



FORMULAÇÕES GALERKIN DESCONTÍNUO-CONTÍNUO PARA O PROBLEMA DE HELMHOLTZ

Anna Regina Côrbo Costa

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil.

Orientadores: Webe João Mansur
Eduardo Gomes Dutra do
Carmo

Rio de Janeiro
Dezembro de 2017

FORMULAÇÕES GALERKIN DESCONTÍNUO-CONTÍNUO PARA O
PROBLEMA DE HELMHOLTZ

Anna Regina Córbo Costa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA CIVIL.

Examinada por:

Prof. Webe João Mansur, Ph.D.

Prof. Eduardo Gomes Dutra do Carmo, D.Sc.

Prof^a. Franciane Conceição Peters, D.Sc.

Prof. Felipe dos Santos Loureiro, D.Sc.

Prof. Gustavo Benitez Alvarez, D.Sc.

Prof. Edivaldo Figueiredo Fontes Junior, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2017

Costa, Anna Regina Côrbo

Formulações Galerkin descontínuo-contínuo para o problema de Helmholtz/Anna Regina Côrbo Costa. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2017.

XIV, 76 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Webe João Mansur

Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia Civil, 2017.

Referências Bibliográficas: p. 71 – 76.

1. Método de Elementos finitos. 2. Equação de Helmholtz. 3. Método Galerkin descontínuo-contínuo.
I. Mansur, Webe João *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil.
III. Título.

*Para meus maiores amores
Maria Isabel e Pedro Luís*

*Mas eu sei que um dia
a gente aprende
Se você quiser alguém
em quem confiar
Confie em si mesmo
Quem acredita sempre alcança
(Renato Russo)*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço aos meus pais Regina e José Paulo por terem me ensinado que o único caminho é através da Educação. Meu pai, meu grande amigo, meu porto seguro. Muito obrigada a você e a minha irmã Luciana por estarem presentes quando eu não pude estar com meus filhos. Minha mãe, onde estiver, espero que sinta orgulho da minha conquista. Você está todo dia em meu pensamento.

Ao Breno, pelo incentivo, amor e companheirismo. Por tentar fazer desta caminhada da vida um percurso mais leve, especialmente neste último ano. Por acreditar em mim ao longo destes anos e que este dia chegaria.

Ao Professor Eduardo (Dudu), por estes anos de convivência e de grande aprendizado, como professor e, especialmente, como orientador. Por me apresentar a este tema, tão difícil e tão fascinante. Por ser um orientador presente e sempre solícito.

Ao Professor Webe, por garantir as condições para que esta tese acontecesse. Por estar sempre disposto para dúvidas e prosas.

À Professora Franciane, pela ajuda com a parte física da tese e por estar sempre disponível, tanto no tempo em que era ainda doutoranda, quanto agora, já professora do programa. Sua defesa foi a primeira de doutorado que assisti na UFRJ e, com certeza, uma inspiração.

Aos professores do Programa de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ, ótimos profissionais, sempre dispostos a ensinar e instigar, claramente a base desta instituição de referência.

Aos demais membros da banca, pelo aceite do convite e pelas contribuições.

Aos colegas contemporâneos do LAMEMO nestes 5 anos: Luciana, Kátia, André, Kimie, PH, Gilmar, Sebastião e Rafael Serô. Obrigada pela convivência agradável neste percurso cheio de obstáculos, pelos bate-papos sobre a vida e sobre os estudos.

À Ivone, pelo valioso auxílio administrativo e operacional, sempre disposta a agilizar e ajudar. À Natália pelo carinho e pelas “conversas de grávida” durante o ano de 2015.

Ao CEFET-RJ, minha instituição, pela liberação parcial para a realização deste doutoramento. Além disto, por fazer parte da minha história desde os tempos de Ensino Médio, onde me fez ganhar o gosto pela Matemática. Tenho muita sorte de amar o que faço e amar o lugar onde trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

FORMULAÇÕES GALERKIN DESCONTÍNUO-CONTÍNUO PARA O PROBLEMA DE HELMHOLTZ

Anna Regina Côrbo Costa

Dezembro/2017

Orientadores: Webe João Mansur
Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Programa: Engenharia Civil

Neste trabalho são propostas duas consistentes formulações Galerkin Descontínuo-Contínuo para o problema de Helmholtz: uma formulação Galerkin descontínua hibridizada (método HDG) que utiliza espaço traço contínuo e uma formulação Galerkin Descontínua-Contínua (método CDG) que utiliza uma componente contínua e outra descontínua acopladas.

Para a formulação HDG, é apresentado a análise da condensação estática de onde concluímos que o sistema global gerado é menor que o sistema global de outros métodos híbridos já estabelecidos. Além disto, mostramos que o problema é bem-posto a partir de um certo grau de refinamento da malha.

Para a formulação CDG, é introduzida uma formulação onde é utilizada uma forma bilinear de transferência de estabilidade que conecta internamente as componentes descontínua e contínua. Este mecanismo permite eliminar a componente descontínua em função da contínua o que torna o problema um problema bem-posto localmente contínuo.

Nos experimentos numéricos, é verificado o custo computacional dos métodos HDG e CDG comparados com o custo da formulação Galerkin contínuo (CG) para um polinômio de aproximação fixo e diferentes refinamentos de malha. Os resultados numéricos demonstram que o método CDG é o mais robusto e com maior acurácia, apesar de ter um esforço computacional superior aos demais. Já o método HDG apresenta custo computacional similar ao esforço do método CG. No entanto, ele necessita de menos refinamento de malha para se aproximar da solução exata. Por fim, concluímos que cada método possui vantagens distintas porém ambos possuem grande potencial a ser ainda explorado.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

CONTINUOUS-DISCONTINUOUS GALERKIN FORMULATIONS FOR THE HELMHOLTZ PROBLEM

Anna Regina Côrbo Costa

December/2017

Advisors: Webe João Mansur

Eduardo Gomes Dutra do Carmo

Department: Civil Engineering

In this work, we propose two consistent Continuous-Discontinuous Galerkin formulations for the Helmholtz problem: a hybridized Discontinuous Galerkin formulation (HDG method) that works with a continuous trace space and a Continuous-Discontinuous Galerkin formulation (CDG method) that works with a continuous and a discontinuous component.

For the HDG formulation, we present a static condensation analysis where we obtain a global system that is smaller than the global systems generated by other current hybrid methods. Furthermore, we show that the HDG formulation is a well-posed problem from a certain degree of mesh refinement.

For the CDG formulation, we present a formulation where a stability transfer bilinear form is used internally connecting the discontinuous and continuous components. This mechanism allows to eliminate the discontinuous component as a function of continuous component which makes the problem a locally well-posed continuous problem.

As numerical experiments, we present the computational time for the methods HDG and CDG compared with the computational time of a continuous Galerkin approach (CG) for a fixed polynomial approximation and different mesh refinements. Numerical results show that the CDG method is the most robust and accurate, despite having a computational effort higher than the others. The HDG method has a computational time similar to that of the CG method. However, it needs less mesh refinement to converge to the exact solution. Finally, we conclude that each method has distinct advantages, but both have great potential to be explored.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Lista de Tabelas	xiv
1 Introdução	1
1.1 Revisão Bibliográfica	2
1.2 Originalidade e Relevância	5
1.3 Organização da tese	7
2 Métodos de Galerkin	8
2.1 Método de Galerkin contínuo clássico	8
2.1.1 Formulação Variacional do problema de Helmholtz	8
2.2 Método de Galerkin descontínuo	11
2.2.1 Formulação Variacional do problema de Helmholtz	12
2.3 Poluição do erro no método de Galerkin	14
3 O Problema de Helmholtz	15
3.1 Exemplo de aplicação do problema de Helmholtz em Geofísica	15
3.2 Definição do problema no domínio da frequência	17
4 Formulações Galerkin descontínuo-contínuo	19
4.1 Primeira família de formulações descontínuo-contínuo: método HDG	23
4.2 Segunda família de formulações descontínuo-contínuo: método CDG	26
5 Análise da Consistência dos Métodos	29
5.1 Consistência da primeira família de formulações Galerkin descontínuo-contínuo	29
5.2 Consistência da segunda família de formulações Galerkin descontínuo- contínuo	31
6 Condensação Estática	34
6.1 Primeira formulação HDG	34
6.1.1 O problema local	34

6.1.2	Determinação da função de tamanho h	35
6.2	Segunda formulação CDG	41
6.2.1	O problema local	41
6.2.2	Existência e unicidade da solução	42
7	Resultados numéricos	45
7.1	Exemplo 1: Problema homogêneo com $\theta = \frac{\pi}{4}$	46
7.1.1	Resultados para número de onda $K=16$	47
7.1.2	Resultados para número de onda $K=45$	48
7.2	Exemplo 2: Problema homogêneo com $\theta = \frac{\pi}{3}$	57
7.2.1	Resultados para número de onda $K=16$	57
7.2.2	Resultados para número de onda $K=45$	58
7.3	Comparativo do tempo computacional	67
8	Conclusões e Sugestões de Trabalhos Futuros	69
	Referências Bibliográficas	71

Lista de Figuras

2.1	Esquemática de um domínio heterogêneo Ω com descontinuidades internas $\Gamma_{int,i}$	11
3.1	Domínio Ω e contorno Γ do problema de Helmholtz.	18
4.1	Esquemática dos elementos Ω_e e elementos padrões associados $\hat{\Omega}_e$	19
7.1	Modelo de malha quadrada utilizada em todos os experimentos.	45
7.2	Representação da solução exata da Equação 7.1 para $K = 16$	47
7.3	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 16$	47
7.4	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	49
7.5	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	49
7.6	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	49
7.7	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	50
7.8	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	50
7.9	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	50
7.10	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	52
7.11	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	52
7.12	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	52
7.13	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	53

7.14	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	53
7.15	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	53
7.16	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	54
7.17	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	54
7.18	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	54
7.19	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	55
7.20	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	55
7.21	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$	55
7.22	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 16$	57
7.23	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	59
7.24	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	59
7.25	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	59
7.26	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	60
7.27	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	60
7.28	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	60
7.29	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	62
7.30	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	62
7.31	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	62
7.32	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	63

7.33	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	63
7.34	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	63
7.35	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	64
7.36	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	64
7.37	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	64
7.38	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	65
7.39	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	65
7.40	Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$	65

Lista de Tabelas

7.1	Tempo de processamento para $K = 45$, no Experimento 1.	67
-----	--	----

Capítulo 1

Introdução

A equação de Helmholtz é uma Equação Diferencial Parcial (EDP) que modela harmônicos temporais de fenômenos de propagação e dispersão de ondas acústicas, elásticas e eletromagnéticas. É de grande interesse científico obter soluções numéricas robustas para problemas (diretos ou inversos) que envolvam esta equação.

Um dos métodos utilizados para obter a solução numérica aproximada destes problemas é o *Método de Elementos Finitos Clássico* (MEF) ou *Método de Galerkin contínuo* (CG¹). No entanto, a solução pelo método de Galerkin é ótima somente em problemas puramente difusivos.

Em 1971, Reed e Hill, em seu trabalho clássico, desenvolveram o *Método de Elementos Finitos Descontínuos*, ou *Galerkin descontínuo* (DG²), com o objetivo de solucionar problemas com descontinuidades internas [1]. Este método utiliza funções que permitem que as variáveis internas do campo e suas derivadas sejam consideradas descontínuas ao longo dos contornos dos elementos. Este método tem se mostrado muito eficiente. Porém, apresenta a desvantagem de aumentar consideravelmente os graus de liberdade do problema a ser resolvido e, conseqüentemente, o esforço computacional.

O método CG é instável e impreciso para alguns problemas descritos por EDPs lineares de segunda ordem, por exemplo, para a equação de Helmholtz. Esta equação, quando solucionada pelo CG, apresenta oscilações espúrias que não correspondem à solução exata do problema, apresentando uma perda das propriedades de estabilidade e precisão do método.

Neste contexto, desenvolver um MEF cuja solução numérica seja estável e precisa para esta equação é ainda um problema em aberto. Diversas estratégias com base em elementos finitos vêm sendo desenvolvidas e serão descritas na seção 1.1.

¹Do inglês, *Continuous Galerkin*.

²Do inglês, *Discontinuous Galerkin*.

1.1 Revisão Bibliográfica

Conforme o avanço da capacidade de processamento de dados, o método de Galerkin descontínuo (DG) têm sido utilizado na solução de um grande número de problemas, principalmente envolvendo o escoamento de fluidos. O método apresenta grande vantagem nos resultados obtidos em relação ao método Galerkin contínuo clássico.

Como exemplo, podemos citar a aplicação do método DG para problemas de difusão [2], em problemas elásticos [3] e [4], para equações de águas superficiais [5], na solução da equação de Helmholtz [6], em problemas de plasticidade [7] e na solução da equação de Navier-Stokes [8].

O método DG em sismica foi popularizado por [9] aplicando o mesmo em malhas 3D não-estruturadas. Recentemente, em [10] foi proposta uma modificação no modelo de Galerkin descontínuo visando a redução de erros causados pelo não-alinhamento de elementos e interfaces curvas, obtendo bons resultados de precisão para modelos de onda escalar envolvendo subsuperfície de geometria complexa, como é o caso de modelos geológicos.

A grande desvantagem do método Galerkin descontínuo é o aumento considerável no número de graus de liberdade [11]. Neste contexto, HUGHES *et al.* [12] desenvolveram uma importante contribuição: o método Galerkin descontínuo multiescala (MDG³) que parte de um espaço contínuo e associa um espaço descontínuo a ele através da liberação das restrições dos elementos de interface, permitindo assim uma considerável redução dos graus de liberdade do método DG usual.

Ainda visando a redução dos graus de liberdade, trabalhos como [13] e [14] utilizam os ditos métodos Galerkin descontínuo incorporados (EDG⁴) que reduzem o tamanho da matriz de rigidez através da mudança da incógnita híbrida transformando o espaço inicialmente descontínuo em contínuo.

Formulações de Galerkin descontínuo utilizando um multiplicador interno foram apresentadas por [15], [16] e [17]) com o objetivo de obter uma componente descontínua. Em [15] utilizou a aproximação descontínua do traço e em [17], contínua.

Em [18] foi utilizada uma formulação para o problema de DG, especificamente para o caso elástico, onde todas as condições de contorno são formuladas da mesma maneira, sem imposição de restrição ao contorno externo. Nela, é definida de uma nova forma bilinear que apresenta componentes descontínuo-contínuos válida para todas as condições de contorno. Esta metodologia, chamada de Galerkin Descontínuo-contínuo foi desenvolvida por DO CARMO *et al.* [19] e mostra que a introdução desta forma bilinear não possui impacto no número de graus de liberdade pois os graus de liberdade das fronteiras internas podem ser removidos.

³*Multiscale Discontinuous Galerkin Method.*

⁴*Embedded Discontinuous Galerkin Methods.*

Em DO CARMO *et al.* [20] a formulação de Galerkin descontínuo-contínuo é aplicada em problemas governados pela equação de Stokes mostrando resultados mais acurados e robustos, quando comparado com o método de Galerkin via mínimos quadrados (GLS⁵).

Quanto à aplicação de métodos Galerkin descontínuos no domínio da frequência, podemos citar [21] que adaptou o método GLS para encontrar a solução da equação de Helmholtz. Uma formulação do método DG para equação de Maxwell no domínio da frequência foi desenvolvida por [22] e [23].

ALVAREZ *et al.* [6] apresentaram uma formulação de elementos finitos descontínuos para a equação acústica de Helmholtz com continuidade C^0 nas fronteiras entre elementos. A formulação apresenta bons resultados na redução da poluição, porém possui alto custo computacional por conta dos graus de liberdade associados à descontinuidade que não podem ser eliminados.

De modo complementar, em [24] é modificada a formulação de Galerkin descontínuo para a equação de Helmholtz deixando de impor a continuidade no interior de cada elemento. Neste caso, os graus de liberdade associados com a descontinuidade no interior de cada elemento são diluídos em termos de elemento, o que representa uma redução do custo computacional quando comparado à métodos DG usuais.

Adicionalmente, em [25] foi incrementada a formulação de [6] criando uma estratégia para a determinação dos parâmetros ótimos visando obter o valor exato para o número de onda a ser utilizado no problema acústico.

DO CARMO *et al.* [26] propuseram o método de Galerkin com resíduo projetado (GPR⁶) para o problema de Helmholtz. Neste método surge uma formulação variacional onde os resíduos do método de Galerkin são projetados num subespaço definido para cada elemento. Este método minimiza a poluição do erro e é robusto para altas e médias frequências.

Como trabalhos mais recentes sobre o tema, podemos citar [27] e [28] que utilizam uma classe de métodos DG onde são empregados espaços estendidos por ondas planas locais; [29] que analisaram algumas restrições interiores ao método DG usando polinômios lineares para a solução da Equação de Helmholtz, absorvendo algumas condições de contorno para os casos bi e tridimensional.

Visando minimizar o efeito da poluição na solução da equação de Helmholtz, em [30] é apresentado um novo método de elementos finitos de Petrov-Galerkin, denominado QOPG⁷, onde é possível observar uma maior robustez em relação à distorções da malha, no entanto, ainda com o mesmo custo computacional de um método DG usual.

⁵ *Galerkin Least-Squares.*

⁶ *Galerkin Projected Residual.*

⁷ *Quasi Optimal Petrov-Galerkin.*

Em [31] foi comparado, para ondas visco-elásticas no domínio da frequência, o desempenho de um método de diferenças finitas otimizado e o método de Galerkin descontínuo com uso de fluxo central. Em termos de precisão, o método DG apresentou melhor resultado. Para modelos homogêneos, o custo computacional foi similar entre os dois métodos. No entanto, para modelos heterogêneos, o método das diferenças finitas apresentou menor número de graus de liberdade e conseqüentemente, desempenho superior.

Em [32] é proposto um modelo baseado no método DG visando calcular o campo difuso de um objeto elástico imerso em um meio homogêneo fluido. O modelo apresenta significativa redução da magnitude do erro relativo para médias e altas frequências além de promover o desaparecimento da ressonância espúria no meio fluido nestas mesmas frequências.

COCKBURN *et al.* nos trabalhos [33], [34], [35] e [36] introduzem alguns métodos mistos DG hibridizados (HDG⁸) para problemas elípticos de segunda ordem. No entanto, nenhum destes métodos faz a análise local, portanto não dando importância a relação direta entre o sucesso da formulação híbrida e ter um problema bem-posto. Uma análise do erro de uma destas formulações mistas foi feita em [37].

Nos últimos anos, MU *et al.* [38] descreveram uma variação do chamado método Galerkin Fraco (WG⁹) razoavelmente estável para o problema de Helmholtz. No entanto, apesar da estabilidade para variados tipos de malha, o método possui um custo computacional elevado por conta do grande número de graus de liberdade envolvidos no WG. Em [39] é proposto um método DG para a equação de Helmholtz que é incondicionalmente estável para altas frequências, com enfoque no tamanho da malha utilizado.

NGUYEN *et al.* [40] introduziram um método hibridizado Galerkin descontínuo para a solução numérica do problema de Helmholtz. Este método combina a metodologia DG com aspectos geométricos ópticos gerando um método preciso e estável, com taxas de convergência ótimas. Porém, o número de graus de liberdade envolvidos é similar ao necessário pelo método DG híbrido convencional e, se não houver uma numeração apropriada para os nós e faces associados com a variável híbrida, o custo computacional passa a ser similar ao método DG tradicional, o que nos leva a supor que o método não é viável quando trabalhamos com malhas mais gerais como, por exemplo, malhas-não estruturadas.

Um dos alicerces desta conjectura é que métodos HDG com espaço traço descontínuo, apesar de ter estêncil menor, a largura de banda aumenta devido ao fato de que a numeração da malha é feita através das faces e a largura de banda é multiplicada pelo número de pontos que as faces têm. Este fato influencia fortemente a

⁸*Hybrid Discontinuous Galerkin.*

⁹*Weak Galerkin.*

performance de um solver direto.

Deve-se observar que boa acurácia é mais fácil de ser obtida para baixas frequências. No entanto, altas frequências necessitam de algoritmos especiais por conta dos erros de fase e de poluição. Neste sentido, DIAS *et al.* [41] desenvolveram uma metodologia para minimizar o erro de fase para o problema de Helmholtz bi-dimensional para malhas estruturadas e não-estruturadas, usando funções de peso polinomiais, com base na metodologia Petrov-Galerkin proposta por LOULA & FERNANDES [30].

A superioridade de esquemas HDG bidimensionais foi discutida em trabalhos recentes como em [42] e [43]. As comparações entre métodos HDG e o método Galerkin Contínuo (CG) feitas entre estes autores mostram que os métodos HDG são competitivos tanto em termos de entradas não-nulas na matriz resultante do método quanto em termos de tempo computacional. Em [44] e [45] foram comparados esquemas CG e HDG em 3D. Ambos concluíram que métodos HDG tem custos similares ao do CG porém possuem vantagens adicionais, que quando exploradas, melhoram significativamente o tempo de execução final. No entanto, tais estudos levam em consideração uma malha fixa e o grau de interpolação polinomial é feito variando de 1 a 10. A superioridade em termos de custo computacional é descrita nestas referências para interpolações polinomiais com grau acima de 3 ou 4. Acreditamos que seria interessante estudar os efeitos da largura de banda para o solver direto, tanto para malhas não-estruturadas quanto para malhas estruturadas, bem como incluir no estudo os métodos HDG com espaço traço contínuo.

1.2 Originalidade e Relevância

O método de Galerkin descontínuo clássico tem uma maior robustez para resolver a equação de Helmholtz no caso de descontinuidade do material e heterogeneidade do meio, como o problema sísmico encontrado em Geofísica. Deste modo, é de extrema relevância o desenvolvimento de métodos que mantenham as propriedades do Galerkin descontínuo clássico mas com esforço computacional do método de Galerkin contínuo, como o proposto nesta tese.

As formulações propostas nesta tese são consideradas com base em extensa pesquisa bibliográfica onde não foi encontrada uma família de formulações Galerkin descontínuo-contínuo para o problema de Helmholtz.

Tais formulações são propostas considerando os trabalhos de DO CARMO *et al.* [19], onde são desenvolvidas duas famílias de formulações Galerkin descontínuo-contínuo para a Teoria da Elasticidade, e DO CARMO *et al.* [20] onde, posteriormente, baseado em uma destas famílias foi desenvolvida uma formulação Galerkin descontínuo-contínuo e contínuo via espaço traço para o problema de Stokes. Ambas

formulações mostraram-se robustas e com resultados de boa acurácia com significativa redução do número de graus de liberdade envolvidos.

Baseado nestas formulações, é proposto, na presente tese, o desenvolvimento de duas famílias de formulações também Galerkin descontínuo-contínuo: uma formulação híbrida com espaço traço contínuo (abreviada pela sigla HDG), e outra, com duas componentes (uma descontínua e a outra contínua) seguindo o modelo de uma das famílias propostas em DO CARMO *et al.* [19] (abreviada pela sigla CDG).

A principal diferença entre a nossa formulação híbrida e outros métodos DG híbridos contemporâneos é que trabalhamos com um espaço traço contínuo em todas as arestas e vértices, que chamamos de espaço traço plenamente contínuo. Consequentemente, quando a condensação estática é feita, obtemos um sistema global que é menor que os sistemas globais gerados por outros métodos híbridos e sem dependência direta entre o sucesso do método e a numeração apropriada das faces associadas à variável híbrida, o que conjecturamos impactar diretamente na viabilidade do método. Além disto, o método HDG apresentado aqui pode ser naturalmente estendido para um esquema HDG com espaço traço descontínuo.

Além disso, é mostrado que a condensação estática é um problema bem-posto a partir de um certo grau de refinamento de malha. É importante observar que, para altas frequências, esse grau de refinamento é uma condição importante. Assim, é possível definir uma função h para ser fornecida aos geradores de malha de modo a criar uma malha adequada, chamada de *função de tamanho*. Deve-se observar que, em nossa pesquisa bibliográfica, não encontramos nenhuma análise sobre a condensação estática, apesar da sua importância para o sucesso de qualquer método hibridizado.

Por outro lado, a formulação Galerkin descontínuo-contínuo apresentada aqui mostra-se amplamente vantajosa, possuindo as propriedades do método Galerkin descontínuo clássico porém com esforço computacional menor. Nesta tese, mostramos que os resultados numéricos deste método são bastante precisos mesmo em malhas pouco refinadas, convergindo rapidamente para a solução exata. No entanto, apresenta custo computacional superior ao método CG clássico, devido ao ainda elevado número de graus de liberdade. No entanto, conjecturamos que o método possui um elevado potencial uma vez que pode ser facilmente otimizado com a utilização de processamento paralelo.

1.3 Organização da tese

Esta tese está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2 são revisadas as formulações variacionais já estabelecidas do Método de Galerkin contínuo clássico e do Método de Galerkin descontínuo para o problema de Helmholtz. No Capítulo 3, é formulado o problema-modelo de Helmholtz e feita uma pequena introdução a como este problema é encontrado na Geofísica. No Capítulo 4, são introduzidas a primeira e a segunda família de formulações variacionais para o método Galerkin descontínuo-contínuo, especificamente para a equação de Helmholtz. No Capítulo 5, é realizada a análise da consistência das duas famílias de formulações propostas. No Capítulo 6, são estabelecidos os esquemas de implementação computacional para as duas famílias de formulações descontínuo-contínuo. No Capítulo 7, são exibidos os resultados dos experimentos numéricos realizados. O Capítulo 8 expõe as conclusões finais e as sugestões de trabalhos futuros no contexto desta tese. Por fim, são apresentadas as Referências Bibliográficas.

