LÉA SANTOS
DE BUSTAMANTE

TRANSFORMAÇÕES PROJETIVAS

Sistemas Projetivos

1981

LÉA SANTOS DE BUSTAMANTE

Docente Livre e Doutor em Ciências Aplicadas pela UFRJ. Curso de Pintura pela Escola de Belas Artes CLA/UFRJ. Licenciada em Desenho pela Faculdade de Educação CFCH/UFRJ. Professor Adjunto no Departamento de Técnicas de Representação da EBA.

TRANSFORMAÇÕES PROJETIVAS

Sistemas Projetivos

Tese apresentada à DOUTA CONGREGAÇÃO da Escola de Belas Artes do CLA/UFRJ, para provimento do cargo de Professor Titular da UFRJ, no Departamento de Técnicas de Representação, Setor I – GEOMETRIA DESCRITIVA.

4170 / 30-05-2016

Composto e impresso pela Gráfica Editora Bahiense, Praça Ana Amélia, 9 - 7º. Rio de Janeiro.

À memória de dois grandes amigos

Dr. FELIPE DOS SANTOS REIS

Professsor Emérito da UERJ,

pelo estímulo e incentivo recebido, quando nos decidimos escrever o presente trabalho;

e

MARIA IZABEL DO REGO BARROS P. DE OLIVEIRA

Professora da UFRJ,

pela nossa admiração no constante e incansável esforço em busca de aperfeiçoamento, demonstrado em seu excelente trabalho "A Geometria Descritiva nas Artes".

NOSSA HOMENAGEM E SAUDADE

PREFÁCIO

A Reforma Universitária,[1] implantada no Rio de Janeiro por iniciativa pioneira da PUC/RJ (Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro) e logo acompanhada por outras universidades locais, teve reflexos profundos na didática do ensino universitário deste Estado.

Por outro lado, o ingresso nessas universidades, sofreu também alteração de critério, no sentido de se obter maior uniformidade quanto à forma de seleção da "massa humana" que aspirava nelas ingressar. Assim, do critério de exame vestibular, feito por iniciativa de cada universidade isoladamente, passou-se ao "vestibular unificado", sob a responsabilidade da "FUNDAÇÃO CESGRANRIO", entidade criada com o propósito de promover essa seleção. Entretanto, pela convicção firmada de que uma das "finalidades do ensino de 2º grau" é conduzir o estudante ao 3º grau (universitário), as questões propostas sob a responsabilidade do CESGRANRIO (forma exclusiva de múltipla escolha) têm tido mais a preocupação de verificar o conhecimento do candidato nas disciplinas obrigatórias do 2º grau. Assim, as não obrigatórias e aquelas que não merecem especial atenção dos estabelecimentos de ensino médio, não oferecendo conteúdo programático que propicie questões de múltipla escolha, tem sido relegadas ao **quase total abandono** quanto à responsabilidade "ensino/aprendizagem" em nível de 2º grau.

– O que está ocorrendo, então, no ensino universitário?

– De um lado, o candidato ingressando na universidade despreparado em áreas básicas; de outro, a própria universidade reduzindo a carga horária nessas áreas, pela necessidade de propiciar disponibilidade de tempo para o ensino de disciplinas recem criadas, integrantes de seus novos currículos.

O professor das disciplinas de áreas básicas tem que ensinar para aqueles que ingressam despreparados e dispondo de uma carga horária semanal que corresponde, via de regra, à quarta parte daquela que dispunha antes da Reforma (quando seus alunos traziam conhecimentos das disciplinas que serviam de fundamento, uma vez que tais conhecimentos eram pedidos nos exames vestibulares).

– Como conseguir resultados favoráveis ao ensino/aprendizagem diante de tais problemas?

---

(1) Lei nº 5.540 de 28/11/68, publicada no D.O. de 29/11/68, retificada no de 3/12/68 e Decreto-Lei nº 464 de 11/2/69, publicado no D.O. de 12/2/69.

– Pensamos poder chegar a esses resultados reformulando totalmente a didática de ensino/aprendizagem de tais disciplinas, no sentido de possibilitar a mais **ampla e geral fundamentação lógica de conceitos básicos** que permitam ao aluno tirar conclusões, fazer adaptações, daí resultando fácil, plena e rápida aplicação dessas disciplinas onde elas se evidenciarem necessárias.

Sentindo o problema, procuramos reformular nosso ensino de Geometria Descritiva, para que ele possa ser entendido por aqueles que nunca haviam tido o menor conhecimento dessa disciplina. Empreendemos essa experiência e o que propomos decorre de vários anos de pesquisa e constante preocupação de aperfeiçoamento dessa orientação.

Adotamos como fundamentação lógica as idéias básicas e gerais da "Geometria Projetiva" (Capítulo I de nossa tese). Estruturamos nosso trabalho nas "Operações fundamentais" e "Propriedades projetivas", porque estamos na firme convicção de que os "Sistemas Projetivos" que têm maior aplicação para os profissionais das áreas de Engenharia, Arquitetura, Belas Artes e, de modo geral, para todo aquele que trabalha com projetos, representam simples aplicação daquelas "operações fundamentais e suas propriedades". Daí, nossa preocupação quanto às particularizações focalizadas (Capítulo II) objetivando aplicações aos Sistemas Projetivos de maior utilização e que constituem exemplos de emprego do raciocínio geral das referidas operações projetivas e propriedades.

Em resumo, com o presente trabalho, sugerimos o estudo dos Sistemas Projetivos de forma sintética, alicerçado numa "lógica sequencial do pensamento conclusivo".

Rio de Janeiro, 27 de agosto de 1981

Léa Santos de Bustamante

SÍNTESE DA TESE

A representação projetiva de qualquer figura é função das operações "projetar" e "cortar".

Os sistemas projetivos monopolares ou multipolares, utilizados nas áreas das Ciências, Arte e Tecnologia, resultam da aplicação do raciocínio dessas operações projetivas e suas propriedades.

As transformações projetivas nos sistemas monopolares podem ser distribuídas em grupos de hipóteses, compreendendo três teoremas que orientam o emprego de raciocínio geral e básico para concluir o processamento dessas transformações.

SÍMBOLOS

SINAL	SIGNIFICADO	CONDIÇÃO
$\simeq$	Igual ou semelhante	Ângulos iguais e segmentos proporcionais.
$/\!/$	Paralelo/a	Conter um/a e somente um/a ponto ou reta impróprio/a.
anti//	Paralelo/a ao simétrico/a.	Admitir centro, eixo ou plano de simetria.
$\perp$	Perpendicular ou ortogonal	Formar ângulo reto.
$\underline{/}$	Oblíquo/a	Não formar ângulo reto, nem ângulo nulo.
Δ	Triângulo	Qualquer espécie.
$\longrightarrow$	Em seguida	Posição ordenada, obedecendo a um sentido.
$\overset{\infty}{\longleftrightarrow}$	Direção do ente impróprio (no infinito)	Não importa o sentido. Colocado sempre junto à letra que designa o ente.
$\measuredangle$	Ângulo	Qualquer grandeza.
$\in$	Pertence	O menor posicionado contido no maior.
$\notin$	Não pertence	O menor posicionado não contido no maior.
$\supset$	Contém	O maior dimensionado contendo o menor.

SINAL	SIGNIFICADO	CONDIÇÃO
$\not\supset$	Não contem	O maior dimensionado não contendo o menor.
$\equiv$	Idêntico, coincidente ou equivalente.	Elementos iguais, coincidentes ou equivalentes. Estão no mesmo lugar por superposição.
$\not\equiv$	Não idênticos, distintos.	Elementos distintos, não coincidentes ou não equivalentes.
—	Segmento	Quando colocado sobre as letras que denominam suas extremidades
$\forall$	Qualquer	Não importa a posição do ente, porque qualquer que ela seja, satisfaz.
$\cap$	Interseção.	Pertence, simultaneamente, a duas figuras.
$\nwarrow\underline{\ p\ }\nearrow$	Corresponde por projeção.	Decorrente ou obtida em função da "operação projetar".
$\nwarrow\underline{\ s\ }\nearrow$	Corresponde por seção	Decorrente ou obtida em função da "operação cortar".
$\Longleftrightarrow$	equivale a	Dupla interferência.
f0	Figura de origem, dada ou original.	Ser submetida à "operação projetar".
f1	Figura resultante da "operação projetar"	Ser constituída somente de retas ou planos projetantes (resultar da operação projetar f0).
f2	Figura "projeção" de f0.	Lugar de traços ou interseções de projetantes com plano de projeção (resultar da seção de f1 pelo plano π).

SINAL	SIGNIFICADO	CONDIÇÃO
$\ell 0$	Contorno de f0	Figura envoltória de f0.
$\ell 1$	Contorno de f1	Figura envoltória de f1.
$\ell 2$	Contorno de f2	Figura envoltória de f2.
α, β	Plano no espaço	Servir ou não de jazida ou suporte a pontos, retas e figuras planas.
π	Plano de projeção	Cortar projetante, determinando f2.
(A), (r)	Ponto e reta do espaço (fig. de origem)	Pertencem à figura f0 ou constituem f0.
A, r	Ponto e reta projeção de (A) e (r)	Pertencem à f2 ou constituem f2 (contida no plano π).

PROPÓSITOS GERAIS

1 – Síntese do raciocínio conclusivo (economia do pensamento).

2 – Globalização de conhecimentos pela possibilidade de aplicação do raciocínio lógico:

- concluindo e desenvolvendo detalhes dos sistemas projetivos estudados.
- criando sistema de representação projetiva mais adequado à resolução do problema que demanda solução.
- capacitando à leitura de qualquer representação de figura que aplique o raciocínio projetivo (resultante das operações projetivas).

PROPÓSITOS ESPECÍFICOS

Capítulo I – Estudo analítico da figura:

Conceitos, classificações.

Correlação entre figura e contorno.

Análise:

Operações projetivas e propriedades.

Capítulo II – Particularização e conclusões:

Teoremas básicos relativos à projeção da figura.

Teoremas relativos ao contorno da figura.

Capítulo III – Apreciação sucinta e conclusiva de/a:

Raciocínio básico que preside a todos os Sistemas Projetivos que operam apenas com um centro projetivo próprio ou impróprio.

Relação entre uma figura e sua representação projetiva.

Possibilidades de generalização da aplicação dos teoremas relativos à figura que admite jazida reta ou plano.

CAPÍTULO I – ENTIDADES GEOMÉTRICAS – OPERAÇÕES PROJETIVAS

11 – ESPAÇO GEOMÉTRICO E SUAS ENTIDADES

110 – Conjunto Universo da Geometria.
111 – Ente ou elemento fundamental.
1111 – Peculiaridades
1112 – Ente real e imaginário: determinação e representação.
1113 – Ente real impróprio: determinação e representação.
112 – Figura.
1121 – Conceito.
1122 – – Geração.
11221 – A geratriz.
11222 – A lei de geração, elementos diretriciais.
11223 – A origem, instituição da figura "f0".
1123 – Classificação.
1124 – Noção de "contorno", "fronteira" ou "limite": instituição da figura "ℓ".
1125 – Influência do número de dimensões das figuras "f0" ou "ℓ" na relação entre elas.
1126 – Importância da figura "ℓ" na classificação de "f0", quanto a ser "aberta" ou "fechada" (itens 11232, 1124, 1125).
1127 – Formas geométricas fundamentais.
11271 – Geração.
11272 – Lugar comum aos entes de uma forma: jazida, eixo, centro.
11273 – Classificação.
1128 – Linha e superfície: curva e superfície curva em particular. Aplicações dos itens 1121 a 1126.
11281 – Geração: critério, geratriz, lei de geração.
11282 – Estudo comparativo considerando propriedades.
11283 – Estudo comparativo considerando elementos.
11284 – Estudo comparativo entre curva e superfície geométricas, considerando a classificação.

CAPÍTULO I
ENTIDADES GEOMÉTRICAS
OPERAÇÕES PROJETIVAS

11 – ESPAÇO GEOMÉTRICO E SUAS ENTIDADES

110 – Conjunto Universo da Geometria:

Pela expressão ESPAÇO, denominamos o "Conjunto Universo da Geometria". (1)

No referido "conjunto" citamos, a título de exemplo, ponto, linha, superfície, corpo (sólido), enfim, todas **entidades** que podemos supor existirem no referido espaço.

Destacaremos, como mais elementares, os denominados:

111 – Entes ou Elementos fundamentais:

Admitiremos os seguintes: ponto, reta, plano.

Nenhum deles é passível de definição. Cada um tem existência por si próprio, capaz de "gerar" e "não de ser gerado".

1111 – Peculiaridades:

Podemos compreender a existência de cada um pela aplicação do seguinte raciocínio:

PONTO – não tem dimensão, é zero dimensional, não admite extensão. (2)
RETA – é uni-dimensional, admite somente uma extensão. (2)
PLANO – é bi-dimensional, admite somente duas extensões. (2)

---

(1) Consultar "Biblioteca de Matemática Moderna", Tomo I, pág. 230, Edição LISA, 1968, Antônio Marmo de Oliveira e Agostinho Silva.

(2) EXTENSÃO do latim "extensione" significa que deve ter **dimensão** ou **tamanho**, que pode conter: comprimento, largura, altura, profundidade, espessura. O referencial, por sua natureza e posição no espaço, é que indicará qual dessas expressões deve ser adotada.

Justo Pascali [1] adota a designação "E_0" ⇔ "Espaço de zero dimensão" para entes como os acima referidos, aos quais denomina "entes elementares". Admite, além do ponto, reta e plano, a elipse e outros. Supomos que a expressão "zero dimensão" tenha sido utilizada para exprimir "existência autônoma", independente de qualquer idéia de localização no espaço. Daí os postulados que propõe, de nºs I a VII em sua obra.

1112 – **Entes real e imaginário: determinação e representação.**

Não distinguiremos um ente fundamental "real próprio" (∈ ao chamado "Espaço Euclidiano") de um "real impróprio" (admitido no "Espaço Arguesiano"). Consideramos que os entes reais, próprios ou impróprios, pertencem ao:

ESPAÇO PROJETIVO ⇔ ESPAÇO ARGUESIANO ⇔ CONJUNTO UNIVERSO DA GEOMETRIA.

Do mesmo modo, admitiremos nesse espaço, os "entes imaginários", assim denominados porque não têm existência real (não podem ser concebidos como realmente existentes), são admitidos apenas por imaginação. Assim:

Ente $\left|\begin{matrix}\text{real}\\ \text{imaginário}\end{matrix}\right|$ é aquele cuja existência é sempre $\left|\begin{matrix}\text{possível}\\ \text{impossível}\end{matrix}\right|$ no "campo real".

Algebricamente, a representação de um ente $\left|\begin{matrix}\text{real}\\ \text{imaginário}\end{matrix}\right|$ está na dependência de uma equação $\left|\begin{matrix}\text{real}\\ \text{imaginária}\end{matrix}\right|$.

Geométricamente, a representação de um ente $\left|\begin{matrix}\text{real}\\ \text{imaginário}\end{matrix}\right|$ está na dependência da construção gráfica de outros entes que substituem sua imagem.

Um ENTE IMAGINÁRIO não pode ser DETERMINADO porque isso equivaleria a fornecer, gráfica ou algebricamente, elementos que possibilitassem seu perfeito conhecimento. Entretanto, propomos que possa ser REPRESENTADO, uma vez que isso equivale a substituir o ente imaginário por uma "imagem simbólica[2]", que "convencionalmente" facilite sua imaginação.

---

(1) Consultar "Geometria Proyectiva", pág. 22 e segts., Ed. Buenos Aires, Centro de Estudantes de Ingeniaria de B. Aires, 1955, 2ª Edicion.

(2) De "símbolo" que, por sua forma ou natureza, evoca, representa ou substitue, num determinado contexto, algo abstrato ou ausente (Novo Dicionário Aurélio), 1ª Edição, 2ª Impressão. Editora Nova Fronteira).

Para maior esclarecimento, citamos os seguintes exemplos:

1 – "Um plano e uma reta $\notin$ plano, **determinam** um ponto."

2 – "Duas retas reais e distintas **representam** um $\left|\begin{matrix}\text{ponto}\\ \text{plano}\end{matrix}\right|$, **determinado** quando as retas são coplanares".

3 – "Duas retas reais e distintas **representam** um ponto $\left|\begin{matrix}\text{real}\\ \text{imaginário}\end{matrix}\right|$ se são $\left|\begin{matrix}\text{coplanares}\\ \text{não coplanares}\end{matrix}\right|$."

4 – "Duas retas reais e distintas **representam** um plano $\left|\begin{matrix}\text{real}\\ \text{imaginário}\end{matrix}\right|$ se são $\left|\begin{matrix}\text{coplanares}\\ \text{não coplanares}\end{matrix}\right|$."

Sempre que nos referirmos a um ente imaginário, empregaremos a palavra "imaginário" após a expressão que o designa, não a empregando, admitiremos que esse ente seja real.

1113 – **Ente real impróprio – Determinação – Representação –**

Suponhamos a/o $\left|\begin{matrix}\text{reta (r), fig. 1}\\ \text{plano } \pi\text{, fig. 2}\end{matrix}\right|$ e um/a $\left|\begin{matrix}\text{ponto (P)}\\ \text{reta (p)}\end{matrix}\right| \notin \left|\begin{matrix}\text{(r)}\\ \pi\end{matrix}\right|$.

Pelo/a $\left|\begin{matrix}\text{ponto (P)}\\ \text{reta (p)}\end{matrix}\right|$ façamos passar $\left|\begin{matrix}\text{retas (a)} \in \text{plano (P) (r)}\\ \text{planos } \varsigma\end{matrix}\right|$.

As/os $\left|\begin{matrix}\text{retas (a)}\\ \text{planos } \varsigma\end{matrix}\right|$ cortam $\left|\begin{matrix}\text{(r)}\\ \pi\end{matrix}\right|$ nos/as $\left|\begin{matrix}\text{pontos (A)}\\ \text{retas (s)}\end{matrix}\right|$.

Os ângulos de $\left|\begin{matrix}\text{vértice (A)}\\ \text{aresta (s)}\end{matrix}\right|$ tendem a diminuir sua grandeza, enquanto aumenta a distância entre $\left|\begin{matrix}\text{(P)}\\ \text{(p)}\end{matrix}\right|$ e $\left|\begin{matrix}\text{(A)}\\ \text{(s)}\end{matrix}\right|$.. Quando a grandeza do ângulo em $\left|\begin{matrix}\text{(A)}\\ \text{(s)}\end{matrix}\right|$ for infinitamente pequena, será infinitamente grande a distância de $\left|\begin{matrix}\text{(P)}\\ \text{(p)}\end{matrix}\right|$ a $\left|\begin{matrix}\text{(A)}\\ \text{(s)}\end{matrix}\right|$. Nessa hipótese, o/a $\left|\begin{matrix}\text{ponto (A)}\\ \text{reta (s)}\end{matrix}\right|$ é denominado/a $\left|\begin{matrix}\text{ponto}\\ \text{reta}\end{matrix}\right|$ impróprio/a, significando $\in$ espaço infinito (campo do chamado "Espaço Projetivo", referido na pág. 20).

A representação convencional desse/a $\left|\begin{matrix}\text{ponto}\\ \text{reta}\end{matrix}\right|$ é $\left|\begin{matrix}(A_\infty)\\ (s_\infty)\end{matrix}\right|$, corresponde a direção $\left|\begin{matrix}\text{(a) // (r)}\\ \varsigma \text{ // } \pi\end{matrix}\right|$.

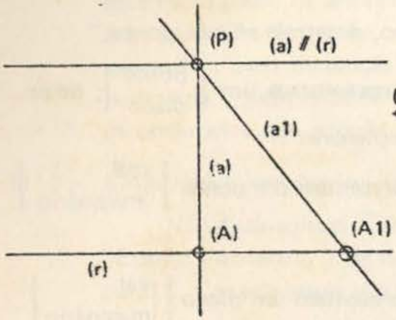


Fig. 1

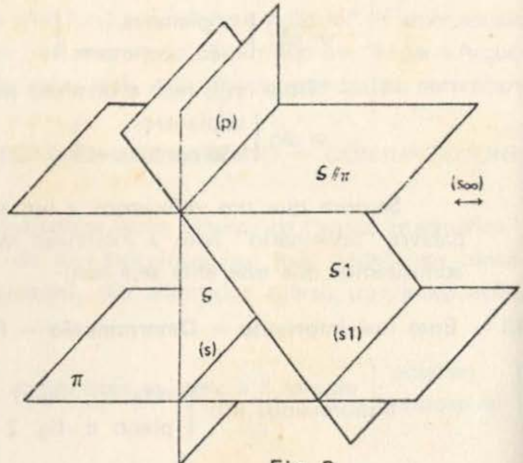


Fig. 2

Por oportuno, transcrevemos da tese "Projeções da Esfera", de nossa autoria, págs. 52 e 53 o seguinte:

"Quanto aos elementos impróprios, tem-se a seguinte noção:

$$\text{— } \textit{Direção de} \left| \begin{matrix} \textit{reta} \\ \textit{plano} \end{matrix} \right| \textit{ corresponde a } \left| \begin{matrix} \textit{ponto impróprio} \\ \textit{reta imprópria} \end{matrix} \right| \textit{ ou } \left| \begin{matrix} \textit{ponto} \\ \textit{reta} \end{matrix} \right|$$

do infinito.

O conjunto de todas as direções, quer de retas ou de planos, é o plano impróprio ou absoluto. Em outras palavras, plano absoluto, é o lugar geométrico de todos os pontos impróprios e de todas as retas impróprias de um espaço".

Do mesmo modo que podemos considerar a reta como círculo de raio infinitamente grande, consideramos o plano como uma esfera de raio infinitamente grande. Daí, podemos concluir que: "Plano absoluto é uma esfera de raio infinitamente grande que admite, todas as retas reais do espaço, como cordas. Todos os pontos impróprios são pertinentes a ela".

112 – Figura

1121 – Conceito:

A palavra tem sentido amplo, quando aplicada a qualquer atividade de natureza artística, científica, técnica, industrial e outras. Pode exprimir "estrutura e configuração geral do corpo", "forma exterior de um corpo", "desenho", "ilustração", "imagem", símbolo", etc...

Em Geometria, entendemos que o vocábulo FIGURA tanto se aplica a um ENTE (item 111, págs. 19 e segts.), como a um "conjunto qualquer de pontos, linhas ou superfícies, associados entre si por determinadas condições". Portanto, pode exprimir uma forma resultante do "grupamento", "campo" ou "sistema" de ENTIDADES. [1] Com esse sentido, figura é um "sub-conjunto" ou "grupo" do espaço.

1122 – Geração:

Existem vários critérios para estudar a geração de uma figura. Via de regra, são correlatos ao emprego dado a essa figura. A resolução de um problema pode depender desse critério. Assim, analisemos:

11221 – A Geratriz

Pode ser figuras quaisquer, desde as mais elementares e, por isso mesmo, mais utilizadas, como ponto, linha (reta em particular), até as figuras bi, tri ou poli-dimensionais.

Sua característica principal é o MOVIMENTO, sem o qual não existe geração. Mas pode ocorrer que, durante esse movimento, a geratriz sofra alteração de forma e grandeza.

11222 – A Lei de geração, elementos diretricionais:

Estabelece condições do "movimento da geratriz e suas possíveis alterações", disciplinando movimento e transformação, sem deixar nada indeterminado. Para conseguir isso, introduz os chamados "elementos diretriciais", aos quais vincula o movimento e condições de alteração da geratriz.

---

(1) Consideramos FIGURA com sentido mais amplo que o atribuído a palavra ENTIDADE. Uma "figura pode representar, simbolizar, ou determinar uma entidade", mas não aceitamos a interpretação recíproca.

Exemplos:

1) "Uma reta (geratriz) se desloca no espaço, conservando-se apoiada em um círculo fixo (diretriz) e em um ponto fixo (diretriz) $\notin$ plano do círculo, gera uma superfície cônica geral do 2º grau".

2) "Uma cônica (geratriz), cujo eixo de simetria descreve um plano, gera uma quádrica. No seu movimento, a cônica pode variar segundo formas homotéticas, de modo a se apoiar constantemente em outra cônica".[1] Nesse 2º exemplo, o "plano" e a "segunda cônica" são "elementos diretriciais" (fixos).

Os elementos diretriciais, via de regra, são fixos quando servem de apoio. Porém, podem ser introduzidos com o objetivo de servir de referencial para determinar a posição da geratriz. É o caso do plano e do cone diretor.

Algebricamente, a "Lei de geração" se representa por uma equação.

11223 – A origem, instituição da figura "f0":

Duas hipóteses poderão ser formuladas para uma "figura original" que denominaremos "f0",

112231 – Não existe geração:

A figura "f0" é denominada "elemento" ou "ente", não se admite a possibilidade de ser gerada, embora possa gerar (item 111).

112232 – Existe geração nas seguintes condições:

1122321 – Sem "Lei de geração".

– f0 é constituída por um sistema de vários entes ou outras figuras, associadas entre si por determinadas condições (item 1121).

Exemplos:

1) figuras relacionadas à resolução de problemas geométricos;
2) figuras gráficas.

1122322 – Com "Lei de geração".

– A geratriz (item 11221) se desloca no espaço obedecendo as condições impostas pela "Lei de geração" (item 11222), podendo ou não mudar de forma e grandeza. Nessa hipótese, "f0" é figura geométrica.

---

(1) Bustamante, L.S.: "Projeções da Esfera" ...., pág. 18.

1123 – **Classificação:**

Qualquer trabalho de natureza classificatória adota "critério" decorrente das "características" que se apresentam comuns ao conjunto de figuras a serem classificadas.

Formulamos os seguintes exemplos, considerando a possibilidade de aplicação a qualquer figura:

	CRITÉRIO	CARACTERÍSTICA	DENOMINAÇÃO
11231 –	Número de dimensões.	Zero-dimensional. Uni-dimensional. Bi-dimensional. Tri-dimensional. Poli-dimensional.	Ponto. Linha. Superfície. Figura tri-dimensional. Hiper-figura.[1]
11232 –	Conter ou não entes impróprios.	Não possue entes impróprios. Possue um ou mais entes impróprios.	Figura fechada[2] Figura aberta[2]
11233 –	Figura geratriz estar ou não submetida à "Lei de Geração".	Admite "Lei de geração" (representada algebricamente por uma equação). Não admite "Lei de geração".	Figura geométrica. Figura gráfica.
11234 –	Admitir ou não plano de simetria.	Pode ser cortada em partes simétricas. Não pode ser cortada em partes simétricas.	Figura simétrica. Figura assimétrica.
11235 –	Não admitir ou admitir geração.	Não pode ser gerada por outra figura (somente gera). Pode ser gerada por outra figura (capaz de gerar ou de ser gerada).	Ente ou elemento. Figura (não elementar).

(1) Relativa ao espaço de mais de 3 dimensões, denominado HIPERESPAÇO.

(2) Não confundir figura | aberta / fechada | com | descontínua / contínua | cujo significado é:
"| apresenta interrupção, não é seguida ou sucessiva / não há interrupção, é seguida ou sucessiva |". A figura pode ser aberta e contínua. Sendo fechada, não será descontínua.

1124 – Noção de **"contorno"**, **"fronteira"** ou **"limite"**, instituição da figura "ℓ".

Seja uma figura qualquer "f0", entendida conforme referido nos itens 1121 a 1123.

Denominaremos "ℓ" a uma outra figura (equivalente a "f0") de zero, uma, duas, três ou mais dimensões, que serve de envoltória para "f0". Essas duas figuras são associadas de tal modo, que "ℓ" não existirá sem "f0". A figura "f0" é o campo e "ℓ", seu **contorno, fronteira ou limite.**

Entretanto, é possível admitir:[1]

11241 – "f0" sem "ℓ".

11242 – "f0" e "ℓ" integrados de modo que uma figura se entrosa à outra, sem necessidade de denominação diferente para cada uma.

1125 – Influência do número de dimensões das figuras "f0" ou "ℓ" na relação entre elas:

11251 – Convencionemos que o número de dimensões de "f0" ou "ℓ" seja expresso por:

$n = 1;\ n \pm 1 = \left| \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} \right|;\ n + 2 = 3;\ n + m \geqslant 4$ **(m número real e positivo ⩾ 3).**

11252 – O seguinte quadro permite melhor exame da relação entre "f0" e "ℓ":

Nº de dimensões		D E N O M I N A Ç Ã O	
"ℓ"	"f0"	"ℓ"	"f0"
	n – 1		ponto (zero-dimensional).
n – 1	n	ponto (zero dimensional).	linha (uni-dimensional).
n	n + 1	linha (uni-dimensional).	superfície (bi-dimensional)
n + 1	n + 2	superfície (bi-dimensional).	espaço (tri-dimensional).
n + 2	n + m	espaço (tri-dimensional).	espaço de 4 dimensões.
n + m	n + m	espaço de 4 dimensões.	espaço de 5 dimensões.
....	....	....	....

(1) Itens 1125 e 1126, detalham o assunto.

Pelo quadro do item 11252 verifica-se:

11253 – A figura "f0" denominada "ponto", não possui "ℓ".

11254 – As figuras "f0", denominadas "linha" e "superfície" podem ser consideradas como exemplos dos itens 11241 e 11242.

11255 – O contorno "ℓ" é denominado "ponto" quando a figura "f0" é **linha reta.**

11256 – O contorno "ℓ" é denominado "linha", quando a figura contornada "f0" é "superfície plana". (Fig. 3) Será "superfície", quando contornar uma figura "f0" do espaço (tri-dimensional), (Fig. 4) e assim, **sucessivamente.**

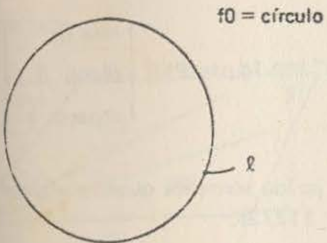


Fig. 3

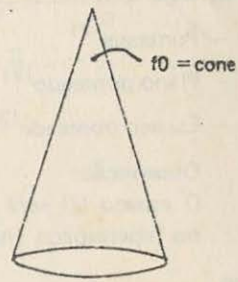


Fig. 4

1126 – **Importância da figura "ℓ" na classificação de "f0", quanto a ser "aberta"** ou "fechada" (itens 11232, 1124, 1125).

11261 – Se a figura "f0" é "**aberta**", podemos formular uma das seguintes hipóteses, quanto à figura "ℓ":

112611 – "ℓ" não existe (item 11231). Os elementos impróprios que caracterizam a figura "aberta" pertencem a "f0". Portanto, "f0" é "**figura sem contorno".**

112612 – "ℓ" existe, mas é constituída somente de elementos impróprios. Pode reduzir-se a um "ponto impróprio" (item 11255). Seus elementos se identificam com os elementos impróprios de "f0" (item 11242), de modo que a **figura "f0" é considerada como tendo "contorno impróprio".**

112613 – "ℓ" apresenta um, mais de um, mas **não a totalidade de seus elementos impróprios.** As figuras "f0" e "ℓ" **se integram** (item 11242), sendo "f0" **figura que apresenta "contorno com um ou mais elementos impróprios".**

11262 – Se a figura "f0" é "fechada" (itens 11232 e 11242), "ℓ" não contém elementos impróprios.

1127 – **Formas geométricas fundamentais**[1]

São figuras abertas, apresentando "contorno impróprio" (item 112612), geradas pelos entes fundamentais ponto, reta e plano (item 111).

São ao todo, nove figuras que se distribuem em três grupos, conforme seu ente gerador, não se admitindo elemento de natureza diferente na mesma forma.

