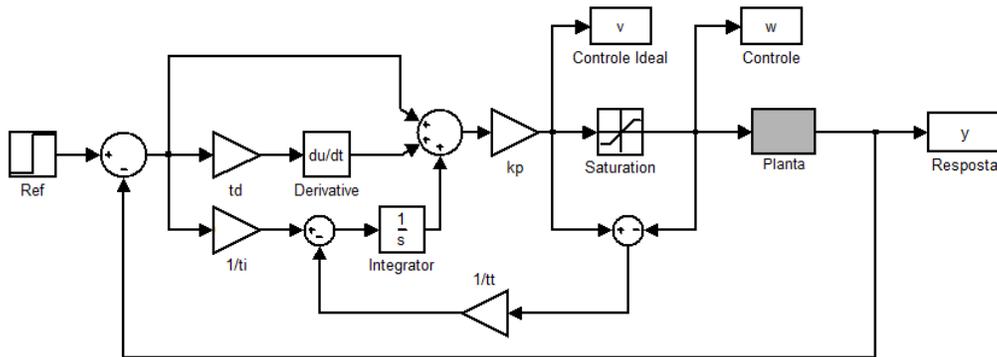


Figura 4.1: Back-calculation num sistema controlado por PID

A técnica de back-calculation consiste em atenuar o ganho integral proporcionalmente à diferença entre o controle ideal  $v$  e o controle  $w$ . O valor  $v - w$  é multiplicado pelo ganho  $\frac{1}{tt}$  e em seguida realimentado negativamente no ramo do controle integral, antes da integração, como pode ser visto na figura 4.1 acima.

Quando não há saturação,  $v = w$ . Desta forma,  $v - w = 0$  e, portanto, o valor realimentado é nulo e o controle integral se mantém inalterado, como desejado. Quando há saturação, a diferença  $v - w$  gera um valor não nulo que é multiplicado por  $\frac{1}{tt}$ .

Para formalizar esta idéia, seja  $y_{bc}$  o sinal resultante desta multiplicação. Temos então que

$$y_{bc} = \frac{1}{tt} \cdot (v - w)$$

sendo que

$$v - w = \begin{cases} 0, & \text{se } |v| < sat \\ v - sat, & \text{se } v \geq sat \\ v + sat, & \text{se } v \leq -sat \end{cases}$$

Desta forma, podemos dizer que

$$y_{bc} = \begin{cases} 0, & \text{se } |v| < sat \\ \frac{1}{tt} \cdot (v - sat), & \text{se } v \geq sat \\ \frac{1}{tt} \cdot (v + sat), & \text{se } v \leq -sat \end{cases}$$

Quando este sinal é subtraído no ramo integral do PID, esta parcela do controle é atenuada e os danos causados pelo reset windup são mitigados, caso o ganho  $\frac{1}{tt}$  tenha sido bem ajustado.

Intuitivamente falando, se  $\frac{1}{tt}$  for muito pequeno, a ação do back-calculation será fraca, podendo não ser suficiente para reparar o dano causado pelo reset windup. Um procedimento para ajuste deste ganho em termos de garantia de estabilidade será apresentado no capítulo 5.

## 4.2– Zona Morta

Esta técnica de ARW utiliza a não-linearidade zona morta. Sendo assim, entendamos primeiramente como ela é modelada.

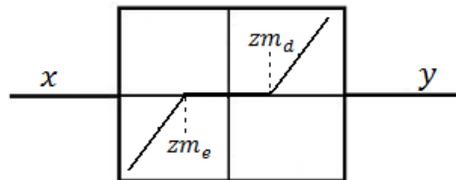


Figura 4.2: Zona morta

A saída da zona morta é nula para valores de entrada que estejam dentro do intervalo  $[zm_e, zm_d]$ . Para os demais valores, a saída equivale à soma de um termo proporcional à entrada com a constante que define o tamanho da zona morta. Uma descrição mais precisa segue abaixo.

$$y = \begin{cases} 0, & \text{se } zm_e < x < zm_d \\ x - zm_d, & \text{se } x \geq zm_d \\ x + zm_e, & \text{se } x \leq -zm_e \end{cases}$$

Na técnica de ARW a ser analisada agora, a zona morta será utilizada numa realimentação negativa no ramo integral, analogamente ao back-calculation.

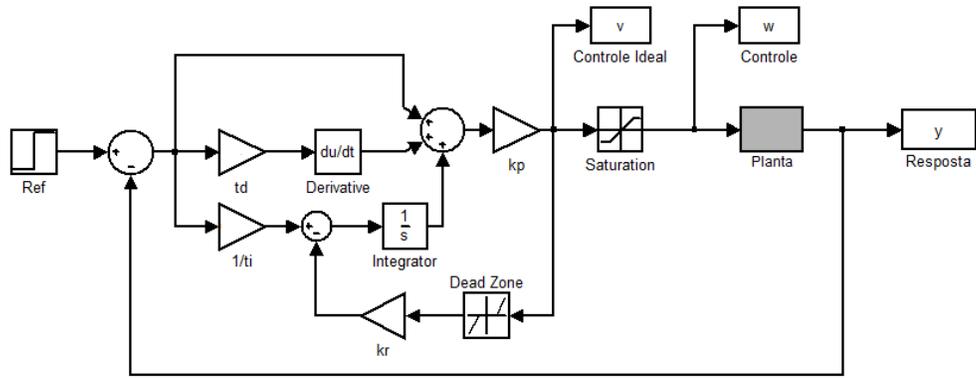


Figura 4.3: Técnica da zona morta num sistema controlado por PID

São atribuídos aos limites da zona morta  $z_{m_{min}}$  e  $z_{m_{max}}$  os valores de  $-sat$  e  $sat$ , respectivamente. Dessa forma, quando  $v < |sat|$ , que corresponde ao caso em que não há saturação, o ramo do controle integral receberá realimentação nula devido à zona morta e este controle permanecerá, portanto, inalterado.

No caso em que o controle integral necessita de intervenção, quando  $v > |sat|$ , a zona morta é vencida e  $v$  é negativamente e proporcionalmente realimentado no ramo integral, promovendo a atenuação desta parcela do controle.

Seja  $y_{zm}$  o sinal após o ganho  $k_r$ , que é subtraído no ramo integral. Para esta técnica, temos que

$$y_{zm} = \begin{cases} 0, & \text{se } |v| < sat \\ k_r \cdot (v - sat), & \text{se } v \geq sat \\ k_r \cdot (v + sat), & \text{se } v \leq -sat \end{cases}$$

Comparando estas equações àquelas vistas para o back-calculation, podemos dizer que  $y_{zm} = y_{bc}$  se  $k_r = \frac{1}{tt}$  e que, neste caso, as técnicas são equivalentes, embora tenham sido independentemente propostas.

Apesar disso, o back-calculation oferece uma configuração mais vantajosa de ser implementada por possuir a vantagem de ser capaz de se adaptar imediatamente a qualquer mudança no valor da saturação, supondo que o valor de  $w$  seja obtido por sensoriamento. Isso ocorre porque avaliar a diferença entre dois sinais  $v$  e  $w$  em detrimento de um valor fixo, assim como é feito quando os valores de saturação são

atribuídos à  $zm_{min}$  e  $zm_{max}$  para o ajuste da zona morta, isenta a técnica da possibilidade perder o ajuste correto caso os valores de saturação mudem.

### 4.3 – Integração Condicional

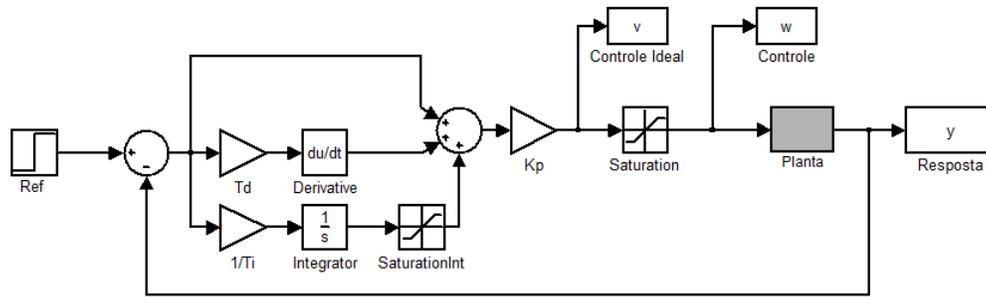


Figura 4.4: Integração condicional num sistema controlado por PID

Nesta técnica, a saída do integrador é impedida de ultrapassar um determinado valor  $e$ , em termos de implementação, isto corresponde a utilizar um bloco de saturação no ramo integral cujos limites inferior e superior serão chamados de  $-sat_i$  e  $sat_i$ , admitindo que eles tenham o mesmo módulo. O bom funcionamento da técnica depende unicamente de uma boa estimativa para estes limites.

Se fizermos  $sat_i \cdot k_p = sat$ , estaremos garantindo que a parcela integral não superará o nível de saturação do sistema. Ainda assim, possivelmente, devido à soma das demais parcelas, o controle  $v$  poderá sofrer alguma saturação. De qualquer forma,  $\frac{sat}{k_p}$  é um bom palpite inicial para o valor que  $sat_i$  deve assumir.

Ao se escolher valores mais baixos que  $\frac{sat}{k_p}$ , deve se ter em mente que quanto menor o valor da parcela integral do controle, mais lentamente possíveis erros de regime serão corrigidos.

#### 4.4 – Técnica Proposta por C. T. Chen

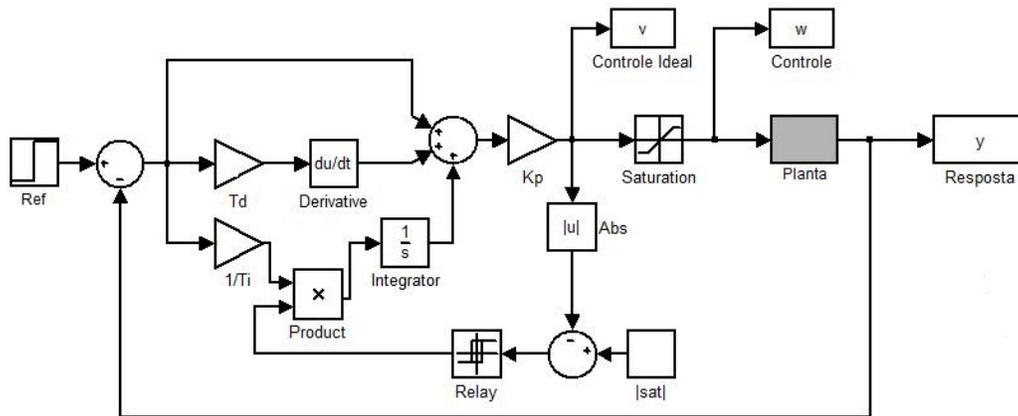


Figura 4.5: Técnica de proposta por C. T. Chen num sistema controlado por PID

Na técnica proposta por C. T. Chen, assim como na técnica Zona Morta, é necessário conhecer em que valor o controle satura. Desta forma, o parâmetro constante  $|sat|$  pode ser ajustado.

O resultado da subtração do valor de controle ideal  $v$  da constante  $|sat|$  é utilizado como a entrada de um relé que chaveia entre 0 e 1.

No caso em que o controle ideal ainda não tenha superado em módulo o valor  $|sat|$ , a subtração feita nesta técnica resulta num valor positivo, fazendo com que a saída do relé seja unitária. Desta forma, o controle integral permanece inalterado, já que o sinal  $e \cdot \frac{1}{t_i}$  é multiplicado pela unidade.

No caso em que há saturação, o valor do módulo do controle ideal supera a constante  $|sat|$ , fazendo com que a subtração resulte num valor negativo. Desta forma, a saída do relé é nula e interrompe o ganho integral, dado que o sinal  $e \cdot \frac{1}{t_i}$  é multiplicado por zero.

## 4.5 – External Reset

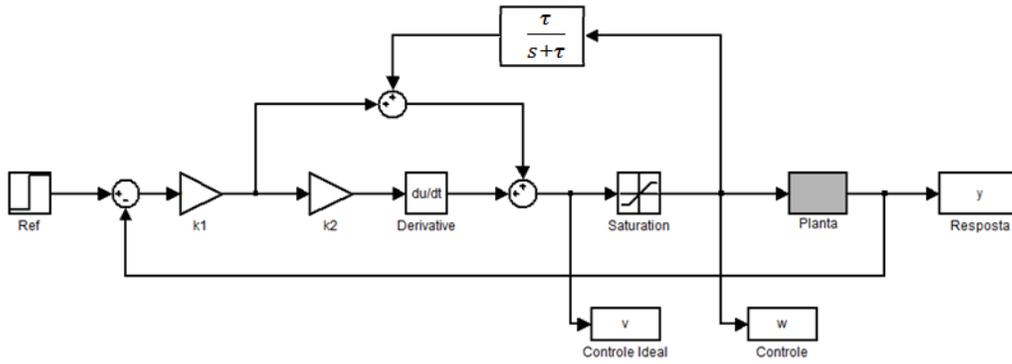


Figura 4.6: External Reset

A técnica chamada External Reset consiste em adotar-se uma configuração de controle PID que, apesar de diferir da configuração tradicional, se comporta da mesma forma no caso linear.

Para entendermos esta equivalência, lembremos que para a configuração tradicional do controle PID, adotada anteriormente, podemos reescrever a equação (1.1) no domínio da frequência e, assim, teremos que

$$v = e \cdot k_p \cdot \left( 1 + t_d \cdot s + \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{s} \right) \therefore$$

$$\frac{v}{e} = \frac{k_p \cdot \left( t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i} \right)}{s} \quad (4.1)$$

No External Reset, no caso linear, quando  $v = w$ , temos que

$$v = e \cdot k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot s) + v \cdot \left( \frac{\tau}{s + \tau} \right) \therefore$$

$$\frac{v}{e} = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot s^2 + k_1 \cdot (k_2 \cdot \tau + 1) \cdot s + k_1 \cdot \tau}{s} = \frac{(k_1 \cdot k_2 \cdot s + k_1) \cdot (s + \tau)}{s} \quad (4.2)$$

Podemos ver que as funções de transferência  $\frac{v}{e}$  apresentam mesmo número de pólos e zeros e que estes podem ser escolhidos de tal forma a tornar as configurações equivalentes no que diz respeito aos ganhos de cada parcela do controle. Para isso, basta que escolhamos os coeficientes de tal forma a respeitar as equações abaixo.

$$\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = k_p \cdot t_d \\ k_1 \cdot k_2 \cdot \tau + k_1 = k_p \\ k_1 \cdot \tau = \frac{k_p}{t_i} \end{cases} \quad (4.3)$$

Em relação à resolução do sistema acima, deve-se atentar para o fato da função  $\frac{v}{e}$  ter zeros necessariamente reais para o external reset, que valem  $-\frac{1}{k_2}$  e  $-\tau$ , enquanto para a configuração tradicional os zeros valem  $\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{t_d}{t_i}}}{2 \cdot t_d}$ , admitindo, portanto, valores complexos. Se  $4 \cdot \frac{t_d}{t_i} > 1$ , condição para a qual os zeros da configuração tradicional são complexos, os coeficientes das duas configurações de controle em questão não podem ser casados. Em outras palavras, o sistema acima não terá solução.

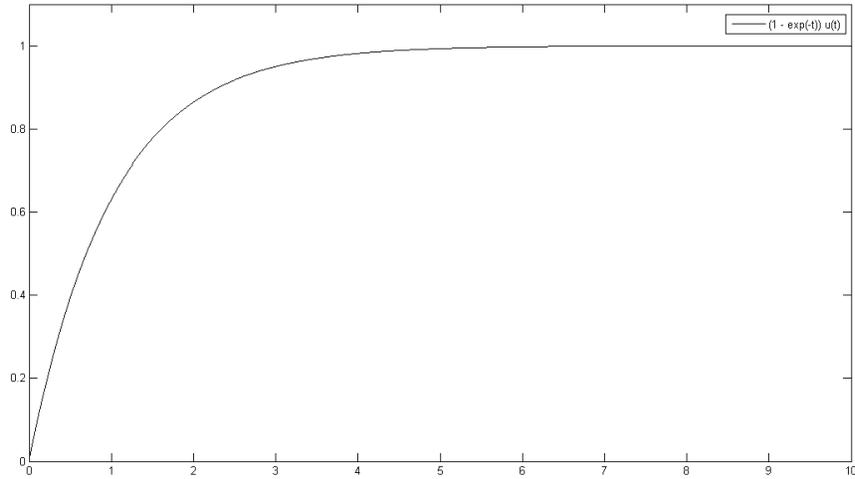
Consideremos agora o caso no qual há saturação do controle. Neste caso, o filtro de primeira ordem  $\frac{\tau}{s + \tau}$  recebe como entrada uma constante  $x = sat$ . Analisando esta situação no domínio da frequência, temos que esta entrada constante vale  $X(s) = \frac{sat}{s}$ .