Capítulo 2

Métodos de Galerkin

2.1 Método de Galerkin contínuo clássico

O método de Galerkin é baseado numa sequência de subespaços de dimensão finita, que converge para o espaço-solução no limite. Pode-se provar que a sequência de soluções aproximadas converge para a solução exata do problema.

Neste método, utiliza-se a formulação fraca do Problema de Valor de Contorno (PVC). A formulação fraca (ou *Variacional*) correspondente à Formulação Forte do PVC permite reduzir as restrições do operador diferencial, especialmente sobre as ordens exigidas para a derivada e de regularidade, necessárias para a solução do PVC.

Para uma introdução mais detalhada sobre a formulação do método de Galerkin clássico consultar [46] e para estudos de maior profundidade sugerimos [47] e [48].

2.1.1 Formulação Variacional do problema de Helmholtz

A *formulação forte* da Equação de Helmholtz, consiste no Problema de Valor de Contorno:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \nabla p - K^2 p &= f, \text{ em } \Omega \\ p &= g, \text{ em } \Gamma_g \\ \nabla p \cdot \vec{n} &= q, \text{ em } \Gamma_q \\ \nabla p \cdot \vec{n} + \alpha p &= r, \text{ em } \Gamma_r \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\Gamma = \Gamma_g \cup \Gamma_q \cup \Gamma_r$ é a fronteira do domínio aberto Ω e $\Gamma_g \cap \Gamma_q = \Gamma_g \cap \Gamma_r = \Gamma_q \cap \Gamma_r = \emptyset$. Aqui, p representa o campo (neste trabalho, a pressão acústica), K é o número de onda, f é o termo fonte, \vec{n} representa o vetor unitário normal à Γ orientado para fora, $\alpha \in C^0(\Gamma_r)$ onde $\alpha > \alpha_0 > 0$ onde α_0 é uma constante real e g , q e r são as condições de contorno prescritas para o problema.

Note que a solução clássica da Formulação Forte deve ser uma função contínua com derivadas primeira e segunda contínuas no domínio Ω .

Com o intuito de obter uma formulação variacional correspondente ao PVC definido acima que permita reduzir as restrições de regularidade exigidas para a solução do PVC, tome os espaços de dimensão infinita

$$S = \{p \in H^1(\Omega) \mid p = g \text{ em } \Gamma_g\} \quad (2.2)$$

$$V = \{v \in H^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ em } \Gamma_g\} \quad (2.3)$$

e considere uma função admissível $v \in V$ de modo que em (2.1) tem-se

$$\int_{\Omega} [-\nabla \cdot \nabla p - K^2 p] v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega \quad (2.4)$$

Seja a fórmula de Green, dada pela expressão

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \eta d\Omega = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \eta}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \eta n_i d\Gamma \quad (2.5)$$

onde $\{\phi, \eta\} \in C^0$ funções definidas no domínio Ω e n_i é a componente i do vetor normal \vec{n} .

Aplicando-se a fórmula de Green (2.5) à equação (2.4) de modo a reduzir a maior ordem da derivada presente na expressão e usando a condição de que as funções teste se anulam no contorno, o termo de contorno da integração por partes é eliminado, obtendo assim a equação:

$$\int_{\Omega} [\nabla p \cdot \nabla v - K^2 p v] d\Omega + \int_{\Gamma_r} \alpha p v d\Gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_q} q v d\Gamma + \int_{\Gamma_r} r v d\Gamma \quad (2.6)$$

para todo $v \in V$.

Deste modo, se

$$A(p, v) \equiv \int_{\Omega} [\nabla p \cdot \nabla v - K^2 p v] d\Omega + \int_{\Gamma_r} \alpha p v d\Gamma$$

$$F(v) \equiv \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\Gamma_q} q v d\Gamma + \int_{\Gamma_r} r v d\Gamma$$

a formulação fraca correspondente consiste em encontrar $p \in S$ que satisfaça a equação

$$A(p, v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (2.7)$$

O método de Galerkin tem como proposta analisar uma solução aproximada em um espaço de funções de dimensão finita, trabalhando assim com um problema

variacional discreto. Para isto, toma-se uma sequência de subespaços de dimensão finita $V_n \subset V$, onde $n = 1, \dots, \infty$, que converge para o espaço V no limite. Tem-se que a sequência de soluções $p_n \in S_n$ converge para a solução exata do problema sendo estas aproximações projeções ortogonais da solução exata no subespaço de dimensão finita.

Como, agora, os espaços são de dimensão finita N a solução aproximada p_N pode ser escrita por

$$p_N = \sum_{i=1}^N c_i B_i \quad (2.8)$$

uma combinação linear das funções bases B_i , $i = 1, \dots, N$ com coeficientes c_i a determinar para todo i . Aqui é utilizado o Método de Galerkin cuja característica principal é que o espaço das funções-peso é idêntico ao espaço das funções-base.

O problema variacional discreto é transformado em um sistema linear de equações algébricas

$$\sum_{m=1}^N \mathbf{A}_{nm} \mathbf{C}_m = \mathbf{F}_n \quad (2.9)$$

cuja matriz \mathbf{A} é simétrica positiva definida. Se a base escolhida para a discretização do problema for global, a matriz \mathbf{A} é densa. Por outro lado, se a base for local, a matriz \mathbf{A} será esparsa.

Com base nisto, o Método de Elementos Finitos de Galerkin, na sua formulação variacional discreta, consiste em: Dada a partição $M^h = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{N_e}\}$ do domínio Ω , queremos encontrar $p^h \in S^h$ que satisfaça $\forall v^h \in V^h$

$$\mathbf{A}_G(p^h, v^h) \equiv \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} [\nabla p_e^h \cdot \nabla v_e^h - K^2 p_e^h v_e^h] d\Omega = \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} f v_e^h d\Omega \equiv F_G(v^h) \quad (2.10)$$

onde

$$p_e^h(x, y, z) = \sum_{i=0}^{N_e} p_e^h(i) \varphi(x, y, z) \quad (2.11)$$

$\varphi \in P^l$ são polinômios de grau menor ou igual a l nas coordenadas locais dos elementos e N_e é número de elementos da partição M^h .

Este método, apesar de amplamente reconhecido, possui algumas desvantagens na solução do problema de Helmholtz como: instabilidade e imprecisão para problemas descritos por EDPs lineares de segunda ordem e a constante apresentação de oscilações espúrias. Além disto, o método não é robusto a menos que se te-

nha um grau de refinamento da malha muito alto nos casos de descontinuidade ou heterogeneidade do material.

2.2 Método de Galerkin descontínuo

O método de Galerkin descontínuo (DG) foi introduzido em 1973 por Reed e Hill para resolver questões relacionadas ao transporte de nêutrons [1]. Quando proposto visava encontrar solução de problemas não-lineares, cuja a solução exata evoluía descontinuadamente no tempo. De modo geral, a formulação DG tenta solucionar problemas com descontinuidades internas utilizando funções que permitem considerar as variáveis de campo ou suas derivadas descontínuas ao longo dos contornos dos elementos. A Figura 2.1 mostra um esquema de domínio heterogêneo Ω com três descontinuidades internas.

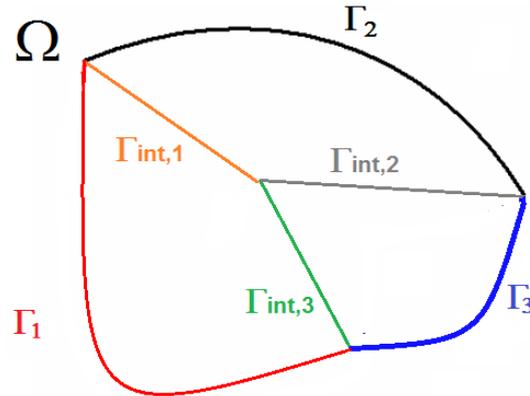


Figura 2.1: Esquemática de um domínio heterogêneo Ω com descontinuidades internas $\Gamma_{int,i}$.

O método tem sido desenvolvido de modo que atualmente têm apresentado boa adaptatividade a geometrias mais complexas, a malhas irregulares e a diferenças de grau polinomial de aproximação entre os elementos.

A ideia principal que caracteriza o método é a escolha dos espaços de aproximação. Esses espaços devem conter funções polinomiais por partes com nenhuma restrição, dentro de cada elemento, em relação a continuidade da função.

Note que, nesta formulação, é possível que uma função descontínua faça parte desse espaço, desde que essa seja polinomial em cada elemento da malha. Por esse motivo, entre elementos vizinhos, na interface, podem ocorrer saltos nos valores dessa função. Para diminuir esse salto no valor da função, ou seja, para fazer com que a função seja mais próxima de uma função contínua, são introduzidos termos

de penalização que vão forçar essa continuidade, as ditas funções de transferência de estabilidade.

Para uma introdução mais detalhada e profunda sobre a formulação do método de Galerkin descontínuo sugerimos a consulta de [49], [18] e [50]. Para o desenvolvimento da seção seguinte, utilizamos a formulação encontrada em [6] para o problema de Helmholtz, especificamente.

2.2.1 Formulação Variacional do problema de Helmholtz

A formulação a seguir pode ser vista como uma versão mais fraca do PVC dado em (2.1), onde a continuidade ao longo da fronteira dos elementos é imposta de maneira fraca. Para isto, sejam os espaços:

$$\begin{aligned} H(\Omega, M^h) &= \{\psi \in L^2(\Omega) \mid \psi_e \in H^1(\Omega_e) \text{ e } \nabla \cdot \nabla \psi_e \in L^2(\Omega_e)\} \\ U_{DG} &= \{\psi \in H(\Omega, M^h) \mid \psi = g \text{ em } \Gamma_g\} \\ V_{DG} &= \{v \in H(\Omega, M^h) \mid v = 0 \text{ em } \Gamma_g\} \end{aligned}$$

Tomando p_e como a restrição de p ao subdomínio Ω_e , redefina o problema de valor de contorno para encontrar $p \in H(\Omega, M^h)$ que satisfaça:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \nabla p_e - K_e^2 p_e &= f_e, \text{ em } \Omega_e \\ p_e &= g_e, \text{ em } \Gamma_g \\ \nabla p_e \cdot \vec{n}_e &= q_e, \text{ em } \Gamma_q \\ \nabla p_e \cdot \vec{n}_e + \alpha_e p_e &= r_e, \text{ em } \Gamma_r \end{aligned} \tag{2.12}$$

tendo, agora, as seguintes condições de interface:

$$\begin{aligned} p_e - p_{e'} &= 0; \\ (\nabla p_e - \nabla p_{e'}) \cdot \vec{n}_e &= 0 \text{ em } \Gamma_e \cap \Gamma_{e'} \end{aligned} \tag{2.13}$$

onde p_e e $p_{e'}$ são as restrições da função u aos subdomínios Ω_e e $\Omega_{e'}$, respectivamente. Vale observar que estas condições são impostas de modo à minimizar a diferença dos valores da pressão p entre os elementos.

O método de Galerkin descontínuo além de depender da formulação dada pelo conjunto de equações (2.12) e (2.13), necessita da *função salto* entre os elementos a ser definida pelo problema: encontrar $p \in U_{DG}$ que satisfaça

$$a_G(p, v) + a_{DG}(p, v) = f_G(v), \quad \forall v \in V_{DG} \tag{2.14}$$

onde

$$\begin{aligned}
a_G(p, v) &= \sum_{e=1}^{N_e} \left[\int_{\Omega_e} [\nabla p_e \cdot \nabla v_e - K^2 p_e v_e] d\Omega + \int_{\Gamma_r \cap \Gamma_e} \alpha_e p_e v_e d\Gamma \right], \\
f_G(v) &= \sum_{e=1}^{N_e} \left[\int_{\Omega_e} f_e v_e d\Omega + \int_{\Gamma_q \cap \Gamma_e} q_e v_e d\Gamma + \int_{\Gamma_r \cap \Gamma_e} r_e v_e d\Gamma \right] \\
a_{DG} &= \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{e' > e}^{N_e} \int_{\Gamma_{ee'}} \left(-\frac{1}{2} (\nabla p_e + \nabla p_{e'}) \cdot \vec{n}_e (v_e - v_{e'}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\beta^{ee'}}{h_{ee'}} (p_e - p_{e'}) (v_e - v_{e'}) + \frac{\lambda^{ee'}}{2} (p_e - p_{e'}) (\nabla v_e + \nabla v_{e'}) \cdot \vec{n}_e \right) d\Gamma
\end{aligned} \tag{2.15}$$

onde

$$h_{ee'} = \min \{h_e, h_{e'}\} \tag{2.16}$$

ou seja, $h_{ee'}$ é a *função tamanho* do elemento mínimo, analisados dois a dois. Já as funções $\beta^{ee'}$ e $\lambda^{ee'}$ são determinadas visando reduzir os efeitos da poluição que o método de Galerkin clássico apresenta, e suas definições podem ser vistas na referência [6]. Vale observar que as formas a_G e f_G são claramente oriundas da parte contínua interna aos elementos e suas definições são baseadas na formulação apresentada na seção 2.1.1.

De modo análogo ao realizado na discretização do método contínuo na seção 2.1.1, definimos os espaços descontínuos de dimensão finita, de grau $l \geq 1$, como:

$$\begin{aligned}
U_{DG}^{h,l} &= \{p \in L^2(\Omega) | p_e \in P^l(\Omega_e) \text{ e } p = g^h \text{ em } \Gamma_g\}, \\
V_{DG}^{h,l} &= \{v \in L^2(\Omega) | v_e \in P^l(\Omega_e) \text{ e } v = 0 \text{ em } \Gamma_g\}
\end{aligned}$$

e, deste modo, a solução aproximada para o problema de Helmholtz consiste em encontrar $p^h \in U_{DG}^{h,l}$ que satisfaça

$$a_G(p^h, v^h) + a_{DG}(p^h, v^h) = f_G(v^h), \quad \forall v^h \in V_{DG}^{h,l} \tag{2.17}$$

Dizemos que esta formulação consiste numa família de métodos parametrizados pelo par $(\beta^{ee'}, \lambda^{ee'})$ e ela têm apresentado resultados estáveis e com alto grau de acurácia, dependendo do nível da frequência. Este par é definido numericamente e, em geral, os valores atribuídos a λ nos levam a matrizes anti-simétricas, o que acaba por aumentar significativamente o custo computacional do método.

Note que a função em cada elemento da malha deve ser contínua internamente. No entanto, a descontinuidade entre elementos vizinhos é permitida, com a utilização das funções salto nas fronteiras. Ao permitir a descontinuidade entre elementos

vizinhos, o processamento de cada elemento passa a ser local, sem a necessidade de se trabalhar com matrizes de acoplamento global. Deste modo, o método é mais robusto, pois a sua implementação pode ser simplificada, favorecendo o processamento em paralelo.

2.3 Poluição do erro no método de Galerkin

É importante lembrar que para o problema de Helmholtz, por se tratar de uma equação que descreve fenômenos ondulatórios, espera-se uma natureza oscilatória das soluções.

Ao buscar soluções numéricas para este tipo de problema, deve-se aplicar a chamada *regra de Thumb*: um ajuste entre a distância h entre os nós da malha e o número de onda K , para que em cada oscilação tenha-se um número mínimo de pontos que sejam capazes de capturar a solução numérica aproximada.

Estas soluções são periódicas com comprimento de onda $\lambda = \frac{2\pi}{K}$. Por outro lado, é possível intuir que deve-se ter um número mínimo de pontos para cada oscilação ou ciclo de modo que:

$$n = \frac{\lambda}{h} \approx \text{constante}. \quad (2.18)$$

Desta forma tem-se

$$n = \frac{2\pi}{Kh}, \quad \text{ou ainda,} \quad Kh = \frac{2\pi}{n} \approx \text{constante} \quad (2.19)$$

sendo n a resolução da malha, indicando quantos elementos se tem por oscilação da solução. Por isto, também nos referimos a esta regra como do tipo “ Kh constante”.

No entanto, de acordo com [51] e [52] as expectativas analíticas não são satisfeitas quando o dado problema é submetido ao método de Galerkin, em sua formulação clássica. Tem-se que, para números elevados de K , a regra “ Kh constante” é necessária porém não suficiente para controlar o erro, o que é comprovado pela análise numérica do problema. Este comportamento em relação ao K é chamado *efeito de poluição do erro*, pois o número de onda \tilde{K} aproximado é diferente do número de onda K exato.

Deste modo, todas as formulações no contexto de métodos de elementos finitos para o problema de Helmholtz devem atender a restrição “ Kh constante” a fim de minimizar a poluição do erro. Uma análise aprofundada do tema para o problema em estudo pode ser encontrada em [53].

Capítulo 3

O Problema de Helmholtz

3.1 Exemplo de aplicação do problema de Helmholtz em Geofísica

De maneira bem simples, porém bastante direta, SANTOS [54] enuncia o principal objetivo dos estudos geofísicos: obter propriedades físicas em regiões inacessíveis. De acordo com o autor, existem duas maneiras de buscar este objetivo: *i)* Se a lei física \mathbf{L} e as propriedades físicas \mathbf{m} são definidas, é possível calcular um campo \mathbf{d} (problema direto); *ii)* Se as ferramentas geofísicas medem campos \mathbf{d} busca-se estimar as propriedades \mathbf{m} uma vez que a lei física \mathbf{L} seja conhecida (problema inverso).

O problema físico aqui tratado consiste na propagação da onda: uma equação diferencial de segunda ordem

$$\nabla^2 P(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(x, t) = F(x, t) \quad (3.1)$$

onde P é o campo, uma função escalar cujos valores representam o deslocamento de uma onda (no nosso caso, pressão acústica), cujo domínio é o par (x, t) onde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma variável espacial e t é uma variável temporal, F é o termo fonte e c é a velocidade de propagação da onda acústica.

Dentro deste contexto, uma aplicação da utilização da equação de Helmholtz está no problema de inversão de dados sísmicos: dado um conjunto de respostas P_i sobre o campo P do meio provocadas por uma fonte sísmica ao longo do domínio, desejamos obter uma imagem da subsuperfície. Segundo PRATT *et al.* [55], os primeiros trabalhos em inversão sísmica no domínio da frequência datam do início dos anos 90 com resolução pelo método das diferenças finitas.

No mar, a aquisição dos dados é obtida através do uso de *streamers* para o deslocamento dos sensores e *air guns* para provocar a excitação do sistema. Em PETERS [56] é possível encontrar uma descrição bem detalhada sobre este tipo de

processo de aquisição de dados sísmicos.

As respostas $P_i(t)$ obtidas pela aquisição sísmica são funções do tempo e o problema consiste em inverter o sinal de cada um destes P_i numa tentativa de descrever a subsuperfície através do tempo decorrido entre a excitação do sistema através do *air gun* e a recepção do sinal de volta no sensor.

De maneira resumida, este problema pode ser resolvido de duas formas: primeiramente, uma solução no domínio do tempo. Segundo, uma solução diretamente no domínio da frequência onde para cada frequência específica determina-se um número complexo específico. A equação de Helmholtz é utilizada no segundo caso, quando deseja-se calcular a solução diretamente no domínio da frequência.

É importante observar que o domínio do tempo e domínio da frequência são duas maneiras de olhar para o mesmo sistema dinâmico. Eles são permutáveis entre si, isto é, nenhuma informação é perdida na mudança de um domínio para outro. São pontos de vista complementares, levando a uma compreensão completa e clara do comportamento de um sistema. Em MANSUR *et al.* [57] isto é exemplificado, com a descrição de uma análise da solução numérica da equação da onda escalar via Elementos Finitos no domínio da frequência.

Deste modo, tomando k como todas as frequências do problema, ω_k como a frequência angular da vibração (com comportamento harmônico) e i a representação da parte imaginária de um número complexo, podemos assumir que a função $F(x, t)$ é somatório de várias componentes de frequência:

$$F(x, t) = \sum_k f(x, \omega_k) e^{i\omega_k t}. \quad (3.2)$$

Supondo também que a solução $P(x, t)$ possa ser obtida por uma soma de harmônicos, teremos:

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \sum_k p(x, \omega_k) e^{i\omega_k t}, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(x, t) &= \sum_k p(x, \omega_k) (i\omega_k)(i\omega_k) e^{i\omega_k t} = \sum_k -\omega_k^2 p(x, \omega_k) e^{i\omega_k t}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) &= \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, \omega_k) e^{i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Deste modo, substituindo na Equação (3.1), teremos:

$$\sum_k \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, \omega_k) e^{i\omega_k t} + \sum_k \frac{\omega_k^2}{c^2} p(x, \omega_k) e^{i\omega_k t} = \sum_k f(x, \omega_k) e^{i\omega_k t} \quad (3.4)$$

onde $K_k = \frac{\omega_k}{c}$ é uma constante denominada de número de onda para cada frequência

angular ω_k .

Conseqüentemente, para cada frequência ω_k , teremos:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, K_k) + K_k^2 p(x, K_k) = f(x, K_k). \quad (3.5)$$

Adicionalmente, simplificando a notação, para cada frequência ω_k , por:

$$\begin{aligned} p &= -p(x, K_k) \\ f &= f(x, K_k) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Suprimindo o índice k no que se segue e substituindo as expressões de (3.6) na Equação (3.5) temos a *Equação de Helmholtz*:

$$-\nabla \cdot \nabla p - K^2 p = f \quad (3.7)$$

Vale observar que, uma vez que utilizamos a transformada de Fourier para encontrar $p(x, K_k)$ podemos utilizar a transformada inversa de Fourier para encontrar $P(x, t)$. Deste modo, na prática, para a obtenção de sismogramas, por exemplo, resolve-se o problema de inversão pela equação de Helmholtz para várias frequências no intervalo onde há respostas. Posteriormente, aplica-se a transformada inversa de Fourier para obter esta mesma resposta no domínio do tempo.

3.2 Definição do problema no domínio da frequência

Com o objetivo de introduzir nosso problema modelo, considere o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^\nu$, onde $\nu = 2, 3$, um aberto com contorno Γ lipschitz contínuo. Sejam Γ_N , Γ_D e Γ_R , partes do contorno Γ de Ω que atendem às condições de contorno de Neumann, Dirichlet e Robin, respectivamente, tais que: $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_D \cup \Gamma_R$ e $meas(\Gamma_N \cap \Gamma_R) = 0$, $meas(\Gamma_N \cap \Gamma_D) = 0$ e $meas(\Gamma_D \cap \Gamma_R) = 0$, onde $meas(\circ)$ denota a medida positiva de Lebesgue, tal qual o esquema da Figura 3.1.

Assumimos também $meas(\Gamma_D) > 0$, $meas(\Gamma_N) > 0$ e $meas(\Gamma_R) > 0$. Vamos assumir ainda que existem abertos $\Omega_{int,1}, \dots, \Omega_{int,N_\Omega}$ com contorno lipschitz contínuos denotados por $\partial\Omega_{int,i}$ ($i = 1, \dots, N_\Omega$) tais que:

$$\Omega \cup \Gamma = \bigcup_{i=1}^{N_\Omega} (\Omega_{int,i} \cup \partial\Omega_{int,i}) \quad (3.8)$$

Seja $D : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de Ω em \mathbb{R} tal que $D_{int,i}$ é a restrição de D a

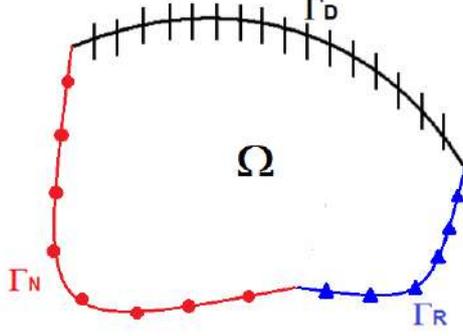


Figura 3.1: Domínio Ω e contorno Γ do problema de Helmholtz.

$\Omega_{int,i}$ que pertence a $C^1(\Omega_{int,i} \cup \partial\Omega_{int,i})$, isto é uma função de derivada contínua em $\Omega_{int,i} \cup \partial\Omega_{int,i}$.

Seja σ uma outra função de Ω em \mathbb{R} tal que $\sigma > \sigma_0 > 0$ em Ω , onde σ_0 é uma constante real, e tal que sua restrição a $\Omega_{int,i}$, denotada por $\sigma_{int,i}$, seja um elemento $C^0(\Omega_{int,i} \cup \partial\Omega_{int,i})$. Seja ainda $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$, $q \in H^2(\Gamma_N)$, $r \in H^2(\Gamma_R)$ e $\alpha \in C^0(\Gamma_R)$ com $\alpha > \alpha_0 > 0$, onde α_0 é uma constante real.