11271 – Geração pelo/a:

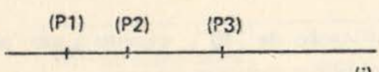
112711 – PONTO (P) –

1127111 – Ponteada[2] (fig. 5)
1127112 – Plano ponteado[2] (fig. 6)
1127113 – Espaço ponteado[2] (fig. 7)

$$\left.\begin{array}{l}\text{fig. 5}\\ \text{fig. 6}\\ \text{fig. 7}\end{array}\right|\ \text{"f0"} \iff \text{1g.pts.(P)} \in \left|\begin{array}{l}\text{reta } (j)\\ \text{plano } \beta\\ \text{espaço } \xi\end{array}\right| = \text{jazida.}$$

Observação:
O espaço (ξ) será considerado jazida somente quando estiver incluído no hiperespaço (itens 11231 e 11272).

PONTEADA (j)

Fig. 5


PLANO PONTEADO (β)

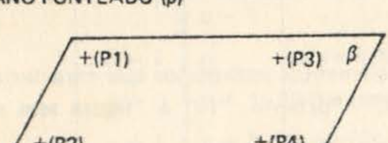


Fig. 6

ESPAÇO PONTEADO (ξ)

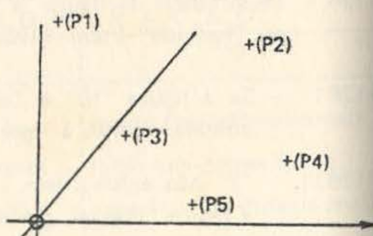


Fig. 7

---

(1) Lê-se em: 1) "Lezioni di Geometria Proiettiva" de Frederico Enriques, pág. 7 § 1: "Um conjunto de elementos fundamentais, isto é, um conjunto de pontos, retas e planos denomina-se FIGURA".

2) "Geometría Proyectiva" do Héctor Ceppi, Alejo M. Fournier, pág. 1, § 3º da Edição de 1951 de G. Kraft, B. Aires: "As formas ou FIGURAS geométricas são o resultado da combinação de três elementos fundamentais: pontos, retas e planos".

(2) Admite-se também o vocábulo "pontilhado/a".

112712 – RETA (r) –

1127121	– Plano de retas[1] (fig. 8)	"f0" $\Longleftrightarrow$ 1g.rts (r)	$\in$ pl. β = jazida,
1127122	– Feixe de retas[2] (fig. 9)		$\in$ pl. β = jazida e $\supset$ pt. (O) = centro
1127123	– Estrela de retas (fig. 10)		$\supset$ pt. (O) = centro

PLANO DE RETAS

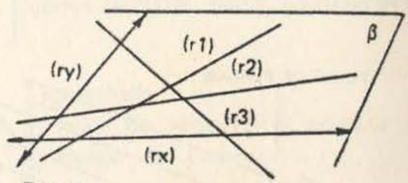


Fig. 8

FEIXE DE RETAS

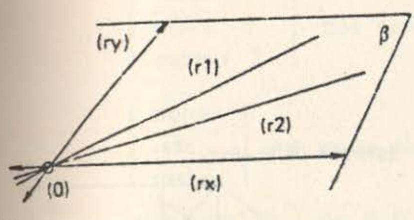


Fig. 9

ESTRELA DE RETAS

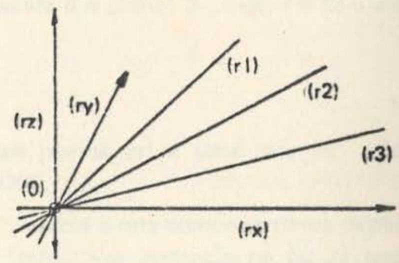


Fig. 10

---

(1) Admite-se também os vocábulos "reguado" e "regrado".

(2) Justo Pascali faz diferença entre "feixe de retas" e "feixe de ráios". O primeiro declara o autor em nota de roda-pé à pág. 22 de sua já citada obra "Geometria Projetiva", é o conjunto de retas que estão em um plano, *por hipótese*, e passam por um ponto chamado *centro P* do feixe; o segundo é um conjunto de retas que passam por um ponto *P* e que estão contidas em um plano π denominado *suporte*.
Entretanto, outros autores consideram estas duas expressões sinônimas (ver Guida Castelnuovo, "Lecciones de G. Analítica.... pág. 192).
Frederico Enriques adota somente "Feixe de raios" $\Leftrightarrow$ figura constituída de todas as infinitas retas que passam por um ponto (centro do feixe) $\in$ plano (suporte de feixe). Ver "Lezioni di Geometria proiettiva", pág. 8

112713 – PLANO (α) –

1127131 – Feixe de planos (fig. 11)			$\supset$	rt. (e) = eixo
1127132 – Estrela de planos (fig. 12)	"f0" $\Longleftrightarrow$ 1g.pls. (α)			pt. (O) = centro
1127133 – Espaço de planos (fig. 13)			$\in$	espaço ξ = jazida

Observação:

O espaço ξ será considerado jazida somente quando estiver incluído no hiperespaço (itens 11231 e 11272).

FEIXE DE PLANOS

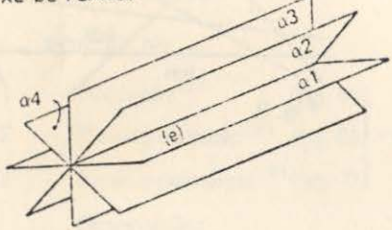


Fig. 11

ESTRELA DE PLANOS

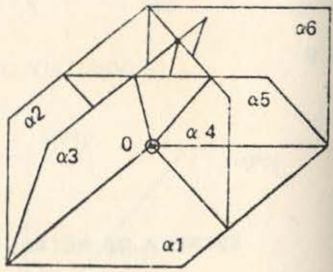


Fig. 12

ESPAÇO DE PLANOS

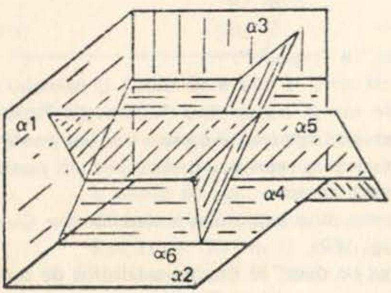


Fig. 13

11272 – **Lugar comum aos entes de uma forma: jazida, eixo, centro –**

Conceito de:

112721 – "jazida, "base" ou "suporte" –

Quando o lugar comum de	pontos (P) retas (r) planos (α)	$\in$	reta (j) plano β espaço ξ	a forma

gerada admite essa/e	reta (j) plano β espaço ξ	como JAZIDA, BASE ou SUPORTE.

Assim, por exemplo, na/o	ponteada feixe de retas espaço de planos	jazida é a/o

reta (j) plano β espaço ξ	que contém	pontos (P) retas (r) planos α	posições do ente

ponto reta plano	que gerou essa forma. Ver ilustração, Fig. 5, representa ja-

zida reta (j); figs. 6, 8 e 9 a jazida é o plano β ; Figs. 7 e 13 o espaço ξ corresponde a jazida.

112722 – **"Eixo"**

Quando o lugar comum aos planos (α) é uma reta (e), a forma gerada admite essa reta como EIXO.

Assim, no "feixe de planos", eixo é a reta comum a todos os planos, posições do ente que gerou essa forma. Ver ilustração na fig. 11, reta (e).

112723 – **"Centro" –**

Quando o lugar comum às/aos	retas (r) planos α	**é um ponto (O), a**

forma gerada admite esse ponto (O) como CENTRO.

Assim, por exemplo, no/a	**feixe estrela**	**de**	**retas planos**	**, centro é o ponto**

comum a todas/os as/os	**retas planos**	**, posições do ente que gerou a forma,**

Ver ilustração nas figs. 9, 10 e 12, centro (O).

As noções de "jazida", "eixo" e "centro" foram introduzidas pela necessidade de definir uma forma.

Assim:

"Ponteada" "Plano ponteado"	é lugar de pontos $\in$	reta plano	jazida da forma.

Logicamente, não há objetivo em estabelecer o **espaço** como jazida, por exemplo, da "estrela de retas", "estrela de planos" ou feixe de planos", porque esse mesmo espaço seria, também, jazida de outras estrelas de retas, de planos ou de feixe de planos. Logo, para essas formas, torna-se desnecessária sua introdução como "jazida".

Justifica-se a "jazida espacial", isto é, espaço jazida ξ, quando se admitir a existência do HIPER-ESPAÇO,[1] para as formas "espaço de pontos" e espaço de planos.

11273 – **Classificação**

Quanto a:

112731 – Natureza do ente gerador (ponto, reta ou plano):

1127311 – Formas de pontos;

1127312 – Formas de retas;

1127313 – Formas de planos.

112732 – Número de parâmetros necessários e suficientes para localizar uma posição do ente na forma a qual ele deu origem:

1127321 – 1ª espécie

Um só parâmetro situa o ente em sua forma, uma vez que um só movimento[2] é necessário e suficiente para que ele gere a forma.

Pertencem a esta espécie:

11273211 – Ponteada.

11273212 – Feixe de retas (ou de raios).

11273213 – Feixe de planos.

---

(1) Justo Pascali a pág. 29 faz apreciação sobre HIPERESPAÇO (obra já citada em nota de roda-pé). Se aceitarmos que o hiperespaço possa conter mais de um espaço, justifica-se o "espaço jazida".

(2) Aplicado com o sentido de "translação" ou de "rotação".

1127322 – 2ª espécie

Dois parâmetros situam o ente em sua forma, uma vez que dois movimentos[1] são necessários e suficientes para que ele gere a forma.

Pertencem a esta espécie:

11273221 – Plano ponteado.

11273222 – Plano de retas.

11273223 – Estrela de retas (ou de raios).

11273224 – Estrela de planos.

1127323 – 3ª espécie

Três parâmetros situam o ente em sua forma, uma vez que três movimentos[1] são necessários e suficientes para que ele gere a forma.

Pertencem a esta espécie:

11273231 – Espaço ponteado.

11273232 – Espaço de planos.

Não se considera o "espaço de retas", porque qualquer reta fica necessária e suficientemente determinada no espaço, por dois
| pontos |
| planos |.

1128 – **Linha e superfície** (curva e superfície curva em particular)

Conforme já estudado para as figuras em geral (itens 1121 a 1126), "linha" (curva em particular) é **uni-dimensional** e "superfície" (superfície curva em particular) é **bi-dimensional.**

11281 – Geração: Critério, geratriz e lei de geração – estudo comparativo.

Já declaramos que o critério de geração (itens 1122) pode estar associado à necessidade de utilização dessas figuras. Muitos problemas são resolvidos em função disso.

Assim, podemos estudar "linha" e superfície" partindo da idéia de:

112811 – "Envoltória" ou "envolvida" das várias posições de outra figura geratriz.

112812 – "Transformação" de uma figura em outra, como se verifica pelo critério de:

---

(1) Translação e/ou rotação.

1128121 – "Projeção".

1128122 – "Anamorfose".

Por serem de simples aplicação, as geratrizes mais utilizadas são ponto, reta e plano. Esses entes poderão gerar linhas e superfícies.

Assim:

"Quando o/a | PONTO / RETA / PLANO | gerador/triz se desloca no espaço, obedecendo determinadas condições (lei de geração), a "linha" ou "superfície" gerada, denomina-se "geométrica". Quando não é possível estabelecer "lei de geração", ela é conhecida como "gráfica".

112813 – Aplicações:

ENTE GERADOR		FIGURA GERADA		
PONTO	linha / superfície	curva e poligonal (multivértice) fechada/aberta.		
RETA	linha / superfície	curva e poligonal	multilátero / multiaresta	fechada/aberta.
PLANO	linha / superfície	curva e poligonal	multilátero / multiface / ou poliedro	fechada/aberta.

112814 – Curva e superfície curva: geração pontual e linear.

1128141 – Uma das formas de maior aplicação, para gerar | linha / superfície | é a | pontual / linear |: "| Linha / Superfície | é a trajetória de um/a | ponto / linha |".

1128142 – Se o ponto descrevente | muda constantemente / não muda | sua direção, a linha gerada denomina-se | curva / reta |.

1128143 – Se a linha geratriz é | reta / curva | a superfície descrita é | retigráfica / curvigráfica |.

1128144 – Toda superfície | retigráfica / curvigráfica | admite geratriz "linha curva".

1128145 – Algumas superfícies curvigráficas só admitem a **reta** como **geratriz imaginária.**

11282 – Estudo comparativo considerando **propriedades.**

112821 – $\left|\begin{array}{l}\text{Linha}\\ \text{Superfície}\end{array}\right|$ é suscetível de ser avaliada em sua extensão com emprego de $\left|\begin{array}{l}\text{uma}\\ \text{duas}\end{array}\right|$ dimensão/sões.

112822 – $\left|\begin{array}{l}\text{Linha}\\ \text{Superfície}\end{array}\right|$ é limite de extensão a $\left|\begin{array}{l}\text{duas}\\ \text{três}\end{array}\right|$ dimensões.

112823 – Duas $\left|\begin{array}{l}\text{linhas}\\ \text{superfícies}\end{array}\right|$ admitem um/a $\left|\begin{array}{l}\text{ponto}\\ \text{linha}\end{array}\right|$ em comum.

11283 – Estudo comparativo considerando **elementos.**

112831 – SECANTE é reta que corta a $\left|\begin{array}{l}\text{linha}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$ em dois ou mais pontos, denominados "pontos de secância".

É sempre possível admitir um **plano**, contendo a reta secante, também **secante** $\left|\begin{array}{l}\text{linha}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$.

112832 – CORDA é qualquer trecho de secante à $\left|\begin{array}{l}\text{linha}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$, compreendido entre pontos de secância.

112833 – TANGENTE é a secante à $\left|\begin{array}{l}\text{linha}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$ que contém corda infinitamente pequena.

É sempre possível admitir um **plano**, contendo a reta tangente, também **tangente** à $\left|\begin{array}{l}\text{linha}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$.

112834 – $\left|\begin{array}{l}\text{LINHA}\\ \text{SUPERFÍCIE}\end{array}\right|$ DIAMETRAL é o lugar dos pontos médios de cordas paralelas (relativas à "linha" ou à "superfície").

112835 – $\left|\begin{array}{l}\text{DIÂMETRO}\\ \text{PLANO DIAMETRAL}\end{array}\right|$ é a $\left|\begin{array}{l}\text{linha}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$ diametral $\left|\begin{array}{l}\text{RETA}\\ \text{PLANA}\end{array}\right|$.

112836 – $\left|\begin{array}{l}\text{EIXO}\\ \text{PLANO PRINCIPAL (PLANO DE SIMETRIA)}\end{array}\right|$ é o $\left|\begin{array}{l}\text{diâmetro}\\ \text{plano diametral}\end{array}\right|$ cordas paralelas.

Tanto o EIXO como o PLANO PRINCIPAL dividem a "linha" ou "superfície" em duas **partes simétricas.**

1128361 – EIXO e PLANO PRINCIPAL são sinônimos de "eixo" e "plano de simetria" da figura.

1128362 – Nas superfícies, EIXO resulta da interseção entre dois ou mais "planos de simetria". Portanto, somente as superfícies que admitirem mais de um plano de simetria possuem eixo.

112837 – VÉRTICE é o ponto comum ao eixo e à $\left|\begin{array}{l}\text{linha}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$.

112838 – CENTRO é o ponto comum a $\left|\begin{array}{l}\text{dois}\\ \text{três}\end{array}\right|$ eixos da $\left|\begin{array}{l}\text{linha}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$.

11284 – Estudo comparativo entre curva e superfície geométricas, considerando a classificação.

Aplicando o que ficou declarado no item 11233 (pág. 8), verifica-se que:

$\left|\begin{array}{l}\text{Curva}\\ \text{Superfície}\end{array}\right|$ geométrica resulta do movimento da geratriz, quando esse movimento se submete a uma "Lei de geração" (quando pode ser representado algebricamente por uma equação).

A $\left|\begin{array}{l}\text{curva}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$ geométrica pode ser classificada quanto ao/a:

112851 – GRAU que corresponde ao grau da equação que representa a $\left|\begin{array}{l}\text{curva}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$.

112852 – ORDEM que corresponde ao número de pontos que o/a $\left|\begin{array}{l}\text{plano}\\ \text{reta}\end{array}\right|$ corta a $\left|\begin{array}{l}\text{curva não plana}\\ \text{superfície não plana}\end{array}\right|$.

Se a curva for plana, será de ORDEM "M" quando uma reta de seu plano cortá-la em "M" pontos, reais ou imaginários, distintos ou confundidos, à distância finita ou infinita.

112853 – CLASSE que corresponde ao número de pontos de contato entre planos que passam por uma reta ∉ $\left|\begin{array}{l}\text{curva}\\ \text{superfície}\end{array}\right|$ e esta.

Se a curva for plana, será de CLASSE "M", quando uma reta de seu plano, contendo um ponto ∉ curva, tangenciar essa figura em "M" pontos, reais ou imaginários, distintos ou confundidos, à distância finita ou infinita.

12 – OPERAÇÕES PROJETIVAS ou OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS

São responsáveis pela passagem de uma a outra figura (transformação) através do raciocínio projetivo. Com esse recurso é possível representar qualquer figura, substituindo-a por outra, dela resultante, por uma operação de "PROJEÇÃO" ou de "SEÇÃO".

120 – **Instituição da figura "f1":**

Seja "f0" a figura de origem, entendida conforme proposto nos itens 111, 112 e sub itens (págs. 19 a 36). Por uma das operações projetivas obtém-se "f1", figura derivada de "f0" (por "projeção ou "seção").

121 – **Operação "projetar"**

1211 – Significado:

Consiste em traçar | retas[1] / planos[2] | denominadas/os PROJETANTES, que devem atender às seguintes.

1212 – Condições:

12121 – Passar por um/a | ponto (P) / reta (p) | real, fixo/a, próprio/a ou impróprio/a, denominado/a | CENTRO PROJETIVO, VÉRTICE DE PROJETANTES, POLO / RETA ou EIXO DE PLANOS PROJETANTES .... | ∈ espaço (item 11).

12122 – Conter, cada "projetante", um ENTE ou ELEMENTO, real, próprio ou impróprio, ∈ a forma ou figura "f0" a ser projetada. A figura "f1" resultante, será constituída de projetantes de tal modo que cada elemento ∈ f0, terá projetante correspondente ∈ f1.

Não sendo possível o atendimento dessas condições, diz-se que a operação é INCOMPATÍVEL.

---

(1) Adotada a "linha reta (raio)" por ser o "mais simples elemento" determinado por dois pontos: "CENTRO PROJETIVO" e "PONTO QUALQUER ∈ f0 (suposta gerada de pontos)".

(2) Adotado o "plano" por ser o "mais simples elemento" determinado por:

1) "Uma reta, EIXO dos planos projetantes" e "PONTO QUALQUER ∈ f0 (suposta gerada de pontos)"; ou:

2) "Um ponto, CENTRO dos planos projetantes" e "RETA QUALQUER ∈ f0 (suposta gerada de retas)".

1213 – Posições do $\left|\begin{array}{l}\text{CENTRO PROJETIVO (P)}\\ \text{EIXO (p) DE PLANOS PROJETANTES}\end{array}\right|$ em relação a forma ou figura "f0" a ser projetada:

12131 – CENTRO PROJETIVO (P)

121311 – (P) $\left|\begin{array}{c}\in\\ \notin\end{array}\right|$ à jazida da forma reta (j) ou plano β.

121312 – (P) $\left|\begin{array}{c}\in\\ \notin\end{array}\right|$ ao eixo (e) da forma.

121313 – (P) $\left|\begin{array}{c}\equiv\\ \not\equiv\end{array}\right|$ ao centro (O) da forma.

12132 – EIXO (p) DE PLANOS PROJETANTES

121321 – (p) $\left|\begin{array}{c}\equiv \text{ ou } \not\equiv\\ \in \text{ ou } \notin\end{array}\right|$ à jazida da forma $\left|\begin{array}{l}\text{reta (j)}\\ \text{plano } \beta\end{array}\right|$.

121322 – (p) $\left|\begin{array}{c}\equiv\\ \not\equiv\end{array}\right|$ ao eixo (e) da forma.

121323 – (p) $\left|\begin{array}{c}\supset\\ \not\supset\end{array}\right|$ centro (O) da forma.

1214 – Formas geométricas fundamentais geradas pela "operação projetar". Aplicando esta operação à forma "f0" (entendida conforme item 1127, pág. 28 e segts.), obteremos outra forma "f1", via de regra, da mesma espécie de "f0".

Os quadros seguintes, permitem melhor analisar o raciocínio desta operação:

12141 – Projetar de um CENTRO PROJETIVO (P)

	FORMA "f0" DADA	POSIÇÃO DO CENTRO PROJETIVO (P)	FORMA "f1" OBTIDA
121411	Ponteada jazida = reta (j)	(P) $\in$ (j) (P) $\notin$ (j)	Reta. Feixe de retas, sendo (P) = = centro; plano (P) (j) = jazida.
121412	Feixe de retas jazida = plano β; centro = ponto (0)	(P) $\in \beta$, $\equiv$ (0) (P) $\in \beta$, $\not\equiv$ (0) (P) $\notin \beta$	$\equiv$ plano β. Feixe de planos de eixo = = (P)(0).
121413	Feixe de planos eixo = (e)	(P) $\in$ (e) (P) $\notin$ (e)	$\equiv$ feixe de planos. Incompatível.(1)
121414	Plano ponteado jazida = plano β	(P) $\in \beta$ (P) $\notin \beta$	Feixe de retas de centro (P) e jazida β. Estrela de retas de centro (P).
121415	Plano de retas jazida = plano β	(P) $\in \beta$ (P) $\notin \beta$	$\equiv$ plano β Estrela de planos de centro (P).
121416	Estrela de retas centro = ponto (0)	(P) $\equiv$ (0) (P) $\not\equiv$ (0)	$\equiv$ f0 Feixe de planos de eixo (P)(0).
121417	Estrela de planos centro = ponto (0)	(P) $\equiv$ (0) (P) $\not\equiv$ (0)	$\equiv$ f0 Incompatível.(1)

(1) Não se pode projetar o **plano**, suposto **ente gerador** e **não gerado**, considerado "indecomponível em pontos ou retas" (item III, pág. 19).

	FORMA "f0" DADA	POSIÇÃO DO CENTRO PROJETIVO (P)	FORMA "f1" OBTIDA
121418	Espaço ponteado jazida = espaço ξ	$(p)\quad \nabla\ \xi$	Estrela de retas de centro (P).
121419	Espaço de planos jazida = espaço ξ	$(p)\quad \nabla\ \xi$	Incompatível (chamada de rodapé pág. 39).

12142 – Projetar de um EIXO (p) de PLANOS PROJETANTES.

	FORMA "f0" DADA	POSIÇÃO DO EIXO (p) DE PL. PROJETANTES	FORMA "f1" OBTIDA
121421	Ponteada jazida = reta (j)	(p) $\equiv$ (j) (p) coplanar (j) (p) não coplanar (j)	$\equiv$ (j) Plano determinado por (p) e (j). Feixe de planos de eixo (p).
121422	Feixe de retas jazida = plano β centro = ponto (0)	$(p) \left\lvert \begin{matrix} \in \\ \notin \end{matrix} \right\rvert \beta;\ p \left\lvert \begin{matrix} \supset \\ \not\supset \end{matrix} \right\rvert \begin{matrix} (0) \\ (0) \end{matrix}$	$\equiv \beta$ Feixe de planos de eixo (p). Feixe de planos imaginários de eixo (p) = reta real. Somente um dos planos desse feixe será real (determinado por (p) e uma reta $\in \beta$ coplanar com (p)).
121423	Feixe de planos eixo = reta e	$(p) \left\lvert \begin{matrix} \equiv \\ \not\equiv \end{matrix} \right\rvert e$	$\equiv$ f0. Incompatível (chamada de rodapé pág. 39).
121424	Plano ponteado jazida = plano β	$(p) \left\lvert \begin{matrix} \in \\ \notin \end{matrix} \right\rvert \beta$	$\equiv \beta$. Feixe de planos de eixo (p).

	FORMA "f0" DADA	POSIÇÃO DO EIXO (p) DE PL. PROJETANTES	FORMA "f1" OBTIDA
121425	Plano de retas jazida = plano β	(p) $\left\| \begin{matrix} \in \\ \notin \end{matrix} \right\|$ β	$\equiv \beta$. Feixe de planos imaginários de eixo (p) = reta real. Somente um dos planos desse feixe será real (determ. por (p) e uma reta $\in \beta$ coplanar com (p)).
121426	Estrela de retas centro = ponto (0)	(p) $\left\| \begin{matrix} \supset \\ \not\supset \end{matrix} \right\|$ (0)	Feixe de planos de eixo (p). Feixe de planos imaginários de eixo (p) = reta real. Somente um dos planos desse feixe será real (determinado por (p) e pelas retas de f0 coplanares com (p)).
121427	Estrela de planos centro = ponto (0)	(p) $\left\| \begin{matrix} \supset \\ \not\supset \end{matrix} \right\|$ (0)	Incompatível (chamada de rodapé pág. 39).
121428	Espaço ponteado jazida= espaço ξ	(p) $\mid \nabla \mid \xi$	Feixe de planos de eixo (p).
121429	Espaço de planos jazida = espaço ξ	(p) $\mid \nabla \mid \xi$	Incompatível (chamada de rodapé (pág. 39).

122 – **Operação "cortar"**

1221 – Significado

Consiste em determinar o "LUGAR COMUM" a um/a $\left| \begin{matrix} \text{plano } \pi \\ \text{reta (s)} \end{matrix} \right|$ e a uma forma "f0".

Este "LUGAR COMUM" é denominado $\left| \begin{matrix} \text{"seção" ou "projeção"} \\ \text{"interseção" ou "traço} \end{matrix} \right|$.

A expressão "interseção" tem sentido mais amplo, abrangendo todas as demais.

1222 – Condições:

12221 – A seção ou projeção "f1" resultante, deverá ficar constituída de entes representativos de todos os elementos $\in$ f0.

12222 – Não poderá existir um ente $\in$ f0 que não tenha seu correspondente $\in$ f1.

Não sendo possível o atendimento dessas condições, a operação será INCOMPATÍVEL.

1223 – Posições do/a $\left|\begin{matrix}\text{PLANO } \pi \\ \text{RETA (s)}\end{matrix}\right|$ secante a f0, relativamente a essa forma f0:

12231 – PLANO SECANTE π:

122311 – $\pi \left|\begin{matrix}\supset \text{ ou } \not\supset \\ \equiv \text{ ou } \not\equiv\end{matrix}\right|$ à jazida da forma f0 $= \left|\begin{matrix}\text{reta (j)} \\ \text{plano } \beta\end{matrix}\right|$.

122312 – $\pi \left|\begin{matrix}\supset \\ \not\supset\end{matrix}\right|$ eixo (e) da forma f0.

122313 – $\pi \left|\begin{matrix}\supset \\ \not\supset\end{matrix}\right|$ centro (O) da forma.

12232 – RETA SECANTE (s):

122321 – (s) $\left|\begin{matrix}\equiv \text{ ou } \not\equiv \\ \in \text{ ou } \notin\end{matrix}\right|$ à jazida da forma $\left|\begin{matrix}\text{reta (j)} \\ \text{plano } \beta\end{matrix}\right|$.

122322 – (s) $\left|\begin{matrix}\equiv \\ \not\equiv\end{matrix}\right|$ eixo (e) da forma.

122323 – (s) $\left|\begin{matrix}\supset \\ \not\supset\end{matrix}\right|$ centro (O) da forma.

1224 – Formas geométricas fundamentais geradas pela "operação cortar":

Aplicando esta operação à forma "f0" (entendida conforme item 1127, pág. 28 e segts.), obteremos outra forma "f1", via de regra, da mesma espécie de "f0".

Os quadros seguintes, permitem melhor analisar o raciocínio desta operação:

12241 – Cortar com um PLANO π

	FORMA "f0" DADA	POSIÇÃO DO PLANO SECANTE π	FORMA "f1" OBTIDA
122411	Ponteada jazida reta (j)	$\pi \left\| \begin{matrix} \supset \\ \not\supset \end{matrix} \right\| (j)$	$\equiv$ f0 Incompatível.[1]
122412	Feixe de retas jazida = plano β centro = ponto (0)	$\pi \left\| \begin{matrix} \equiv \; \beta \\ \not\equiv \; \beta\pi \left\| \begin{matrix} \supset \\ \not\supset \end{matrix} \right\| (0) \end{matrix} \right.$	$\equiv$ f0. Reta $\beta\pi \supset (0)$. Ponteada de jazida $\beta\pi$.
122413	Feixe de planos eixo = reta (e)	$\pi \left\| \begin{matrix} \supset \\ \not\supset \end{matrix} \right\| (e)$	Reta $\equiv$ (e). Feixe de retas de jazida = π e centro = ponto $\pi(e)(\pi \cap (e))$.
122414	Plano ponteado jazida = plano β	$\pi \left\| \begin{matrix} \equiv \\ \not\equiv \end{matrix} \right\| \beta$	$\equiv$ f0. Incompatível.[1]
122415	Plano de retas jazida = plano (β)	$\pi \left\| \begin{matrix} \equiv \\ \not\equiv \end{matrix} \right\| \beta$	$\equiv$ f0. Ponteada de jazida $\beta\,\pi$ $(\pi \cap \beta)$
122416	Estrela de retas centro = ponto (0)	$\pi \left\| \begin{matrix} \supset \\ \not\supset \end{matrix} \right\| (0)$	Feixe de retas de centro (0). Plano ponteado de jazida π.
122417	Estrela de planos centro = ponto (0)	$\pi \left\| \begin{matrix} \supset \\ \not\supset \end{matrix} \right\| (0)$	Feixe de retas de centro (0). Plano reguado de jazida π.
122418	Espaço ponteado jazida = espaço ξ	$\pi \nabla \xi$	Incompatível.[1]
122419	Espaço de planos jazida = espaço ξ	$\pi \nabla \xi$	Plano de retas de jazida π.

(1) Consultar itens 12221 e 12222.

12242 – Cortar com uma reta (s)

	FORMA "f0" DADA	POSIÇÃO DA RETA SECANTE (s)	FORMA "f1" OBTIDA
122421	Ponteada jazida = reta (j)	(s) $\equiv$ / $\not\equiv$ (j)	$\equiv$ (j). Incompatível.[1]
122422	Feixe de retas jazida = plano β ; centro = ponto (0)	(s) $\in$ β $\supset$ / $\not\supset$ (0) (s) $\notin$ β $\supset$ / $\not\supset$ (0)	$\equiv$ (s) $\supset$ (0). Ponteada de jazida (s). $\equiv$ (0). Incompatível.[1]
122423	Feixe de planos eixo = reta (e)	(s) $\equiv$ / $\not\equiv$ (e) copl. (e) / não copl. (e)	$\equiv$ (e). Ponto (s) $\cap$ (e). Ponteada de jazida (s).
122424	Plano ponteado jazida = plano β	(s) $\in$ / $\notin$ β	Incompatível.[1] Incompatível.[1]
122425	Plano de retas jazida = plano β	(s) $\in$ / $\notin$ β	Ponteada de jazida (e). Incompatível.[1]
122426	Estrela de retas centro = ponto (0)	(s) $\supset$ / $\not\supset$ (0)	$\equiv$ (0) Incompatível.[1]
122427	Estrela de planos centro = ponto (0)	(s) $\supset$ / $\not\supset$ (0)	$\equiv$ (0). Ponteada de jazida (s).
122428	Espaço ponteado jazida = espaço ξ	(s) ∇ ξ	Incompatível.[1]
122429	Espaço de planos jazida = espaço ξ	(s) ∇ ξ	Ponteada de jazida (s).

