COPPEAD/UFRJ

RELATÓRIO COPPEAD Nº 34

"DIVERSIFICAÇÃO E EQUILÍBRIO NO MERCADO DE CAPITAIS"

Ney O. Brito*

Setembro 1979

* Coordenador de Economia e Finanças do Programa de Administração da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

I - INTRODUÇÃO

Mercados acionários são, em essência, mercados onde risco é negociado em termos de rentabilidade esperada. Em tais mercados é relevante considerar-se risco de forma explícita. Em particular, é preciso considerar o potencial de diversificação de risco no mercado. Ao compor-se carteiras com diversos títulos o nível de risco da carteira será em geral menor que o nível de risco de uma posição concentrada em um único título. O investidor pode até optar por uma posição concentrada mas deve ter conhecimento de sua maior exposição a risco.

Este trabalho examina o efeito diversificação de carteiras de investimento e prossegue para examinar o processo de escolhas de carteiras. Um investidor racional considerará para fins de investimentos apenas carteiras que satisfazem alguns critérios de eficiência. Estas carteiras são ditas eficientes e compõem a chamada fronteira eficiente. O trabalho discute a determinação e propriedades de fronteiras eficientes de investimento.

Após selecionarem suas carteiras a nível individual o conjunto de investidores interage no mercado para determinar preços de equilíbrio de títulos. Ao determinarem estes preços os investidores consideram apenas alguns componentes do nível de risco de títulos. Este trabalho se encerra discutindo características de preços em equilíbrio em um mercado eficiente e discutindo os componentes de risco de um título.

II - A COMBINAÇÃO DE TÍTULOS COM RISCO E O EFEITO DIVERSIFICAÇÃO

Quando títulos com risco são combinados em uma carteira de investimentos é importante considerar-se o nível de risco da carteira. Em geral existirão na carteira títulos que tendem a subir quando outros tendem a descer e vice-versa. Ao agregar-se estes títulos em carteira, risco estará sendo diversificado e este efeito diversificação deve ser considerado[1].

Vamos examinar este efeito diversificação para o caso mais simples de uma carteira de dois títulos com risco. Defina

$\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$ = taxa de retorno aleatória dos dois títulos,

E_1, E_2 = valor esperado de $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$,

σ_1, σ_2 = risco (desvio padrão) de $\tilde{X}_1$e $\tilde{X}_2$,

σ_{12} = covariância de X_1 e X_2,

Δ = $E_2 - E_1$,

C = $\sigma_{12} - \sigma_1^2$,

V = $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}$ e

ρ_{12} = correlação entre $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$

e considere uma carteira genérica de $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ definida por

$$\tilde{X}_k = k\ \tilde{X}_2 + (1-k)\ \tilde{X}_1 . \tag{1}$$

Esta carteira representa um investimento da fração k dos recursos disponíveis no título $\tilde{X}_2$ sendo o restante (1-k) investido no título $\tilde{X}_1$.

Denotando-se por E_k e σ_k a taxa de retorno esperada e o desvio padrão da carteira k, respectivamente, obtem-se:

$$E_k = k\ E_2 + (1-k)E_1 = k\ \Delta + E_1 \tag{2}$$

$$\sigma_k = \left[k^2\sigma^2 + (1-k)^2\sigma_1^2 + 2k(1-k)\sigma_{12}\right]^{1/2} \tag{3}$$

A relação (3) implica que $\sigma_k > 0$ para todo k e através dela pode-se obter a combinação dos dois títulos que oferece o mínimo risco e desvio padrão. Em particular fazendo $\partial\sigma_k/\partial k = 0$ obtem-se que o mínimo risco ocorre para $k = -C/V$ e assume o valor

$$\sigma_{min} = (\sigma_1^2 - \frac{C^2}{V})^{1/2} \tag{4}$$

A relação (4) é interessante para examinar-se o efeito de diversificação que pode ser obtido combinando-se títulos. Como $C^2 > 0$ o nível mínimo de risco será menor do que o nível de risco de cada título se $v > 0$, ou seja, $\sigma_{min} < \sigma_i$ se

$$\rho_{12} < \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1\sigma_2} \tag{5}$$

Observe que existirão valores de ρ_{12} maiores que zero tais que $\sigma_{min} < \sigma_i$, ou seja, existem níveis de autocorrelação positiva que ainda permitem reduzir o nível de risco de uma carteira abaixo do nível de risco dos títulos componentes.

Utilizando as relações (2) e (3) pode-se derivar o lugar geométrico de carteiras de $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ no espaço média-desvio padrão. Derivações baseadas em análise real elementar permitem provar que este lugar geométrico é uma hipérbole[2] no espaço E_1-σ com equação

$$\frac{\sigma_k^1}{\sigma_1^2 - \frac{C^2}{V}} - \frac{V\left[E_k - (E_1 - C\Delta/V)\right]^2}{\Delta^2\sigma_1^2 - \Delta^2\, C^2/V} = 1. \tag{6}$$

Esta hipérbole tem seu eixo principal paralelo ao eixo da abcissas, tem seu centro sobre o eixo das ordenadas no ponto

$$(0, -\frac{\Delta C}{V} + E_1)$$

e tem assíntotas com tangentes iguais a $\pm\, \Delta/V^{1/2}$. Um possível lugar geométrico é apresentado na figura 1. O trecho $X_1 - X_2$ corresponde a carteiras com posições longas nos dois títulos, o trecho A-X_1 corresponde a carteiras com posições longas em X_1 e curtas em X_2 e o trecho X_2 - B corresponde a carteiras com posições longas em X_2 e curtas em X_1.