O problema de Helmholtz que queremos analisar, consiste em encontrar uma função $p \in H^1(\Omega)$ tal que $div(D_{int,i}\nabla p_i) \in H^2(\Omega_{int,i})$, $\forall i \in \{1, \dots, N_\Omega\}$ satisfazendo o seguinte problema de Valor de Contorno:

$$-div(D_{int,i}\nabla p_i) - \sigma p_i = f \quad \text{em} \quad \Omega_{int,i} \quad \forall i \in \{1, \dots, N_\Omega\} \quad (3.9)$$

$$p_i = g \quad \text{em} \quad \Gamma_D \cap \partial\Omega_{int,i} \quad (3.10)$$

$$D_{int,i}\nabla p_i \cdot \vec{n}_i = q \quad \text{em} \quad \Gamma_N \cap \partial\Omega_{int,i} \quad (3.11)$$

$$D_{int,i}\nabla p_i \cdot \vec{n}_i + \alpha p_i = r \quad \text{em} \quad \Gamma_R \cap \partial\Omega_{int,i} \quad (3.12)$$

$$p_i = p_j \quad \text{em} \quad \partial\Omega_{int,i} \cap \partial\Omega_{int,j} \quad \text{se} \quad meas(\partial\Omega_{int,i} \cap \partial\Omega_{int,j}) > 0 \quad (3.13)$$

$$D_{int,i}\nabla p_i \cdot \vec{n}_i = D_{int,j}\nabla p_j \cdot \vec{n}_j \quad \text{em} \quad \partial\Omega_{int,i} \cap \partial\Omega_{int,j} \\ \text{se} \quad meas(\partial\Omega_{int,i} \cap \partial\Omega_{int,j}) > 0 \quad (3.14)$$

onde $f \in L^2(\Omega)$ denota o termo fonte, p_i denota a restrição de p a $\Omega_{int,i}$, $div(\circ)$ denota o operador divergente, ∇ denota o operador gradiente, \vec{n}_i representa o vetor normal unitário a $\partial\Omega_{int,i}$ orientado para fora de $\Omega_{int,i}$ e \vec{n}_j representa o vetor normal unitário a $\partial\Omega_{int,j}$ orientado para fora de $\Omega_{int,j}$.

Capítulo 4

Formulações Galerkin descontínuo-contínuo

Com o objetivo de obter as formulações Galerkin descontínuo-contínuo, introduziremos uma partição do domínio Ω como segue:

Seja $M^h = \{\Omega_1, \dots, \Omega_{N_{el}}\}$ uma partição de Ω em elementos finitos Ω_e , onde $e = 1, \dots, N_{el}$, satisfazendo:

$$\Omega_e \cap \Omega_{e'} = \emptyset \quad \text{se } e \neq e' \quad (4.1)$$

$$\bigcup_{e=1}^{N_{el}} (\Omega_e \cup \Gamma_e) = \Omega \cup \Gamma \quad (4.2)$$

onde Γ_e é o contorno de Ω_e . Estes elementos são assumidos não-degenerados e podem ser mapeados em elementos padrões associados por mapeamentos isoparamétricos usuais.

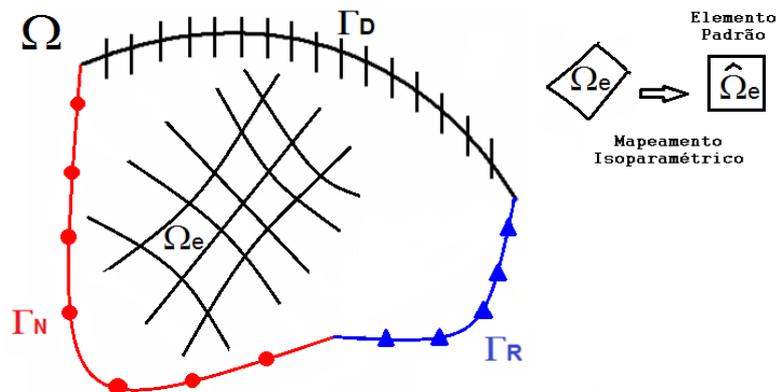


Figura 4.1: Esquematização dos elementos Ω_e e elementos padrões associados $\hat{\Omega}_e$.

Além disto, para cada Ω_e fixado, este elemento está totalmente contido em algum $\Omega_{int,i}$ com contorno $\Gamma_{int,i}$, com $i = 1, \dots, N_\Omega$, onde a expressão *int* representa *interior*, e tais que

$$\Omega_{int,i} \cap \Omega_{int,j} = \emptyset$$

$$(\Omega \cup \Gamma) = \bigcup_{i=1}^{N_\Omega} (\Omega_{int,i} \cup \Gamma_{int,i})$$

Para cada Ω_e , seja $\hat{\Omega}_e$ o elemento padrão associado, conforme esquematização na Figura 4.1. Considere para $l \geq 1$, $P^l(\Omega_e)$ o conjunto de todos os polinômios de grau menor ou igual a l nas coordenadas locais do elemento padrão $\hat{\Omega}_e$ associado ao elemento Ω_e e considere o seguinte espaço:

$$H^{l,b}(M^h) = \{ \eta \in L^2(\Omega); \eta_e \in H^l(\Omega_e) \quad e \quad l \geq 1 \}, \quad (4.3)$$

chamado de espaço das funções b quebradas onde η_e é a restrição de η a Ω_e .

Com o intuito de obter as pretendidas formas bilineares necessárias às formulações Galerkin descontínuo-contínuo, introduziremos as seguintes formas bilineares em nível de elemento abaixo.

Para cada $\Omega_e \subset \Omega_{int,i}$ fixado, para algum i , definimos:

$$a^1_e(\theta, \psi) = \int_{\Omega_e} D \nabla \theta \cdot \nabla \psi \, d\Omega, \quad (4.4)$$

$$a^0_e(\theta, \psi) = \int_{\Omega_e} \sigma \theta \psi \, d\Omega, \quad (4.5)$$

$$D = D_{int,i} \text{ em } \Omega_{int,i}, \quad \forall \Omega_{int,i}, \text{ onde } \theta \in H^1(\Omega_e) \text{ e } \psi \in H^1(\Omega_e). \quad (4.6)$$

Vale ressaltar que nas formas bilineares acima definidas os índices em sobrescrito 0 e 1 representam a associação da forma à função e ao fluxo da função, respectivamente.

A forma bilinear associada ao operador diferencial é denotado aqui por $a^h(\circ, \circ)$ e dada por:

$$a^h(\theta, \psi) = \sum_{e=1}^{N_{el}} a^1_e(\theta, \psi) - a^0_e(\theta, \psi), \quad \forall (\theta, \psi) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \quad (4.7)$$

Na formulação Galerkin descontínuo é necessário definir um *parâmetro de malha*.

Desta forma, para cada Ω_e , seja o h_e o diâmetro médio de Ω_e onde, para a dimensão ν , tem-se:

$$h_e = \left(\int_{\Omega_e} d\Omega \right)^{\frac{1}{\nu}}. \quad (4.8)$$

Com o objetivo de obter os *parâmetros de interface*, definimos:

$$\xi^h = \{f, \text{ tal que } f \text{ é uma face de algum elemento}\} \quad (4.9)$$

$$\xi^{h,int} = \{f \in \xi^h; \text{ tal que } f \text{ é uma face contida no interior } \Omega\} \quad (4.10)$$

$$\xi^{h,ext} = \{f \in \xi^h; \text{ tal que } f \text{ é uma face contida no contorno } \Gamma\} \quad (4.11)$$

Seja β^e definido como segue:

$$\beta^e = \beta^{0,e} \cdot \sup \left\{ \frac{\int_{\Gamma_e} h_e (D|\nabla\varphi \cdot \vec{n}_e|)^2 d\Gamma}{\int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega}, \text{ onde } \varphi \in P^k(\Omega_e), \varphi \neq \text{ constante} \right\}. \quad (4.12)$$

Deve ser observado que β^e em geral é dependente do grau $k \geq 1$ do polinômio η . Considere também, para cada elemento Ω_e , o parâmetro adimensional $\beta^{0,e} \geq 0$ que deve ser determinado com o objetivo de que o problema de eliminar a componente descontínua em função da componente contínua a nível de elemento seja um problema bem posto, no sentido de possuir uma e somente uma solução.

Para cada face f , tal que Ω_e e $\Omega_{e'}$ são os elementos tais que $\Gamma_e \cap \Gamma_{e'} = f$ temos:

$$h_{ee'} = \begin{cases} \min\{h_e, h_{e'}\} & \text{se } meas(\Gamma_e \cap \Gamma_{e'}) > 0, \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Ou seja, $h_{ee'}$ é o menor dentre os diâmetros médios dos elementos e e e' .

As definições acima sugerem a introdução das seguintes funções: a primeira, é $e_{int}(\circ) : \xi^{h,int} \rightarrow \{1, \dots, N_{el}\} \times \{1, \dots, N_{el}\}$ definida como:

$$e_{int}(f) = (e, e'), \text{ onde } e > e', f \text{ é uma face de } \Omega_e \text{ e } f \text{ é uma face de } \Omega_{e'} \quad (4.14)$$

A segunda função é $e_{ext}(\circ) : \xi^{h,ext} \rightarrow \{1, \dots, N_{el}\}$ onde:

$$e_{ext}(f) = e, f \text{ é uma face de } \Gamma_e \cap \Gamma \quad (4.15)$$

Desta forma, introduzimos os parâmetros $\beta^{ee'}$ como segue:

$$\beta^{ee'} = \begin{cases} \sup\{\beta^e, \beta^{e'}\}, & \text{se } \text{meas}(\Gamma_e \cap \Gamma_{e'}) > 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.16)$$

Agora precisamos dos *espaços de aproximações* definidos abaixo:

$$H^{h,c,k_c} = \{\varphi \in H^1(\Omega); \varphi_e \in P^{k_c}(\Omega_e)\},$$

$$H^{h,d,k_d} = \{\varphi \in L^2(\Omega); \varphi_e \in P^{k_d}(\Omega_e)\}, \quad (4.17)$$

$$T^{h,c,k_t} = \{\varphi \in L^2(\Gamma_{int} \cup \Gamma); \text{ tal que existe } v \in H^{h,c,k_t} \text{ e } v = \varphi \text{ em } \Gamma_{int} \cup \Gamma\},$$

$$T = \{\varphi \in L^2(\Gamma_{int} \cup \Gamma); \text{ tal que existe } v \in H^1(\Omega) \text{ e } v = \varphi \text{ em } \Gamma_{int} \cup \Gamma\},$$

$$\Gamma_{int} = \bigcup_{f \in \xi^{h,int}} f$$

onde φ_e é a restrição de φ a Ω_e , $k_c \geq 1$, $k_d \geq 1$ e $k_t \geq 1$, $f \in \xi^{h,int}$ faces internas e os índices em sobrescrito c e d associam os espaços acima definidos com os espaços quebrados discretos compostos por funções contínuas e descontínuas, respectivamente. Note que, no espaço H^{h,d,k_d} as funções são descontínuas (por isso, definidas em L^2) porém localmente são $H^1(\Omega)$.

Com estas definições preliminares estamos em condições de apresentar as duas formulações de Galerkin descontínuo-contínuo para o problema de Helmholtz apresentado no Capítulo 3. Estas formulações consistem em, basicamente, definir formas bilineares para os fluxos.

4.1 Primeira família de formulações descontínuo-contínuo: método HDG

Visando obter a primeira família de formulações descontínua-contínua agora denominada *família de formulação híbrida descontínua-contínua via espaço traço contínuo* definido em $\Gamma_{int} \cap \Gamma$, para o problema de Helmholtz (aqui representada pela sigla **HDG**), introduziremos as formas bilineares associadas aos fluxos numéricos. Com este objetivo, definimos as seguintes formas bilineares:

$$Q_{0,int}^e(w_e^d, w_e^t, v_e^d, v_e^t) = \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}} (w_e^d - w_e^t)(v_e^d - v_e^t) d\Gamma, \quad (4.18)$$

$$\forall (w^d, v^d) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,d,k_d} \text{ e } \forall (w^t, v^t) \in T^{h,c,k_t} \times T^{h,c,k_t}.$$

$$Q_{1,int}^e(w_e^d, v_e^d, v_e^t) = - \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} D\nabla w_e^d \cdot \vec{n}_e (v_e^d - v_e^t) d\Gamma,$$

$\forall (w^d, v^d) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,d,k_d}$ e $\forall v^t \in T^{h,c,k_t}$ onde β_{int} e h_{int} são funções de Γ_{int} em \mathbb{R} , dados por:

$$\begin{aligned} \beta_{int} &= \beta^{ee'} \text{ em } \Gamma_{ee'} \text{ se } meas(\Gamma_{ee'}) > 0 \\ h_{int} &= h_{ee'} \text{ em } \Gamma_{ee'} \text{ se } meas(\Gamma_{ee'}) > 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Observe que os índices subscritos 0 e 1 associam a forma bilinear correspondente Q à função e ao fluxo da função, respectivamente, assim como os índices subscritos *int* e *ext* associam a forma correspondente ao fluxo interno ou externo, respectivamente. Além disto, os termos $(w_e^d - w_e^t)$ e $(v_e^d - v_e^t)$ expressam a continuidade do salto entre os elementos, sendo o traço contínuo.

Com estas formas bilineares, introduzimos as formas associadas ao que denominamos *fluxo numérico no contorno interno*:

$$\begin{aligned} Q_{0,int}(w^d, w^t, v^d, v^t) &= \sum_{e=1}^{N_{el}} Q_{0,int}^e(w_e^d, w_e^t, v_e^d, v_e^t), \\ Q_{1,int}(w^d, w^t, v^d, v^t, s) &= \sum_{e=1}^{N_{el}} [Q_{1,int}^e(w_e^d, v_e^d, v_e^t) - s \cdot Q_{1,int}^e(v_e^d, w_e^d, w_e^t)]; \end{aligned} \quad (4.20)$$

onde $s \in \{-1, 1\}$, $(w^d, v^d) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,d,k_d}$ e $(w^t, v^t) \in T^{h,c,k_t} \times T^{h,c,k_t}$.

Note que para $s = 1$ esta forma bilinear é antissimétrica e para $s = -1$ ela é

simétrica. Esta variável s serve para tornar a forma bilinear mais estável e seu valor depende da natureza do problema e do grau do polinômio.

Necessitamos ainda da forma bilinear associada ao *fluxo numérico no contorno externo*. Com este objetivo, definimos as seguintes formas locais:

$$\begin{aligned} Q_{0,ext}^e(w_e^d, w_e^t, v_e^d, v_e^t) &= \int_{\Gamma_e \cap \Gamma} \frac{\beta^{e,t}}{h_e} (w_e^d - w_e^t)(v_e^d - v_e^t) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^e}{h_e} w_e^d v_e^d d\Gamma, \\ Q_{1,ext}^e(w_e^d, v_e^d) &= - \int_{\Gamma_e \cup \Gamma_D} D(\nabla w_e^d \cdot \vec{n}_e) v_e^d d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.21)$$

neste caso $Q_{1,ext}^e$ só está definida em Γ_D pois nas outras partes do contorno, o fluxo já é prescrito. Além disto, definindo as formas associadas ao fluxo numérico no contorno externo, temos:

$$\begin{aligned} Q_{0,ext}(w^d, w^t, v^d, v^t) &= \sum_{e=1}^{N_{el}} Q_{0,ext}^e(w_e^d, w_e^t, v_e^d, v_e^t), \\ Q_{1,ext}(w^d, v^d, s) &= \sum_{e=1}^{N_{el}} [Q_{1,ext}^e(w_e^d, v_e^d) - s \cdot Q_{1,ext}^e(v_e^d, w_e^d)]; \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $s \in \{-1, 1\}$, $(w^d, v^d) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,d,k_d}$ e $(w^t, v^t) \in T^{h,c,k_t} \times T^{h,c,k_t}$, e $\beta^{e,t} > 0$ e $\beta^e > 0$ são funções de Γ em \mathbb{R} e de Γ_D em \mathbb{R} , definidas para $\beta^{*,e} > 0$ como:

$$\beta^{e,t} = \beta^{*,e} \cdot \beta^e \text{ em } (\Gamma \cap \Gamma_e) \text{ se } \text{meas}(\Gamma \cap \Gamma_e) > 0 \text{ e } \beta^{*,e} \in (0, 1]. \quad (4.23)$$

Deve-se notar, novamente, que para $s = 1$ esta forma é antissimétrica e para $s = -1$ ela é simétrica.

Necessitamos ainda da forma local bilinear associada à condição de Robin expressa por:

$$a_R^e(w_e^d, v_e^d) = \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_R} \alpha w_e^d v_e^d d\Gamma, \quad \forall w_e^d, v_e^d \in H^1(\Omega_e) \quad (4.24)$$

e da forma global análoga:

$$a_R(w_e^d, v_e^d) = \sum_{e=1}^{N_{el}} a_R^e(w_e^d, v_e^d), \quad (4.25)$$

onde $(w_e^d, v_e^d) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,d,k_d}$.

Finalmente, para todo $v_e^d \in H^1(\Omega_e)$, definimos os funcionais lineares que serão

utilizados na formulação fraca do problema:

$$\begin{aligned}
b_0^e(v_e^d) &= \int_{\Omega_e} f v_e^d d\Omega \\
b_D^e(v_e^d) &= \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \left[\frac{\beta^e}{h_e} v_e^d + s(D\nabla v_e^d \cdot \vec{n}_e) \right] g d\Gamma \\
b_N^e(v_e^d) &= \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_N} q v_e^d d\Gamma \\
b_R^e(v_e^d) &= \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_R} r v_e^d d\Gamma \\
b(v^d) &= \sum_{e=1}^{N_{el}} (b_0^e(v_e^d) + b_D^e(v_e^d) + b_N^e(v_e^d) + b_R^e(v_e^d)), \quad \forall v^d \in H^{2,b}(M^h).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Definindo ainda,

$$\begin{aligned}
S^{h,c,k_d} &= T^{h,c,k_d} \text{ ou } S^{h,c,k_d} = \{ \varphi \in T^{h,c,k_d}; \varphi = g^h \text{ em } \Gamma_D \} \\
V^{h,c,k_d} &= T^{h,c,k_d} \text{ ou } V^{h,c,k_d} = \{ \eta \in T^{h,c,k_d}; \eta = 0 \text{ em } \Gamma_D \}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

onde g^h é o usual interpolante de g em Γ_D . As definições acima permitem que nossa formulação seja capaz de trabalhar na variável traço com condições de contorno de Dirichlet tanto fracas como fortes.

Deste modo, a *família Galerkin descontínuo-contínuo via espaço traço* em $\Gamma_{int} \cap \Gamma$, consiste em encontrar o par $(p^d, p^t) \in H^{h,d,k_d} \times S^{h,c,k_d}$ satisfazendo a seguinte equação variacional:

$$\begin{aligned}
a^h(p^d, v^d) + Q_{0,int}(p^d, p^t, v^d, v^t) + Q_{1,int}(p^d, p^t, v^d, v^t, s) + \\
Q_{0,ext}(p^d, p^t, v^d, v^t) + Q_{1,ext}(p^d, v^d, s) + a_R(p^d, v^d) = b(v^d),
\end{aligned} \tag{4.28}$$

para todo $(v^d, v^t) \in H^{h,d,k_d} \times V^{h,c,k_d}$.

Observe que se $v^t = \vec{0}$, toda a Equação (4.28) ficará em função da componente descontínua, exceto os termos nos contornos interno e externo. Neste caso, na parte descontínua o termo v^d será interno ao passo que se anulará no contorno externo. Consequentemente, o problema passa a ser localmente contínuo.

4.2 Segunda família de formulações descontínuo-contínuo: método CDG

De modo a obter a *segunda família de formulações descontínuo-contínuo* agora com duas componentes definidas em todo o domínio, uma contínua e outra descontínua (aqui representada pela sigla **CDG**), será necessário modificar as formas bilineares definidas no contorno interno Γ_{int} e no contorno externo Γ .

De maneira geral, nesta segunda formulação CDG, a componente relativa ao volume Ω possui formulação similar à proposta na família HDG. A maior diferença está nas formas bilineares associadas ao contorno, onde acopla-se as componentes contínuas e descontínuas; e na representação do fluxo, que passa a ser formulado como uma combinação linear entre os fluxos contínuos e descontínuos.

Deste modo, com o objetivo de obter esta nova formulação, consideramos o parâmetro $\gamma \in [0, 1]$, para todo $(w^d, w^c) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,c,k_c}$ e $(v^d, v^c) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,c,k_c}$, e introduzimos as seguintes formas bilineares:

$$\begin{aligned} Q_{0,int}^{e,c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c) &= \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}} (w_e^d - w_e^c)(v_e^d - v_e^c) d\Gamma, \\ Q_{1,int}^{e,c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c, \gamma) &= - \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} (\gamma D\nabla w_e^d \cdot \vec{n}_e + (1 - \gamma) D\nabla w_e^c \cdot \vec{n}_e) (v_e^d - v_e^c) d\Gamma, \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde β_{int} e h_{int} são como definidos na Equação (4.19). Vale observar pelas Equações (4.29) que, localmente, para o parâmetro $\gamma = 0$ o fluxo interno será contínuo do mesmo modo que para $\gamma = 1$ o fluxo será totalmente descontínuo.

Observe que, da segunda sentença da Equação (4.17), podemos deduzir que $v_e^c = v_{e'}^c$, em $\Gamma_{e e'}$ se $meas(\Gamma_{e e'}) > 0$, $\forall v^c \in H^{h,c,k_c}$.

De forma similar, introduzimos as formas associadas ao *fluxo numérico no contorno interno*:

$$\begin{aligned} Q_{0,int}^{c,d}(w^d, w^c, v^d, v^c) &= \sum_{e=1}^{N_{el}} Q_{0,int}^{e,c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c), \\ Q_{1,int}^{c,d}(w^d, w^c, v^d, v^c, \gamma, s) &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left[Q_{1,int}^{e,c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c, \gamma) - s \cdot Q_{1,int}^{e,c,d}(v_e^d, v_e^c, w_e^d, w_e^c, \gamma) \right] \end{aligned} \quad (4.30)$$

onde $s \in \{-1, 1\}$, $(w^d, v^d) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,d,k_d}$ e $(w^c, v^c) \in H^{h,c,k_c} \times H^{h,c,k_c}$.

Novamente, pode ser notado que para $s = 1$ esta forma bilinear é antissimétrica e para $s = -1$ ela é simétrica.

É necessário também definir as seguintes formas bilineares locais associadas ao

contorno externo:

$$\begin{aligned}
Q_{0,ext}^{e,c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c) &= \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^e}{h_e} (w_e^d v_e^d + w_e^c v_e^c) d\Gamma \\
Q_{1,ext}^{e,c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c) &= - \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} [(D\nabla w_e^d \cdot \vec{n}_e) v_e^d + (D\nabla w_e^c \cdot \vec{n}_e) v_e^c] d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Novamente, estas formas só necessitam ser definidas em Γ_D pois nas outras regiões de fronteira o fluxo já está prescrito nas condições de contorno. Além disto, temos que tanto a componente contínua quanto a componente descontínua se aproximam da solução exata.

Adicionalmente, definimos as formas associadas ao *fluxo numérico no contorno externo*:

$$\begin{aligned}
Q_{0,ext}^{c,d}(w^d, w^c, v^d, v^c) &= \sum_{e=1}^{N_{el}} Q_{0,ext}^{e,c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c), \\
Q_{1,ext}^{c,d}(w^d, w^c, v^d, v^c, s) &= \sum_{e=1}^{N_{el}} \left[Q_{1,ext}^{e,c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c) - s \cdot Q_{1,ext}^{e,c,d}(v_e^d, v_e^c, w_e^d, w_e^c) \right]
\end{aligned} \tag{4.32}$$

onde $s \in \{-1, 1\}$, $(w^d, v^d) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,d,k_d}$ e $(w^c, v^c) \in H^{h,c,k_c} \times H^{h,c,k_c}$.

Agora, seguindo as referências DO CARMO *et al.* [19] e DO CARMO *et al.* [20], introduziremos o que chamamos de *formas bilineares de transferência de estabilidade*, dadas como segue:

$$a_t^{e,c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c) = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\rho_0^e}{(h_e)^2} (w_e^d - w_e^c)(v_e^d - v_e^c) + \rho_1^e \nabla(w_e^d - w_e^c) \cdot \nabla(v_e^d - v_e^c) \right] d\Omega \tag{4.33}$$

sendo $\rho_0^e \geq 0$ e $\rho_1^e \geq 0$.

Esta forma de transferência de estabilidade conecta internamente as componentes contínuas e descontínuas dentro do volume Ω . Além disto, a_t tem como função gerar a estabilização da componente descontínua o que é passado para a componente contínua. Deste modo, obtêm-se uma aproximação local “forçada” entre as duas componentes em questão: se uma estiver próxima da solução exata, a outra também estará.

A grande vantagem do uso desta função de transferência de estabilidade está na possibilidade de eliminação da componente descontínua v^d , no interior de cada elemento, ao fazermos v^d ficar em função da componente contínua v^c . Deste modo, o problema torna-se contínuo localmente.

É importante observar que é necessária uma análise de sensibilidade dos parâme-

tros ρ_0^e e ρ_1^e para definir os valores mais adequados a serem utilizados na formulação.

Finalmente, definindo a forma bilinear global:

$$a_t^{c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c) = \sum_{e=1}^{N_{el}} a_t^{e,c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c), \quad (4.34)$$

a formulação descontínuo-contínuo desta nova família consiste em encontrar o par $(p^d, p^c) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,c,k_c}$ satisfazendo a seguinte equação variacional:

$$\begin{aligned} & a^h(p^d, v^d) + a^h(p^c, v^c) + a_t^{c,d}(p^d, p^c, v^d, v^c) + Q_{0,int}^{c,d}(p^d, p^c, v^d, v^c) \quad (4.35) \\ & + Q_{1,int}^{c,d}(p^d, p^c, v^d, v^c, \gamma, s) + Q_{0,ext}^{c,d}(p^d, p^c, v^d, v^c) + Q_{1,ext}^{c,d}(p^d, p^c, v^d, v^c, s) \\ & + a_R(p^d, v^d) + a_R(p^c, v^c) = b(v^d) + b(v^c), \end{aligned}$$

para todo $(v^d, v^c) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,c,k_c}$.

