

COPPEAD/UF RJ

RELATÓRIO COPPEAD Nº 13

"UMA BASE FORMAL PARA O PROBLEMA  
CLÁSSICO DE BALANCEAMENTO DE LINHAS  
DE MONTAGEM"

JORGE A. GARCÍA GÓMEZ\*

Abril de 1978

\* Doutor em Engenharia de Produção pela Universidade Federal do Rio de Janeiro e Professor Adjunto do programa de Mestrado em Administração da COPPE/UF RJ. O autor agradece a ajuda financeira prestada pela FINEP para a realização desta pesquisa.

## I. INTRODUÇÃO

Desde 1954, muitos artigos têm reportado o desenvolvimento de novas técnicas para o balanceamento de linhas de montagem; todas elas com o objetivo de resolver a formulação clássica do problema de balanceamento de linhas de montagem, devida a Salveson. A maioria dos artigos, quando da aplicação dessas técnicas, reportam bons resultados a problemas tanto reais quanto hipotéticos. Entretanto, como a formulação clássica não distingue as soluções obtidas - em termos de distribuição da carga de trabalho - todos os algoritmos de fato eficientes tendem a sobrecarregar as primeiras estações, objetivando minimizar o número de estações de trabalho da linha. As soluções assim obtidas são tipicamente desbalanceadas: as primeiras estações resultam sobrecarregadas e as últimas ociosas.

Nesta pesquisa, estamos particularmente interessados em mostrar que a concepção unilateral da versão do problema definido por Salveson leva a distorções na lógica de construção dos modelos desenvolvidos para resolver o problema, obtendo-se, portanto, soluções não-ótimas com algoritmos eficientes. Tudo isto decorre, segundo nosso entendimento, do fato de não se terem estipulado formalmente as premissas que definem o problema clássico de balanceamento de linhas de montagem (PCBLM) e, em consequência, seu modelo matemático. Na segunda seção desta pesquisa, apresentamos todo o espectro possível de formulações do Modelo matemático que definem o problema, mostrando-se pela primeira vez a necessidade de se unificarem os critérios de avaliação das soluções do problema, que, até a data presente, sempre foram apresentados como critérios isolados e, a maioria das vezes, considerados como critérios independentes. Na terceira seção desta pesquisa, apresenta-se formalmente cada uma das premissas que definem o problema representado pelo balanceamento de uma linha de montagem, com o intuito de se criar uma infra-estrutura formal para o estudo do mesmo.

## II. O PROBLEMA CLÁSSICO DE BALANCEAMENTO DE LINHAS DE MONTAGEM. (PCBLM)

Uma vez tomada a decisão de se produzir em série, a gerência deverá decidir sobre que trabalho a linha de montagem deverá realizar. Este trabalho então é discriminado num conjunto de "elementos de trabalho" ou "tarefas", cada uma delas com seu "tempo de tarefa". Por sua vez, uma tarefa é uma fração indivisível de trabalho. Os requisitos tecnológicos são especificados, de tal forma que alguns elementos de trabalho devem "preceder" outros. Estes requisitos devem ser mutuamente consistentes, como especificado pela relação de ordem parcial na formulação matemática a seguir. Uma "Estação" é um subconjunto de um conjunto de elementos de trabalho. A "linha de Produção" é a alocação de elementos de trabalho numa seqüência de estações, com cada elemento alocado a uma única estação, de tal forma que, se um elemento de trabalho deve preceder outro, então esse elemento é alocado a uma estação anterior na seqüência de estações, ou ambos os elementos são alocados à mesma estação. O "tamanho da linha de produção" é o número de estações que ela possui, e seu "tempo de ciclo" é o valor máximo das somas de tempos de elementos de trabalho alocados a cada estação. Apresentamos, a seguir, dois problemas de otimização intimamente relacionados:

- (i) Dado um "Tempo Requerido de Ciclo", achar a linha de produção de tamanho mínimo, de modo que seu tempo de ciclo não exceda o tempo requerido de ciclo.
- (ii) Dado um "Tamanho Requerido de Linha", achar a linha de Produção com tempo de ciclo mínimo, de modo que seu tamanho de linha não exceda o tamanho requerido de linha.

Matematicamente estes problemas podem ser expressos como se segue: Dado um conjunto não vazio e finito  $\Omega$  de elementos de trabalho, uma relação de

ordem parcial  $<$  definida em  $\Omega$  (relações tecnológicas de precedência), uma função de valor real  $t(x) > 0$  para toda  $x \in \Omega$  (tempos dos elementos de trabalho). Uma estação é um subconjunto de  $\Omega$ . Uma linha de produção é a partição de  $\Omega$  em estações,

$$\Pi(\Omega) = (S_1, S_2, \dots, S_N)$$

tais que se  $x < y$  e  $x$  está em  $S_i$  enquanto  $y$  está em  $S_j$ , então  $i \leq j$ . O tamanho desta linha de produção é

$$L(S_1, S_2, \dots, S_N) = N$$

e seu tempo de ciclo é

$$\theta' = \max_i \{T(S_i)\}$$

onde

$$T(S_i) = \sum \{t(x) \mid x \in S_i\}$$

é o conteúdo de trabalho da estação  $S_i$ .