Observe que uma importante propriedade de qualquer ponto deste lugar geométrico é sua tangente. A tangente ao lugar determina a razão de troca entre risco e retorno no ponto através de combinações entre os títulos X_1 e X_2. A expressão precisa desta tangente pode ser obtida diferenciando-se as relações (2) e (3):

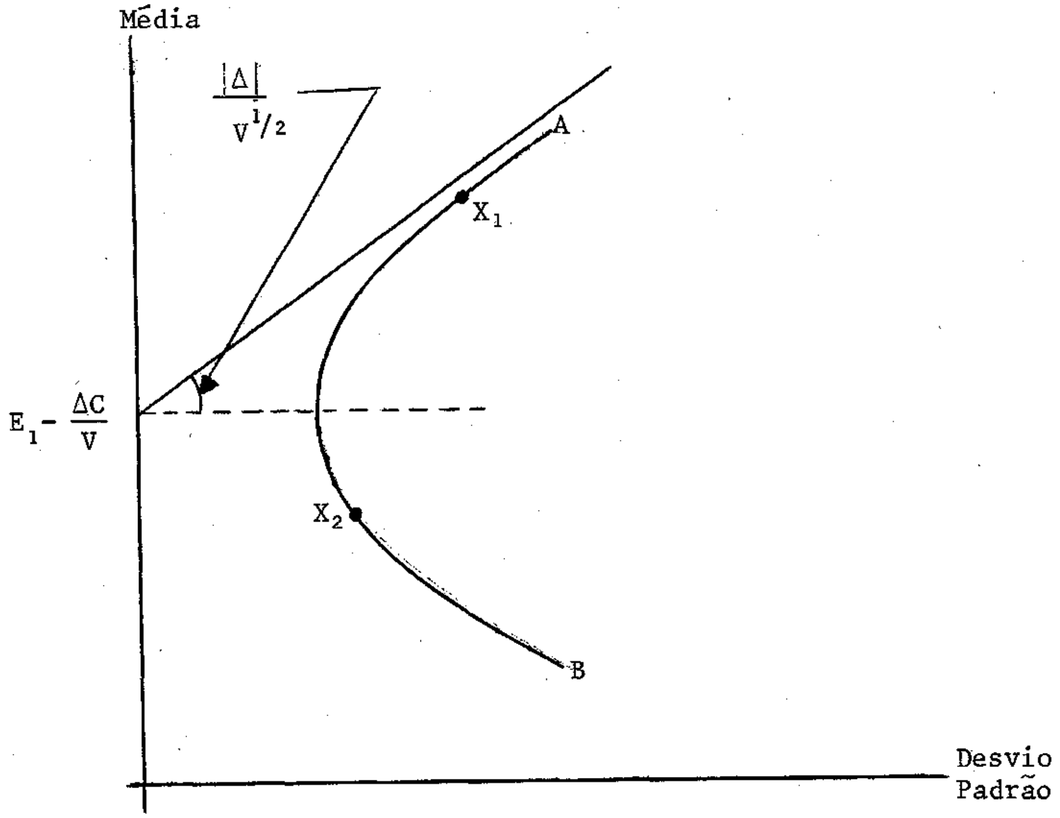

FIGURA 1

O LUGAR GEOMÉTRICO DE COMBINAÇÕES DE
TÍTULOS COM RISCO

$$\frac{\partial\ E_k}{\partial\ k} = \Delta \quad \text{e} \quad \frac{\partial \sigma_k}{\partial\ k} = \frac{C + kV}{\sigma_k}$$

Segue-se que a tangente para um determinado k será

$$\left.\frac{\partial E_k}{\partial \sigma_k}\right|_k = \frac{\Delta\ \sigma_k}{C + kV} \tag{7}$$

A relevância desta relação ficará mais evidente no decorrer deste trabalho.

III - A COMBINAÇÃO DE UM TÍTULO COM RISCO COM UM TÍTULO SEM RISCO

No ambiente econômico existem títulos que oferecem uma taxa de retorno certa e sem risco. Seja r_F a taxa fixa oferecida por estes títulos. O lugar geométrico de carteiras obtidas por combinações de títulos de renda fixa com um título com risco é um caso particular do caso geral examinado na secção anterior. Parece ser de interesse examiná-lo.

Seja X_2 o título de renda fixa oferecendo taxa de retorno esperada $E_2 = r_F$ e risco nulo ($\sigma_2 = 0$). Substituindo-se estes valores nas relações (2) e (3) obtem-se

$$E_k = k\ r_F + (1-k)E_1 \tag{8}$$

$$\sigma_k = (1-k)\sigma_1 = k \times 0 + (1-k)\sigma_1 \tag{9}$$

As relações (8) e (9) implicam que o lugar geométrico de combinações de títulos de renda fixa com o título com risco é uma reta no espaço média-desvio padrão. Um possível lugar geométrico é o apresentado na figura 2.

A tangente da reta lugar geométrico é uma propriedade de importância. Por razões que ficarão mais claras adiante ela é definida por Sharpe [13] como a razão recompensa-variabilidade do título com risco (RV_{X_1}) e assume valor

$$RV_{X_1} = \frac{E_1 - r_F}{\sigma_1} \tag{10}$$

Ela é a relação entre o retorno adicional e o risco adicional associados a investimentos no titulo X_1 com risco. A razão determina a relação de troca entre risco e retorno oferecida por combinações do título X_1 com título de renda fixa.

