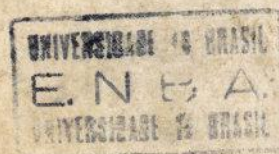


LÊA SANTOS DE BUSTAMANTE

Curso de Pintura da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil. Professora Licenciada em Desenho pela Faculdade Nacional de Filosofia. Docente-livre de Geometria Descritiva da E.N.B.A. da U. B. Autora em Ciências Aplicadas da E.N.B.A. da U. B. Técnico Especializado junto à cadeira de Geometria Descritiva da E.N.B.A. da U. B.



rojeções da Esfera

TRANSFORMAÇÃO HOMOLÓGICA DO SISTEMA "ESFERA-SUPERFÍCIE CÔNICA DE REVOLUÇÃO CIRCUNSCRITA" EM SISTEMA

ELIPSÓIDE-SUPERFÍCIE CÔNICA DO 2.º GRAU NÃO DE REVOLUÇÃO CIRCUNSCRITA"

Trabalho apresentado à Douta Congregação da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil, para provimento do cargo de Professor Catedrático da Cadeira de Geometria Descritiva.

1960



LÉA SANTOS DE BUSTAMANTE

Curso de Pintura da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil. Professora Licenciada em Desenho pela Faculdade Nacional de Filosofia. Docente-livre de Geometria Descritiva da E.N.B.A. da U. B. Doutora em Ciências Aplicadas da E.N.B.A. da U. B. Técnico Especializado junto à cadeira de Geometria Descritiva da E.N.B.A. da U. B.

Projeções da Esfera

TRANSFORMAÇÃO HOMOLÓGICA DO SISTEMA "ESFERA-SUPERFÍCIE CÔNICA DE REVOLUÇÃO CIRCUNSCRITA" EM SISTEMA

"ELIPSÓIDE-SUPERFÍCIE CÔNICA DO 2.º GRAU NÃO DE REVOLUÇÃO CIRCUNSCRITA"

Trabalho apresentado à Douta Congregação da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil, para provimento do cargo de Professor Catedrático da Cadeira de Geometria Descritiva.

1960

F/3
1960
ex 2

Escola Nacional
de
Belas Artes U. B.
Biblioteca
Reg. 547 Ano 1906

Aos Meus Mestres

Prof. Dr. Alvaro José Rodrigues, catedrático de Geometria Descritiva da Escola Nacional de Belas-Artes da Universidade do Brasil

e

Prof. Dr. Roberto Muniz Gregory, ex-catedrático de Geometria Descritiva das Escolas Nacionais de Belas Artes e de Engenharia da Universidade do Brasil, tão precocemente privado de levar avante sua preciosa obra em prol do ensino da Geometria Descritiva

Ao primeiro e à memória do segundo,

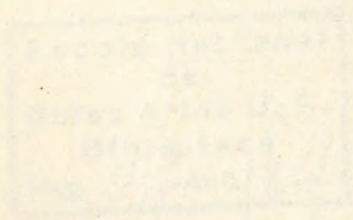
GRATIDÃO E RESPEITO

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.

Faint, illegible text, possibly bleed-through from the reverse side of the page.



“studia prima la scienza, e poi seguita la
pratica nata da essa scienza”

LEONARDO DA VINCI

“Trattato della Pittura”, Cap. VII

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
LIBRARY

PHYSICS DEPARTMENT

PHYSICS 311

1.ª PARTE

PLATE I.

I — INTRODUÇÃO

Desde os mais remotos tempos, o homem se preocupa em observar e interpretar a Natureza, através atividades que se convencionou chamar Arte e Ciência. A História nos ensina que essas duas atividades têm tido desenvolvimentos paralelos. As épocas de grandes produções artísticas são, também, via de regra, férteis em grandes progressos científicos. De fato, Ciência e Arte não só caminham paralelamente, como se entrosam e, curioso é notar, freqüentemente a Arte abre caminho à Ciência. Muitas pesquisas científicas têm sido feitas em tórno de manifestações artísticas e para justificar tais manifestações, mas também é certo que a Ciência aprimora a Arte, porque não só lhe fornece os fundamentos técnicos para o seu desenvolvimento, como auxilia a educação da sensibilidade artística, formando no artista a mentalidade do pesquisador.

Dentre os ramos da Ciência que mais se entrosam com a Arte, está a Matemática e, dentro desta, a Geometria, principalmente a parte que se convencionou chamar Geometria Descritiva. A Geometria, e em particular a Descritiva, são eficazes ferramentas da Arte. O genial Leonardo da Vinci descobriu importantes leis de perspectiva, as quais procurou provar com os recursos do seu grande talento. Somente mais tarde, com o método do imortal matemático francês Gaspard Monge, tais leis foram confirmadas pela Geometria Descritiva. Muitas outras observações idênticas poderíamos citar. Para que se não alongue esta introdução, indagamos o seguinte: não estará a chamada "Arte Moderna" ligada aos mais recentes conceitos da Matemática? As concepções da Geometria de Poncelet, com suas teorias sobre a Geometria Projetiva, com o estudo de homologia plana e espacial, as modernas teorias sobre Axonometria, não serão os fundamentos científicos de tal Arte? Estamos convencidos de que se pesquisarmos melhor, se estudarmos mais profundamente a Geometria Descritiva, como já está sendo realizado nas nações mais adiantadas do mundo, teremos uma resposta afirmativa a tal indagação.

Por esta razão, orientamos nosso trabalho de acôrdo com essa convicção. Eis porque, ao lado do estudo das "Projeções da esfera", incluímos, se bem que em caráter introdutório, o de "Transformações homológicas do sistema projetivo da esfera". A 1.^a Parte, de-

dicada principalmente à Geometria Métrica e Projetiva, serve de fundamento à 2.ª Parte, concernente à Geometria Descritiva, além de "Conclusões" e "Aplicações" específicas do trabalho proposto.

As "Conclusões" evidenciam como se pode sintetizar o estudo da Geometria Descritiva quando se orienta êsse estudo pela Geometria Projetiva. Recomendamos esta síntese como um estudo de cúpula, de visão geral e de unificação, sempre útil a quem se dedica a qualquer atividade, principalmente de caráter artístico ou científico.

Nem sempre pudemos evitar fossem apresentados neste trabalho conceitos e propriedades já conhecidos e divulgados. Entretanto, o fizemos com dois propósitos:

- 1.º — pretendemos dar cunho didático a nosso trabalho;
- 2.º — freqüentemente, precisamos nos basear em tais conceitos e propriedades para tirar conclusões ou deduzir outras propriedades.

Devendo a maior parte de nossa formação de nível superior à Escola Nacional de Belas Artes, que há mais de século e meio vem formando gerações de artistas e técnicos, muitos dos quais de renome universal, não podemos deixar de consignar aqui nosso testemunho de gratidão a essa Casa, onde haurimos os alicerces que norteiam nossas atividades profissionais.

Desejamos agradecer, especialmente, a dois ilustres mestres, Dr. Álvaro José Rodrigues e Dr. Roberto Muniz Gregory. O primeiro, pela inexgotável messe de seguros conhecimentos que, na Geometria de Monge, pôs ao nosso alcance; o segundo, a quem assistimos como Técnico Especializado, durante mais de três anos, proporcionou-nos a feliz oportunidade de ampliar êsses conhecimentos, pois encontramos em Roberto Muniz Gregory não apenas o catedrático renomado, mas também, o mestre dedicado, ao qual devemos grande parte de nossa iniciação à Geometria Descritiva Moderna.

NOTAÇÕES

Usamos notação já empregada no trabalho: "Casos em que os eixos dos triedros são lugares geométricos dos centros das secções triangulares", que apresentamos, em 1957, à Congregação da Escola Nacional de Belas-Artes da Universidade do Brasil, para obtenção do título de livre docente de Geometria Descritiva daquela Escola.

Naquele trabalho, como no presente, adotamos muito da notação empregada pelo professor Roberto Muniz Gregory, para as diversas representações de pontos, linhas e planos. Êsse eminente professor, por sua vez, inspirou-se no célebre geômetra italiano Luigi Cremona.

Relativamente aos elementos fundamentais, a notação cremo-niana denomina um ponto por letra maiúscula do alfabeto latino, uma linha por letra minúscula dêsse mesmo alfabeto, um plano por letra minúscula do alfabeto grego.

Partindo dêsse princípio, e a exemplo do que fez o professor Gregory, distinguimos um ponto ou uma linha de suas respectivas projecções, colocando entre um parênteses êsse ponto ou essa linha.

Assim, tratando-se de um ponto do espaço e de sua projecção sôbre um plano:

(A) corresponde ao ponto do espaço e A à sua projecção sôbre um plano.

O mesmo se observa relativamente às linhas:

(m) corresponde à linha no espaço e m à sua projecção sôbre um plano.

Quando a denominação se refere a um ponto ou uma linha impróprios, acrescentamos o sinal ∞ , como índice, às respectivas letras que dão nome a êsses elementos.

Assim: A_{∞} é projecção de um ponto (A_{∞}), impróprio.

Quando a reta resulta da intersecção de dois planos, poderá ser designada pelas letras gregas que denominam os planos que lhe deram origem.

Dêsse modo, a reta resultante da intersecção dos planos α e β será $\alpha \beta$.

Quando se trata de ponto ou linha rebatidos, colocamos, entre parênteses, a letra que designa um dêsses elementos, e fora do parênteses, como índice, um número indicativo da ordem do rebatimento.

Assim: $(S)_1$ corresponde ao 1.º rebatimento do ponto (S);

$(S)_2$ corresponde ao 2.º rebatimento do ponto (S).

Denominamos os sólidos por letras maiúsculas do alfabeto grego.

Suprindo deficiência de recurso tipográfico, usamos ε = pertence, em substituição ao símbolo adotado para a palavra "pertence" pelo matemático G. Peano (natural da Itália). O símbolo de G. Peano lembra aquela letra grega, razão pela qual a empregamos.

The first part of the paper is devoted to a general discussion of the problem. It is shown that the problem is of great importance in the theory of differential equations. The second part is devoted to the study of the properties of the solutions of the equation. It is shown that the solutions of the equation are of the form $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants. The third part is devoted to the study of the properties of the solutions of the equation. It is shown that the solutions of the equation are of the form $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants. The fourth part is devoted to the study of the properties of the solutions of the equation. It is shown that the solutions of the equation are of the form $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants. The fifth part is devoted to the study of the properties of the solutions of the equation. It is shown that the solutions of the equation are of the form $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants. The sixth part is devoted to the study of the properties of the solutions of the equation. It is shown that the solutions of the equation are of the form $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants. The seventh part is devoted to the study of the properties of the solutions of the equation. It is shown that the solutions of the equation are of the form $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants. The eighth part is devoted to the study of the properties of the solutions of the equation. It is shown that the solutions of the equation are of the form $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants. The ninth part is devoted to the study of the properties of the solutions of the equation. It is shown that the solutions of the equation are of the form $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants. The tenth part is devoted to the study of the properties of the solutions of the equation. It is shown that the solutions of the equation are of the form $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants.