Com estes antecedentes, podemos formalizar a definição dos problemas que caracterizam o balanceamento de uma linha de montagem:

Problema I - Dado  $\theta > \max \{t(x) \mid x \in \Omega\}$ , achar a linha de produção,

$$\Pi(\Omega) = (S_1, S_2, \dots, S_N), \text{ para a qual } N \text{ é mínima e sujeita a } \theta' \leq \theta.$$

Problema II - Dado um inteiro  $N_0 > 0$ , achar a linha de produção  $\Pi(\Omega) =$

$$(S_1, S_2, \dots, S_N), \text{ para a qual } \theta' \text{ é mínima e sujeita a } N \leq N_0.$$

A maioria das técnicas de balanceamento de linhas foram desenvolvidas para obter "boas aproximações" as soluções do problema I; isto é, achar linhas de produção de tamanho mínimo. No entanto, a aplicação destas técnicas ao problema II é uma forma mais apropriada de compará-las. Isto pode ser obtido aplicando-se as técnicas ao problema I, com vários tempos requeridos de ciclo,

visando um tempo de ciclo próximo do mínimo, e sujeitando-se ao tamanho de linha requerido. As soluções do problema II constituem os resultados mais críticos no balanceamento de linhas, pois as melhores técnicas produzem soluções do problema II com tempos de ciclos menores do que as obtidas pelas técnicas mais fracas. Se não tentarmos obter soluções do problema II, muitas das técnicas poderiam produzir resultados idênticos para um grande número de tempos requeridos de ciclo, que normalmente são muito maiores que os tempos mínimos de ciclo.

O "tempo de ócio" é a quantidade de tempo em que os recursos não são utilizados para cada unidade de produto a ser reproduzido pela linha de produção. A expressão do tempo de ócio total da linha é:

$$O^* = N\theta - \sum_{t=1}^{t=N} T(S_t) ;$$

Tanto a solução ótima do problema I como a do problema II minimizam o tempo de ócio total de linha para tempos de ciclo e tamanhos de linhas requeridos. Na equação que define o tempo de ócio total da linha, qualquer redução no tamanho da linha N para um tempo de ciclo requerido  $\theta$  fará com que o tempo de ócio decresça. Da mesma forma, o tempo de ócio total da linha decresce, quando se obtém qualquer redução no tempo de ciclo  $\theta$  para um tamanho de linha N.

### III. UMA BASE FORMAL PARA O PCBLM

Nesta seção, define-se formalmente a estrutura do problema clássico de balanceamento de linhas de montagem, com a importante particularidade de que se unificam os critérios de avaliação das soluções que um mesmo problema possa apresentar, isto é, define-se o modelo matemático do problema, de tal forma que sua solução garante tanto a solução do problema I como a do problema II da seção anterior.

#### 3.1 - Sobre a Teoria do PCBLM

Denotaremos por  $\Omega$  o conjunto de todas as tarefas (operações, elementos de trabalho, etc) que precisarão ser alocadas nas estações de trabalho que formam a linha de montagem.

##### Definição 3.1

Seja  $<$  uma relação de ordem parcial definida em  $\Omega$ , de modo que, se  $x_i < x_j$ , a tarefa  $x_i$  deve necessariamente preceder  $x_j$  na seqüência de trabalho da linha. A dita relação de ordem possui a propriedade transitiva, isto é, se  $x_i, x_j$  e  $x_\ell \in \Omega$  e se  $x_i < x_j$  e  $x_j < x_\ell$ , então  $x_i < x_\ell$ .

##### Definição 3.2

Seja  $P(x_j)$  o conjunto de tarefas que devem preceder a tarefa  $x_j \in \Omega$ , então

$$P(x_j) = \{x_i \in \Omega \mid x_i < x_j\} \quad (3.1)$$

##### Definição 3.3

Sempre que dois elementos  $x_i, x_j \in \Omega$  possuem a propriedade de que  $x_i < x_j$ , não existe um terceiro elemento  $x_\ell$ , de modo que  $x_i < x_\ell < x_j$ ,  $x_i$  é considerado predecessor imediato de  $x_j$ , e  $x_j$  um sucessor imediato de  $x_i$ .