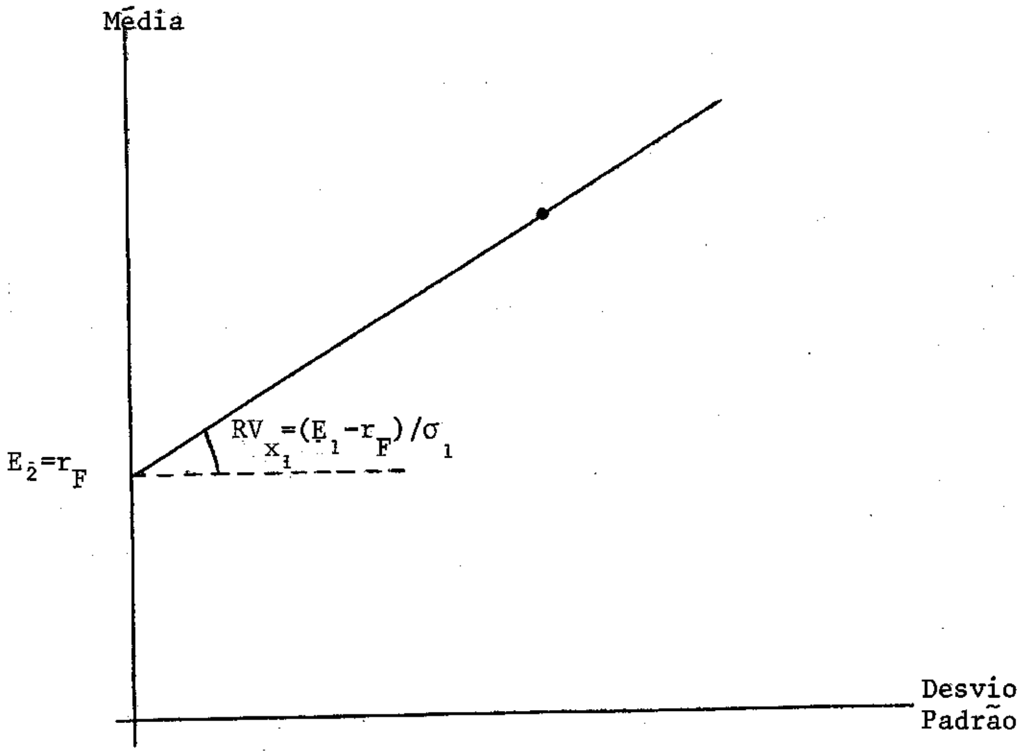

FIGURA 2

O LUGAR GEOMÉTRICO DE COMBINAÇÕES DO
TÍTULO SEM RISCO COM O TÍTULO DE RISCO X_1

IV - PREFERÊNCIAS E PRINCÍPIOS DE EFICIÊNCIA

O processo de seleção de carteiras de investimentos considera as combinações viáveis no espaço risco-retorno bem como as preferências do investidor com relação a risco e retorno. Nesta secção será discutida a estrutura de preferências de investidores e alguns princípios induzidos.

Investidores racionais constumam mostrar aversão a risco em suas decisões de investimento[3]. Risco é uma propriedade indesejável de investimentos. Por outro lado retorno esperado é sempre uma propriedade desejável para investidores racionais. Em suma estes investidores mostram preferências que procuram sempre se deslocar para alternativas de investimento com a máxima rentabilidade esperada e o mínimo risco possível.

Uma estrutura de preferências dos investidores no espaço média-desvio - padrão com as características de racionalidade discutidas é a representada pelo mapa de indiferença da figura 3. Observe que esta estrutura de preferências tem duas propriedades importantes:

(i) entre combinações de investimento com o mesmo nível de risco o investidor sempre escolherá aquela que oferece a máxima rentabilidade esperada e

(ii) entre combinações de investimento com a mesma rentabilidade esperada o investidor sempre escolherá aquela que oferece o mínimo risco.

Estas duas propriedades são impessoais e válidas para qualquer investidor racional com aversão a risco. Por serem impessoais elas podem ser utilizadas para fazer uma pré-seleção de investimentos apresentando-se ao investidor para fins de seleção apenas os investimentos que oferecem a máxima rentabilidade esperada para o mesmo nível de risco e o mínimo risco para todos os níveis de rentabilidade esperada. O lugar geométrico destes investimentos no espaço média-desvio padrão é a chamada fronteira eficiente de investimentos[4].

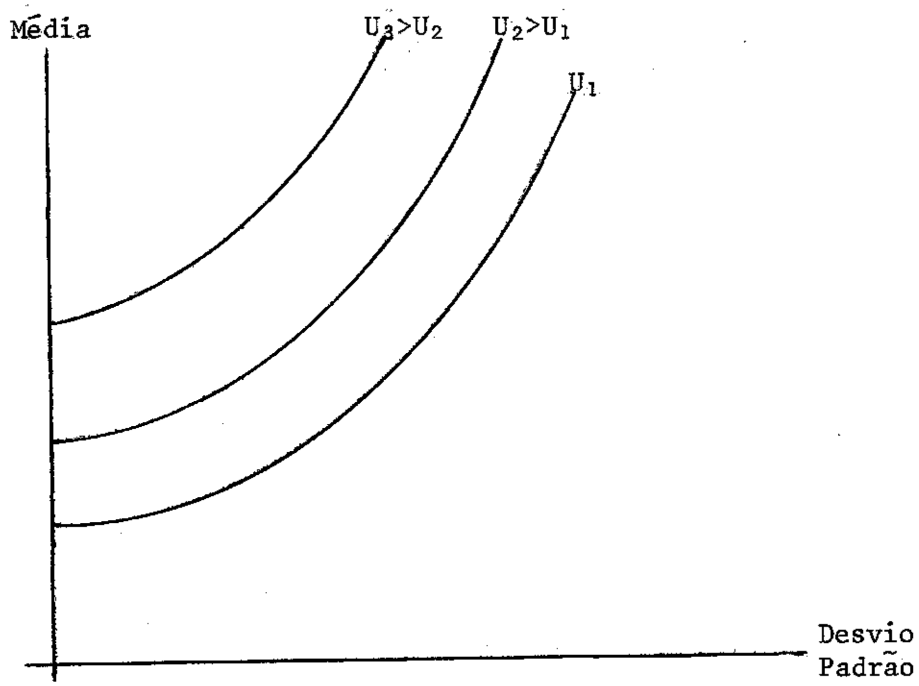

FIGURA 3

UM MAPA DE DIFERENÇA COM AVERSÃO A RISCO

V - AS FRONTEIRAS EFICIENTES DE INVESTIMENTO

Dependendo da consideração da existência de títulos sem risco na economia, duas fronteiras eficientes de investimento podem ser definidas. A primeira seria a fronteira eficiente de investimentos em títulos de risco e seria determinada pelas carteiras de títulos de risco que satisfazem as duas condições de eficiência discutidas na secção anterior. A segunda seria a fronteira eficiente geral determinada pelas carteiras de todos os títulos, inclusive o título sem risco, que satisfazem as duas condições de eficiência.