(1) Consultar itens 12221 e 12222.

123 – Generalização das operações projetivas. Projeção, seção.

1231 – Operações projetivas aplicadas a uma figura qualquer "f0".

O que estudamos para as nove figuras geométricas fundamentais (itens 12141/2 e 12241/2) pode ser aplicado a qualquer outra figura.

É sempre possível admitir que uma figura f0, não necessariamente **forma geométrica fundamental**, possa ser gerada pelo/a ponto, reta ou plano (item 1128). A figura f1 obtida, está sujeita a mesma "incompatibilidade" verificada para aquela forma fundamental.

Essa generalização nos leva a analisar:

1232 – Diferença e semelhança entre "projeção" e "seção".[1]

Os vocábulos "projeção" e "seção" têm o mesmo significado, quando aplicados ao resultado da **operação projetiva cortar** (item 122) entretanto, considerando as aplicações à Geometria Descritiva e ao Desenho Técnico, existe diferença entre os referidos vocábulos.

Seja uma figura f0 cortada por um plano δ segundo a seção, linha plana (s).

O lugar comum aos elementos de f0 e δ é a seção (s).

Se não considerarmos o plano secante δ como **plano de projeção**, ele não estará sujeito às condições referidas nos itens 12221 e 12222 (pág. 41): "conter elementos representativos de todos os entes de f0".

Nessa hipótese, f0 será constituída de **geratrizes** e não de **projetantes**.

Resumindo:

Se f0 é constituído de $\left|\begin{array}{l}\text{projetantes (com função projetiva)}\\ \text{geratrizes (sem função projetiva)}\end{array}\right|$ **a palavra seção** é equivalente a $\left|\begin{array}{l}\text{projeção}\\ \text{seção}\end{array}\right|$, figura $\left|\begin{array}{l}\text{f1}\\ \text{(s)}\end{array}\right|$ **resultante da interseção do** plano $\left|\begin{array}{l}\text{de projeção } \pi\\ \text{secante } \delta\end{array}\right|$ com as $\left|\begin{array}{l}\text{projetantes}\\ \text{geratrizes}\end{array}\right|$ $\in$ f0.

A figura $\left|\begin{array}{l}\text{f1}\\ \text{(s)}\end{array}\right|$ compõe-se de elementos $\left|\begin{array}{l}\text{representativos de f0}\\ \text{comuns a f0 e a } \delta\end{array}\right|$.

O vocábulo "projeção" pode ser empregado com significado mais amplo, o de estudar a "representação projetiva de uma figura" (abrange as operações projetivas).

---

(1) Consultar Bustamante, Léa Santos: "Projeções da Esfera" págs. 69 e 70, tese publicada em 1960.

124 – **Instituição da figura "f2". Figuras consecutivas.**

Conforme proposto no item 11223 (pág. 25) e aplicado no item 12 e sub-itens (pág. 37 e segts.) a figura "f0" é "original", "primitiva" ou "dada", da qual deduzimos a figura "f1" aplicando uma das operações projetivas.

Considerando essa aplicação consecutivamente, vem:

– PROJETA-SE f0 (figura dada), obtém-se f1.

– CORTA-SE f1 (figura resultante de f0), obtendo-se f2.

A figura f2 é denominada "projeção de f0".

Por outro lado, a seqüência:

$$f0 \xrightarrow{P} f1 \xrightarrow{S} f2$$

será entendida como resultando da aplicação sucessiva, à figura f0, das operações **projetar** e **cortar**. Por esse motivo, denominaremos f0, f1 e f2 de "figuras consecutivas".

125 – **Propriedades das "operações projetivas".**

1251 – Generalidades.

Também denominadas "Propriedades projetivas" são as que se transmitem às figuras resultantes das operações **projetar** e **cortar**.

Algumas dessas propriedades podem ser deduzidas das condições estabelecidas para aquelas operações (item 1212 e 1222, págs. 37 e 41).

Seja uma reta (r) $\in$ f0 (excluímos nesse exemplo, as incompatibilidades indicadas nos itens 12141/2 e 12241/2, págs. 39 e 44).

– PROJETANDO f0 de um centro projetivo (P), obtém-se uma figura f1. Nesta figura existirá um plano determinado por (P) e (r), que representa a reta (r).

– CORTANDO f0 com um plano π, obtém-se uma figura f1. Nesta figura f1 existirá um ponto (r) $\equiv$ (r) $\cap$ π que representa a reta (r).

Verifica-se, em ambas as operações, aplicadas à figura f0, a existência das seguintes propriedades:

12511 – PERTINÊNCIA – Projetando f0 do ponto (P), a reta (r) fica representada pelo plano (P) (r).

$$\boxed{(r) \in (P)\ (r)}$$

– Cortando f0 com plano π a reta (r) fica correspondendo ao ponto $r \equiv (r) \cap \pi$.

$$\boxed{r \in \pi}$$

12512 – DUALIDADE – A simples troca de determinadas palavras como: "reta" por "plano"; "reta" por "ponto"; "projetar" por "cortar", caracteriza essa propriedade.

12513 – RECIPROCIDADE – Projetando f0 do ponto (P), passa-se de uma **reta** $(r) \in$ f0 a um **plano** $(P)\ (r) \in$ f1; cortando f0 com um plano π, transforma-se (r) em **ponto** $r \equiv (r) \cap \pi \in$ f1.

Nesta propriedade, admite-se como recíprocos os elementos: **"reta** e **plano"; "reta** e **ponto"**.

Existem outras propriedades que não verificamos no exemplo dado, como REVERSIBILIDADE, RAZÃO. Nos próximos itens (12521/5) teremos oportunidade de constatá-las.

1252 – **Correlação entre as operações projetivas. Conceito. Aplicação. Conclusão.**

Examinando os quadros relativos aos itens 12141/2 e 12241/2, **págs.** 39 a 44 e considerando a classificação quanto a **espécie** (1ª., 2ª. e 3ª., item 11273, **págs.** 32 e 33), verifica-se que se f0 é figura de 1ª. espécie, f1 e f2[1] também serão.

Assim:

f0 (1ª. espécie) $\nwarrow\!\underline{\quad p \quad}\!\nearrow$ f1 (1ª. espécie) $\nwarrow\!\underline{\quad s \quad}\!\nearrow$ f2 (1ª. **espécie)**

Se f0 é figura de 2ª. ou de 3ª. espécie, isso nem sempre se verifica.

Em termos de "propriedades projetivas", existe correlação entre as figuras:

f0 $\nwarrow\!\underline{\quad p \quad}\!\nearrow$ f1 $\nwarrow\!\underline{\quad p \quad}\!\nearrow$ f2.

Estudaremos cada propriedade, analisando conceito, aplicação e tirando conclusão.

Item 124, pág. 46.

12521 – PERTINÊNCIA

125211 – Conceito:

Se um ente ∈ f0, ele estará representado, por transformação projetiva, nas figuras f1 e f2 resultantes das operações projetivas aplicadas sucessivamente a partir de f0".

Exemplo:

Seja um ponto (A) ∈ f0. Pela operação.

PROJETAR f0 de um ponto (P), obtém-se f1. Ao ponto (A), corresponde uma reta projetante "**(P)(A) ∈ f1**". Essa figura foi determinada conforme item 121, págs. 37 a 41.

CORTAR f1 com um plano π, obtém-se f2. A projetante (P)(A)∈ f1, corresponde um ponto "**A ∈ f2**" ≡ (P)(A) ∩ π ∈ f2. Essa figura foi determinada conforme item 122, págs. 41 a 44.

125212 – Aplicação:

1252121 – Se um ponto (A) ∈ $\left| \begin{array}{l} \text{reta (r)} \\ \text{plano (B)(C)(D)} \end{array} \right|$ ou, de um modo geral, (A) ∈ $\left| \begin{array}{l} \text{linha (c)} \\ \text{superfície } (\theta) \end{array} \right|$ sua projeção A ∈ projeção $\left| \begin{array}{c} \text{r} \\ \text{BCD} \end{array} \right|$ de $\left| \begin{array}{c} \text{(r)} \\ \text{(B)(C)(D)} \end{array} \right|$ $\left| \begin{array}{c} c \\ \theta \end{array} \right|$ de $\left| \begin{array}{c} (c) \\ (\theta) \end{array} \right|$ (figs. 14 a 17).

1252122 – Corolário do 1252121 –

Se um ponto real (A) ∈ simultaneamente a 2 $\left| \begin{array}{c} \text{retas} \\ \text{planos} \end{array} \right|$ reais, ou, de um modo geral, a 2 $\left| \begin{array}{c} \text{linhas} \\ \text{superfícies} \end{array} \right|$ reais, sua projeção A ∈ simultaneamente às projeções das/os 2 $\left| \begin{array}{c} \text{retas} \\ \text{planos} \end{array} \right|$ ou das 2 $\left| \begin{array}{c} \text{linhas} \\ \text{superfícies} \end{array} \right|$ (figs. 18 a 21).

1252123 – Corolário do 1252122 –

Se 2 $\left| \begin{array}{c} \text{retas} \\ \text{planos} \end{array} \right|$ ou 2 $\left| \begin{array}{c} \text{linhas} \\ \text{superfícies} \end{array} \right|$ são concorrentes, suas projeções são concorrentes (coincidentes, em particular) e a projeção do/a $\left| \begin{array}{c} \text{ponto} \\ \text{linha} \end{array} \right|$ de interseção ∈ a projeção do/a $\left| \begin{array}{c} \text{ponto} \\ \text{linha} \end{array} \right|$ de interseção das projeções relativas às/aos referidas/os $\left| \begin{array}{c} \text{retas} \\ \text{planos} \end{array} \right|$ .ou $\left| \begin{array}{c} \text{linhas} \\ \text{superfícies} \end{array} \right|$ figs. 18 a 21).

1252124 – Corolário do 1252122 –

Se 2 retas determinam um ponto real, determinam também, um plano real, jazida do feixe de retas que admite esse ponto como centro.

1252125 – Corolário do 1252122 –

2 planos ponteados determinam uma reta, jazida de pontos comuns aos 2 planos.

1252125 – Corolário do 1252122 –

Se 2 pontos de uma $\left|\begin{array}{l}\text{ponteada}\\ \text{reta}\end{array}\right| \in$ plano, a $\left|\begin{array}{l}\text{ponteada}\\ \text{reta}\end{array}\right| \in$ plano.

125213 – Conclusão:

"A pertinência é invariante nas operações projetivas"[1]

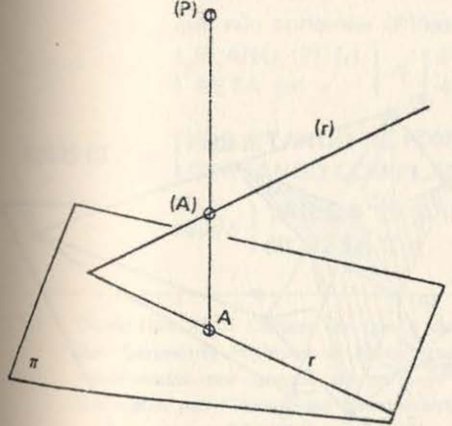


Fig. 14

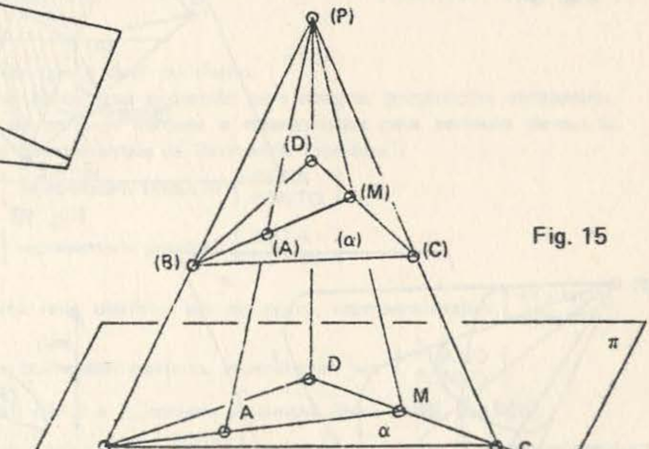


Fig. 15

(1) Justo Pascali, pág. 50, item 36, 2ª Ed. 1952, B. Aires, Editora Centro Estudantes de Ingenieria de Buenos Aires.

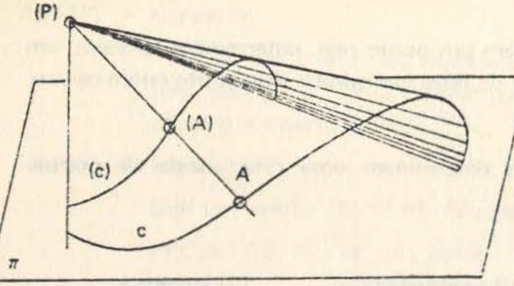


Fig. 16

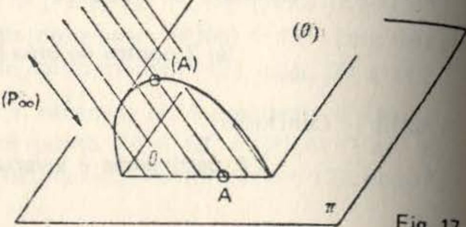


Fig. 17

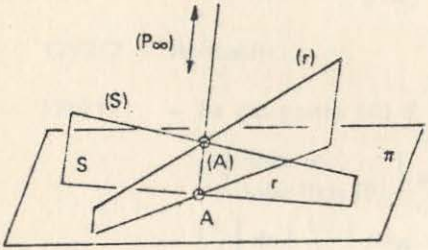


Fig. 18

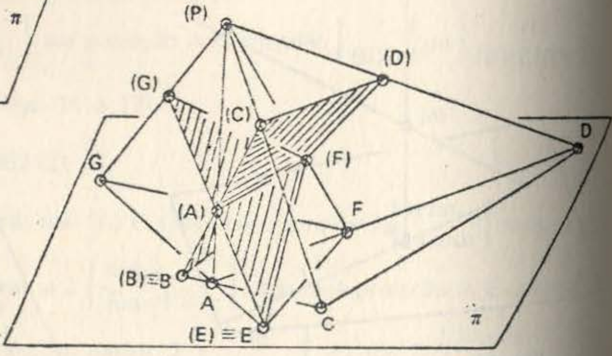


Fig. 19

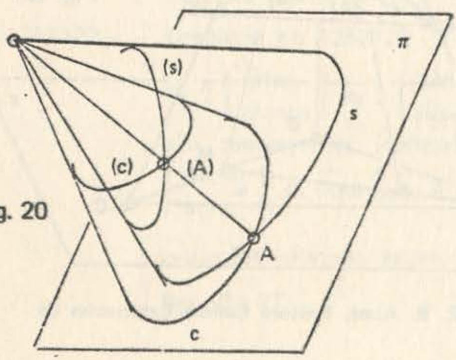
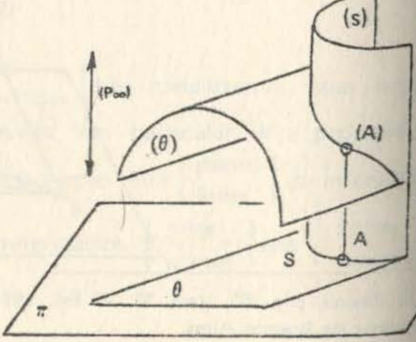


Fig. 20

Fig. 21



12522 – DUALIDADE[1]

125221 – Conceito:

"Nas operações projetivas, a simples permuta de determinadas palavras possibilita resultados verdadeiros para ambas as operações".

Assim, formulado o enunciado da propriedade decorrente de projetar, indicada nos exemplos seguintes, o de cortar dele se infere, obtendo-se resultados verdadeiros para ambas as operações.

Exemplos:

1252211 – $\left|\begin{array}{l}\text{PROJETANDO}\\ \text{CORTANDO}\end{array}\right|$ de/com um $\left|\begin{array}{l}\text{PONTO (P)}\\ \text{PLANO } \pi\end{array}\right|$ um/a $\left|\begin{array}{l}\text{PONTO (A)}\\ \text{RETA (P) (A)}\end{array}\right|$

determina-se uma/um $\left|\begin{array}{ll}\text{RETA (P) (A)} & \text{(fig. 22)}\\ \text{PONTO (A)} & \text{(fig. 23)}\end{array}\right|$.

1252212 – $\left|\begin{array}{l}\text{PROJETANDO}\\ \text{CORTANDO}\end{array}\right|$ de/com um $\left|\begin{array}{l}\text{PONTO (P)}\\ \text{PLANO } \pi\end{array}\right|$ uma/um $\left|\begin{array}{l}\text{RETA (r)}\\ \text{PLANO } (\alpha)\end{array}\right|$

que não contenha (P)/coincida com π, determina-se um/a

$\left|\begin{array}{l}\text{PLANO (P) (r)}\\ \text{RETA } (\alpha)\ \pi\end{array}\right| \equiv \left|\begin{array}{ll}\text{PLANO } (\alpha) & \text{(fig. 24)}\\ \text{RETA r} & \text{(fig. 25)}\end{array}\right|$.

1252213 – $\left|\begin{array}{l}\text{PROJETANDO DE PONTO (P)}\\ \text{CORTANDO COM PLANO } \pi\end{array}\right|$ um feixe de $\left|\begin{array}{l}\text{RETAS (r1), (r2),...}\\ \text{PLANOS } (\alpha,1)(\alpha,2)\text{,...}\end{array}\right|$

cuja/o $\left|\begin{array}{l}\text{JAZIDA } (\beta) \not\ni \text{ (P)}\\ \text{EIXO (e) } \notin \pi\end{array}\right|$ obtém-se feixe de $\left|\begin{array}{ll}\text{PLANOS} & \text{(fig. 26)}\\ \text{RETAS} & \text{(fig. 27)}\end{array}\right|$.

---

(1) DUALIDADE $\equiv$ Caráter do que é dual ou duplo.
Em Geometria Projetiva se aplica essa expressão para designar proposições verdadeiras, relacionadas por grupos de palavras comuns e diferenciadas pela permuta de outras. Exemplos nos "Postulados Fundamentais da Geometria Projetiva":

1- Dois/duas $\left|\begin{array}{l}\text{PONTOS}\\ \text{RETAS}\end{array}\right|$ representam uma/um $\left|\begin{array}{l}\text{RETA}\\ \text{PONTO}\end{array}\right|$.

2- Dois/duas $\left|\begin{array}{l}\text{PLANOS}\\ \text{RETAS}\end{array}\right|$ representam uma/um $\left|\begin{array}{l}\text{RETA}\\ \text{PLANO}\end{array}\right|$.

3- Um $\left|\begin{array}{l}\text{PONTO}\\ \text{PLANO}\end{array}\right|$ e uma reta, distintos um do outro, representam um $\left|\begin{array}{l}\text{PLANO}\\ \text{PONTO}\end{array}\right|$.

4- Três $\left|\begin{array}{l}\text{PONTOS}\\ \text{PLANOS}\end{array}\right|$ não colineares/coaxiares, representam um $\left|\begin{array}{l}\text{PLANO}\\ \text{PONTO}\end{array}\right|$.

Relativamente aos exemplos nºs 1 e 2, convém esclarecer (item 1112, pág. 20):

"Duas retas têm sempre em comum um $\left|\begin{array}{l}\text{ponto}\\ \text{plano}\end{array}\right|$ real próprio (retas concorrentes), real impróprio (retas paralelas) ou imaginário (retas que não admitem $\left|\begin{array}{l}\text{ponto}\\ \text{plano}\end{array}\right|$ comum real, ou que representam um $\left|\begin{array}{l}\text{ponto}\\ \text{plano}\end{array}\right|$ imaginário". O $\left|\begin{array}{l}\text{ponto}\\ \text{plano}\end{array}\right|$ sendo real, ficará também, *determinado* pelas referidas retas.

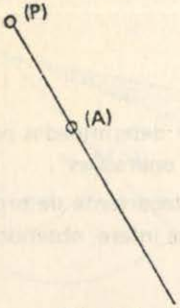


Fig. 22

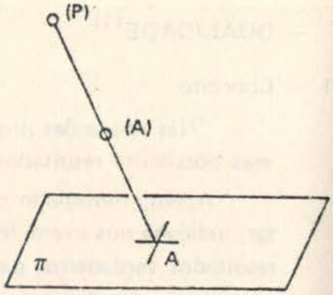


Fig. 23

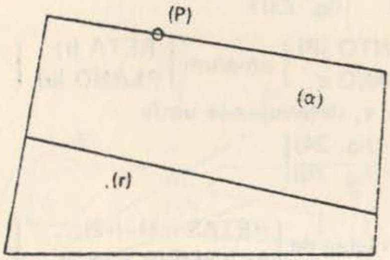


Fig. 24

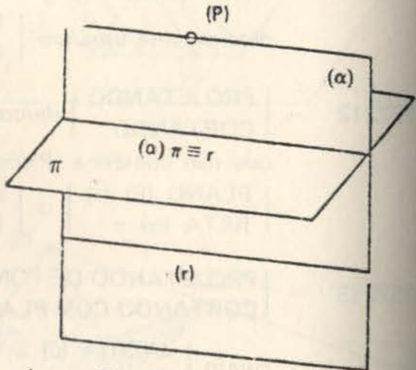


Fig. 25

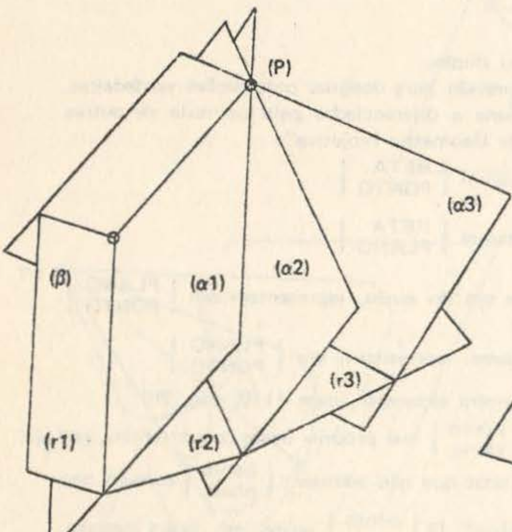


Fig. 26

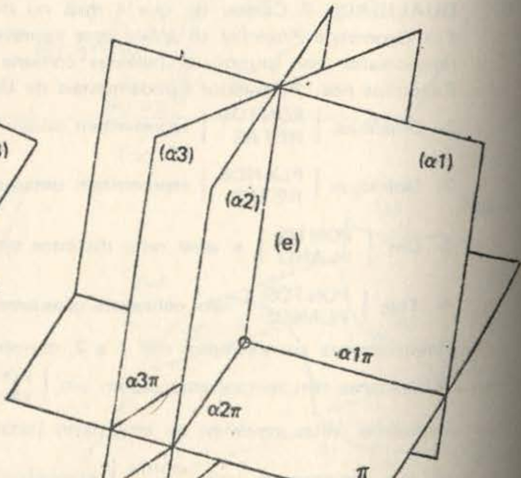


Fig. 27

Verifica-se que as palavras escritas em letras minúsculas foram conservadas (com adaptações) enquanto que as escritas em letras maiúsculas foram permutadas.

125222 – Aplicação:

1252221 – PROJETANDO / CORTANDO de/com um PONTO (P) / PLANO π uma forma gerada por PONTOS / RETAS, obtém-se uma forma gerada por diversos/as RETAS / PONTOS.

1252222 – PROJETANDO / CORTANDO de/com um PONTO (P) / PLANO π uma forma gerada por RETAS / PLANOS, obtém-se uma forma gerada por PLANOS / RETAS.

Não consideramos, nessas aplicações, as posições particulares do centro projetivo (P) ou do plano π, previstas no item 121; págs. 37 a 41 e 122, págs. 41 a 44.

125223 – Conclusões:

"São **duais** as operações projetar e cortar".

12523 – RECIPROCIDADE[1] ou INVERSÃO[2]

125231 – Conceito:

De um modo geral, as operações projetivas conduzem a resultados **contrários**.

Assim (fig. 28):

1252311 – PROJETANDO de um/a centro projetivo (P) / eixo (p) de pl. proj. uma figura qualquer f0,[3] obtém-se f1, figura constituída sempre de retas/pl. / planos.

– CORTANDO com um/a plano secante π / reta secante (s), a figura f1, constituída de retas/pl. / planos obtém-se f2, formada sempre de pontos/rts. / pontos.

(1) De RECÍPROCO = troca ou permuta, podendo significar (matemática "INVERSO").
(2) De INVERSO = que segue sentido, ordem, etc., "contrário" ao sentido ou ordem natural.
(3) Desde que a operação seja possível, não importa o ente gerador (ponto, reta ou plano).

Exemplos tirados dos itens 121, págs. 37 a 41 e 122, págs. 41 a 44:

1252312 – (fig. 29)

PROJETANDO f0 = ponteada (jazida (j)), centro projetivo (P) $\notin$ (j), obtém-se:

f1 = feixe de retas de centro (P) e jazida β, determinada por (P) (r).

CORTANDO f1 com um plano π, obtém-se f2 = ponteada de jazida $\beta\pi$.

1252313 – (fig. 30)

PROJETANDO f0 = espaço ponteado (centro projetivo (P), obtém-se:

f1 = estrela de retas de centro (P).

CORTANDO f1 com um plano π, obtém-se f2 = plano ponteado de jazida π.

1252314 – (fig. 31)

PROJETANDO f0 = feixe de retas (centro (O)), jazida β, de um centro projetivo (P) $\notin \beta$, obtém-se:

f1 = feixe de planos de eixo (P) (O).

CORTANDO f1 com um plano π, obtém-se f2 = feixe de retas de jazida π.

Nesses exemplos, se tivéssemos cortado as figuras f1 com uma reta (s), em vez de utilizar plano π, teríamos obtido os seguintes resultados (itens 121 e 122, págs. 37 a 44):

para item 1252312 – incompatibilidade (caso geral);

para item 1252313 – incompatibilidade (caso geral);

para item 1252314 – ponteada.

125232 – Aplicação (excluindo as hipóteses particulares previstas nos itens 121 e 122):

1252321 – Se f0 é constituída de PONTOS, RETAS ou PLANOS, f1 será gerada por RETAS ou PLANOS e f2 por PONTOS ou RETAS.

1252322 – Relativamente ao número "n" de dimensões de f0, quando:

12523221 – "n" = 0, 1 ou 2, PROJETANDO de um ponto (P) uma figura f0 de n dimensões, gera-se uma figura de "n + 1" dimensões.

CORTANDO com um plano π a figura f1, obtém-se f2 de dimensões = (n + 1) − 1.

12523222 – "n" = 3, f1 será ainda tri-dimensional e f2 se apresenta bi-dimensional.

Não foram consideradas as hipóteses que resultam aspectos particulares de f2, decorrentes de (P) ∈ jazida de f0.

125233 – Conclusões:

1252331 – Pelas operações projetivas, podemos transformar figuras de:

PONTOS em formas de RETAS e reciprocamente;

RETAS em formas de PLANOS e reciprocamente;

PONTOS em formas de PLANOS e reciprocamente.

1252332 – Se a figura f0 tem "n" dimensões, sendo:

n = 0, 1 ou 2, a figura f1 terá "n + 1" dimensões e f2, reciprocamente terá n dimensões;

1252333 – n = 3, a figura f1 conserva-se tri-dimensional e f2 será bi-dimensional.

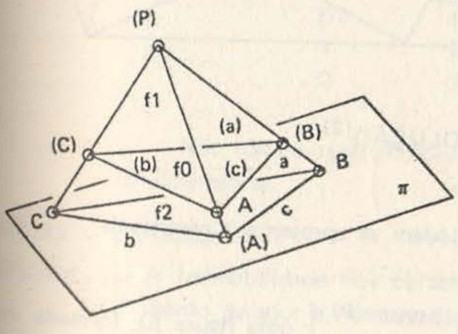


Fig. 28

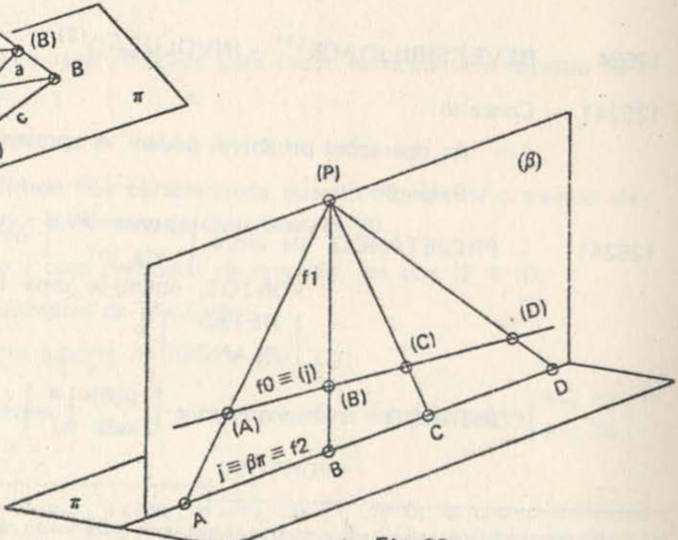


Fig. 29

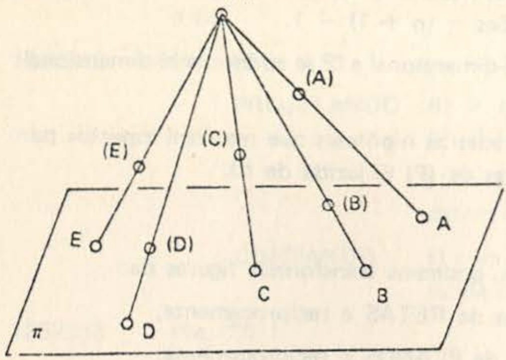


Fig. 30

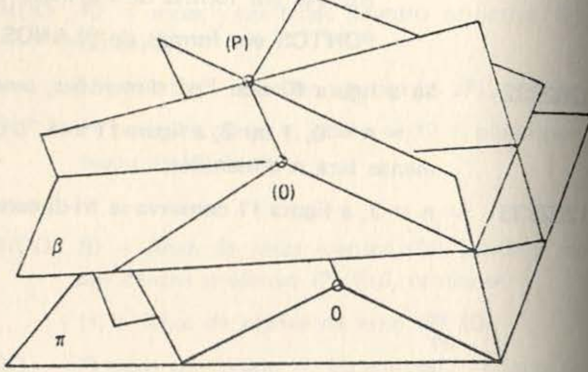


Fig. 31

12524 – REVERSIBILIDADE(1) – INVOLUÇÃO(2)

125241 – Conceito:

As operações projetivas podem se apresentar "reversíveis".

Exemplo:

1252411 – PROJETANDO de um/a | ponto (P) / reta (p) | uma figura f0, formada de PONTOS, obtém-se uma figura f1, constituída de | RETAS / PLANOS |.

CORTANDO f1 com um/a | plano π / reta (s) |, obtém-se f2, formada de PONTOS.

---

(1) De REVERSÍVEL = voltado para traz = que pode retornar ou retorna ao primitivo estado.

(2) Movimento regressivo. Em Matemática: "Transformação que é idêntica à sua inversa".

1252412[1] – PROJETANDO de um ponto (P) uma figura f0, formada de RETAS, obtém-se uma figura f1, gerada por PLANOS.