### Definição 3.4

Seja  $S = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}\}$  um conjunto de  $m$  tarefas em  $\Omega$ . O subconjunto  $S \subseteq \Omega$  é dito viável com respeito a  $\Omega$ , se, e somente se  $P(x_j) \subset S$  e  $x_j \in S$  ou, equivalentemente, se  $x_j \in S$  e  $x_i < x_j$ , e então  $x_i \in S$ .

Todas as tarefas num conjunto viável  $S$  podem ser executadas pelo me nos numa ordem antes das tarefas de seu complemento  $S^c$ , sem violar as relações de precedência, onde  $S^c = \Omega - S$ .

### Definição 3.5

Cada subconjunto  $S$ , ( $S \subset \Omega$ ) é associado ao conjunto  $F(S)$ , ( $F(S) \subset \Omega$ ) de seguidores imediatos, de modo que

$$F(S) = \{x_j \in \Omega \mid x_j \notin S \text{ e } P_j \subset S\} \quad (3.2)$$

Obviamente, se  $S$  é viável,  $S \subset F(S)$  também o é, e, além do mais,  $F(\Omega) = \emptyset$ .

### Definição 3.6

Dentre os conjuntos viáveis com respeito a  $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  com a relação de ordem parcial  $<$ , podem ser distinguidos os conjuntos básicos com respeito a  $\Omega$ ;  $S_0, S_1, \dots, S_N$ , onde  $S_0 = \emptyset$  e, para  $i > 0$ ,  $S_i = \{x \in \Omega \mid x = x_j \text{ ou } x < x_j\}$ .

Note-se que a classe de conjuntos viáveis com respeito a  $\Omega$  forma um reticulado perante as operações de união e interseção de conjuntos, e que os conjuntos básicos viáveis são geradores desse reticulado.

### Definição 3.7

Dois elementos  $x_i, x_j \in \Omega$  são ditos conexos, se existem elementos  $x_1, x_2, \dots, x_r \in \Omega$ , de modo que

$$x_i < x_1 < x_2 < \dots < x_r < x_j$$

É fácil mostrar que a relação de conexidade é uma relação de equivalência. Conseqüentemente, existe uma única decomposição do conjunto parcialmente ordenado  $\Omega$  em classes de equivalência disjuntos  $S_i$ , chamados os componentes fracos de  $\Omega$ .

### Definição 3.8

Uma alocação de um conjunto viável  $S$  em  $N$  estações é uma partição ordenada  $\Pi(S) = (S_1, S_2, \dots, S_N)$  de  $S$  em  $N$  subconjuntos, tais que, para todo  $k = 1, 2, \dots, N$  os subconjuntos  $\beta^k = \bigcup_{j=1}^{j=k} S_j$  são viáveis. Os subconjuntos  $S_1, S_2, \dots, S_N$  podem ser alocados às estações  $1, 2, \dots, N$ , respectivamente, sem violar as relações tecnológicas de precedência.

### Definição 3.9

Seja  $t(x_j)$  uma função de valor real positiva, denotando o tempo de execução da tarefa  $x_j \in \Omega$ , e  $T(S_i) = \sum_{x_j \in S_i} t(x_j)$  o conteúdo de trabalho do conjunto de tarefas contidas na  $i$ -ésima estação ( $S_i$ ). O conteúdo de trabalho total, isto é, o tempo necessário para a montagem de uma unidade de produto é  $T^* = T(\Omega)$ .

### Definição 3.10

Seja  $R$  a taxa de produção desejada do sistema, expressa em unidades por unidade de tempo; definimos, então,  $\theta$ , o tempo de ciclo da linha, como  $R^{-1}$ , que é o tempo necessário para realizar todas as tarefas necessárias à elaboração de um produto.

### Definição 3.11

O tempo de ciclo real  $\theta'$  de uma alocação  $\Pi(S)$  é o conteúdo máximo de trabalho contido nos subconjuntos de  $S$ , que é definido pela partição. Ou seja,

$$\theta' = \max_{S_i \in \Pi(S)} \{T(S_i)\} \quad (3.3)$$

Ao balancear uma linha de montagem para um tempo de ciclo  $\theta$ , o subconjunto  $S_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, N$ ), poderá ser alocado à estação correspondente, se e somente se

$$\theta' \leq \theta \quad (3.4)$$

### Definição 3.12

Uma alocação de um conjunto viável  $S$  em  $N$  estações é admissível com respeito a  $\theta$ , se a inequação (3.4) é satisfeita para todos os subconjuntos  $S_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ .

Os subconjuntos  $S_j$ , ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) de uma alocação admissível podem ser alocados às estações 1 a  $N$ , sujeitos à inequação (3.4), sem violar as relações de precedência.