Desta forma, a saída do filtro é dado por

$$Y(s) = \frac{\tau}{s + \tau} \cdot \frac{sat}{s} = sat \cdot \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \tau} \right)$$

Tomando a transformada inversa de  $Y$ , temos a saída  $y(t)$  do filtro no tempo, que vale apenas enquanto o controle se encontra saturado.

$$y(t) = sat \cdot (1 - e^{-\tau t}) \cdot u(t)$$



**Figura 4.7: Saída  $y(t)$  do filtro do external reset, para  $sat = \tau = 1$ .**

Considerando  $sat = \tau = 1$ , podemos ver na figura 4.7 que a saída do filtro de primeira ordem, que corresponde à parcela integral do controle, passa a contribuir com um valor praticamente constante, passado o intervalo de tempo necessário para  $y(t)$  se aproximar suficientemente de 1.

Dessa forma, é garantido que durante a saturação do controle a parcela integral não é capaz de se carregar e ocasionar o reset windup.

No capítulo seguinte, as técnicas de ARW aqui apresentadas serão aplicadas ao sistema do duplo integrador que, como foi visto no capítulo 3, foi levado à instabilidade em decorrência do reset windup. Será estudado, para cada técnica, como devem ser ajustados os parâmetros de forma a coibir a ocorrência deste fenômeno e garantir a estabilidade do sistema.

# Capítulo 5

## Abordagem Simplificada da Estabilidade por Métodos Lineares

No capítulo 3 vimos como o sistema no qual o duplo integrador é controlado por um PID pode ser levado à instabilidade em decorrência do reset windup. Em seguida, no capítulo 4, cinco técnicas de ARW foram estudadas.

Neste capítulo estas técnicas serão utilizadas no controle do duplo integrador com o intuito de ilustrar uma abordagem para o estudo da estabilidade, que será garantida através da escolha dos valores dos parâmetros de cada técnica e dos valores de ajuste do PID.

Para cada técnica serão traçadas algumas previsões teóricas que valem somente para o caso específico do controle do duplo integrador, mas cujos desenvolvimentos podem ser aplicados a outras plantas.

Os desenvolvimentos deste capítulo utilizarão o chamado critério de Hurwitz, que é brevemente lembrado no apêndice A.

### 5.1 – Considerações iniciais

Antes de prosseguirmos para o estudo de estabilidade de cada técnica, algumas considerações iniciais devem ser feitas.

A primeira delas diz respeito à estabilidade do caso linear do sistema sob estudo, ou seja, do caso no qual não há a presença da não-linearidade saturação. Esta condição indica uma restrição para o ajuste dos parâmetros do PID e representa uma condição a ser respeitada também pelo sistema munido de ARW.

A segunda consideração é de suma importância para o entendimento das análises que serão conduzidas neste capítulo. Ela concerne à interpretação das não linearidades saturação e zona morta como ganhos que serão chamados de  $k_{sat}$  e  $k_{zm}$ .

Por último, serão apresentadas duas equações que serão utilizadas na maioria dos desenvolvimentos que seguirão.

### 5.1.1 – Estabilidade do caso sem saturação do controle

Seja  $H$  a função de transferência correspondente ao controle PID em série com o duplo integrador, em malha fechada. Considerando a equação (4.1), que descreve a relação entrada-saída do controle PID,  $\frac{v}{e}$ , temos que

$$H = \frac{A}{1 + A}$$

onde

$$A = \frac{v}{e} \cdot \frac{1}{s^2} = k_p \cdot \frac{t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i}}{s^3}$$

e, portanto

$$H = \frac{k_p \cdot \left( t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i} \right)}{s^3 + k_p \cdot t_d \cdot s^2 + k_p \cdot s + \frac{k_p}{t_i}}$$

Para estudarmos a estabilidade do sistema descrito pela função de transferência acima, apliquemos o critério de Hurwitz ao denominador de terceira ordem. Este critério é mais detalhadamente explicado no apêndice A.

Para polinômios de terceira ordem, o critério garante que todas as raízes estarão no SLPE se as seguintes duas condições forem satisfeitas:

- i. Os coeficientes das potências de  $s$  devem ser todos positivos.

- ii. O produto entre os coeficientes das potências de  $s$  de ordens 1 e 2 deve ser maior do que aquele entre os coeficientes das potências de ordens 0 e 3.

A condição (i) já está satisfeita. A condição de estabilidade se resume, então, a garantir que

$$k_p^2 \cdot t_d > \frac{k_p}{t_i} \therefore k_p \cdot t_i \cdot t_d > 1 \quad (5.1)$$

### 5.1.2 – Não linearidades interpretadas como ganhos

Se resolvermos interpretar o bloco de saturação apresentado na seção 2.4 como um ganho  $k_{sat}$ , este ganho teria que ser, a rigor, uma função do tempo  $k_{sat}(t) = \frac{w(t)}{v(t)}$ .

Trataremos, no entanto,  $k_{sat}$  como um ganho que pode assumir valores em  $(0,1]$ , que atinge o valor unitário quando  $v = w$ , ou seja, quando não há saturação do controle, e que assume valores positivos inferiores à unidade quando  $|v| > |w|$ .

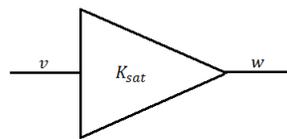


Figura 5.1: Saturação interpretada como um ganho  $\frac{w}{v}$ .

As análises que serão feitas neste capítulo considerarão o caso no qual o controle integral está muito carregado, ou seja, o caso no qual há saturação e o controle ideal  $v$  aumenta enquanto o controle saturado  $w$  mantém seu valor. Será admitido o caso mais desfavorável, no qual  $v \gg w$ .

Apesar de, em teoria,  $k_{sat}$  jamais assumir o valor nulo, porque isso implicaria num sinal de controle  $v$  infinito, o valor limite

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{w}{v} = 0 \quad (5.2)$$

será utilizado em alguns dos desenvolvimentos deste capítulo.

A consequência da aplicação deste valor limite nas condições oriundas da utilização do critério de Hurwitz será a alteração do status de condição necessária e suficiente para apenas suficiente, como será visto melhor adiante.

Analogamente, a zona morta, descrita em 4.2, pode ser interpretada como um ganho  $k_{zm} = \frac{y_{zm}}{v} = \frac{v \pm sat}{v}$ , que assume algum valor no intervalo  $[0, 1)$ .

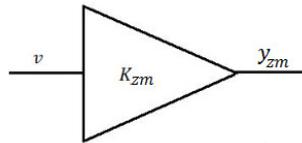


Figura 5.2: Zona morta interpretada como um ganho  $\frac{y_{zm}}{v}$

Para esta não-linearidade, ambos  $y_{zm}$  e  $v$  assumem valores muito grandes na ocorrência da saturação do controle, de tal forma que  $k_{zm}$  se aproxima do valor unitário. O valor limite

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{y_{zm}}{v} = \lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{v \pm sat}{v} = 1 \quad (5.3)$$

será também utilizado neste capítulo.

### 5.1.3 – Equações típicas

Duas equações se repetirão para a maioria dos desenvolvimentos a seguir, dado que os diagramas de blocos sob estudo tem em comum a seguinte estrutura.

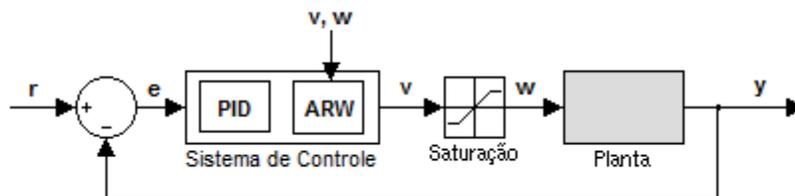


Figura 5.3: Estrutura básica dos sistemas analisados nesse capítulo

Embora o sistema com o controle saturado seja um sistema não-linear, visando abordar o problema da estabilidade por um método linear, será considerado que em cada pequeno intervalo de tempo ele funciona de maneira linear. Esta abordagem não possui rigor matemático, mas será utilizada de modo livre e suas ocorrências serão confrontadas com os resultados experimentais.

Dessa forma, as equações abaixo se aplicam a todas as análises das seções seguintes.

$$\frac{e}{y} = \frac{e}{v} \cdot \frac{v}{w} \cdot \frac{w}{y} = \frac{e}{v} \cdot \frac{1}{k_{sat}} \cdot s^2 \quad (5.4)$$

$$e = r - y \therefore \frac{y}{r} = \left( \frac{e}{y} + 1 \right)^{-1} \quad (5.5)$$

## 5.2 – Back-Calculation

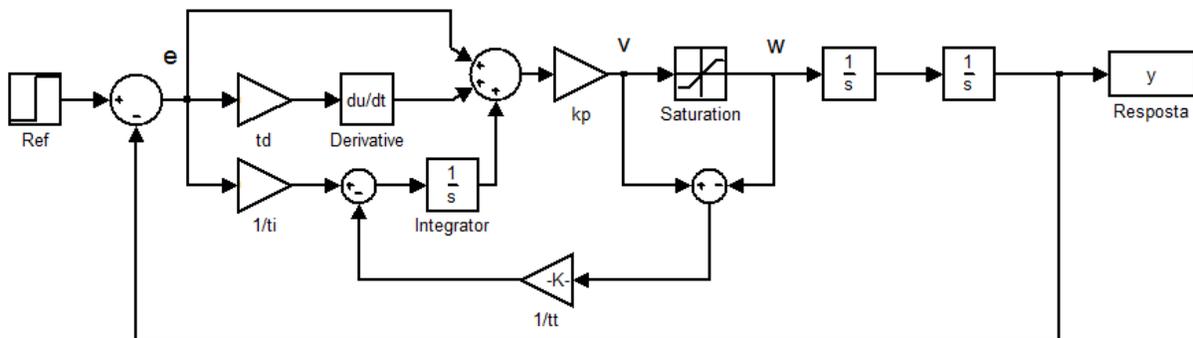


Figura 5.4: PID com back-calculation no controle do duplo integrador

Considerando o diagrama de blocos da figura 5.4, temos

$$v = k_p \left[ e + e \cdot t_d \cdot s + \left( \frac{1}{t_i} \cdot e - \frac{v - w}{t_t} \right) \cdot \frac{1}{s} \right]$$

Rearrmando, temos

$$e \left( k_p + k_p \cdot t_d \cdot s + \frac{k_p}{t_i} \cdot \frac{1}{s} \right) + w \left( \frac{k_p}{t_t} \cdot \frac{1}{s} \right) - v \left( \frac{k_p}{t_t} \cdot \frac{1}{s} + 1 \right) = 0$$

Dividindo todos os termos por  $v$  e resolvendo para  $\frac{e}{v}$ , encontramos que

$$\frac{e}{v} = \frac{\frac{1}{k_p} + \frac{1}{t_t} \cdot \frac{1}{s} \left(1 - \frac{w}{v}\right)}{t_d \cdot s + 1 + \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{s}}$$

Aplicando  $\frac{w}{v} = k_{sat}$  e reescrevendo a equação acima, temos que

$$\frac{e}{v} = \frac{\frac{1}{k_p} + \frac{1}{t_t} \cdot \frac{1}{s} (1 - k_{sat})}{t_d \cdot s + 1 + \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{s}}$$

Aplicando (5.4),

$$\frac{e}{y} = \frac{\frac{1}{k_p} + \frac{1}{t_t} \cdot \frac{1}{s} (1 - k_{sat})}{t_d \cdot s + 1 + \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{s}} \cdot \frac{1}{k_{sat}} \cdot s^2$$

Rearrmando, temos

$$\frac{e}{y} = \frac{\frac{1}{k_{sat} \cdot k_p} \cdot s^3 + \frac{1}{t_t} \left( \frac{1}{k_{sat}} - 1 \right) s^2}{t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i}}$$

Aplicando (5.5),

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} &= \left( \frac{\frac{1}{k_{sat} \cdot k_p} \cdot s^3 + \frac{1}{t_t} \left( \frac{1}{k_{sat}} - 1 \right) s^2}{t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i}} + 1 \right)^{-1} \\ &= \frac{t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i}}{\frac{1}{k_{sat} \cdot k_p} s^3 + \left( \frac{1}{t_t} \left( \frac{1}{k_{sat}} - 1 \right) + t_d \right) s^2 + s + \frac{1}{t_i}} \end{aligned}$$

Apliquemos agora o critério de Hurwitz ao denominador da função acima.

No que diz respeito à condição i, sabemos que todos os coeficientes das potências de  $s$  do denominador de  $\frac{Y}{R}$  são obviamente sempre positivos, a não ser pelo coeficiente do termo de segunda ordem,  $\frac{1}{t_t} \left( \frac{1}{k_{sat}} - 1 \right) + t_d$ . Para confirmar sua positividade, precisamos nos assegurar que  $\frac{1}{k_{sat}} - 1 > 0$ . Considerando que  $k_{sat}$  existe em  $(0, 1]$ ,  $\frac{1}{k_{sat}}$  existe consequentemente em  $[1, \infty)$  e, desta forma, a positividade do termo em questão está assegurada.

Em relação à condição (ii), devemos satisfazer que

$$\frac{1}{t_t} \left( \frac{1}{k_{sat}} - 1 \right) + t_d > \frac{1}{k_{sat} \cdot k_p \cdot t_i}$$

Se utilizássemos o valor do caso linear  $k_{sat} = 1$  teríamos novamente a condição de estabilidade para este caso descrita por (5.1).

Resolvendo a condição para  $\frac{1}{t_t}$ , temos:

$$\frac{1}{t_t} > \frac{\frac{1}{t_i \cdot k_p} - t_d \cdot k_{sat}}{1 - k_{sat}} \quad (5.6)$$

A condição encontrada acima é necessária e suficiente para a estabilidade, dado que o critério de Hurwitz nos oferece este tipo de condição. Ela não nos serve, no entanto, como uma condição prática a ser utilizada, dado que o que sabemos sobre  $k_{sat}$  na saturação é que ele vale próximo de zero, mas seu valor não pode ser precisado.

Sendo assim, utilizemos o valor limite de  $k_{sat}$  para estabelecermos uma nova condição, aplicando o valor nulo a este ganho na condição encontrada acima. Desta forma,

$$\frac{1}{t_t} > \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{k_p} \quad (5.7)$$

Ao fazer isto, obtemos uma condição que nos garante estabilidade, mas ela é apenas uma condição suficiente e não mais necessária. Podemos ver que (5.7) fornece uma região de estabilidade menor do que aquela fornecida por (5.6) verificando a validade da inequação abaixo.

$$\frac{\frac{1}{t_i \cdot k_p} - t_d \cdot k_{sat}}{1 - k_{sat}} \leq \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{k_p}$$

Manipulando a inequação acima, veremos que ela se resume à condição de estabilidade do caso linear, já apresentada anteriormente,  $k_p \cdot t_i \cdot t_d \geq 1$ .

Para verificarmos experimentalmente a validade das previsões feitas até aqui, utilizemos os valores de PID discriminados na tabela 3.3. Aplicando-os em (5.7) temos a seguinte condição suficiente para estabilidade:

$$\frac{1}{t_t} > 0.0455$$

Lembrando que a utilização da referência  $r = 1.5 u(t)$ , no capítulo 3, levou o sistema sem ARW à instabilidade, será apresentada agora a resposta do sistema para uma a referência  $r = 100 u(t)$ , utilizando  $\frac{1}{t_t} = 0.046$ . Esta referência foi escolhida propositalmente alta, para nos aproximarmos da situação na qual  $v \gg w$ , suposição que nos permitiu assumir que  $k_{sat}$  tende a zero.