II — BREVE APRECIACÃO SÔBRE CURVAS CÔNICAS

1) CÔNICA COMO LUGAR GEOMÉTRICO

Geomêtricamente, pode-se considerar a cônica como uma curva plana, lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a um ponto fixo (foco) e a uma reta fixa (diretriz), pertencente ao plano da curva, estão entre si, numa razão constante k .

Quando k é menor que a unidade, a cônica é uma elipse; quando igual a unidade, uma parábola e, quando maior que a unidade, é uma hipérbole.

Sabe-se que, analiticamente, em coordenadas retilíneas, essas curvas traduzem-se por equações do 2.º grau, o que justifica serem também denominadas curvas do 2.º grau.

Verificaremos mais adiante (pág. 40) como, em Geometria Projetiva, se pode conceituar tal curva.

2) CÔNICA COMO RESULTANTE DA SECÇÃO PLANA DE UMA SUPERFÍCIE

Pesquisas históricas demonstram que os primeiros estudos sôbre cônicas datam de Platão (1). A consideração dessa curva como resultante da secção plana de uma superfície cônica de revolução teve em Apollonius de Perga o primeiro estudo de vulto e sistematizado sôbre o assunto (2). A denominação "cônica" resulta dêsse estudo.

Posteriormente, com o desenvolvimento das investigações em tórno de certas superfícies, denominadas quádricas, constatou-se a natureza, também cônica, das secções planas de tais superfícies.

(1) Platão introduziu em seus estudos o método analítico, as secções cônicas e a doutrina dos lugares geométricos (ver "Quádricas de revolução" de Roberto Muniz Gregory, pág. 3. Rio de Janeiro, 1949 trabalho apresentado à Congregação da Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil, no concurso para provimento do cargo de professor catedrático de Geometria Descritiva, Elementos de Geometria Projetiva, Perspectiva, Aplicações Técnicas).

(2) Deve-se a Apollonius de Perga as generalizações, as construções e os teoremas referentes às secções feitas por planos na superfície de um cone circular... (ver "Geometria Descritiva" de Alvaro José Rodrigues, 3.ª edição, "Ao Livro Técnico" — Rio — 1960.

Poncelet provou que um plano impróprio secciona uma quádriga segundo uma cônica.

Outras superfícies, como as quárticas, podem, em certos casos, admitir secções cônicas (superfícies pseudo-appollônicas).

3) CÔNICA COMO RESULTANTE DA INTERSECÇÃO DE DUAS SUPERFÍCIES

A intersecção de duas superfícies pode, também, dar origem a uma cônica. Na pág. 28, citaremos alguns teoremas relativos ao assunto.

4) CÔNICA COMO RESULTANTE DA PROJEÇÃO DE OUTRA CÔNICA OU DE UMA CURVA REVÊSSA

No caso de projeção de outra cônica recaímos na hipótese de secção da superfície cônica ou cilíndrica do 2.º grau, cuja diretriz é a cônica a ser projetada. No caso de projeção de uma curva revêssa, temos, ainda, a secção de uma superfície cônica ou cilíndrica do 2.º grau na qual a curva revêssa diretriz resulta, geralmente, da intersecção entre duas quádricas, obedecidas determinadas condições (3).

5) PROPRIEDADES DAS CÔNICAS

I) *Com relação a uma reta de seu plano:*

“Uma reta e uma cônica têm em comum dois, e sòmente dois pontos:

- a) *reais e distintos* — caso da reta secante à cônica:
- b) *reais e confundidos* — caso da reta tangente à cônica;
- c) *imaginários* (4) — caso da reta exterior à cônica”.

II) *Com relação a outra cônica:*

“Duas cônicas têm em comum quatro, e sòmente quatro pontos:

(3) Diversos autores tratam dêsse assunto. Assim, por exemplo, no livro “Exercices de Géométrie Descriptive, par F. J., troisième édition, chez les éditeurs” Tours Alfred Mame et Fils — Paris Ch. Poussielgue, Rue Cassete, 15 — 1893, pág. 623 e seguintes, destacamos o teorema: “A intersecção de duas quádricas que têm um plano principal comum se projeta sòbre este plano segundo uma cônica”.

(4) O conceito de imaginário foi introduzido na Geometria para prover

- a) *todos reais* — caso, por exemplo, de duas cônicas secantes;
- b) *reais e imaginários* (4) — caso, por exemplo, de duas cônicas que têm somente dois pontos reais de secância;
- c) *todos imaginários* (4) — caso em que as duas cônicas não têm pontos reais em comum.

uma necessidade de maior generalização, permitindo que aquela pudesse acompanhar os outros ramos da Matemática.

Dêsse modo, admite-se que os problemas tenham sempre solução, tal qual se faz, por exemplo, em Analítica. Problemas como o da intersecção entre uma cônica e uma reta de seu plano têm sempre solução, isto é: “uma cônica e uma reta do seu plano são sempre secantes”. Na solução pela Analítica, quando a reta é exterior à cônica a solução do sistema de equações correspondente nos fornece números imaginários conjugados (ou complexos conjugados); na solução pela Geometria, a reta é traçada exterior à cônica e diz-se que os dois pontos de secância são *imaginários*, isto é, não têm existência real.

Deve-se a Poncelet, com o seu célebre “Princípio da Continuidade” a extensão dos imaginários à Geometria (ver Justo Pascali, pág. 244, 2.^a Ed. 2.^a Reimpresion, B Aires — Centro Estudiantes de Ingenieria de B. Aires — 1952).

Nas págs. 52 a 57 em “Secções circulares”, faremos breve referência aos imaginários.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly a header or introductory paragraph.

Second block of faint, illegible text.

Third block of faint, illegible text.

Fourth block of faint, illegible text.

Fifth block of faint, illegible text.

Sixth block of faint, illegible text.

Final block of faint, illegible text at the bottom of the page.

III — BREVE APRECIACÃO SÔBRE SUPERFÍCIES

1) SUPERFÍCIES — SUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO

Não nos deteremos com a análise dos diversos conceitos de superfícies já conhecidos. Quaisquer dêles, como por exemplo, o de Monge, satisfaz ao estudo que pretendemos desenvolver. Também não nos aprofundaremos quanto à forma de ser gerada uma superfície. Sabemos que inúmeras são as maneiras de conceber tal geração, como seja:

- a) Pelo movimento de uma linha plana (geratriz), sujeita no seu movimento a determinadas condições (lei de geração);
- b) Pela envoltória das diversas posições de uma superfície (geratriz), que se desloca segundo determinadas condições.

Podemos verificar que, para conceituar essa geração, e mesmo para os estudos sôbre as diversas superfícies, tornou-se necessário introduzir elementos que podem ou não pertencer à superfície, mas que participam do sistema que permite conceber sua geração. Esses elementos são: *geratriz*, *diretriz* e lei ou condição que associa uma a outra, permitindo sistematizar a geração da superfície.

No caso particular das superfícies chamadas de revolução, ou seja, daquelas superfícies que "resultam do movimento de rotação de uma linha (geratriz), invariável em forma e grandeza", na expressão "movimento de rotação" está contida a "lei de geração" e a "diretriz". Sabemos que outros conceitos podem ser admitidos para a geração dessas superfícies; porém, pela importância de suas aplicações, esse é dos mais generalizados e o responsável pela denominação "superfície de revolução".

Verificamos, também, que os já conhecidos elementos de uma superfície de revolução, como eixo, meridiana, paralelo, etc., são geralmente definidos em função dessa conceituação de superfície de revolução.

2) QUÁDRICAS

- a) *Apreciação geral*

As quádricas pertencem ao grupo das superfícies que têm por

geratriz uma cônica cujo eixo de simetria descreve um plano. No seu movimento, a cônica pode variar segundo formas homotéticas, de modo a se apoiar, constantemente, em outra cônica.

Analicamente, em coordenadas retilíneas, essas superfícies são representadas por equações do 2.º grau, o que faz sejam, também, denominadas "superfícies do 2.º grau". Na pág. 40, teremos a oportunidade de dar a conceituação que em Geometria Projetiva se pode estabelecer para essas superfícies, em paralelo com as cônicas.

Classificaremos as quádricas em:

- a) planificáveis ou desenvolvíveis;
- b) não planificáveis ou reversas.

Pertencem ao grupo das quádricas planificáveis ou desenvolvíveis as superfícies cônicas e cilíndricas do 2.º grau.

Pertencem ao grupo das quádricas não planificáveis ou reversas as seguintes superfícies: elipsóides (esfera em particular), hiperbolóides de uma e duas fôlhas, parabolóides, parabolóide hiperbólico.

b) *Propriedades das quádricas*

- 1) "Uma reta (que não seja geratriz, nem diretriz) e uma quádrica têm em comum com ela, dois e somente dois pontos:
 - a) *reais e distintos* — caso em que a reta é secante à superfície;
 - b) *reais e confundidos* — caso em que a reta é tangente à superfície;
 - c) *imaginários* (5) — caso em que a reta é exterior à superfície".

Quando a reta é geratriz ou diretriz, ela terá mais de dois pontos em comum com a superfície, isto é, pertence à superfície.

- 2) "Todo plano corta uma superfície do 2.º grau segundo uma curva do 2.º grau (cônica), pois toda reta do plano secante encontra a superfície em dois pontos:

I — *se o plano for impróprio* (plano absoluto ou plano do infinito) (6), a quádrica é cortada segundo uma:

- a) *cônica real* (caso dos hiperbolóides de uma e de duas fôlhas e outras superfícies cônicas do 2.º grau);

(5) O conceito de imaginário serve, nessa propriedade, para generalizá-la, tornando-a sempre possível.

(6) Ver págs. 52 a 57 "Secções circulares", onde faremos breve referência aos elementos impróprios.

- b) *cônica imaginária* (caso dos elipsóides e da esfera, em particular);
- c) *cônica degenerada em duas retas reais* (caso do parabolóide hiperbólico);
- d) *cônica degenerada em duas retas imaginárias que têm um ponto real comum, na direção do eixo da superfície* (caso dos parabolóides: o ponto real comum é o ponto de tangência entre as mencionadas superfícies e o plano impróprio; caso das superfícies cilíndricas do 2.º grau: o ponto real comum é o ponto de secância entre as citadas superfícies e o plano impróprio).

II — *se o plano for próprio:*

- 1.º — *sendo tangente à superfície*, a quádrlica é cortada segundo uma cônica degenerada em:
 - a) *duas retas reais e sempre distintas*, visto ser o ponto de contato um ponto duplo (caso dos hiperbolóides de uma fôlha, parabolóide hiperbólico);
 - b) *duas retas imaginárias e sempre distintas, cujo ponto de contato é um ponto duplo real* (7) (caso dos elipsóides, em particular esfera; hiperbolóides de duas fôlhas; parabolóides);
 - c) *duas retas reais e confundidas*, visto serem todos seus pontos de contato, pontos duplos (caso das quádrlicas cônicas e cilíndricas).
- 2.º — *sendo secante à superfície*, a quádrlica é cortada segundo:
 - a) *uma cônica real*: elipse; círculo em particular; parábola ou hipérbole — se as geratrizes da superfície tiverem traços reais e distintos no plano secante (caso das quádrlicas em geral);
 - b) *uma cônica real reduzida a um ponto*, se a quádrlica for uma superfície cônica e se o plano só tiver em comum com tal superfície o vértice;

(7) Sabe-se que o ponto comum a duas retas imaginárias pode ser real (ver "Quádrlicas de Revolução" de Roberto Muniz Gregory, pág. 10, § 3.º, já citado em nota de roda-pé da pág. 13).