### Definição 3.13

O balanceamento de uma linha de  $N$  estações com tempo de ciclo real  $\theta'$ , ( $\theta' \leq \theta$ ) é uma alocação admissível de  $\Omega$  em  $N$  estações com respeito a  $\theta$  e com tempo de ciclo real  $\theta'$ .

### Definição 3.14

Seja  $\Pi(S)$  uma alocação admissível de um conjunto viável  $S$  em  $N$  estações com respeito ao tempo de ciclo  $\theta$ . Para cada  $S_i \in \Pi(S)$ , de modo que  $T(S_i) \leq \theta$ , existe uma quantidade de tempo de ócio por estação definido como:

$$O_i = \theta - T(S_i) \quad (3.5)$$

e, portanto, o tempo de ócio da alocação  $S$  é

$$O_n = \sum_{i=1}^{i=n} O_i = \sum_{i=1}^{i=n} (\theta - T(S_i)) = n\theta - T(S) \quad (3.6)$$

Obviamente, o tempo de ócio total da alocação de  $\Omega$  a  $N$  estações é

$$O^* = N\theta - T(\Omega) = N\theta - T^* \quad (3.7)$$

Definição 3.15

A quantidade  $0^*$ , definida em (3.7), é a folga da linha de  $N$  estações, tempo de ciclo  $\theta$  e conteúdo de trabalho  $T^*$ .

A folga real  $0'$  é a folga com respeito ao tempo de ciclo real  $\theta'$ .

Definição 3.16

Uma alocação admissível de um conjunto  $S$  em  $n$  estações é dito extensível, se as tarefas em  $S^c$  podem ser alocadas nas estações  $n, n+1, \dots, N$ .

A extensibilidade de uma alocação admissível  $\Pi(S)$  de um conjunto  $S$  a  $n$  estações é determinada por duas quantidades: o tempo de ócio, como definido em (3.6), e o tempo livre  $f$ .

Definição 3.17

O tempo livre de uma alocação admissível  $\Pi(S) = (S_1, S_2, S_3, \dots, S_n)$  de um conjunto  $S$  em  $n$  estações, com respeito ao tempo de ciclo  $\theta$ , é a diferença entre o conteúdo de trabalho de  $S_n$  e  $\theta$ , isto é:

$$f = \theta - T(S_n) \quad (3.8)$$

Definição 3.18

Uma alocação admissível de  $S$  em  $n$  estações é dita curta com respeito a  $0^*$ , se  $0_n > 0^*$ .

Note que, se uma alocação admissível é curta, significa que não é possível balancear a linha para aquele número de estações predeterminado.

Definição 3.19

Uma alocação admissível  $\Pi(S)$  de um conjunto viável  $S$  a  $n$  estações com tempo livre  $f$  é dita completa, se  $t(x_j) > f$  para toda  $x_j \in F(S)$ .

Lema 3.1

Se uma alocação é curta, então só será possível extê-la alocando mais tarefas na enésima estação.

Demonstração

Considere um balanceamento  $\Pi(\Omega) = (S_1, S_2, \dots, S_N)$  e seja  $\beta^n = \bigcup_{j=1}^{j=n} S_j$ , ( $n=1, 2, \dots, N$ ). A seqüência  $\{O_n\}$  é claramente não decrescente, portanto a identidade  $O_n = O^*$  implica que  $O_n \leq O^*$  para toda  $n \leq N$ ; além disso, se para algum  $n < N$ ,  $O_n = O^*$ , as alocações às estações  $n, n+1, \dots, N$  deverão ser completas, isto é,  $T(S_i) = \theta$  ( $i=n+1, n+2, \dots, N$ ).

C.Q.D.

Lema 3.2

Se  $\Pi(S)$  é completa, é então impossível extê-la alocando mais tarefas à n-ésima estação.

Demonstração

O conjunto  $F(S)$  de seguidores imediatos de  $S$  pode ser particionado em dois subconjuntos, como

$$F(S) = F_1(S) \cup F_2(S)$$

onde

$$F_1(S) = \{x_j \in F(S) \mid t(x_j) \leq f\}$$

e

$$F_2(S) = \{x_j \in F(S) \mid t(x_j) > f\}$$

assim, pela definição 3.19, se  $\Pi(S)$  é completa, implica que  $F_1(S) = \emptyset$  e, por conseguinte, não podem ser alocados mais tarefas na n-ésima estação.

C.Q.D.

Teorema 3.1

Uma alocação admissível  $\Pi(S)$  de  $S$  em  $n$  estações é não-extensível, se ela é completa e curta com respeito a  $O^*$ .

Demonstração

Seja uma alocação admissível de  $S$  em  $n$  estações, como  $\Pi(S) = (S_1, S_2, \dots, S_n)$ . Dado que  $\Pi(S)$  é curta com respeito a  $O^*$ , só poderá ser extendida alocando mais tarefas na  $n$ -ésima estação segundo o Lema 3.1, e, como  $\Pi(S)$  também é completa, pelo Lema 3.2 é impossível extendê-la.