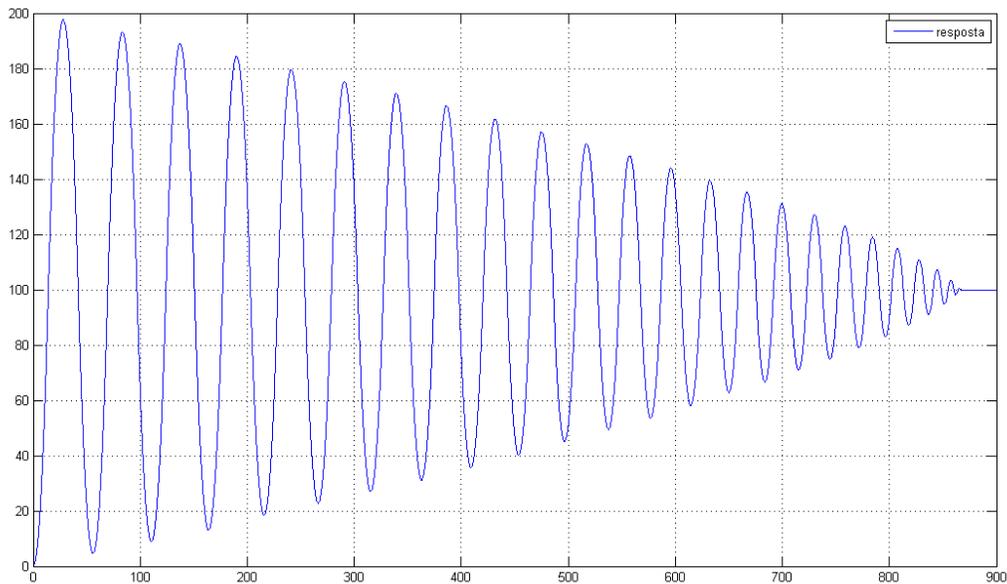


Figura 5.5: Resultado estável para  $r = 100 u(t)$  quando  $\frac{1}{t_t} = 0.046$

Para valores de referência mais baixos e condizentes com o sistema, veremos que a resposta se mantém convergente para uma faixa de valores menores do que 0.0455, já que a condição dada por (5.7) é apenas suficiente, mas não necessária.

Vejamos, na tabela abaixo, o resultado de simulações feitas para outros degraus de referência. Podemos ver que, com a diminuição do valor da referência, os sistemas conseguem obter respostas convergentes para  $\frac{1}{t_t} < 0.0455$ .

**Tabela 5.1: Resultados de estabilidade para mais degraus de referência**

<b>Referência</b>	<b>Resposta convergente</b>	<b>Resposta divergente</b>
<b>1000</b>	$\frac{1}{t_t} = 0.0460$	$\frac{1}{t_t} = 0.0450$
<b>100</b>	$\frac{1}{t_t} = 0.0440$	$\frac{1}{t_t} = 0.0430$
<b>10</b>	$\frac{1}{t_t} = 0.0380$	$\frac{1}{t_t} = 0.0370$
<b>1.5</b>	$\frac{1}{t_t} = 0.2400$	$\frac{1}{t_t} = 0.2000$

Podemos então concluir que a abordagem linear (livremente adotada) conduzida nesta seção nos fornece uma faixa de valores para os quais a estabilidade é prevista. Em particular, pudemos prever que haveria estabilidade se  $k_p \cdot t_d \cdot t_i \geq 1$  e  $\frac{1}{t_t} > 0.0455$  e esta previsão foi corroborada pelas simulações. Experimentalmente, pode haver estabilidade para valores menores do que  $\frac{1}{t_t} = 0.0455$ , mas tais valores não podem ser previstos por esta análise.

A seguir, temos os estudos de estabilidade, feitos de maneira análoga, das demais técnicas de ARW deste trabalho.

### 5.3 – Zona Morta

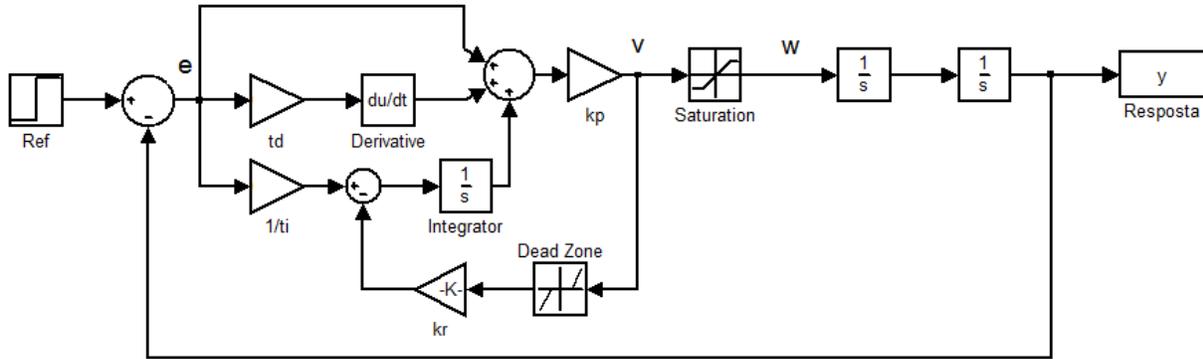


Figura 5.6: PID com a técnica da zona morta no controle do duplo integrador

Considerando o diagrama de blocos da figura 5.6, temos que

$$v = k_p \left[ e + e \cdot t_d \cdot s + \left( e \cdot \frac{1}{t_i} - k_r \cdot k_{zm} \cdot v \right) \cdot \frac{1}{s} \right]$$

Rearrmando, temos

$$e \cdot k_p \left( 1 + t_d \cdot s + \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{s} \right) - v \cdot \left( k_p \cdot k_r \cdot k_{zm} \cdot \frac{1}{s} + 1 \right) = 0$$

Resolvendo para  $\frac{e}{v}$ , temos

$$\frac{e}{v} = \frac{k_r \cdot k_{zm} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{k_p}}{1 + t_d \cdot s + \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{s}}$$

Aplicando (5.4),

$$\frac{e}{y} = \frac{k_r \cdot k_{zm} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{k_p}}{1 + t_d \cdot s + \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{s}} \cdot \frac{1}{k_{sat}} \cdot s^2 = \frac{\frac{1}{k_p} \cdot s^3 + k_r \cdot k_{zm} \cdot s^2}{k_{sat} \cdot \left( t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i} \right)}$$

Aplicando (5.5),

$$\begin{aligned} \frac{y}{r} &= \left[ \frac{\frac{1}{k_p} \cdot s^3 + k_r \cdot k_{zm} \cdot s^2}{k_{sat} \cdot \left( t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i} \right)} + 1 \right]^{-1} \\ &= \frac{k_{sat} \left( t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i} \right)}{\frac{1}{k_p} \cdot s^3 + (k_r \cdot k_{zm} + k_{sat} \cdot t_d) \cdot s^2 + k_{sat} \cdot s + \frac{k_{sat}}{t_i}} \end{aligned}$$

Aplicando o critério de Hurwitz ao denominador de  $\frac{y}{r}$ , devemos novamente nos preocupar em satisfazer apenas a condição ii, dado que todos os coeficientes são positivos e a condição i é imediatamente satisfeita.

A condição ii é dada pela inequação

$$k_r \cdot k_{zm} + k_{sat} \cdot t_d > \frac{1}{k_p \cdot t_i} \quad \therefore \quad k_p \cdot t_i (k_r \cdot k_{zm} + k_{sat} \cdot t_d) > 1$$

A inequação acima representa uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica. Novamente, se utilizarmos os valores do caso linear  $k_{zm} = 0$  e  $k_{sat} = 1$ , essa condição se resumirá à condição de estabilidade do caso linear.

Analogamente ao que foi feito para o back-calculation, utilizemos os valores limites  $k_{sat} = 0$  e  $k_{zm} = 1$  para encontrar uma condição suficiente de estabilidade. Desta forma, a condição a ser satisfeita é

$$k_r > \frac{1}{k_p \cdot t_i}$$

Não surpreendentemente esta condição é idêntica à (5.7), lembrando que o ganho  $k_r$  equivale ao ganho  $\frac{1}{t_t}$  do back-calculation e que foi mostrado no capítulo 4 que estas técnicas se equivalem se estes ganhos forem iguais. Os resultados experimentais são, também, os mesmos.

## 5.4 – Integração Condicional

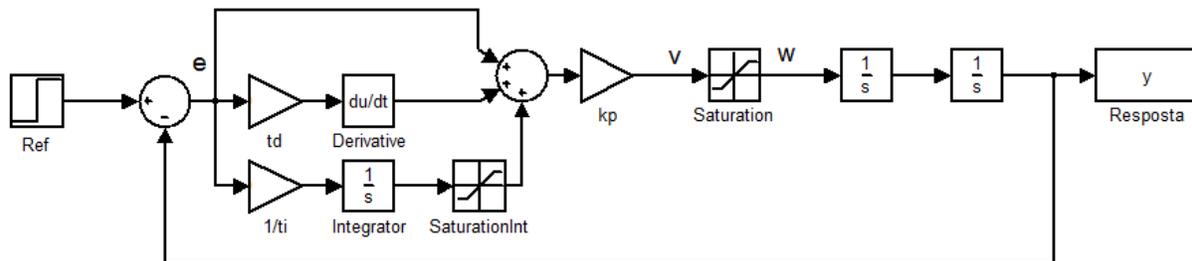


Figura 5.7: PID com integração condicional no controle do duplo integrador

Analisando o diagrama de blocos da figura 5.7 e considerando que a saturação utilizada no ramo integral é interpretada como um ganho  $k_{si}$ , analogamente ao ganho  $k_{sat}$ , temos que

$$e \cdot \left( 1 + t_d \cdot s + \frac{1}{t_i} \cdot \frac{1}{s} \cdot k_{si} \right) k_p = v$$

Rearrumando,

$$\frac{e}{v} = \frac{s}{k_p \cdot \left( t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i} \cdot k_{si} \right)}$$

Aplicando (5.4),

$$\frac{e}{y} = \frac{s^3}{k_{sat} \cdot k_p \cdot \left( t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i} \cdot k_{si} \right)}$$

Aplicando (5.5),

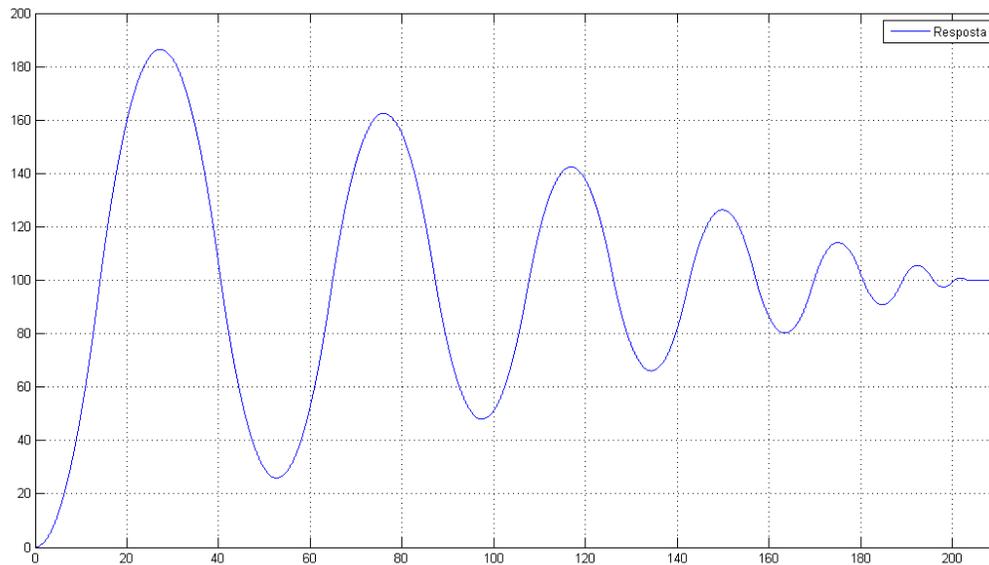
$$\frac{y}{r} = \frac{k_p \cdot k_{sat} \left( t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i} \cdot k_{si} \right)}{s^3 + k_p \cdot k_{sat} \left( t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i} \cdot k_{si} \right)}$$

Dado que a condição i do critério de Hurwitz para polinômios de terceira ordem está satisfeita para o denominador do polinômio acima, faltaria aplicar a condição ii para analisarmos

a estabilidade de  $\frac{y}{r}$  de maneira análoga ao que foi feito até agora para as técnicas back-calculation e da zona morta.

A condição ii, no entanto, nos fornece a restrição  $k_{sat} \cdot k_p \cdot t_d \cdot t_i > k_{si}$ , que é inconclusiva sobre a escolha exata do parâmetro ajustável desta técnica, que é o limite da saturação integral. Sendo assim, a interpretação da saturação como um ganho não é adequada à análise desta técnica.

Utilizando, no entanto, a sugestão feita no capítulo 4 de se adotar o limite da saturação integral em função da saturação do controle fazendo  $sat_i = \frac{sat}{k_p}$  e utilizando o degrau de referência  $r = 100 \cdot u(t)$ , temos o resultado abaixo, que corrobora a estabilidade proporcionada por esta escolha.



**Figura 5.8: Resultado estável para  $r = 100 u(t)$  quando  $sat_i = \frac{sat}{k_p} = 0.0909$**

## 5.5 – Técnica de C. T. Chen

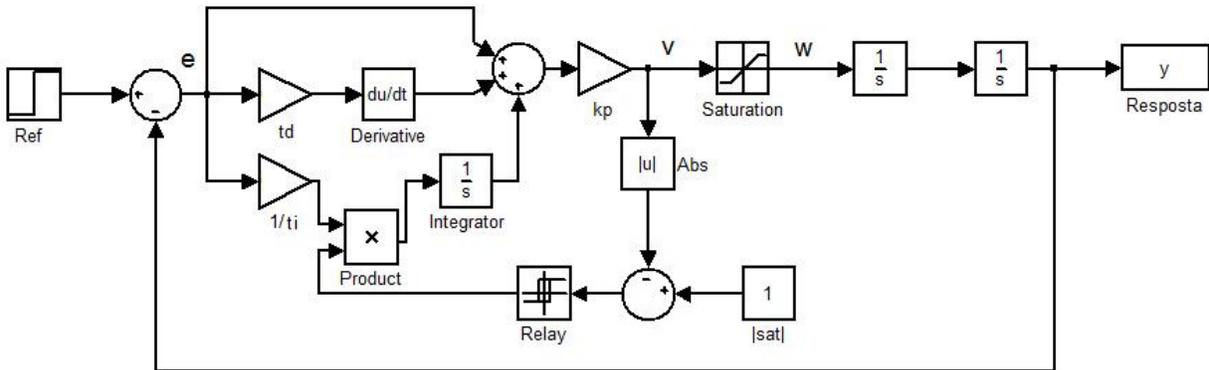


Figura 5.9: PID com a técnica de C. T. Chen no controle do duplo integrador

Considerando o diagrama de blocos da figura 5.9, podemos prever que o sistema que adota a técnica de ARW proposta por C. T. Chen sempre vai estabilizar já que o ganho integral é anulado se  $v$  superar o valor de saturação. O controle se reduz, então, a um controle PD que, como vimos anteriormente, sempre estabiliza o duplo integrador.

Os cálculos abaixo formalizam este raciocínio.

Pelo diagrama de blocos, considerando que o controle integral foi anulado pelo relé, podemos ver que

$$e(1 + t_d \cdot s)k_p = v$$

Resolvendo para  $\frac{e}{v}$ , temos

$$\frac{e}{v} = \frac{1}{(1 + t_d \cdot s)k_p}$$

Aplicando (5.4)

$$\frac{e}{y} = \frac{s^2}{k_{sat}(1 + t_d \cdot s)k_p}$$

Aplicando (5.5)

$$\frac{y}{r} = \frac{(k_{sat} \cdot k_p \cdot t_d) \cdot s + (k_{sat} \cdot k_p)}{s^2 + (k_{sat} \cdot k_p \cdot t_d) \cdot s + (k_{sat} \cdot k_p)}$$

O denominador acima é um polinômio de segunda ordem cujos coeficientes são positivos, independentemente de qual valor no intervalo  $(0,1]$   $k_{sat}$  assumir. Sendo assim,  $\frac{y}{r}$  é estável. Na simulação abaixo, podemos ver que a resposta converge para o degrau de referência  $r = 100 \cdot u(t)$ .