Capítulo 5

Análise da Consistência dos Métodos

5.1 Consistência da primeira família de formulações Galerkin descontínuo-contínuo

O método de Galerkin é consistente se a solução aproximada puder ser substituída pela solução exata na forma fraca.

Seja, então, $p \in H^1(\Omega)$ a solução exata e p_i a restrição de p a $\Omega_{int,i}$. Para cada elemento $\Omega_{int,i}$, tem-se o Problema de Valor de Contorno definido na Seção 3.2 reproduzido abaixo:

$$-div(D_{int,i}\nabla p_i) - \sigma p_i = f \quad \text{em} \quad \Omega_{int,i} \quad \forall i \in \{1, \dots, N_\Omega\} \quad (5.1)$$

$$p_i = g \quad \text{em} \quad \Gamma_D \cap \partial\Omega_{int,i} \quad (5.2)$$

$$D_{int,i}\nabla p_i \cdot \vec{n}_i = q \quad \text{em} \quad \Gamma_N \cap \partial\Omega_{int,i} \quad (5.3)$$

$$D_{int,i}\nabla p_i \cdot \vec{n}_i + \alpha p_i = r \quad \text{em} \quad \Gamma_R \cap \partial\Omega_{int,i} \quad (5.4)$$

$$p_i = p_j \quad \text{em} \quad \partial\Omega_{int,i} \cap \partial\Omega_{int,j} \quad \text{se} \quad meas(\partial\Omega_{int,i} \cap \partial\Omega_{int,j}) > 0 \quad (5.5)$$

$$D_{int,i}\nabla p_i \cdot \vec{n}_i = D_{int,j}\nabla p_j \cdot \vec{n}_j \quad \text{em} \quad \partial\Omega_{int,i} \cap \partial\Omega_{int,j} \quad (5.6)$$

se $meas(\partial\Omega_{int,i} \cap \partial\Omega_{int,j}) > 0$

Considerando o par $(v^d, v^t) \in H^{h,d,k_d} \times T^{h,c,k_t}$ e que para a solução exata temos $p_i = p_i^d = p_i^t$, ao multiplicarmos a Equação Diferencial (5.1) por v^d e v^t teremos as integrais:

$$\int_{\Omega_{int,i}} [-div(D_{int,i}\nabla p_i) v^d - \sigma p_i v^d] d\Omega = \int_{\Omega_{int,i}} f v^d d\Omega$$
$$\int_{\Omega_{int,i}} [-div(D_{int,i}\nabla p_i) v^t - \sigma p_i v^t] d\Omega = \int_{\Omega_{int,i}} f v^t d\Omega$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{int,i}} [-div (D_{int,i} \nabla p_i) v^d - div (D_{int,i} \nabla p_i) v^t - \sigma p_i v^d - \sigma p_i v^t] d\Omega & \quad (5.7) \\ & = \int_{\Omega_{int,i}} f v^d + f v^t d\Omega \end{aligned}$$

Lembrando que, de acordo com as definições dos espaços de aproximações em (4.17), o *espaço traço* $T^{h,c,kt}$ só está definido em $\Gamma_{int} \cap \Gamma$ e que além disto, $v^t = v^d$ em $\Gamma_{int} \cap \Gamma$, temos que as integrais em $\Omega_{int,i}$ com a presença da componente v^t são nulas. Logo, podemos reescrever a equação anterior como:

$$\int_{\Omega_{int,i}} [-div (D_{int,i} \nabla p_i) v^d - \sigma p_i v^d] d\Omega = \int_{\Omega_{int,i}} f v^d d\Omega \quad (5.8)$$

Aplicando a integração por partes ao primeiro e ao segundo termo de (5.8), temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{int,i}} -div (D_{int,i} \nabla p_i) v^d & = \quad (5.9) \\ \int_{\Omega_{int,i}} D_{int,i} \nabla p_i \nabla v^d d\Omega & - \int_{\Gamma_{int}} D_{int,i} \nabla p_i v^d \vec{n}_i d\Gamma \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{int}} D_{int,i} \nabla p_i v^d \vec{n}_i d\Gamma & = \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_D} D_{int,i} \nabla p_i v^d \vec{n}_i d\Gamma + \quad (5.10) \\ \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_N} D_{int,i} \nabla p_i v^d \vec{n}_i d\Gamma & + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_R} D_{int,i} \nabla p_i v^d \vec{n}_i d\Gamma \end{aligned}$$

Aplicando as condições de contorno do problema definidas em (5.2), (5.3) e (5.4) acima, obtemos a formulação fraca:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{int,i}} D_{int,i} \nabla p_i \nabla v^d d\Omega - \int_{\Omega_{int,i}} \sigma p_i v^d d\Omega + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_R} \alpha p_i v^d d\Gamma & = \quad (5.11) \\ \int_{\Omega_{int,i}} f v^d d\Omega + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_N} q v^d d\Gamma + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_R} r v^d d\Gamma \end{aligned}$$

Considerando as formas bilineares definidas em (4.7), (4.20), (4.22), (4.25) e (4.26), temos a formulação variacional:

$$a^h(p_i, v^d) + a_R(p_i, v^d) = b(v^d) \quad (5.12)$$

Como para a solução exata temos $p_i = p_i^d = p_i^t$, logo as formas bilineares associa-

das ao fluxo no contorno interno $Q_{0,int}(p_i, p_i, v^d, v^t)$ e $Q_{1,int}(p_i, p_i, v^d, v^t, s)$ e as formas associadas ao fluxo no contorno externo $Q_{0,ext}(p_i, p_i, v^d, v^t)$ e $Q_{1,ext}(p_i, p_i, v^d, v^t, s)$ serão todas nulas. Deste modo, a expressão acima pode ser reescrita pela forma variacional abaixo, tal qual a forma variacional do problema proposto em (4.28):

$$\begin{aligned} & a^h(p_i, v^d) + Q_{0,int}(p_i, p_i, v^d, v^t) + Q_{1,int}(p_i, p_i, v^d, v^t, s) + \\ & Q_{0,ext}(p_i, p_i, v^d, v^t) + Q_{1,ext}(p_i, p_i, v^d, v^t, s) + a_R(p_i, v^d) = b(v^d), \end{aligned} \quad (5.13)$$

para todo $(v^d, v^t) \in H^{h,d,k_d} \times T^{h,c,k_t}$.

O que mostra que a primeira família de formulação Galerkin descontínuo-contínuo é consistente.

5.2 Consistência da segunda família de formulações Galerkin descontínuo-contínuo

De maneira análoga, seja, $p \in H^1(\Omega)$ a solução exata e p_i a restrição de p a $\Omega_{int,i}$. Para cada elemento $\Omega_{int,i}$, tem-se o Problema de Valor de Contorno definido em (5.1).

Considerando o par $(v^d, v^c) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,c,k_c}$ e que para a solução exata temos $p_i = p_i^d = p_i^c$, ao multiplicarmos a Equação Diferencial (5.1) por v^d e v^c teremos as integrais:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{int,i}} [-div(D_{int,i}\nabla p_i) v^d - \sigma p_i v^d] d\Omega &= \int_{\Omega_{int,i}} f v^d d\Omega \\ \int_{\Omega_{int,i}} [-div(D_{int,i}\nabla p_i) v^c - \sigma p_i v^c] d\Omega &= \int_{\Omega_{int,i}} f v^c d\Omega \end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{int,i}} [-div(D_{int,i}\nabla p_i) v^d - div(D_{int,i}\nabla p_i) v^c - \sigma p_i v^d - \sigma p_i v^c] d\Omega & \quad (5.14) \\ &= \int_{\Omega_{int,i}} f v^d + f v^c d\Omega \end{aligned}$$

Aplicando a integração por partes ao primeiro e ao segundo termo de (5.14),

acima, obtemos a formulação fraca:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{int,i}} D_{int,i} \nabla p_i \nabla v^d d\Omega + \int_{\Omega_{int,i}} D_{int,i} \nabla p_i \nabla v^c d\Omega - \int_{\Omega_{int,i}} \sigma p_i v^d d\Omega - \\
& \int_{\Omega_{int,i}} \sigma p_i v^c d\Omega + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_R} \alpha p_i v^d d\Gamma + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_R} \alpha p_i v^c d\Gamma \\
& = \int_{\Omega_{int,i}} f v^d d\Omega + \int_{\Omega_{int,i}} f v^c d\Omega + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_N} q v^d d\Gamma + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_N} q v^c d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_R} r v^d d\Gamma + \int_{\Gamma_{int} \cap \Gamma_R} r v^c d\Gamma \tag{5.18}
\end{aligned}$$

Considerando as formas bilineares definidas em (4.7), (4.20), (4.22), (4.25) e (4.26), temos a formulação variacional:

$$a^h(p_i, v^d) + a^h(p_i, v^c) + a_R(p_i, v^d) + a_R(p_i, v^c) = b(v^d) + b(v^c) \tag{5.19}$$

Novamente, como para a solução exata temos $p_i = p_i^d = p_i^c$, logo a forma bilinear de transferência de estabilidade $a_t^{c,d}(p_i, p_i, v^d, v^c)$, as formas bilineares associadas ao fluxo no contorno interno $Q_{0,int}^{c,d}(p_i, p_i, v^d, v^c)$ e $Q_{1,int}^{c,d}(p_i, p_i, v^d, v^c, \gamma, s)$ e as formas associadas ao fluxo no contorno externo $Q_{0,ext}^{c,d}(p_i, p_i, v^d, v^c)$ e $Q_{1,ext}^{c,d}(p_i, p_i, v^d, v^c, s)$ serão todas nulas. Deste modo, a expressão acima pode ser reescrita pela forma variacional abaixo, tal qual a forma variacional do problema proposto em (4.35):

$$\begin{aligned}
& a^h(p_i, v^d) + a^h(p_i, v^c) + a_t^{c,d}(p_i, p_i, v^d, v^c) + Q_{0,int}^{c,d}(p_i, p_i, v^d, v^c) \tag{5.20} \\
& + Q_{1,int}^{c,d}(p_i, p_i, v^d, v^c, \gamma, s) + Q_{0,ext}^{c,d}(p_i, p_i, v^d, v^c) + Q_{1,ext}^{c,d}(p_i, p_i, v^d, v^c, s) \\
& + a_R(p_i, v^d) + a_R(p_i, v^c) = b(v^d) + b(v^c),
\end{aligned}$$

para todo $(v^d, v^c) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,c,k_c}$.

O que mostra que a segunda família de formulação Galerkin descontínuo-contínuo é consistente.

Capítulo 6

Condensação Estática

Neste capítulo, serão estabelecidos os esquemas de implementação computacional para as duas famílias de formulações descontínuo-contínuo apresentadas anteriormente. Aqui, o problema de eliminação da componente descontínua deve ser caracterizado como um problema bem-posto e o sucesso da formulação depende diretamente desta caracterização. Caso esta condição não seja satisfeita, teremos o mesmo esforço computacional de um método Galerkin descontínuo clássico.

6.1 Primeira formulação HDG

Nesta formulação, o problema de eliminação local só será bem-posto a partir de um certo grau de refinamento da malha, informação de entrada essencial para o gerador de malha. Deste modo, com a análise a seguir, será possível obter a especificação de qual deve ser a função de tamanho h ótima.

6.1.1 O problema local

Com o objetivo de determinar o problema local, tome Ω_e um elemento fixado da malha M^h e considere o elemento $v^{d,*} \in H^{h,d,k_d}$ dado por:

$$v^{d,*} = \begin{cases} 0, & \text{em } \Omega - (\Omega_e \cup \Gamma_e), \\ v^d \in P^{k_d}(\Omega_e) & \text{em } \Omega_e \end{cases} \quad (6.1)$$

e consideraremos p_e^d a restrição de p^d a Ω_e , onde p^d representa a solução do problema variacional proposto da primeira família de soluções (4.28). Desta forma, quando p^d é solução de (4.28) segue que p_e^d é solução do problema variacional similar:

$$a^{h,e,loc}(p_e^d, v_e^d) + Q_{0,int}^{e,loc}(p_e^d, p^t, v_e^d, 0) + Q_{1,int}^{e,loc}(p_e^d, p^t, v_e^d, 0, s) + Q_{0,ext}^{e,loc}(p_e^d, p^t, v_e^d, 0) + Q_{1,ext}^{e,loc}(p_e^d, v_e^d, 0, s) + a_R^{e,loc}(p_e^d, v_e^d) = b^{e,loc}(v_e^d), \quad (6.2)$$

para todo $v_e^d \in P^{k_d}(\Omega_e)$ e onde as novas formas bilineares são dadas por:

$$\begin{aligned}
a^{h,e,loc}(p_e^d, v_e^d) &= a^h(p^d, v^{d,*}), \\
Q_{0,int}^{e,loc}(p_e^d, p^t, v_e^d, 0) &= Q_{0,int}(p^d, p^t, v^{d,*}, 0), \\
Q_{1,int}^{e,loc}(p_e^d, p^t, v_e^d, 0, s) &= Q_{1,int}(p^d, p^t, v^{d,*}, 0, s), \\
Q_{0,ext}^{e,loc}(p_e^d, p^t, v_e^d, 0) &= Q_{0,ext}(p^d, p^t, v^{d,*}, 0), \\
Q_{1,ext}^{e,loc}(p_e^d, v_e^d, 0, s) &= Q_{1,ext}(p^d, v^{d,*}, 0, s), \\
a_R^{e,loc}(p_e^d, v_e^d) &= a_R(p^d, v^{d,*})
\end{aligned} \tag{6.3}$$

O novo funcional linear é dado por

$$b^{e,loc}(v_e^d) = b^{e,loc}(v^{d,*}) \tag{6.4}$$

Denotando por $A^{1,e,loc}(\circ, \circ)$ a respectiva forma bilinear associada ao problema variacional local definidos por (6.2), podemos deduzir que:

$$\begin{aligned}
A^{1,e,loc}(\varphi, \eta) &= a^{h,e,loc}(\varphi, \eta) + Q_{0,int}^{e,loc}(\varphi, 0, \eta, 0) + Q_{1,int}^{e,loc}(\varphi, 0, \eta, 0, s) + \\
&Q_{0,ext}^{e,loc}(\varphi, 0, \eta, 0) + Q_{1,ext}^{e,loc}(\varphi, \eta, 0, s) + a_R^{e,loc}(\varphi, \eta),
\end{aligned} \tag{6.5}$$

para todo $(\varphi, \eta) \in P^{k_d}(\Omega_e) \times P^{k_d}(\Omega_e)$.

Já o respectivo funcional linear associado ao problema variacional local definido em (6.2) será denotado por $B^{1,e,loc}(\circ)$ e definido por:

$$\begin{aligned}
B^{1,e,loc}(\eta) &= b^{e,loc}(\eta) - Q_{0,int}^{e,loc}(0, p^t, \eta, 0) - Q_{1,int}^{e,loc}(0, p^t, \eta, 0, s) \\
&- Q_{0,ext}^{e,loc}(0, p^t, \eta, 0)
\end{aligned} \tag{6.6}$$

para todo $\eta \in P^{k_d}(\Omega_e)$.

Desta forma, o problema de eliminação da componente descontínua no nível de elemento, para a primeira família HDG é dado de maneira equivalente pelo problema variacional

$$A^{1,e,loc}(p_e^d, \eta) = B^{1,e,loc}(\eta), \forall \eta \in P^{k_d}(\Omega_e). \tag{6.7}$$

6.1.2 Determinação da função de tamanho h

Nesta seção, apresentaremos a determinação da função de tamanho a ser fornecida ao gerador de malhas de tal modo que o problema local seja bem-posto.

Com este propósito, considere $C_e^P > 0$ uma constante real que não depende dos parâmetros da malha, dependendo somente da distorção dos elementos. Ela será

definida por:

$$C_e^P = \frac{1}{C_e^{P,*}}; \quad (6.8)$$

$$C_e^{P,*} = \sup \left\{ \frac{\int_{\Omega_e} \frac{D|\eta|^2}{(h_e)^2} d\Omega + \int_{\Gamma_e} \frac{D|\eta|^2}{h_e} d\Gamma}{\int_{\Omega_e} D|\nabla\eta|^2 d\Omega} \right\} \quad (6.9)$$

onde $\eta \in P^k(\Omega_e)$, $k \geq 1$ e $\eta \neq \text{constante}$.

Como $P^k(\Omega_e)$ possui dimensão finita, segue que existe $C^{P,0} > C^{P,1}$ duas constantes positivas tais que $0 < C^{P,0} \leq C_e^P \leq C^{P,1}$.

Em seguida, considere a constante \bar{C}_Γ^e definida abaixo:

$$\bar{C}_\Gamma^e = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega_e} \frac{D|\eta|^2}{(h_e)^2} d\Omega}{\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{D|\eta|^2}{h_e} d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{D|\eta|^2}{h_e} d\Gamma} \right\} \quad (6.10)$$

onde $\eta \in P^k(\Omega_e)$, $k \geq 1$ e $\eta \neq \text{constante}$.

Devemos observar que a constante real C_e^P e \bar{C}_Γ^e são independentes dos parâmetros de malha, dependendo somente do grau k do polinômio η . Como $P^k(\Omega_e)$ possui dimensão finita, segue que $\bar{C}_\Gamma^e > 0$.

Agora, introduzimos a seguinte norma em $P^{ka}(\Omega_e)$:

$$\|\varphi\|^2 = \frac{1}{4} \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega + \frac{C_e^P}{8\bar{C}_\Gamma^e} \int_{\Omega_e} \frac{D|\bar{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega \quad (6.11)$$

onde, para todo $\eta \in L^2(\Omega_e)$ a componente constante $\bar{\eta}$ é dada por

$$\eta = \hat{\eta} + \bar{\eta} \quad \text{onde} \quad \bar{\eta} = \frac{\int_{\Omega_e} D\eta d\Omega}{\int_{\Omega_e} D d\Omega} \quad (6.12)$$

Das definições em (6.12) temos

$$\int_{\Omega_e} D \hat{\eta} \bar{\eta} d\Omega = 0. \quad (6.13)$$

Para obter a prova da continuidade e da coercividade do problema local apresentado, é necessário estabelecer os seguintes lemas:

Lema 1 Para todo $\varphi \in H^1(\Omega_e)$, temos a desigualdade

$$\begin{aligned} & - \left(\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{h_{int}(D|\nabla\varphi \cdot \vec{n}_e|)^2}{\beta_{int}} d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{h_e(D|\nabla\varphi \cdot \vec{n}_e|)^2}{\beta_{e,t}} d\Gamma \right) \\ & \geq - \frac{1}{\beta^{0,min}} \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega \end{aligned}$$

onde $\beta^{0,min} = \inf \{ \beta^{0,e}; e \in \{1, \dots, N_{el}\} \}$.

Prova Este resultado segue diretamente das definições de β dadas nas equações (4.12), (4.16), (4.19) e (4.23). \square

Além disto, da inequação de Poincaré, para todo Ω_e , temos:

$$\int_{\Omega_e} D|\nabla\hat{\varphi}|^2 d\Omega > C_e^P \left[\int_{\Omega_e} D \frac{|\hat{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega + \int_{\Gamma_e} D \frac{|\hat{\varphi}|^2}{h_e} d\Gamma \right], \quad (6.14)$$

onde $C_e^P > 0$ é definido na equação (6.8).

Lema 2 Se, para todo Ω_e , o refinamento da malha satisfaz

$$-C_{N_0}^e + \frac{C_e^P}{2} \geq 0, \quad (6.15)$$

onde $C_{N_0}^e = \sup \left\{ \frac{\sigma(x)}{D(x)} (h_e)^2; x \in \Omega_e \right\} > 0$ e C_e^P é como definido em (6.8), então, para todo $\varphi \in H^1(\Omega_e)$, tem-se a desigualdade:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega - \int_{\Omega_e} \sigma\varphi^2 d\Omega \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega + \\ & \left(\frac{C_e^P}{2} - C_{N_0}^e \right) \int_{\Omega_e} \frac{D|\hat{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega - C_{N_0}^e \int_{\Omega_e} \frac{D|\bar{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega + \frac{C_e^P}{2} \int_{\Gamma_e} D \frac{|\hat{\varphi}|^2}{h_e} d\Gamma \end{aligned}$$

Prova Das definições (6.12) e (6.13), $\forall \varphi \in H^1(\Omega_e)$, obtemos

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega_e} \sigma\varphi^2 d\Omega = - \int_{\Omega_e} \frac{\sigma(h_e)^2}{D} \frac{D\varphi^2}{(h_e)^2} d\Omega \geq \\ & -C_{N_0}^e \int_{\Omega_e} \frac{D\varphi^2}{(h_e)^2} d\Omega = -C_{N_0}^e \int_{\Omega_e} \frac{D|\hat{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega - C_{N_0}^e \int_{\Omega_e} \frac{D|\bar{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega \end{aligned}$$

Usando a desigualdade definida em (6.14), temos o resultado desejado. \square

Lema 3 Se β_{int} e $\beta^{e,t}$ são tais que

$$\frac{\beta_{int}}{D} > C_e^P \quad \text{e} \quad \frac{\beta^{e,t}}{D} > C_e^P \quad \forall \Omega_e, \quad (6.16)$$

então, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}} \varphi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^{e,t}}{h_e} \varphi^2 d\Gamma \right] + \frac{C_e^P}{2} \int_{\Gamma_e} \frac{D|\hat{\varphi}|^2}{h_e} d\Gamma \geq \\ & \frac{C_e^P}{4\bar{C}_\Gamma^e} \int_{\Omega_e} \frac{D|\bar{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega \end{aligned}$$

Prova Para todo $\varphi \in H^1(\Omega_e)$ temos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}} \varphi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^{e,t}}{h_e} \varphi^2 d\Gamma \right] = \\ & \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{D} \frac{D\varphi^2}{h_{int}} d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^{e,t}}{D} \frac{D\varphi^2}{h_e} d\Gamma \right] \end{aligned}$$

Note que, da equação (6.12), temos $\bar{\varphi}^2 \leq 2[\hat{\varphi}^2 + \varphi^2]$. Tomando a constante \bar{C}_Γ^e como definida na equação (6.10) e as hipóteses para β_{int} e $\beta^{e,t}$, temos que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}} \varphi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^{e,t}}{h_e} \varphi^2 d\Gamma \right] + \frac{C_e^P}{2} \int_{\Gamma_e} \frac{D|\hat{\varphi}|^2}{h_e} d\Gamma \geq \\ & \frac{C_e^P}{2} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{D|\varphi|^2}{h_e} d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{D|\varphi|^2}{h_e} d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{D|\hat{\varphi}|^2}{h_e} d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{D|\hat{\varphi}|^2}{h_e} d\Gamma \right] \\ & \geq \frac{C_e^P}{4} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{D|\bar{\varphi}|^2}{h_e} d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{D|\bar{\varphi}|^2}{h_e} d\Gamma \right] \geq \frac{C_e^P}{4\bar{C}_\Gamma^e} \int_{\Omega_e} \frac{D|\bar{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega \end{aligned}$$

□

Lema 4 Se o refinamento da malha de elementos finitos atende à restrição

$$C_{N_0}^e \leq \inf \left\{ \frac{C_e^P}{2}, \frac{C_e^P}{8\bar{C}_\Gamma^e} \right\} \quad (6.17)$$

onde \bar{C}_Γ^e é definido em (6.10) e

$$\beta^{0,min} \geq 4 \quad (6.18)$$

então,

$$\int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega - \int_{\Omega_e} \sigma\varphi^2 d\Omega - \frac{1}{\beta^{0,min}} \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega +$$

$$\frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}} \varphi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^{e,t}}{h_e} \varphi^2 d\Gamma \right] \geq \|\varphi\|^2$$

Prova Usando a norma definida em (6.11), Lemas 2 e 3 temos que

$$\int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega - \int_{\Omega_e} \sigma\varphi^2 d\Omega - \frac{1}{\beta^{0,min}} \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega +$$

$$\frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}} \varphi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^{e,t}}{h_e} \varphi^2 d\Gamma \right] \geq$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta^{0,min}} \right) \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega + \left(\frac{C_e^P}{2} - C_{N_0}^e \right) \int_{\Omega_e} \frac{D|\hat{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega - C_{N_0}^e \int_{\Omega_e} \frac{D|\bar{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega +$$

$$\frac{C_e^P}{2} \int_{\Gamma_e} \frac{D|\hat{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Gamma + \frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}} \varphi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^{e,t}}{h_e} \varphi^2 d\Gamma \right] \geq$$

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\beta^{0,min}} \right) \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega + \left(\frac{C_e^P}{2} - C_{N_0}^e \right) \int_{\Omega_e} \frac{D|\hat{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega +$$

$$\left(\frac{C_e^P}{4\bar{C}_\Gamma^e} - C_{N_0}^e \right) \int_{\Omega_e} \frac{D|\bar{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega \geq \frac{1}{4} \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega + \frac{C_e^P}{8\bar{C}_\Gamma^e} \int_{\Omega_e} \frac{D|\bar{\varphi}|^2}{(h_e)^2} d\Omega = \|\varphi\|^2 \quad \square$$

Teorema 1 *Se as condições dadas em (6.15), (6.16), (6.17) e (6.18) são satisfeitas, então a condensação estática da presente formulação é um problema bem-posto.*

Prova O problema da eliminação local de um componente descontínuo, nesta formulação, será um problema bem-posto somente se a forma variacional associada for contínua e coerciva.