Seja um ambiente econômico com quatro títulos com risco oferecendo no período uma rentabilidade aleatória de $\tilde{X}_1$, $\tilde{X}_2$, $\tilde{X}_3$ e $\tilde{X}_4$, respectivamente. Sejam as hipérboles lugar geométrico de combinações de X_1 e X_2 e de X_3 e X_4 no espaço médio desvio-padrão as apresentadas na figura 4. Poder-se-ia pensar que a fronteira eficiente de investimentos seria a região ABC da figura, a região das duas hipérboles que satisfaz as condições de eficiência. Isto seria precipitado pois seria preciso considerarmos todas as combinações possíveis dos quatro títulos e, por exemplo, não consideramos as combinações das carteiras C_1 e C_2 de X_1 e X_2 e de X_3 e X_4, respectivamente. O lugar geométrico de combinações de C_1 e C_2 "fecharia" a quina observada no ponto B e o tornaria uma combinação ineficiente de investimento. Isto também nos permite concluir que a fronteira eficiente de investimentos será uma região côncava sem apresentar pontos como B, um ponto de convexidade da curva ABC.

A fronteira eficiente de investimentos com risco será a envoltória superior das hipérboles lugar geométrico de combinações de títulos com risco. A envoltória de hipérboles será necessariamente uma região hiperbólica. Esta região pode ser derivada. Defina

- N = número de títulos com risco no sistema econômico,
- $\tilde{X}_i$ = taxa de retorno aleatória oferecida pelo i-ésimo título com risco,
- C = matriz variância-covariância das taxas de retorno dos títulos, uma matriz $N \times N$ positiva-definida,

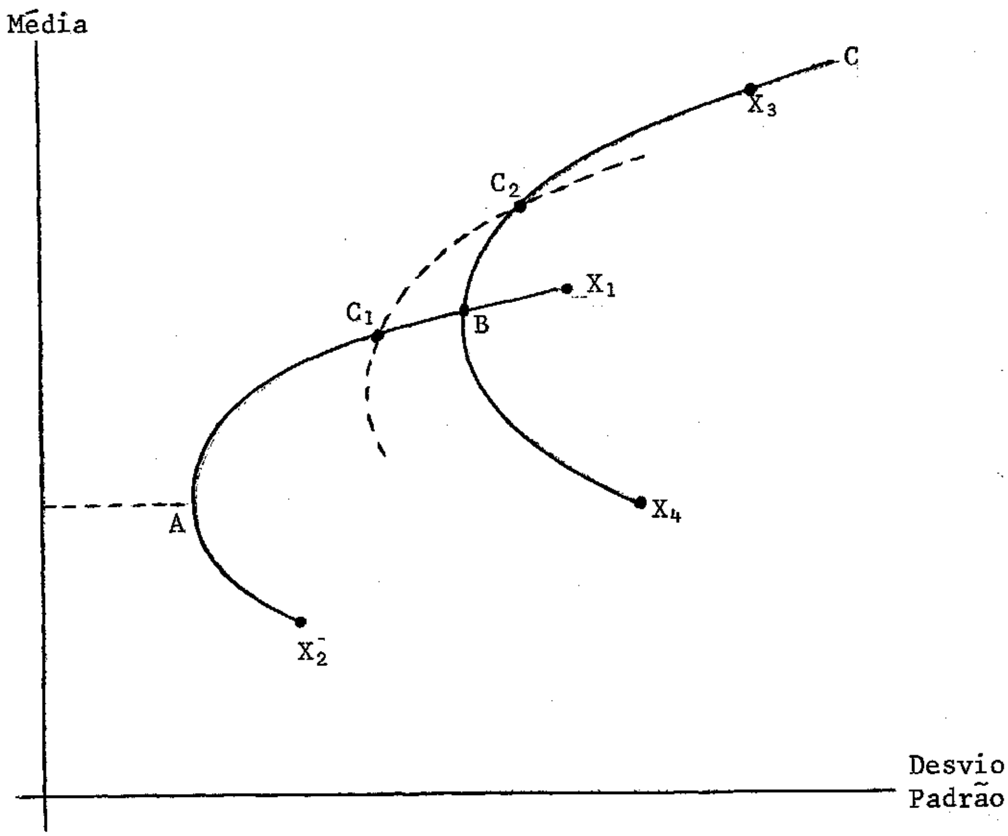

FIGURA 4

PROPRIEDADES DA FRONTEIRA EFICIENTE DE INVESTIMENTOS

COM RISCO

E = vetor de valores esperados de taxas de retorno de títulos ($N \times 1$),

k_i = proporção de riqueza a investir no i-ésimo título,

K = $\{k_i\}$ = vetor de proporções de riquezas investidas nos títulos ($N \times 1$),

V_c = variância da taxa de retorno da carteira total, de investimentos,

E_c = valor esperado da taxa de retorno da carteira total de investimentos,

γ = taxa marginal de substituição de risco por retorno da combinação eficiente procurada,

$[1]$ = vetor $N \times 1$ com todos os componentes igual à unidade.

A combinação eficiente que oferece taxa marginal de substituição γ é a representada pelo ponto C* no espaço média-variância da figura 5. Observe que se traçando-se retas pelas diversas combinações de investimento com inclinação igual a γ, a combinação C* é aquela com o menor valor da intersecção com o eixo horizontal. Isto pode ser claramente observado na figura 5 comparando-se os pontos C_1, C_2 e C*. Para qualquer γ a combinação eficiente de investimentos poderá então ser obtida resolvendo-se o programa.

$$\begin{aligned} &\underset{K}{\text{Min}} \quad V_c - \gamma E_c \\ &\text{sujeito a} \quad K'[1] = 1 \end{aligned} \tag{11}$$

O programa apresenta estrutura quadrática paramétrica sendo γ a variável paramétrica. A restrição apenas faz com que a soma das proporções investidas nos diversos títulos seja igual à unidade evitando-se níveis de investimentos superiores à riqueza do investidor.