C.Q.D.

Definição 3.20

Dado um conjunto finito  $\Omega$ , uma relação de ordem parcial  $<$  definida em  $\Omega$ , uma função de valor real  $T(\cdot)$  definida em  $\Omega$ , e uma constante  $\theta > 0$ , o problema clássico de balanceamento de linhas de montagem se define como o problema de achar uma partição ordenada  $\Pi(\Omega) = (S_1, S_2, \dots, S_N)$ , cumprindo as cinco seguintes condições:

- (i)  $\bigcup_{i=1}^{i=N} S_i = \Omega$
  - (ii)  $S_i \cap S_j = \emptyset \quad i \neq j, \quad i=1, 2, \dots, N$
  - (iii)  $T(S_i) = \sum_{x_j \in S_i} t(x_j) \leq \theta, \quad i=1, 2, \dots, N$
  - (iv) se  $x < y$  e  $x \in S_i, y \in S_j \rightarrow i \leq j$
  - (v) minimizar o tempo de ócio total da linha
- $$O^* = \text{Min}_{j=1}^{j=N} (\theta - T(S_j)) \quad (3.9)$$

Definição 3.21

A função desbalanceamento de uma alocação admissível  $\Pi(\Omega)$  é definida como uma função do tempo de ciclo  $\theta$ .

$$d = \frac{\theta - \hat{\theta}}{\theta} \quad (3.10)$$

onde  $\hat{\theta}$  é o tempo de ciclo médio,  $\hat{\theta} = \frac{T^*}{N}$

Definição 3.22

O balanceamento perfeito de uma linha é aquele no qual a função desbalanceamento é nula.

Teorema 3.2

Uma alocação admissível  $\Pi(\Omega)$  possuirá um balanceamento perfeito se  $f_j = 0$ ,  $j=1, 2, \dots, N$ .

Demonstração

Por definição, se uma alocação admissível  $\Pi(S)$  gera um balanceamento perfeito, temos que  $d=0$ , assim

$$\frac{\theta - \bar{\theta}}{\theta} = 0$$

e, por definição,  $\theta > 0$ , assim

$$\theta - \frac{T^*}{N} = 0 \quad , \quad \text{onde } 0^* = 0$$

mas

$$0^* = \sum_{j=1}^{J=N} 0_j = \sum_{j=1}^{J=N} (\theta - T(S_j)) = 0$$

ou

$$\sum_{j=1}^{J=N} (\theta - T(S_j)) = 0$$

Portanto

$$f_j = 0 \quad j=1, \dots, N$$

C.Q.D.

Definição 3.23

Seja  $\ell : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  uma função convexa, monótona crescente, e  $\Pi(\Omega)$  uma alocação admissível, para tempo de ciclo  $\theta$  em  $N$  estações. Definimos desequilíbrio de  $\Pi(\Omega)$  com respeito a  $\ell$ , anotado  $D(\Pi, \ell)$  como:

$$D(\Pi, \ell) = \sum_{j=1}^{J=N} \ell(\theta - T(S_j)) \quad (3.11)$$

Se  $\ell(\cdot) = (\cdot)^m$  ( $m \geq 1$ ), anotaremos o desequilíbrio como:

$$D_m(\Pi) = \sum_{j=1}^{J=N} (\theta - T(S_j))^m \quad (3.12)$$

Note-se que  $D_1(\Pi) = \text{ócio}$ . Doravante, trabalharemos com  $D_2(\Pi)$ ; mas os resultados são válidos para qualquer  $\ell$  convexa crescente.

#### Definição 3.24

Uma alocação admissível  $\Pi(\Omega)$  em  $N$  estações possui um balanceamento ótimo absoluto com respeito a  $\ell$  (onde  $\ell$  é uma função convexa crescente), se:

(a)  $\Pi(\Omega)$  é solução do problema clássico e

(b)  $D(\Pi, \ell) = D^*(\ell) \stackrel{d}{=} \min\{D(\Pi', \ell) \mid \Pi' \in \chi\}$

onde  $\chi$  é o conjunto das soluções do PCBLM, dados os mesmos  $(\Omega, <, T(\cdot), \theta)$ .

#### Definição 3.25

Se  $\Pi(\Omega)$  é solução do problema clássico, com  $N$  estações de trabalho, chamamos  $\bar{N}$  de número mínimo efetivo de estações e o anotamos com  $N^*$  (para distingui-lo de  $N_0^* = \lceil \frac{T^*}{\theta} \rceil$ ).