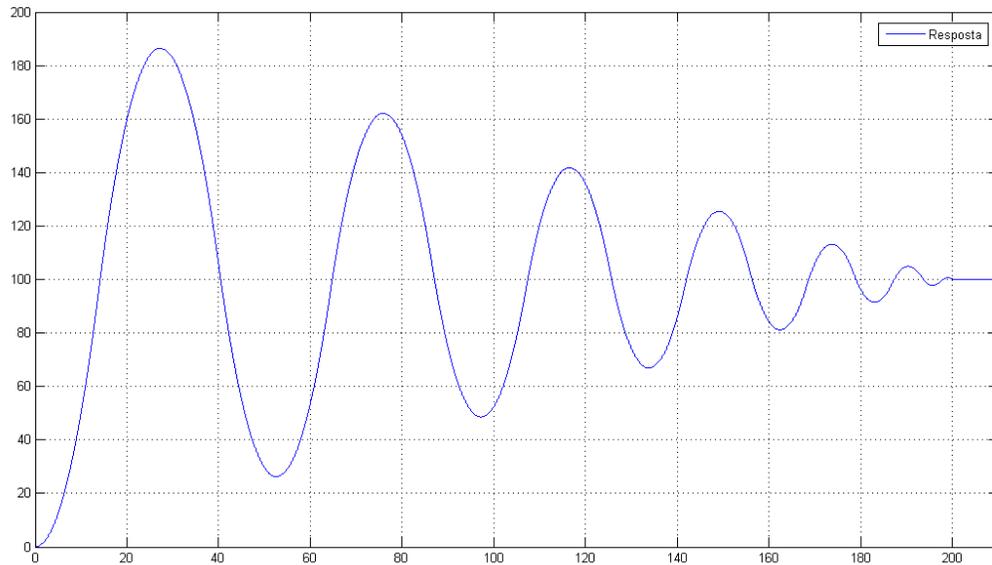


Figura 5.10: Resultado estável para  $r = 100 \cdot u(t)$

## 5.6 – External Reset

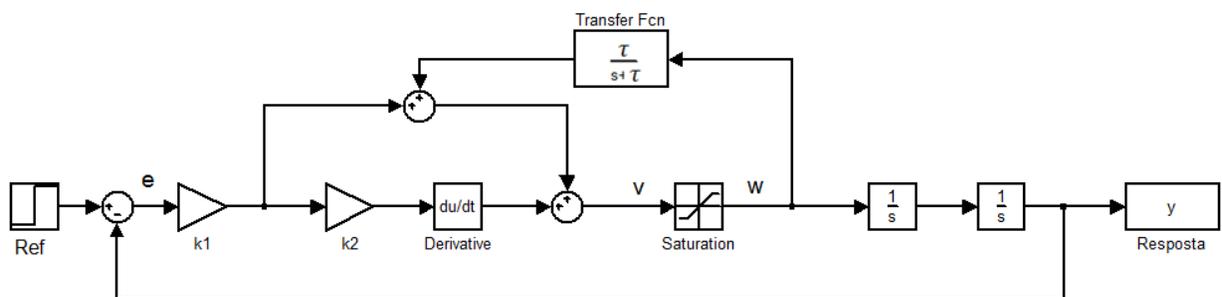


Figura 5.11: PID com external reset no controle do duplo integrador

Considerando o diagrama de blocos da figura 4.6, temos que

$$v = k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot s) \cdot e + v \cdot k_{sat} \cdot \frac{\tau}{s + \tau}$$

Rearrmando,

$$\frac{e}{v} = \frac{s + \tau \cdot (1 - k_{sat})}{k_1 \cdot [k_2 \cdot s^2 + (1 + \tau \cdot k_2) \cdot s + \tau]}$$

Aplicando (5.4),

$$\frac{e}{y} = \frac{s^3 + \tau \cdot (1 - k_{sat}) \cdot s^2}{k_{sat} \cdot k_1 \cdot [k_2 \cdot s^2 + (1 + \tau \cdot k_2) \cdot s + \tau]}$$

Aplicando (5.5),

$$\frac{y}{r} = \frac{k_{sat} \cdot k_1 \cdot [k_2 \cdot s^2 + (1 + \tau \cdot k_2) \cdot s + \tau]}{s^3 + [\tau \cdot (1 - k_{sat}) + k_1 \cdot k_2 \cdot k_{sat}] \cdot s^2 + k_1 \cdot k_{sat} (1 + \tau \cdot k_2) \cdot s + \tau \cdot k_1 \cdot k_{sat}}$$

Como os coeficientes do denominador de  $\frac{y}{r}$  são positivos, basta satisfazer a condição ii do critério de Hurwitz para garantir a estabilidade. Sendo assim, é preciso que

$$[\tau \cdot (1 - k_{sat}) + k_1 \cdot k_2 \cdot k_{sat}] (1 + \tau \cdot k_2) > \tau$$

Rearrmando, temos

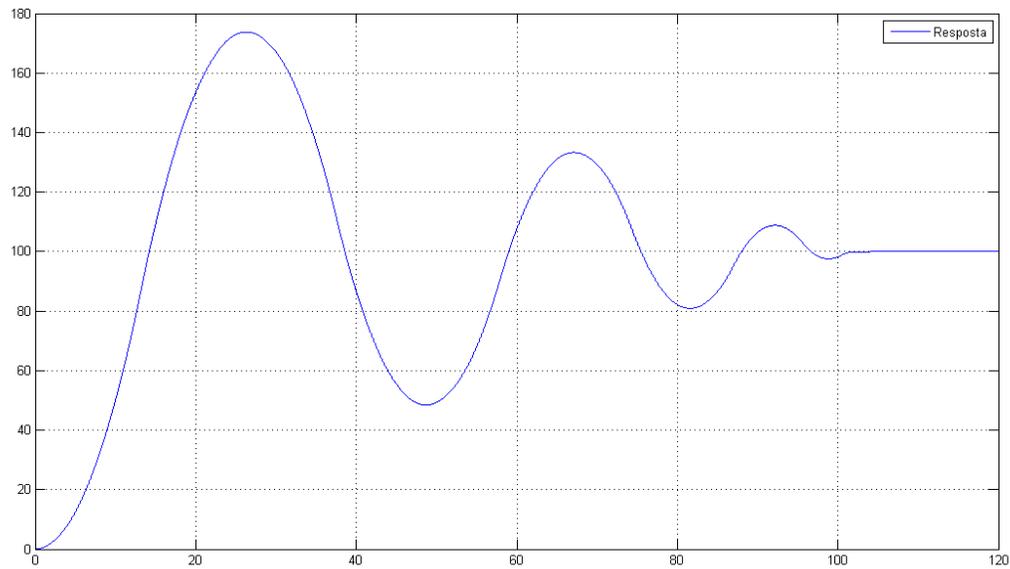
$$(k_2 - k_{sat}) \cdot \tau^2 + k_{sat} \cdot (k_1 \cdot k_2^2 - 1) \cdot \tau + k_1 \cdot k_2 \cdot k_{sat} > 0$$

A inequação acima é válida se todos os três termos forem positivos. Para garantir a positividade dos dois primeiros termos, basta garantir que:

$$k_2 - k_{sat} > 0$$

$$k_1 \cdot k_2^2 > 1$$

Como  $k_{sat}$  assume valores em  $(0,1]$ , a primeira condição acima se resume a garantir que  $k_2 > 1$ . Utilizando  $k_1 = 5.5$  e  $k_2 = 1.01$  e o degrau de referência  $r = 100 \cdot u(t)$ , temos a resposta abaixo.



**Figura 5.12: Resultado estável para  $r = 100 u(t)$  quando  $k_2 = 1.01$**

As condições para estabilidade encontradas neste capítulo foram obtidas através da interpretação das não-linearidades como ganhos constantes. No capítulo seguinte, este artifício alternativo será abandonado e o critério de Popov será utilizado para reavaliarmos a estabilidade do sistema com back-calculation.

# Capítulo 6

## Abordagem da Estabilidade Utilizando o Critério de Popov

No capítulo 5, a estabilidade provida pelas técnicas de ARW ao duplo integrador controlado por um PID foi analisada através da interpretação das não-linearidades saturação e zona morta como ganhos que poderiam ser considerados constantes numa situação de reset windup.

Para corroborar a validade desta análise, neste capítulo utilizaremos o critério de Popov para analisar a técnica back-calculation, que apresentou os melhores resultados para no controle do duplo integrador.

Sendo assim, este capítulo inicia-se com uma breve revisão do critério de Popov e, em seguida, o sistema sob estudo é submetido à modificações necessárias à utilização deste critério.

### 6.1 - Critério de Popov

Para entendermos o critério de Popov, definamos primeiramente que um setor  $(k_1, k_2)$  é a região de um plano localizada entre as retas de inclinação  $k_1$  e  $k_2$  que cruzam a origem.

Consideremos um sistema autônomo que possua uma não-linearidade sem memória e uma parte linear descrita por uma função de transferência assintoticamente estável, que será chamada, por simplicidade, de planta estável, assim como representado na figura 6.1.

O critério de Popov oferece uma condição suficiente para a estabilidade absoluta deste tipo de sistema, sendo que entende-se por estabilidade absoluta a garantia de estabilidade assintótica e global do sistema para qualquer que seja a sua não-linearidade, desde que ela se encontre dentro do setor para o qual o critério é capaz de fornecer este tipo de garantia.



Figura 6.1: Representação de um sistema sobre o qual o critério de Popov pode ser aplicado

Ou seja, através do critério de Popov, a estabilidade é garantida para não apenas uma, mas para um conjunto de não linearidades  $\Phi(e)$  que satisfaçam a condição de estarem contidas num determinado setor  $(k_1, k_2)$  pertencente aos quadrantes ímpares do plano  $e \times \Phi(e)$ .

Seja  $H(jw)$  a planta estável do sistema. O critério é formalmente descrito de maneira algébrica e diz que, se existir um número positivo  $q$  que satisfaça

$$Re[(1 + jwq)H(jw)] + \frac{1}{k} \geq \varepsilon, \quad \forall w \geq 0$$

para um  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente pequeno, então o sistema é absolutamente estável em  $(0, k)$ .

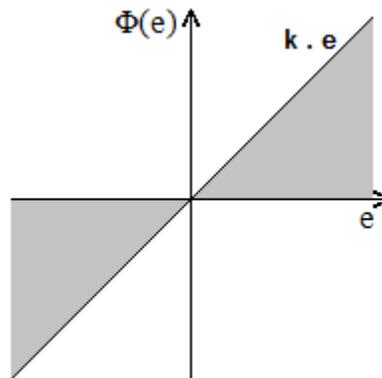


Figura 6.2: Setor  $(0, k)$  do plano  $e \times \Phi(e)$ , hachurado

Neste trabalho, assim como é feito usualmente, será utilizada a interpretação gráfica do critério para encontrar o  $k$  que define a região na qual uma não-linearidade pode estar contida. Para entendê-la, definimos

$$H_m(jw) = Re[H] + j.w.Im[H],$$

que difere de  $H(jw)$  por ter os valores imaginários multiplicados pela frequência  $w$ .

O lugar geométrico de  $H_m(jw)$  no plano  $Re \times w.Im$  é chamado de diagrama de Nyquist modificado e difere do diagrama de Nyquist de  $H(jw)$  no plano  $Re \times Im$  por ser mais ou menos esticado verticalmente.

Tendo em mãos o diagrama de Nyquist modificado, o procedimento para determinar o setor de estabilidade absoluta consiste, então, em traçar a reta

$$Re[H] - q.w.Im[H] + \frac{1}{k} = 0,$$

chamada reta de Popov, de tal forma que ela se situe inteiramente à esquerda deste diagrama e que corte a abscissa do plano  $Re \times w.Im$  o máximo à direita possível. A constante  $k$  que define o setor  $(0, k)$  é dada pelo ponto no qual a reta traçada corta a abscissa, que vale  $-\frac{1}{k}$ .

Ao situarmos a reta à esquerda do diagrama, garantimos a validade da inequação de Popov e ao escolhermos o valor mais à direita que satisfaça esta condição, garantimos a maior região de estabilidade absoluta possível.

No caso da planta do sistema não ser estável, o critério de Popov ainda pode ser aplicado, contanto que ela possa ser estabilizada por um ganho hipotético  $\alpha$ . Isto pode ser feito através de uma realimentação negativa com ganho  $\alpha$  na planta, que precisa ser compensada por um *feedforward* de ganho  $\alpha$ . Em outras palavras, o critério poderá ser aplicado se  $\frac{A}{1+\alpha A}$  for estável, onde  $A$  é a planta instável.

Desta forma, o critério passa a garantir a estabilidade global no setor  $[0, k)$  para o sistema modificado, implicando na estabilidade global no setor  $[\alpha, k + \alpha)$  para o sistema original.

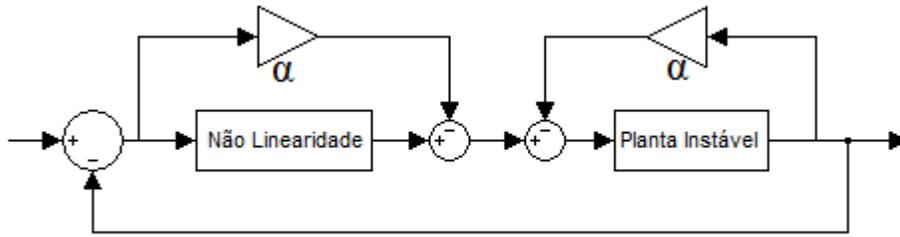


Figura 6.3: Realimentação feita estabilizar a planta instável e permitir a utilização do critério de Popov.

Mais sobre o critério de Popov pode ser encontrado nas referências [8] e [9].

## 6.2 - Adaptação do diagrama de blocos do sistema

O sistema que desejamos estudar, representado pelo diagrama de blocos da figura 4.1 e para o qual a planta é o duplo integrador, não se encontra no formato necessário à aplicação do critério de Popov. Nesta seção é mostrada a manipulação feita sobre este diagrama a fim de permitir que o critério seja aplicado.

Esta manipulação tem como objetivo encontrar um diagrama de blocos tal como foi descrito anteriormente, no qual a não-linearidade esteja em série com a parte linear, que seja equivalente ao original. A parte não-linear, neste caso, é a saturação.

Uma maneira de se obter tal diagrama é apresentada a seguir em alguns passos. O objetivo destes passos é desfazer a realimentação que parte do bloco de saturação e rearrumar o diagrama até a obtenção do formato desejado.

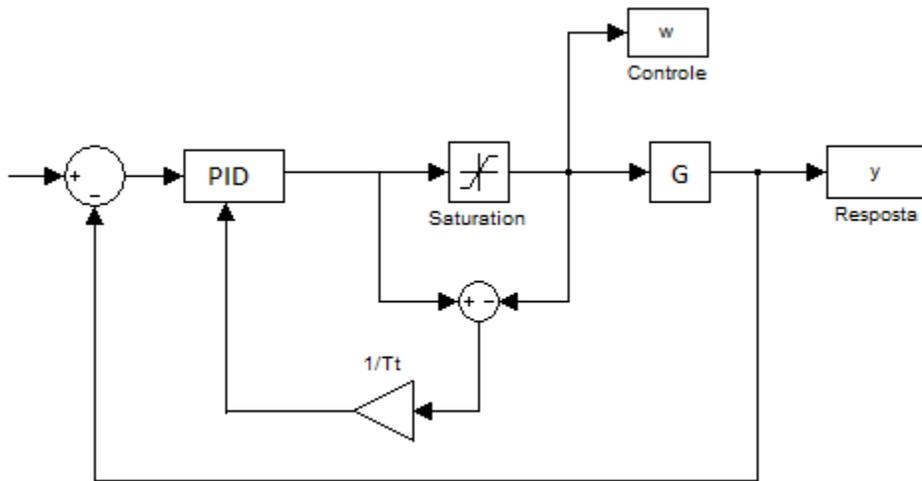


Figura 6.4: Diagrama de blocos original

O sistema pode ser representado pelo diagrama de blocos acima, na figura 6.4, onde  $G = \frac{1}{s^2}$ . Com o intuito de começar a desfazer a realimentação que parte do bloco de saturação para o ramo integral do PID, o ponto de tomada do sinal de controle  $w$  é alterado, levando-se em consideração que  $w = G^{-1} \cdot y$ . Esta alteração é vista na figura 6.5 abaixo.

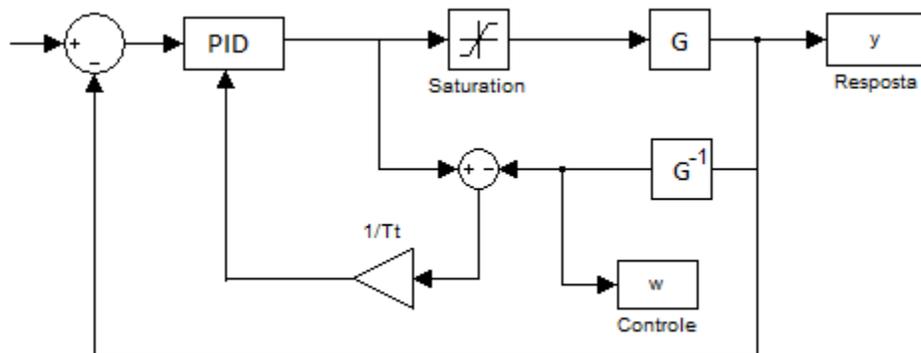


Figura 6.5: Primeira alteração - Ponto de tomada do sinal de controle  $w$  é alterado

Na figura 6.6 abaixo, vemos o mesmo diagrama da figura 6.5, desta vez com o PID mostrado detalhadamente. No ramo integral do PID está o ponto de chegada da realimentação que precisa ser desfeita. Este ponto será alterado para que a única entrada do PID seja o erro, o que permitirá a posterior movimentação deste bloco.