A solução do programa (11) é derivada no Anexo I deste trabalho e sua expressão é

$$K = \frac{\gamma}{2} C^{-1} E + \frac{\lambda}{2} C^{-1} [1] \tag{12}$$

onde λ é o preço sombra da restrição $K'[1] = 1$.[5] A relação (12) apesar de pa

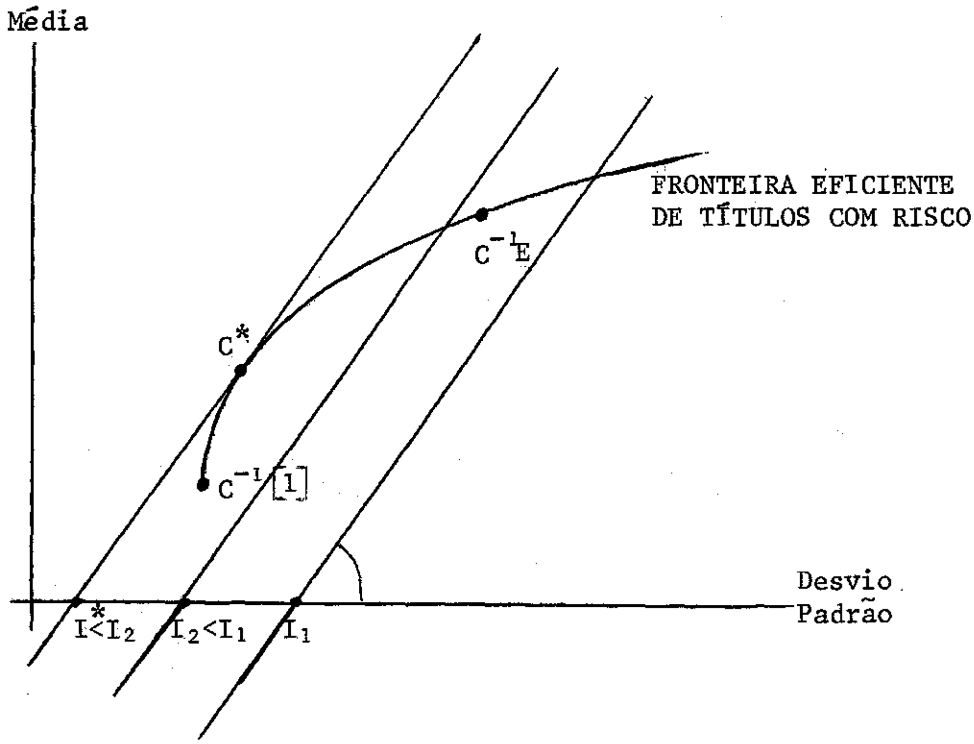

FIGURA 5

A DETERMINAÇAO DA FRONTEIRA EFICIENTE
DE TÍTULOS COM RISCO

recer complicada tem uma interpretação simples, ela implica que a carteira eficiente de investimentos será sempre uma combinação das carteiras $C^{-1}E$ e $C^{-1}[1]$, para todo e qualquer γ . Como pode-se observar na figura 5, variando-se γ de 0 até ∞ obtem-se a fronteira eficiente de investimentos. Sendo a carteira eficiente sempre uma combinação das carteiras $C^{-1}[1]$, a fronteira eficiente de títulos com risco será o segmento superior da hipérbole lugar geométrico de combinações destas carteiras, como apresentado na figura 5.

Resta determinar a fronteira eficiente geral de investimentos considerando a existência de títulos sem risco no ambiente econômico. Como discutido em secção anterior o lugar geométrico de combinações de uma carteira de risco com um título sem risco é uma reta no espaço média-desvio padrão. Considere agora um investidor racional selecionando entre as carteira C_1 e C_2 da figura 6 uma carteira de títulos com risco para combinar com o título sem risco que oferece uma rentabilidade certa r_F. Combinações com C_1 e C_2 situam-se ao longo das retas $r_F\ C_1$ e $r_F\ C_2$, respectivamente. Como a reta $r_F\ C_2$ é mais inclinada e, como definido anteriormente, oferece maior razão recompensa-variabilidade, a carteira C_2 será a selecionada. Ela oferece uma maior rentabilidade esperada por unidade de risco adicionada. Prosseguindo em seu processo de seleção o investidor acabará selecionando a carteira C^* que oferece a máxima razão recompensa-variabilidade para combinar com o título sem risco. A fronteira eficiente geral será então a reta $r_F\ C^*$ da figura 6.

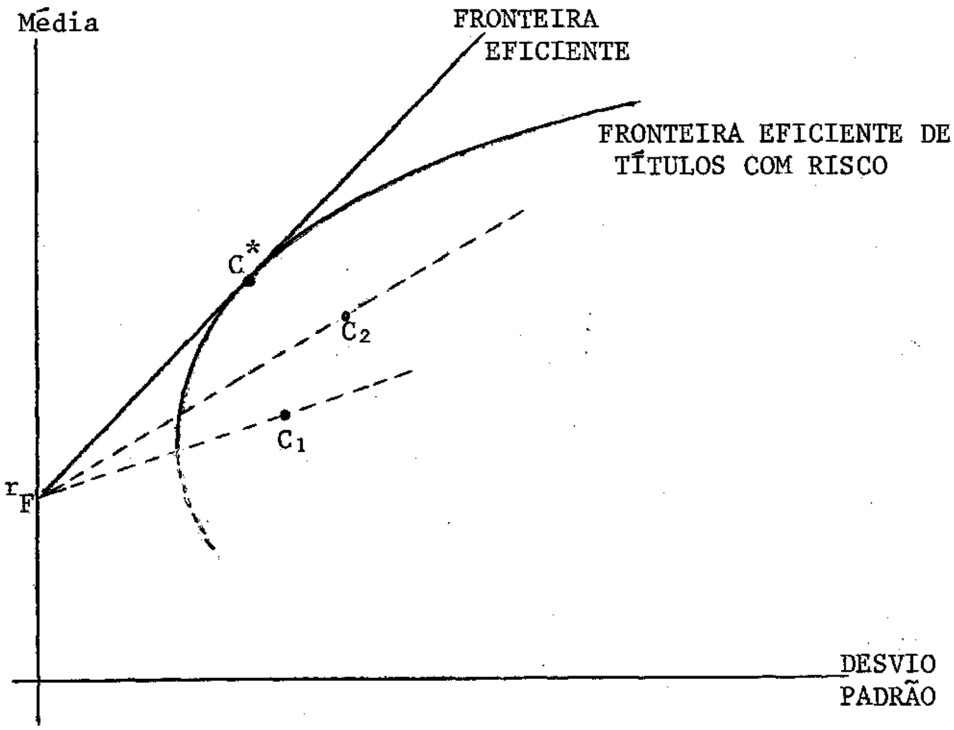

FIGURA 6

AS FRONTEIRAS EFICIENTES DE INVESTIMENTO

VI - EQUILÍBRIO NO MERCADO DE CAPITAIS

O processo de seleção de carteira de investimentos a nível indivi - dual foi examinado na secção anterior. Um investidor com expectativas tais que implicassem na fronteira eficiente de investimentos com risco da figura 6 escolheria uma combinação do título sem risco com a carteira C*. Caso todos os investidores tenham expectativas homogêneas eles selecionarão idênticas carteiras de títulos com risco. Se todos selecionam a mesma carteira de títulos com risco esta carteira tem que ser a carteira de mercado ou seja, a carteira formada por todos os títulos de risco da economia. Nesta carteira cada título participa na proporção de seu valor em relação ao valor total de títulos com risco, por exemplo, se o valor total de Lojas Americanas OP representa 2% do valor de todos os títulos do mercado então o título participa em 2% da carteira de mercado.