### 3.2 - Críticas à Definição do Problema Clássico

A função objetivo do modelo matemático, que define o problema clássico de balanceamento de linhas de montagem, visa minimizar tanto quanto possível o tempo de ócio gerado por um balanceamento, isto é, minimizar a expressão

$$O^* = N\theta - T^*$$

Obviamente, o limite inferior de  $O^*$  é zero, isto é:

$$N\theta - T^* \geq 0$$

então,

$$N\theta \geq T^* \quad (3.13)$$

A igualdade nesta última expressão, onde  $n$  e  $T^*$  são números inteiros, só poderá ser obtida sempre que  $\theta$  for uma raiz primitiva do produto de decomposição de  $T^*$  em números primos, e só neste caso existirá a possibilidade de ser obtido um balanceamento perfeito, pois às vezes as relações de precedência podem evitar o dito balanceamento. Isto quer dizer, portanto, que, para um número pré-fixado de estações  $N$  e tempo de ciclo  $\theta$ , podem existir diferentes alocações admissíveis e, neste caso, todas elas equivalentes, por possuírem o mesmo tempo de ócio. A crítica apresenta neste trabalho reside no fato de que vários balanceamentos com idêntico  $O^*$  podem ter diferentes distribuições do ócio nas estações. No exemplo a seguir, podemos apreciar claramente o problema.

Seja o problema de balancear a linha de montagem, definida pelas seguintes relações de precedências:

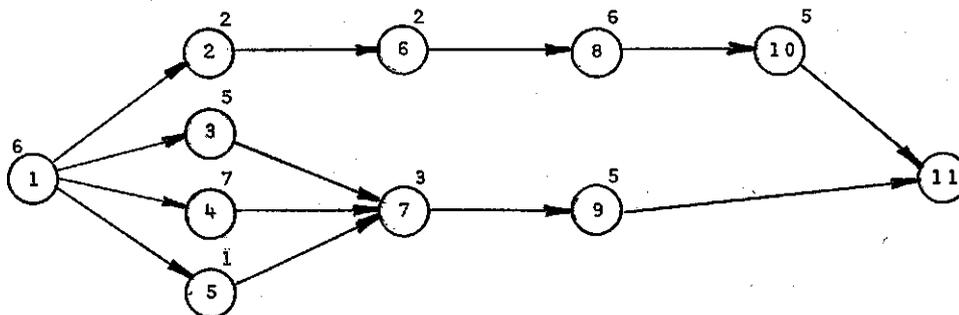


Fig. 1 - Relações de Precedências

onde  $T^* = 46$  unidades, e seja escolhido  $\theta = 15$  unidades de tempo. Os números que acompanham os nós são o tempo de execução das tarefas individuais.

O número mínimo de estações de que o dito balanceamento precisará pode ser obtido pela expressão 3.13; assim:

$$N_0^* = \left[ \frac{T^*}{\theta} \right]^+ = \left[ \frac{46}{15} \right]^+ = [3.06]^+ = 4$$

A priori, podemos dizer que

$$O^* = N\theta - T^* = 60 - 46 = 14$$

Segundo a definição do problema clássico, as seguintes alocações

admissíveis são ótimas, pois ambas obtêm balanceamento no número mínimo de estações possível.

Discriminação das Tarefas do Balanceamento

Balanc.	1 <sup>a</sup> est	0 <sub>1</sub>	2 <sup>a</sup> est	0 <sub>2</sub>	3 <sup>a</sup> est	0 <sub>3</sub>	4 <sup>a</sup> est	0 <sub>4</sub>	0*
1	1,2,6,3	0	4,5,8	1	7,9,10	2	11	11	14
2	1,3,5	3	2,4,6	4	8,10	4	7,9,11	3	14

TABELA 3.1

É claro que, embora a definição do problema aceite ambos os balanceamentos como ótimos equivalentes, eles não o são pelo fato de que a distribuição do tempo de ócio é completamente díspar. No gráfico a seguir pode-se apreciar melhor a dita desvantagem:

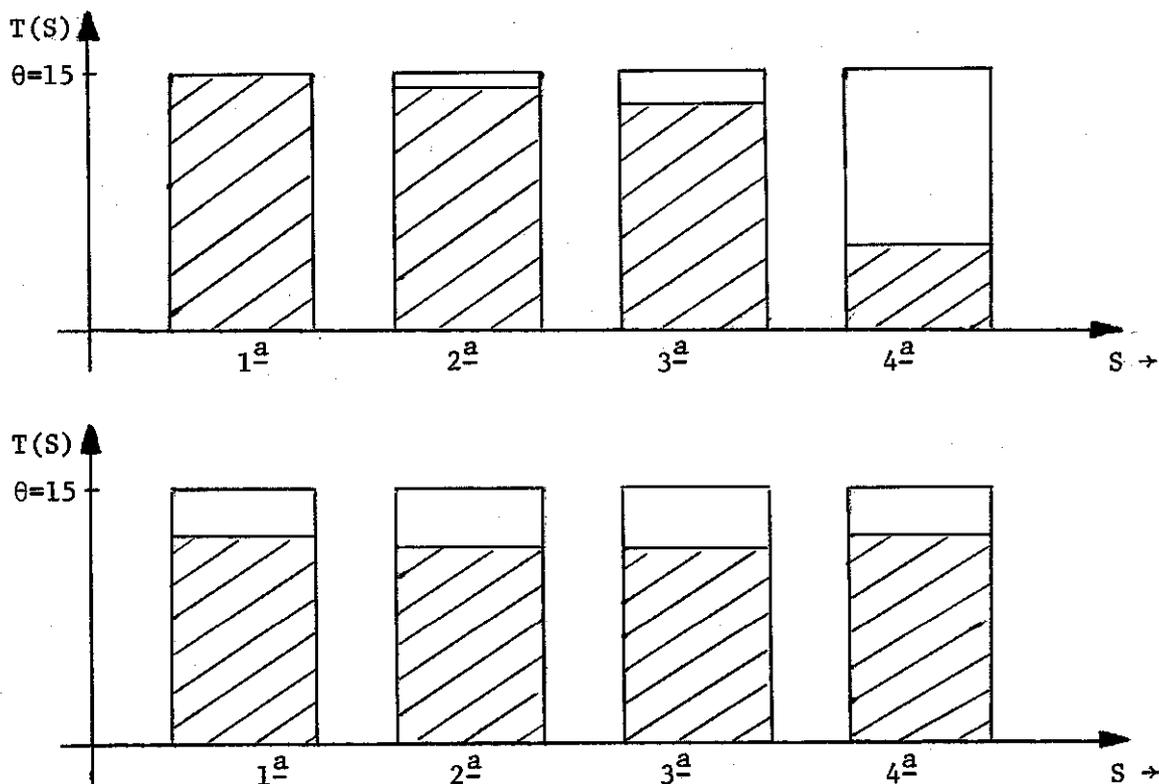


Figura 2

Enquanto o primeiro balanceamento possui a primeira estação trabalhando a uma taxa de 100%, a última estação trabalha a uma taxa de 26% a diferença do segundo balanceamento, onde as estações 1 e 4 trabalham a uma taxa de 80%, e as estações 2 e 3 a uma taxa de 74%, gerando este último balanceamento uma distribuição do conteúdo de trabalho da linha mais equitativa.

### 3.3 - A Modificação Proposta

Como contribuição nesta pesquisa, apresenta-se a seguir uma modificação do modelo matemático que define o problema clássico de balanceamento de linhas de montagem; além de resolver o problema como tradicionalmente tem sido feito, o balanceamento obtido por meio desta modificação fornece taxas de trabalho equitativas na medida do possível, pois, às vezes, as relações tecnológicas de precedência entre as tarefas da linha não permitem uma distribuição perfeita do ócio.

A discriminação de balanceamentos ótimos absolutos, da classe de balanceamentos ótimos equivalentes, isto é, com mesmo número de estações, pode ser obtido substituindo-se a função objetivo do problema, como foi definido, pela seguinte expressão:

$$\underline{O}^* = \text{Min}_{j=1}^{j=N} (\theta - T(S_j))^2 \quad (3.14)$$

Dessa forma, todo processo que trate de resolver este novo modelo será obrigado a visar a alocação, na medida do possível, de taxas de trabalho equitativas, pois o valor de  $T(S_j)$  que minimiza (3.14) é  $\hat{\theta}$ , obviamente.

#### Teorema 3.3

Uma alocação  $\Pi(S)$  de um conjunto viável  $S$  em  $N$  estações de trabalho gera um balanceamento ótimo absoluto e perfeito, se  $\theta = \hat{\theta}$ .

Demonstração:

$\Pi(S)$  gera um balanceamento ótimo absoluto e perfeito, se a expressão (3.14) é nula; assim,

$$\underline{Q}^* = \sum_{j=1}^{j=N} (\theta - T(S_j))^2 = 0$$

como

$$(\theta - T(S_j))^2 \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, N$$

e

$$\begin{aligned} \underline{Q}^* = 0 &\leftrightarrow T(S_j) = \theta \quad j = 1, 2, \dots, N \\ \rightarrow T^* = N\theta &= N\hat{\theta} \end{aligned}$$

C.Q.D.