CORTANDO f1 com um plano π, obtém-se f2, formada de RETAS.

"QUANDO f2 $\equiv$ f0, A REVERSIBILIDADE DENOMINA-SE **INVOLUÇÃO**".

Utilizando o que foi apresentado nos itens 121 e 122, págs. 37 a 44, poderemos formular outros exemplos.

125242 – Aplicação:

(excluindo as hipóteses particulares previstas nos itens 121 e 122):

1252421 – Se f0 é constituída de $\left|\begin{array}{c}\text{PONTOS}\\ \text{RETAS}\end{array}\right|$ e f1 de $\left|\begin{array}{c}\text{retas}\\ \text{planos}\end{array}\right|$ f2[2] **retorna ou** reverte a uma figura de $\left|\begin{array}{c}\text{PONTOS}\\ \text{RETAS}\end{array}\right|$.

1252422 – Considerando o número de dimensões, zero, uma, duas ou três existentes em f0, f1 e f2, verifica-se reversibilidade entre f0 e f2 pelo seguinte quadro:

Número de dimensões de

f0	f1	f2
0	1	0
1	2	1
2	3	2

Não haverá reversibilidade para casos particulares e quando f0 é tri-dimensional.

125243 – Conclusão:

1252431 – A reversibilidade fica caracterizada quando f2 admite o mesmo elemento gerador e número de dimensões de f0.

1252432 – A involução é caso particular de reversão, em que f2 $\equiv$ f0.

São exemplos de involução:

12524321 – reta ou plano suporte de f0 $\in \pi$ (fig. 32);

12524322 – centro projetivo $\left|\begin{array}{c}(P)\\ (P\infty)\end{array}\right|$ = ponto central da involução. $\left|\begin{array}{c}\text{Fig. 33}\\ \text{Fig. 34}\end{array}\right|$.

---

(1) Nesse exemplo não se aplicou "projetar de uma reta (p)" devido às incompatibilidades (itens 121 e 122). Tampouco "cortar com uma reta (s)", porque não haveria reversibilidade.

(2) Desde que resulte de "cortar com plano".

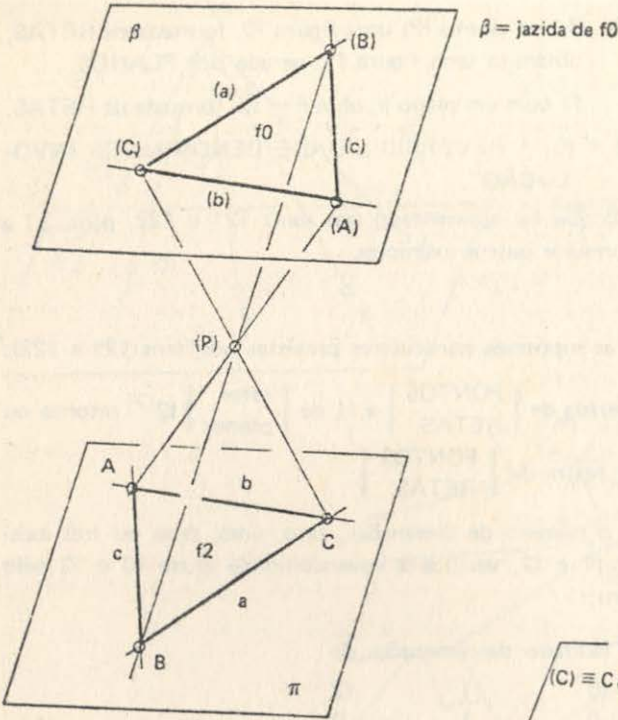


Fig. 33

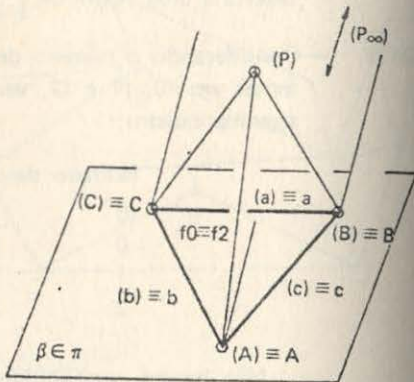


Fig. 32

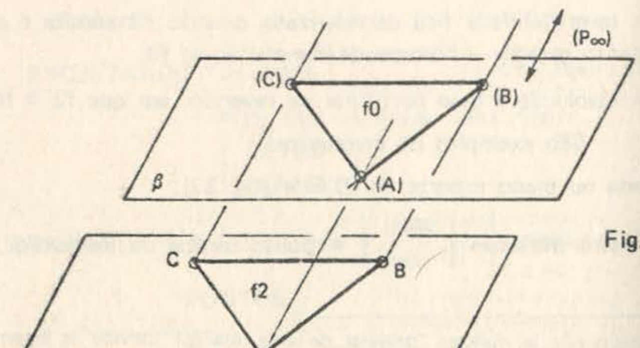


Fig. 34

12525 – RAZÃO[1]

125251 – Conceito:

A palavra foi empregada para exprimir "relação entre grandezas da mesma espécie".

Portanto, torna-se necessário, para estabelecer ou fixar razão, introduzir "elementos referenciais" que possibilitem determinar tais grandezas.

O número de referenciais necessários à localização de um ente (elemento) na forma à qual deu origem, conforme estudado em "Formas geométricas fundamentais": classificação (itens 1127, 11273, págs. 28 e 32), poderia servir como critério para o estabelecimento de uma razão nessa forma.

Entretanto, essa possibilidade não impede adoção de outros critérios. É o que se verifica em relação às "formas de 1ª espécie"[2] para as quais se aplica o seguinte teorema[3].

> "A razão dupla (ou anarmônica),[4] que se pode estabelecer entre quatro elementos de uma forma fundamental de 1ª espécie, é invariante nas operações projetivas".

Demonstração:

Seja f0, forma fundamental de 1ª espécie, a ponteada de jazida (j) na qual destacamos os pontos (A), (B), (C) e (D) (fig. 35).

Projetando (j) de um eixo (p).

(p) não coplanar (j); gera-se f1, feixe de planos projetantes de eixo (p), no qual destacaremos, por correspondência com os pontos (A), (B), (C) e (D), os planos projetantes α, β, γ e δ do referido feixe de planos.

---

(1) Tem vários significados, mesmo no âmbito das ciências matemáticas (Novo Dicionário Aurélio, 1ª edição (2ª impressão). EDITORA NOVA FRONTEIRA.

(2) Item 11273, pág. 28 a 32.

(3) Atribuído a Pappus de Alexandria (séc. IV), conforme se encontra em Luís de Albuquerque, "Elementos de Geometria Projetiva e Geometria Descritiva", pág. 31 e demonstrado por Poncelet (Álvaro J. Rodrigues, Geometria Descritiva, 2º Volume, pág. 19 e segts., 2ª Edição 1953, Editora Agir).

(4) Corresponde à divisão entre duas razões simples (produto de uma pelo inverso da outra).

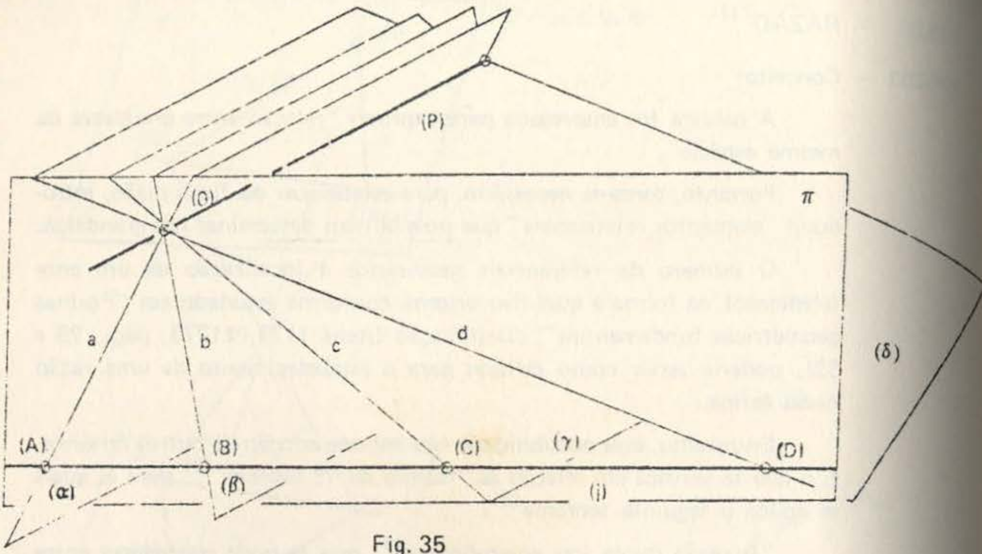


Fig. 35

Cortando f1 com um plano $\pi \supset (j)$ e sendo $\pi \perp (p)$, gera-se f2, feixe de retas de centro $(O) \equiv (p) \cap \pi$ e jazida π.[1] Nesse feixe de retas destacaremos, por correspondência com os planos α, β, γ e δ, as retas de interseção desses planos com π, ou sejam, retas (O) (A), (O) (B), (O) (C), (O) (D).

Sejam **a**, **b**, **c**, **d** os trechos dessas retas, compreendidos entre o centro (O) e (A), (B), (C), (D), respectivamente.

Destaquemos no plano π os $\triangle$ (O) (A) (C) e (O) (B) (C).

Nesses $\triangle$ podemos estabelecer as seguintes relações:

$$\frac{\overline{(A)\ (C)}}{\overline{(O)\ (A)}} = \frac{\text{sen } \widehat{ac}}{\text{sen } \widehat{c(j)}} \quad (1) \qquad \frac{\overline{(B)\ (C)}}{\overline{(O)\ (B)}} = \frac{\text{sen } \widehat{bc}}{\text{sen } \widehat{c(j)}} \quad (2)$$

Dividindo, membro a membro, as igualdades (1) e (2), vem:

$$\frac{\overline{(A)\ (C)}}{\overline{(B)\ (C)}} = \frac{\overline{(O)\ (A)}}{\overline{(O\ (B)}} \times \frac{\text{sen } \widehat{ac}}{\text{sen } \widehat{bc}} \quad (3)$$

(1) Desde que π não contenha (p), o resultado da seção será sempre "feixe de retas" (item 12241, págs. 41 a 44). As condições estabelecidas para a posição do plano π, visem generalizar a demonstração ($\pi \supset (j)$), determinando simultaneamente, a grandeza dos ângulos diedros ($\pi \perp (p)$) formados entre os planos do feixe de planos de eixo (p).

Repetindo esse raciocínio para Δ (O) (A) (D) e (O) (B) (D) deduzimos:

$$\frac{\overline{(A)\ (D)}}{\overline{(B)\ (D)}} = \frac{\overline{(O)\ (A)}}{\overline{(O)\ (B)}} \times \frac{\text{sen}\ \widehat{ad}}{\text{sen}\ \widehat{bd}} \qquad (4)$$

Dividindo membro a membro as igualdades (3) e (4), vem:

$$\frac{\overline{(A)\ (C)}}{\overline{(B)\ (C)}} : \frac{\overline{(A)\ (D)}}{\overline{(B)\ (D)}} = \frac{\text{sen}\ \widehat{ac}}{\text{sen}\ \widehat{bc}} : \frac{\text{sen}\ \widehat{ad}}{\text{sen}\ \widehat{bd}} \qquad (5)$$

Essa relação corresponde à **razão anarmônica** verificada entre os pontos (A), (B), (C) e (D) da ponteada de jazida (j); entre os planos (α), (β), (γ) e (δ) do feixe de planos de eixo (p) e entre as retas (O) (A), (O) (B), (O) (C) e (O) (D) do feixe de retas de centro (O) e jazida π.

Na forma clássica de apresentação da relação (5) tem-se:

((A) (B) (C) (D)) = ((α) (β) (γ) (δ)) = (a, b, c, d)

Portanto:

PROJETANDO de um/a | ponto (P) / reta (p) | uma figura f0 $\equiv$ ponteada de jazida (j), a razão anarmônica ((A) (B) (C) (D)) entre os pontos da ponteada (j) se mantém "invariante" na quaterna de projetantes | (a, b, c, d) / ((α) (β) (γ) (δ)) | obtida em f1 $\equiv$ feixe de | retas / planos | projetantes gerado com essa operação.

CORTANDO com um/a | plano π / reta (s) | a figura f1, obtém-se f2 $\equiv$ $\equiv$ | feixe de retas / ponteada | na qual se verifica a mesma razão anarmônica entre os elementos correspondentes | ((a, b, c, d)) / ((α) (β) (γ) (δ)) | já estabelecida em f0 e transferida à f1.

125252 – Aplicação:[1]

Tratando-se de uma figura qualquer f0, não necessariamente forma de 1ª espécie, poderemos decompô-la em formas de 1ª espécie, se for útil à aplicação dessa propriedade.

Isso porque a razão simples, sempre possível de ser estabelecida, **em geral não é projetiva.** Todavia, existem aspectos particulares de f0 e das operações projetivas, onde se constata a **invariância** dessa razão. Estudaremos o assunto no Capítulo II.

De um modo geral:

PROJETANDO uma quaterna de elementos ∈ f0 ≡ forma fundamental de 1ª espécie, obtém-se em f1 ≡ forma de 1ª espécie, uma quaterna cujos entes correspondentes, guardam entre si, a mesma razão anarmônica estabelecida em f0.

CORTANDO f1 obtém-se f2 ≡ forma de 1ª espécie, na qual constata-se a presença da quaterna correspondente, com igual razão anarmônica àquela estabelecida em f0 e transferida a f1.

125253 – Conclusão:

Pelas quaternas anarmônicas

$$((A)\ (B)\ (C)\ (D)) = ((\alpha)\ (\beta)\ (\gamma)\ (\delta)) = (a,\ b,\ c,\ d)^{(2)}$$

podemos afirmar:

"É constante o produto entre as grandezas determinadas por quatro elementos geradores de formas de 1ª espécie, quando essas formas são consecutivas,[3] isto é:

$$f0 \xrightarrow{\ p\ } f1 \xrightarrow{\ s\ } f2$$

os referidos quatro elementos estão em correspondência projetiva e as grandezas resultam de uma razão dupla".

---

(1) Em "A Geometria Descritiva nas Artes" de Maria Izabel do Rego Barros P. de Oliveira, encontramos interessante estudo sobre o assunto. Edição de 1974. GRÁFICA EDITORA BAHIENSE.

(2) Relação 5, pág. 61.

(3) Resultantes das operações projetivas, aplicadas sucessivamente à figura f0 (item 124).

CAPÍTULO II – CONCLUSÕES DO EXPOSTO NO CAPÍTULO I OBJETIVANDO APLICAÇÃO AOS SISTEMAS PROJETIVOS.

21 – PARTICULARIZAÇÃO E ANÁLISE, TENDO EM VISTA OS ITENS 22 E 23 DESTE CAPÍTULO E APLICAÇÃO AOS SISTEMAS PROJETIVOS.

210 – Figura "f0".
211 – Centro Projetivo (P) ou (P_∞).
212 – Figura projetante ou figura "f1".
2121 – Natureza de f1.
21211 – "Feixe" e "Estrela" de projetantes, cônica e cilíndrica.
21212 – "Superfície de projetantes".
2122 – f1 transformada de f0.
213 – Plano secante π ou plano "π de projeção".
2131 – Projeção "f2". Significado f0 $\nwarrow\underline{\;p\;}\nearrow$ f2.
2132 – Posição relativa entre o plano de projeção e o centro projetivo.
2133 – Posições de π relativamente à projetante. Consequências para f2.
2134 – Posições de π relativamente à f0. Consequências para f2.
214 – Propriedades das operações projetivas.
2141 – Proposição geral.
2142 – Conclusões:
21421 – Pertinência.
21422 – Dualidade.
21423 – Reciprocidade ou inversão.
21424 – Reversibilidade e involução.
21425 – Razão.

22 – ESTUDO DA CORRESPONDÊNCIA PROJETIVA ENTRE f0, f1 e f2.

220 – Elementos fundamentais da operação projetiva.
221 – Hipoteses referentes aos elementos fundamentais da operação projetiva.
2211 – Figura f0 a ser projetada.
2212 – Centro projetivo (P) ou (P_∞).
2213 – Figura projetante f1.
2214 – Plano de projeção π.
222 – Conclusões do item 221 aplicadas a relação entre f0 e f2.

223 — Teoremas básicos da relação entre f0, f1 e f2 (decorrentes dos itens 221 e 222).

2231 — T.1 — "f0 admite jazida e (P) ou (P_∞) $\in$ jazida ..."

2232 — T.2 — "f0 admite jazida e (P) ou (P_∞) $\notin$ jazida ..."

2233 — T.3 — "π // projetante ..."

224 — Teoremas referentes ao contorno de f1 e f2 (figuras "ℓ1" e "ℓ2").

2241 — T.1 — "f1 é tri-dimensional e admite contorno ℓ1 ..."

2242 — T.2 — "f1 admite contorno ℓ1, f2 terá contorno ℓ2 ..."

2243 — T.3 — "Projeção da linha (a) de contato ou apoio entre ℓ1 e f0 ..."

225 — Homologia e operação projetiva.

2251 — Conceito de homologia.

2252 — Comparação com operação projetiva.

2253 — Operação projetiva no "Teorema de Desargues".

226 — Representação projetiva da figura f0.

23 — ELEMENTOS FUNDAMENTAIS PERTINENTES A CADA OPERAÇÃO PROJETIVA. INFLUÊNCIA NA "CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS PROJETIVOS". POSIÇÕES RELATIVAS E DENOMINAÇÕES USUAIS EM CADA SISTEMA.

230 — Observações preliminares.

231 — Distribuição dos elementos fundamentais por operação projetiva.

2311 — Projetar.

2312 — Cortar.

232 — Sistemas cônico e cilíndrico.

233 — Sub-divisões dos sistemas cônico e cilíndrico.

2331 — Sistemas cônicos ou centrais.

2332 — Sistemas cilíndricos ou paralelos.

234 — Posições do centro projetivo (P) ou (P_∞) relativamente a figura f0 a ser projetada e ao plano de projeção π, quando esses três elementos são distintos. Correlação com os teoremas dos itens 223 e 224.

235 — Denominações usuais atribuidas aos elementos da operação projetiva.

236 — Significado da expressão "sentido de visada".

CAPÍTULO II
CONCLUSÕES DO EXPOSTO NO CAPÍTULO I OBJETIVANDO APLICAÇÃO AOS SISTEMAS PROJETIVOS

21 – PARTICULARIZAÇÃO E ANÁLISE, TENDO EM VISTA OS ITENS 22 e 23 DESTE CAPÍTULO. E APLICAÇÃO AOS SISTEMAS PROJETIVOS.

Quanto:

210 – **À Figura[1] "f0".**

Preferivelmente suporemos que seja gerada pelo ponto.

Entretanto, podemos admitir outros entes geradores, que possibilitem aplicação do raciocínio das operações projetivas a qualquer figura, considederada, para efeito de representação projetiva, como **figura dada**, genericamente denominada "f0". No Capítulo I, item 11223, pág. 24 e segts, desenvolvemos estudo sobre esse assunto. Ela independe do critério e características de classificação (item 1123, pág. 25).

No item 12, Cap. I, págs. 37 a 44, referimo-nos as "incompatibilidades" que podem ocorrer na aplicação das operações projetivas. Essas incompatibilidades, decorrem do elemento gerador de f0 (nota nº 1, roda-pé da pág. 39) não se submeter às condições impostas para as referidas operações (quadro dos itens 12141/2 e 12241/2, págs. 39 a 44).

Considerando as particularizações que proporemos nos itens seguintes, verificaremos possibilidades de maior generalização, quando se considera que o ente gerador de f0, em ordem de preferência, seja: ponto, reta, plano[2] etc. (item 112813, pág. 34).

211 – **Ao Centro Projetivo.**[3]

Tendo em vista aplicação aos "Sistemas projetivos mais utilizados" (Capítulo III), operaremos somente com "projetar de um ponto".

---

(1) Item 112, pág. 23 a 36

(2) De um modo geral, verifica-se **incompatibilidade** quando f0 é constituída de planos. Item 12141, págs. 39 e 40.

(3) Item 12, págs. 37 e segts..

Considerado **ponto fixo** do espaço, ele pode ser próprio (P),[1] ∈ espaço finito, ou impróprio (P∞), ∈ espaço infinito.[2]

O centro projetivo pode ou não estar situado em **f0**.

Então: (P) ou (P∞) $\left| \begin{matrix} \in \\ \notin \end{matrix} \right|$ f0.

No item 2121 desenvolveremos esse assunto.

212 – **À Figura-Projetante ou Figura "f1".**

2121 – Natureza de f1.

Por ser o resultado da operação **projetar f0**,[3] contém (P) ou (P∞), podendo ser constituída de uma ou mais retas ou planos projetantes.

21211 – "Feixe" e "Estrela" de projetantes, cônica ou cilíndrica.

Adotaremos a expressão "projetante" associada às palavras "feixe" ou "estrela", embora não estejamos considerando todos os entes que constituem as formas sob essas denominações, mas somente, aquelas que têm "função de projetar". Assim, a figura "f1" (item 120) se apresentará sempre como um "feixe" ou "estrela" de "projetantes" cujo centro é o centro projetivo (P) ou (P∞).

Quando o centro projetivo é ponto próprio (P), f1 terá **forma cônica**, quando impróprio (P∞), sua **forma** será **cilíndrica**.

21212 – "Superfície de projetantes".

Empregaremos essa expressão com o objetivo de distinguir projetantes que:

212121 – Estão situadas na "periferia" da estrela de projetantes f1, servindo de "contorno" a essa figura. Constituem, portanto uma figura "ℓ1".[4] A figura f0 fica envolvida por "ℓ1". Assim: ℓ1 ∈ f1 e ℓ1 envolve f0, de modo que ℓ1 fica constituída de: "retas ou planos tangentes[5] à f0"; "retas ou planos, que se "apoiam em f0", não se admitindo f0, cortado

---

(1) Usa-se também "S" (de Spectateur), "V" (de ponto de Vista), "O" (de Observador), para denominar o "centro projetivo", "vértice de projetantes" ou "polo de projetantes", conforme referido no item 1212, pág. 37, Cap. I.

(2) Itens 1112/13, págs. 20 a 22, Cap. I.

(3) Item 121, págs. 37 a 41, Cap. I.

(4) Itens 1124/26, págs. 26 e 28, Cap. I. Usamos "ℓ1" por se tratar de contorno da figura "f1".

(5) Item 112833, pág. 35, Cap. I.

por ℓ1. A projetante ∈ ℓ1 não pode ser secante[1] à f0 (se o fosse, não seria geratriz de ℓ1), porém é possível existir mais de um ponto de tangência ou apoio em f0.

212122 – Constituem somente uma superfície (caso de f0 ser uni-dimensional, genericamente).

Portanto, f1 pode ser "uni, bi ou tri-dimensional", isto significa que f1 pode ser "reta", "plano" (projetante ou jazida de feixe de retas projetantes), estrela de retas projetantes.

2122 – f1 transformada de f0.

Não se admite projetante, reta ou plano que deixe de conter elemento ∈ f0,[2] servindo f0 como "diretriz de f1".[3]

A figura f1, constituída de retas ou planos projetantes é "transformada projetiva de f0".

Podemos formular hipótese para f0, concluindo f1, conforme quadro seguinte:

	HIPÓTESE Quando f0 for igual a:[4]	CONCLUSÃO f1 será igual a:
21221	Ponto (zero-dimensional). Reta (uni-dimensional) $\supset$ (P) ou (P_∞)	**Reta (uni-dimensional).**
21222	Reta, jazida ou não (uni-dimensional, $\not\supset$ (P) ou (P_∞). Plano, jazida ou não (uni ou bi-dimensional $\supset$ (P) ou (P_∞).	**Plano (bi-dimensional).**
21223	**Linha não plana (uni-dimensional)** $\supset \left\lvert \begin{matrix} (P) \\ (P_\infty) \end{matrix} \right\rvert$ ou $\not\supset \left\lvert \begin{matrix} (P) \\ (P_\infty) \end{matrix} \right\rvert$ **Plano, jazida ou não (uni ou bi-dimensional)** $\not\supset \left\lvert \begin{matrix} (P) \\ (P_\infty) \end{matrix} \right\rvert$	**Superfície não plana (bi-dimensional) ou Figura tridimensional.**

(1) Item 112831, pág. 35, Cap. I.
(2) Item 1212, pág. 37, Cap. I.
(3) Item 11222, págs. 23 e 24, Cap. I.
(4) Item 112, págs. 23 a 36, Cap. I.

	HIPÓTESE Quando f0 for igual a:	CONCLUSÃO f1 será igual a:
21224	Figura não plana (bi ou tri-dimensional $\supset \left\| \begin{matrix} (P) \\ (P_\infty) \end{matrix} \right\|$ ou $\not\supset \left\| \begin{matrix} (P) \\ (P_\infty) \end{matrix} \right\|$	Figura não plana (bi ou tri-dimensional).

2123 – Quando f1 é forma cilíndrica (centro projetivo (P_∞)) e $(P_\infty) \in$ f0, concluímos:

21231 – Se f0 admite um ou mais pontos impróprios (é figura **aberta**, conforme item 11261, pág. 27, Cap. I), $(P_\infty) \in$ somente a uma direção assintótica de f0,[1] fig.36.

21232 – Se f0 não admite ponto impróprio (é figura **fechada**, conforme item 11262, pág. 28, Cap. I) existirá "incompatibilidade" com a hipótese $(P_\infty) \in$ f0. Assim, "não é possível admitir $(P_\infty) \in$ f0 quando esta figura é fechada.

f0 = parabolóide de revolução.
(e) = eixo de f0
$(P_\infty) \in (e) \equiv$ direção do ponto impróprio de f0.

Fig. 36

213 – Ao Plano Secante π ou Plano "π" de Projeção.

Ainda, tendo em vista aplicação aos "Sistemas projetivos mais utilizados", operaremos somente "cortando com um plano π".

É oportuno observar o seguinte:

2131 – Projeção f2. Significado de f0 $\xrightarrow{P}$ f2.

"Projeção" resulta da operação "cortar f1" com o "plano π".

É a figura que denominamos "f2"[2], lugar de pontos comuns às retas ou planos projetantes e ao plano π.

---

(1) Direção do/a | ponto / reta ou curva | de contato entre | reta / plano ou superfície curva | e | curva / superfície curva | quando esse/a | ponto / reta ou curva | é impróprio/a.

(2) Item 124, pág. 46, Cap. I.

Portanto: f2 ∈ f1 e f2 ∈ π.

Porque f2 ∈ π, apresenta no máximo, duas dimensões. É constituida de um/a ou mais pontos ou retas de interseção (traço de projetante/s, reta/s ou plano/s) no plano π.

Então adotaremos: f0 $\xrightarrow{P}$ f2 significando que f2 resultou de f0 por "projeção". Aqui, esse vocábulo (projeção), tem sentido amplo, pois engloba "projetar f0", determinando f1 e "cortar f1", obtendo f2. No Cap. I, item 123/4, págs. 45 e 46, fizemos referência a esse assunto.

2132 – Posição relativa entre o plano de projeção e o centro projetivo.

O plano de projeção π não deverá conter o centro projetivo.

Essa restrição é única e visa evitar "total descaracterização" da representação projetiva de f0, porque a projeção f2 ficaria reduzida a um ponto ≡ (P) ou (P_∞), uma reta que contém (P) ou (P_∞) ou um setor de feixe de projetantes que admite (P) ou (P_∞) como centro.[1]

2133 – Posições de π relativamente a projetante (reta ou plano, elemento de f1, ou toda a figura f1). Conseqüências para f2.

21331 – π // projetante: resulta que a interseção da reta/plano projetante com π será "ponto ou reta impróprio/a.
Isso significa que, aos elementos (próprios ou impróprios) de f0 ∈ projetante // π, corresponderão "elementos impróprios de f2".

21332 – π $\angle$ projetante: resulta que a interseção da reta/plano projetante com π será ponto ou reta próprio/a.
Isso significa que, aos elementos (próprios ou impróprios) de f0 ∈ projetante $\angle$ π, corresponderão elementos próprios de f2.

---

(1) BUSTAMANTE, L.S., in "Projeções da Esfera" ...., págs. 70 a 73 (tese já referida no item 1232.

2134 – Posições de π relativamente à f0. Conseqüências para f2.

FORMA DE f0 ∉ f1	POSIÇÃO de π	FORMA DE f2
21341 – zero dimensional (ponto)	qualquer	zero dimensional (ponto)
21342 – uni-dimensional (linha, reta em particular):		
213421 – ∈ plano β (jazida de f0).	π // β ou π anti// β.[1]	uni-dimensional plana. ≂ f0:
	π ⁄ β não sendo π anti // β).	uni-dimensional plana, homóloga de f0.
213422 – ∉ plano β (f0 não é plana).	qualquer	uni-dimensional plana.
21343 – bi-dimensional (superfície, plano em particular):		
213431 – ∈ plano β (jazida de f0)[2]	π // β ou π anti// β.	bi-dimensional (plana) ≂ f0.
	π ⁄ β (não sendo π anti // β).	bi-dimensional plana, homóloga de f0.
213432 – ∉ plano β (f0 não é plana).	qualquer	bi-dimensional plana.
21344 – tri-dimensional[3]	qualquer	bi-dimensional plana.

(1) Figuras planas "anti-paralelas" são tais que, uma delas é paralela a simétrica da outra.

(2) O mesmo que para item 213421, sendo que f0 referido naquele item (213421) serve de "contorno", figura "ℓ", para f0 (estudada nos itens nºs. 1124 a 1126).

(3) Quando f0 é "poliedro" podemos decompô-lo em faces, arestas e vértices, aplicando o raciocínio dos itens relativos a essas figuras.

214 – Às propriedades das "Operações Projetivas".

Aplicando as particularizações referidas nos itens 210 e 211, podemos formular a seguinte

2141 – Proposição:

| Projetando de / Cortando com | um | ponto (P) / plano π | uma figura | f0, zero, uni, bi ou tri / f1, uni, bi ou tri | dimensional, constituída de | pontos ou retas / retas ou planos |, obtém-se uma figura | f1, uni, bi ou tri / f2, zero, uni, bi | -dimensional, constituída de | retas ou planos / pontos ou retas | tal que, não será possível existir ente $\in$ f0 que não tenha seu correspondente representado em f1 e f2.

Dessa proposição tiramos as seguintes

2142 – Conclusões quanto à:

21421 – Pertinência[1] (figura 1).

Seja f0 constituída de pontos[2]:

214211 – A figura f2 $\in \pi$ será constituída de pontos reais próprios e impróprios", tal que, "ao ponto (AO) $\in$ f0, corresponde somente o ponto A2 $\in$ f2" (correspondência unívoca).

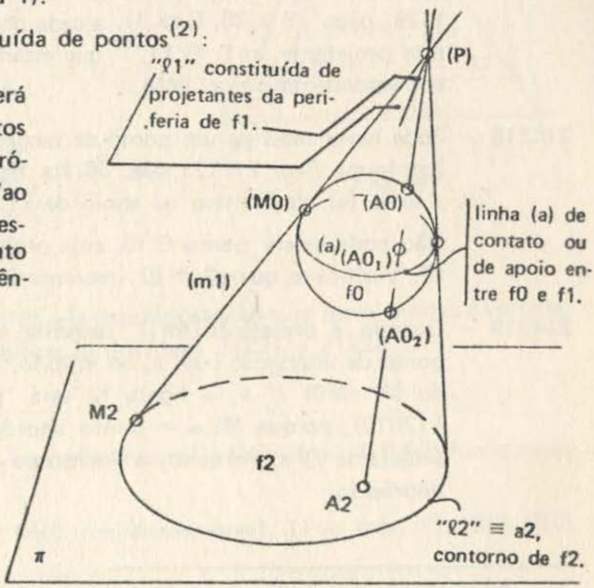


Fig. 37

(1) Item 125m págs. 46 a 62, Cap. I.