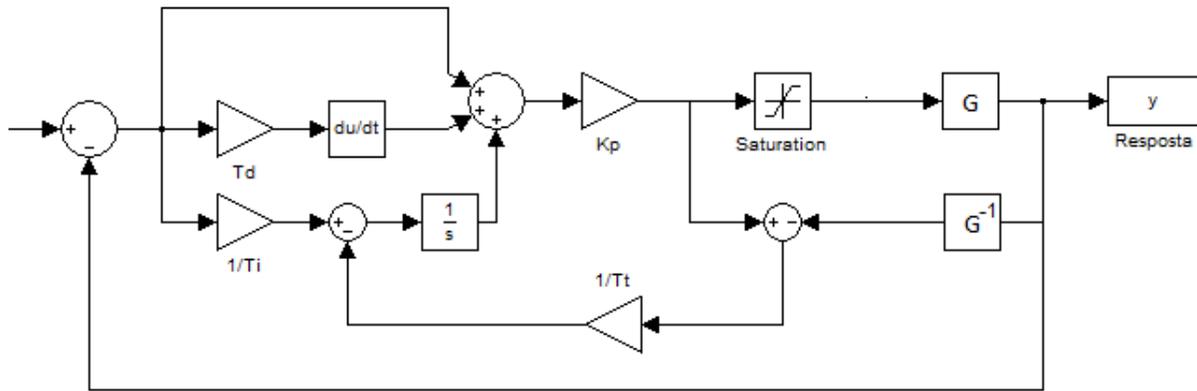


Figura 6.6: PID é aberto para ressaltar a mudança que será feita sobre a realimentação de ganho  $\frac{1}{t_t}$ , do back-calculation

Para realizar esta alteração, é preciso perceber que o sinal proveniente do ramo com o ganho  $\frac{1}{t_t}$  é, após ser subtraído no ramo integrado, multiplicado por  $\frac{1}{s}$  e depois por  $k_p$ . Sendo assim, a contribuição deste sinal pode ser subtraída na saída do PID, alterando-se o ganho do ramo de  $\frac{1}{t_t}$  para  $\frac{k_p}{t_t \cdot s}$ , como pode ser visto na figura 6.7.

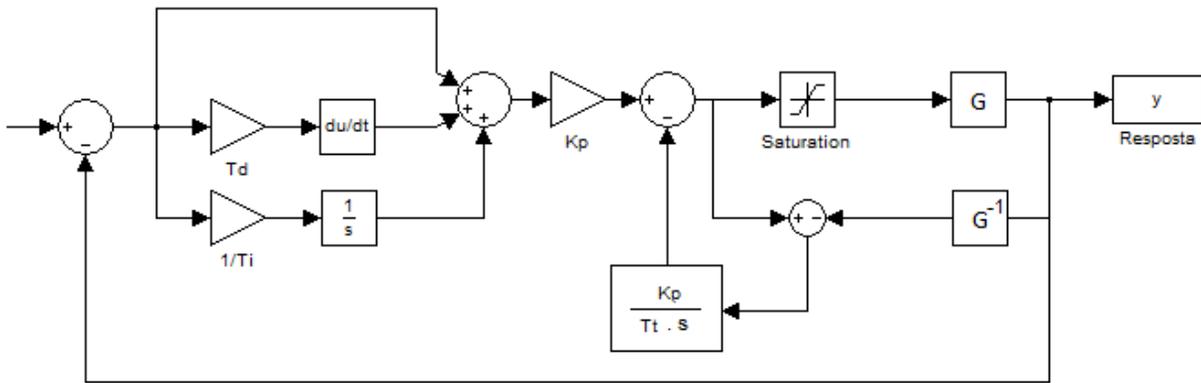


Figura 6.7: Ramo de realimentação do back-calculation tem seu ponto de chegada alterado e, conseqüentemente, seu ganho também

Voltando a mostrar o PID como uma caixa fechada e definindo  $H = \frac{k_p}{t_t \cdot s}$ , obtemos o diagrama da figura 6.8.

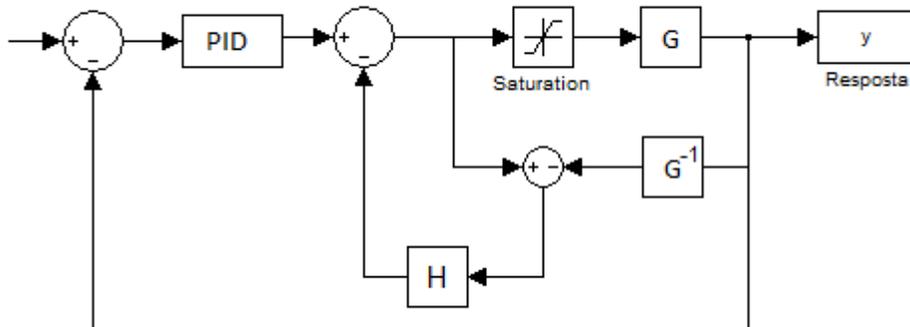


Figura 6.8: PID é novamente fechado e o ganho do back-calculation é chamado de H

A alteração a seguir, na figura 6.9, constitui-se apenas de movimentar o bloco PID para as posições de feedforward e feedback. Como, para esta análise, a referência é considerada nula, o PID em posição de feedforward poderá ser desconsiderado.

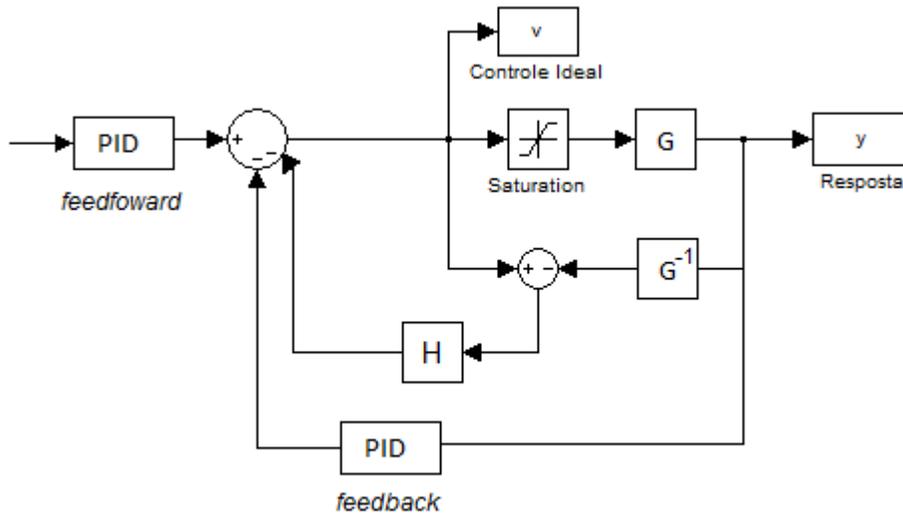


Figura 6.9: PID é movido de sua posição original para posições equivalentes

Considerando o diagrama da figura 6.9 e referência nula, podemos escrever que

$$v = -PID \cdot y - H(v - G^{-1} \cdot y)$$

Isolando  $v$ , temos que

$$v = -y \left( \frac{G \cdot PID - H}{G(1 + H)} \right)$$

Seja

$$F = \frac{G \cdot PID - H}{G(1 + H)}, \quad (6.1)$$

então

$$v = -y \cdot F.$$

O diagrama da figura 6.9 pode agora ser representado como na figura 6.10.

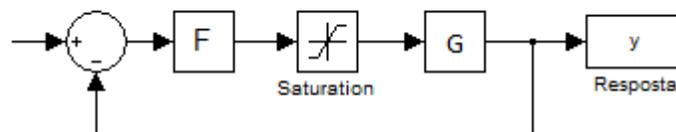


Figura 6.10: Manipulações algébricas permitiram condensar a representação do diagrama da figura 6.9

O bloco F é movimentado para as posições de feedforward e feedback, assim como foi feito com o PID anteriormente. Analogamente, o bloco em posição de feedforward poderá ser desconsiderado por assumirmos que a referência é nula.

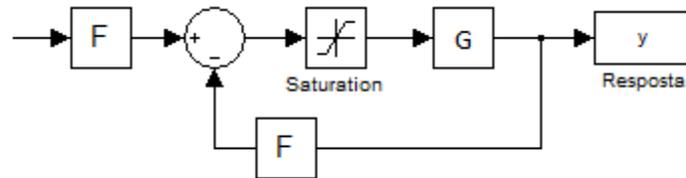


Figura 6.11: Bloco F é movido de sua posição original para posições equivalentes

O bloco F do ramo de realimentação do diagrama da figura 6.11 sofre novamente uma última movimentação, sendo retirado deste ramo e replicado antes e depois do ponto de tomada deste ramo. Esta movimentação resulta no diagrama da figura 6.12.

O lado esquerdo da linha tracejada encontra-se exatamente no formato desejado para a aplicação do critério de Popov: uma malha fechada de realimentação unitária na qual a parte não linear, a saturação, está em série com a parte linear, GF.

Em série com esta malha fechada, temos a função de transferência  $F^{-1}$ , cujo estudo de estabilidade será feito separadamente.

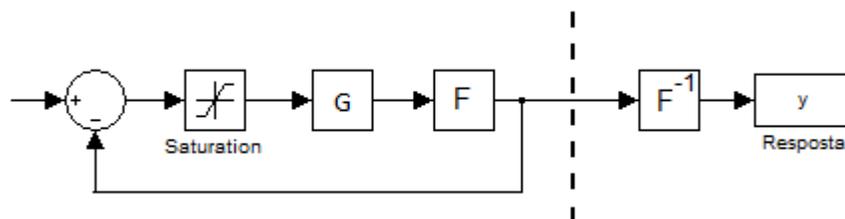


Figura 6.12: F é novamente movido para posições equivalentes

A linha tracejada que corta o diagrama acima indica as duas partes que serão tratadas separadamente no estudo de estabilidade do sistema que é feito a seguir.

## 6.3 – Estabilidade Assintótica

Antes da aplicação do critério de Popov, é necessário se assegurar de que a parte linear  $GF$  seja assintoticamente estável. Para garantirmos a estabilidade do sistema inteiro, será necessário também garantir a estabilidade de  $F^{-1}$ . A seguir, são feitos os estudos de estabilidade destas duas funções de transferência.

### 6.3.1 – Estabilidade de $F^{-1}$

Aplicando  $H = \frac{k_p}{t_t \cdot s}$ ,  $G = \frac{1}{s^2}$  e  $PID = k_p \cdot \frac{t_d \cdot s^2 + s + 1/t_i}{s}$  à (6.1), temos que

$$F = \frac{k_p \cdot \frac{t_d \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i}}{t_i s^3} - \frac{k_p}{t_t \cdot s}}{\frac{1}{s^2} \left(1 + \frac{k_p}{t_t \cdot s}\right)} = \frac{k_p \left(t_d - \frac{1}{t_t}\right) \cdot s^2 + k_p \cdot s + \frac{k_p}{t_i}}{s + \frac{k_p}{t_t}}$$

Para estudarmos a estabilidade de  $F^{-1}$ , utilizaremos o critério de Hurwitz para garantir que as raízes do numerador de  $F$  tenham parte real negativa, o que corresponde à garantir que os pólos de  $F^{-1}$  estejam no SPLE, assim como foi feito no capítulo 6.

O numerador de  $F$  é de segunda ordem. Neste caso, o critério de Hurwitz se resume em garantir que todos os coeficientes sejam positivos. Como ambos  $k_p$  e  $t_i$  são positivos, os coeficientes do termo independente e do tempo de primeira ordem também o são.

Forçar que o coeficiente de segunda ordem seja também positivo

$$k_p \left(t_d - \frac{1}{t_t}\right) > 0$$

nos leva à primeira condição de estabilidade a ser respeitada por este sistema:

$$\frac{1}{t_t} < t_d$$

### 6.3.2 – Estabilidade de $GF$

Multiplicando as funções  $G$  e  $F$  já conhecidas, temos que

$$GF = \frac{k_p \cdot \left(t_d - \frac{1}{t_t}\right) \cdot s^2 + k_p \cdot s + \frac{k_p}{t_i}}{s^3 + \frac{k_p}{t_t} \cdot s^2}$$

$GF$  é claramente instável por possuir um pólo duplo na origem. Sendo assim, é preciso encontrar  $\alpha$  de tal maneira que  $\frac{GF}{1+\alpha GF}$  seja assintoticamente estável.

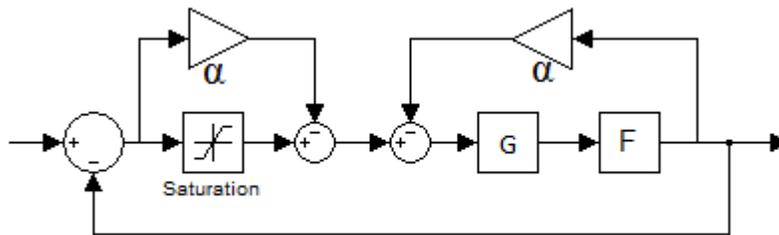


Figura 6.13:  $GF$  é estabilizada através da realimentação de  $\alpha$

Seja  $P$  a planta  $GF$  realimentada. Então,

$$P = \frac{GF}{1 + \alpha GF} = k_p \cdot \frac{\left(t_d - \frac{1}{t_t}\right) \cdot s^2 + s + \frac{1}{t_i}}{s^3 + k_p \cdot \left[\alpha \cdot t_d + \frac{1}{t_t} (1 - \alpha)\right] \cdot s^2 + \alpha \cdot k_p \cdot s + \alpha \cdot \frac{k_p}{t_i}}$$

Recorrendo novamente ao critério de Hurwitz e, sabendo que todos os coeficientes do denominador de  $P$  são garantidamente positivos a não ser pelo de segunda ordem, forçaremos que

$$k_p \cdot \left[\alpha \cdot t_d + \frac{1}{t_t} (1 - \alpha)\right] > 0$$

o que nos leva à seguinte condição:

$$\alpha (t_d \cdot t_t - 1) > -1$$

A condição acima é satisfeita para qualquer  $\alpha$ , desde que

$$t_d \cdot t_t - 1 > 0 \quad \therefore \quad t_d > \frac{1}{t_t},$$

que corresponde exatamente à mesma condição imposta à estabilidade de  $F^{-1}$ .

Além disso, como desta vez o denominador da função de transferência sob análise é um polinômio de terceira ordem, é necessário ainda satisfazer mais uma última condição, a de que o produto do coeficiente do termo de segunda ordem com o coeficiente do termo de primeira ordem seja maior do que o produto do coeficiente do termo de terceira ordem com o termo independente. Sendo assim,

$$\alpha \cdot k_p^2 \cdot \left[ \alpha \cdot t_d + \frac{1}{t_t} (1 - \alpha) \right] > \alpha \cdot \frac{k_p}{t_i} \quad \therefore \quad \alpha \cdot \left[ k_p \cdot t_i \cdot \left( t_d - \frac{1}{t_t} \right) \right] > 1 - k_p \cdot t_i \cdot \frac{1}{t_t}$$

Para garantir que qualquer valor de  $\alpha$  valide a inequação acima, é necessário considerar duas restrições:

$$1 - k_p \cdot t_i \cdot \frac{1}{t_t} < 0 \quad \therefore \quad \frac{1}{t_t} > \frac{1}{k_p \cdot t_i} \quad (6.2)$$

e

$$k_p \cdot t_i \cdot \left( t_d - \frac{1}{t_t} \right) > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{t_t} < t_d \quad (6.3)$$

A primeira destas restrições coincide com o resultado (5.7) encontrado no capítulo anterior, no qual foi utilizado uma abordagem diferente para o estudo da estabilidade do sistema.

A segunda restrição já havia sido encontrado ao estudarmos a estabilidade de  $F^{-1}$ .

Tendo estabelecido as condições que garantem  $P$  estável, podemos finalmente aplicar o critério de Popov ao sistema.