- c) *uma cônica real degenerada em duas retas concorrentes*, se a quádrlica fôr uma superfície cônica e o plano contiver duas de suas geratrizes;
- d) *uma cônica imaginária*, se as geratrizes da superfície tiverem traços imaginários no plano secante (caso dos elipsóides; esfera em particular; parabolóides — sendo o plano secante exterior à quádrlica).

Pelo exposto no n.º II , item 1.º, conclue-se que:

- 1.º) Tôda quádrlica admite dois sistemas de geratrizes retilíneas reais ou imaginárias. Quando as geratrizes são reais, a quádrlica é denominada *retilínea*; quando imaginária, ela se denomina *curvilínea*. Assim, tôda *quádrlica curvilínea*, só admite como geratriz real a linha curva.
- 2.º) Podemos identificar uma quádrlica adotando critério baseado em suas propriedades. Assim:

“Quádrlica é uma superfície que pode ser interceptada por:

- a) uma reta qualquer, em dois e somente dois pontos;
- b) uma plano qualquer, segundo uma cônica”.

3) PROPRIEDADES DE UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO (8)

- 1.ª — “A perpendicular ao eixo, traçada por um ponto qualquer da geratriz, conserva-se perpendicular a êste eixo, qualquer que seja a posição da geratriz”.
- 2.ª — “O segmento de perpendicular ao eixo, compreendido entre a geratriz e o eixo, para qualquer posição da geratriz, tem sempre a mesma grandeza”.
- 3.ª — “Os planos meridianos são planos de simetria da superfície”.
- 4.ª — “As meridianas são linhas simétricas em relação ao eixo da superfície”.
- 5.ª — “Os paralelos e as meridianas são dois sistemas de linhas ortogonais”.
- 6.ª — Por qualquer ponto da superfície passa sempre um

(8) Apresentamos as propriedades das superfícies de revolução com o objetivo de aplicação ao caso particular da esfera.

sistema formado de um paralelo e uma meridiana, e somente um”.

- 7.^a — “Qualquer meridiana pode ser considerada como uma geratriz da superfície (hipótese da geração pela rotação de uma linha)”.
- 8.^a — “Tôdas as meridianas de uma superfície de revolução são iguais entre si”.
- 9.^a — “Os paralelos de uma superfície de revolução são sempre circulares”.

4) ESFERA

a) *Apreciações gerais*

A esfera é considerada superfície de revolução padrão.

Conforme é sabido, sua geração pode ser concebida de diversas maneiras, sendo das mais divulgadas aquela que considera esse sólido como resultante do movimento de rotação de um semi-círculo em torno de seu diâmetro.

Freqüentemente, confunde-se o emprêgo das palavras “esfera” e “superfície esférica”, usando-se a primeira em lugar da segunda, do mesmo modo que se emprega “círculo” por “circunferência de círculo” (vide “*Traité de Géométrie*” pág. 156, Eugène Rouché e Ch. de Comberousse, 7.ième édition, 2e. partie. *Géométrie dans l'espace*, ed. Gauthier-Villars, Paris, 1900).

Sabemos que:

- I — “Qualquer reta que contenha o centro da esfera poderá ser eixo da superfície”.
- II — “Qualquer círculo máximo de uma esfera pode ser sua meridiana desde que se considere como eixo a reta suporte de um diâmetro dêste círculo (essa reta servirá de eixo de revolução para geração da superfície esférica)”.
- III — “Qualquer meridiana pode ser considerada como geratriz da superfície”.

b) *Propriedades das superfícies esféricas*

As propriedades já estudadas de um modo geral para as quádricas serão, agora, particularizadas para a esfera. Assim:

- 1.^a — “Uma reta e uma superfície esférica têm em comum dois e somente dois pontos:
- a) *reais e distintos* — caso da reta secante à superfície esférica;

- b) *reais e confundidos* — caso da reta tangente à superfície esférica;
- c) *imaginários* — caso de reta exterior a esfera, segundo a distância do centro da esfera à reta seja menor, igual ou maior que o raio da esfera”.

2.^a — “Todo plano corta uma superfície esférica segundo um círculo, e somente um círculo, cujo centro é o traço, nêsse plano, do raio esférico a êle perpendicular:

- a) o círculo é real de raio $\neq 0$ se o plano fôr secante à esfera;
- b) o círculo é real de raio $= 0$ se o plano fôr tangente à esfera;
- c) o círculo é imaginário se o plano fôr exterior à esfera”.

IV — TANGÊNCIA E SECÂNCIA

1) CONSIDERAÇÕES GERAIS

Se duas superfícies têm uma linha cujos pontos pertencem simultaneamente a ambas, e se estas duas superfícies $\left\{ \begin{array}{l} \text{admitem} \\ \text{não admitem} \end{array} \right.$ planos tangentes comuns ao longo de todos os pontos da referida linha, diz-se que essa linha é de $\left\{ \begin{array}{l} \text{"contato"} \\ \text{"secância"} \end{array} \right.$ e que, ao longo dela, as superfícies são $\left\{ \begin{array}{l} \text{"concordantes ou tangentes"} \\ \text{"secantes"} \end{array} \right.$.

2) PLANOS TANGENTES — CONCEITO; DETERMINAÇÃO:

O plano tangente a uma superfície qualquer é o lugar geométrico das retas respectivamente tangentes a tôdas as curvas da superfície que passem pelo ponto de contato.

Demonstra-se, em Geometria Analítica, que o conjunto de tôdas as tangentes às inúmeras curvas da superfície que podem passar pelo ponto de contato, pertencem a um único plano, a menos que o ponto de contato seja um ponto singular.

Empregando a linguagem da Geometria Projetiva, verificamos que:

"Plano tangente a uma superfície qualquer pode ser considerado suporte de retas que têm como centro o ponto de contato e como raios, as tangentes traçadas às inúmeras curvas da superfície que passam pelo ponto de contato".

Daí, podemos tirar a seguinte conclusão:

"Um plano tangente a uma superfície qualquer fica suficientemente determinado por duas retas tangentes a duas curvas distintas, pertencentes às superfícies, que passam pelo ponto de contato (exceção para os pontos singulares)".

Evitando alongar demasiadamente este trabalho, não faremos

estudo minucioso sobre "Teoria Geral dos Planos Tangentes". Limitar-nos-emos a destacar, ainda, o seguinte:

— Se temos que determinar um plano tangente a uma superfície retilínea, devemos observar a seguinte propriedade:

"O plano tangente num ponto da superfície contém qualquer geratriz retilínea dêsse ponto:

- a) se a superfície retilínea é planificável, o plano tangente num ponto da superfície o é, também, ao longo de toda a geratriz retilínea que passa no ponto de contato, sendo um e único para todos os pontos que pertençam à geratriz do ponto de contato;
- b) se a superfície retilínea é reversa, embora o plano tangente contenha toda a geratriz do ponto de contato, êle só é tangente, à superfície, apenas num ponto da geratriz — o ponto de contato, porque nos demais pontos êle é secante à superfície; o plano tangente à superfície varia para cada ponto da geratriz (lei de Chasles);
- c) se duas superfícies têm uma geratriz retilínea comum e em três pontos distintos dessa geratriz admitem planos tangentes comuns, aquelas superfícies são concordantes ao longo dessa geratriz.

E' de ressaltar a particular importância da discussão e interpretação da lei de Chasles, que permite generalizar o estudo de planos tangentes para qualquer superfície retilínea.

3) PROPRIEDADES DOS PLANOS TANGENTES A UMA SUPERFÍCIE DE REVOLUÇÃO E, EM PARTICULAR, A ESFERA

a) *Superfície de revolução*

Por demais divulgadas, limitar-nos-emos a enunciar as propriedades relativas aos planos tangentes a uma superfície de revolução e, em particular, à esfera. Essas propriedades correspondem a teoremas cujas demonstrações são bem conhecidas e cujos enunciados se seguem:

- 1.^a) "O plano tangente a uma superfície de revolução é perpendicular ao meridiano do ponto de contato".
- 2.^a) "A normal à superfície de revolução está contida no meridiano do ponto de contato". (Corolário da 1.^a).

- 3.ª) “A tangente à meridiana concorre com o eixo da superfície de revolução”.
- 4.ª) “As tangentes traçadas de um ponto pertencente ao eixo de uma superfície de revolução e exterior a esta superfície estão contidas nos seus meridianos e seus pontos de contato pertencem a um mesmo paralelo”.
- 5.ª) “As tangentes à superfície de revolução ao longo de um mesmo paralelo e pertencente aos planos meridianos, formam ângulos iguais com o plano do paralelo e concorrem em um mesmo ponto do eixo da superfície”. (Corolário da 4.ª)
- 6.ª) “O plano tangente num ponto qualquer de uma superfície de revolução contém sempre a tangente à meridiana deste ponto e concorre com o eixo”. (Corolário da 4.ª)
Podemos, então, reunir os dois últimos corolários no seguinte:
- 7.ª) “O lugar geométrico das tangentes às meridianas que concorrem ao mesmo ponto do eixo de uma superfície de revolução é a superfície cônica de revolução circunscrita, cujo vértice é o ponto de concurso das tangentes e que tem, como linha de contato, um círculo paralelo, lugar geométrico dos pontos de contato das tangentes”.
- 8.ª) “A superfície de revolução é a envolvente de tôdas as superfícies cônicas de revolução circunscritas à primeira superfície, cujos vértices pertencem aos seus eixos”.
- 9.ª) “As normais à superfície de revolução, relativas a um seu paralelo concorrem num mesmo ponto do eixo da superfície. Este ponto de concurso é o centro da esfera tangente à superfície ao longo do referido paralelo”.
- 10.ª) “Qualquer esfera inscrita na superfície de revolução tem seu centro sobre o eixo da superfície, e a linha de contato entre as duas superfícies é sempre um círculo paralelo de ambas as superfícies (admitindo que a esfera tenha seu eixo coincidente com o da superfície)”.
- 11.ª) “O lugar geométrico das tangentes a uma superfície de revolução, paralelas a uma direção perpendicular ao eixo da

superfície de revolução, é uma superfície cilíndrica que circunscribe a de revolução ao longo de uma de suas meridianas e é perpendicular ao plano desta meridiana”.

b) *Esfera*

Todos os teoremas apresentados para as superfícies de revolução se relacionam com a esfera. Limitar-nos-emos, somente, a destacar as propriedades dos planos tangentes relativas de modo especial à esfera ou, pela sua grande aplicação, a repetir alguns teoremas já conhecidos, mas adaptando-os ao caso da esfera.