Denotando-se a carteira de mercado por M a situação é a apresentada na figura 7. Todos os investidores selecionarão M como sua carteira de risco. Alguns, como o investidor com curva de indiferença U_I, dividirão seus investimentos entre M e o título sem risco. Outros, como o investidor com curva de indiferença U_{II}, tomarão recursos emprestados para investir em M mais do que sua riqueza. Este resultado tem implicações importantes. Considere o título X, o lugar geométrico de combinações do título com a carteira de mercado M tem que ser tangente à fronteira eficiente geral no ponto M. Como derivado no Anexo II isto implica em condições de equilíbrio geral[6]. Definindo-se

$\mathrm{Cov}(\tilde{X},\tilde{M})$ = covariância entre as taxas de retorno X e M,

$\mathrm{Var}(\tilde{M})$ = variância da taxa de retorno do mercado,

E_x, E_M = valores esperado das taxas de retorno de X e M, respectivamente,

r_F = taxa de retorno do título sem risco,

$\overline{EX}_x$ = $E_{\bar{x}} - r_F$ = retorno excessivo esperado para o título X, então preços de títulos com risco devem ser tais que

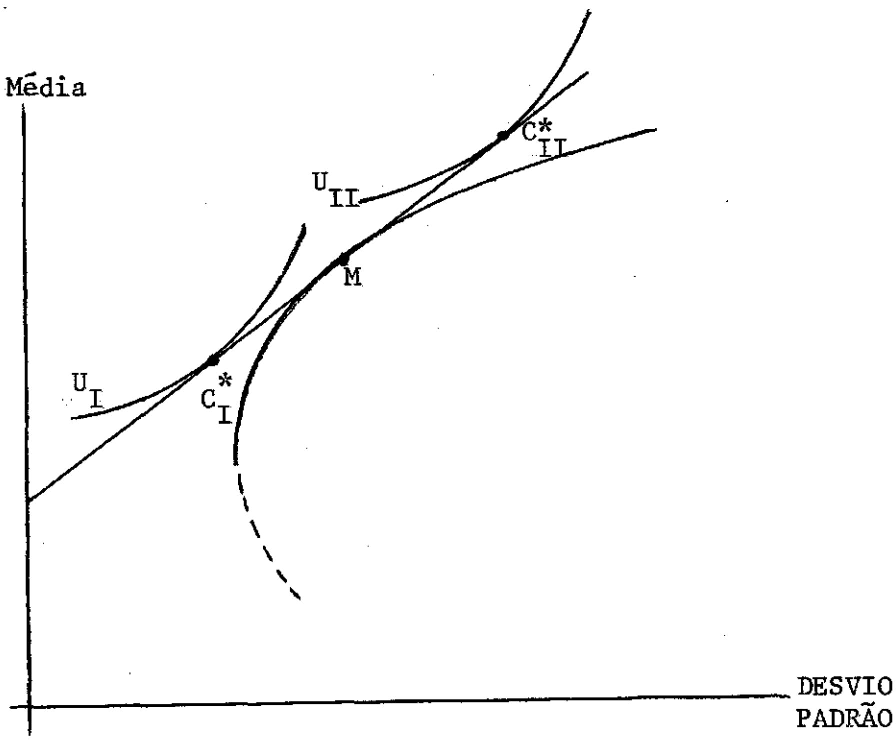

FIGURA 7

A SELEÇÃO DE CARTEIRA ÓTIMA DE INVESTIMENTOS

$$(E_x - r_F) = \frac{\text{Cov}\ (\tilde{X}, \tilde{M})}{\text{Var}(\tilde{M})} (E_M - r_F) \text{ para todo X.} \qquad (13a)$$

Em forma mais compacta, esta relação pode ser expressa por

$$\overline{EX_x} = \beta_{xM}\ \overline{EX_M}\ \text{, para todo X.} \qquad (13b)$$

onde $\beta_{xM} = \text{Cov}(\tilde{X},\tilde{M})/\text{Var}(\tilde{M})$ é o conhecido beta do título X. As relações (13a) e (13b) têm uma interpretação simples. Em equilíbrio o nível relevante de risco de um título é remunerado em termos de retorno excessivo esperado ao "prêço" de risco no mercado. Neste contexto o nível relevante de risco de um título seria o seu beta (β_{xM}) e o preço de risco no mercado seria o retorno excessivo esperado para o mercado ($\overline{EX_M}$). O retorno excessivo esperado em um título X qualquer seria pois determinado por uma relação quantidade x preço como em quaisquer mercados.

VII - O MODELO DE MERCADO E COMPONENTES DE RISCO

Os resultados derivados nas secções anteriores são absolutamente gerais e independem de quaisquer suposições sobre o processo gerador de taxas de retorno. Alguns resultados especiais podem ser obtidos supondo-se que o processo gerador de taxas de retorno siga o chamado "modelo de mercado". Mais explicitamente, este modelo supõe que a taxa de retorno em um determinado título seja determinada por sua associação com o mercado e fatores específicos do título[7], ou seja,

$$\tilde{X} = a_x + b_x \tilde{M} + \tilde{\xi}_X \tag{14}$$

onde $\tilde{\xi}_X$ é um termo residual com características de ruído branco[8] e $Cov(\tilde{\xi}_X, \tilde{M}) = 0$. Segundo o modelo as taxas de retorno do título se localizariam em torno da reta da figura 8 e o desvio da reta seria causado pelos fatores específicos associados ao título representados por $\tilde{\xi}_X$.