É necessário ter em mente que, como dito anteriormente em 6.1, se o critério garante estabilidade absoluta num setor  $[0, k)$  para o sistema no qual  $P$  é a planta, então ele garante estabilidade num setor  $[\alpha, k + \alpha)$  para o sistema original no qual  $GF$  é a planta.

Como estabelecemos condições para que qualquer valor de  $\alpha$  seja elegível como ganho da realimentação que estabiliza  $GF$ , podemos então escolher um  $\alpha$  arbitrariamente pequeno. Neste caso, o setor  $[\alpha, k + \alpha)$  tende ao setor  $(0, k)$ , que passa a ser o setor para o qual há estabilidade absoluta.

## 6.4 - Estabilidade Absoluta

Aplicando os valores da tabela 3.2 à condição (6.2), temos que

$$\frac{1}{t_t} > 0.0455$$

para que o sistema com back-calculation seja estável. Este valor é o mesmo encontrado no capítulo 6, através da abordagem utilizada então.

A condição (6.3) já esta sendo respeitada pela escolha de  $t_d$  que foi feita no início do trabalho.

Será utilizando, então,  $\frac{1}{t_t} = 0.046$  no restante deste desenvolvimento.

Conforme dito anteriormente,  $\alpha$  pode ser arbitrariamente pequeno e, desta forma, será utilizado

$$\alpha = 0.001.$$

Utilizando os valores discriminados na tabela 3.2 e com os valores escolhidos para  $\frac{1}{t_t}$  e  $\alpha$ , a função de transferência  $P$  se torna

$$P = \frac{4.9440 s^2 + 11.0000 \cdot s + 5.5000}{s^3 + 0.5110 \cdot s^2 + 0.0110 \cdot s + 0.0055}$$

O diagrama de Nyquist modificado de  $P$  é mostrado abaixo.

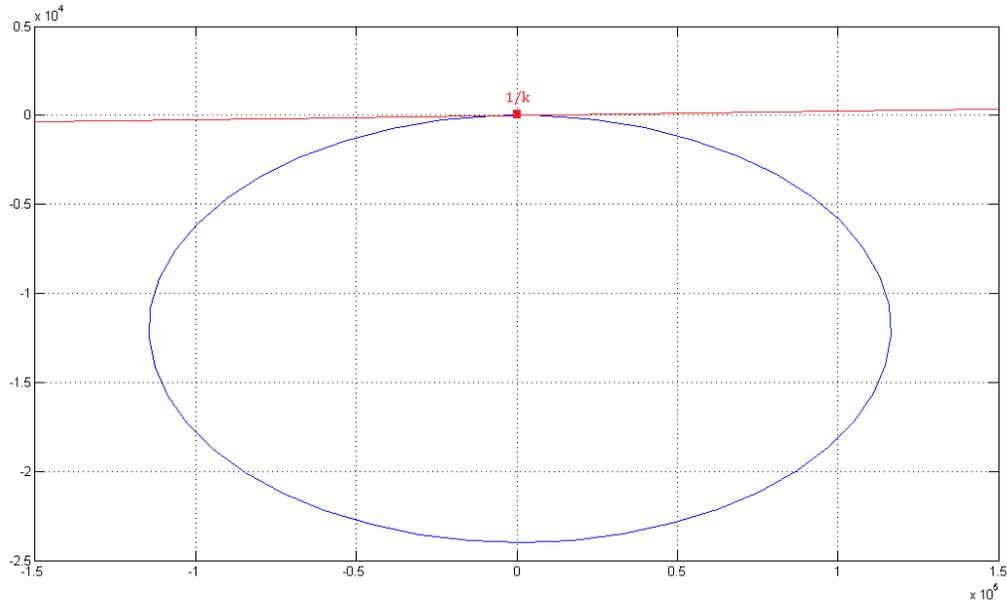


Figura 6.14: Diagrama de Nyquist modificado para  $\frac{1}{t_t} = 0.046$

Em vermelho, na figura 6.14, temos a reta de Popov e podemos ver que o ponto que corta a abscissa tende à zero, logo

$$-\frac{1}{k} \rightarrow 0$$

e por isso

$$k \rightarrow \infty.$$

Desta forma, a estabilidade global é garantida para  $[\alpha, \infty) \approx (0, \infty)$ .

Como a saturação descrita no capítulo 2 é uma não-linearidade pertencente ao setor (0,1) e o sistema com  $\frac{1}{t_t} > 0.0455$  tem estabilidade garantida para não-linearidades em  $(0, \infty)$ , o sistema é estável.

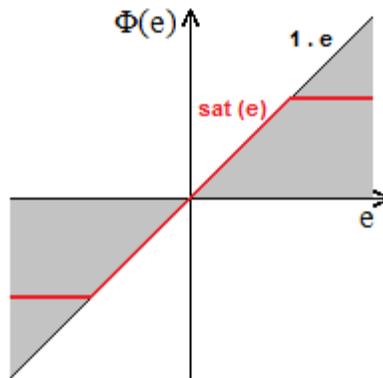


Figura 6.15: Saturação no pertence ao setor  $(0, \infty)$

Para corroborar esta análise, se desrespeitarmos a condição  $\frac{1}{t_t} > 0.0455$ , utilizando o valor  $\frac{1}{t_t} = 0.044$ , teremos o resultado da figura 6.16.

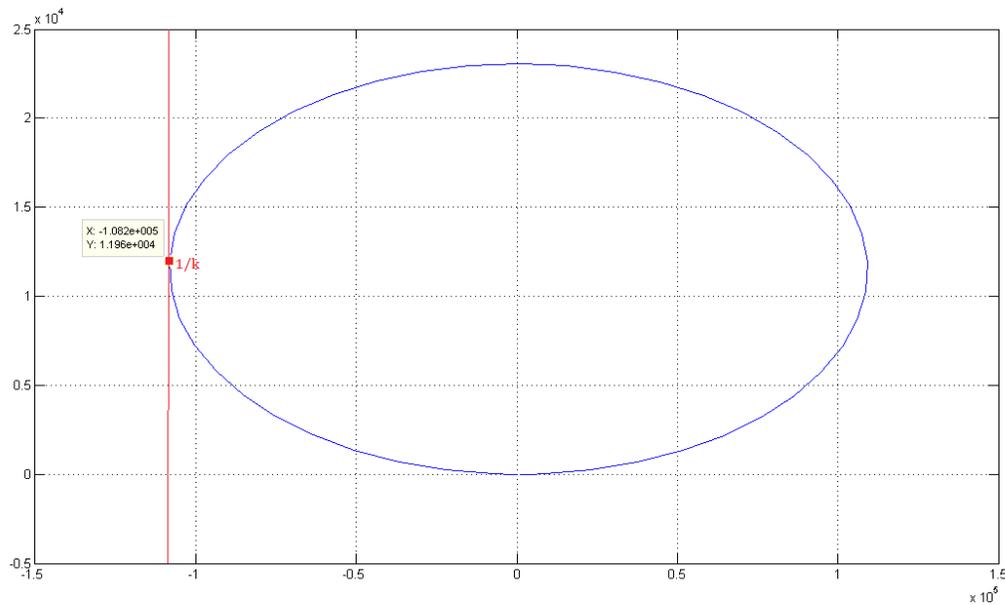


Figura 6.16: Diagrama de Nyquist modificado para  $\frac{1}{t_t} = 0.044$

Desta vez, a reta de Popov passa a cortar o eixo real em aproximadamente  $-1.082 \cdot 10^5$ . Sendo assim,

$$-\frac{1}{k} \cong -1.082 \cdot 10^5 \therefore k = 9.2421 \cdot 10^{-6}$$

Desta forma, a região de estabilidade seria de  $[\alpha, k + \alpha)$ . Entretanto, como  $k \ll \alpha$ , o intervalo tenderia a um único ponto, de tal forma que a região de estabilidade seria desprezível e o sistema seria instável para a saturação, bem como para quaisquer outras não-linearidades.

No capítulo seguinte, respeitando as condições de estabilidade encontradas até aqui, as técnicas aplicadas ao duplo integrador serão reavaliadas, desta vez com num estudo com intuito comparativo. Este mesmo tipo de estudo será conduzido também para a planta estável de terceira ordem, apresentada no capítulo 3.

# Capítulo 7

## Comparação entre as Técnicas de ARW

Neste capítulo, as técnicas de ARW serão aplicadas aos dois sistemas estudados neste trabalho, com o intuito de estabelecermos uma comparação entre as mesmas.

Como visto no capítulo 3, o dano mais significativo à resposta do sistema com a planta estável foi o atraso de resposta obtido após a ocorrência de uma perturbação no controle. Para o duplo integrador, foi utilizada uma referência constante que, ao ter sua amplitude aumentada, ocasionou o reset windup e levou o sistema à instabilidade.

Sendo assim, avaliaremos comparativamente a capacidade de cada técnica em amenizar os danos descritos, através dos critérios que serão apresentados ao longo do capítulo.

Os valores de ajuste de PID, discriminados para a planta estável e para o duplo integrador nas tabelas 3.1 e 3.3, respectivamente, foram mantidos para as simulações deste capítulo.

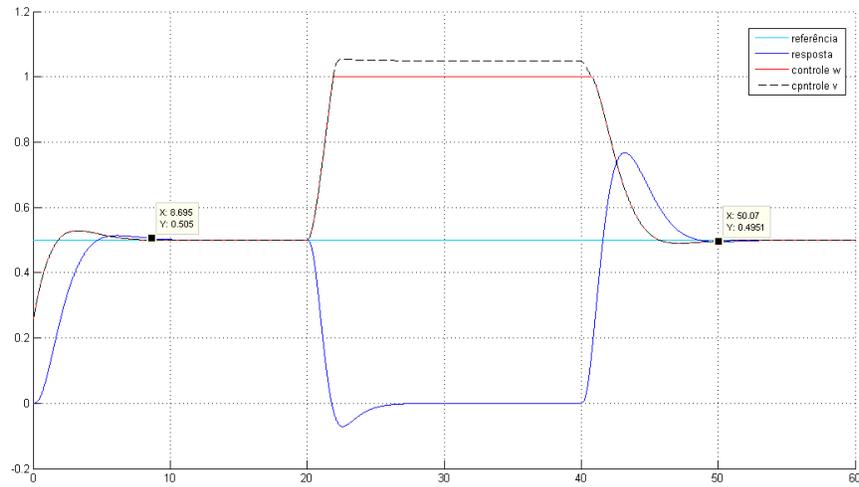
### 7.1 – Planta Estável

Utilizando, para a planta estável, a referência  $r = 0.5 \cdot u(t)$  e uma perturbação constante com amplitude de  $-1$  somada ao controle, assim como foi feito no capítulo 3, é reproduzida a situação na qual, sem ARW, obtivemos o atraso de resposta mais grave após a ocorrência da perturbação.

A seguir, são apresentadas as respostas para a situação descrita acima, para cada técnica de ARW aplicada ao sistema.

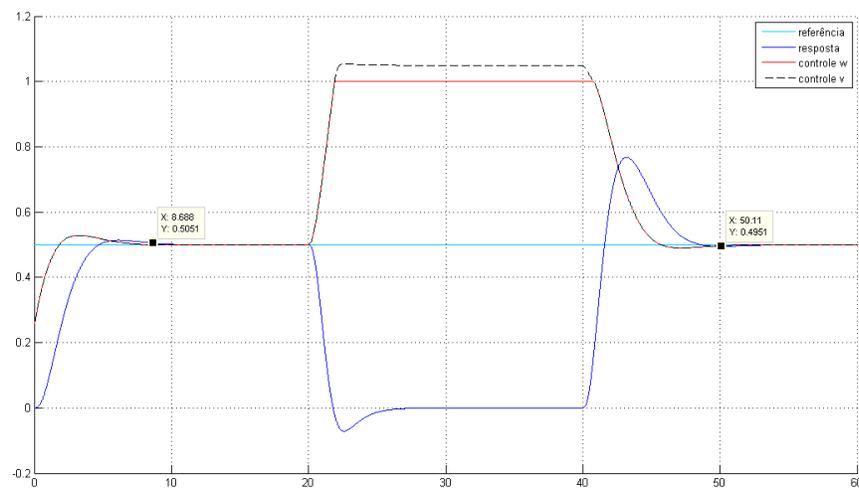
Começando pelo back-calculation, a simulação apresentada abaixo resulta da utilização de  $\frac{1}{tt} = 10$ . Este ajuste proporcionou o menor atraso de resposta para esta técnica, representando então a melhor resposta que o back-calculation pode oferecer. Valores maiores de que 10 para o ganho  $\frac{1}{tt}$  não acarretam em mudança significativa em

relação ao resultado da figura 5.1. O tempo de assentamento obtido após o cessar da perturbação em  $t = 40 u. t.$  foi de aproximadamente  $10.1 u. t.$



**Figura 7.1: Resposta da planta estável para o back-calculation**

Para a técnica da zona morta, o ganho  $k_r$  foi mantido igual ao ganho  $\frac{1}{tt}$  da simulação anterior, acarretando no mesmo tempo de assentamento após o cessar da perturbação em  $t = 40 u. t.$ , corroborando a discussão do capítulo 4, na qual foi visto que estas duas técnicas se equivalem se  $k_r = \frac{1}{tt}$ .



**Figura 7.2: Resposta da planta estável para a técnica da zona morta**

A simulação para a técnica de integração condicional, apresentada na figura 7.3, mostra que a técnica foi capaz de prevenir totalmente a ocorrência da saturação do controle, para metade do valor máximo sugerido para a saturação integral no capítulo 4, ou seja,  $sat_i = 0.5 \cdot \frac{sat}{k_p} = 0.5 \cdot \frac{1}{0.5} = 1$ . O tempo de assentamento após o cessar da perturbação em  $t = 40$  u. t. foi de aproximadamente 14.3 u. t..

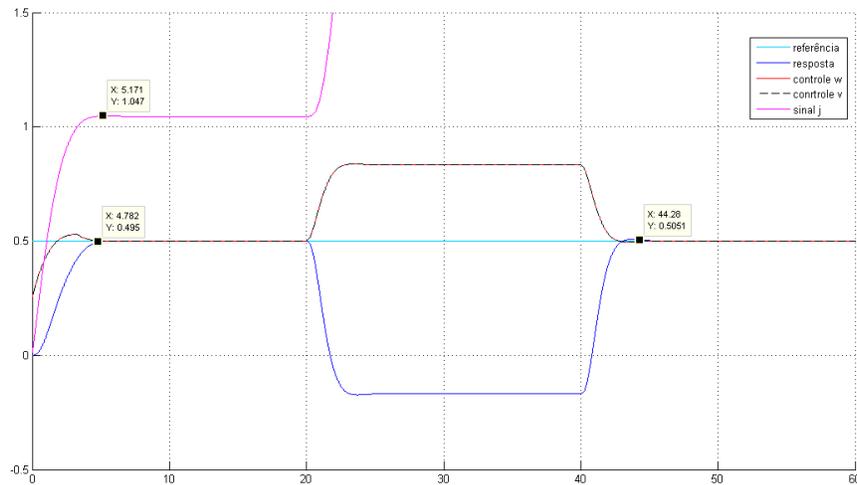


Figura 7.3: Resposta da planta estável para a técnica de integração condicional

Nota-se que esta técnica alterou o tempo de assentamento inicial do sistema, de aproximadamente  $8.7 \cdot u(t)$ , como pode ser visto nas respostas para todas as demais técnicas, para  $4.8 u. t.$ . O sinal j, correspondente à saída do integrador, foi mostrado adicionalmente na simulação apresentada na figura 7.3, para auxiliar o entendimento deste fato.

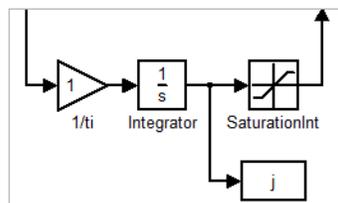


Figura 7.4: Ramo integral para a técnica de integração condicional

Como pôde ser visto, a parcela integral de controle superaria o limite de saturação  $sat = 1$ , não fosse a presença da saturação integral. Este impedimento pode

ser interpretado como uma diferença no ganho  $\frac{1}{t_i}$  para esta técnica, em relação às demais, ainda que o ajuste do PID utilizado tenha sido o mesmo. Sendo assim, é natural que o sistema responda de maneira distinta inicialmente.