- 1.º) “A normal relativa a qualquer ponto da superfície esférica passa sempre pelo centro dessa superfície”.
- 2.º) “O plano tangente a superfície esférica é perpendicular ao raio, no ponto de contato”. (Corolário do 1.º)
- 3.º) “Os planos tangentes ao longo de um círculo da esfera concorrem num mesmo ponto da reta que passa pelo centro da esfera, sendo a mencionada reta perpendicular ao plano do círculo de contato”.
- 4.º) “Se, de um ponto exterior à superfície esférica, traçarmos planos tangentes a essa superfície, os pontos de contato pertencerão a um e somente um círculo, cujo plano é perpendicular à reta que une o ponto exterior ao centro da superfície”.
- 5.º) “A superfície cônica ou cilíndrica que circunscribe a esfera é de revolução, e somente de revolução, e a sua linha de contato é sempre circular”. (Corolário do 4.º)
- 6.º) “Não é possível circunscrever, numa esfera, uma superfície cônica ou cilíndrica do 2.º grau, que não seja de revolução”. (Corolário do 5.º)

4) OS SEIS ASPECTOS CLÁSSICOS DOS PROBLEMAS SÓBRE PLANOS TANGENTES APLICADOS À ESFERA

O estudo de planos tangentes à esfera pode ser resumido no esquema (9) que apresentamos na pág. 27:

TRAÇADO DE PLANOS TANGENTES A ESFERA

Condições a que se deve submeter	Determinado ou indeterminado	Número de soluções
I) por um ponto da superfície	determinado	uma solução
II) por um ponto exterior à superfície 1.º — ponto próprio 2.º — ponto impróprio (plano tangente deve ser paralelo a uma reta dada)	indeterminado indeterminado	as infinitas soluções são involutas de uma superfície cônica de revolução circunscrita à esfera. as infinitas soluções são involutas de uma superfície cilíndrica de revolução circunscrita à esfera.
III) contendo uma reta exterior a superfície 1.º — reta própria 2.º — reta imprópria (plano tangente deve ser paralelo a um plano dado)	determinado determinado	duas soluções duas soluções
IV) sendo tangente a: 1.º — outra esfera 2.º — outra superfície qualquer	indeterminado determinado em casos particulares	as infinitas soluções são as involutas de duas superfícies cônicas de revolução circunscritas às esferas

(9) Este esquema foi tirado de um outro sobre "Traçado de planos tangentes a uma superfície qualquer", publicado na tese intitulada "Quádricas de Revolução" e também numa apostilha "Teoria Geral dos Planos Tangentes", ambas de autoria do Prof. Dr. Roberto Muniz Gregory. Fizemos adaptação ao caso da esfera.

5) TANGÊNCIA E SECÂNCIA ENTRE QUÁDRICAS

Destacaremos os seguintes teoremas, necessários ao desenvolvimento de nosso trabalho:

- 1.º) "Secções paralelas de uma quádrlica são cônicas homotéticas".
- 2.º) "Se duas quádrlicas são tangentes, sua linha de contato é uma cônica".
- 3.º) "Se duas quádrlicas são tangentes em dois pontos, sua intersecção é um sistema de duas cônicas".
- 4.º) "Uma esfera bi-tangente a uma quádrlica a intercepta segundo dois círculos" (caso particular do teorema n.º 2).
- 5.º) "Se uma quádrlica tem um círculo em comum com uma esfera, o conjunto da intersecção se comporá de outro círculo além do primeiro".
- 6.º) Teorema de Monge:
"A intersecção de duas quádrlicas, circunscritas ou inscritas a uma terceira quádrlica, se compõe de duas curvas planas, cujos planos passam pela reta de intersecção dos planos das duas curvas de contato".

1) POLO E POLAR NO PLANO

a) *Conceito:*

Polo e polar, em relação a uma figura plana ou do espaço, são dois entes geométricos que satisfazem as condições seguintes:

- 1 — O polo é sempre um *ponto*;
- 2 — A polar é, geralmente, uma *reta* ou *plano*;
- 3 — A figura é de tal sorte que toda reta que contiver o polo e seja secante à figura a intercepta em dois pontos;
- 4 — As distâncias do polo e da polar, consideradas sobre a secante mencionada e em relação às intersecções citadas, estão entre si numa razão harmônica.

Se a figura de referência for plana, são coplanares com ela o polo e a polar. Nesse caso, a polar é uma reta. Se a figura de referência for uma figura do espaço, a polar será um plano.

Consideremos, inicialmente, uma figura de referência plana, representada por duas retas r e r_1 concorrentes em P_1 (fig. 1). Para determinar a polar p do polo P , relativamente a r e r_1 , usa-se a conhecida construção que consiste em traçar, passando pelo ponto P , secantes como m e m_1 , que determinam em r , respectivamente os pontos R e R_1 e em r_1 , respectivamente, os pontos R' e R'_1 . As retas RR'_1 e $R'R_1$ permitem conhecer P_2 . A reta PP_2 é a polar do ponto P com relação a r e r_1 ; por esta razão a denominamos p . Qualquer secante, m , m_1 , do feixe que tenha P como centro, cortará p em pontos como Q' , Q_1 , que são conjugados harmônicos de P com relação a R e R' , R_1 e R'_1 respectivamente.

Verifica-se que a secante m_2 , que passa pelo ponto de concurso P_1 , corresponde ao caso limite, para o qual o segmento $R_2R'_2$ está reduzido a um ponto sobre a polar p .

Para essa posição, temos $R_2 \equiv R'_2 \equiv P_1$ e

$$(PP_1R_2R'_2) = -1$$

Conclue-se, então, que a polar passa sempre pelo ponto de concurso P_1 das retas r e r_1 .

c) *Triângulo auto-polar*

E' o triângulo formado por três centros de feixes conjugados. Seus vértices são polos, sendo polares correspondentes seus lados opostos. Na fig. 1, considerando o quadrivértice $RR'R_1R'_1$ o triângulo PP_1P_2 é auto-polar porque, cada vértice é polo do lado oposto. O triângulo auto-polar é também denominado auto-recíproco ou auto-conjugado.

d) *Polos e polares com relação a uma cônica c. Triângulo auto-polar — sua importância em relação às cônicas*

Seja a cônica c e um ponto P , suposto exterior a c (fig. 2). Com auxílio das secantes m e m_1 , determina-se as cordas RR' e $R_1R'_1$ que, por sua vez, permitem conhecer outras duas cordas RR_1 e $R'R'_1$ suportes das secantes r e r_1 que concorrem em P_1 . Considerando o quadrivértice completo $RR'R_1R'_1$ inscrito em c , no qual o triângulo PP_1P_2 tem seus vértices como polos e os suportes dos lados opostos como respectivas polares, verifica-se ser êle *triângulo auto-polar*.

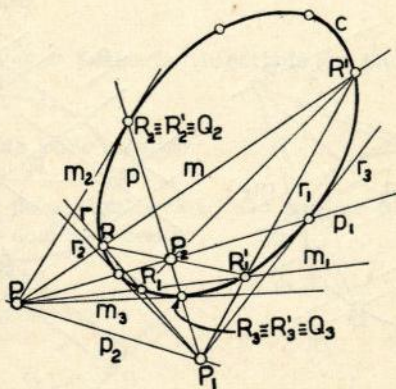


Fig. 2

Sabemos que, quando a secante m gira em tórno de P , a corda RR' varia, tendendo para zero quando R se aproxima de R' ; no limite, ou seja quando R está infinitamente próximo de R' , a secante se torna tangente à cônica c . Nessa hipótese, que corresponde na fig 2 às posições m_2 e m_3 da secante m , temos os pontos $R_2 \equiv R'_2 \equiv Q_2$ e $R_3 \equiv R'_3 \equiv Q_3$, respectivamente. Estes pontos pertencem, ainda, à polar P_1P_2 . O mesmo se verifica para a secante r , relativamente ao polo P_1 . Podemos considerar as tangentes m_2, m_3, r_2, r_3 como os lados de um quadrilátero completo circunscrito em c , no qual, ainda o

triângulo PP_1P_2 tem seus vértices e lados opostos como polos e respectivas polares.

À medida que o polo se aproxima da cônica c , o ângulo Q_2PQ_3 , formado entre as tangentes m_2 e m_3 aumenta e, quando P pertence a c , Q_2 está infinitamente próximo de Q_3 e as tangentes passam a ter a mesma direção, permanecendo ainda, tangentes à c .

Donde: "A polar de um ponto P , pertencente à c , é a tangente à c no ponto P ".

As propriedades já estudadas de um modo geral para o quadri-vértice completo $RR'R_1R'_1$ (fig. 1, pág. 30), permanecem as mesmas (considere-se que o quadrivértice e o quadrilátero: o primeiro inscrito e o segundo circunscrito em c , têm o mesmo triângulo autopolar PP_1P_2).

Como se pode verificar, os polos P_1 e P_2 dependem das secantes m e m_1 , havendo, conseqüentemente, uma infinidade de triângulos auto-polares para c .

Vejamos quando um dos polos poderá coincidir com o centro de c :

1 — Quando um dos polos P_∞ , por exemplo, é impróprio (fig. 3), as secantes m e m_1 passam a ser paralelas entre si e a polar P_1P_2 (para o polo P_∞) passará por O , centro de c .

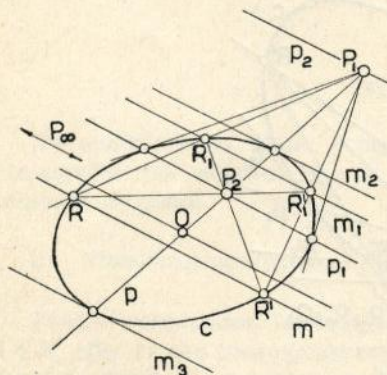


Fig. 3

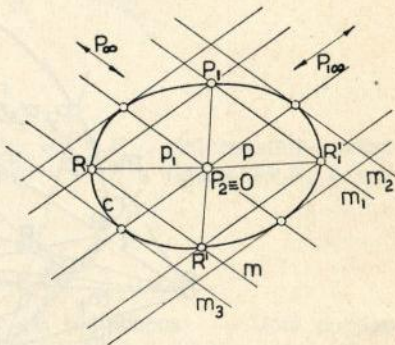


Fig. 4

Então P_1P_2 corresponde ao suporte de um diâmetro (10) de c , cuja direção do conjugado é dada pela direção da polar P_2P_∞ .

2 — Quando dois dos polos, P_∞ e $P_{1\infty}$, por exemplo, são impróprios (fig. 4), além de termos paralelas as secantes m e m_1 , verificaremos, também, serem paralelas entre si as retas RR_1 e $R'R'_1$ e as polares $P_\infty P_2$ e $P_{1\infty} P_2$ passarão pelo centro de c e serão os suportes

(10) Sabemos que diâmetro de uma cônica é o lugar geométrico dos centros das cordas paralelas a uma direção dada. Nas págs. 38 a 40 examinaremos as propriedades que melhor o caracterizam.

de dois diâmetros conjugados de c . O polo P_2 será este centro e sua polar será a reta imprópria $P_\infty P_{1\infty}$.