Considere a seguinte identidade

$$|x| \cdot |y| = \frac{|x|}{\theta} \cdot \theta |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad \forall \theta > 0 \quad (6.19)$$

e a desigualdade

$$|x| \cdot |y| \leq \frac{\mu}{2}|x|^2 + \frac{1}{2\mu}|y|^2, \forall x, y \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \mu > 0. \quad (6.20)$$

Usando a definição dada na equação (4.1), a identidade dada na equação (6.19) com $\theta = \left(\frac{h_{int}}{\beta_{int}}\right)^{\frac{1}{2}}$ para multiplicar o fluxo em $(\Gamma_e \cap \Gamma_{int})$ e com $\theta = \left(\frac{h_e}{\beta^{e,t}}\right)^{\frac{1}{2}}$ para multiplicar o fluxo em $(\Gamma_e \cap \Gamma_D)$ e a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos que o funcional linear $B^{1,e,loc}(\circ)$ é contínuo assim como a forma bilinear $A^{1,e,loc}(\circ, \circ)$ é contínua na norma definida pela equação (6.11) para $\mu = 1$.

Portanto, nossa formulação variacional é contínua.

Além disto, de modo a provar sua coercividade, utilizando (6.12) temos:

$$\begin{aligned} A^{1,e,loc}(\varphi, \varphi) &\geq \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega - \int_{\Omega_e} \sigma\varphi^2 d\Omega - \frac{1}{\beta^{0,min}} \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega + \\ &\frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}} \varphi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^{e,t}}{h_e} \varphi^2 d\Gamma \right] \end{aligned} \quad (6.21)$$

para todo $\varphi \in P^{k_d}(\Omega_e)$.

Da desigualdade (6.21) e do Lema 4, obtemos

$$A^{1,e,loc}(\varphi, \varphi) \geq \|\varphi\|^2 \quad \forall \varphi \in P^{k_d}(\Omega_e), \quad (6.22)$$

e podemos afirmar que esta forma é fortemente coerciva em $P^{k_d}(\Omega_e)$ com a norma dada pela equação (6.11).

Como esta forma é contínua, o funcional linear é contínuo também. Segue do *Teorema de Lax-Milgram* que o problema definido na equação (6.7) possui somente uma solução.

□

Deste modo, se as condições do Teorema 1 são satisfeitas, o problema da eliminação local da componente descontínua no nível de elemento é um problema bem-posto e, portanto, temos um problema global com o mesmo esforço computacional de uma formulação contínua.

Para isto, dos Lemas (1) até (4), a função de tamanho deve satisfazer as restrições dadas por (6.15), (6.16), (6.17) e (6.18).

Observação É importante observar que em nenhum ponto da prova do Teorema 1 a condição de continuidade do espaço traço foi imposta. Deste modo, nós conjecturamos que a análise desta função de tamanho seja válida também para espaços traço descontínuos.

6.2 Segunda formulação CDG

A segunda família CDG possui as formas bilineares de transferência de estabilidade, que podem ser exploradas com o objetivo de garantir a eliminação da componente descontínua em função da componente contínua a nível de elemento.

6.2.1 O problema local

De maneira similar ao proposto na Seção 6.1.1, tomemos um elemento fixado Ω_e e o elemento $v^{d,*} \in H^{h,d,k_d}$ dado por:

$$v^{d,*} = \begin{cases} 0, & \text{em } \Omega - (\Omega_e \cup \Gamma_e), \\ v^d \in P^{k_d}(\Omega_e) & \text{em } \Omega_e \end{cases} \quad (6.23)$$

e consideraremos p_e^d a restrição de p^d a Ω_e , onde p^d representa a solução do problema variacional da segunda família proposto na Equação (4.35).

Tome novamente a forma de transferência de estabilidade $a_t^{c,d,e}$ apresentada na Equação (4.33) e rerepresentada aqui na Equação (6.24) sob as mesmas condições $(w^d, v^d) \in H^{h,d,k_d} \times H^{h,d,k_d}$ e $(w^c, v^c) \in H^{h,c,k_c} \times H^{h,c,k_c}$:

$$a_t^{c,d,e}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c) = \int_{\Omega_e} \left[\frac{\rho_0^e}{(h_e)^2} (w_e^d - w_e^c)(v_e^d - v_e^c) + \rho_1^e \nabla(w_e^d - w_e^c) \cdot \nabla(v_e^d - v_e^c) \right] d\Omega \quad (6.24)$$

sendo $\rho_0^e \geq 0$ e $\rho_1^e \geq 0$.

E rerepresentando também sua respectiva forma bilinear global:

$$a_t^{c,d}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c) = \sum_{e=1}^{N_{el}} a_t^{c,d,e}(w_e^d, w_e^c, v_e^d, v_e^c). \quad (6.25)$$

Quando p^d é a solução do segundo problema variacional proposto em (4.35), segue que p_e^d é a solução do problema variacional abaixo:

$$\begin{aligned} & a^{h,e,loc}(p_e^d, v_e^d) + a_t^{c,d,e,loc}(p_e^d, p^c, v_e^d, 0) + Q_{0,int}^{c,d,e,loc}(p_e^d, p^c, v_e^d, 0) \\ & + Q_{1,int}^{c,d,e,loc}(p_e^d, p^c, v_e^d, 0, \gamma, s) + Q_{0,ext}^{c,d,e,loc}(p_e^d, p^c, v_e^d, 0) + Q_{1,ext}^{c,d,e,loc}(p_e^d, p^c, v_e^d, 0, s) \\ & + a_R^{e,loc}(p_e^d, v_e^d) = b^{e,loc}(v_e^d), \end{aligned} \quad (6.26)$$

para todo $v_e^d \in P^{k_d}(\Omega_e)$ e onde as novas formas bilineares locais *loc* são definidas

como:

$$\begin{aligned}
a_t^{c,d,e,loc}(p_e^d, p^c, v_e^d, 0) &= a_t^{c,d}(p^d, p^c, v^{d,*}, 0), \\
Q_{0,int}^{c,d,e,loc}(p_e^d, p^c, v_e^d, 0) &= Q_{0,int}^{c,d}(p^d, p^c, v^{d,*}, 0), \\
Q_{1,int}^{c,d,e,loc}(p_e^d, p^c, v^d, 0, \gamma, s) &= Q_{1,int}^{c,d}(p^d, p^c, v^{d,*}, 0, \gamma, s) \\
Q_{0,ext}^{c,d,e,loc}(p_e^d, p^c, v_e^d, 0) &= Q_{0,ext}^{c,d}(p^d, p^c, v^{d,*}, 0) \\
Q_{1,ext}^{c,d,e,loc}(p_e^d, p^c, v_e^d, 0, s) &= Q_{1,ext}^{c,d}(p^d, p^c, v^{d,*}, 0, s)
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Denotamos por $A^{2,e,loc}(\circ, \circ)$ a forma bilinear associada ao problema variacional local proposto na Equação (6.26) e a definimos por

$$\begin{aligned}
A^{2,e,loc}(\varphi, \eta) &= a^{h,e,loc}(\varphi, \eta) + a_t^{c,d,e,loc}(\varphi, 0, \eta, 0) + Q_{0,int}^{c,d,e,loc}(\varphi, 0, \eta, 0) \\
&+ Q_{1,int}^{c,d,e,loc}(\varphi, 0, \eta, 0, \gamma, s) + Q_{0,ext}^{c,d,e,loc}(\varphi, 0, \eta, 0) + Q_{1,ext}^{c,d,e,loc}(\varphi, 0, \eta, 0, s) + a_R^{e,loc}(\varphi, \eta)
\end{aligned} \tag{6.28}$$

para todo $(\varphi, \eta) \in P^{k_d}(\Omega_e) \times P^{k_d}(\Omega_e)$.

Já o funcional linear associado ao problema variacional local definido em (6.26), é denotado por $B^{2,e,loc}(\circ)$ e definido por:

$$\begin{aligned}
B^{2,e,loc}(\eta) &= b^{e,loc}(\eta) - a_t^{c,d,e,loc}(0, p^c, \eta, 0) - Q_{0,int}^{c,d,e,loc}(0, p^c, \eta, 0) \\
&- Q_{1,int}^{c,d,e,loc}(0, p^c, \eta, 0, \gamma, s) - Q_{0,ext}^{c,d,e,loc}(0, p^c, \eta, 0) - Q_{1,ext}^{c,d,e,loc}(0, p^c, \eta, 0, s)
\end{aligned} \tag{6.29}$$

para todo $\eta \in P^{k_d}(\Omega_e)$.

Desta forma, o problema de eliminação da componente descontínua no nível de elemento, para a segunda família de formulações, é dado de maneira equivalente pelo problema variacional

$$A^{2,e,loc}(p_e^d, \eta) = B^{2,e,loc}(\eta), \quad \forall \eta \in P^{k_d}(\Omega_e). \tag{6.30}$$

6.2.2 Existência e unicidade da solução

A segunda família proposta neste trabalho, ao utilizar as chamadas funções de transferência de estabilidade num parâmetro adequado a ser escolhido, faz com que a limitação do tamanho da malha seja desnecessária. Estas funções a_t estão presentes na composição dos funcionais lineares desta família como discutido na Seção 4.2.

Teorema 2 *Se $\rho_0^e \geq \max(\sigma_e h_e)^2$ em cada elemento $\Omega_e \subset \Omega$ então a forma variacional da formulação CDG descontínuo-contínuo é um problema bem-posto.*

Prova O problema da eliminação local da componente descontínua, nesta formulação, será um problema bem-posto somente se a forma variacional associada for contínua e coerciva.

De modo análogo ao feito na Seção 6.1.2 para a primeira formulação, tome a definição dada na Equação (4.1), a identidade dada na Equação (6.19) com $\theta = \left(\frac{h_{int}}{\beta_{int}}\right)^{\frac{1}{2}}$ para multiplicar o fluxo em $(\Gamma_e \cap \Gamma_{int})$ e com $\theta = \left(\frac{h_e}{\beta^e}\right)^{\frac{1}{2}}$ para multiplicar o fluxo em $(\Gamma_e \cap \Gamma_D)$ e a desigualdade de Cauchy-Schwartz, destas obtemos que o funcional linear $B^{2,e,loc}(\circ)$ é contínuo assim como a forma bilinear $A^{2,e,loc}(\circ, \circ)$ é contínua na norma definida pela Equação (6.11) para $\mu = 1$. Portanto, nossa formulação variacional é contínua.

Além disto, devemos provar sua coercividade. Para isto, lembrando que para a segunda família $\gamma \in [0, 1]$, utilizaremos a definição (6.28) e as formas bilineares associadas à segunda formulação definidas na Seção 4.2. Observe que, para $(\varphi, \eta) \in P^{k_d}(\Omega_e)$, a forma bilinear $A^{2,e,loc}(\varphi, \eta)$ associada ao segundo problema variacional, se $\eta = \varphi$, será definido localmente por:

$$\begin{aligned} A^{2,e,loc}(\varphi, \varphi) &= \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega - \int_{\Omega_e} \sigma\varphi^2 d\Omega + \int_{\Omega_e} \left[\frac{\rho_0^e}{(h_e)^2}\varphi^2 + \rho_1^e|\nabla\varphi|^2 \right] d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}}\varphi^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \gamma D|\nabla\varphi \cdot \vec{n}_e| d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^e}{h_e}\varphi^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} D\nabla\varphi^2 \cdot \vec{n}_e d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_R} \alpha\varphi^2 d\Gamma. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Utilizando as desigualdades do Lema 1 e do Lema 3 da Seção 6.1.2 obtemos a expressão

$$\begin{aligned} A^{2,e,loc}(\varphi, \varphi) &\geq \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega - \int_{\Omega_e} \sigma\varphi^2 d\Omega - \frac{1}{\beta^{0,min}} \int_{\Omega_e} D|\nabla\varphi|^2 d\Omega + \\ &\frac{1}{2} \left[\int_{\Gamma_e \cap \Gamma_{int}} \frac{\beta_{int}}{h_{int}}\varphi^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_D} \frac{\beta^e}{h_e}\varphi^2 d\Gamma \right] \\ &+ \int_{\Omega_e} \left[\frac{\rho_0^e}{(h_e)^2}\varphi^2 + \rho_1^e|\nabla\varphi|^2 \right] d\Omega. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Logo, de acordo com o resultado do Lema 4, teremos que a forma bilinear associada será tal que $A^{2,e,loc}(\varphi, \varphi) \geq \|\varphi\|^2$ somente se

$$\int_{\Omega_e} \left[\frac{\rho_0^e}{(h_e)^2}\varphi^2 + \rho_1^e|\nabla\varphi|^2 \right] d\Omega \geq 0 \quad (6.33)$$

onde a norma $\|\circ\|$ é a mesma definida em (6.11).

Note que, uma vez que $\rho_0^e \geq 0$ e $\rho_1^e \geq 0$, na forma de transferência de estabilidade $a_t^{c,d}(\varphi, 0, \eta, 0)$, devemos majorar um valor para a constante ρ_0^e , de modo que não torne a expressão negativa. Tomando $\rho_0^e \geq \max(\sigma_e h_e)^2$, em cada elemento Ω_e , o termo será sempre não-negativo.

Deste modo, da desigualdade (6.32) e do Lema 4, obtemos

$$A^{2,e,loc}(\varphi, \varphi) \geq \| \varphi \|^2 \quad \forall \varphi \in P^{k_d}(\Omega_e) \quad (6.34)$$

e podemos afirmar que esta forma é fortemente coerciva em $P^{k_d}(\Omega_e)$ com a norma dada pela Equação (6.11).

Como esta forma é contínua, o funcional linear é contínuo também. Segue do *Teorema de Lax-Milgram* que o problema definido na Equação (6.30) possui somente uma solução.

□

Capítulo 7

Resultados numéricos

Neste capítulo apresentaremos os experimentos numéricos que verificam as propriedades de aproximação assim como a precisão e a robustez das formulações HDG e CDG propostas nesta tese. Estes experimentos foram elaborados em rotinas na linguagem C++, como uma extensão de um programa computacional desenvolvido no LAMEMO (Laboratório de Métodos de Modelagem e Geofísica Computacional - PEC/COPPE/UFRJ) para formulações Galerkin descontínuo-contínuo aplicados a outros problemas de interesse da Geofísica.

Com este objetivo, serão apresentados exemplos numéricos para as duas formulações em malhas quadradas, como o modelo da Figura 7.1, com diferentes refinamentos.

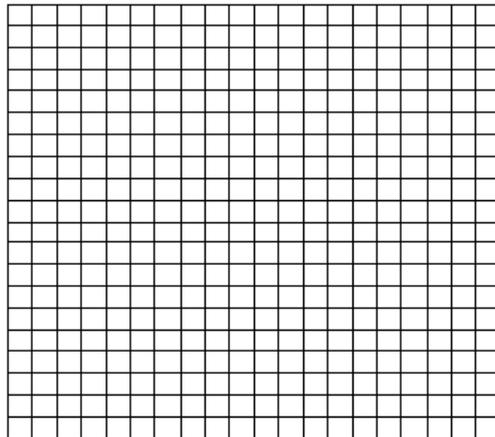


Figura 7.1: Modelo de malha quadrada utilizada em todos os experimentos.

Os experimentos foram realizados em uma máquina com processador Intel Core i7 e com 16Gb de memória RAM. As malhas utilizadas possuíam refinamento de 60, 80 e 120 partições, seguindo o modelo de malha mostrado na Figura 7.1. Para ambas as formulações, foram consideradas formas antissimétricas, isto é, $s = 1$. Além disto, foi utilizado o parâmetro de estabilização $\beta^{0,e} = 7,5$ na formulação HDG

descontínuo-contínuo via espaço traço contínuo em todos os experimentos pois foi aquele que permitiu a melhor performance do método. Em todas as simulações do método HDG, as malhas foram geradas usando a função de tamanho h satisfazendo as restrições do Teorema 1. Já para a formulação descontínua-contínua CDG, o parâmetro de estabilização utilizado foi $\beta^{0,e} = 2,25$ e o parâmetro ρ_0 foi calculado pela expressão $\rho_0 \geq \max(\sigma h)^2$ deduzida na Seção 6.2.2. Adicionalmente, no método CDG, foram utilizados $\rho_1 = \rho_0$ e $\gamma = 0,5$. Consideramos o coeficiente de difusão $D = 1$ em Ω e $K^2 = \sigma$ em Ω para as duas formulações.

Os elementos quadrangulares configuram malhas de elementos finitos de igual-ordem lagrangeanos bilineares (Q1-Q1) sendo, então, também estáveis para a formulação de Galerkin contínuo clássico (CG). Deste modo, foi incluído a formulação CG em nossos experimentos com condição de contorno de Dirichlet fraca. Foram utilizados 8 elementos por comprimento de onda na interpolação, de modo a atender a restrição “Kh constante” discutida na Seção 2.3.

Em todos os experimentos, foi utilizado o mesmo problema homogêneo: uma onda plana em meio infinito, com solução exata (E) conhecida variando o ângulo θ da onda para cada exemplo.

7.1 Exemplo 1: Problema homogêneo com $\theta = \frac{\pi}{4}$

Neste experimento, simulamos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \nabla^2 P + K^2 P &= 0 \text{ em } \Omega, \\ \text{com C.C.:} & \\ P &= \cos [K(\cos(\theta) \cdot x + \text{sen}(\theta) \cdot y)] \text{ em } \partial\Omega \end{aligned} \tag{7.1}$$

onde $K > 0$ é uma constante real, $\partial\Omega$ é a fronteira de Ω e $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

A solução exata é dada por $P = \cos [K(\cos(\theta) \cdot x + \sin(\theta) \cdot y)]$ em Ω e pode ser visualizada na Figura 7.2.

Aqui, é usado o valor de $\theta = \frac{\pi}{4}$, interpolação Q1 para a variável descontínua e interpolação Q1 para a variável traço também denominada de variável híbrida.

O objetivo deste experimento é verificar a performance das duas formulações propostas (HDG e CDG) em comparação com o método Galerkin contínuo (CG) assim como comparar o esforço computacional de ambos, em três secções diferentes para cada direção x e y . Para a formulação CDG descontínua-contínua foi plotada somente a componente contínua da solução pois as duas componentes do método apresentaram resultados similares.

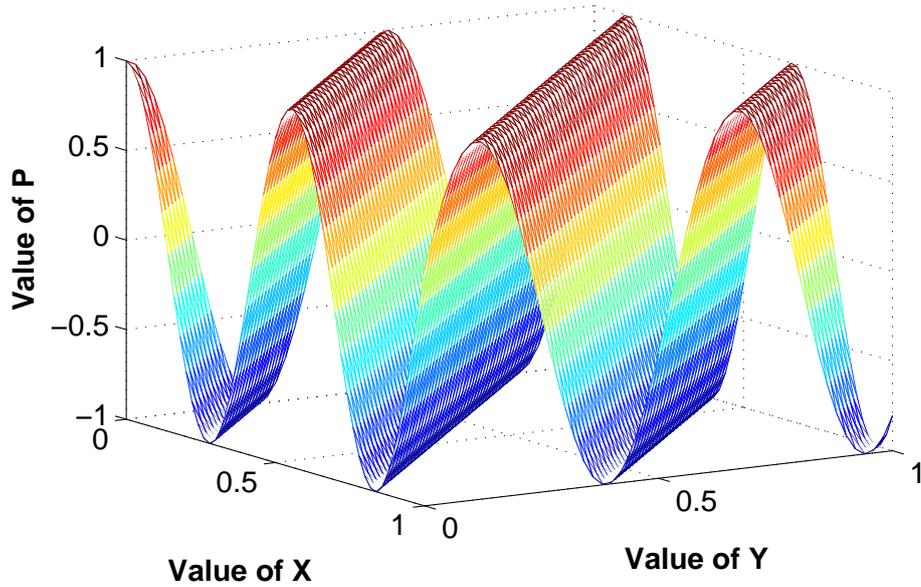


Figura 7.2: Representação da solução exata da Equação 7.1 para $K = 16$.

7.1.1 Resultados para número de onda $K=16$

Secção $x=0,5m$

É possível observar na Figura 7.3 que utilizando $K = 16$ tanto os métodos propostos nesta tese HDG e CDG quanto o estabelecido método CG possuem boa precisão, na secção $x=0,5m$, com a quase eliminação dos erros de amplitude e de fase.

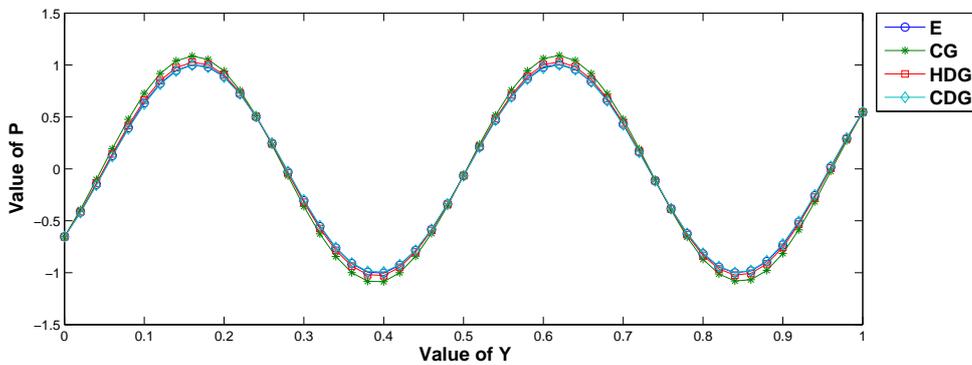


Figura 7.3: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0,5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 16$.

É importante observar que esse resultado é obtido já na malha com 60 elementos, sem a necessidade de aprimorar o refinamento desta. Em GRIESMAIER & MONK [37], é utilizado o mesmo valor de K para uma formulação mista usando espaço traço descontínuo. Uma vez que não foi utilizada nenhuma técnica de otimização de processamento computacional nas formulações propostas aqui, conjectura-se a alta competitividade destas.

7.1.2 Resultados para número de onda $K=45$

A solução exata, a solução do método CG, solução do método HDG proposto e a solução da componente contínua do método CDG para $K = 45$ são apresentados abaixo para as secções $x = 0,25m$, $x = 0,5m$, $x = 0,75m$, $y = 0,25m$, $y = 0,5m$ e $y = 0,75m$. O valor de K usado pode ser considerado como moderadamente alto. Devemos observar que este valor de K é quase três vezes maior que o maior valor de K usado em GRIESMAIER & MONK [37]. Além disto, convém frisar que a formulação apresentada por estes autores é uma formulação mista usando espaço traço descontínuo, e portanto, acreditamos ter um custo computacional maior para o processamento.

Secção $x=0,25m$

É possível observar na Figura 7.4 que, para uma malha de 3600 elementos Q1, os métodos CG e HDG apresentaram significantes erros de amplitude. Já o método CDG apresentou melhor precisão, com resultados levemente inferiores à solução exata. Para malhas com partição 80×80 , a Figura 7.5 mostra uma leve redução no erro de amplitude para os métodos CG e HDG novamante com desempenho superior do método CDG. Já a Figura 7.6 indica que, com o aumento do refinamento, todos os métodos possuem bons resultados com a quase eliminação do erro de amplitude nas três metodologias.

Secção $x=0,5m$

De modo similar, podemos observar na Figura 7.7 que os métodos CG e HDG apresentam resultados similares com alto erro de amplitude para uma partição 60×60 . Nesta partição, o método CDG demonstra resultados superiores para este problema. Na Figura 7.8, o erro de amplitude decai consideravelmente para os métodos CG e HDG com a quase eliminação do erro de amplitude para estes métodos. Já a Figura 7.9 mostra que, com grande refinamento na malha, os três métodos possuem bom desempenho com a quase total eliminação do erro de amplitude.