Sendo este o processo seguido por taxas de retorno, então

$$Cov(\tilde{X},\tilde{M}) = Cov(a_x,\tilde{M}) + b_x\, Var(\tilde{M}) + Cov(\tilde{\xi}_X,\tilde{M}) = b_x\, Var(\tilde{M})$$

e isto implica que

$$\beta_{xM} = \frac{Cov(\tilde{X},\tilde{M})}{Var(\tilde{M})} = b_x \tag{15}$$

Esta relação permite reduzir a relação (13b) a

$$\overline{EX_x} = b_x\, \overline{EX_M}\ , \text{ para todo X.} \tag{16}$$

As relações (15) e (16) têm implicações significativas. A relação (15) implica que o abstrato conceito de β_{xM} pode ser estimado de forma objetiva, se ajustarmos uma reta através dos pontos determinados pelas rentabilidades passadas do título e do mercado, então o coeficiente angular da reta é uma estimativa do beta do título. Este resultado está tão arraigado entre os participantes do mercado que poucos relembram a origem mais geral de betas que é discutida na secção anterior.

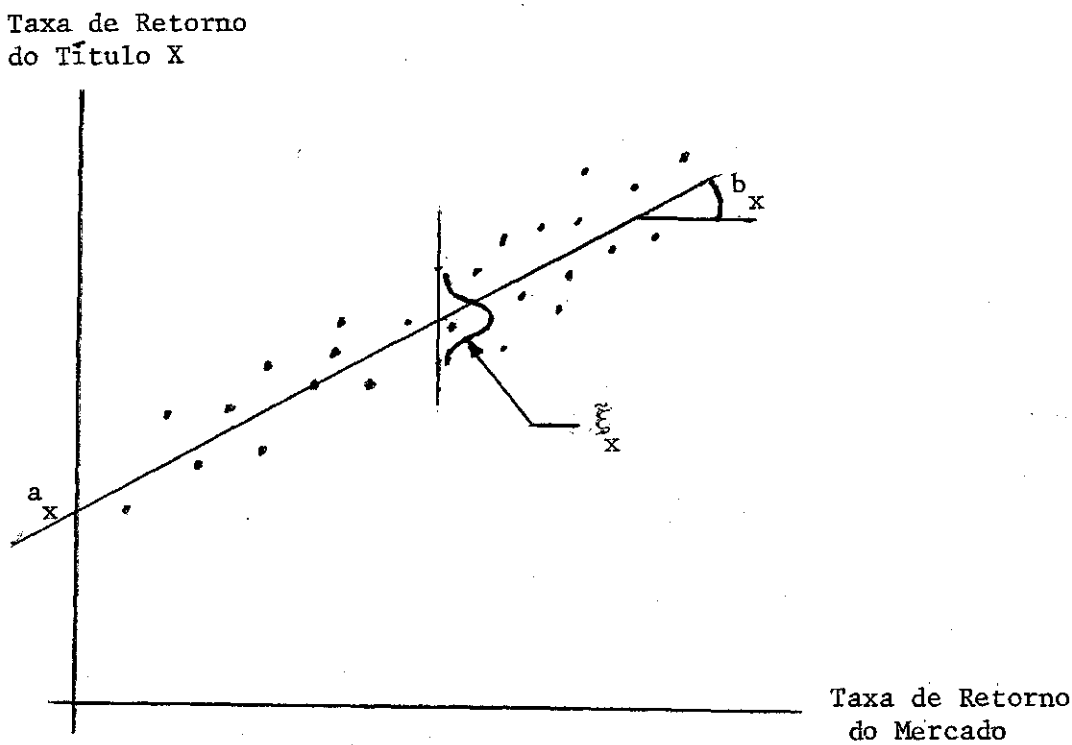

FIGURA 8

O MODELO DE MERCADO

A equação (16) implica que o nível relevante de risco de um título X é função apenas de b_x e de sua associação com o mercado. Em particular, o risco de fatores específicos de um determinado título deve ser irrelevante para a determinação de sua rentabilidade, em equilíbrio. A relação (14) implica em que o risco total do título X é

$$\mathrm{Var}(\tilde{X}) = b_x^{\,2}\ \mathrm{Var}(\tilde{M}) + \mathrm{Var}\ (\tilde{\xi}_X)$$

O componente de risco associado a fatores específicos é $\mathrm{Var}(\tilde{\xi}_X)$ e é chamado de risco diversificável do titulo X. O componente de risco associado a fatores de mercado é $b_x^{\,2}$ Var $(\tilde{M})$ e é chamado de risco não-diversificável do título X. Em equilíbrio, o componente de risco diversificável do título é irrelevante para a formação de preços no mercado de capitais.

smf/.-

VIII - CONCLUSÕES

O efeito diversificação obtido ao combinar-se títulos de risco é significativo. Ainda que os títulos sejam positivamente correlacionados é possível diversificar-se risco. Considerando este potencial de diversificação investidores selecionarão apenas combinações que satisfaçam a dois critérios de eficiência:

(i) oferecem a máxima rentabilidade esperada para seu nível de risco e

(ii) oferecem o mínimo risco para seu nível de rentabilidade.

Estas carteiras compõem a chamada fronteira eficiente de investimentos. Duas fronteiras foram examinadas. Uma é a fronteira eficiente de investimentos de risco que considera apenas títulos de risco e apresenta estrutura hiperbólica. A outra é a fronteira eficiente geral considerando também o título sem risco que apresenta uma estrutura linear.

A interação no mercado de indivíduos racionais que selecionam carteiras eficientes permite derivar que, em equilíbrio, a medida relevante de risco de um título é o seu beta que é proporcional à covariação do título com o mercado. Se o processo gerador de taxas de retorno segue o modelo de mercado então o beta de um título pode ser estimado pela tangente da reta ajustada aos pontos representativos de retornos do título e do mercado. Independentemente do processo gerador de retornos os resultados indicam que o componente relevante para a formação de preços em equilíbrio é o risco não-diversificável dos títulos.