Quanto à posição dos polos em relação à natureza da cônica, observa-se o seguinte:

I — Se a cônica c é fechada (elipse ou círculo, como caso particular), verifica-se que:

a) um dos polos ou vértices do triângulo PP_1P_2 é interior à c e os outros dois são exteriores, porque sendo conjugados dois a dois os vértices do triângulo PP_1P_2 , não é possível admitir-se dois vértices interiores à c . Se não, analisemos (fig. 2):

— Para que P seja conjugado harmônico de P_2 relativamente à corda da cônica c que tem PP_2 por suporte, P só poderá ser exterior, uma vez que P_2 é interior a essa corda e, portanto, P é exterior a c . O mesmo raciocínio, aplicado em relação a P_1 e P_2 nos permite concluir que P_1 também só pode ser exterior à c .

b) O polo considerado interior à c nunca poderá ser impróprio.

II — Se a cônica c é aberta (hipérbole ou parábola), verifica-se que:

a) a hipérbole pode admitir:

1.º) dois polos impróprios, caso em que o terceiro polo coincide com seu centro;

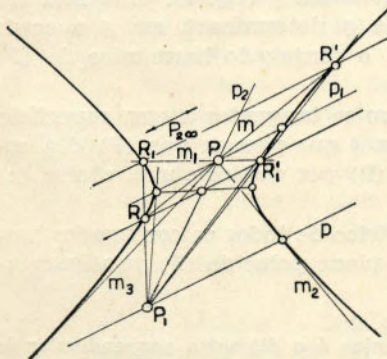


Fig. 5

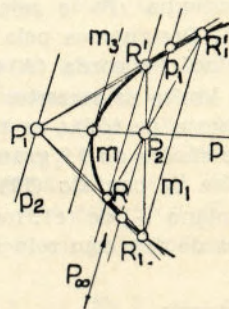


Fig. 6

2.º) um polo impróprio, caso em que sua polar, ou seja, a reta que pertence aos outros dois polos, passa pelo centro (fig. 5).

b) a parábola:

- 1.º) nunca admite dois polos impróprios porque, se isso fosse possível, o terceiro polo teria que coincidir com o centro da curva, devendo também, ser próprio (pois é impossível os três polos impróprios); porém, a parábola tem seu centro impróprio, logo não é possível que o triângulo PP_1P_2 relativo a essa curva tenha dois vértices impróprios;
- 2.º) quando um polo é impróprio, a direção de sua polar é paralela ao eixo (11) (e conseqüentemente um diâmetro (fig. 6)). Se uma polar coincidir com o eixo de c , a direção do respectivo polo impróprio é perpendicular ao eixo.

Estudamos o caso em que a figura de referência é plana: duas retas concorrentes, (no problema geral), ou uma cônica.

Vamos, agora, estudar o problema quando a figura de referência é uma quádrlica.

2) POLO E POLAR NO ESPAÇO

a) *Conceito*

O conceito já foi dado de uma maneira geral na pág. 29.

Seja (P) um ponto exterior à quádrlica θ (fig. 7). Uma reta (r) que contenha (P) e seja secante a θ determinará em θ a corda (A)(B). Designemos pela letra (Q) o conjugado harmônico de (P) com relação a corda (A)(B).

No limite as secantes a θ tornam-se tangentes a essa superfície. O conjunto de tôdas as tangentes a θ que passem por (P) é a superfície cônica do 2.º grau que tem (P) por vértice e uma cônica (c) por linha de contato (12).

O plano α , de (c), lugar geométrico de todos os conjugados harmônicos de (P) com relação a θ é o plano polar de (P) relativamente a θ .

(11) Sabemos que eixo de uma cônica é o diâmetro perpendicular às cordas paralelas a uma direção dada. Nas págs. 38 a 40 examinaremos as propriedades que melhor o caracterizam.

(12) Ver pág. 28, ítem 5, 2.ª propriedade.

Dai definir-se plano polar de um ponto (P) com referência a uma quádrlica θ , como sendo:

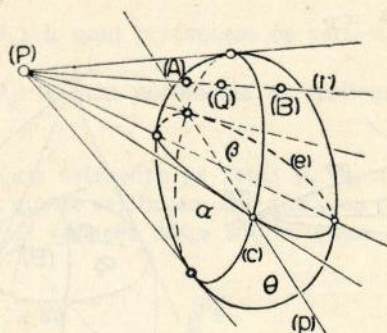


Fig. 7

“O lugar geométrico dos conjugados harmônicos de (P) com relação à quádrlica θ ”.

Qualquer plano β que contenha (P) e seja secante a θ cortará essa quádrlica segundo uma cônica (c), cujo plano interceptará α numa reta (p) que é a reta polar de (P) com relação a (e). (13)

Reciprocamente, um ponto qualquer (Q), pertencente a α , terá como plano polar, um plano que contenha (P).

Assim, (P) é o centro de uma estrêla de planos polares cujos polos pertencem a α .

b) *Elementos conjugados* (correlativos ou recíprocos)

Pontos conjugados — Dois pontos (P) e (Q) são conjugados com relação a uma quádrlica θ (fig. 8) quando um dêles (Q) pertence ao plano polar, α_1 , do outro (P).

Retas conjugadas — Se de dois pontos quaisquer (P) e (Q) (fig. 9) traçarmos as superfícies cônicas circunscritas a uma quádrlica θ , ficam determinados os planos polares α_1 e α_2 que contêm às cônicas de contato (c_1) e (c_2). Os planos α_1 e α_2 se cortam segundo a reta (p) polar comum aos dois polos (P) e (Q). Esta reta (p) é denominada “*reta conjugada de (r) com relação a θ* ”.

A reta (p) conjugada de (r) é uma e única para todos os polos que pertençam a (r).

Planos conjugados — Dois planos α_1 e α_2 (fig 8) são conjugados, quando o polo (P) de um (α_1) pertence ao outro (α_2)

(13) Ver págs. 19 e 20, 2.^a propriedade.

Reta conjugada de um plano ou plano conjugado de uma reta — Uma reta (P) (Q), fig. 8, se diz conjugada de um plano α_1 quando o polo (P) de α_1 pertence a (P) (Q) e a reta (p), conjugada de (P) (Q) pertence a α_1 .

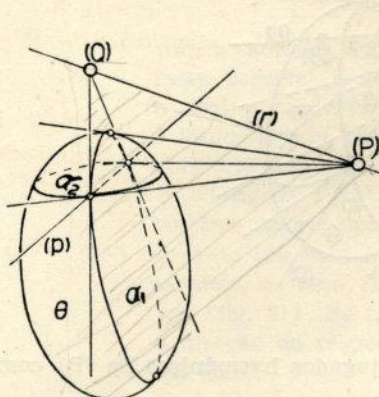


Fig. 8

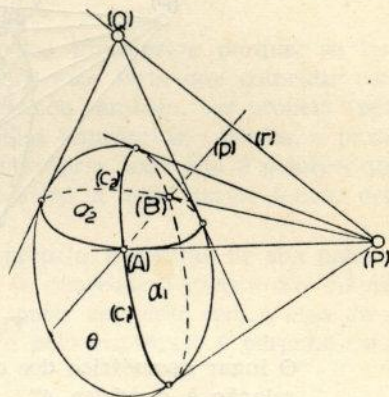


Fig. 9

Cones conjugados — Dois cones são conjugados quando, circunscritos a uma mesma quádrlica, o vértice (polo) de um pertence ao plano da curva de contato (plano polar) do outro e reciprocamente. Os cones de vértice (P) e (Q) da fig. 8 são conjugados.

c) *Tetraedro auto-polar* — sua importância em relação às quádrlicas — propriedades

E' o tetraedro cujos vértices são pontos conjugados, as arestas são retas conjugadas, as faces são planos conjugados com relação a uma quádrlica θ .

Assim, na fig. 10, o tetraedro (P) (P₁) (P₂) (P₃) é auto-polar com relação à quádrlica θ .

Constrói-se um tetraedro auto-polar com relação a uma quádrlica θ da seguinte maneira:

— De um ponto (P₃) exterior, qualquer, traça-se a superfície cônica circunscrita a θ que tangencia essa quádrlica segundo uma cônica (c), cujo plano α_3 é polar de (P₃) com relação a θ . Constrói-se no plano desta cônica c e relativamente a ela, o triângulo auto-polar (P) (P₁) (P₂). Os planos definidos pelos grupos dos quatro polos que ficam formados, considerados três a três, são as faces de um tetraedro auto-polar, relativamente a θ .

Assim, são faces deste tetraedro:

- α — polar de (P) à qual pertencem os vértices (polos) $(P_1), (P_2), (P_3)$.
- α_1 — polar de (P_1) à qual pertencem os vértices (polos) $(P), (P_2), (P_3)$.
- α_2 — polar de (P_2) à qual pertencem os vértices (polos) $(P), (P_1), (P_3)$.
- α_3 — polar de (P_3) à qual pertencem os vértices (polos) $(P), (P_1), (P_2)$.

São arestas desse tetraedro as retas p, p_1, z, r, s , polares nas polaridades planas que se verificam em cada uma das faces do tetraedro, sendo ainda, os vértices desse sólido, polos nessas polaridades planas.

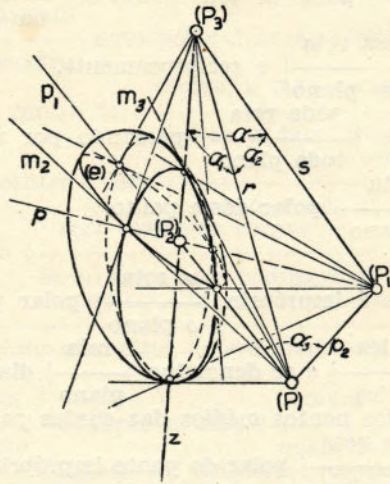


Fig. 10

“Um tetraedro auto-polar relativo a uma quádrlica curva tem uma face exterior à quádrlica e as três outras secantes”.

Se a quádrlica é regrada, não planificável, tôdas as faces se apresentam secantes, porque nenhuma delas pode ser sòmente tangente à uma superfície retilínea revêssa.

Para facilitar nosso estudo, denominaremos as faces, que em qualquer hipótese são sempre secantes à quádrlica, da seguinte maneira:

- face α — formada pelas polares p e z .
- face α_1 — formada pelas polares p_1 e z .
- face α_3 — formada pelas polares p e p_1 .

Destacaremos as polares p, p_1 e z porque elas podem se identificar com as arestas de um triedro tri-retângulo (tornando-se eixos

da quádrlica, conforme verificaremos a seguir), quando são impróprios (P), (P_1) e (P_3). Do mesmo modo que o triângulo auto-polar pode ter um ou dois vértices (polos) impróprios, o tetraedro auto-polar também pode ter um, dois ou três dos seus vértices (polos) impróprios.

E' oportuno lembrar a correspondência entre a polaridade no plano e no espaço.