Secção $x=0,75m$

A Figura 7.10 mostra resultados com bastante poluição para os métodos CG e HDG. Observa-se que, conforme aumenta o valor de y , o erro de amplitude nestes dois métodos aumenta. Já o método CDG apresenta resultados bem superiores, com baixo erro de amplitude. Na Figura 7.11 é possível ver que com o refinamento da malha os resultados para os métodos CG e HDG tiveram significativa melhora e na Figura 7.12 as três técnicas em análise apresentaram boa acurácia nos resultados

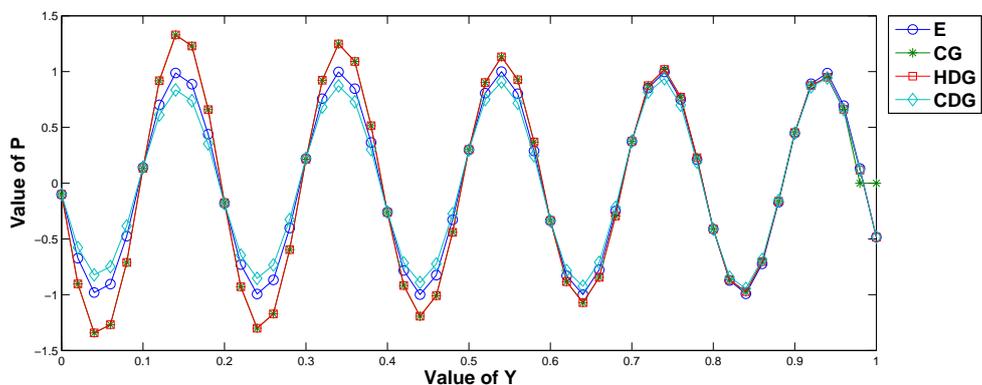


Figura 7.4: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

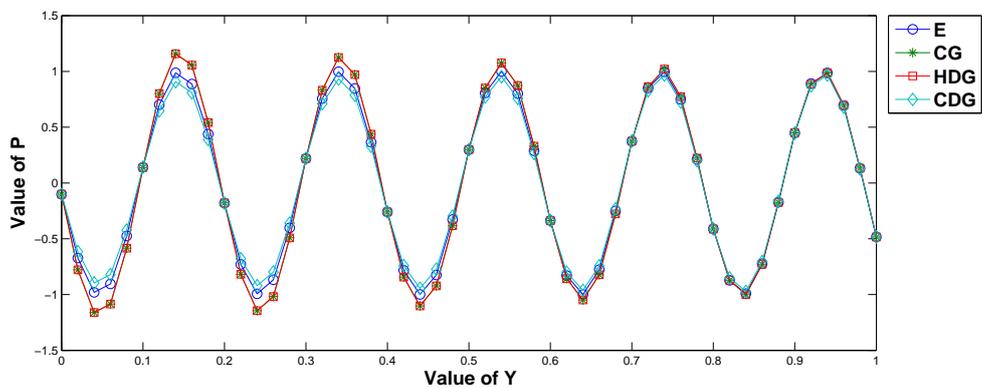


Figura 7.5: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

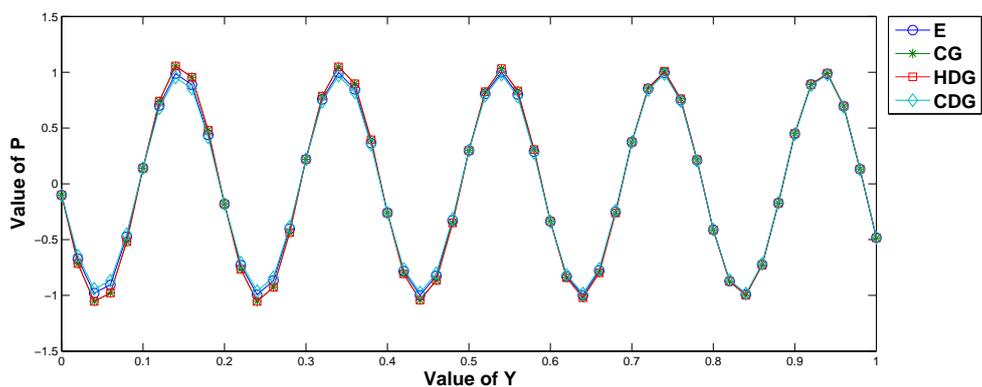


Figura 7.6: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

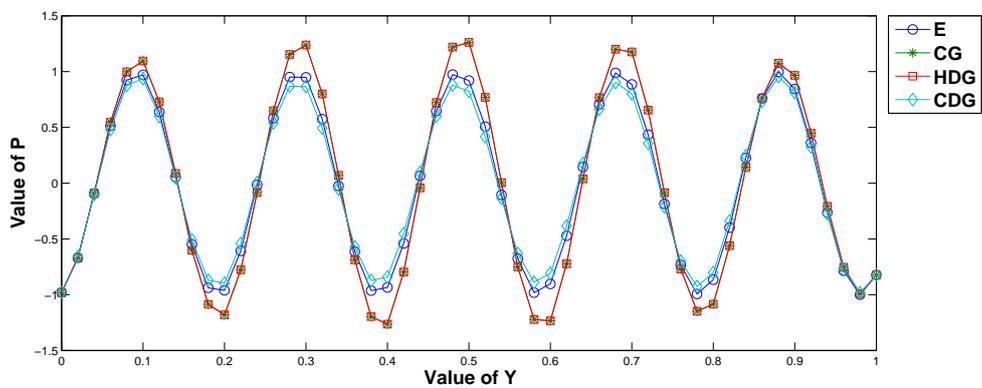


Figura 7.7: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

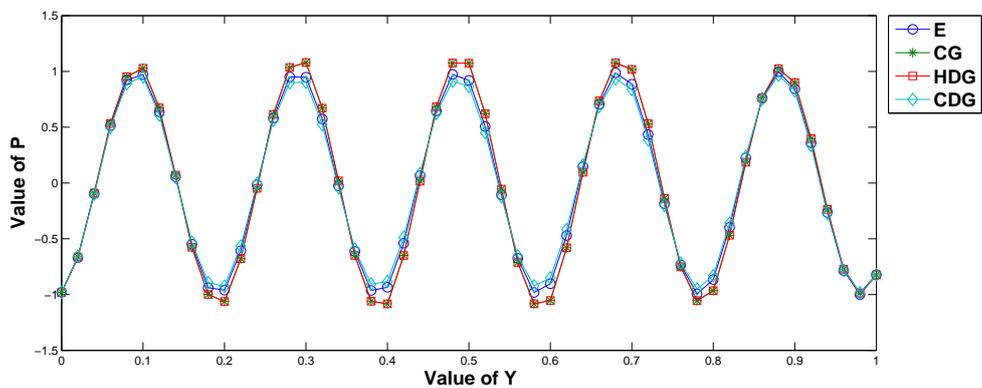


Figura 7.8: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

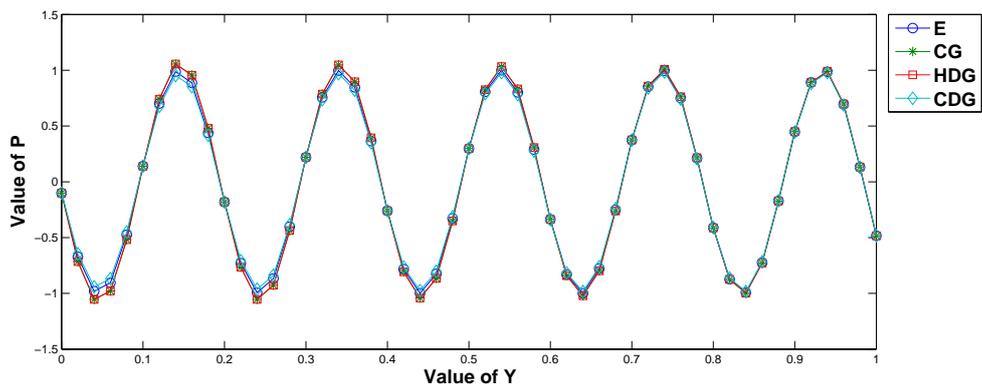


Figura 7.9: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

numéricos para uma malha de 14400 elementos Q1, com a quase eliminação do erro de amplitude e de fase.

Secção $y=0,25m$

Na Figura 7.13 podemos observar que os métodos CG, HDG e CDG se comportam em uma malha de 60×60 de modo muito similar ao apresentado na secção $x = 0,25m$: as formulação CG e HDG apresentam resultados similares com substancial erro de amplitude para valores $x < 0,5m$. Já o método CDG apresenta boa acurácia com resultados próximos à solução exata. Já as Figuras 7.14 e 7.15 mostram que conforme a malha é refinada, os métodos respondem melhor com a quase eliminação do erro de amplitude e sem apresentar erro de fase.

Secção $y=0,5m$

Na Figura 7.16 é possível observar que os métodos CG e HDG apresentam substancial erro de amplitude e erro de fase, para uma malha de 3600 elementos, ao passo que o método CDG apresenta resultados mais acurados. Na Figura 7.17 observa-se que os métodos CG e HDG continuam apresentando resultados similares com notável erro de amplitude. No entanto, com o refinamento para uma malha de 6400 elementos, houve melhora nos resultados. De acordo com a Figura 7.18, com uma malha de 14400 elementos, os três métodos analisados aqui apresentaram resultados numéricos precisos com a eliminação do erro de fase e, praticamente, eliminação do erro de amplitude.

Secção $y=0,75m$

A Figura 7.19 mostra que, novamente, os resultados apresentados por CG e HDG são similares para uma malha com 60 partições, no entanto, com considerável erro de amplitude e moderado erro de fase, em especial para valores $x > 0,5m$. A parte contínua do método CDG possui melhor resultado, subestimando por pouco a solução exata. A Figura 7.20 mostra uma melhora no desempenho dos métodos CG e HDG numa malha com 80 partições mas ainda com expressivo erro de amplitude. Com o refinamento da malha, os três métodos apresentam bons resultados com a eliminação do erro de fase e a quase eliminação do erro de amplitude.

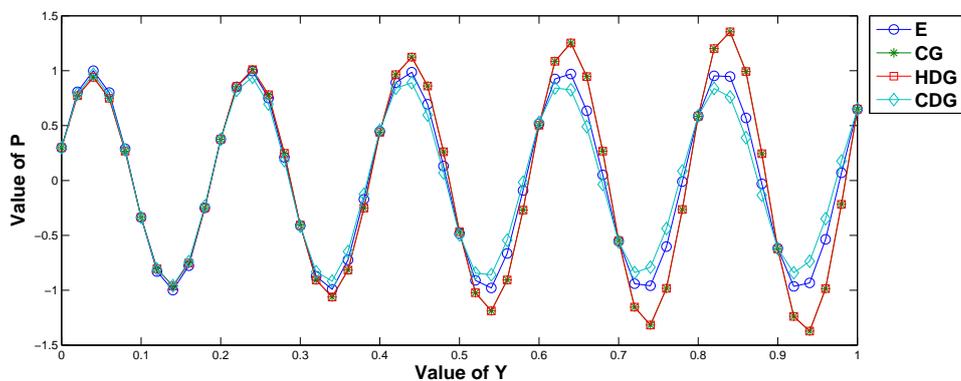


Figura 7.10: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

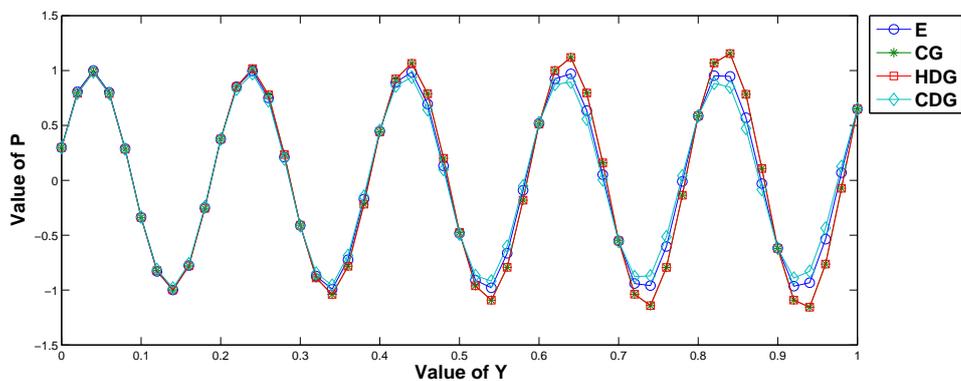


Figura 7.11: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

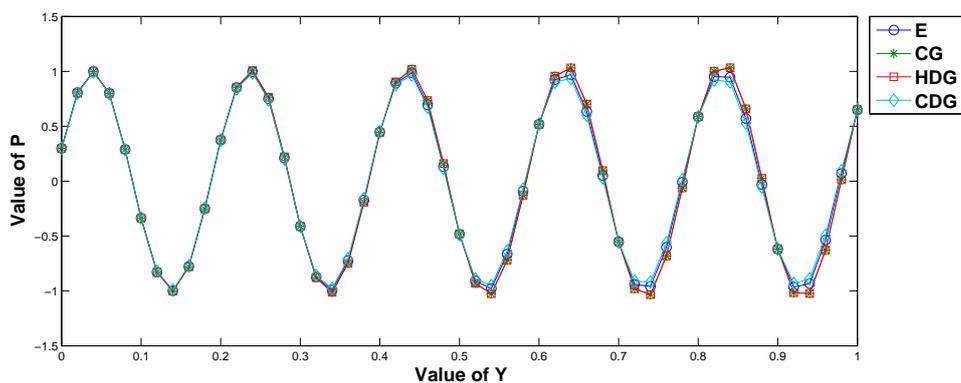


Figura 7.12: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

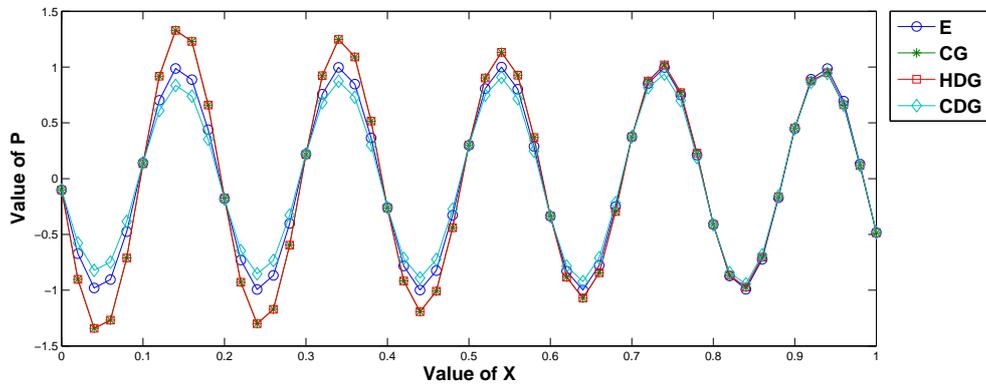


Figura 7.13: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

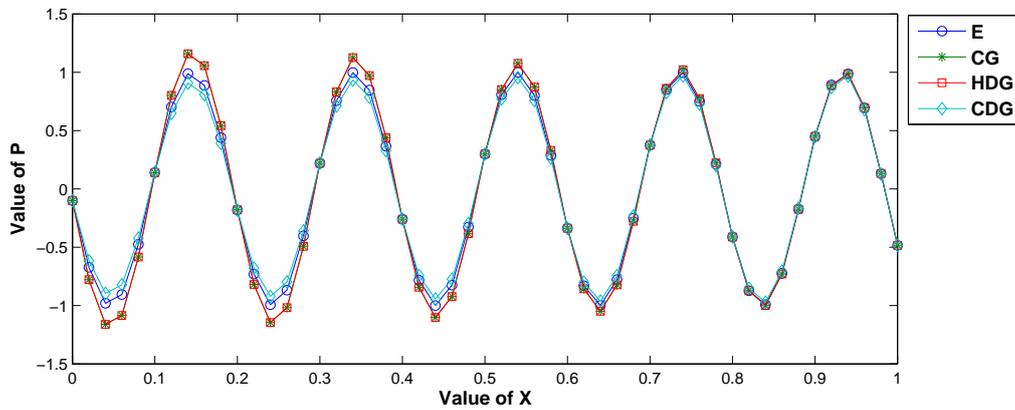


Figura 7.14: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

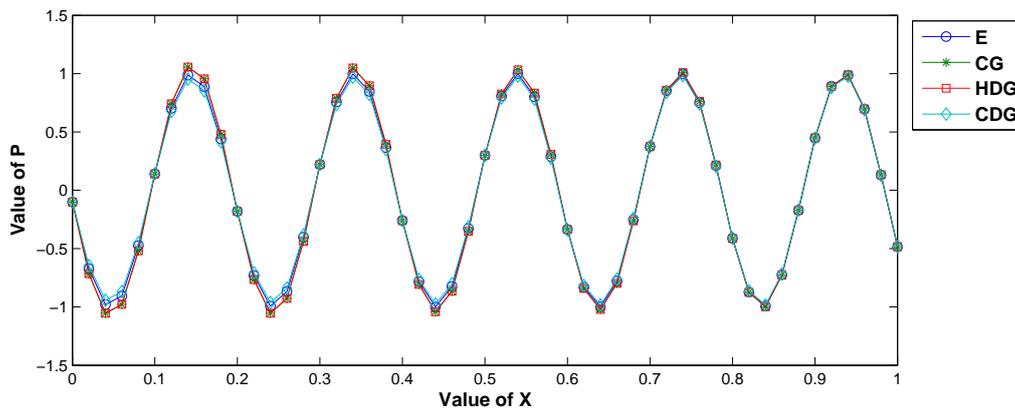


Figura 7.15: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

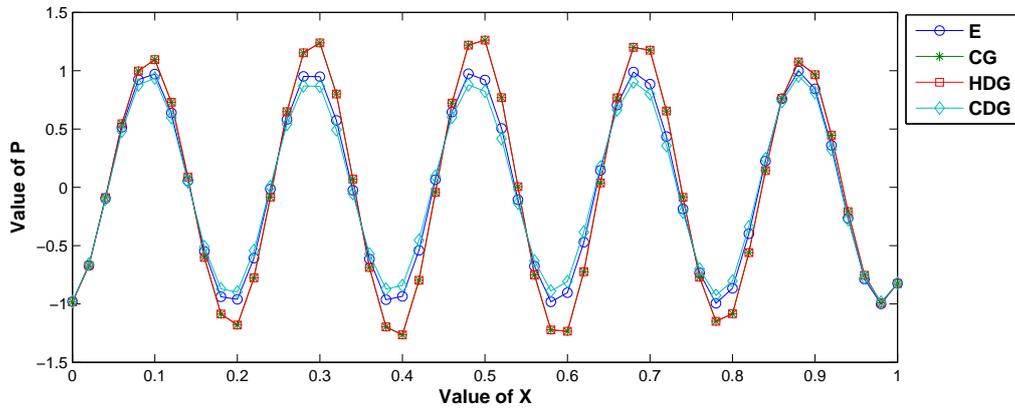


Figura 7.16: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

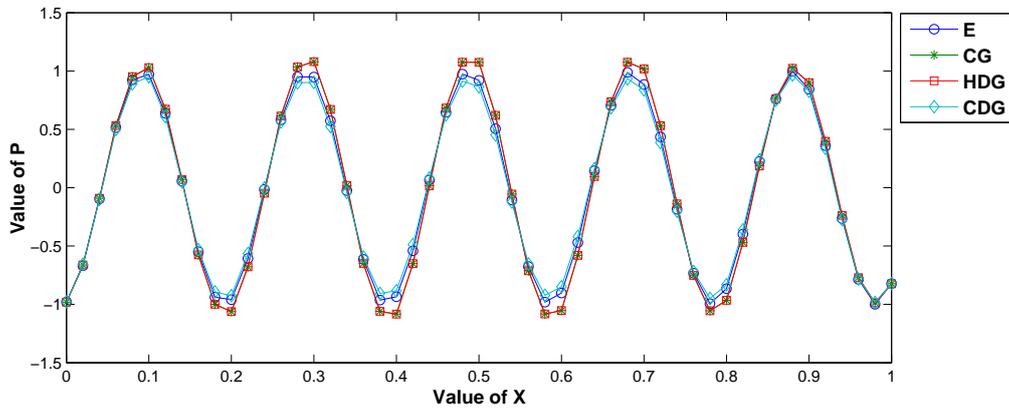


Figura 7.17: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

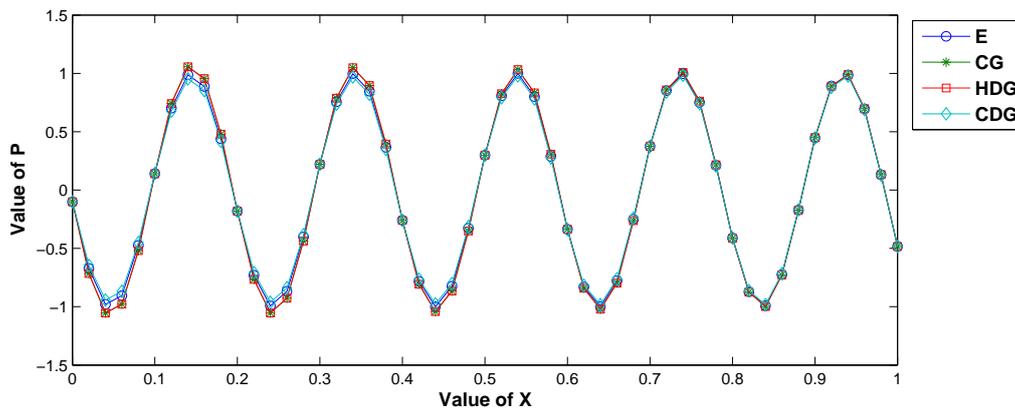


Figura 7.18: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

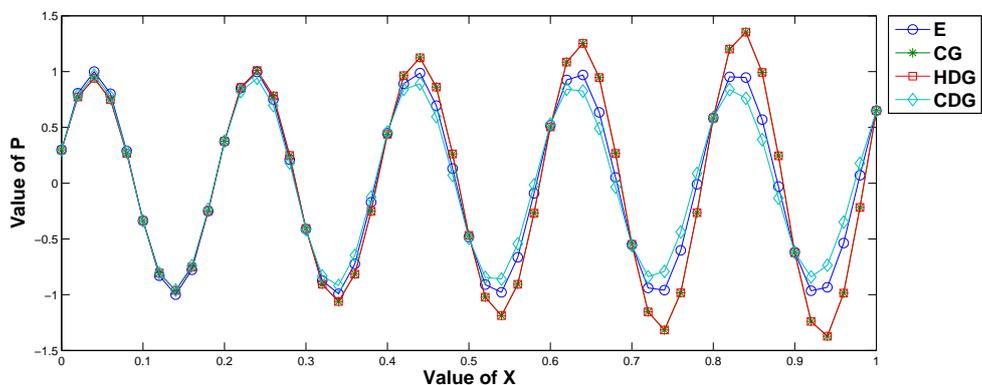


Figura 7.19: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

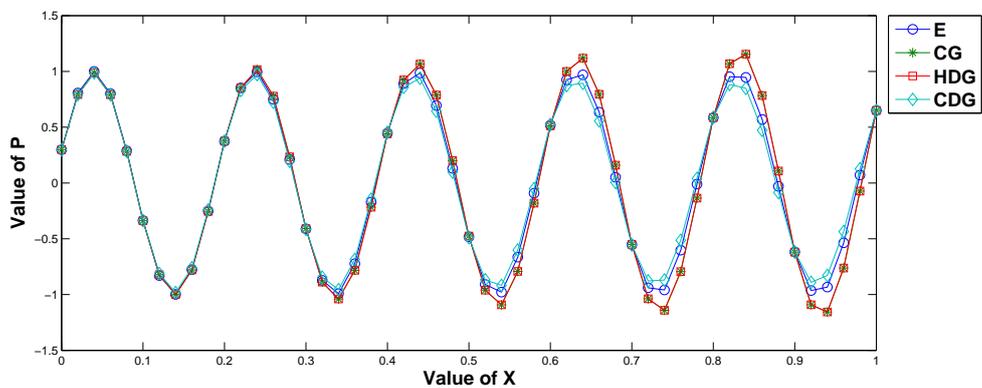


Figura 7.20: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

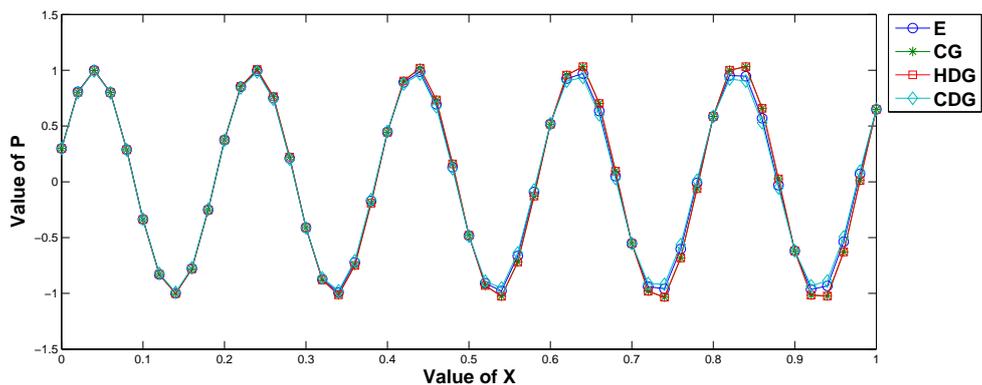


Figura 7.21: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $K = 45$.

Análise dos Resultados do Exemplo 1

De modo geral, é possível observar neste exemplo que os métodos CG e HDG apresentam desempenho inferior ao método CDG, com significativo erro de amplitude para malhas com pouco refinamento na quase totalidade das secções analisadas, tornando clara a superioridade da formulação CDG. Fica claro também a presença de poluição do erro que contribui para o erro de amplitude obtido, especialmente nas secções $x = 0,25$ e $x = 0,75$ assim como nas secções $y = 0,25$ e $y = 0,75$.

É importante observar que, para $\theta = \frac{\pi}{4}$, praticamente não houve erro de fase nas soluções apresentadas, para os três métodos numéricos CG, HDG e CDG analisados, em todas as secções.

Deve-se notar que apesar de resultados similares em todas as secções, o método HDG proposto aqui possui um potencial superior ao clássico CG. Nele, é possível o desenvolvimento de enriquecimentos locais nos espaços de aproximação assim como o desenvolvimento de formalismos Petrov-Galerkin como os desenvolvidos por DIAS *et al.* [41], os quais não são facilmente obtidos para a formulação CG clássica.

7.2 Exemplo 2: Problema homogêneo com $\theta = \frac{\pi}{3}$

Neste exemplo, também consideramos o problema homogêneo:

$$\begin{aligned}\nabla^2 P + K^2 P &= 0 \text{ em } \Omega, \\ P &= \cos [K(\cos(\theta) \cdot x + \text{sen}(\theta) \cdot y)] \text{ em } \partial\Omega\end{aligned}\tag{7.2}$$

onde, novamente, $K > 0$ é uma constante real, $\partial\Omega$ é a fronteira de $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ e, agora, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Novamente utilizamos interpolação Q1 para a variável descontínua nos métodos HDG e CDG além da interpolação Q1 para a variável traço com o objetivo de verificar a performance dos métodos propostos nesta tese em comparação com o método Galerkin contínuo clássico.