(2) Poderíamos raciocinar com f0 constituída de retas, conforme previsto na proposição 2141. Concluiríamos ser f2 formada de retas (reversibilidade).

214212 – Entretanto, "o ponto A2, poderá corresponder a vários pontos ∈ f0, contidos na projetante (P) (A0) ∈ f1" (correspondência **multívoca**).

214213 – Quando, "a um ponto A2 ∈ f2, corresponde um e somente um ponto (A0) ∈ f0 e reciprocamente", a correspondência denomina-se **bi-unívoca** (única que dá aos SISTEMAS PROJETIVOS, possibilidade de "conhecida f2, determinar f0 e inversamente").

214214 – Qualquer ponto (A0) ∈ f0, estará representado nas operações projetivas, por uma reta "(P) (A0) ou (P_∞) (A0), projetante" e um ponto "A2, projeção de (A0) em π".

214215 – Portanto: "Se um ente ∈ f0, a projeção do ente ∈ f2 (projeção de f0 no plano π)".

214216 – Estando projetante (P) (A0) // π, a projeção de (A0) será ponto impróprio "A2 ∞". Isso significa que o traço de (P) (A0) no plano π está no infinito.

214217 – Se a figura f2, constituída de pontos ∈ π (portanto, figura ∈ π) possuir contorno "ℓ2" (adaptação para f2 do estudo feito nos itens 1124 a 1126, págs. 26 a 28, Cap. I), a cada ponto M2 ∈ ℓ2, corresponde uma reta projetante (m1) ∈ ℓ1,(1) que estará tangente ou apoiada em f0, no correspondente ponto (M0).

214218 – Pode haver mais de um ponto de tangência ou de apoio entre (m1) e f0 (conforme item 212121, pág. 66. Na fig. 37, o lugar dos pontos (M0) é a linha (a), de contato ou apoio de ℓ1 em f0.

Não pode existir ponto ∈ f0, cuja projeção esteja exterior ao contorno ℓ2. Verifica-se que a2 ≡ ℓ2 (teorema 2243) página 90).

214219 – Quando a projetante (m1), tangente a f0 ou nela apoiada, tiver seu ponto de interseção com π, no infinito, M2∞, significando estar (m1) // π ou (P) (M0) // π, a figura f2 será "parcialmente contornada" (item 112613), porque M2 ∞ = ponto impróprio. Pode existir uma ou mais projetante // π. Portanto, o "contorno ℓ2" pode ter mais de um ponto impróprio.

---

(1) Pelos referidos itens 1124 a 1126, (Cap. I) e pelo 212121, pág. 66, verifica-se a correspondência entre a superfície "ℓ1" ∈ estrela de projetantes "f1" e "ℓ2", traço da referida superfície (ℓ1) no plano π. Verifica-se também, que "ℓ1" envolve f0, tangenciando-a ou nela se apoiando e o lugar dos pontos de contato ou de apoio, como (MO), é uma linha ∈ f0 e ∈ f1. Essa linha se projeta em ℓ2. A figura ℓ2 é denominada "contorno aparente" de f0. Teoremas 2241 a 2243, págs. 87 a 91.

21422 – Dualidade.[1]

Expressões que se encontram entre as barras (item 2141) indicam a dualidade.

21423 – Reciprocidade ou inversão[2] (fig. 38)

Dada uma figura qualquer f0, zero, uni, bi ou tri-dimensional, pela operação projetar, passa-se a uma figura f1, cujo número de dimensões, será:[3]

214231 – **uni-dimensional**, se f0 é zero ou uni-dimensional.

214232 – **bi-dimensional**, se f0 é uni ou bi-dimensional.

214233 – **tri-dimensional**, se f0 é bi ou tri-dimensional.

Seja f0 = paralelepípedo (A0) (B0) ... ... (H0), composto de faces, como retângulo (A0) (D0) (E0) (H0), arestas como (D0) (H0), vértices como (A0).

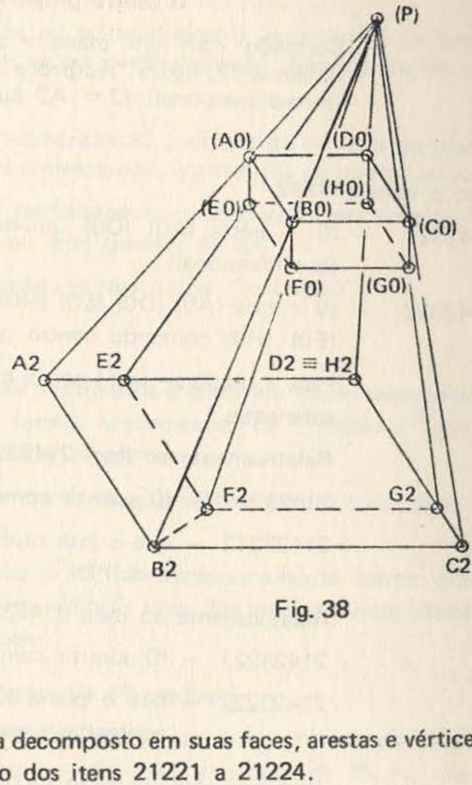


Fig. 38

Admitindo que (f0) seja decomposto em suas faces, arestas e vértices, podemos verificar a aplicação dos itens 21221 a 21224.

Para o item 214231

2142311 – f0 = vértice (A0) (zero-dimensional); f1 = reta (P) (A0) (uni-dimensional).

2142312 – f0 = aresta (D0) (H0) (uni-dimensional); f1 = reta (P) (D0) (H0) (uni-dimensional).

---

(1) Item 125, pág. 46 e 12522, págs. 51 a 53, Cap. I.
(2) Item 125, pág. 46 e 12523, págs. 53 a 56, Cap. I.
(3) Item 2122, pág. 67.

Para a hipótese de f0 ser uni-dimensional (item 21221), são condições necessárias e suficientes:

21423121 – f0 admitir como suporte uma reta;

21423122 – que a reta suporte de f0 ≡ projetante, isto é, contenha o centro projetivo (P).

Cortando com um plano π a figura f1 (suposta uni-dimensional), obtém-se f2, figura "recíproca" ou "inversa" de f1, porque é "ponto" (zero-dimensional): f2 = A2 ou f2 = D2 ≡ H2.

Para o item 214232

2142321 – f0 = aresta (A0) (D0) (uni-dimensional); f1 = plano (A0) (P) (D0) (bi-dimensional).

2142322 – f0 = face (A0) (D0) (E0) (H0) (bi-dimensional); f1 = plano (A0)(D0) (E0) (H0) contendo centro projetivo (P) (portanto bi-dimensional).

Para a hipótese de f1 ser bi-dimensional, são condições necessárias e suficientes.

Relativamente ao item 2142321:

21423211 – f0 admitir como suporte uma reta;

21423212 – que a reta suporte de f0, não contenha o centro projetivo (P).

Relativamente ao item 2142322:

21423221 – f0 admitir como suporte um plano;

21423222 – que o plano suporte de f0 ≡ plano projetante, isto é, contenha o centro projetivo (P).

Cortando com um plano π a figura f1 (suposta bi-dimensional), obtém-se f2, figura "recíproca" ou "inversa" de f1, porque é "reta" (uni-dimensional): f2 = A2D2 ou f2 = reta que contém projeções A2D2E2H2 = = traço do plano (P) (A0) (D0) (E0) (H0) no plano π.

Para o item 214233

2142331 – f0 = face (A0) (B0) (C0) (D0) (bi-dimensional); f1 = figura (P) (A0) (B0) (C0) (D0) (tri-dimensional).

2142332 – f0 = paralelepípedo (A0) (B0) .... (H0) (tri-dimensional); f1 = figura tri-dimensional (P) (A0) (B0) .... (H0).

Cortando com um plano π a figura f1 (tri-dimensional), obtém-se f2, figura "recíproca" ou "inversa" de f1, porque é plana (bi-dimensional).

f2 é constituída de pontos ou retas ∈ plano π. Esses pontos ou retas são os traços da "estrela de projetantes" (f1) no plano π.

21424 – Reversibilidade e Involução.[1]

Da proposição relativa ao item 2141, pág. 71, conclue-se a reversibilidade quando:

214241 – Projetando f0 (zero, uni, bi ou tri-dimensional), constituída de **pontos** ou **retas**, obtém-se f1 (uni, bi ou tri-dimensional), constituída de retas ou planos.

214242 – Cortando f1 (uni, bi ou tri-dimensional), constituída de retas ou planos, obtém-se f2 (zero, uni ou bi-dimensional), constituída de **pontos ou retas**.

A reversibilidade está perfeitamente caracterizada pela constituição de f2, apresentando o mesmo ente gerador de f0.

Quando f2 = f0 considera-se que houve "involução".

21425 – Razão.[2]

De um modo geral, essa propriedade é relativa a "razão anarmônica", sendo aplicada somente às formas fundamentais de 1ª espécie,[3] isto é, ponteada, feixe de retas e feixe de planos.

A "razão simples" também não é projetiva, sendo constatada somente em casos particulares.

Para uma figura qualquer f0, não necessariamente forma fundamental de 1ª espécie, podemos admitir uma das seguintes possibilidades de aplicação dessa propriedade:

214251 – "f0 seria decomposta em formas de 1ª espécie".

Admitindo f0 constituída de pontos ou retas, criamos um sistema de formas de 1ª espécie que constituiria a estrutura de f0. As razões anarmônicas estabelecidas em f0, seriam transferidas a f1 (figura constituída de projetantes) e a f2 (projeção de f0).

214252 – f0, centro projetivo e plano de projeção apresentam particularidades[4] que possibilitam a aplicação da razão simples.

No item 22: "Estudo da correspondência projetiva entre f0, f1 e f2", desenvolveremos esse assunto.

---

(1) Item 125, pág. 46, 12524, págs. 56 a 57, Cap. I.
(2) Item 12525, págs. 59 a 62, Cap. I.
(3) Item 1127, págs. 28 a 32, Cap. I.
(4) Empregando o raciocínio referido no item 2122 combinado ao do item 213.

22 – ESTUDO DA CORRESPONDÊNCIA PROJETIVA ENTRE f0, f1 e f2

220 – Elementos fundamentais da operação projetiva.

São quatro. Podemos deduzí-los pelo estudo desenvolvido nos itens 12 (Capítulo I, págs. 37 a 62) e 21 (Capítulo II, págs. 65 a 75) e que destacamos na seguinte ordem:

2201 – f0 – designação genérica da FIGURA A SER PROJETADA;

2202 – (P) ou (P∞) – designação que adotamos para o CENTRO PROJETIVO, ponto fixo do espaço finito (P) ou infinito (P∞);

2203 – f1 – designação genérica da FIGURA PROJETANTE, que resulta da operação "projetar f0". É constituída de retas ou planos projetantes;

2203 – π – designação adotada para o PLANO DE PROJEÇÃO, ou plano da operação "cortar f1". A figura de interseção entre π e f1 é denominada PROJEÇÃO DE f0 e designada genericamente, por "f2".

221 – Hipóteses referentes aos elementos fundamentais da operação projetiva.

Relativamente aos quatro elementos referidos no item 220, formulamos as seguintes suposições quanto à/ao:

2211 – Figura a ser projetada (f0):

22111 – f0 admite jazida reta (j) ou plano (β).

$$f0 \in \left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right| \text{ ——————— } Ⓐ$$

22112 – f0 não admite jazida reta (j) ou plano (β).

$$f0 \notin \left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right| \text{ ——————— } Ⓐ1$$

Quando f0 é figura composta (não elementar[1]), pode-se aplicar a hipótese 22111 (Ⓐ) pela decomposição de f0 em pontos (vértices), retas (arestas/geratrizes (retas ou curvas)) ou planos (faces/seções).

(1) 11235, pág. 25

2212 – Centro projetivo:

22121 – (P) ou (P_∞) $\in$ f0 ________________ (B)

22122 – (P) ou (P_∞) $\notin$ f0 ________________ (B1)

2213 – Figura projetante:

22131 – f1 apresenta projetante/s // π ________________ (C)

22132 – f1 não apresenta projetante/s // π ________________ (C1)

2214 – Plano de projeção:

22141 – | π // f0 ou π // somente a alguns elementos $\in$ f0
 π anti// f0 ou π anti// somente a alguns elementos $\in$ f0 | — (D)

22142 – π $\angle$ f0 sem ser anti// f0 (inclusive em relação a quaisquer de seus elementos). — (D1)

222 – **Conclusões do item 221 aplicadas à relação entre f0 e f2.**

A hipótese do item 2214:

π // f0 ou π anti// f0 ________________ (D)

e π $\angle$ f0 sem ser π anti// f0 ________________ (D1)

será possível, quando f0 admitir jazida | reta (j)
 plano (β) | referida no item 22111 ((A)).

Ainda neste item, pode-se admitir seção plana de f0, tal que:

π | //
 anti//
 $\angle$ | plano secante à f0.

Aplicando o raciocínio da "decomposição" de f0 (já referido no item 2211) a hipótese 2214 recai na 2211.

Combinando quatro a quatro as oito hipóteses referidas no item 221, podemos formar quatro grupos de dezesseis hipóteses cada, num total de sessenta e quatro[1] combinações, distribuídas da seguinte forma:

GRUPO 1	01)	A	B	C	D	TEOREMA 1 Item 2231
	02)	A	B	C	D1	
	03)	A	B	C1	D	
	04)	A	B	C1	D1	
GRUPO 2	05)	A	B1	C	D	TEOREMAS 2 e 3 Itens 2232 e 2233
	06)	A	B1	C1	D	
	07)	A	B1	C1	D1	
	08)	A	B1	C	D1	
GRUPO 3	09)	A1	B1	C	D1	TEOREMAS 2 e 3 Item 2232 (decomposição de f0[2] em figuras planas) Item 2233.
	10)	A1	B1	C	D	
	11)	A1	B	C	D	
	12)	A1	B	C	D1	
GRUPO 4	13)	A1	B1	C1	D1	TEOREMAS 1, 2 e 3 Decomposição de f0[2] em figuras planas.
	14)	A1	B1	C1	D	
	15)	A1	B	C1	D1	
	16)	A1	B	C1	D	

---

(1) Aplicando a fórmula de combinação de 8 elementos 4 a 4, temos:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!\ (8-4)!} = 70$$

Entretanto, não podemos considerar a existência de 2 hipóteses contrárias, relativas ao mesmo elemento, numa fila horizontal. Não é possível: A, A1; B, B1; C, C1; D, D1; nem A, A1, B, B1 ou C, C1, D, D1. Portanto, das 70 combinações, teremos que eliminar 6.

(2) Sempre possível quando f0 é figura composta (não elementar), conforme item 11235, pág. 25 e aplicado no item 2211, pág. 76.

223 – **Teoremas básicos da relação entre f0 e f2 (decorrentes dos itens 221 e 222)**

2231 – T.1: "Quando f0 admite jazida $\left|\begin{matrix}\text{reta (j)}\\ \text{plano } (\beta)\end{matrix}\right|$ e o centro projetivo (P) ou

$(P_\infty) \in \left|\begin{matrix}(j)\\ (\beta)\end{matrix}\right|$, a projeção f2, de f0 será: $\left|\begin{matrix}\text{ponto} & (j) \cap \pi\\ \text{reta} & (\beta) \cap \pi\end{matrix}\right|$".

22311 – Hipóteses:

223111 – f0 admite jazida $\left|\begin{matrix}\text{reta (j)}\\ \text{plano } (\beta)\end{matrix}\right|$ ——— A

223112 – (P) ou $(P_\infty) \in \text{f0} \in \left|\begin{matrix}\text{reta (j)}\\ \text{plano } (\beta)\end{matrix}\right|$ ——— B

22312 – Tese: $\text{f2} = \left|\begin{matrix}\text{ponto (j)} \cap \pi\\ \text{reta } (\beta) \cap \pi\end{matrix}\right|$.

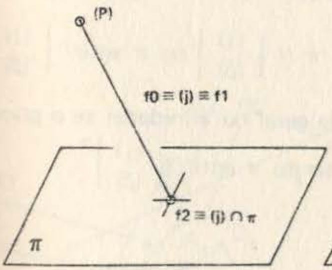


Fig. 39

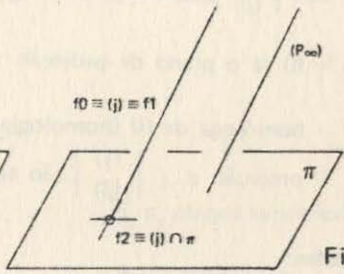


Fig. 40

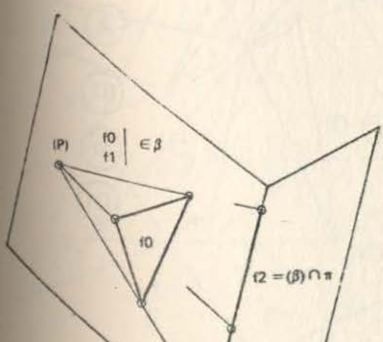


Fig. 41

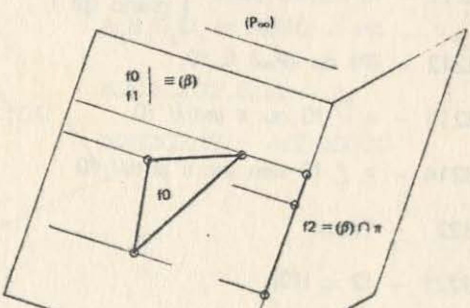


Fig. 42

22313 – Demonstração (figuras 39 a 42).

Pela hipótese (223112) concluímos que f1, resultante da operação "projetar f0" é a/o própria/o $\left| \begin{matrix} \text{reta (j)} \\ \text{plano } (\beta) \end{matrix} \right|$. Então f1 $\equiv \left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$.

Cortando f1 com plano π, obtém-se nesse plano, a figura f2 = $= \left| \begin{matrix} \text{ponto (j)} \cap \pi \\ \text{reta}^{(1)} (\beta) \cap \pi \end{matrix} \right|$.

Esse teorema independe da figura projetante (C) e (C1) e da posição do plano de projeção (D) e (D1), desde que π não contenha (P) ou (P∞), conforme restrição referida no item 2132, pág. 69. Ela abrange todas as hipóteses contidas no GRUPO 1 do item 222, págs. 77/78.

2232 – T.2: "Quando f0 admite jazida $\left| \begin{matrix} \text{reta (j)} \\ \text{plano } (\beta) \end{matrix} \right|$ e o centro projetivo (P) ou (P∞) $\notin \left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$, sua projeção f2 será:

I) $\simeq$ f0 se o plano de projeção π // $\left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$ ou π anti// $\left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$.

II) – homóloga de f0 (homologia geral ou afinidade) se o plano de projeção π $\not\parallel$ $\left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$ não sendo π anti// $\left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$".

22321 – Hipóteses:

223211 – f0 admite jazida $\left| \begin{matrix} \text{reta (j)} \\ \text{plano } (\beta) \end{matrix} \right|$ A

223212 – (P) ou (P∞) $\notin$ f0 B1

223213 – π // f0 ou π anti// f0 D

223214 – π $\not\parallel$ f0 sem ser π anti// f0 D1

22322 – Teses:

223221 – f2 $\simeq$ (f0)

223222 – f2 homóloga de f0 (homologia geral ou afinidade).

---

(1) A denominação "reta" foi empregada com sentido genérico. Conforme a natureza de f1, plano projetante ou feixe de retas, pode ser: "reta" ou "ponteada", "semi-reta" ou "semi-ponteada", "segmento" de reta ou de ponteada.

22323 – Demonstração para as hipóteses números 223211/13 e tese 223221 (figs. 43, 44 e 45).

Sejam (AO), (BO), (CO) pontos não colineares ∈ fO.

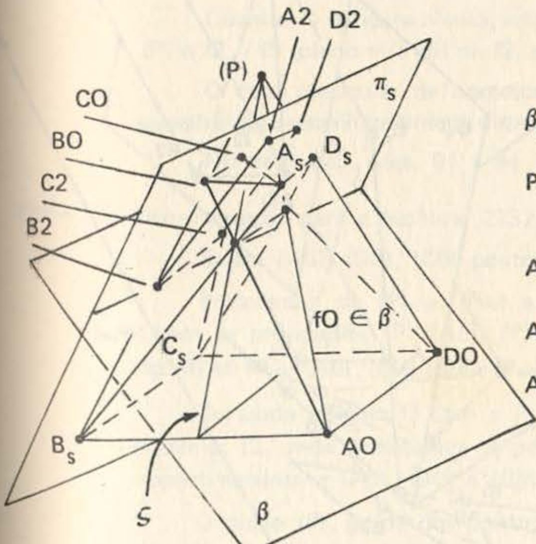
Projetando, de (P) ou (P∞) a figura fO, gera-se f1 na qual destacamos as projetantes (P) (AO), (P) (BO) e (P) (CO) quando f1 tem forma cônica[1], fig. 44 ou (P∞) (AO), (P∞) (BO) e (P∞) (CO) quando f1 é cilíndrica[1], fig. 45.

Cortando a figura f1 com π // fO ou π anti// fO (hipótese 223213), obtém-se f2, onde destacamos os pontos A2, B2, C2 que correspondem, respectivamente a (AO), (BO) e (CO).

As figuras (AO) (BO) (CO) ∈ (β) e A2B2C2 ∈ π, são iguais ou semelhantes entre si.

Podemos verificar que os planos projetantes (AO) (P) (BO), (BO) (P) (CO) e (AO) (P) (CO) ou (AO) (P∞) (BO), (BO) (P∞) (CO), (AO) (P∞) (CO) são transversais aos planos π // (β) ou π // fO (hip. ref. 223213).

Então: (AO) (BO) // A2B2, (BO) (CO) // B2C2, (AO) (CO) // A2C2 e ∡ (AO) = ∡ A2, ∡ (BO) = ∡ B2, ∡ (CO) = ∡ C2.



β_s π_s planos simétricos relativamente S

Pares simétricos: AO ∈ β e $B_s \in \pi_s$; BO ∈ β e $A_s \in \pi_s$

$A_sB_sC_sD_s$ = AOBO ... etc ....

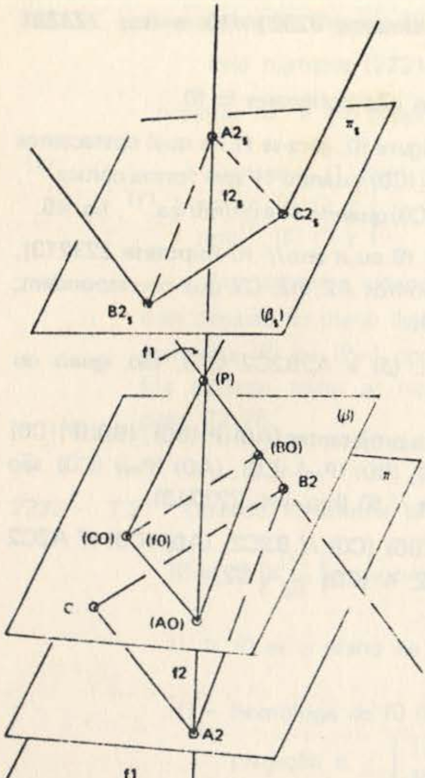
A2B2C2D2 ∈ π_1 // π_s

A2B2C2D2 ~ AOBOCODO

Fig. 43

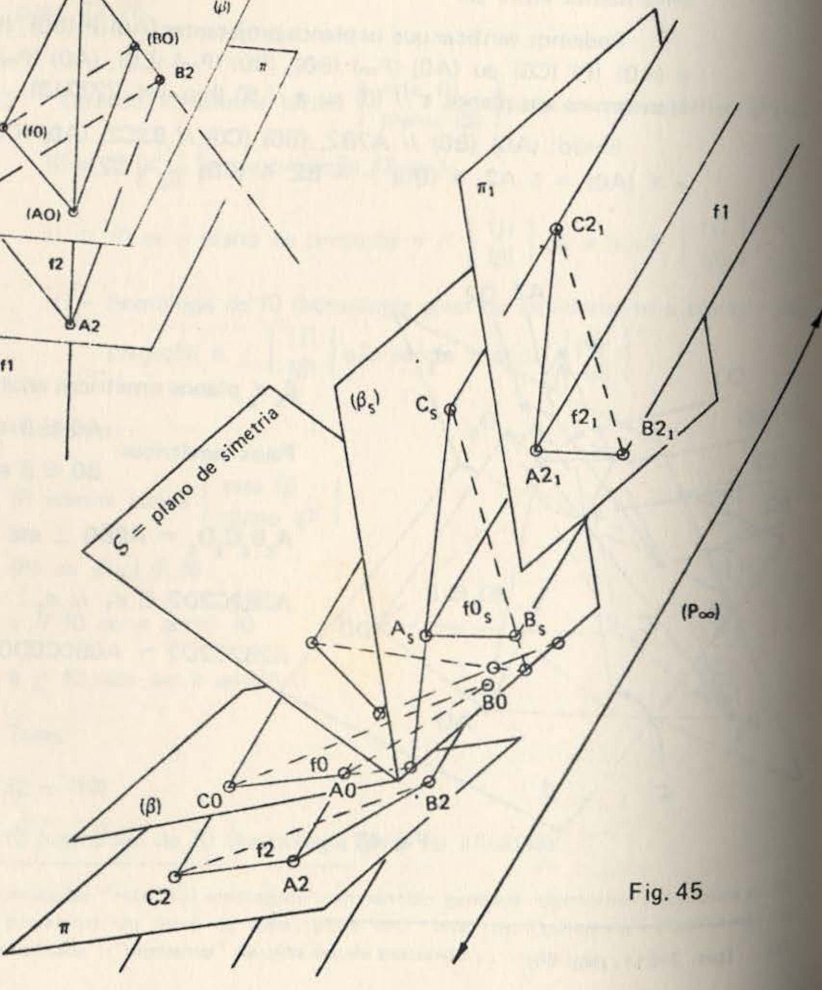
---

(1) Item 21211, pág. 66.



A2s
πs
f2s
C2s
B2s
(βs)
f1
(P)
(β)
(BO)
π
B2
(CO)
(fO)
C
(AO)
f2
A2
f1

Fig. 44



π1
C2₁
f1
ζ = plano de simetria
(βs)
Cs
f2₁
B2₁
A2₁
f0s
As
Bs
(P∞)
B0
f0
A0
C0
(β)
B2
f2
A2
C2
π

Fig. 45

Esse raciocínio, aplicado a todos os pontos e retas de f0, possibilitam concluir que:

$$f2 \approx f0 \text{ (tese 223221)}.$$

223231 – Interpretação para: f2 = f0

2232311 – Quando f1 é figura cônica, isto é, o centro projetivo é ponto próprio (P) e $f2_s$ simétrica[1] de f0 com relação a (P) (seus respectivos planos jazida, π_s e (β) são simétricos relativamente a (P), fig. 44 ou a $\mathcal{S} \supset$ (P), fig. 43.[2]

2232312 – Quando f1 é figura cilíndrica, (fig. 45) isto é, o centro projetivo é impróprio (P_∞) e f2 // f0 (plano π // (β)) ou f2, anti// f0 (plano π, anti// (β)).

A condição f2, anti// f0 (f2, anti-paralelo de f0) verifica-se quando π, // (β_s) (fig. 45) sendo o plano (β_s) simétrico de (β) com relação ao plano $\mathcal{S}$ de simetria ($\mathcal{S} \perp$ direção das projetantes).

Então π, anti// de (β), logo $f2_1$ = f0.

Na fig. 45 destacam-se $A2_1$, $B2_1$, $C2_1$ de f2, $\in \pi_1$.

223232 – Interpretação para: f2 $\approx$ f0 (figuras 43 e 44).

Quando f1 é figura cônica, isto é, o centro projetivo é ponto próprio (P) e f2 // f0 (plano π // (β)) ou f2, anti// f0 (plano π_1 anti// (β)[2]).

O caso particular de homologia, denominado "homotetia" (figuras semelhantes e semelhantemente dispostas), identifica-se ao exemplo da fig. 44.

No item 225, págs. 91 a 94, abordaremos o assunto.

22324 – Demonstração para a hipótese 223214 e tese 223222 (figs. 46 e 47).

Sejam (A0), (B0), (C0) pontos não colineares $\in$ f0.

Projetando, de (P) ou (P_∞) a figura f0, gera-se f1, na qual destacamos as projetantes (P) (A0), (P) (B0), (P) (C0) quando f1 é cônica, fig. 46 ou (P_∞) (A0), (P_∞) (B0) e (P_∞) (C0) quando f1 é cilíndrica, fig. 47.

Cortando a figura f1 com π $\angle$ f0, sem ser π anti// f0 (hip. 223214) obtém-se f2, onde destacamos os pontos A2, B2, C2 que correspondem, respectivamente a (A0), (B0) e (C0).

O plano (β), jazida dos pontos (A0), (B0), (C0) e π, jazida de A2, B2, C2 admitem em comum a reta $(\beta) \cap \pi$ e somente ela (figs. 46 e 47).

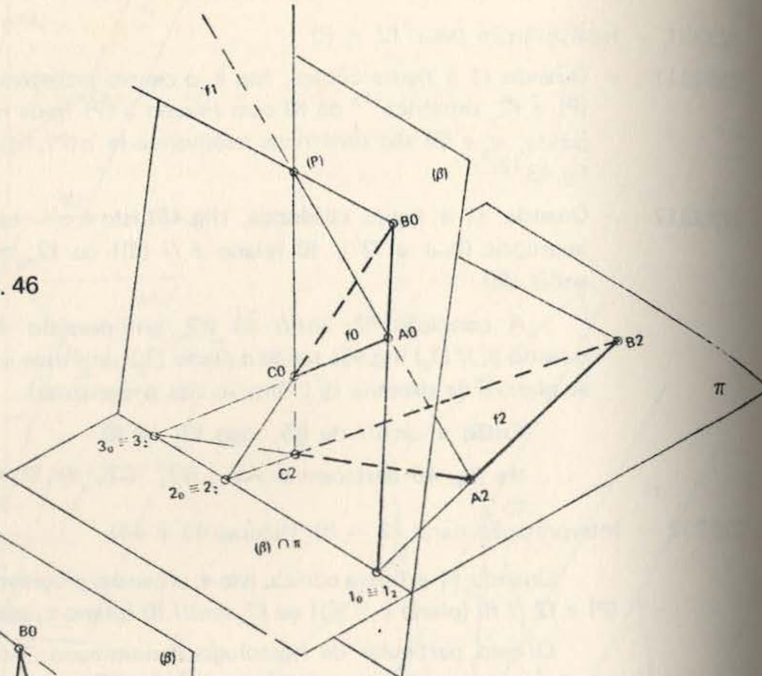
---

(1) Figuras simétricas são iguais.

(2) Essa hipótese só se verifica quando f1 admitir plano de simetria ($\mathcal{S}$), fig. 43.

Os planos projetantes (A0) (P) (B0), (B0) (P) (C0) e (A0) (P) (C0) ou (A0) (P∞) (B0), (B0) (P∞) (C0) e (A0) (P∞) (C0) são transversais aos planos $\pi \angle (\beta)$ ou $\pi \angle$ f0 sem ser π anti// f0 (hip. 223214).