Com o propósito de destacar essa correspondência apresentamos, simultâneamente, as propriedades concernentes à polaridade no plano em analogia com as relacionadas à polaridade no espaço, conforme fazem muitos autores que estudam êsse assunto:

- 1.^a) $\left| \begin{array}{l} \text{A reta} \\ \text{O plano} \end{array} \right|$ polar de todo ponto de $\left| \begin{array}{l} \text{uma reta} \\ \text{um plano} \end{array} \right|$ passa pelo polo $\left| \begin{array}{l} \text{dessa reta} \\ \text{dêsse plano} \end{array} \right|$ e reciprocamente.
- 2.^a) O polo de $\left| \begin{array}{l} \text{tôda reta} \\ \text{todo plano} \end{array} \right|$ passando por um ponto pertencente $\left| \begin{array}{l} \text{à reta} \\ \text{ao plano} \end{array} \right|$ polar dêsse ponto.
- 3.^a) Se o polo é impróprio $\left| \begin{array}{l} \text{a reta} \\ \text{o plano} \end{array} \right|$ polar passa pelo centro da $\left| \begin{array}{l} \text{cônica} \\ \text{quádrlica} \end{array} \right|$ e se denomina $\left| \begin{array}{l} \text{reta} \\ \text{plano} \end{array} \right|$ diametral.
- 4.^a) O lugar dos pontos médios das cordas paralelas a uma direção é $\left| \begin{array}{l} \text{a reta} \\ \text{o plano} \end{array} \right|$ polar do ponto impróprio determinado em relação às referidas cordas e denomina-se $\left| \begin{array}{l} \text{reta} \\ \text{plano} \end{array} \right|$ diametral (ou, simplesmente, *diâmetro*).
- 5.^a) O centro da $\left| \begin{array}{l} \text{cônica} \\ \text{quádrlica} \end{array} \right|$ é o polo $\left| \begin{array}{l} \text{da reta imprópria.} \\ \text{do plano impróprio.} \end{array} \right|$
- 6.^a) Diâmetro da $\left| \begin{array}{l} \text{cônica} \\ \text{quádrlica} \end{array} \right|$ é a reta que pertence ao centro da $\left| \begin{array}{l} \text{cônica} \\ \text{quádrlica.} \end{array} \right|$ Verifica-se que a reta conjugada do diâmetro passa por $\left| \begin{array}{l} \text{um polo impróprio.} \\ \text{dois polos impróprios.} \end{array} \right|$

Portanto, com referência às quádricas, a reta conjugada de um diâmetro é imprópria.

7.^a) A cada diâmetro de uma $\left| \frac{\text{cônica}}{\text{quádrica}} \right|$ corresponde um só $\left| \frac{\text{diâmetro}}{\text{plano diametral}} \right|$ conjugado com êle e reciprocamente.

O polo dêsse $\left| \frac{\text{diâmetro}}{\text{plano diametral}} \right|$ conjugado é impróprio e pertence ao $\left| \frac{\text{triângulo auto-polar}}{\text{tetraedro auto-polar}} \right|$ relativo à $\left| \frac{\text{cônica}}{\text{quádrica}} \right|$ que terá, então, dois polos impróprios.

8.^a) Se o $\left| \frac{\text{triângulo}}{\text{tetraedro}} \right|$ auto-polar tiver um vértice (polo) coincidente com o centro da $\left| \frac{\text{cônica, o lado oposto}}{\text{quádrica, a face oposta}} \right|$ será $\left| \frac{\text{impróprio}}{\text{imprópria,}} \right|$ polar do centro e cada $\left| \frac{\text{uma das três arestas concorrentes}}{\text{será diâmetro conjugado}} \right|$ no centro $\left| \frac{\text{serão diâmetros conjugados}}{\text{outro lado concorrente no centro.}} \right|$ com $\left| \frac{\text{}}{\text{o plano diametral, determinado pelas outras duas faces.}} \right|$

9.^a) $\left| \frac{\text{Uma reta}}{\text{Um plano}} \right|$ tangente a uma $\left| \frac{\text{cônica}}{\text{quádrica}} \right|$ é $\left| \frac{\text{paralela}}{\text{paralelo}} \right|$ ao diâmetro conjugado do diâmetro que passa pelo ponto de contato.

Quando se trata de uma quádrica, o plano tangente é, também, paralelo ao plano diametral conjugado do diâmetro que passa pelo ponto de contato.

10.^a) $\left| \frac{\text{A reta}}{\text{O plano}} \right|$ polar de um ponto pertencente a uma $\left| \frac{\text{cônica}}{\text{quádrica}} \right|$ é $\left| \frac{\text{a reta}}{\text{o plano}} \right|$ tangente a essa $\left| \frac{\text{curva}}{\text{superfície}} \right|$ no referido ponto.

11.^a) (Recíproca da 10.^a) $\left| \frac{\text{Tôda reta}}{\text{Todo plano}} \right|$ tangente a uma $\left| \frac{\text{cônica}}{\text{quádrica}} \right|$ tem por polo o ponto de contato.

Daí poderemos identificar plano tangente a uma quádrlica como sendo: "Plano auto-conjugado com relação à quádrlica, cujo pólo é o ponto de contato".

Planos principais — eixos — vértices.

- 12.^a) Quando $\left| \frac{\text{as retas}}{\text{os planos}} \right|$ polares que passam pelo centro são perpendiculares à sua direção conjugada, passam a ser $\left| \frac{\text{retas}}{\text{planos}} \right|$ de simetria (14) da $\left| \frac{\text{cônica}}{\text{quádrlica}} \right|$ e são denominados *..eixos da cônica.*
 $\left| \frac{\text{..eixos da cônica.}}{\text{planos principais da quádrlica.}} \right|$

Os planos principais de uma quádrlica determinam os três eixos da superfície, ou sejam, as três arestas do tetraedro auto-polar que tem um dos vértices coincidindo com o centro da quádrlica. Esses eixos são, pois, ortogonais e cada um deles é perpendicular a um plano principal. Nesta hipótese, a face oposta ao vértice coincidente com o centro é imprópria e o tetraedro transforma-se num triedro tri-retângulo, cujo vértice é o centro da quádrlica.

- 13.^a) *Vértices* de uma $\left| \frac{\text{cônica}}{\text{quádrlica}} \right|$ são os pontos de intersecção com a $\left| \frac{\text{cônica}}{\text{quádrlica}} \right|$ dos eixos da $\left| \frac{\text{curva}}{\text{superfície.}} \right|$

Essas propriedades permitem conceituar de modo mais geral as cônicas e as quádrlicas.

Assim, para a Geometria Projetiva:

"Cônica" $\left| \frac{\text{pontos e retas}}{\text{pontos, retas e planos}} \right|$ auto-conjugados de uma involução do $\left| \frac{\text{plano}}{\text{espaço}} \right|$.

(14) Simetria significa: disposição de duas figuras cujos pontos estão dois a dois a igual distância de um outro, de uma linha reta ou de um plano. Quando tratarmos de secções simétricas de uma quádrlica, págs. 48 a 50, teremos oportunidade de voltar a esse assunto.

Assim, também, certos elementos, tanto das cônicas como das quádricas podem ter uma conceituação mais ampla.

d) *Triedro auto-polar* — sua importância para a superfície cônica do 2.º grau

Qualquer ponto (V) do espaço (fig. 11) pode ser considerado vértice de um triedro que denominaremos auto-polar em relação à quádrica θ . Esse triedro é constituído por três das faces laterais do tetraedro autopolar de θ . Sendo assim, ele goza das mesmas propriedades do tetraedro do qual é parte, ou seja: “suas arestas e faces são conjugadas com relação à quádrica, para a qual cada aresta é lugar dos polos da face oposta”.

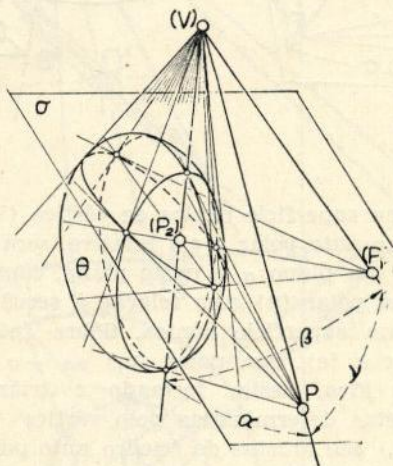


Fig. 11

Qualquer ponto (V) do espaço pode ser vértice de uma infinidade de triedros auto-polares, nos quais, cada aresta é conjugada da face oposta.

Dentre os inúmeros triedros auto-polares relativos a uma quádrica, um será tri-retângulo e terá vértice (polos) exteriores impróprios. Conseqüentemente, o vértice interior, próprio, coincidirá com o centro da quádrica. Conforme já verificamos (pág. 40, ns. 12 e 13), suas faces são planos de simetria da figura, sendo, por essa razão, denominados “planos principais” da quádrica. Suas arestas e seu vértice são, respectivamente, eixos e centro de simetria da quádrica.

Se considerarmos a superfície cônica de vértice (V) que circuns-

creve a quádrlica θ (fig. 11), verificaremos que o triedro de faces $(P_2)(V)(P_1) \equiv \beta$; $(P_2)(V)(P) \equiv \alpha$; $(P)(V)(P_1) \equiv \gamma$ é, também, auto-polar com relação a essa superfície cônica.

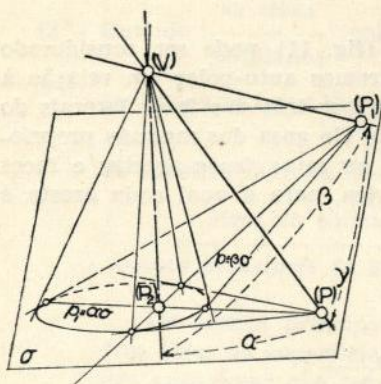


Fig. 12

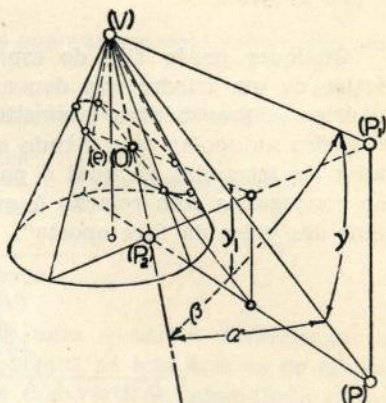


Fig. 13

Sendo dada uma superfície cônica de vértice (V) (fig. 12), para construir um triedro auto-polar a ela relativo, será suficiente cortar essa superfície por um plano σ , e neste plano, considerar um ponto arbitrário (P) e sua polar (p) com relação à secção cônica (c) , determinada por σ na superfície cônica. Sôbre (p) , considerar um ponto (P_1) exterior a (c) . Sua polar $(p_1) \equiv \alpha_\sigma$ interceptará (p) num ponto (P_2) . Fica, assim formado o triângulo auto-polar $(P)(P_1)(P_2)$. As retas determinadas pelo vértice (V) e pelos pontos (P) , (P_1) e (P_2) são arestas do triedro auto-polar relativo à superfície cônica de vértice (V) e que admite (c) como uma de suas secções.

Assim, verifica-se que:

- 1.º) Uma reta $(V)(P)$ e um plano β são conjugados, com relação à superfície cônica do 2.º grau, quando passam pelo vértice (V) da superfície cônica e a reta $(V)(P)$ é o lugar dos polos de β com referência à superfície cônica. O plano β é, por essa razão, plano polar da reta $(V)(P)$. Qualquer plano σ secante à superfície cônica e à reta $(V)(P)$ (fig. 12) determina, nessa superfície, uma secção cônica (c) , na reta $(V)(P)$ o ponto (P) e no plano β uma reta $(p) \equiv \beta_\sigma$, que será polar de (p) com relação a (c) .