Seguindo para o resultado da técnica de C. T. Chen, podemos ver na figura 7.5 que a saturação do controle foi também coibida fortemente. O tempo de assentamento em relação a  $t = 40 u. t.$  foi de  $9.2 u. t.$

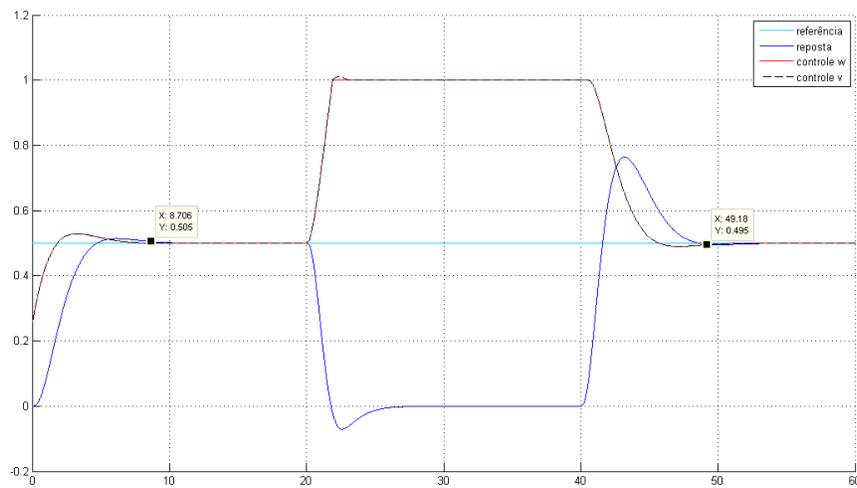


Figura 7.5: Resposta da planta estável para a técnica de C. T. Chen

Já a resposta obtida para o external reset, apresentada abaixo na figura 7.6, mostra que a saturação do controle não foi impedida, mas sim atenuada, assim como visto para o back-calculation na figura 7.1. O tempo de assentamento obtido após  $t = 40 u. t.$  foi de  $9.7 u. t.$

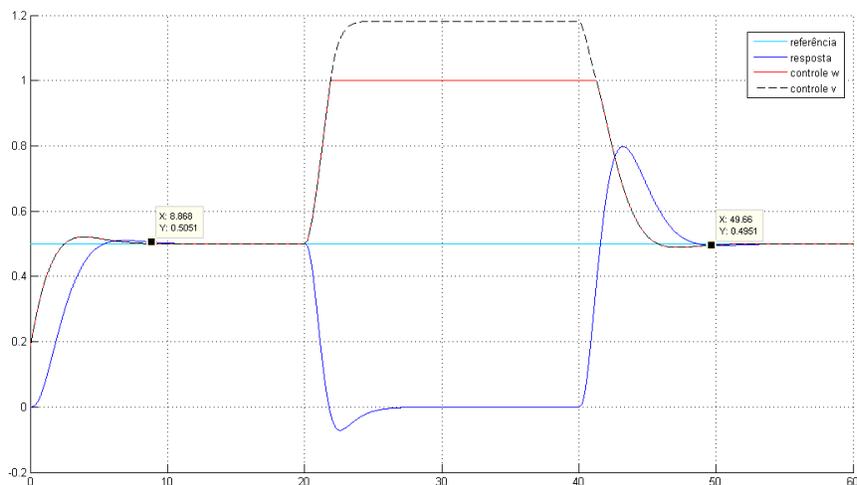


Figura 7.6: Resposta da planta estável para o external reset

A respeito dos ganhos do external reset utilizados para esta simulação, o sistema de equações (4.3) foi resolvido para mantermos a equivalência aos ganhos do controle PID, Utilizando os valores da tabela 3.1, temos que

$$\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = 0.1 \\ k_1 \cdot k_2 \cdot \tau + k_1 = 0.1 \\ k_1 \cdot \tau = 0.5 \end{cases}$$

Este sistema apresenta duas soluções, são elas:  $k_1 = 0.3618$ ,  $k_2 = 0.2764$ ,  $\tau = 1.382$  e  $k_1 = 0.1382$ ,  $k_2 = 0.7236$ ,  $\tau = 3.6180$ . A primeira solução foi utilizada.

Lembrando que, sem ARW, assim como apresentado na figura 3.7, o tempo de assentamento após o cessar da perturbação em  $t = 40$  u. t foi de 27 u. t., analisemos os resultados resumidos na tabela abaixo.

Tabela 7.1: Resumo dos resultados obtidos para a planta estável

Técnica	Tempo de assentamento após o fim da perturbação
integração condicional	4.3 u. t.
C. T. Chen	9.2 u. t.
external reset	9.7 u. t.
back-calculation / zona morta	10.1 u. t.

As técnicas de integração condicional e de C. T. Chen foram capazes de prevenir totalmente a saturação do controle, enquanto o back-calculation/zona morta e external reset previnem que o controle  $v$  não se carregue em demasia e acabam permitindo um pouco de saturação. O quanto de saturação ocorre para estas duas últimas técnicas é, no entanto, praticamente inofensivo ao sistema, de tal forma que o resultado para estas técnicas não difere muito daquele obtido para a técnica de C. T. Chen.

A integração condicional proporcionou o melhor resultado dentre as técnicas, além da alteração ao tempo de assentamento inicial do sistema, mencionada anteriormente.

Em todos os casos, o retorno à normalidade após a ocorrência da perturbação é satisfatoriamente corrigido em relação à situação sem ARW, apresentada na figura 3.7.

## 7.2 – Duplo Integrador

Como foi visto no capítulo 5, quando o tema da estabilidade foi destacado, todas as técnicas de ARW apresentadas são capazes, sob alguma condição, de garantir a convergência da resposta. Desta forma, avaliar a capacidade das técnicas em evitar ou não o problema da instabilidade causada pelo reset windup não seria um bom critério comparativo.

Para estabelecermos, então, um critério de comparação entre as técnicas, utilizaremos a resposta ao degrau do caso linear, como padrão para as simulações que seguirão. Nesta resposta, apresentada na figura 3.11, o overshoot obtido foi de 20%. Consideraremos que este é o nível máximo de overshoot aceitável e utilizaremos esta informação para avaliar o desempenho das técnicas de ARW para o duplo integrador.

Relembremos agora a análise feita no capítulo 3, no qual foram estudadas dois ajustes de PID para o controle do duplo integrador. Foi visto que um dos ajustes precisaria de um degrau de referência de amplitude mais alta do que o outro para que a instabilidade fosse atingida. Este ajuste foi, então, considerado mais robusto em relação à instabilidade causada pelo reset windup.

Analogamente, podemos avaliar a robustez das técnicas de ARW verificando a amplitude do degrau de referência para a qual é atingido o máximo nível de overshoot aceitável estabelecido, de 20%. Quanto maior for esta amplitude, mais robusta será considerada a técnica.

Começando esta avaliação pelo back-calculation, nos deparamos com o problema da escolha do parâmetro  $\frac{1}{t_t}$  para a realização da simulação do sistema. Na tentativa de escolher tal parâmetro de forma a ilustrar a melhor performance possível desta técnica, foi adotado o procedimento descrito a seguir.

Foi escolhido, a princípio,  $\frac{1}{t_t} = 0.2273$ . Esta escolha, ainda que arbitrária, não foi feita aleatoriamente. Este valor representa o quíntuplo do necessário para que a técnica garanta a estabilidade do sistema, o que será visto no capítulo 6. Por hora, este valor nos servirá como um bom chute inicial. Utilizando-o, temos o resultado da figura 7.7 abaixo. A amplitude do degrau de referência encontrada para 20% de overshoot na resposta foi de 18.4.

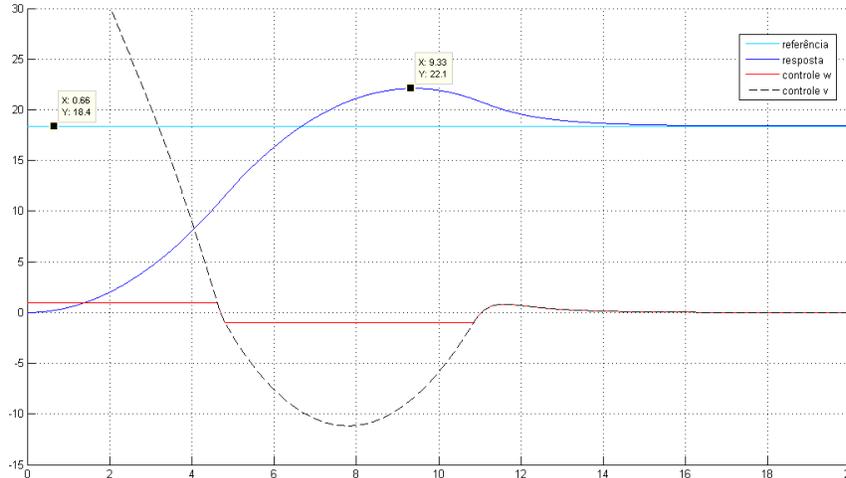


Figura 7.7: Primeira resposta do duplo integrador para o back-calculation

Mantendo, agora, o valor de referência  $r = 18.4 u(t)$ , testaremos se o aumento de  $\frac{1}{t_t}$  nos oferece melhorias, no que diz respeito ao overshoot. A figura abaixo mostra a

cinco respostas sobrepostas, para cinco valores distintos de  $\frac{1}{t_t}$ . São eles: 0.2273, 0.3, 0.5, 1 e 10.

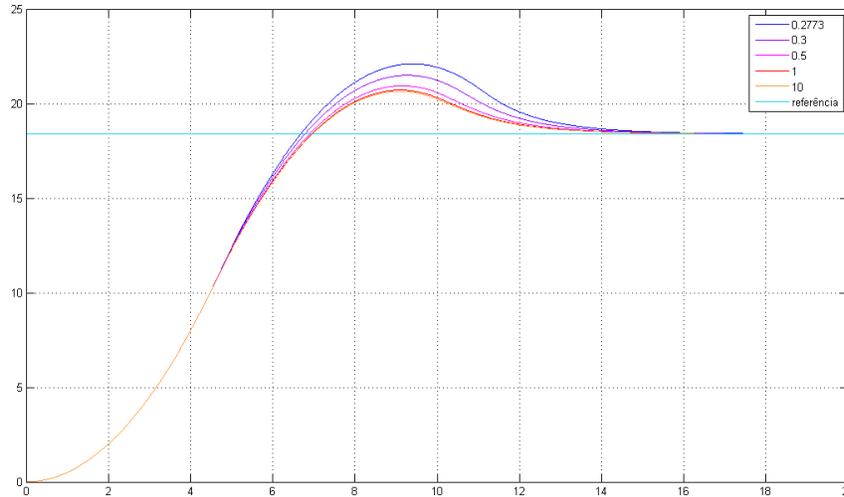
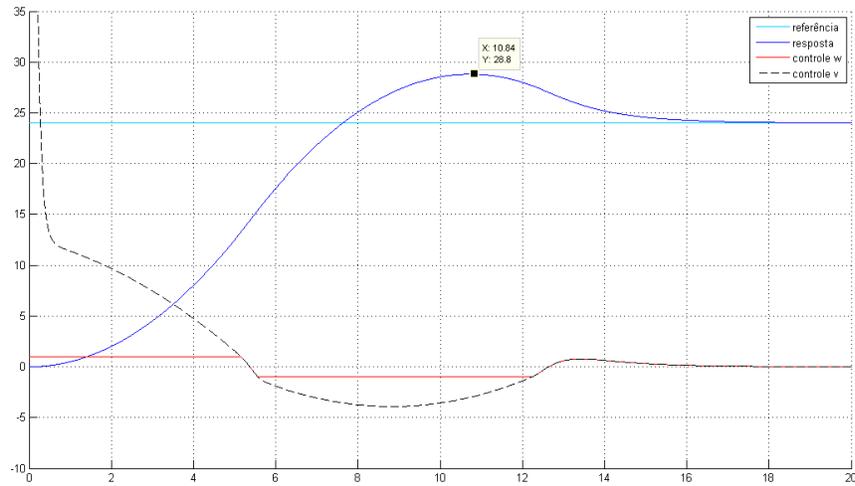


Figura 7.8: Respostas para diferentes valores de  $\frac{1}{t_t}$ , para  $r = 18.4 \cdot u(t)$

Podemos ver, na figura 7.8, que o percentual de overshoot é melhorado com o aumento de  $\frac{1}{t_t}$ . A partir de  $\frac{1}{t_t} = 1$ , no entanto, não são percebidas melhorias significativas. Será considerado, então, que este valor representa a melhor escolha possível até agora.

Reavaliando o tamanho do degrau de referência para o qual há 20% de overshoot quando  $\frac{1}{t_t} = 1$ , temos agora um resultado de  $r = 24 \cdot u(t)$ , que pode ser visto na figura 7.9 abaixo.



**Figura 7.9: Segunda resposta do duplo integrador para o back-calculation**

Se repetirmos, desta vez, para o degrau de  $r = 24 \cdot u(t)$ , o procedimento de aumentar  $\frac{1}{t_t}$ , verificaremos que as respostas resultantes não apresentarão diferenças significativas entre si. Isto pode ser visto na figura 5.10, onde temos praticamente a mesma resposta para  $\frac{1}{t_t} = 1$  e  $\frac{1}{t_t} = 10$ . Podemos, desta forma, concluir que a resposta apresentada na figura 7.9 representa a melhor performance do back-calculation em termos de alcançar o maior degrau de referência possível admitindo, no máximo, um overshoot de 20%.

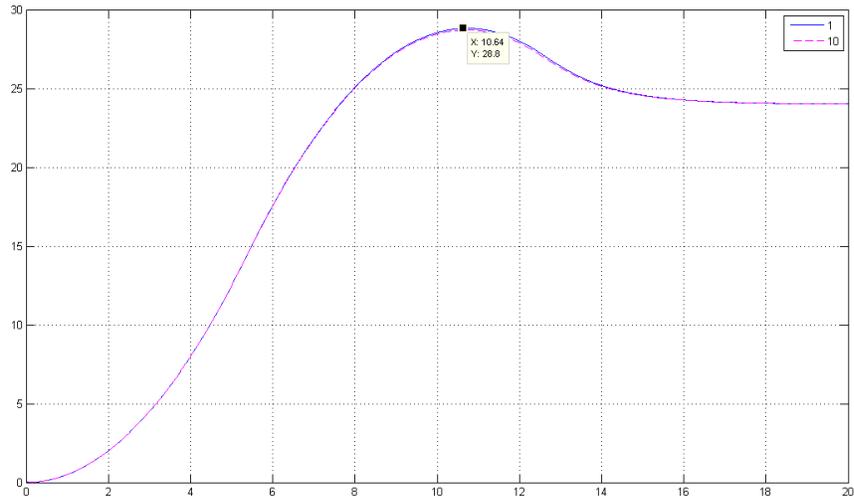


Figura 7.10: Resposta para dois valores de  $\frac{1}{t_t}$ , para  $r = 24 \cdot u(t)$

Utilizando  $k_r = \frac{1}{t_t} = 1$  para a técnica da zona morta, o resultado, apresentado na figura 7.11 abaixo, foi idêntico àquele da figura 7.9, para o back-calculation.

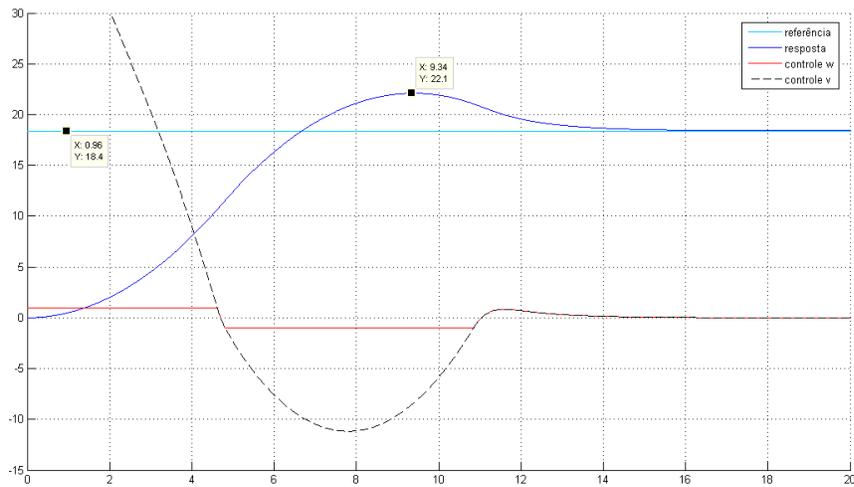


Figura 7.11: Resposta do duplo integrador para a técnica da zona morta

A figura 7.12 a seguir mostra o resultado para a técnica de integração condicional, com a utilização de  $sat_i = \frac{sat}{k_p} = \frac{1}{11} = 0.0909$ . Um degrau de  $r = 1.2 \cdot u(t)$  foi utilizado para obter um overshoot de 20%. A resposta obtida apresenta, no entanto, um erro de regime temporário que será explicado através da análise dos sinais  $i$  e  $j$ , que foram adicionados na figura abaixo.