Fig. 46



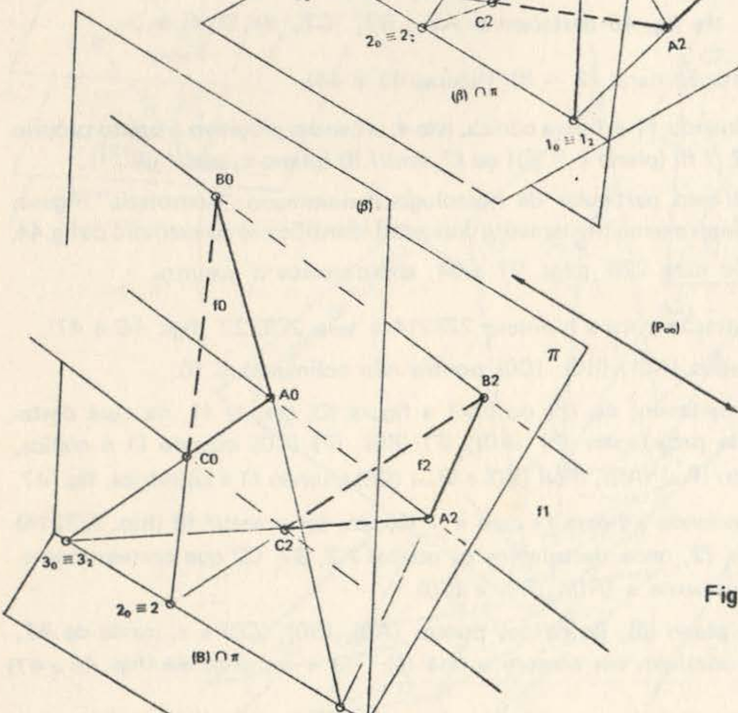


Fig. 47

Então as retas (A0) (B0) $\in (\beta)$ e A2B2 $\in \pi$, (B0) (C0) $\in (\beta)$ e B2C2 $\in \pi$, (A0) (C0) $\in (\beta)$ e A2C2 $\in \pi$ têm seus respectivos pontos comuns em $1_0 \equiv 1_2$, $2_0 \equiv 2_2$ e $3_0 \equiv 3_2 \in (\beta) \cap \pi$.

Esta observação permite concluir que as figuras: f0 $\supset$ (A0), (B0), (C0) e f2 $\supset$ A2, B2, C2 são homólogas (em relação a (P)) ou afins[1] (relativamente a (P∞)).

Logo: f2 homóloga de f0 (homologia geral ou afinidade[1]), conforme tese 223222.

· No item 225 apreciaremos esse assunto.

O teorema 2232 abrange todas as hipóteses contidas no GRUPO 2 do item 222, págs. 77/78 e, por decomposição[2] de f0 em figuras planas, todas as dos GRUPOS 3 e 4.

Para as: hipótese π $\angle$ f0 sem ser π anti// f0 e

tese f2 homóloga de f0,

verificamos que π pode ou não, se apresentar // projetante (f1), conforme está previsto no item 22131, correspondendo a Ⓒ , pág. 77.

Quanto as demais hipóteses (nº 223211/13) e respectiva tese 223221, o plano π poderá se apresentar // f1 (ou somente a alguns de seus elementos, conforme item 22131 Ⓒ) unicamente quando f0 possuir um ou mais pontos impróprios.

2233 – T.3: "Quando π // elemento de f1, projetante $\left| \begin{matrix} \text{reta} \\ \text{plano} \end{matrix} \right|$, a projeção f2, apresentará elemento correspondente, $\left| \begin{matrix} \text{ponto} \\ \text{reta} \end{matrix} \right|$ impróprio/a."

22331 – Hipótese:

π // $\left| \begin{matrix} \text{reta} \\ \text{plano} \end{matrix} \right| \in$ f1. ———————————— Ⓒ

22332 – Tese:

f2 $\supset$ elemento correspondente $\left| \begin{matrix} \text{ponto} \\ \text{reta} \end{matrix} \right|$ impróprio/a.

---

(1) Afinidade é caso particular de homologia; o centro projetivo é ponto impróprio.

(2) Sempre possível quando f0 é figura composta (não elementar), conforme item 11235, pág. 25 e aplicado nos Itens 2211, pág. 76 e 222, pág. 77/78.

22333 – Demonstração:

Seja f0 uma figura qualquer, bi ou tri-dimensional (figs. 48 e 49).

Projetando f0 de um ponto fixo próprio (P)[1], gera-se f1, forma cônica de projetantes, constituída de retas ou planos.

Cortando f1 com um plano π // | reta / plano | $\in$ f1 (hip. 22331) obtém-se em π, uma figura f2 constituída de traços das projetantes de f1.

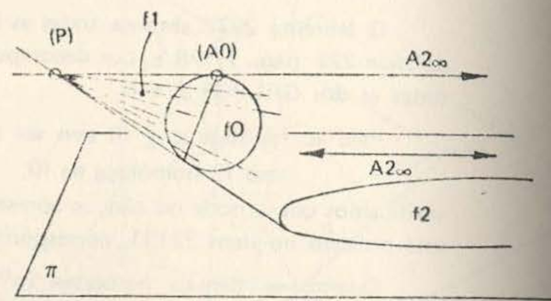


Fig. 48

Pela hipótese, existe reta ((P)(A0), fig. 48) ou plano ((A0) (P) (B0), fig.49) $\in$ f1, que são projetantes // π, logo essa reta ou esse plano terá traço impróprio no plano π, conforme se deduz do estudo correspondente ao item 1113, pág. 21 e 22, Cap. I.

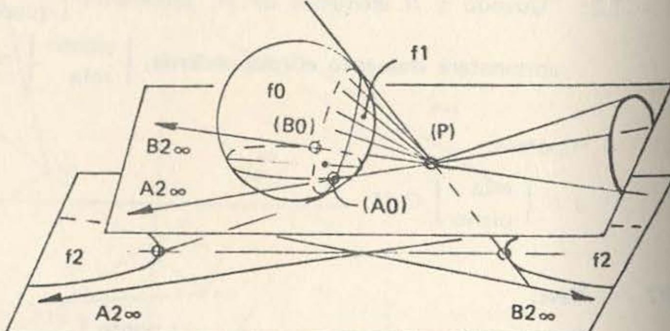


Fig. 49

(1) Sem interesse prático, projetar de (P_∞) = ponto impróprio porque as projetantes de f1, se forem retas ficarão entre si paralelas, sendo planos se cortarão segundo retas paralelas. Estando o plano π paralelo à reta de f1 (hip. 22331), estará às demais. Então f2 seria constituída de pontos impróprios.
Estando o plano π paralelo a plano de f1 (hip. 22331), estará paralelo às retas de interseção entre os demais planos de f1. Então, f2 seria constituída de retas paralelas, que indicariam direção da reta imprópria, interseção de π com plano de f1, para o qual, π está paralelo.

Portanto:

f2 $\supset$ elemento correspondente $\left|\begin{array}{c}\text{ponto}\\ \text{reta}\end{array}\right|$ impróprio/a (Tese 22332).

Esse teorema pode ser aplicado a quaisquer dos quatro grupos relativos ao item 222, págs. 77/78.

224 – **Teoremas referentes ao contorno de f1 e f2 (figuras "ℓ1" e "ℓ2").**

2241 – T.1: "Se f1 é tri-dimensional e admite contorno "ℓ1",[1] constituído de retas, esse contorno é figura bi-dimensional (superfície). As posições das projetantes $\in$ ℓ1 estão tangentes à f0 ou nela apoiadas". Figs. 50 a 54, págs. 88 e 89.

22411 – Hipótese: A figura projetante f1 é tri-dimensional e admite contorno ℓ1 (tem periferia) constituída de retas.

22412 – Tese:

224121 – ℓ1 é bi-dimensional (superfície).

224122 – ℓ1 é gerado por retas tangentes a f0 ou apoiadas em f0.

22413 – Demonstração:

Pelo quadro do item 11252, pág. 26[2] (Cap. I), conclue-se que se f1 é tri-dimensional e admite contorno ℓ1, isto é, **tem periferia** (hip.: 22411), ℓ1 será bi-dimensional (superfície, conforme tese 22412).

Ainda, pela hip.: 22411 combinada com estudo desenvolvido no item 212121, pág. 66, verifica-se que:

"ℓ1 é gerada por retas tangentes a f0, ou apoiadas em f0" (Tese 224122).

22414 – Interpretação:

Geralmente "ℓ1 é **superfície não plana** $\left|\begin{array}{c}\text{cônica}\\ \text{cilíndrica}\end{array}\right|$ ou $\left|\begin{array}{c}\text{piramidada}\\ \text{prismática}\end{array}\right|$ relativa à $\left|\begin{array}{c}(P)\\ (P\infty)\end{array}\right|$. Exemplo fig. $\left|\begin{array}{c}\text{53 e 51}\\ \text{50 e 54}\end{array}\right|$.

---

[1] Corresponde a "ℓ" estudado nos itens 1124/26, pags.26 a 28, Cap. I e 212121, pág. 66, Cap. II.

[2] f0, no referido quadro, tem caracter geral e pode servir para interpretar qualquer figura, portanto pode ser aplicado à f1 e consequentemente, "ℓ" corresponde a "ℓ1".

Quando ℓ1 é superfície plana, seu **contato** ou **apoio** em f0 será "linha plana" (porque ∈ ℓ1). Fig. 52.

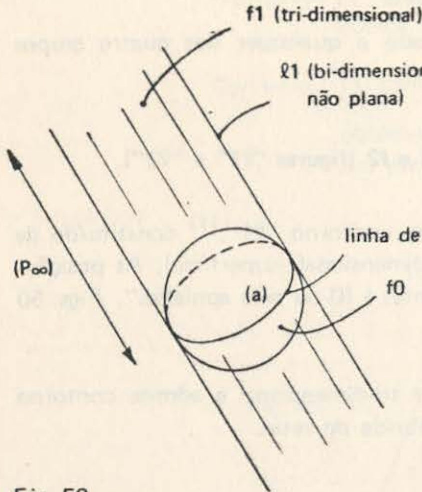


Fig. 50

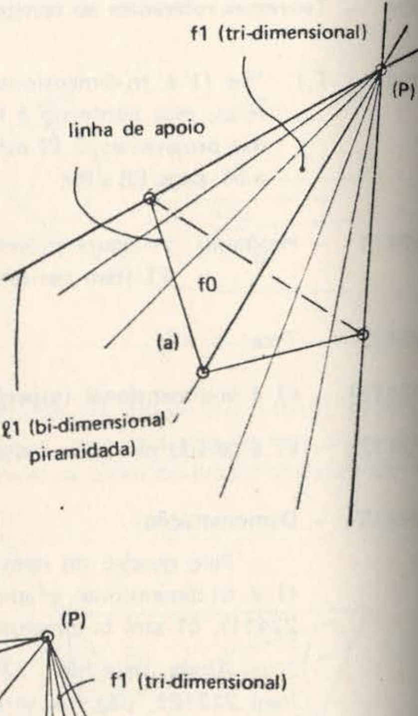


Fig. 51

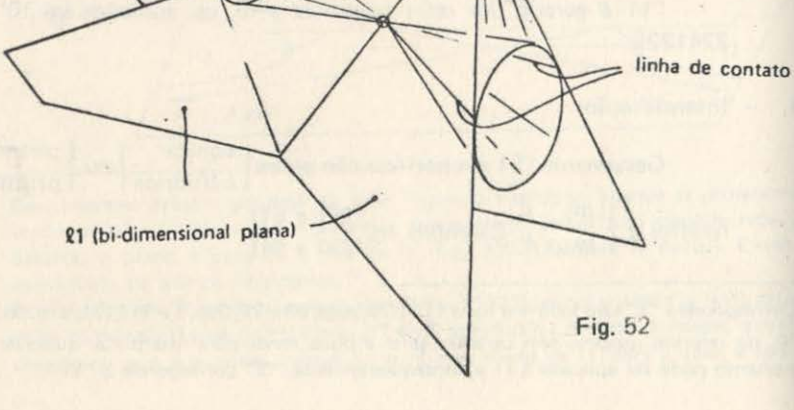


Fig. 52

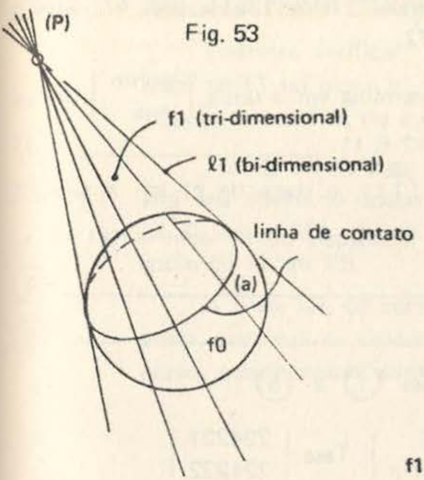


Fig. 53

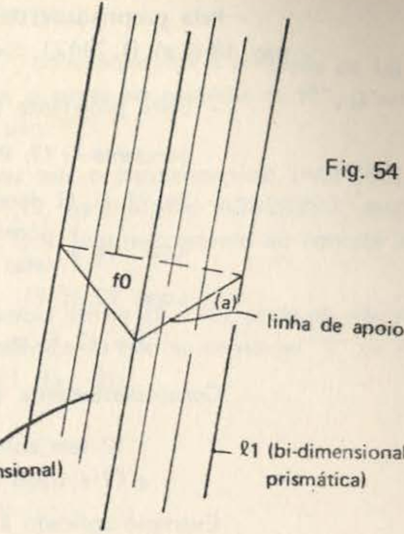


Fig. 54

2242 – T.2: "Se f1 admite contorno ℓ1,(1) f2 também admitirá contorno ℓ2,(2) sendo ℓ2 traço de ℓ1 em π".

Figs. 97 (pág. 71) e 38 (pág. 73).

22421 – Hipótese: f1 admite contorno ℓ1.

22422 – Tese:

224221 – f2 tem contorno ℓ2;

224222 – ℓ2 é traço de ℓ1 em π.

22423 – Demonstração:

Projetando f0 de um ponto fixo $\left| \begin{matrix} (P) \\ (P_\infty) \end{matrix} \right|$ gera-se f1, que admite contorno ℓ1 (hip.: 22421). Então $\ell 1 \in f1$. ____ (1)

Cortando f1 com π, obtém-se f2 ($f1 \cap \pi$). Logo $f2 \in \pi$ __ (2)

---

(1) Item 212121, pág. 66.

(2) Adaptação da figura "ℓ", conforme estudo nos itens 1124/26, págs. 26 a 28, Cap. I. Usamos "ℓ2" por se tratar de contorno da figura "f2", conforme já aplicado no estudo de "Pertinência", item 214217, pág. 72.

Pela propriedade da "Pertinência", itens 12511, pág. 47; 12521, pág. 48 (Cap. I); 21421, págs. 71 e 72.

– Cada projetante de f1 determina em π um/a $\left|\begin{array}{c}\text{ponto}\\ \text{reta}\end{array}\right|$ correspondente $\in$ f2. Portanto f2 $\in$ f1 ____________ (3)

– Se $\ell1 \in$ f1 (conclusão (1)), o traço de $\ell1$ em π será $\ell2$, lugar de $\left|\begin{array}{c}\text{pontos}\\ \text{retas}\end{array}\right|$ de interseção de $\ell1$ com π $(\ell1 \cap \pi)$.

Logo $\ell2 \in \ell1$ ____________ (4)

e $\ell2 \in \pi$ ____________ (5)

Conseqüentemente (conclusões (1) a (5)):

$$\left|\begin{array}{l}\text{f2 tem contorno } \ell2\\ \text{e } \ell2 \text{ é traço de } \ell1 \text{ em } \pi\end{array}\right|.\ \text{Tese}\ \left|\begin{array}{c}224221\\ 224222\end{array}\right|.$$

Exemplo aplicado à fig. 38 da pág. 73:

$\ell1$, contorno de f1 é superfície piramidada, constituída pelas faces (A0) (P) (B0), (B0) (P) (C0), (C0) (P) (D0) e (D0) (P) (A0).

$\ell2$ será a figura A2B2C2D2, traço de $\ell1$ em π.

2243 – T.3: "A projeção da linha (a) de contato ou de apoio, entre $\ell1$ e f0 é a2 $\equiv \ell2$".[1] Figs. 37 (pág. 71) e 38 (pág. 73).

22431 – Hipótese:

Linha (a) é linha de contato ou apoio entre $\ell1$ e f0.

22432 – Tese:

a2 $\equiv \ell2$.

22433 – Demonstração:

Na fig. 37 (pág. 71) seja (a) linha de contato ou apoio entre $\ell1$ e f0 (hip.: 22431). Então: (a) $\in$ f0 e (a) $\in \ell1$ ____________ (1)

Mas $\ell1$ é contorno de f1 (item 212121, pág. 66). Daí $\ell1 \in$ f1.

Cortando f1 com π, obtém-se f2 $\in \pi$.

Pelo T. 2 (pág. 89, teorema 2242), $\ell2$ é contorno de f2 e traço de $\ell1$ em π.

Como (a) $\in \ell1$ (conclusão (1)), sua projeção a2 $\equiv \ell2$ (tese 22432).

---

(1) Item 21421 (PERTINÊNCIA), pág. 71 e 72, sub item 214217.

22434 – Aplicação: "CONTORNO APARENTE".

Podemos verificar: "$a2 \equiv \ell 2$, correspondente a projeção de (a) e traço de $\ell 1$ no plano π, representa o **contorno aparente** de f0", já referido na nota nº 1, do rodapé da pág. 72.

Na fig. 38 da pág. 73, f0 ou seja o paralelepípedo (A0) (B0)... terá seu contorno aparente $a2 \equiv \ell 2$, no polígono A2B2C2D2, sendo (a) $\equiv$ linha (A0) (B0) (C0) (D0) $\in \ell 1$ (correspondente ao contato ou apoio de f1 em f0).

A linha (a), de contato ou apoio (entre f1 e f0), pode ou não ser plana, contínua ou descontínua, idêntica ou não ao contorno "ℓ" de f0, porém estará **sempre contida em** $\ell 1$ (fig. 55).

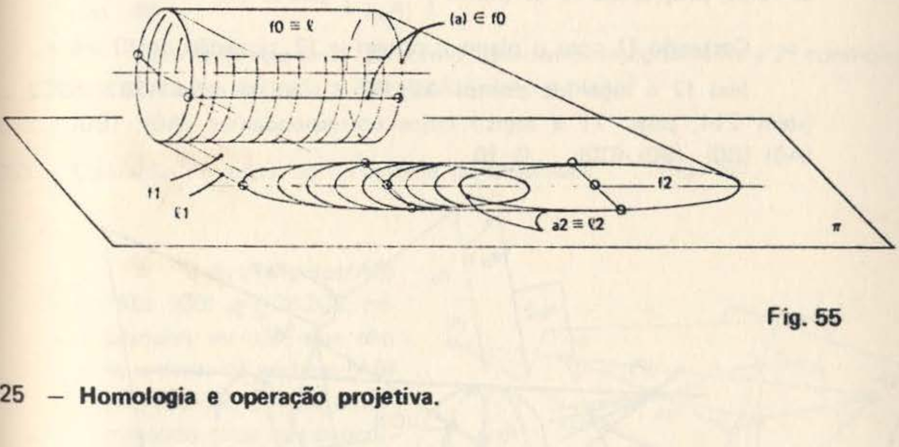


Fig. 55

225 – **Homologia e operação projetiva.**

2251 – Conceito de homologia:

Da tese: "Projeções da Esfera" ....[1], págs. 61 e segts. transcrevemos o trecho:

"Segundo Poncelet, homologia é uma correspondência entre duas figuras obedecendo às seguintes condições:

22511 – 1ª – Retas que unem pontos correspondentes devem concorrer a um único ponto do espaço (centro de homologia).

---

(1) Trabalho de Léa Santos de Bustamante, já referido nesta tese.

22512 – 2ª – Qualquer reta de uma figura terá sua correspondente na outra figura, dita sua homóloga e os pares de retas homólogas concorrem numa única reta (eixo de homologia) ou único plano (plano de homologia ou plano central), se as figuras correspondentes são planas ou do espaço, respectivamente".

2252 – Comparação com operação projetiva:

Para o atendimento da 1ª condição (22511), verifica-se a aplicação da operação "projetar de um ponto fixo (P) ou (P∞)" porque, **retas que unem pontos correspondentes** equivalem a "projetantes"; o ponto de concurso, ou seja, **centro de homologia** é o ponto fixo (P) ou (P∞) ≡ "centro projetivo".

Assim, dada uma figura qualquer f0 (fig.56), constituída de pontos ou de retas, projetando f0 de ponto $\left| \begin{matrix} (P) \\ (P_\infty) \end{matrix} \right|$ gera-se f1.

Cortando f1 com o plano π obtém-se f2, projeção de f0 em π.

Mas f2 é lugar de pontos A2, B2 ..... ou de retas A2B2, B2C2, ... (item 214, págs. 71 e segts.) cujos correspondentes (A0), (B0) ..... ou (A0) (B0), (B0) (C0), ... ∈ f0.

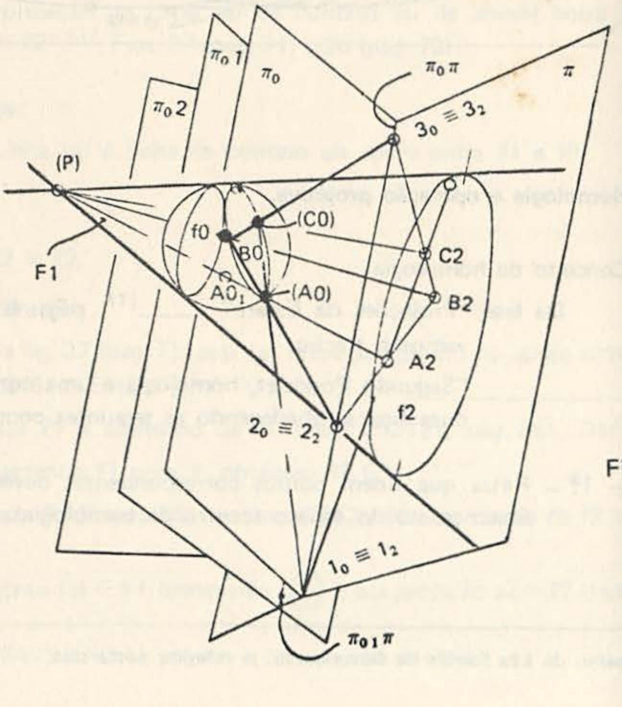


Fig. 56

Então (A0) (A2), (B0) (B2).... decorrentes da operação projetar f0, são também as retas que atendem a 1ª condição de homologia.

Por outro lado, os pontos A2, B2 e C2 $\in \pi$, têm por correspondente em f0 os pontos (A0), (B0) e (C0) que determinam um plano π_0, lugar de pontos e de retas homólogas daqueles $\in \pi$. Esses dois planos se cortam segundo a reta $\pi_0\pi$, que corresponde ao eixo de homologia referido na 2ª condição (22512). Esse eixo é lugar de "pontos unidos", isto é, pontos cujos homólogos são eles próprios. Exemplo: $1_0 \equiv 1_2$; $2_0 \equiv 2_2$ ...

Os pontos $1_0 \equiv 1_2$; $2_0 \equiv 2_2$ .... são, respectivamente, pontos comuns às retas correspondentes (A0) (C0) e A2C2; (A0) (B0) e A2B2 ....

A figura f0 pode ser decomposta em planos π_{01}, π_{02}, ..., jazidas de pontos e retas cujos correspondentes $\in \pi$. Para cada par de planos como π_0 e π; π_{01} e π .... os eixos de homologia são, respectivamente $\pi_0\pi$, $\pi_{01}\pi$ .... podendo ocorrer correspondência "multívoca", conforme item 214212, pág. 49.

Com emprego desse raciocínio, atendemos integralmente a 2ª condição. Está portanto, definida a correlação: plano a plano.

2253 – Operação Projetiva no "Teorema de Desargues":[1] (fig. 57)

"Dois triângulos (A0) (B0) (C0) e A2B2C2, coplanares ou não, que têm seus pares de vértices (A0) A2, (B0)B2, (C0)C2 determinando retas que concorrem em um único ponto (P) ou (P_∞), têm também, seus pares de lados (retas suporte) (A0) (B0) e A2B2, (A0) (C0) e A2C2, (B0) (C0) e B2C2 determinando pontos $1_0 \equiv 2_2$, $2_0 \equiv 2_2$ e $3_0 \equiv 3_2$ que pertencem a uma mesma reta ($\pi_0\pi$)."

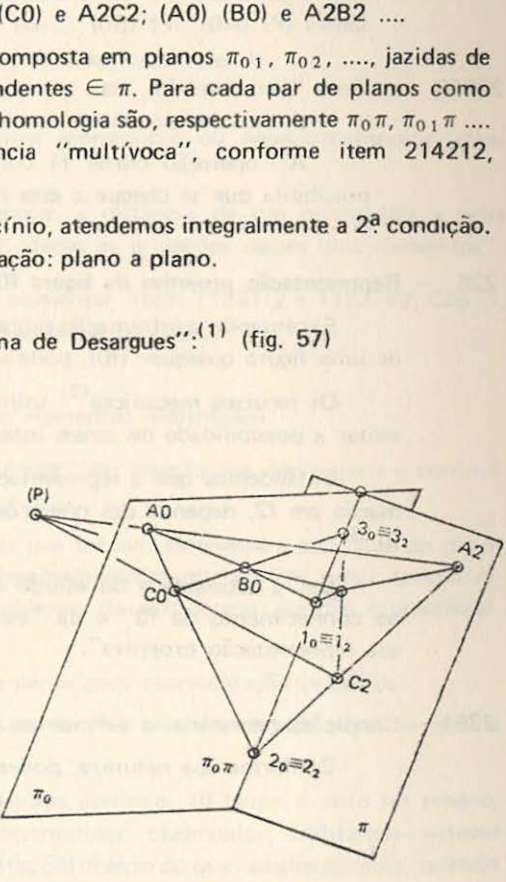


Fig. 57

(1) Pascali Justo: "Geometria Proyectiva" – "Exercícios" – Tomo I, pág. 55, item 42. Centro Estudiantes de Ingenieria de Buenos Aires, 1942.

Esse teorema, demonstrado com emprego do mesmo raciocínio já utilizado para o teorema do item 2232, págs. 80 a 85, figs. 46 e 47 da pág. 84, pode ser interpretado como aplicação de operação projetiva, conforme se deduz da:

22531 – Hipótese: "pares de vértices determinam retas (projetantes) que concorrem em um único ponto (centro de homologia ≡ centro projetivo)".

Aí, se pode verificar a "operação projetar △ (A0) (B0) (C0) de um centro projetivo (P) ou (P_∞), construindo-se f1, constituída de projetantes (P) (A0), (P) (B0) .... ou (P_∞) (A0), (P_∞) (B0) ....

22532 – Tese: "têm também, seus pares de lados (retas suporte) determinando pontos que pertencem a uma mesma reta (eixo de homologia ≡ $\pi_0 \pi$)".

A "operação cortar f1 com plano π, determinando △ A2B2C2" possibilita que se chegue a essa mesma conclusão.

226 – **Representação projetiva da figura f0.**

Excetuando a informação simbólica,[1] verificamos que a representação de uma figura qualquer (f0), pode ser resultado de uma operação projetiva.

Os recursos mecânicos[2] utilizados atualmente, também podem apresentar a possibilidade de serem interpretados com esse sentido.

Entendemos que a representação projetiva de f0, isto é, sua transformação em f2, depende das operações projetivas aplicadas sucessivamente à f0.[3]

Daí a necessidade do estudo das "condições necessárias e suficientes ao conhecimento de f0" e da "escolha do sistema mais conveniente para sua representação projetiva".

2261 – Condições necessárias e suficientes ao conhecimento de f0.[4]

Conforme sua natureza, podemos aplicar:

---

(1) De "símbolo", já referido em nota de rodapé nº 2, do item 1112, Cap. I, pág. 20.

(2) Executado por máquina ou mecanismo.

(3) Item 124, Cap. I, pág. 46.

(4) Item 112, Cap. I, págs. 23 a 36.

22611 – Recursos mecânicos:

A Ciência, no seu atual avanço, oferece os mais variados, desde a fotografia, aos mais requintados processos aerofotogamétricos.[1]

Esses recursos são aplicados, principalmente quando f0 não é figura geométrica.

Apesar das facilidades propiciadas pela mecanização, pode haver necessidade de aplicar raciocínio matemático, partindo dessa mecanização (correção de distorções, comparações, aproximações, composições).

22612 – Raciocínio matemático:

A utilização desse recurso é aplicada quando:

226121 – f0 é constituída de elementos geométricos ou neles decomposta (item 112232, Cap. I, (pág. 24).

Por exemplo: "Determinar a distância de um ponto (M) a uma reta (r), dadas as projeções desses dois elementos".

226122 – f0 é figura geométrica não elementar (itens 11221/2 e 1122322, Cap. I, págs. 23 e 24), tornando-se necessário conhecer:

2261221 – Geratriz;

2261222 – Lei de geração (com seus elementos diretriciais).

226123 – Não existem "incompatibilidades" em relação aos dados para o conhecimento de f0.

Via de regra, condições que tornam **suficiente** a aplicação do raciocínio matemático, sem as **impossibilidades** que podem surgir (principalmente relacionadas com problemas de pertinência, posição e grandeza).

2262 – Escolha do sistema mais conveniente para representação projetiva:

Do exposto, concluímos ser decorrente da finalidade a que se destina essa representação.

Por exemplo: – Se desejamos conhecer f0 como é visto no espaço, por um determinado observador, utilizamos sistema projetivo (fig.58) diverso do que empregaremos, quando precisamos conhecer a verdadeira grandeza de elementos de f0 (fig. 59).

---

(1) "Biblioteca Científica Life", EDITORA LIVRARIA JOSÉ OLYMPIO, 1980. Entre os diversos volumes descatamos: "O Engenheiro", "As máquinas".

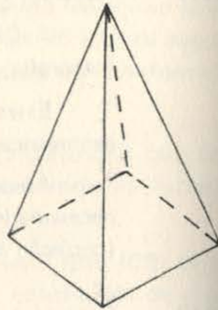


Fig. 58

As figs. 58 e 59 representam uma pirâmide de base quadrada.

Pela fig. 58, pode-se ter uma idéia de sua vista espacial, em posição que, facilmente permite identificar o sólido quanto a forma, mas não, quanto a grandeza de seus elementos.

Na representação correspondente a fig. 59 pode-se conhecer esse elemento quanto a grandeza, mas perde-se a noção da vista espacial.

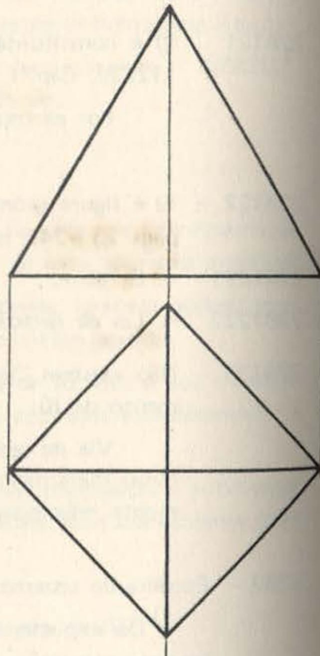


Fig. 59

23 – ELEMENTOS FUNDAMENTAIS PERTINENTES A CADA OPERAÇÃO PROJETIVA. INFLUÊNCIA NA "CLASSIFICAÇÃO DOS SISTEMAS PROJETIVOS". POSIÇÕES RELATIVAS E DENOMINAÇÕES USUAIS EM CADA SISTEMA"

230 – Observações preliminares.