7.2.1 Resultados para número de onda $K=16$

Secção $x=0,5m$

É possível observar na Figura 7.22 que os três métodos analisados CG, HDG e CDG, na secção $x = 0,5m$, para número de onda baixo $K = 16$, apresentam resultados numéricos similares, muito próximos à solução exata do problema dado na Equação 7.2.

Assim como no Experimento 1, os resultados da secção $y = 0.5m$ e de outras secções são similares as apresentadas aqui para a secção $x = 0.5m$ e por isso não serão apresentadas.

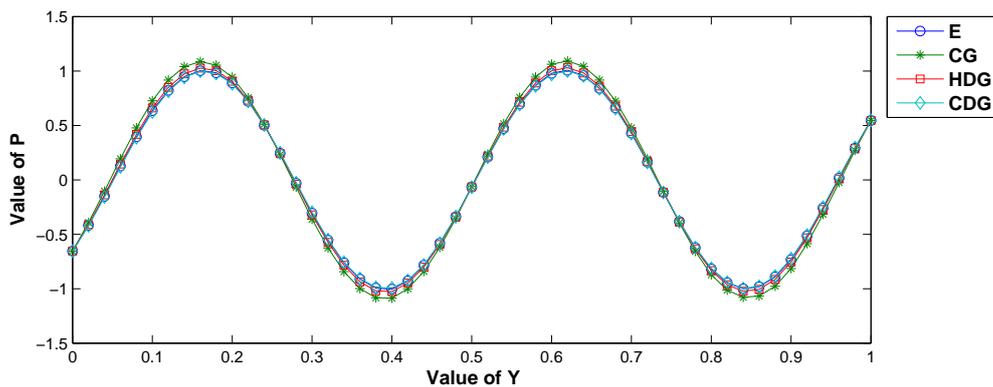


Figura 7.22: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 16$.

7.2.2 Resultados para número de onda $K=45$

A solução exata, a solução do método CG, solução do método HDG proposto e a solução da componente contínua do método CDG para $K = 45$ são apresentados nas subseções abaixo para as secções $x = 0,25m$, $x = 0,5m$, $x = 0,75m$, $y = 0,25m$, $y = 0,5m$ e $y = 0,75m$. Novamente, observamos que este valor de K usado implica em um número de onda moderadamente alto.

Assim como no Experimento 1, observamos que o valor de K aqui escolhido é quase três vezes maior que o maior valor de K usado em GRIESMAIER & MONK [37], numa formulação mista usando espaço traço descontínuo, o que caracteriza um custo computacional superior às formulações propostas nesta tese.

Secção $x=0,25m$

As Figuras 7.23, 7.24 e 7.25 apresentam as simulações numéricas para o problema proposto na Equação 7.2 para $K = 45$ na secção constante $x = 0,25m$. Como comentado anteriormente, este valor de K é considerado como moderadamente alto.

É possível observar na Figura 7.23 que para uma malha regular com 3600 elementos, o método CG apresenta o pior desempenho com expressivo erro de fase e de amplitude, seguido do método HDG. O método CDG possui melhor desempenho, praticamente eliminando o erro de fase porém ainda apresentando erro de amplitude. Com o refinamento da malha para 80 partições, conforme Figura 7.24, o desempenho dos métodos melhora com redução expressiva do erro de fase para os métodos CG e HDG. Já a Figura 7.25, mostra que numa malha de 14400 elementos Q1, os três métodos apresentam respostas similares onde o erro de fase é eliminado, no entanto sem a eliminação do erro de amplitude, subestimando a solução exata.

Secção $x=0,5m$

A Figura 7.26 mostra que para na secção constante $x = 0,5m$, para $K = 45$ e uma malha regular com 60 partições, os métodos HDG e CDG propostos nesta tese possuem desempenho superior ao método já estabelecido CG, este último com erro de fase mais expressivo. Com o aumento do refinamento da malha para 80 partições, como mostra a Figura 7.27 o desempenho dos métodos HDG e CDG se aproxima da solução exata. Por sua vez, o método CG continua apresentando significativo erro de fase e erro de amplitude. Por fim, a Figura 7.28 mostra que na malha mais refinada, com 120 partições, os três métodos em análise possuem comportamento similar. No entanto, apresentam grande erro de amplitude frente a solução exata do problema.

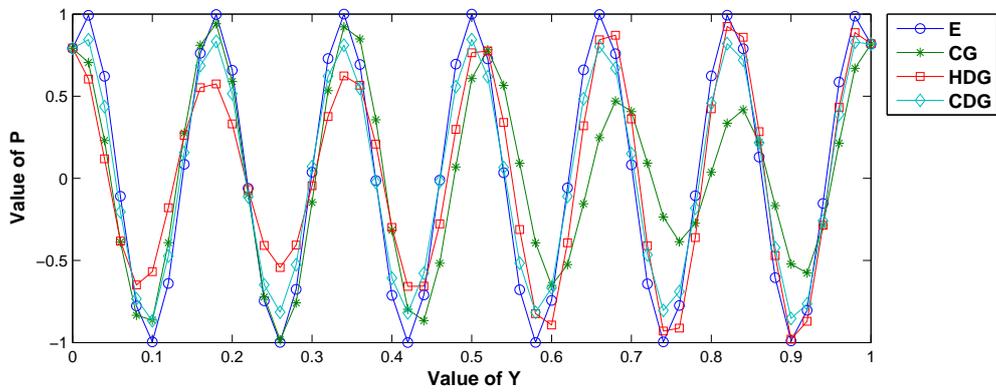


Figura 7.23: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

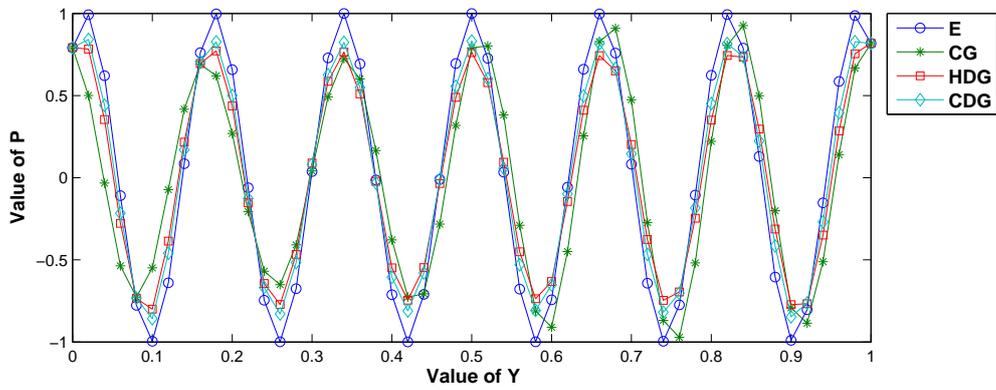


Figura 7.24: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

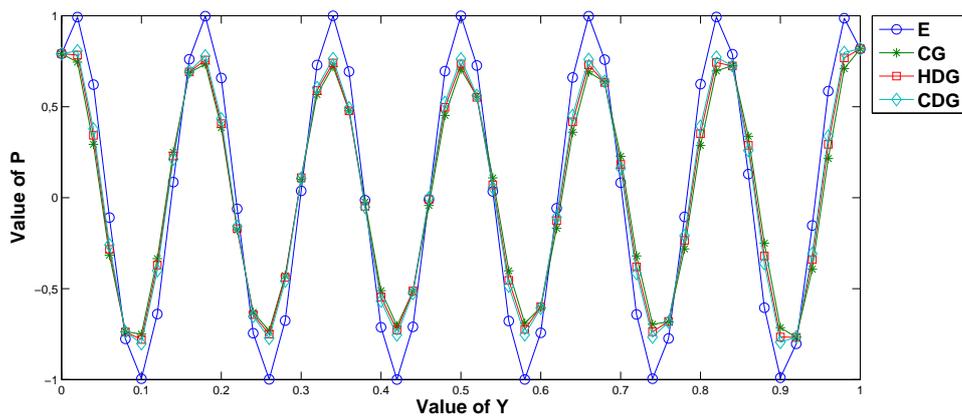


Figura 7.25: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.25m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

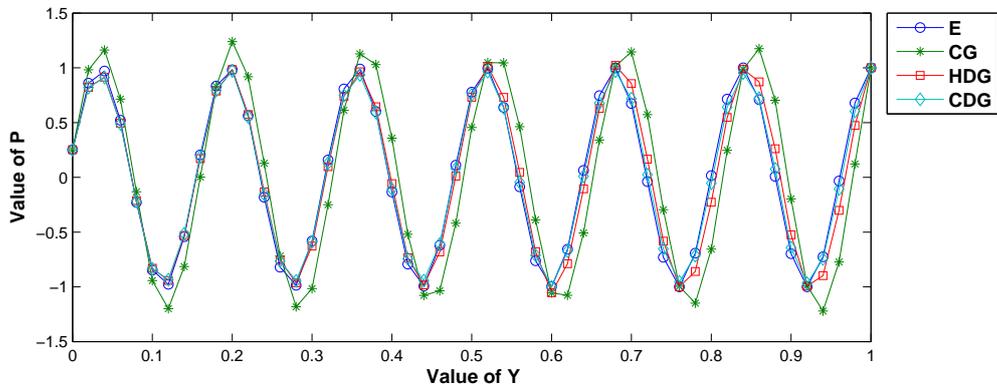


Figura 7.26: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

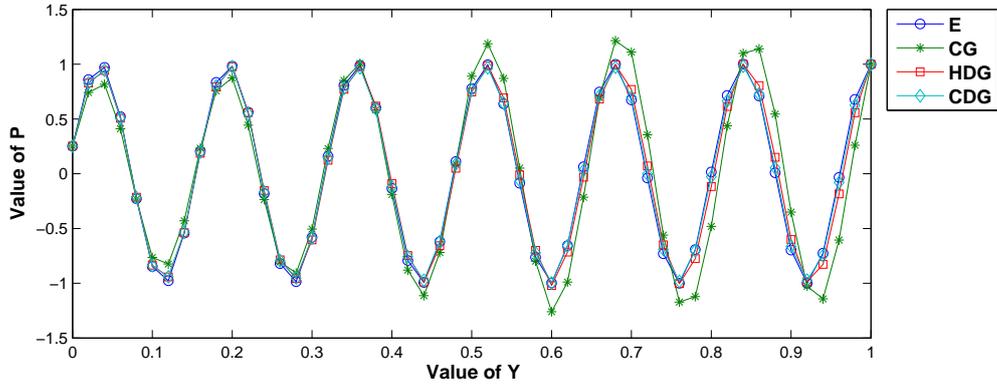


Figura 7.27: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

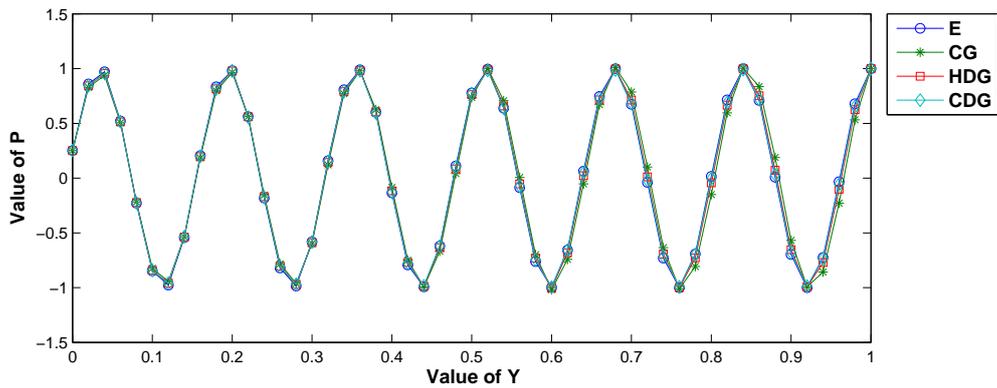


Figura 7.28: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.5m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

Secção $x=0,75m$

As Figuras 7.29, 7.30 e 7.31 mostram os resultados numéricos na secção constante $x = 0,75m$ para diferentes refinamentos de malha. Para uma malha regular de 3600 elementos Q1, a Figura 7.29 mostra que todos os métodos apresentam erro de amplitude, com pior desempenho para o método CG. Na Figura 7.30 o desempenho de todos os métodos são mantidos numa malha de 6400 elementos, ainda com expressivo erro de amplitude do método CG. Já a Figura 7.31 mostra que com o refinamento da malha para 14400 elementos, o desempenho dos três métodos é similar com a quase eliminação do erro de amplitude e apresentando ligeiro erro de fase.

Secção $y=0,25m$

Nas Figuras 7.32, 7.33 e 7.34 estão plotadas as soluções obtidas para o problema proposto com 60, 80 e 120 partições, respectivamente. A Figura 7.32 mostra que, na malha de menor refinamento com 3600 elementos Q1, os três métodos CG, HDG e CDG apresentam poluição ao longo do intervalo analisado. O pior desempenho é do método CG, no entanto tanto o método HDG quanto o método CDG apresentam consideráveis erros de amplitude e de fase. A Figura 7.33 mostra que, conforme é aumentado o refinamento da malha, os métodos HDG e CDG melhoram seu desempenho se aproximando da solução exata, com a quase eliminação do erro de fase. O método CG também apresenta melhora apesar de ainda apresentar notável erro de amplitude. Para uma malha de 120 partições, os três métodos possuem a mesma resposta, com presença de erro de amplitude, conforme observado na Figura 7.34.

Secção $y=0,5m$

Quando tomamos a secção constante $y = 0,5m$ verificamos que, na malha de 3600 elementos Q1, os três métodos apresentam expressivos erros de amplitude e ligeiro erro de fase, sendo que os métodos HDG e CDG possuem respostas similares e o método CG tem o pior desempenho, como pode ser visto na Figura 7.35. Já a Figura 7.36 mostra uma significativa melhora do método CG quando a malha possui 6400 elementos Q1, porém os três métodos em análise possuem, agora, soluções parecidas mas com bastante poluição. Na Figura 7.37 é possível observar que numa malha de 14400 elementos Q1 os métodos CG, HDG e a componente contínua do CDG possuem respostas parecidas com significativa redução do erro de fase e pequeno erro de amplitude no intervalo analisado.

Secção $y=0,75m$

Na Figura 7.38 é possível observar que a componente contínua do método CDG é o que apresenta melhor resposta. Por outro lado, os métodos HDG e CG oscilam

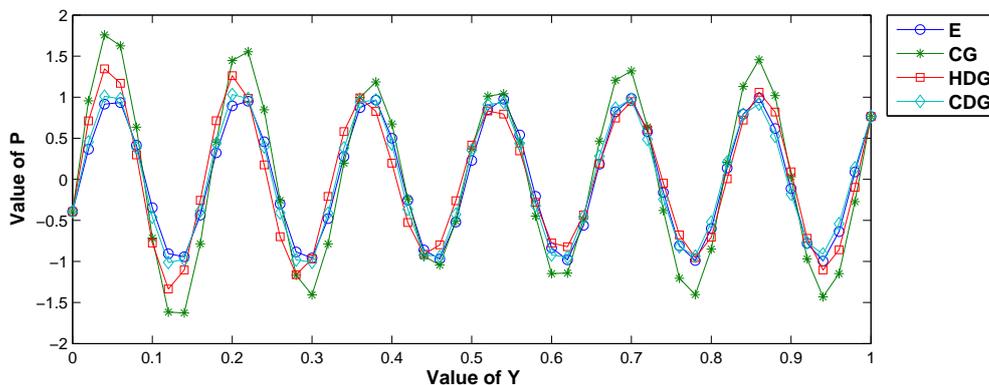


Figura 7.29: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

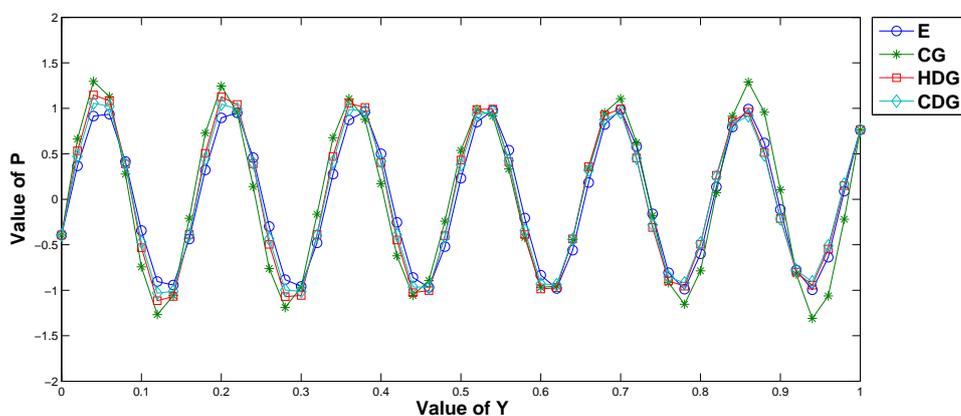


Figura 7.30: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

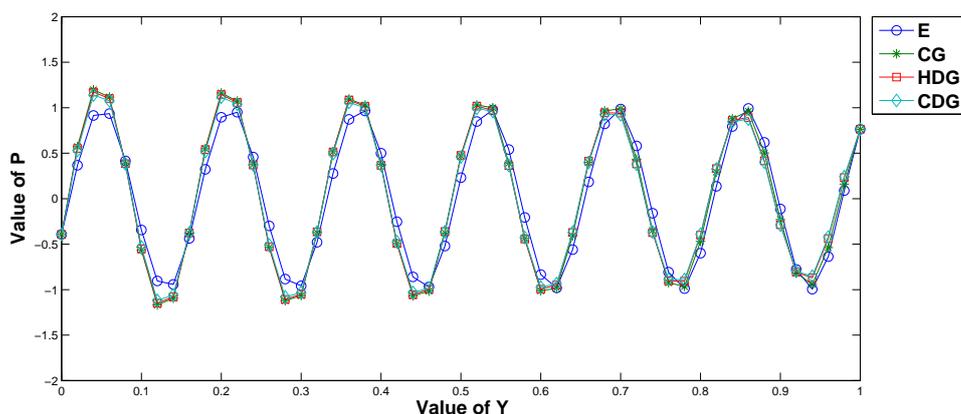


Figura 7.31: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $x = 0.75m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

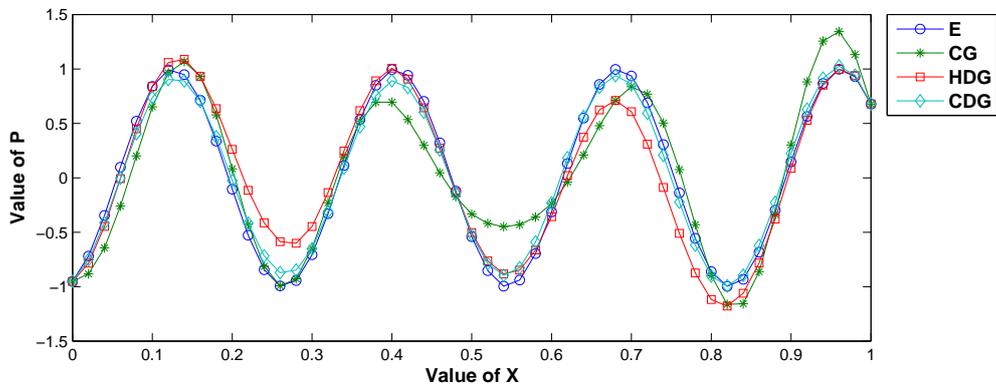


Figura 7.32: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

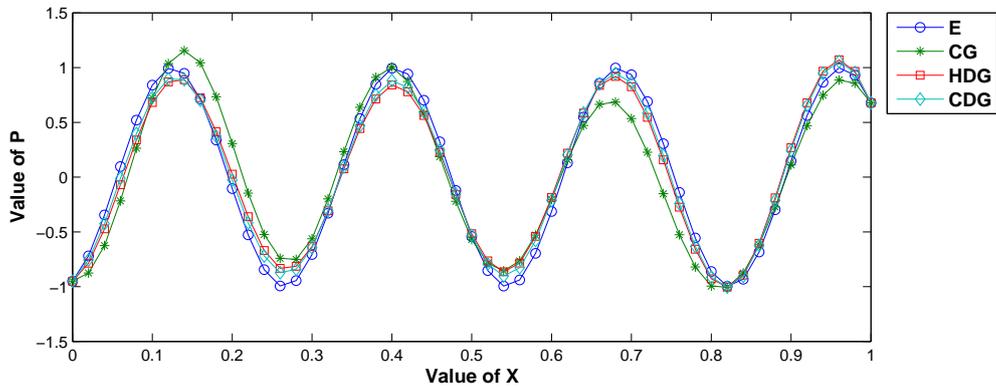


Figura 7.33: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

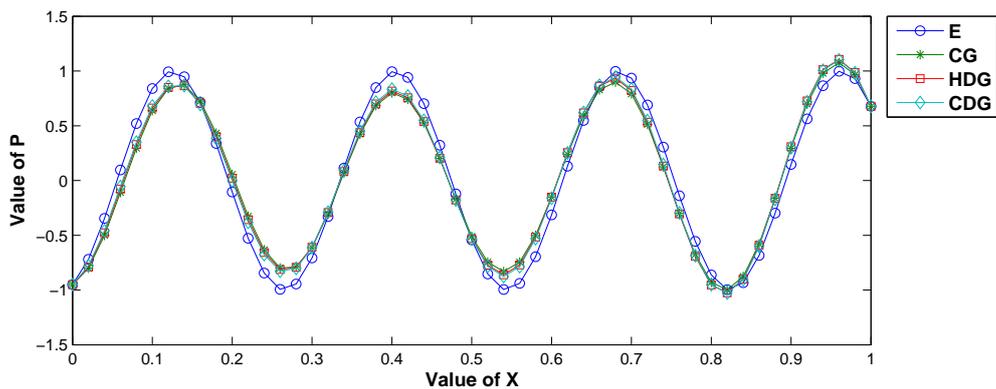


Figura 7.34: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.25m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

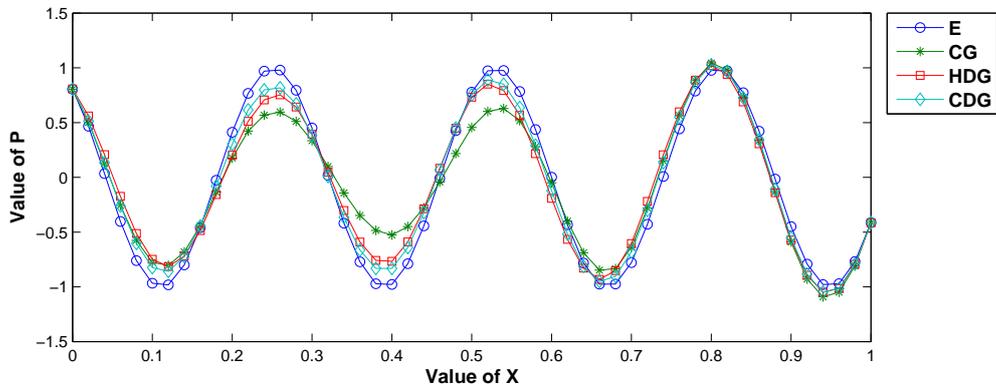


Figura 7.35: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

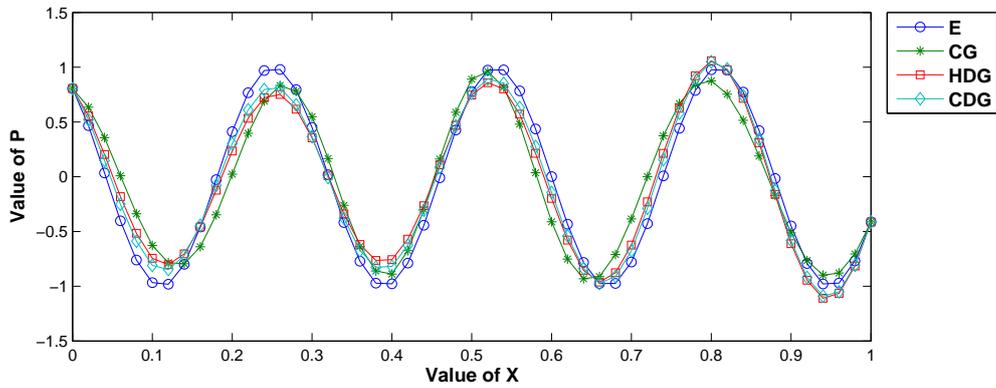


Figura 7.36: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

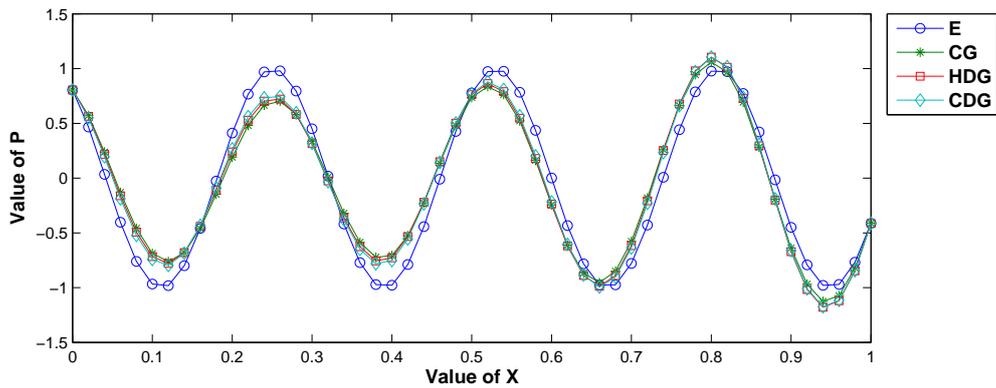


Figura 7.37: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.5m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