Se o ponto (P) se desloca sôbre $((V)(P))$, o plano po-

lar β não se modifica, pois é sempre possível admitir-se que a cônica de secção (c) seja uma cônica de contato entre a superfície cônica do 2.º grau e uma quádrlica nela inscrita. A cônica de contato é polar de (V) com relação à quádrlica.

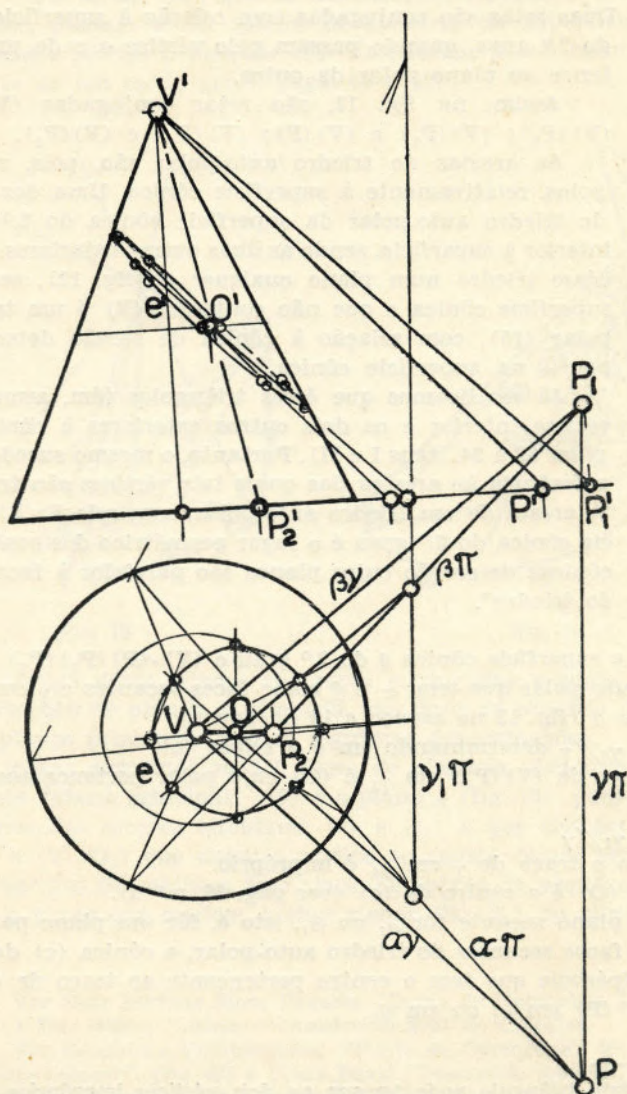


Fig. 14

Denominaremos a reta $(V)(P)$, conjugada do plano β , de *reta dos polos de β com referência à superfície cônica*.

- 2.º) Dois planos são conjugados, com relação à superfície cônica do 2.º grau, quando passam pelo vértice e cada um deles contém a reta dos polos do outro. Assim, na fig. 12, são conjugados os planos α e γ ; α e β ; β e γ .
- 3.º) Duas retas são conjugadas com relação à superfície cônica do 2.º grau, quando passam pelo vértice e cada uma pertence ao plano polar da outra.

Assim, na fig. 12, são retas conjugadas $(V)(P)$ e $(V)(P_2)$; $(V)(P_1)$ e $(V)(P)$; $(V)(P_1)$ e $(V)(P_2)$.

As arestas do triedro auto-polar são, pois, retas de polos, relativamente à superfície cônica. Uma das arestas do triedro auto-polar da superfície cônica do 2.º grau é interior à superfície, sendo as duas outras exteriores. O traço desse triedro num plano qualquer σ (fig. 12), secante à superfície cônica e que não contenha (V) é um triângulo polar (15), com relação à cônica de secção determinada por σ na superfície cônica.

Já verificamos que esses triângulos têm, sempre, um vértice interior e os dois outros exteriores à cônica (ver págs. 32 a 34, itens I e II). Portanto, o mesmo sucederá com referência às arestas das quais tais vértices são traços.

- 4.º) "A aresta de um triedro auto-polar, com relação à superfície cônica do 2.º grau é o lugar geométrico dos centros das cônicas de secção cujos planos são paralelos à face oposta do triedro".

Seja a superfície cônica θ do 2.º grau e $(V)-(P)(P_1)(P_2)$ um seu triedro auto-polar que tem α e β como faces secantes e γ como face exterior a θ (fig. 13 no espaço e 14 na épura).

Seja $\gamma_1 // \gamma$ determinando em θ a elipse (c) .

O traço de $(V)(P_2)$ em γ_1 é (O) cuja polar pertence aos planos γ e γ_1 .

Mas $\gamma_1 // \gamma$

Então o traço de γ em γ_1 é impróprio.

Logo (O) é o centro de (c) (ver pág. 38, n.º 5).

Se o plano secante fôr α_1 ou β_1 , isto é, fôr um plano paralelo a uma das faces secantes do triedro auto-polar, a cônica (c) de secção é uma hipérbole que tem o centro pertencente ao traço de $(V)(P_1)$ ou de $(V)(P)$ em α_1 ou em β_1 .

(15) Este triângulo pode ter um ou dois vértices impróprios (ver estudo feito nas págs. 29 a 34).

Dos inúmeros triedros auto-polares que se pode construir com vértice na superfície cônica do 2.º grau e relativamente a esta superfície, um é tri-retângulo.

Seja o triedro tri-retângulo e auto-polar (V)-(P)(P₁)(P₂) relativo à superfície cônica do 2.º grau ρ (fig. 15). Suas faces $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$ são planos diametraes conjugados e como são ortogonais, passam a ser planos de simetria da superfície cônica, denominados *planos principais* (16) (conforme já verificamos anteriormente de um modo geral, págs. 40 a 42).

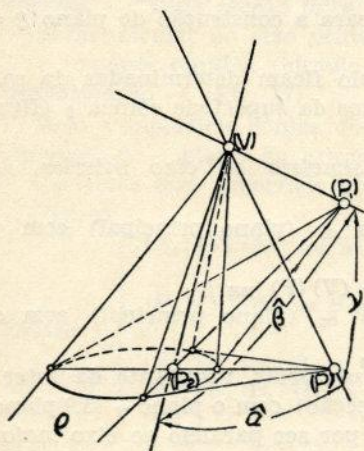


Fig. 15

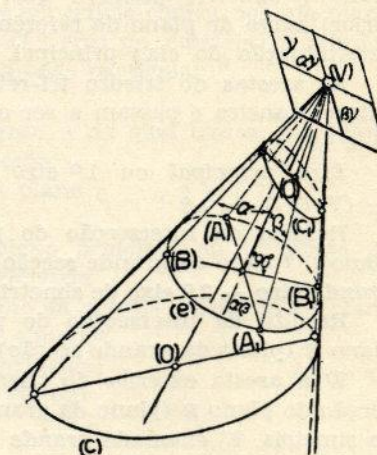


Fig. 16

As arestas desse triedro são retas conjugadas e como resultam da intersecção de planos de simetria, são *eixos de simetria* da figura.

Os planos principais têm as seguintes denominações:

1.º *plano principal* ou 1.º *plano de simetria*, denominado simplesmente “plano principal” (17) é o plano α (fig. 16), perpendicular aos planos das secções circulares (c) e (c₁) e que contém as retas (V)(O) e (V)(O₁) que unem o vértice ao centro dessas secções (8). Alguns autores denominam êsse plano de “*plano da pequena secção*”, por ser o plano que contém o eixo menor (B)(B₁) da elipse (e) de

(16) Ver Luiz Porfirio Mota Pegado: “Curso de Geometria Descritiva” pág 152 § 304, 1899 — Lisboa — Academia Real de Ciências.

(17) Ver Rouchet e Comberousse: “Traité de Géométrie”, 2.º vol. Géométrie dans l’espace”, pág 495 e Perez Beato “Geometria metrica, Proyetiva y Sistemas de Representacion”, Segunda Edición, Tomo II, págs. 1215 a 1221.

(18) Ver “Secções circulares”, págs. 52 a 57.

secção, cujo plano é perpendicular ao eixo interior (eixo principal $\alpha\beta$, conforme verificaremos).

2.º *Plano principal* ou 2.º *plano de simetria*, é o plano β (fig. 16), perpendicular a α . Denomina-se também, "plano da grande secção", por ser aquele que contém o eixo maior (A) (A₁) da elipse de secção cujo plano é perpendicular ao eixo interior (já referido), $\alpha\beta$.

3.º *Plano principal* ou 3.º *plano de simetria*, é o plano γ (fig. 16), perpendicular aos dois primeiros. E', também, denominado por alguns autores (17), simplesmente, "plano principal". Porém, preferimos não adotar esta denominação, por julgar que ela melhor se adapta ao 1.º plano de simetria, plano α que, contendo o eixo principal (eixo interior) serve de plano de referência para a construção do plano β e determinação do eixo principal.

As arestas do triedro tri-retângulo ficam determinadas da seguinte maneira e passam a ser os eixos da superfície cônica ρ (figs. 15 e 16):

Eixo principal ou 1.º *eixo de simetria* ou *eixo interior* $\equiv \equiv (V) (P_2) \equiv \alpha\beta$

Resulta da intersecção do plano α (plano principal) com o plano β (plano da grande secção).

Grande eixo \equiv 2.º *eixo de simetria* $\equiv (V) (P) \equiv \beta\gamma$

Resulta da intersecção do plano α (plano principal) com o plano β (plano da grande secção).

E' a aresta exterior do triedro auto-polar, resultante da intersecção do plano β (plano da grande secção) com o plano γ (3.º plano de simetria. E' chamado *grande eixo* por ser paralelo ao eixo maior da elipse de secção cujo plano é perpendicular ao eixo principal.

Pequeno eixo \equiv 3.º *eixo de simetria* $\equiv (V) (P_1) \equiv \alpha\gamma$.

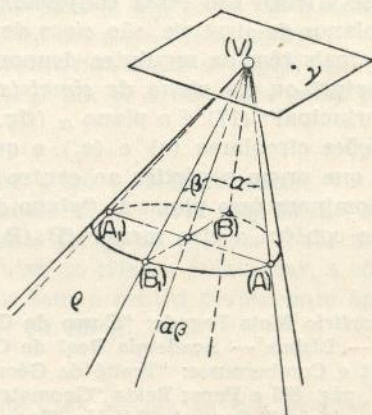


Fig. 17

E' a aresta exterior do triedro tri-retângulo e auto-polar, resultante da intersecção do plano principal α com o plano γ (3.º plano de simetria)

Centro de simetria \equiv Ponto de intersecção dos três eixos de simetria.

No caso da superfície cônica do 2.º grau, êle coincide com o vértice da superfície.

O plano da *grande secção* e o *plano principal* (da pequena secção), são aqueles que cortam o cone segundo geratrizes que formam entre si o maior e o menor ângulo, respectivamente, sendo o eixo principal bissetriz comum a êsses dois ângulos.