No item 220, pág. 76, verificamos serem quatro os elementos fundamentais da operação projetiva. Sem quaisquer desses elementos, não pode existir "projeção".

Eles podem ser distribuídos da forma como se segue, objetivando análise da influência que têm no estabelecimento de um "sistema projetivo" e, conseqüentemente, no critério para "classificação dos sistemas de representação projetiva".

231 – Distribuição dos elementos fundamentais por operação projetiva.

Pertencem a operação.

2311 – PROJETAR:

23111 – f0 = figura a ser projetada;

23112 – (P) ou (P_∞) = centro projetivo;

23113 – f1 = figura constituída de projetantes, retas ou planos.

2312 – CORTAR:

π = plano de projeção, no qual fica determinada a "projeção f2", da figura f0 (f2 é o traço ou interseção de f1 em π).

232 – Sistemas cônicos e cilíndricos

Dos três elementos da operação projetar, um deles, o relativo ao **centro projetivo** (item 23112), apresenta opção entre (P) ou (P_∞).

Daí resultam dois grandes sistemas a saber:

2321 – Cônico ou central	quando o centro projetivo é ponto	próprio (P)(1)
2322 – Cilíndrico ou paralelo		impróprio (P_∞)(2)

Em qualquer dos dois sistemas, a figura f1, resultante de projetar f0, poderá ser reta, plano, feixe de retas e estrela de retas ou de planos projetantes (item 212, pág. 66 a 68).

Quando for "estrela", devemos distinguir projetantes da periferia (figura ℓ1, item 212121, pág. 66) que pertencem à **superfície cônica** ou **cilíndrica de projetantes** (tangentes à f0 ou nela apoiadas) das outras projetantes inferiores a essa superfície (item 2243, T. 3, pág. 90). A linha de contato ou apoio (a) $\in$ f0, serve de diretriz(3) à superfície de "projetantes da periferia" (fig. 60).

Para efeito de generalização, podemos constatar que cada projetante pode também, ser considerada uma posição da **geratriz** da referida superfície cônica ou cilíndrica. Assim, conforme o problema apresentado, considera-se, seja essa superfície gerada por "projetantes" ou por "posições da geratriz" que admite como "centro projetivo" ou "vértice",(4) o ponto (P) ou (P_∞).

Podemos operar com f1, aplicando o mesmo raciocínio empregado para f0. Seria como se projetássemos de um novo centro projetivo ($P1_\infty$), escolhido convenientemente, uma nova figura "f0", composta das primitivas f0 e f1 (fig. 60).

A vantagem dessa interpretação é "possibilitar economia de raciocínio" pois a representação projetiva de f0, acarretará também a de f1 (sempre superfície cônica ou cilíndrica).

---

(1) Significa que sua distância a f0 (figura a ser projetada) pode ficar determinada por meio de **grandeza** (entidade suscetível de medida).

(2) Significa que sua distância a f0 (figura a ser projetada) não pode ser determinada por uma grandeza e sim, por uma **direção** (relação entre dois pontos não dependente da distância entre eles). Item 1113, Cap. I, págs. 21 e 22.

(3) Referida no item 11222, pág. 23. Significa "dirige", "orienta" o movimento da geratriz/projetante.

(4) Segunda "diretriz" da superfície cônica ou cilíndrica.

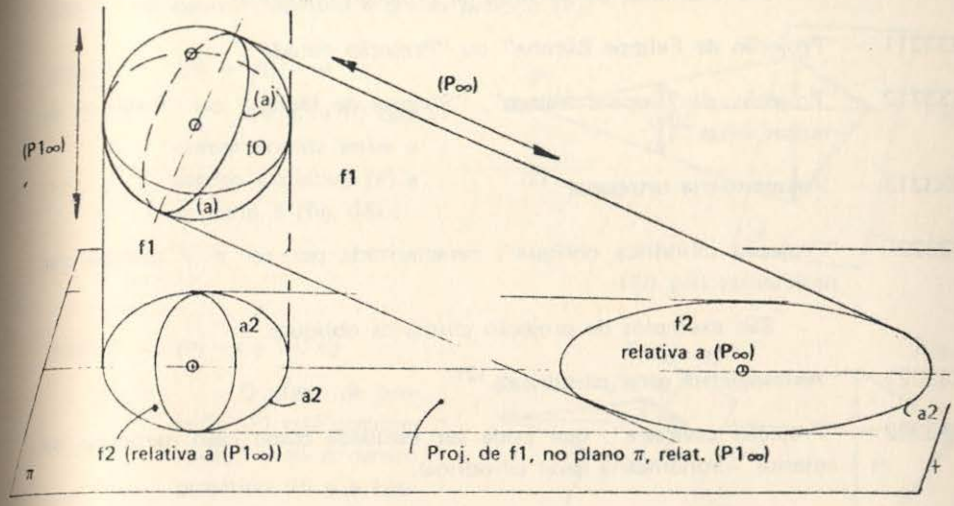


Fig. 60

233 – **Sub-divisões dos sistemas cônico e cilíndrico**.

Da operação cortar (com plano π) resultam sub-divisões desses dois grandes sistemas (que consideramos "sistemas tronco").

Assim, derivam do sistema.

2331 – Cônico ou central (fig. 61):

23311 – "Axonometria geral cônica ou central".[1]

23312 – "Perspectiva Linear cônica", que pode ser estudada como caso particular da anterior (Axonometria geral cônica).

2332 – Cilíndrico ou paralelo:

23321 – "Projeção ortogonal", caracterizada por ser $\pi \perp$ direção das projetantes (fig. 62).

(1) Consultar GREGORY, R. MONIZ, in "Classificação dos Sistemas de Representação. Princípio Axonométrico. AXONOMETRIA", publicado sob a forma de apostilha, pela Escola Fluminense de Engenharia da U.B., em 1954. Posteriormente (1962) a Escola Nacional de Engenharia da U.B. republicou esse trabalho. O autor defende o estudo dos "Sistemas Projetivos" pelo princípio axonométrico.

São exemplos de sistemas de projeção ortogonal:

233211 – "Projeção de Felippe Büache" ou "Projeção cotada".

233212 – "Projeção de Gaspard Monge", "Sistema de Monge" ou "Projeção de muitas vistas".(1)

233213 – "Axonometria ortogonal".(2)

23322 – "Projeção cilíndrica oblíqua", caracterizada por ser π $\not\perp$ direção das projetantes (fig. 63).

São exemplos de projeção cilíndrica oblíqua:

233221 – "Axonometria geral cilíndrica".(2)

233222 – "Projeção cavaleira", que pode ser estudada como caso particular da anterior Axonometria geral cilíndrica).

Fig. 61

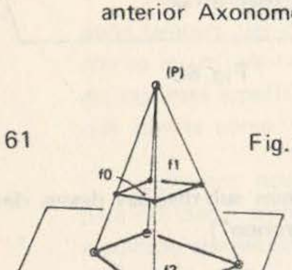
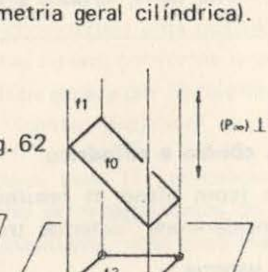


Fig. 62



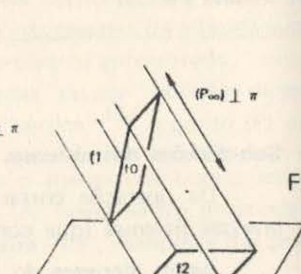


Fig. 63

234 – **Posição do centro projetivo (P) ou (P∞), relativamente a figura f0 a ser projetada e ao plano de projeção π, quando esses três elementos são distintos.(3) Correlação com os teoremas dos itens 223 e 224.**

Considerando o que foi analisado no item 22 e a aplicação dos teoremas básicos da relação entre f0 e f2 (item 223, págs. 79 e 87) e os referentes ao contorno de f1 e f2 (figuras "ℓ1" e "ℓ2", conforme item 224, págs. 87 a 91), esse estudo tem particular interesse pelas referidas relações.

---

(1) Tradução de "MULT-VIEW PROJECTION".

(2) Consultar GREGORY, R. MONIZ, in "Classificação dos Sistemas de Representação. Princípio Axonométrico. AXONOMETRIA", publicado sob a forma de apostilha, pela Escola Fluminense de Engenharia da U.B., em 1954. Posteriormente (1962) a Escola Nacional de Engenharia da U.B. republicou esse trabalho. O autor defende o estudo dos "Sistemas Projetivos" pelo princípio axonométrico.

(3) Extraído, com adaptações, da tese "PROJEÇÕES DA ESFERA ....." de Léa Santos de Bustamante, págs. 70 a 72.

2341 – O centro projetivo é ponto próprio (P):

23411 – (P) → f0 → π

A figura f0 está compreendida entre o centro projetivo (P) e o plano π (fig. 64).

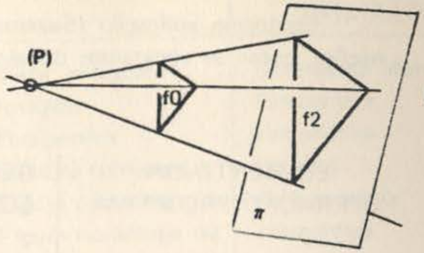
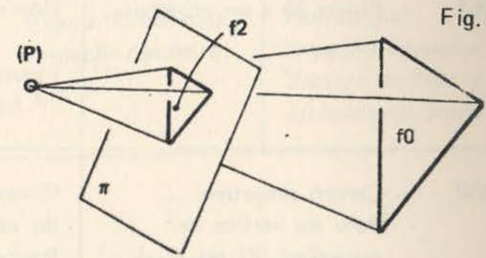


Fig. 64

23412 – (P) → π → f0

O plano de projeção (P) está compreendido entre o centro projetivo (P) e a figura f0 (fig. 65).

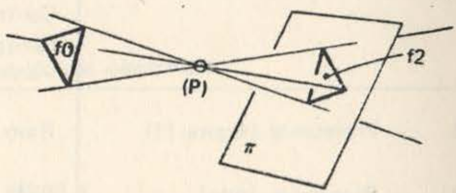
Fig. 65



23413 – f0 → (P) → π

O centro projetivo está compreendido entre a figura f0 e o plano de projeção π (fig. 66).

Fig. 66



2342 – O Centro projetivo é ponto impróprio (P_∞):

Do ponto de vista teórico, não importa a posição relativa entre (P_∞), f0 e π, podendo se admitir:

(P_∞) → π → f0 ou (P_∞) → f0 → π

Quando f0 admite jazida reta ou plano (inclusive pela hipótese da decomposição de f0 em seções planas), é importante destacar a aplicação dos teoremas 2232, 2233 e os relativos ao contorno aparente de f0 e f2, conforme item 2243, que estudam a relação entre f0 e f2.

235 – **Denominações usuais atribuídas aos elementos da operação projetiva.**

Conforme aplicação (Sistema Projetivo), podemos constatar denominações, como as constantes do seguinte quadro:

ELEMENTO DA OPERAÇÃO PROJETIVA	DENOMINAÇÃO EQUIVALENTE	SISTEMA PROJETIVO ONDE É MAIS UTILIZADO
2351 – Figura f0 a ser projetada	Objeto, Figura.	Perspectiva, Sistema de Monge
	Figura objetiva	Axonometria
	1ª figura	Homologia
2352 – Centro projetivo, Polo ou vértice de projeções (P) ou (P_∞).	Observador (olho do observador)	Perspectiva Sistema de Monge
	Ponto de vista	
	Foco luminoso	Sombra
	Foco objetivo	Fotografia
	Centro de homologia	Homologia
	Centro de afinidade	Afinidade
	Centro de homotetia	Homotetia
2353 – Projetante (figura f1)	Raio visual	Perspectiva, Sistema de Monge
23531 – Projetante (reta)	Raio luminoso	Sombra
	Raio de homologia	Homologia
	Raio de afinidade	Afinidade
	Raio de homotetia	Homotetia
23532 – Projetante (plano)	Plano visual	Perspectiva
	Plano limite	Homologia
2354 – Plano de projeção π	Plano do quadro	Perspectiva
		Axonometria
		Projeção cavaleira

ELEMENTO DA OPERAÇÃO PROJETIVA	DENOMINAÇÃO EQUIVALENTE	SISTEMA PROJETIVO ONDE É MAIS UTILIZADO
2355 – Figura f2 (projeção de f0 em π).	Vista, projeção.	Sistema de Monge
	Imagem	Perspectiva
	Perspectiva	Perspectiva
	Sombra (projetada)	Sombra
	Figura axonométrica	Axonometria
	Figura homóloga ou 2ª figura	Homologia
	Figura afim	Afinidade
	Figura homotética	Homotetia
	Projeção cavaleira	Projeção cavaleira
	Épura[1]	Sistema de Monge ou qualquer outro[1]

236 – **Emprego da expressão "sentido de visada"**

Como recurso para auxiliar a abstração, raciocínio e visualização espacial, julgamos útil considerar:

2361 – "Centro projetivo" como símbolo de **observador**.

Logicamente:

2362 – "Projetante" (reta) será **raio visual** e

2363 – "Projeção" equivalerá a **vista**.

Daí a expressão "sentido de visada", de larga aplicação à resolução do problema de indicar a visibilidade de f0.

(1) Vocábulo empregado no Sistema de Monge (item 233212). O professor Felippe dos Santos Reis deu sentido mais amplo, utilizando-o para exprimir "a representativa de um ser qualquer (sentido universal da palavra ser) que **possibilita descrever e obter qualquer das variáveis geométricas, métricas ou de posição**". Transcrito de "Análise Geométrica das Jazidas ..." 3º Vol., pág. 21, 1964, R.J., de sua autoria.

Quando o centro projetivo é ponto próprio (P), o "sentido de visada" poderá ter aplicação para os itens 23411 e 23412 (figs. 64 e 65 pág. 101), não sendo aplicado para o item 23413 (corresponde a denominada "projeção virtual", fig. 66, pág. 101.

Tratando-se de centro projetivo impróprio, indicado por **direção (P_∞)**, conforme item 2342, pág. 76, teremos que considerar a possibilidade de seu desdobramento em "**dois sentidos**". Isso influirá na resolução do problema da visibilidade de f0 (fig. 67).

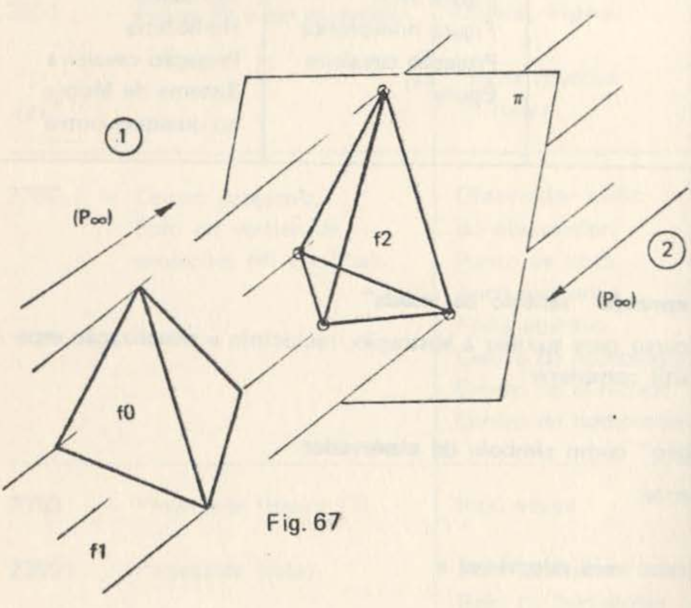
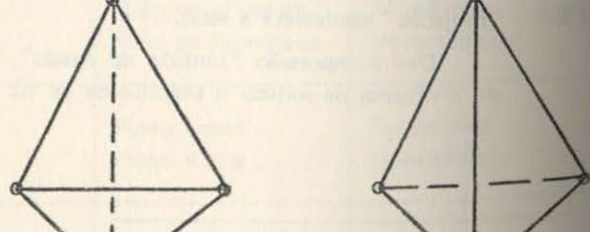


Fig. 67



f2 para o sentido de visada 1

f2 para o sentido de visada 2

CAPÍTULO III – APLICAÇÃO AOS "SISTEMAS PROJETIVOS"

31 – REPRESENTAÇÃO PROJETIVA DA FIGURA

310 – História e finalidades.
311 – Operações projetivas e suas propriedades.
312 – Proposições fundamentais de posição relativa a:
3121 – Duas retas.
3122 – Reta e plano.
3123 – Dois planos.
3124 – Inclinação da reta ou do plano.

32 – RELAÇÃO ENTRE "f0" e "f2"

320 – Representação projetiva dos entes fundamentais.
321 – Estudo projetivo da posição relativa entre duas retas.
322 – Peculiaridades dos "Sistemas Cilíndricos".
323 – Peculiaridades dos "Sistemas Ortogonais".
324 – Peculiaridades dos "Sistemas Cônicos".
325 – Estudo da relação entre f0 e f2, quando f0 ou plano π, está animado de movimento de translação.

33 – CONCLUSÕES FINAIS

331 – Relativas aos "Sistemas Projetivos" mais utilizados na vida profissional.
332 – Referentes à relação entre f0, f1 e f2.
333 – Quanto a possibilidade de generalizar a aplicação dos teoremas relativos a f0 $\in$ jazida reta ou plano.

CAPÍTULO III
APLICAÇÃO AOS "SISTEMAS PROJETIVOS"

31 – REPRESENTAÇÃO PROJETIVA DA FIGURA.[1]

310 – História e finalidades:

A "história da representação da figura" tem idade do próprio homem[2]. Entendida essa representação como servindo, entre outros "objetivos", para **comunicar** ou **informar, ornamentar.**

Esses objetivos obrigam, muitas vezes, o destaque de informações que levaram o homem a criar uma multiplicidade de "sistemas de representação projetiva". Desses, alguns não são mais utilizados nos dias de hoje, outros, aperfeiçoados ou não, se compararmos com a época em que foram criados, têm tido grande aplicação na atualidade.

311 – Operações projetivas e suas propriedades:

Pela natureza de nosso trabalho, destacaremos somente, os "sistemas projetivos" que podem ser analisados como resultantes de:

"Projetar f0 de um ponto fixo (P) ou (P_∞)",

e:

"Cortar f1 com um plano π".

Qualquer que seja f0, sua representação projetiva, isto é, sua transformação em f2 (figura $\in \pi$), depende das operações projetivas aplicadas, sucessivamente à f0, de modo a se ter:

$$f0 \xrightarrow{P} f1 \xrightarrow{s} f2.$$ [3]

Conforme já referido na "Representação projetiva de uma figura f0" (item 226, Cap. II, págs. 94 e 95), os inúmeros sistemas de representação projetiva existentes e os que vierem a ser criados, foram e serão consequentes de exigências de ordem técnica e profissional (via de regra, relacionadas com informações de pertinência, posição de grandeza).

---

(1) Item 226, Cap. II, págs. 94 a 96.

(2) REGO BARROS P. DE OLIVEIRA, M. IZABEL, in "A Geometria Descritiva nas Artes", págs. 18 a 20. GRÁFICA EDITORA BAHIENSE, 1974.

(3) Item 124, Cap. 1, pág. 46.

Os sistemas baseados em "raciocínio matemático" (item 22612), que se fundamentam nas "operações projetivas", devem apresentar as correlatas "propriedades projetivas", dentre as quais, destacamos a **pertinência** (itens 12521, Cap. I, págs. 48 a 50 21421, Cap. II, págs. 71 e 72 e a **reversibilidade** (itens 12524, Cap. I, págs. 56 a 58 e 21424, Cap. II, pág. 75), merecendo particular atenção a importância da "correspondência **bi unívoca**" entre os elementos de f0 e f2, ou seja, correspondência que **não possibilite multiplicidade de interpretação** quanto a uma **completa** e **precisa informação de f0**.

Em resumo, dado f2, conclue-se por essa representação projetiva, todas as informações sobre f0 e reciprocamente, dado f0, o sistema projetivo escolhido deve ser tal, que seja possível determinar f2, apresentando para f0, "correspondência bi unívoca".

312 – **Proposições fundamentais de posição relativa a:**

3121 – Duas retas.

"Duas retas podem ser $\left|\begin{array}{c}\text{coplanares}\\ \text{não coplanares}\end{array}\right|$ significando que $\left|\begin{array}{c}\in\\ \notin\end{array}\right|$ ao mesmo plano real (item 1112, Cap. I, págs. 20 e 21).

"Retas coplanares" representam e determinam um plano real; admitindo também, um ponto em comum, real[1]. $\left|\begin{array}{c}\text{próprio}\\ \text{impróprio}\end{array}\right|$, quando as retas estão entre si $\left|\begin{array}{c}\angle \text{ ou } \perp\\ //\end{array}\right|$.

"Retas não coplanares" representam, mas não determinam, um **plano** e um **ponto imaginário**.[2] Porque não admitem plano real comum, elas também não possuem ponto real comum.

3122 – Reta e plano.

"Uma reta (r) e um plano (α) admitem sempre um ponto em comum".

Quando esse ponto é:

31221 – próprio, significa que (r) $\left|\begin{array}{c}\angle\\ \perp\end{array}\right|$ (α)[3];

---

(1) Sendo o ponto comum próprio, emprega-se a expressão geral "retas concorrentes". Na posição particular de ser o ponto comum impróprio, as retas são denominadas "paralelas" (item 1113, Cap. I, págs. 21 e 22).

(2) Item 1112, Cap. I, págs. 20 e 21).

(3) "Quando (r) $\perp$ (α), (r) será $\perp$ qualquer reta $\in$ (α)" (teorema).

31222 – impróprio, significa que (r) // (α)[1].

Quando (r) tem dois pontos $\in (\alpha)$, significa que (r) $\in (\alpha)$[2].

Consideramos essa posição como particular de "(r) // (α)" porque, todos os pontos $\in$ (r) estão equidistantes de (α), sendo essa equidistância nula.

3123 – Dois planos.

"Dois planos (α) e (β) admitem sempre uma reta em comum".

Quando essa reta é:

31231 – própria, significa que $(\alpha) \left| \begin{array}{c} \angle \\ \perp \end{array} \right| (\beta)$;

31232 – imprópria, significa que (α) // (β).

3124 – Inclinação da reta ou do plano.

Seja uma reta (r) ou um plano (α) e π o plano de referência (admitido ou não, como plano de projeção).

"É o ângulo que a reta $\left| \begin{array}{l} (r) \\ (a) \end{array} \right.$, de máximo declive de (α) $\Big|$ forma com sua projeção ortogonal $\left| \begin{array}{c} r \\ a \end{array} \right|$ no plano π[3].

Quando $\left| \begin{array}{cc} \begin{array}{c} (r) \\ (\alpha) \end{array} & \perp \\ \begin{array}{c} (r) \\ (\alpha) \end{array} & // \end{array} \right| \pi$ sua inclinação $= \left| \begin{array}{c} 90^\circ \\ 0^\circ \end{array} \right|$. É a $\left| \begin{array}{c} \text{maior} \\ \text{menor} \end{array} \right|$ inclinação de (r) ou (α), relativamente ao plano π.

---

(1) Quando (r) // (α), esse plano conterá retas que tenham a mesma direção de (r). Esse teorema pode ser demonstrado com o seguinte raciocínio: "As retas $\in (\alpha)$ e // (r) podem ser projeção, cônica ou cilíndrica de (r) em (α). O plano projetante (f1) fica determinado pelo centro projetivo (P) ou (P_∞) e reta (r).

(2) Condição necessária e suficiente de pertinência entre reta e plano.

(3) Reta de máximo declive forma o maior ângulo possível com sua projeção ortogonal no plano de referência. Corresponde ao "retilíneo de ângulo diedro $\alpha\pi$". Quando o plano de referência está de frente essa reta é denominada de "máxima inclinação", expressão adotada no Sistema de Gaspard Monge.

32 – RELAÇÃO ENTRE "f0" E "f2"

320 – **Representação projetiva dos entes fundamentais:**

Para qualquer sistema de representação projetiva, a projeção do/a:[1]

3201 – Ponto (A) é sempre outro ponto **A**.

3202 – Reta (r) é outra reta **r** ou ponto $r \equiv (r) \cap \pi$ (item 2231, Cap. II, págs. 79 e 80). Se $(r) // \pi$, sua projeção $r // (r)$ e $\overline{(A)\ (B)} \in (r) \approx \overline{AB} \in r$ (item 2232, (Cap. II, págs. 80 a 85).

3203 – Quanto ao plano, sua representação projetiva é feita pela projeção dos elementos necessários e suficientes à sua determinação (três pontos não colineares; uma reta e um ponto $\notin$ reta; duas retas coplanares).

321 – **Estudo projetivo da posição relativa entre duas retas.**

Sejam as retas (r) e (s), figs. 68 a 71

3211 – Quando (r) e (s), coplanares ou não têm seus respectivos planos projetantes, $f1_{(r)}$ e $f1_{(s)}$, distintos, suas projeções serão retas r e s, distintas, concorrentes (fig. 68) ou paralelas (fig. 69), conforme sejam concorrentes ou paralelos os referidos planos projetantes.

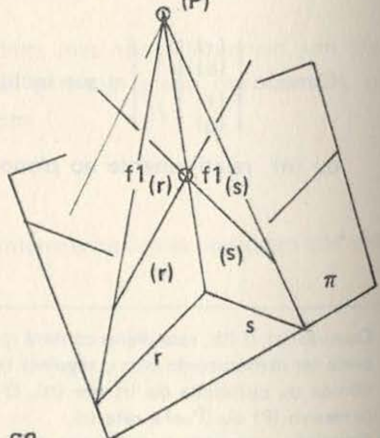


Fig. 68

(1) No item 22 e sub itens, estudamos o assunto para possível aplicação a qualquer f0.

3212 – Se uma das retas (r) ⊃ centro projetivo, próprio ou impróprio, duas hipóteses poderão ser formuladas:

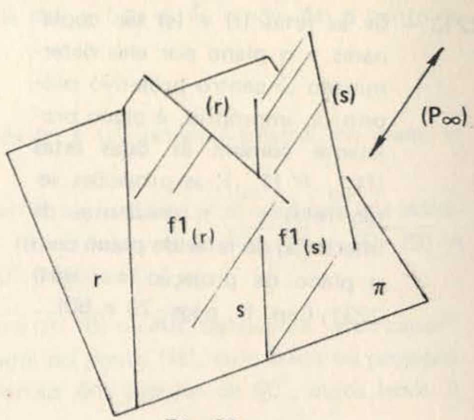


Fig. 69

32121 – As retas (r) e (s) não são coplanares:

– suas projeções serão "um ponto r" ≡ (r) ∩ π (interseção da reta (r) ⊃ centro projetivo, com plano π[1] e "uma reta s" ≡ (P) (s) ∩ π ou (P_∞) (s) ∩ π (interseção do plano projetante $f1_{(s)}$ de (s) com o plano de projeção π). Verifica-se que ponto r ∉ reta s (fig. 70).

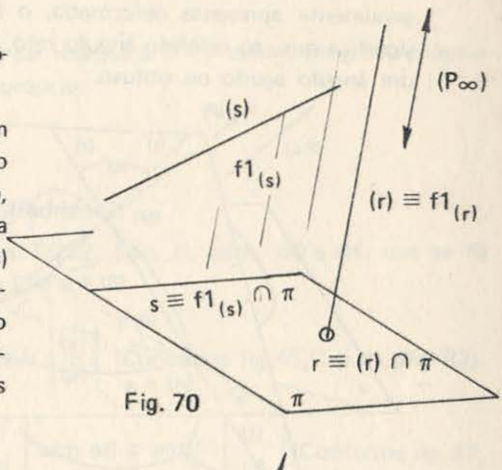


Fig. 70

32122 – As retas (r) e (s) são coplanares:

– suas projeções serão ainda "um ponto r" e "uma reta s", porém ponto r ∈ reta s (fig. 71).

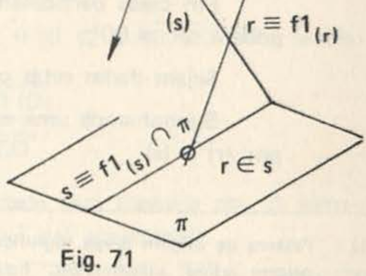


Fig. 71

(1) Nessa hipótese a projetante de (r) será uma reta (r) ≡ $f1_{(r)}$ e distinta do plano projetante da reta (s) (item 2231, Cap. II).

3213 – Se as retas (r) e (s) são coplanares e o plano por elas determinado $\supset$ centro projetivo próprio ou impróprio, é plano projetante **comum às duas retas** ($f1_{(r)} \equiv f1_{(s)}$), as projeções serão retas $r \equiv s$, resultante da interseção do referido plano com o plano de projeção π item 2231, Cap. II, págs. 79 e 80).

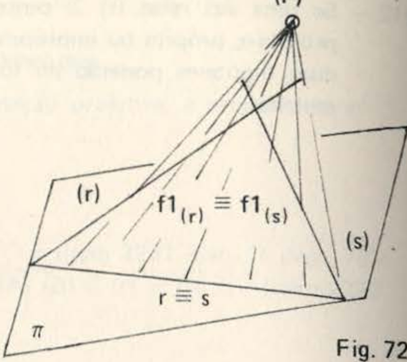


Fig. 72

3214 – Quando duas retas são perpendiculares ou ortogonais[1], fig. 73, sua projeção, geralmente apresenta deformado, o ângulo reto existente entre elas. Isso significa que, ao referido ângulo reto, corresponde por projeção, via de regra, um ângulo agudo ou obtuso.

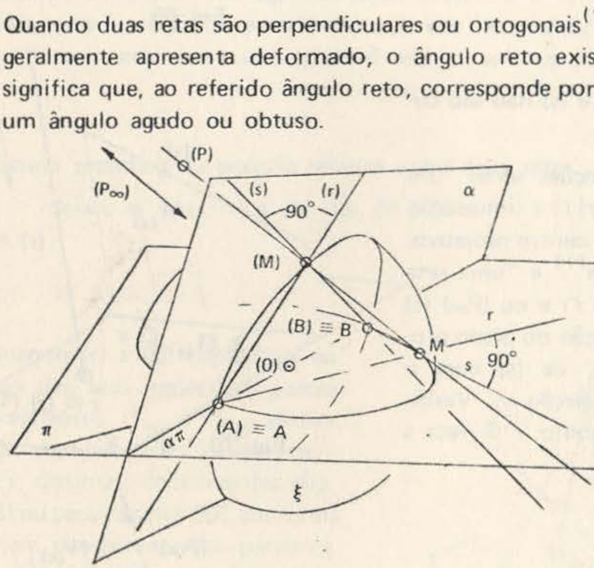


Fig. 73

Em casos particulares, a grandeza angular entre as projeções das retas poderá ser $= 90°$.

Sejam dadas retas coplanares (r) $\perp$ (s).

Suponhamos uma esfera ξ cujo centro (O) $\in$ plano (α) determinado por (r) e (s).