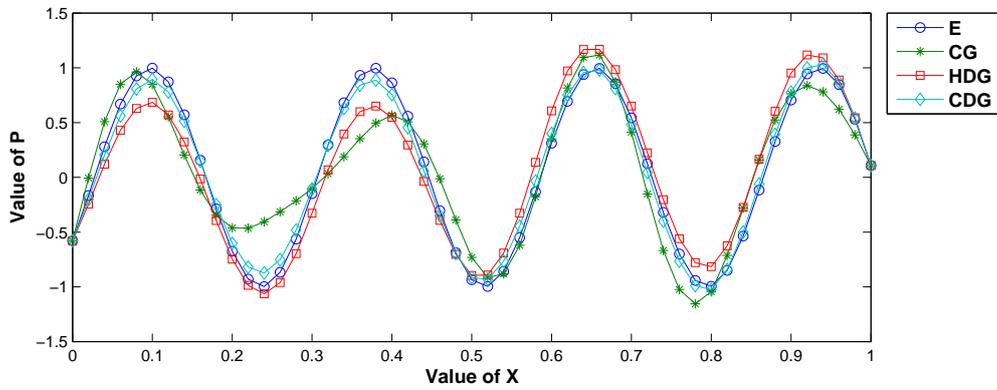


Figura 7.38: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 60×60 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

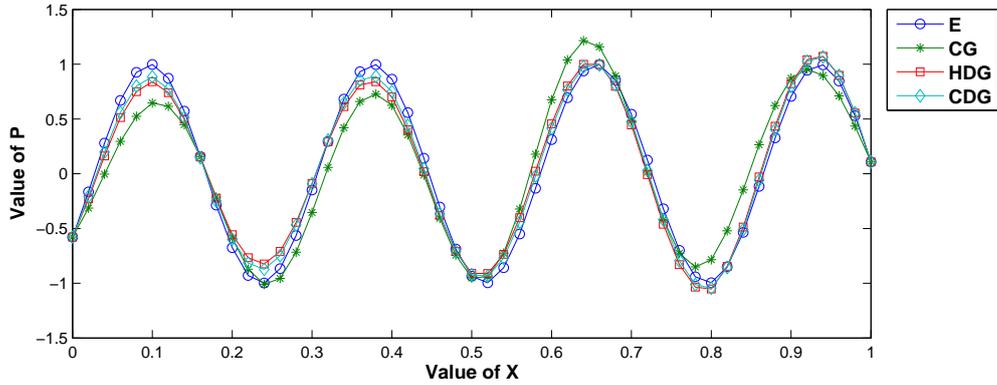


Figura 7.39: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 80×80 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

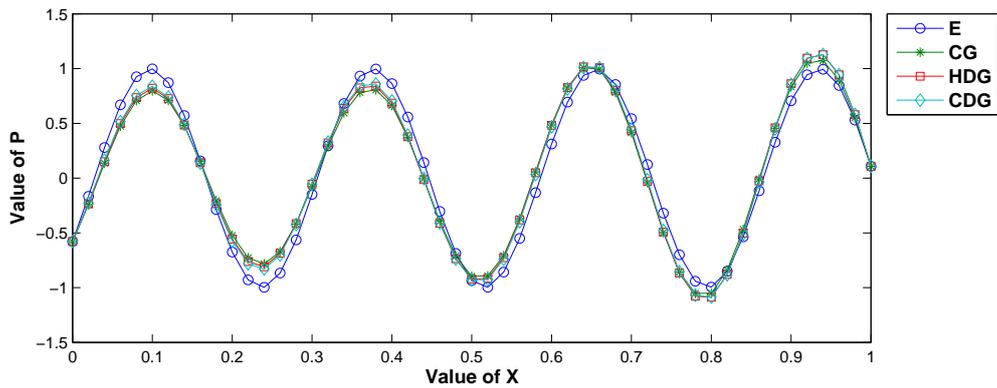


Figura 7.40: Soluções Exata (E), CG, HDG e CDG para a secção $y = 0.75m$ em partição de 120×120 , $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $K = 45$.

bastante, apresentando considerável erro de fase e de amplitude na malha com 60 partições. Na Figura 7.39 mostra que com o refinamento da malha para 80 partições, o erro de fase é bem reduzido em todos os métodos. Neste grau de refinamento, a formulação CG apresenta o pior desempenho, com o maior erro de amplitude. Já os métodos HDG e CDG apresentam respostas similares e com melhor acurácia. Na malha com 120 partições, a Figura 7.40 mostra que os três métodos em análise apresentaram soluções iguais com a quase eliminação do erro de amplitude e apresentando pequeno erro de fase ao longo de todo o intervalo.

Análise dos Resultados do Exemplo 2

Numa análise mais ampla do exemplo, observa-se que as formulações CG e HDG apresentaram os piores desempenhos com menor precisão em todas as secções. Além disso, neste exemplo, é possível observar a não-simetria nos erros de amplitude encontrados nas formulações CG e HDG, em decorrência da poluição do erro. Novamente, assim como no Exemplo 1, as soluções apresentadas pela formulação CDG se aproximam mais da solução exata.

No entanto, ao contrário do Exemplo 1, para $\theta = \frac{\pi}{3}$ foram identificados erros de fase, em especial para as soluções dos métodos CG e HDG em malhas com baixo e moderado refinamento. Já o método CG apresentou os maiores erros de amplitude em todos os níveis de refinamento.

Novamente, salienta-se que mesmo com resultados similares na maior parte das secções, o método HDG proposto aqui possui um potencial superior ao já estabelecido CG. Nele, é possível uma série de aprimoramentos que não são facilmente obtidos para a formulação CG clássica, conforme já descrito na análise no Exemplo 1.

7.3 Comparativo do tempo computacional

O objetivo desta seção é analisar os tempos computacionais necessários para a obtenção das soluções numéricas apresentadas nas Seções 7.1 e 7.2. Uma vez que, dependendo do grau de refinamento da malha, os resultados dos métodos foram similares entre si, a análise do custo computacional de cada método é um importante parâmetro para a análise da viabilidade de cada um dos métodos.

É importante observar que o método CDG apresentado neste trabalho possui os resultados numéricos mais robustos por conta do uso das funções de transferência de estabilidade. No entanto, pela sua formulação, ele é claramente o de maior custo computacional uma vez que, por conta das duas integrações numéricas de volume, o tempo de montagem da matriz global será o dobro do tempo necessário no método HDG.

Portanto, especificamente, desejamos fazer nesta seção a comparação do tempo computacional entre os métodos HDG e CG, uma vez que seus resultados foram similares ou com ganho para a formulação HDG proposta nesta tese, uma vez que suas formulações sugerem desempenho computacional semelhante.

Na Tabela 7.1, o termo “Tgm-HDG” representa o tempo computacional para a montagem da matriz global do método HDG; “Tgm-CG” representa o tempo computacional para a montagem da matriz global do método CG; “TDecLU-HDG” representa o tempo computacional para obter a solução do sistema global no método HDG e “TDecLU-CG” representa o tempo computacional para obter a solução do sistema global no método CG. Para o Experimento 1 (apresentado na Seção 7.1), estes tempos são apresentados na Tabela 7.1 e os valores são dados em segundos. Vale lembrar que o experimento foi realizado em uma máquina com processador Intel Core i7 e com 16Gb de memória RAM.

A Tabela 7.1 mostra que o tempo computacional *TDecLU-HDG* é igual ao tempo *TDecLU-CG*, como esperado, e também que *Tgm-HDG* é, para uma malha de 14400 elementos, quatro vezes maior que *Tgm-CG*. Esta proporção está coerente com o número de arestas dos elementos Q1, o que implica em cálculos extras para a montagem da matriz global da formulação HDG.

Tabela 7.1: Tempo de processamento para $K = 45$, no Experimento 1.

Número de elementos	<i>Tgm-HDG</i> (sec)	<i>Tgm-CG</i> (sec)	<i>TDecLU-HDG</i> (sec)	<i>TDecLU-CG</i> (sec)
3600	7.420	2.672	0.376	0.376
6400	12.958	4.417	1.328	1.328
14400	27.068	6.782	8.364	8.364

Neste experimento, para obter os resultados numéricos, foi usado um solver direto e aproximação polinomial de primeira ordem sem uso de esquemas de paralelismo. Como a montagem da matriz global da formulação HDG pode ser totalmente paralelizada, conjecturamos que o tempo de processamento T_{gm-HDG} pode cair drasticamente se este tipo de implementação for utilizada. Além disto, vale observar também que, em problemas de grande porte, o tempo de montagem da matriz é irrelevante quando comparado ao tempo de processamento da solução. Deste modo, os tempos obtidos em $T_{DecLU-CG}$ e $T_{DecLU-HDG}$ são os mais importantes e, em nosso experimento, foram iguais para os dois métodos comprovando assim a competitividade do método HDG.

Comparações entre as performances de outros métodos híbridos descontínuos e CG feitas em COCKBURN *et al.* [42] e em KIRBY *et al.* [43] indicam que os métodos híbridos são competitivos tanto em termos de entradas não-nulas na matriz resultante quanto em tempo computacional efetivo.

Além disto, deve-se observar que apesar dos resultados similares em quase todas as secções analisadas, o método HDG proposto aqui possui um potencial superior ao CG clássico. Nele, é possível o desenvolvimento de enriquecimentos locais nos espaços de aproximação assim como o desenvolvimento de formalismos Petrov-Galerkin como os desenvolvidos por DIAS *et al.* [41], os quais não são facilmente obtidos para a formulação CG clássica.

Capítulo 8

Conclusões e Sugestões de Trabalhos Futuros

Neste trabalho, foram apresentadas duas novas famílias de formulações Galerkin para a solução do problema de Helmholtz: o método Galerkin descontínuo-contínuo hibridizado via espaço traço (HDG) e o método Galerkin descontínuo-contínuo (CDG).

Na primeira família, um dos diferenciais foi a introdução de novas formas bilineares que não haviam sido incorporadas no contexto de métodos hibridizados para o problema de Helmholtz. Aqui, trabalhamos com um espaço traço plenamente contínuo (e que pode ser naturalmente estendido para um esquema híbrido com espaço traço descontínuo) gerando assim um sistema global menor que o gerado por outros métodos híbridos. Além disto, apresentamos um método para a determinação da função de tamanho ótimo da malha, um passo essencial para o sucesso de qualquer formulação híbrida.

Já para a segunda família, o diferencial foi a introdução da formulação com duas componentes definidas em todo o domínio, uma contínua e outra descontínua, com a utilização das funções de transferência de estabilidade como definidas em DO CARMO *et al.* [20] e ainda não inseridas para o problema de Helmholtz.

Para as duas famílias de formulações foram introduzidas as correspondentes formas bilineares. Neste trabalho, foi provado que estas formas bilineares são consistentes e suas respectivas formulações são contínuas e coercivas em uma adequada norma.

Com objetivo de verificar a precisão das duas formulações propostas, foram apresentados resultados numéricos para um problema de Helmholtz homogêneo, com dois valores θ distintos em malhas quadradas e com diferentes níveis de refinamento. Em todos os experimentos, verificou-se que o método HDG possui resposta com precisão similar às respostas obtidas pelo já estabelecido método Galerkin contínuo clássico (CG), com resultados discretamente melhores em termos de erros de amplitude e

de fase. Já a componente contínua do método CDG possui, em geral, redução da poluição mais significativa que os métodos CG e HDG.

Os experimentos também mostraram que o esforço computacional dos métodos CG e HDG para encontrar a solução do sistema global são similares. No entanto, podemos considerar que o método HDG apresentou resultados melhores pois necessitou de malhas com refinamento menor para obter resposta mais próxima à solução exata quando comparado ao método CG.

Além disto, a formulação HDG possui um grande potencial quando comparado à formulação CG por permitir estruturalmente uma série de melhorias locais como: o uso de técnicas de paralelismo para obter a matriz global, o enriquecimento local dos espaços de aproximação uma vez que não há requisitos para a continuidade entre os elementos e a possibilidade de desenvolvimento de formalismos Petrov-Galerkin para minimizar erros de fase ao utilizar funções-peso apropriadas.

Já o método CDG, apesar de apresentar as respostas mais acuradas em termos de erro de amplitude e de fase, para todas as secções analisadas neste trabalho, é aquele que apresenta o maior custo computacional, uma vez que o tempo de montagem da matriz global é dobro do tempo necessário no método HDG, pois são realizadas integrações no volume tanto na componente descontínua quanto na componente contínua. No entanto, de modo análogo ao método HDG, técnicas de paralelismo podem facilmente ser incorporadas de modo a reduzir este custo.

Como sugestão de trabalhos futuros, podemos citar:

- Implementar melhorias estruturais no método HDG e realizar experimentos numéricos de modo a comprovar a efetiva redução no custo computacional da formulação tais como: o uso de técnicas de paralelismo para obter a matriz global, enriquecimento local dos espaços de aproximação e desenvolvimento de formalismos Petrov-Galerkin para minimizar erros de fase ao utilizar funções-peso apropriadas, como os realizados em DIAS *et al.* [41].
- Explorar a otimização na montagem da matriz global do método CDG, de modo a reduzir o número de graus de liberdade do problema sem perda da precisão na solução.
- Incorporar formalismos Petrov-Galerkin ao método CDG visando a redução de erros de fase, de modo análogo ao proposto como sugestão para o método HDG.

Referências Bibliográficas

- [1] REED, W. H., HILL, T. R., *Triangular mesh methods for the neutron transport equation*, Tech. Rep. LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
- [2] ODEN, J. T., BABUSKA, I., BAUMANN, C. E., “A discontinuous hp finite element method for diffusion problems”, *Journal of Computation Physics*, v. 146, pp. 491–516, 1998.
- [3] DUARTE, A. V. C., ROCHINHA, F. A., CARMO, E. G. D., “Discontinuous finite element formulations applied to cracked domains”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 185, pp. 21–36, 2000.
- [4] COCKBURN, B., SCHOTZAU, D., WANG, J., “Discontinuous Galerkin methods for incompressible elastic materials”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, pp. 3184–3204, 2006.
- [5] DAWSON, C., PROFT, J., “Discontinuous and coupled continuous/discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, pp. 4721–4746, 2002.
- [6] ALVAREZ, G. B., LOULA, A., DUTRA DO CARMO, E., et al., “A discontinuous finite element formulation for Helmholtz equation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, pp. 4018–4035, 2006.
- [7] LIU, R., WHEELER, M., DAWSON, C., et al., “A fast convergent rate preserving discontinuous Galerkin framework for rate-independent plasticity problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 199, pp. 3213–3226, 2010.
- [8] NGUYEN, N., PERAIRE, J., COCKBURN, B., “An implicit high-order hybridizable discontinuous Galerkin method for incompressible Navier-Stokes equations”, *Journal of Computational Physics*, v. 230, pp. 1147–1170, 2011.

- [9] DUMBSER, M., KASER, M., “An arbitrary high order discontinuous Galerkin method for elastic waves on Unstructured meshes II: the three-dimensional isotropic case”, *Geophysical Journal International*, v. 167(1), pp. 319–336, 2006.
- [10] ZHANG, X., TAN, S., “A simple and accurate discontinuous Galerkin scheme for modeling scalar-wave propagation in media with curved interfaces”, *GEOPHYSICS*, v. 80(2), pp. 83–89, 2015.
- [11] HESTHAVEN, J., WARBURTON, T., “Nodal Discontinuous Galerkin method”, In: *Algorithms, Analysis and Application*, Springer, 2008.
- [12] HUGHES, T., SCOVAZZI, G., BOCHEV, P., et al., “A multiscale discontinuous Galerkin method with the computational structure of a continuous Galerkin method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, pp. 2761–2787, 2006.
- [13] GUZEY, S., COCKBURN, B., STOLARSKI, H., “The embedded discontinuous Galerkin method application to linear shell problems”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 70, pp. 757–790, 2007.
- [14] COCKBURN, B., GUZMAN, J., SOON, S., et al., “An analysis of the embedded discontinuous Galerkin method for second-order elliptic problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 47, pp. 2686–2707, 2009.
- [15] EGGER, H., *A class of hybrid mortar finite element methods for interface problems with non-matching meshes*. Preprint:AICES-2009-2, 2009.
- [16] EGGER, H., SCHOBBERL, J., “A Hybrid Mixed Discontinuous Galerkin Finite Element Method for Convection-Diffusion Problems”, *IMA J. Num. Anal.*, 2009.
- [17] ARRUDA, N., LOULA, A., ALMEIDA, R., “Locally discontinuous but globally continuous Galerkin methods for elliptic problems”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 255, pp. 1045–120, 2013.
- [18] FERNANDES, M. T. C. A., *Métodos de elementos finitos contínuo/descontínuo aplicados a problemas de elasticidade*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Pós-Graduação em Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 2014.
- [19] DO CARMO, E., FERNANDES, M., MANSUR, W., “Continuous/Discontinuous Galerkin methods applied to elasticity problems”,

- Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 269, pp. 291–314, 2014.
- [20] DO CARMO, E., FERNANDES, M., MANSUR, W., “Continuous/Discontinuous Galerkin methods stabilized through transfer functions applied to the incompressible elasticity and to the Stokes problem”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 283, pp. 806–840, 2015.
- [21] MONK, P., WANG, D., “A least-squares method for the Helmholtz equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, v. 175, pp. 121–136, 1999.
- [22] DOLEAN, V., LANTERI, S., PERRUSEL, R., “A domain decomposition method for solving the three-dimensional time-harmonic Maxwell equations discretized by discontinuous Galerkin methods”, *J. Comput. Phys.*, v. 227(3), pp. 2044–2072, 2007.
- [23] DOLEAN, V., FOL, H., LANTERI, S., et al., “Solution of the time-harmonic Maxwell equations using discontinuous Galerkin methods”, *J. Comput. Appl. Math.*, v. 218(2), pp. 435–445, 2008.
- [24] LOULA, A., ALVAREZ, G., DO CARMO, E., et al., “A discontinuous finite element method at element level for Helmholtz equation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 196, pp. 867–878, 2007.
- [25] ROCHINHA, F., ALVAREZ, G., DO CARMO, E., et al., “A locally discontinuous enriched finite element formulation for acoustics”, *Commun. Numer. Meth. Engng.*, v. 23, pp. 623–637, 2007.
- [26] DO CARMO, E., ALVAREZ, G., LOULA, A., et al., “A nearly optimal Galerkin projected residual finite element method for Helmholtz problem”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, pp. 1362–1375, 2008.
- [27] GITTELSON, C., HIPTMAIR, R., PERUGIA, I., “Plane wave discontinuous Galerkin methods: analysis of the h-version”, *ESAIM: M2AN*, v. 43, pp. 297–331, 2009.
- [28] HIPTMAIR, R., MOIOLA, A., PERUGIA, I., “Plane wave discontinuous Galerkin methods for the Helmholtz equation: analysis of the p-version”, *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 49(1), pp. 264–284, 2011.

- [29] FENG, X., WU, H., “Discontinuous Galerkin methods for the Helmholtz equation with large wave number”, *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 47(4), pp. 2872–2896, 2009.
- [30] LOULA, A., FERNANDES, D., “A quasi optimal Petrov-Galerkin method for Helmholtz problem”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 80, pp. 1595–1622, 2009.
- [31] BROSSIER, R., ETIENNE, V., OPERTO, S., et al., “Frequency-Domain numerical modelling of Visco-Acoustic waves with finite-difference and finite-element discontinuous Galerkin methods”, In: *Acoustic Waves*, Sciyo: Croatia.
- [32] BARUCQ, H., DJELLOULI, R., ESTECAHANDY, E., “Efficient DG-like formulation equipped with curved boundary edges for solving elasto-acoustic scattering problems”, *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 98, pp. 747–780, 2014.
- [33] COCKBURN, B., DONG, B., GUZMAN, J., “A superconvergent LDG-hybridizable Galerkin method for second-order elliptic problems”, *Math. Comput.*, v. 77, pp. 1887–1916, 2008.
- [34] COCKBURN, B., GOPALAKRISHNAN, J., LAZAROV, R., “United hybridization of discontinuous Galerkin, mixed and continuous Galerkin methods for second order elliptic problems”, *SIAM J. Numer.*, v. 47(2), pp. 1319–1365, 2009.
- [35] COCKBURN, B., GUZMAN, J., WANG, H., “Superconvergent discontinuous Galerkin methods for second-order elliptic problems.” *Math. Comput.*, v. 78, pp. 1–24, 2009.
- [36] COCKBURN, B., GOPALAKRISHNAN, J., SAYAS, F., “A projection-based error analysis of HDG methods.” *Math. Comput.*, v. 79, pp. 1351–1367, 2010.
- [37] GRIESMAIER, R., MONK, P., “Error Analysis for a Hybridizable Discontinuous Galerkin Method for the Helmholtz Equation.” *J Sci Comput*, v. 49, pp. 291–310, 2011.
- [38] MU, L., WANG, J., YE, X., “A new weak Galerkin finite element method for the Helmholtz equation.” *IMA Journal of Numerical Analysis*, v. 35, pp. 1228–1255, 2015.

- [39] FENG, X., LORTON, C., “An Unconditionally Stable Discontinuous Galerkin Method for the Elastic Helmholtz Equations with Large Frequency.” *J Sci Comput*, v. 69(2), pp. 841–865, 2016.
- [40] NGUYEN, N., PERAIRE, J., REITICH, F., et al., “A phase-based hybridizable discontinuous Galerkin method for the numerical solution of the Helmholtz equation”, *Journal of Computational Physics*, v. 290, pp. 318–335, 2015.
- [41] DIAS, R., DO CARMO, E. G. D., MANSUR, W., et al., “A discontinuous Petrov-Galerkin (DPG) formulation for the FEM applied to the Helmholtz equation for high wavenumbers”, *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, v. 39(5), pp. 1529–1544, 2016.
- [42] COCKBURN, B., DONG, B., GUZMAN, J., et al., “A hybridizable discontinuous Galerkin method for steady-state convection-diffusion-reaction problems”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, v. 31(5), pp. 3827–3846, 2009.
- [43] KIRBY, R. M., SHERWIN, S. J., COCKBURN, B., “To CG or to HDG: A Comparative Study”, *J Sci Comput*, v. 51, pp. 183–212, 2012.
- [44] HUERTA, A., ANGELOSKI, A., ROCA, X., et al., “Efficiency of high-order elements for continuous and discontinuous Galerkin methods”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 96(9), pp. 529–560, 2013.
- [45] YAKOVLEV, S., MOXEY, D., KIRBY, R. M., et al., “To CG or to HDG: A Comparative Study in 3D.” *J Sci Comput*, v. 67(1), pp. 192–220, 2016.
- [46] CARVALHO, M., VALÉRIO, J., *Introdução método de elementos finitos: aplicação em dinâmica de fluidos*. Notas em Matemática Aplicada – SBMAC: São Carlos, Brasil, 2012.
- [47] HUGHES, T., *The finite element method: linear static and dynamic finite element method*. Dover Publications: New York, 2000.
- [48] GRESHO, P., SANI, R., *Incompressible flow and the finite element method*. John Wiley and Sons: New Jersey, 1998.
- [49] LI, B. Q., *Discontinuous Finite Elements in Fluid Dynamics and Heat Transfer*. 1st ed. Springer-Verlag: New York, 2006.

- [50] KRINDGES, A., *Método de Galerkin Descontínuo de Elementos Finitos para Equações Elípticas*, Master's Thesis, Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica - UFSC, Florianópolis, Brasil, 2004.
- [51] IHLENBURG, F., BABUSKA, I., "Finite element solution of the Helmholtz equation with high wave number part i: The h-version of the fem", *Computer and Mathematics with Applications*, v. 34, pp. 9–37, 1995.
- [52] IHLENBURG, F., BABUSKA, I., "Dispersion analysis and error estimation of Galerkin nite element methods for the Helmholtz equation", *Computer and Mathematics with Applications*, v. 38, pp. 3745–3774, 1995.
- [53] CHAGAS, B. O., *Métodos de Elementos Finitos e Diferenças Finitas para a Equação de Helmholtz*, Master's Thesis, Programa de Pós-Graduação em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, Brasil, 2015.
- [54] SANTOS, L. A., *Inversão tomográfica sequencial para o campo de velocidades sísmicas baseada em difrações e critérios geológicos*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, Brasil, 2012.
- [55] PRATT, G. SHIN, C., HICKS, G. J., "Gauss-Newton and full Newton methods in frequency-space seismic waveform inversion", *Geophys. J. Int.*, v. 133, pp. 341–362, 1998.
- [56] PETERS, F. C., *Técnicas de parametrização e estabilização para o problema de recuperação de propriedades físicas da subsuperfície por meio de dados sísmicos*, Ph.D. Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, Brasil, 2014.
- [57] MANSUR, W., SOARES JR, D., FERRO, M., "Initial conditions in frequency-domain analysis: the FEM applied to the scalar wave equation", *Journal of Sound and Vibration*, v. 270, pp. 767–780, 2004.