NOTAS DE RODAPÉ

(1) O efeito diversificação em contexto de seleção de carteiras foi originalmente discutido por Markowitz [8] e posteriormente revisto por Brito [4].

(2) A derivação deste resultado e de propriedade do lugar geométrico pode ser encontrada em Merton [9]

(3) Isto é, costumam mostrar função utilidade côncava em riqueza. Para uma discussão de aversão a risco ver Arrow [1].

(4) Os critérios de eficiência fundamentam-se em princípios de dominância estocástica discutidos em Hadar e Russell [6]. Entretanto o primeiro critério é suficiente para gerar a fronteira eficiente enquanto o segundo critério representa apenas uma condição necessária para eficiência.

(5) Este resultado e propriedades adicionais são sucessivamente derivadas por Black [2], Brennan [3] e Brito [5]. O resultado é bastante dependente da suposição de que vendas curtas são permitidas na economia, uma suposição que está implícita no programa (11).

(6) Estas condições foram originalmente derivadas por Sharpe [12], Lintner [7] e Mossin [10].

(7) O modelo de mercado foi originalmente proposto por Sharpe [11] e está implícito em toda a discussão de Sharpe e Brito [14].

(8) Isto é, ξ_x é um componente com média nula e sem autocorrelação serial.

BIBLIOGRAFIA

[1] ARROW,K. - "The Theory of Risk Aversion", in _Essays in the Theory of Risk Bearing_, edited by K.Arrow, Markham Publishers, 1971

[2] BLACK,F. - "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing and Lending", _The Journal of Business_, July 1972.

[3] BRENNAN,M. -"Capital Market Equilibrium with Divergent Borrowing and Lending Rates, _Journal of Financial and Quantitative Analysis_, December, 1971.

[4] BRITO,N. - "Títulos Ocupacionais, Fronteiras Eficientes e Equilíbrio no Mercado de Capitais, _Revista Brasileira de Mercados de Capitais_, Abril 1976.

[5] BRITO,N. - "Capital Market Equilibrium with Marketability Restrictions," _The Journal of Finance_, September, 1977.

[6] HADAR,J. e RUSSELL,R. - "Rules for Ordering Uncertain Prospects", _The American Economic Review_, March 1969.

[7] LITNER,J. - "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", Review of _Economics and Statistics_, February 1965.

[8] MARKOWITZ,H. - "Portfolio Selection", _The Journal of Finance, March,_ 1972.

[9] MERTON,R. - "An Analytical Derivation of the Efficient Portfolio Frontier", _Journal of Financial and Quantitative Analysis_, September 1972.

[10] MOSSIN,J. - "Equilibrium in a Capital Asset Market", _Econometrica_ , October 1966.

[11] SHARPE,W. - "A Linear Programming Algorithm for Mutual Fund Portofolio Selection", _Management Science_, March 1967.

[12] SHARPE,W. - "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", The Journal of Finance, September 1964

[13] SHARPE,W. - Portfolio Theory and Capital Markets, McGraw-Hill, 1970.

[14] SHARPE,W. e BRITO,N. - "Mercados de Capitais Eficientes. Preços em Equilíbrio Sob Condições de Risco", Revista Brasileira de Mercado de Capitais, Agosto 1975.

ANEXO 1

A SOLUÇÃO DO PROGRAMA DE EFICIÊNCIA

O programa determinado pelas relações (11) é

$$\underset{K}{\text{Min}} \quad V_c - \gamma E_c$$

$$\text{sujeito a} \quad K' [1] = 1$$

Observando que $V_c = K'CK$ e $E_c = K'E$ e denotando-se o preço sombra da restrição por λ pode-se formar o lagrangeano do programa

$$L = K'CK - \lambda K'E + \lambda (1 - K'[1])$$

e as condições de otimização serão

$$\frac{\partial L}{\partial K} = 2ck - \lambda [1] = 0 \qquad \text{(A.1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - K'[1] \qquad \text{(A.2)}$$

A segunda condição devolve a restrição e expandindo-se a primeira relação obtem-se a solução do programa:

$$K = \frac{\gamma}{2} C + \frac{\gamma}{2} C^{-1} [1] \qquad \text{(A.3)}$$

A carteira solução é pois uma combinação de duas carteiras de investimentos, a carteira $C^{-1}E$ e a carteira $C^{-1} [1]$. Estas carteiras possuem propriedades especiais que são discutidas por Brennan [3] e Brito [5]. Em particular a carteira $C^{-1}[1]$ é a que oferece o mínimo risco, como indicado na figura 5.

ANEXO II

EQUILÍBRIO NO MERCADO DE CAPITAIS

Como observado na secção VI, em equilíbrio, para qualquer título X, a tangente ao lugar geométrico de combinações de X com a carteira de mercado M no ponto M deve ser igual a inclinação da reta $r_F M$, lugar geométrico de combinações de M com o título sem risco. Isto acontece porque M é a carteira que oferece a máxima razão recompensa-variabilidade e se existisse uma combinação viável de títulos com risco acima da reta $r_F M$ então M não seria a carteira com a máxima razão. Isto é evidente considerando-se a figura 7 e implica no resultado anteriormente mencionado.

A tangente da reta $r_F M$ da figura 7 é $(E_M - r_F)/\sigma_M$ e, fazendo-se $\tilde{X}_2 = \tilde{X}$, $\tilde{X}_1 = \tilde{M}$ e k= 0 obtem-se através da relação (7) da secção II que a tangente ao lugar geométrico em M será

$$\left.\frac{\partial E_k}{\partial \sigma_k}\right|_{k=0} = \frac{(E_X - E_M)\sigma_M}{Cov(\tilde{X},\tilde{M}) - Var(\tilde{M})} . \tag{A.4}$$

Igualando-se esta expressão à expressão tangente da reta $r_F M$ obtem-se a condição de equilíbrio (13a) da secção VI,

$$E_x - r_F = \frac{Cov(\tilde{X},\tilde{M})}{Var(\tilde{M})} (E_M - r_F) \tag{A.5}$$

que pode ser expressa na forma compacta da relação (13b) utilizando-se as definições da secção VI:

$$\overline{EX_x} = \beta_{xM}\ \overline{EX_M} . \tag{A.6}$$