---

(1) Palavra de origem grega, significa "Ângulo reto". Equivale a palavra "perpendicular", de origem latina, significando "figuras que se cortam em ângulo reto". A expressão "retas ortogonais" tem sido utilizada para indicar posição relativa entre duas retas **não coplanares** tais que, é sempre possível, uma delas $\in$ plano $\perp$ outra; ou construir terceira reta, perpendicular a uma das duas, porém // outra.

Consideremos a distância $\overline{(O)\ (M)}$ = raio de ξ, sendo (M) o ponto de concurso das retas (r) e (s).

Consideremos que $(O) \in \pi$.

Sejam (A) e (B) os traços de (r) e (s), respectivamente, no plano π. Logo $(A) \equiv A$ e $(B) \equiv B$.

Verifica-se que (α) e π cortam ξ segundo círculos máximos que admitem como diâmetro comum $(A)\ (B) \in (\alpha)\pi$, sendo $\overline{(O)\ (A)} = \overline{(O)\ (B)} = \overline{(O)\ (M)}$ e $\sphericalangle\ (A)\ (M)\ (B) = 90^\circ$ (hipótese).

Mas o círculo $\in \pi$, de diâmetro $\overline{(A)\ (B)}$ ou $\overline{AB}$, também, é "arco capaz" de ângulo de 90°. Então, a projetante do ponto (M), cujo traço ou projeção $M \in$ referido arco capaz, será o vértice dos ângulos de 90°, cujos lados $\supset$ pontos $(A) \equiv A$ e $(B) \equiv B$.

Então $\sphericalangle\ AMB = 90^\circ$.

A projetante (M)M poderá ser relativa a (P) = centro projetivo próprio ou (P_∞) = centro projetivo impróprio.

322 – **Peculiaridades dos "Sistemas Cilíndricos":**

Podemos concluir, do item 2232, Cap. II, págs. 80 a 84, que se f0 admite jazida reta (j) ou plano (β):

3221 – f2 = f0 quando $\pi \ // \left|\begin{matrix}(j)\\(\beta)\end{matrix}\right|$ ou anti// $\left|\begin{matrix}(j)\\(\beta)\end{matrix}\right|$ (Conforme fig.45,Cap. II,pág. 82).

3222 – f2 afim de f0, quando $\pi \angle \left|\begin{matrix}(j)\\(\beta)\end{matrix}\right|$ sem ser π anti// $\left|\begin{matrix}(j)\\(\beta)\end{matrix}\right|$ (Conforme fig.47, Cap. II, pág. 84).

3223 – Se f0 (fig. 74) $\supset \overline{(A)\ (B)}, \overline{(B)\ (C)}, \overline{(C)\ (D)} \ldots \in (j)$, f2 $\supset \overline{AB}, \overline{BC} \ldots \in j$, sendo:

$$\frac{\overline{(A)\ (B)}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{(B)\ (C)}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{(C)\ (D)}}{\overline{CD}} = \ldots$$

A demonstração dessa proporcionalidade está baseada nos Δ semelhantes, cujos lados $\in$ (j), j e a direção (P_∞) das projetantes.

Quando $\overline{(A)\ (B)} = \overline{(B)\ (C)} = \overline{(C)\ (D)} \ldots$; $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \ldots$ (fig. 75).

3224 – Se f0 é constituída de retas (q) // (r) // (s) (fig. 74). f2 será formada de retas q // r // s. Daí a conclusão:

"Retas entre si paralelas, se projetam segundo retas, também entre si paralelas".

A demonstração desse teorema se baseia no seguinte:

– Os planos projetantes das retas (q), (r) e (s) estão entre si paralelos e são cortados por π, logo as interseções q, r e s são retas paralelas.

Quando o centro projetivo $(P_\infty) \in$ direção das retas (q), (r) e (s), as respectivas projeções serão pontos $q \equiv ((q) \cap \pi)$, $r \equiv ((r) \cap \pi)$, $s \equiv ((s) \cap \pi)$ (fig. 74).

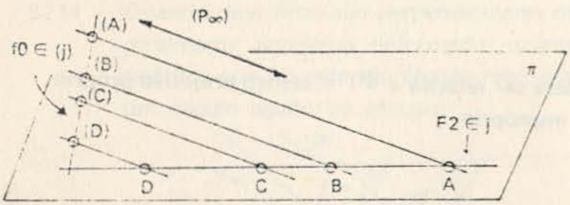


Fig. 74

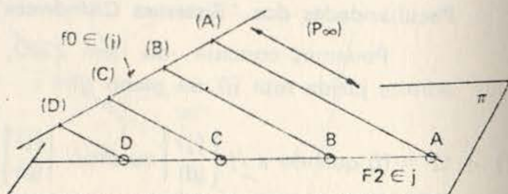


Fig. 75

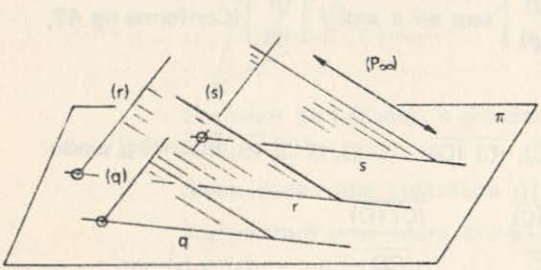


Fig. 76

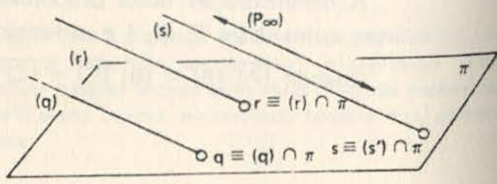


Fig. 77

323 – **Peculiaridades dos Sistemas Ortogonais:**[1]

3231 – f0 é constituída de duas retas entre si perpendiculares ou ortogonais.

32311 – Teorema:

"Para que a projeção ortogonal do ângulo reto, formado entre duas retas, perpendiculares ou ortogonais, se apresente em verdadeira grandeza, é condição necessária e suficiente, estar um de seus lados // π".

32312 – Demonstração:

Conforme as três condições contidas na hipótese:

– Sejam as retas $(r) \perp \left| \begin{array}{l} (s) \\ (s1) \; // \; (s) \end{array} \right.$ ou $(r) \perp (\delta)$ e $(s) \in (\delta)$ (fig. 78).

– Suponhamos $(r) \; // \; \pi$.

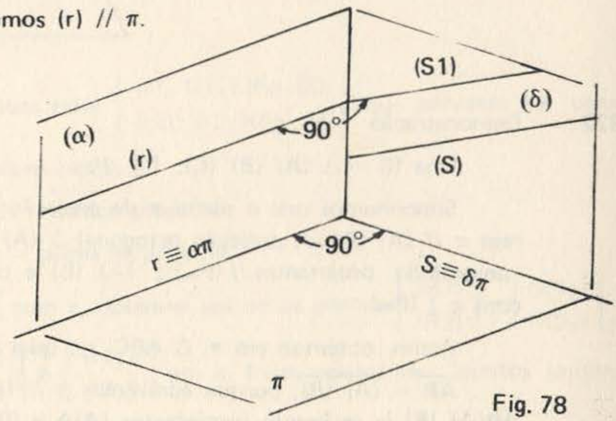


Fig. 78

– projetemos ortogonalmente em π, as retas (r) e (s). Sejam ainda, (α) e (δ), respectivamente, seus planos projetantes.

Esses planos são cortados pelo plano π, segundo retas $\alpha\pi$ e $\delta\pi$.

$\alpha\pi$ determina "r" e $\delta\pi$, "s", projeções de (r) e (s) no plano π.

Mas $\left| \begin{array}{l} (\alpha) \\ (\delta) \end{array} \right| \perp \pi$; $(r) \; // \; \pi$ e $(\delta) \perp (r)$ três condições da hip.).

Sendo $(r) \; // \; \pi$, sua projeção $r \; // \; (r)$.[2]

Então $r \perp (\delta)$. Como $s \in (\delta)$, conclue-se: $r \perp s$

(1) Caso particular do Sistema Cilíndrico (item 23321, Cap. II, pág. 99).

(2) Item 3202.

3232 – f0 ∈ jazida reta ou plano.

32321 – Teorema:

"A razão entre f0 ∈ jazida reta ou plano e f2 ∈ π é igual ou menor que a unidade".[1]

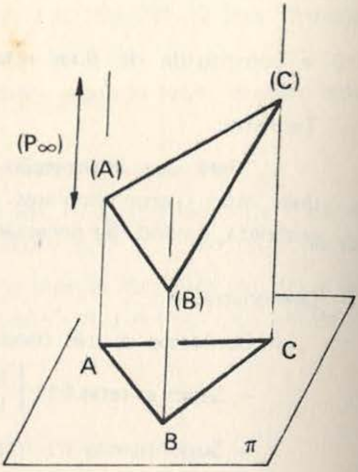


Fig. 79

32322 – Demonstração:

Seja f0 = △ (A) (B) (C), fig. 79.

Suponhamos que o plano π de projeção, esteja $\angle$ (A) (B) (C), porém π // (A) (B). A projeção ortogonal △ (A) (B) (C) em π será obtida construindo projetantes // (P_∞) ⊥ (A) (B) e cortando essas projetantes com π ⊥ (P_∞).

Assim, obtém-se em π, △ ABC, no qual se verifica:

$\overline{AB} = \overline{(A)\ (B)}$, porque admitimos π // (A) (B), logo, quadrilátero AB(A) (B) = retângulo (projetantes (A)A e (B)B ⊥ π)

$\overline{AC} < \overline{(A)\ (C)}$ porque $\pi \angle$ (A) (C). Então, a figura AC(A) (C) = trapézio retângulo. Suas bases são as projetantes (A)A e (C)C. O lado menor AC corresponde ao que está adjacente aos ângulos retos que as projetantes formam com π.

Portanto $\overline{AC} < \overline{(A)\ (C)}$.

Essa demonstração se aplica a relação entre $\overline{BC}$ < (B) (C).

Logo, △ ABC tem menor área que △ (A) (B) (C).

Quando, △ (A) (B) (C) // π, △ ABC = △ (A) (B) (C).

---

(1) Caso particular do Teorema nº 2, item 2232, Cap. II, págs. 80 a 84.

324 – Peculiaridades dos Sistemas Cônicos:

3241 – Teoremas:

"A projeção cônica de retas $\left|\begin{matrix}\text{paralelas } (r1),\ (r1_1),\dots \text{ (fig. 80)}\\ \text{concorrentes } (r2),\ (r2_1),\dots \text{ (fig. 81)}\end{matrix}\right|$ cujo ponto comum é $\left|\begin{matrix}\text{impróprio } (M1\infty)\\ \text{próprio } (M2)\end{matrix}\right|$, será constituída de retas $\left|\begin{matrix}\text{concorrentes } r2,\ r2_1,\ \dots\\ \text{paralelas } r1,\ r1_1,\ \dots\end{matrix}\right|$ cujo ponto comum é $\left|\begin{matrix}M2\\ M1\infty\end{matrix}\right|$, quando esse ponto ficar determinado por uma projetante $\left|\begin{matrix}(P)\ (M1\infty)\\ (P)\ (M2)\end{matrix}\right|$ na posição $\left|\begin{matrix}(P)\ (M1\infty)M2 \perp \pi\\ (P)\ (M2)M1\infty \ // \ \pi\end{matrix}\right|$".

3242 – Demonstração:

Sejam: – Duas retas $\left|\begin{matrix}(r1,\ (r1_1)\ \text{(fig. 80)}\\ (r2),\ (r2_1)\text{(fig. 81)}\end{matrix}\right|$ que admitem (α) como plano jazida.

– (P) = centro projetivo.

– π = plano de projeção.

Cortando (α) com π, obtém-se em $\alpha\pi$ os pontos $\left|\begin{matrix}(R1)\\ (R2)\end{matrix}\right|$ e $\left|\begin{matrix}(R1_1)\\ (R2_1)\end{matrix}\right|$ = traços de $\left|\begin{matrix}(r1)\\ (r2)\end{matrix}\right|$ e $\left|\begin{matrix}(r1_1)\\ (r2_1)\end{matrix}\right|$ em π. Esses pontos são "pontos unidos" porque suas projeções em $\pi \equiv$ eles próprios: $(R1) \equiv R2$ e $(R1_1) \equiv R2_1$.

Projetando o ponto $\left|\begin{matrix}(M1\infty)\\ (M2)\end{matrix}\right|$, a projetante $\left|\begin{matrix}(P)\ (M1\infty)\\ (P)\ (M2)\end{matrix}\right|$ corta o plano π em $\left|\begin{matrix}M2\\ M1\infty\end{matrix}\right|$. Quando essa projetante se apresenta $\left|\begin{matrix}\perp\\ //\end{matrix}\right|$ π, o ponto $\left|\begin{matrix}M2\\ M1\infty\end{matrix}\right|$ será $\left|\begin{matrix}\text{próprio}\\ \text{impróprio}\end{matrix}\right|$ e as projeções $\left|\begin{matrix}r2,\ r2_1\\ r1,\ r1_1\end{matrix}\right|$ no plano π, terão que conter $\left|\begin{matrix}M2\\ M1\infty\end{matrix}\right|$, correspondente ao ponto $\left|\begin{matrix}\text{impróprio } (M1\infty)\\ \text{próprio } (M2)\end{matrix}\right|$.

Portanto, as projeções $\left|\begin{matrix}r2,\ r2_1\\ r1,\ r1_1\end{matrix}\right|$ se apresentam segundo retas $\left|\begin{matrix}\text{concorrentes}\\ \text{paralelas}\end{matrix}\right|$.

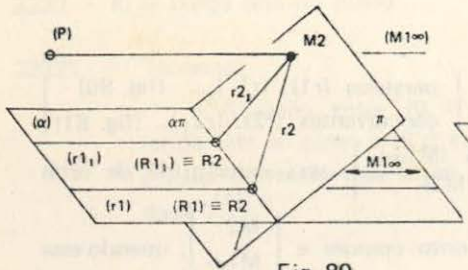


Fig. 80

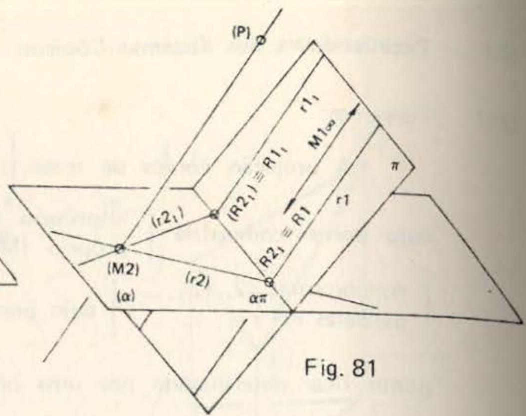


Fig. 81

325 – Estudo da relação entre f0 e f2 quando f0 ou o plano π, está animado de movimento de translação.[1]

3251 – Teorema relativo a projeção cilíndrica.

"A projeção cilíndrica f2 não se altera, em forma e grandeza, quando f0 (invariante em forma e grandeza), descreve movimento de translação na direção da projetante, ou quando f0 fica imóvel e π se desloca em movimento de translação na direção (P∞) (cada ponto ∈ f2 descreve reta projetante)".

Destaque da:

32511 – HIPÓTESE – f0 ou π, descreve movimento direcionado por (P∞).

32512 – TESE – f2 conserva-se invariante em forma e grandeza.

Seja f0 (fig. 82) constituído de pontos (A), (B), ...

Projetando f0 de (P∞), gera-se f1, constituída de retas projetantes // (P∞).

---

(1) Movimento no qual todos os pontos da figura, f0 ou plano π, têm em cada instante, a mesma velocidade e esta se mantém em direção constante. Se uma reta, determinada por dois pontos quaisquer ∈ figura, ela se conservará paralela a sua posição primitiva, quando essa figura (f0 ou π) descreve translação.

Cortando f1 com plano π, gera-se f2 constituída de pontos A, B,....

Se $\begin{vmatrix} f0 \\ \pi \end{vmatrix}$ se desloca na direção (P∞) (hipótese), cada ponto $\begin{vmatrix} (A) \\ A \end{vmatrix} \in \begin{vmatrix} f0 \\ \pi \end{vmatrix}$ descreve reta projetante $\begin{vmatrix} (P\infty)\ (A) \\ (P\infty)\ A \end{vmatrix}$ // (P∞). Essa projetante será então, suporte ou jazida de todas as posições de $\begin{vmatrix} (A) \\ A \end{vmatrix}$.

Isso se verifica para todo o sistema de pontos que constituem $\begin{vmatrix} f0 \\ \pi \end{vmatrix}$. Assim, f1 é uma estrela ou feixe de retas projetantes de centro impróprio (P∞), tendo cada uma dessas retas, não somente a função de projetante, mas de "suporte" ou "jazida" de pontos $\begin{vmatrix} (A) \\ A \end{vmatrix}$, correspondentes às várias posições desse ponto, quando $\begin{vmatrix} f0 \\ \pi \end{vmatrix}$ se desloca direcionado por (P∞).

O mesmo se verifica para os demais pontos $\in \begin{vmatrix} f0 \\ \pi \end{vmatrix}$. Ao "sistema de pontos" que constituem $\begin{vmatrix} f0 \\ f2 \end{vmatrix}$, corresponde "somente um sistema de retas projetantes f1".

Portanto, para as infinitas posições de $\begin{vmatrix} f0 \\ \pi \end{vmatrix}$ direcionado por (P∞), existe somente uma figura f1, que cortada pelo plano π, produzirá f2. Como f1 é única, f2 será invariante em forma e grandeza para qualquer deslocamento de $\begin{vmatrix} f0 \\ \pi \end{vmatrix}$ na direção (P∞).

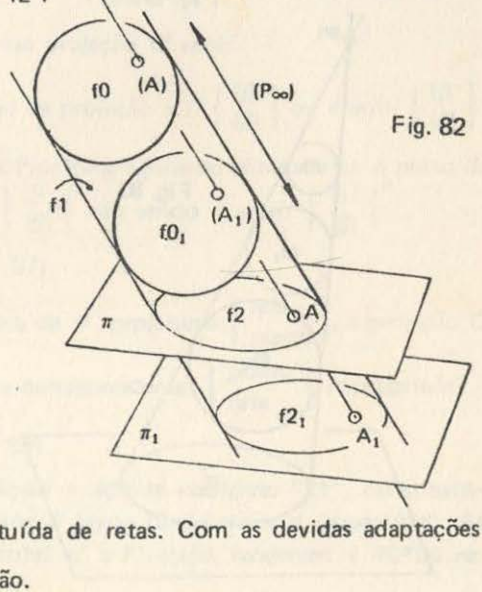


Fig. 82

$\begin{vmatrix} f0 \\ f2 \end{vmatrix}$ pode ser constituída de retas. Com as devidas adaptações chegaremos a mesma conclusão.

3252 – Teorema relativo a projeção cônica (Figs. 83 e 84).

"A projeção f2 $\begin{vmatrix} \text{conserva-se invariante} \\ \text{varia homoteticamente} \end{vmatrix}$; quando f0 $\begin{vmatrix} \text{deslocou-se} \\ \text{fica imóvel} \end{vmatrix}$

no espaço $\left|\begin{array}{l}\text{animado de movimento de translação}\\ \text{e o plano } \pi \text{ desloca-se // posição primitiva}\end{array}\right|$ de modo que cada um de seus elementos, ponto ou reta, descreve projetante do sistema cônico.

As projetantes que constituem f1, representam a trajetória dos vários entes $\in \left|\begin{array}{c}f0\\ \pi\end{array}\right|$ e possibilitam que $\left|\begin{array}{c}f0\\ f2\end{array}\right|$ não varie de forma.

O mesmo ocorre com a grandeza. Quando f0 $\left|\begin{array}{l}\text{conserva invariante}\\ \text{varia homotéticamente}\end{array}\right|$ sua grandeza, e π $\left|\begin{array}{l}\text{desloca-se}\\ \text{permanece fixo}\end{array}\right|$, f2 $\left|\begin{array}{l}\text{varia homotéticamente}\\ \text{conserva-se invariante}\end{array}\right|$.

No sistema cônico de projeção, as figuras, f0 ou f2 $\left|\begin{array}{l}\text{reduzem-se}\\ \text{ampliam-se}\end{array}\right|$ em grandeza, tendendo para o infinitamente $\left|\begin{array}{l}\text{pequeno}\\ \text{grande}\end{array}\right|$ quando f0 ou π está infinitamente $\left|\begin{array}{l}\text{próximo}\\ \text{afastado}\end{array}\right|$ de (P).

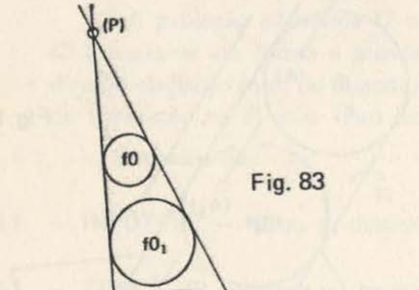


Fig. 83

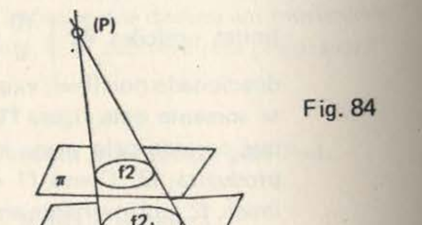


Fig. 84

Esses teoremas (3251 e 3252) são corolários do estudado no item 2232, Cap. II, pág. 80.

33 – CONCLUSÕES FINAIS

331 – Todos os sistemas projetivos que adotam centro projetivo, ponto próprio ou impróprio, podem ser estudados como aplicação das operações projetivas:

"PROJETAR" e "CORTAR"

332 – A relação entre as figuras f0 (figura dada), f1 (figura resultante da "operação projetar f0") e f2 (figura obtida pela seção que o plano π de projeção, produz em f1) pode ser sintetizada nos seguintes teoremas:

Nº 2231 (Cap. II, págs. 79 e 80).

"Quando f0 admite jazida $\left| \begin{matrix} \text{reta } (j) \\ \text{plano } (\beta) \end{matrix} \right|$ e o centro projetivo (P) ou $(P_\infty) \in \left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$, a projeção f2, de f0 será: $\left| \begin{matrix} \text{ponto } (j) \cap \pi \\ \text{reta } (\beta) \cap \pi \end{matrix} \right|$".

Nº 2232 (Cap. II, págs. 80 a 85).

"Quando f0 admite jazida $\left| \begin{matrix} \text{reta } (j) \\ \text{plano } (\beta) \end{matrix} \right|$ e o centro projetivo (P) ou $(P_\infty) \notin \left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$, sua projeção f2 será:

I) $\approx$ f0 se o plano de projeção π // $\left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$ ou π anti/ $\left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$.

II) homóloga de f0 (homologia geral ou afinidade) se o plano de projeção $\pi \angle \left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$ não sendo π anti// $\left| \begin{matrix} (j) \\ (\beta) \end{matrix} \right|$".

Nº 2233 (Cap. II, págs. 85 a 87).

Quando π // elemento de f1, projetante $\left| \begin{matrix} \text{reta} \\ \text{plano} \end{matrix} \right|$, a projeção f2 apresentará elemento correspondente, $\left| \begin{matrix} \text{ponto} \\ \text{reta} \end{matrix} \right|$ impróprio/a".

Nº 2241 (Cap. II, págs. 87 a 89).

"Se f1 é tri-dimensional e admite contorno "ℓ1", constituído de retas, esse contorno é figura bi-dimensional (superfície). As posições das projetantes ∈ e ℓ1 estão tangentes à f0 ou nela apoiadas".

Nº 2242 (Cap. II, págs. 89 e 90).

"Se f1 admite contorno ℓ1, f2 também admitirá contorno ℓ2, sendo ℓ2 traço de ℓ1 em π".

Nº 2243 (Cap. II, pág. 90 e 91).

"A projeção da linha (a) de contato ou de apoio, entre $\ell 1$ e f0 é $a2 \equiv \ell 2$".

333 – Para generalizar os teoremas referidos no item 332, torna-se necessário admitir que qualquer figura $\in$ jazida possa ser determinada por uma estrutura composta de figuras que admitem jazida reta ou plano.

BIBLIOGRAFIA

1 – Álvaro J. Rodrigues: "Geometria Descritiva" 2º Volume: "Projetividades, Curvas e Superfícies", 3ª Edição, 1964. Editor "Ao Livro Técnico S.A., R.J..

2 – Antônio Marmo de Oliveira e Agostinho Silva: "LISA Biblioteca da Matemática Moderna", 1968. Editor "Lisa Livros Irradiantes S.A." S. Paulo.

3 – "Biblioteca Científica Life", Editora Livraria José Olympio, 1980, R.J..

4 – C. Roubaudi, revue et mise à jour par A. Thybaut: "Traité de Géométrie Descriptive", 1926. Masson et Cie, Editeurs, Paris.

5 – D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, translated by P. Nemenyi: "Geometry and the Imagination", 1952. Chelsea Publishing Company, New York.

6 – D. Julio Rey Pastor: "Teoria Geométrica de la Polaridad en las Figuras de Primeira y Segunda Categoria", 1929. Talleres Voluntad, Madrid.

7 – Elysio de Carvalho Lisboa: "A Evolução da Geometria", 1940. Imprensa Regina. Bahia.

8 – E. Borel et R. Deltheil: "La Géométrie et les Imaginaires", Biblioteque d'Education par la Science. Publiée sous la direction de M. Émile Borel. Albin Michel, Editeur. 1831. Paris.

9 – Émile Borel: "L'Imaginaire et le Réel en Matrématiques et en Physique", Bibliothéque d'Éducation par la Science. Publiée sous la direction de M.M. Émile Borel et Georges Champetier. Éditions Albin Michel, 1952. Paris.

10 – Federigo Enriques: "Lecciones de Geometria Descriptiva". Traduccion de T.R. Bachiller. Ed. Estudiantes Españoles. Madrid.

11 – Federigo Enriques: "Lezioni di Geometria Proiettiva", 1926. Nicola Zanichelli Editore, Bolonga.

12 – Felippe dos Santos Reis: "Análise Geométrica das Jazidas...", 3º Volume, 1964, R.J..

13 – Fernando Izquierdo Asensi: "Geometría Descriptiva Superiory Aplicada", 1975. Editorial Dossat, S.A., Madrid.

14 – G. Cagnac, E. Ramis, J. Commeau: "Nouveau Cours de Mathématiques Spéciales". Vol. 3 e 4, 1967. Masson & Cie. France.

15 – Georges Bouligand et Jean Desgrandes: "Le Déclin des Absolus Mathématico-Logiques", Esprit & Méthode, 1949. Société d'Edition d'Enseignement Supérieur. Paris.

16 – Gino Loria: "Storia della Geometria Descrittiva", 1921. Manuali Hoepli, Milano.

17 – Guido Castelnuovo; "Lecciones de Geometria Analítica. Geometría analítica del plano y del espacio. Conceptos fundamentales de geometría proyectiva. Curvas y superfícies de segundo orden", 1ª cast, 7ª ed. ital., 1955. Mundo Científico C. Calomino. B. Aires.

18 – Héctor Ceppi, Alejo M. Fournier: "Geometría Proyectiva", 1951. Editorial Guillermo Kraft Ltda., B. Aires.

19 – Justo Pascali: "Geometria Proyectiva", 2ª Edicion, 1952. Centro de Estudiantes de Ingenieria de Buenos Aires. B. Aires.

20 – L. Berzolari, Vivanti Gigli: "Enciclopedia Delle Matematiche Elementari", 1930/1950. Ulrico Hoepli, Milano.

21 – L. Sanches-Marmol, M. Perez-Beato: "Geometria Métrica Proyectiva y Sistemas de Representacion", 2ª Edicion, Tomos I, II, 1945. SAETA. Madrid.

22 – Léa Santos de Bustamante: "Projeções da Esfera.....", 1960.

23 – Lília da Rocha Bastos, Lyra Paixão, Lúcia Monteiro Fernandes: "Manual para a elaboração de projetos e relatórios de pesquisa, teses e dissertações". Segunda Edição. Zahar Editores. 1981.

24 – Lucien Godeaux: "Les Géométries", "Collection Armand Colin", 1947. Librairie Armand Colin. Paris.

25 – Lucienne Félix: "Mathématiques Modernes ∩ Enseignement Elementaire", 1965. Librairie Scientifique Albert Blanchard. Paris.

26 – Luís de Albuquerque: "Elementos de Geometria Projectiva e Geometria Descriptiva", 1969. Livraria Almedina. Coimbra.

27 – M. Chasles: "Aperçu Historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie ..." Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, 1875.

28 – M. René Taton: "La Géométrie Projective en France de Desargues a Poncelet", "Les Conférences du Palais de la Découverte, 1951.

29 – M. René Taton: "L'Histoire de la Géométrie Descriptive". "Les Conférences du Palais de la Découverte", Série D, nº 32, 1954. Université de Paris. Paris.

30 – Maria Izabel do Rego Barros P. de Oliveira: "A Geometria Descritiva nas Artes", 1974. Gráfica Editora Bahiense. Rio de Janeiro.

31 – N. Krylov, P. Landiyevsky, S. Men: "Descriptive Geometry". Translated from the Russian by George Yankovsky. Mir Publishers, 1968. Moscow.

32 – Novo Dicionário Aurélio, 1ª Edição, 2ª Impressão. Editora Nova Fronteira. Rio de Janeiro.

33 – Roberto Muniz Gregory: "Quádricas de Revolução", 1949. Rio de Janeiro.

34 – Roberto Muniz Grégory: "Classificação dos Sistemas de Representação. Princípio Axonométrico. AXONOMETRIA", 1954. Rio de Janeiro.

35 – Virgílio Athayde Pinheiro: "Geometrografia", Vols. 1 e 2, 1974 e 1979. Gráfica Editora Bahiense. Rio de Janeiro.

ÍNDICE

Capítulo II – CONCLUSÕES DO EXPOSTO NO CAPÍTULO II OBJETIVANDO APLICAÇÃO AOS SISTEMAS PROJETIVOS

Capítulo III – APLICAÇÃO AOS "SISTEMAS PROJETIVOS".

ERRATA

Pág.	Item/Fig. §/Lin./Col.	Onde se lê	Leia-se
24	2ª linha	(geratriz)	(diretriz)
35	112836	cordas	$\perp$ cordas
38	1214	Aplicando....	§ Aplicando....
40	121423	e ..... e	(e) ..... (e)
45	1232		
	§ 2	δ	ς
	§ 3	δ	ς
	§ 4	δ	ς
51	1252213	$(\alpha, 1)$ $(\alpha, 2)$	$(\alpha\ 1)$, $(\alpha\ 2)$
53	1252311	$\left\lvert \begin{matrix} \text{plano secante } \pi \\ \text{reta secante (s)} \end{matrix} \right\rvert$	$\left\lvert \begin{matrix} \text{plano } \pi \\ \text{reta (s)} \end{matrix} \right\rvert$
70	2134	f0 $\notin$ f1	f0 $\not\equiv$ f1
93	2253	$1_0 \equiv 2_0$	$1_0 \equiv 1_2$
96	Fig. 59	esse elemento	esses elementos
98	§ 2 4ª lin.	inferiores	interiores
102	235, 3ª col.	UTILIZADO	UTILIZADA
103	Roda pé	vocávulo	vocábulo
109	31222 § 2	(// (α)	(r) // (α)
114	3224 § 1	(fig. 74)	(fig. 76)
	§ 4 3ª lin.	(fig. 74)	(fig. 77)
121	332, nº 2232 3ª lin.	π anti /	π anti //
122	333, 2ª lin.	$\in$ jazida	$\notin$ jazida