Aplicando a modificação sugerida aos balanceamentos apresentados, teríamos como exemplo a seguinte tabela de comparação:

Discriminação das Tarefas do Balanceamento

Balanc.	1 <sup>a</sup> est	0 <sub>1</sub> <sup>2</sup>	2 <sup>a</sup> est	0 <sub>2</sub> <sup>2</sup>	3 <sup>a</sup> est	0 <sub>3</sub> <sup>2</sup>	4 <sup>a</sup> est	0 <sub>4</sub> <sup>2</sup>	<u>Q</u> *
1	1,2,6,3	0	4,5,8	1	7,9,10	4	11	121	126
2	1,3,5	9	2,4,6	16	8,10	16	7,9,11	9	50

TABELA 3.2

Portanto, dentre estes dois balanceamentos, o segundo tem uma função objetivo Q\* menor, indicando uma melhor distribuição do tempo de ócio.

## IV. CONCLUSÕES

Por intermédio desta pesquisa, temos definido formalmente as premissas que suportam a estrutura do PCBLM. Definiu-se o problema clássico de balanceamento de linhas de montagem a partir de suas próprias premissas, fazendo-se uma ressalva em relação às distintas concepções que o próprio problema pode ter (Problema I e Problema II, seção 2). Definiu-se um novo modelo matemático com a particularidade de que sua solução leva implícita a solução dos Problemas I e II, como definidos na seção 2. Isto é, unificaram-se os critérios de solução do PCBLM.

O modelo matemático reformulado para o PCBLM é o seguinte: "Dados um conjunto finito  $\Omega$ , uma relação de ordem parcial  $<$  definida em  $\Omega$ , uma função  $t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ , uma constante  $\theta > 0$ , o problema clássico de balanceamento de linhas de montagem é definido como o problema de achar uma coleção  $H(\Omega) = (S_1, S_2, \dots, S_N)$  de subconjunto de  $\Omega$ , que satisfaça às seis seguintes condições:

$$(i) \bigcup_{i=1}^{i=N} S_i = \Omega$$

$$(ii) i, j \in \{1, 2, \dots, N\} \quad i \neq j \quad S_i \cap S_j = \emptyset$$

(donde  $\Pi(\Omega)$  é uma partição de  $\Omega$ )

$$(iii) T(S_i) = \sum_{x_j \in S_i}^d t(x_j) \leq \theta, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$(iv) x < y, \quad x \in S_i, \quad y \in S_j \rightarrow i < j$$

(v) Minimizar o tempo de ócio total da linha, definido como:

$$O^* = \sum_{j=1}^{j=N} (\theta - T(S_j))$$

$$(vi) D(\ell, \Pi) = \text{Min} \{D(\ell, \Pi') \mid \Pi'(\Omega) \in \tilde{S}\}$$

onde  $\tilde{S}$  é o conjunto de soluções que satisfazem (i) - (v) e

$$D(\ell, \Pi) = \sum_{i=1}^{i=N} \ell(\theta - T(S_i)) \text{ com } \ell: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ uma função } \underline{\text{convexa crescente}}.$$

Na referência bibliográfica (2) demonstramos que qualquer algoritmo eficiente, que trate de resolver este modelo matemático, resolve ao mesmo tempo o problema I como o problema II da seção 2 desta pesquisa. Dessa forma, chegamos ao objetivo desta pesquisa, qual seja de uniformizar critérios de avaliação das soluções do PCBLM por intermédio da formalização de sua estrutura.

BIBLIOGRAFIA

1. FREEMAN, D.R. & JUCKER, J.V. The line balancing problem. Journal of Industrial Engineering, Norcross, American Institute of Industrial Engineers, 18(6) : 361-64, June 1967.
2. GARCIA GÓMEZ, Jorge Alberto. A Reformulation of the classical assembly line balancing problem and it's optimum - efficient solution. Rio de Janeiro, COPPEAD/UFRJ, abril 1976. (Relatório de Pesquisa, 2).
3. HELGESON, W.B. (Comments on) Assembly line balancing - an improvement on the ranked positional weight technique, by MANSOOR, E.M. in Journal of Industrial Engineering, Mar./Apr. 1964. Journal of Industrial Engineering, Norcross, American Institute of Industrial Engineers, 15(6) : 322-23, Nov./Dec. 1964. Includes author's comments.
4. KAMALUDDIN, B.A. (Comments on) Assembly line balancing - an improvement on the ranked positional weight technique, by MANSOOR, E.M. in Journal of Industrial Engineering, Mar./Apr. 1964. Journal of Industrial Engineering, Norcross, American Institute of Industrial Engineers, 15(6) : 322-23, Nov./Dec. 1964. Includes author's comments.
5. KILBRIDGE, M.D. & WESTER, L. A Review of analytical systems of line balancing. Operations Research, Baltimore, Operations Research Society of American, 10(5) : 628-38, Sep./Oct. 1962.
6. SALVESON, M.E. The assembly line balancing problem. Journal of Industrial Engineering, Norcross, American Institute of Industrial, 6(3) : 18-25, May/June 1955.