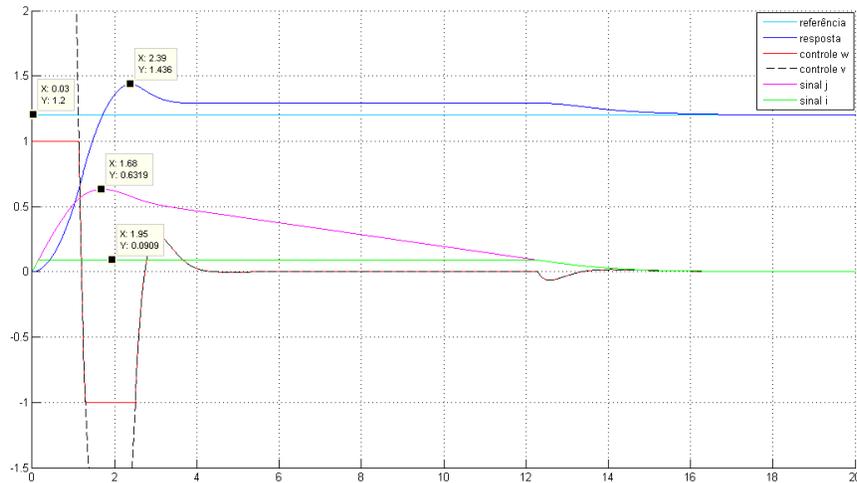
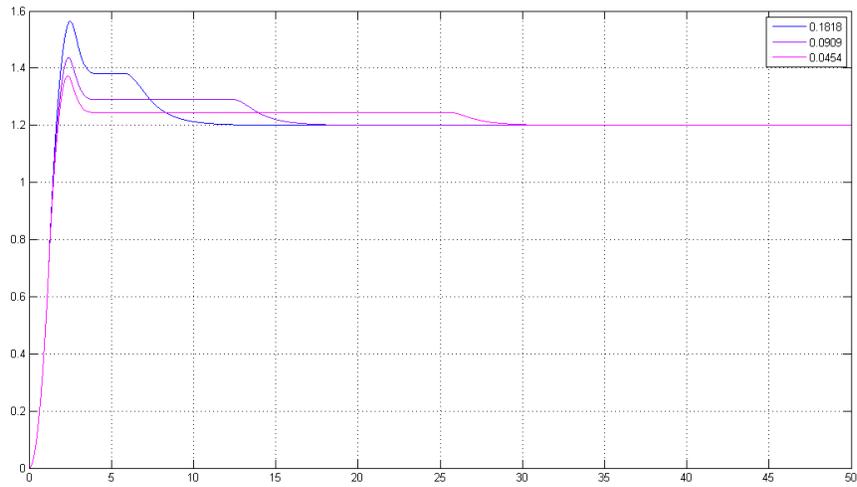


Figura 7.12: Primeira resposta do duplo integrador para a integração condicional com  $sat_i = 0.0909$

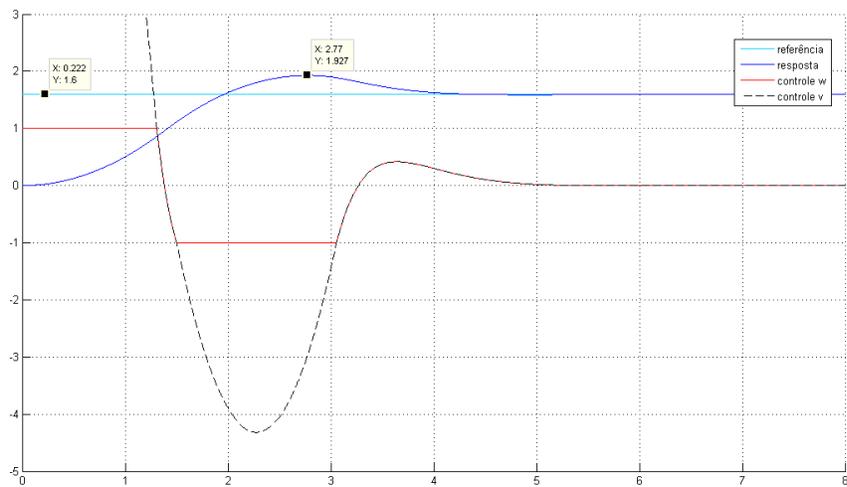
Podemos ver que o sinal  $i$  se mantém saturado em 0.0909 e, enquanto isso ocorre, o sistema se comporta como se não houvesse controle integral, dado que esta parcela do controle contribui, nesta situação, com um valor constante. Por causa da aparente falta de controle integral, a resposta apresenta um erro de regime que se mantém até que  $j = i$ , situação na qual não há mais saturação no ramo integral e esta parcela do controle está, portanto, atuando normalmente.

Na figura abaixo, são apresentadas três respostas para a utilização da integração condicional, cada uma para um valor de  $sat_i$  distinto. É possível ver que, com a diminuição de  $sat_i$ , o erro de regime é menor em amplitude mas se mantém por mais tempo. Se continuássemos a diminuir  $sat_i$  na tentativa de anular este erro inicial, acabaríamos por atribuir um valor tão pequeno a este parâmetro que a função do controle integral de corrigir eventuais perturbações seria comprometida. Em contrapartida, ao aumentarmos  $sat_i$ , geramos um nível de overshoot mais alto do que o aceitável.



**Figura 7.13:** Respostas do duplo integrador para a integração condicional para três valores de  $sat_i$

As simulações seguintes, nas figuras 7.14 e 7.15, mostram amplitudes de 1.6 e 6.5 para os degraus de referência que acarretam na resposta com 20% de overshoot para as técnicas de C. T. Chen e external reset, respectivamente.



**Figura 7.14:** Resposta do duplo integrador para a técnica de C. T. Chen

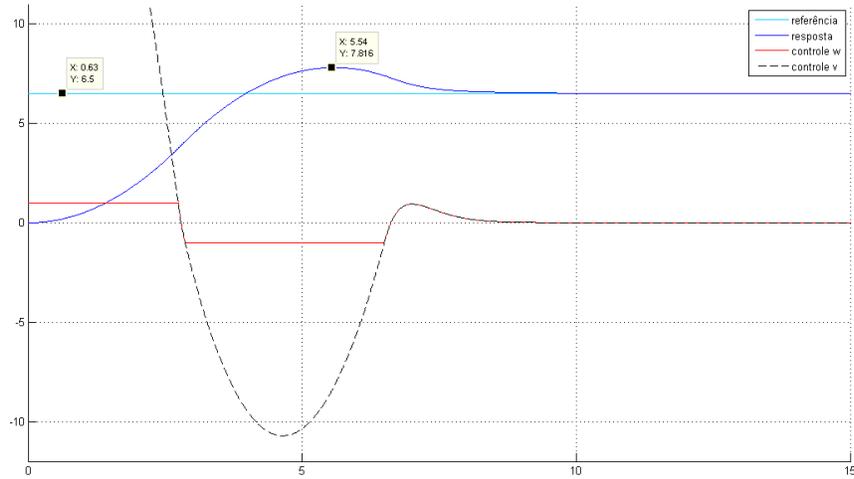


Figura 7.15: Resposta do duplo integrador para o external reset

Em relação aos ganhos utilizados para simulação do external reset, apresentada acima, o sistema (4.3) foi solucionado de tal forma a mantê-los equivalentes àqueles do ajuste do PID, cujos zeros estão sobrepostos no plano complexo, como pôde ser visto no root locus da figura 3.17. Sendo assim, foi forçado que os zeros de (4.2) fossem iguais. Para isso, temos que

$$\tau = \frac{1}{k_2} \quad (7.1)$$

Utilizando esta restrição, temos que as primeiras duas equações do sistema, de acordo com os valores do ajuste do PID, irão se resumir a

$$\begin{cases} k_1 \cdot k_2 = 5.5 \\ k_1 \cdot k_2 \cdot \tau + k_1 = 11 \\ k_1 \cdot \tau = 5.5 \end{cases}$$

Podemos ver que as equações acima implicam que

$$\tau = k_2 \quad (7.2)$$

Para satisfazer ambas as condições (7.1) e (7.2), foi utilizado  $\tau = k_2 = 1$ . Aplicando estes valores à segunda equação do sistema, temos que  $k_1 = 5.5$ .

O resumo dos resultados obtidos para as técnicas estudadas podem ser vistos na tabela 5.2 abaixo.

**Tabela 7.2: Resumo dos resultados obtidos para o duplo integrador**

<b>Técnica</b>	<b>Degrau para overshoot de 20%</b>
<b>back-calculation/ zona morta</b>	$24 \cdot u(t)$
<b>external reset</b>	$6.5 \cdot u(t)$
<b>C. T. Chen</b>	$1.6 \cdot u(t)$
<b>integração condicional</b>	$1.2 \cdot u(t)$ , com erro de regime temporário

Claramente o back-calculation se mostrou muito mais robusto em relação à instabilidade, suportando um degrau de amplitude muito mais alta do que as demais técnicas, para o caso do duplo integrador.

# Capítulo 8

## Conclusões

No capítulo 2 vimos um exemplo de controle de temperatura no qual a escolha de uma referência de valor mais alto do que o que poderia ser atingido pela saída do sistema ocasionou o fenômeno do reset windup. No caso deste exemplo, a consequência do reset windup foi um atraso na resposta do sistema após uma troca no valor da referência.

Iniciamos o capítulo 3 com o estudo de uma planta estável de terceira ordem e vimos que, para uma referência constante suficientemente alta, o controle pode saturar e ainda assim o reset windup não ocorrer, desde que a resposta consiga rastrear a referência sem erro.

Ao tentarmos reproduzir a situação exemplificada no capítulo 2 utilizando uma referência que troca de valor, vimos que um atraso de resposta ocorre apenas no caso de uma referência demasiadamente alta. Como há total liberdade na escolha do valor de referência, essa não seria uma situação com a qual alguém se depararia na prática, a não ser que uma má escolha fosse feita.

Ainda para o caso da planta estável de terceira ordem, utilizando uma referência constante e perturbando o controle, vimos que um pulso de perturbação alto o suficiente é capaz de ocasionar o reset windup, com a consequência de um atraso no retorno da resposta do sistema à normalidade.

Passando para o estudo do duplo integrador, vimos, ainda no capítulo 3, que uma referência constante suficientemente alta ocasiona o reset windup que, desta vez, tem como consequência a divergência da resposta. Comparando dois ajustes distintos de PID para este mesmo sistema e interpretando os resultados com o auxílio do root locus, entendemos como a escolha do ajuste pode influenciar a susceptibilidade do sistema à instabilidade.

No capítulo 4 estudamos as técnicas de anti-reset windup, que tem como objetivo mitigar as consequências danosas causadas pelo reset windup. Vimos que as técnicas de back-calculation são matematicamente equivalentes apesar de, na prática, o back-calculation representar uma configuração mais vantajosa por ser capaz de se adaptar a possíveis mudanças no valor de saturação. Fomos apresentados à técnica de integração condicional e a uma técnica proposta por C. T. Chen. Por último, vimos a técnica de external reset e montamos um sistema de equações a ser respeitado caso seja necessário que os ganhos desta técnica sejam equivalentes àqueles de algum PID convencional.

No capítulo 5 foi realizado um estudo de estabilidade utilizando-se as técnicas apresentadas no capítulo 4 no controle do duplo integrador. Através da interpretação das não-linearidades saturação e zona morta como ganhos constantes e da aplicação do critério de Hurwitz, encontramos condições de estabilidade em função dos parâmetros ajustáveis de controle e de cada técnica de ARW.

No capítulo 6 abordamos o estudo da estabilidade fornecida pelo back-calculation ao controle do duplo integrador através de uma abordagem clássica em sistemas não-lineares, a utilização do critério de Popov. O resultado encontrado por este critério foi idêntico àquele encontrado pela abordagem simplificada do capítulo 5.

Por fim, no capítulo 7, foram realizadas comparações de desempenho entre as técnicas para ambas a planta estável de terceira ordem e o duplo integrador. Foi estabelecido como critério de avaliação para o caso da planta estável o quanto cada técnica foi capaz de diminuir o atraso que ocorre após o cessar da perturbação no controle. A técnica de integração condicional apresentou o melhor resultado. Para o caso do duplo integrador, o critério se baseou em avaliar o tamanho do degrau de referência que proporciona uma resposta com 20% de overshoot. Desta vez, a técnica de back-calculation apresentou o melhor resultado.

Como a comparação entre as técnicas foi realizada através de apenas dois exemplos, não foi possível extrair conclusões generalizadas da comparação de desempenho. Pode-se dizer, no entanto, que as técnicas de back-calculation e zona morta apresentam uma vantagem em relação às demais técnicas por possuírem um parâmetro que permite ajustar a intensidade da ação do ARW.

Uma continuidade natural deste trabalho seria abordar a importância das técnicas de reset windup em sistemas com mais de uma variável de saída.

# Bibliografia

- [1] ÅSTROM, K. J., HÄGGLUND, T., *PID Controllers: Theory, Design and Tuning*, 2<sup>nd</sup> edition, Instrument Society of America, 1995.
- [2] Apostila SMAR, <http://pt.scribd.com/doc/12390985/Capitulo-7-Elementos-Finais-de-Controle>.
- [3] COOPER, D. J., “Integral (Reset) Windup, Jacketing Logic and the Velocity PI Form”, <http://www.controlguru.com/2008/021008.html>.
- [4] BOHN, C., ATHERTON, D. P., “An Analysis Package Comparing PID Antiwindup Strategies”, *IEEE Systems Magazine*, 15(2):34—40, April 1995.
- [5] SHINSKEY, G. F., “The power of external reset feedback”, <http://www.controlglobal.com/articles/2006/095.html>.
- [7] CHEN, C. T., *Analog and Digital Control System Design*, 1993.
- [8] SLOTINE, J. J. E., LI, W., *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, 1991.
- [9] KHALIL, H. K., *Nonlinear Systems*, 3<sup>rd</sup> edition, Prentice Hall, 2002.
- [10] “Routh-Hurwitz stability criterion”, [http://en.wikipedia.org/wiki/Routh%E2%80%93Hurwitz\\_stability\\_criterion](http://en.wikipedia.org/wiki/Routh%E2%80%93Hurwitz_stability_criterion).

# Apêndice A

## Critério de Routh-Hurwitz

O critério de Routh-Hurwitz consiste num método para verificar se as raízes de um dado polinômio tem parte real negativa. Ele pode, desta forma, ser utilizado para provar a estabilidade de um sistema linear invariante no tempo ao ser aplicado ao polinômio denominador da função de transferência que representa o sistema que se deseja estudar, dado que a estabilidade assintótica depende da localização no plano complexo dos pólos do sistema.

O critério utiliza apenas os coeficientes do polinômio para verificar se as raízes do mesmo estão no SPLE. Ele é, em geral, aplicado através do método tabular. Para polinômios de segunda e terceira ordem, ele pode ser resumido a algumas simples verificações, que são detalhadas a seguir.

- Caso de 2ª ordem:

Seja  $P(s) = a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0$ . O critério se resume a garantir que  $a_n > 0$ , para  $n = 0, 1, 2$ .

- Caso de 3ª ordem:

Seja  $P(s) = a_3 \cdot s^3 + a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0$ . O critério se resume a garantir que  $a_n > 0$ , para  $n = 0, 1, 2, 3$  e que  $a_2 \cdot a_1 > a_3 \cdot a_0$ .

- Caso de n-ésima ordem

$$\text{Seja } P(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0$$

Monta-se uma tabela cujas primeiras duas linhas são compostas pelos coeficientes de  $P(s)$  e as demais linhas são preenchidas a partir de cálculos feitos sobre estes coeficientes. Ao completar-se a tabela, o número de troca de sinais dos elementos da primeira coluna corresponderá ao número de pólos não-negativos.

$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...
$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...
$b_1$	$b_2$	$b_3$	...
$c_1$	$c_2$	$c_3$	...
...	...	...	...

$$b_i = \frac{a_{n-1} \cdot a_{n-2i} - a_n \cdot a_{n-2i-1}}{a_{n-1}}$$

$$c_i = \frac{b_1 \cdot a_{n-2i-1} - a_{n-1} \cdot b_{i+1}}{b_1}$$

Mais sobre este critério pode ser visto em [10].