Teorema — “Tôda secção feita numa superfície cônica por um plano perpendicular ao eixo principal (1.º eixo de simetria) é elíptica e sômente elíptica (círculo como caso particular)”.

Demonstração — (Fig. 17)

Seja a superfície cônica do 2.º grau, ρ na qual temos α — plano principal, β — plano da grande secção.

Cortemos essa superfície por um plano $\sigma \perp \alpha$ e $\sigma \perp \beta$.

Temos:

$$\text{Hipótese: } \left\{ \begin{array}{l} (A_1) (V) (A) \equiv \alpha \equiv \text{plano principal ou 1.º plano de} \\ \text{simetria} \\ (B_1) (V) (A) \equiv \beta \equiv \text{plano da grande secção ou 2.º plano} \\ \text{de simetria} \\ (V) (O) \equiv \alpha\beta \equiv \text{eixo principal} \\ (A_1) (A) (B_1) (B) \varepsilon \sigma \perp (V) (O) \\ (O) \varepsilon \sigma \end{array} \right.$$

Tese: $(A_1) (A) (B_1) (B) \equiv$ elipse ou círculo (caso particular).

Sendo plano $\sigma \perp (V) (O)$ é paralelo a γ (3.º plano de simetria). Ora γ só tem em comum com a superfície cônica o vértice (V). Então, σ só pode sectionar tal superfície cônica, segundo uma curva elíptica (19).

Se a superfície cônica é de revolução $\sphericalangle (A_1) (V) (O) = \sphericalangle (A) (V) (O) = \sphericalangle (B_1) (V) (O) = \sphericalangle (B) (V) (O)$ e $(O) (A_1) = (O) (A) = (O) (B_1) = (O) (B)$ a elipse passa a ser um círculo.

Quanto a ser “sômente elíptica”, é consequência da hipótese de ser

$$\begin{array}{l} \text{e:} \qquad \qquad \qquad \sigma \perp (V) (O) \\ \text{Então:} \qquad \qquad \qquad O^\circ < \sphericalangle (B_1) (V) (B) < 180^\circ \\ \qquad \qquad \qquad \sphericalangle (B_1) (V) (O) = \sphericalangle (B) (V) (O) < 90^\circ \end{array}$$

(19) Generalização do teorema de Apollonius “Um plano sectiona a superfície cônica do 2.º grau segundo uma elipse, parábola ou hipérbole se um outro plano, paralelo ao plano secante, passando pelo vértice tiver em comum com a superfície sômente o vértice, seja tangente ou secante à superfície”.

Sabe-se que $\sphericalangle (B_1)(V)(B)$ é o maior ângulo formado entre duas geratrizes diametralmente opostas da superfície cônica (20).

Então, os ângulos formados entre o eixo principal $(V)(O)$ e qualquer geratriz são sempre agudos.

$$\text{Mas: } \sphericalangle (A_1)(O)(V) = \sphericalangle (A)(O)(V) = \sphericalangle (B_1)(O)(V) = \sphericalangle (B)(O)(V) = 90^\circ$$

Então, as geratrizes como: $(V)(A_1)$, $(V)(B_1)$, etc., têm próprios todos os seus traços em σ .

Logo, a curva determinada em σ por esses traços "só pode ser elíptica".

e) *Secções principais das quádricas e em particular das superfícies cônicas do 2.º grau*

Secções simétricas

O conceito de simetria é conhecido e divulgado. Em nota de rodapé da pág. 40, já tivemos oportunidade de apresentá-lo em seu aspecto mais amplo.

Considera-se simetria um caso particular de homologia.

Em relação a um eixo ou a um plano, a simetria pode ser ortogonal ou oblíqua. Para o estudo que vamos fazer, só nos interessa a *simetria ortogonal*, também chamada simplesmente *simetria axial* (quando é relativa a uma reta) ou *simetria especular* (quando é relativa a um plano).

Na simetria $\left| \begin{array}{c} \text{axial} \\ \text{especular} \end{array} \right| \circ \left| \begin{array}{c} \text{eixo} \\ \text{plano} \end{array} \right|$ de simetria é $\left| \begin{array}{c} \text{mediatriz} \\ \text{mediador} \end{array} \right|$ do segmento cujas extremidades são pontos simétricos.

Demonstra-se que *duas figuras simétricas são sempre iguais*.

Atendendo à necessidade de maior generalização, visto que nem todas as quádricas admitem centro de simetria próprio (as que têm um de seus planos de simetria impróprio têm, também, seu centro de simetria impróprio: caso do parabolóide hiperbólico e parabolóides), estudaremos as secções das quádricas considerando, somente, a simetria em relação aos eixos e aos planos de simetria desses sólidos.

Teorema:

"Se duas secções de uma quádrica pertencem, respectivamente, a planos simétricos em relação a um de seus eixos ou planos de simetria, elas são simétricas".

(20) Ver Rouchet e Comberousse, "Géométrie dans l'espace", pág. 475 (já citado).

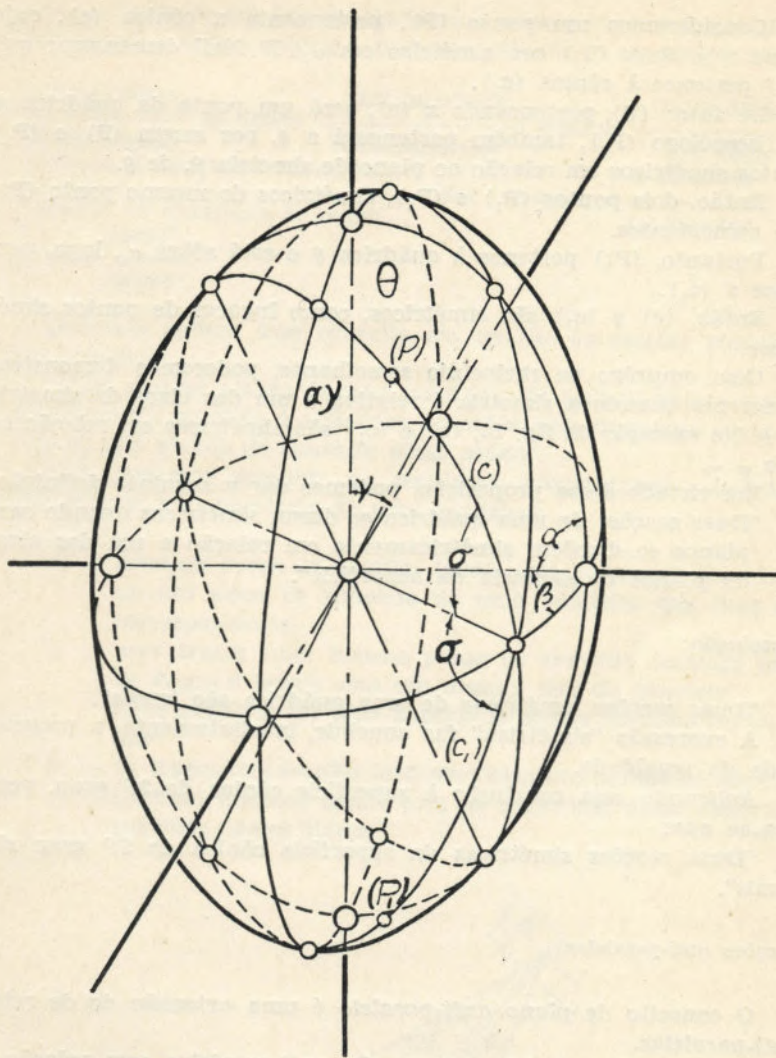


Fig. 18

Demonstração:

Sejam (c) e (c_1) (fig. 18) as duas secções mencionadas na propriedade citada, que, por hipótese, pertencem a planos simétricos σ e σ_1 , em relação a β (um dos planos de simetria da quádrlica θ).

Consideremos um ponto (P), pertencente a cônica (c), cujo plano é σ . Seja (P₁) seu simétrico em σ_1 . É fácil demonstrar que (P₁) pertence à cônica (c₁).

De fato: (P) pertencendo a (c), será um ponto da quádrlica θ , seu homólogo (P₂), também pertencerá a θ , por serem (P) e (P₂) pontos simétricos em relação ao plano de simetria β , de θ .

Então, dois pontos (P₁) e (P₂), simétricos do mesmo ponto (P), são coincidentes.

Portanto, (P₁) pertence à quádrlica θ e está sobre σ_1 , logo, pertence a (c₁).

Então, (c) e (c₁) são simétricos, como lugares de pontos simétricos.

Com emprêgo de raciocínio semelhante, poderemos demonstrar o teorema quando a simetria é relativa a um dos eixos de simetria de θ . No exemplo da fig. 18, (c) e (c₁) são simétricas em relação ao eixo $\alpha \gamma$.

Em virtude dessa proposição, podemos dar a seguinte definição: "Duas secções de uma quádrlica se dizem simétricas quando seus planos se dispõem simêtricamente em relação a um dos eixos ou planos de simetria da superfície".

Conclusão:

"Duas secções simétricas de uma quádrlica são iguais".

A expressão "simétrica" faz concluir, imediatamente, a propriedade de igualdade.

Aplicando essa conclusão à superfície cônica do 2.º grau, verifica-se que:

"Duas secções simétricas da superfície cônica do 2.º grau são iguais".

Secções anti-paralelas

O conceito de *plano anti-paralelo* é uma extensão do de retas anti-paralelas.

Considera-se que "duas retas são anti-paralelas com relação a uma terceira de seu plano, se uma delas é paralela à simétrica da outra, relativamente à terceira. (21)

Esse conceito é, também, aplicado ao anti-parallelismo em re-

(21) Ver L. Sanchez-Marmo e M. Perez-Beato "Geometria Métrica, Projectiva y Sistemas de Representacion", Segunda Edición, Tomo I, pág. 218 a 221, S. A. E. T. A., 1945 — Madrid.

lação aos lados de um ângulo (para duas retas pertencentes ao plano desse ângulo) e, por analogia, podemos estendê-lo ao diedro. Assim:

“Duas retas anti-paralelas uma delas
 se dizem anti-paralelos quando um delas
 “Dois planos anti-paralelos um deles
 paralela à simétrica da outra à bissetriz
 paralelo ao simétrico do outro do
 linear”.
 ângulo diedro”.

Podemos aplicar esse conceito em relação às secções planas de uma quádrlica:

“Duas secções planas de uma quádrlica são anti-paralelas quando uma delas fôr paralela à simétrica da outra, relativamente a um dos eixos ou dos planos de simetria desse sólido”.

Daí, podemos concluir as seguintes propriedades relativas a duas secções anti-paralelas de uma quádrlica:

- 1.^a — formam pares de ângulos iguais com quaisquer dos planos ou dos eixos de simetria de uma quádrlica que lhes seja correspondente;
- 2.^a — seus traços num mesmo plano de simetria formam pares de ângulos iguais com um mesmo eixo de simetria”.
 Se a quádrlica fôr uma superfície cônica, verifica-se, ainda, que:
- 3.^a — os traços das secções anti-paralelas nos planos de simetria, formam ângulos iguais com as geratrizes dessa superfície, contidas nesses planos.

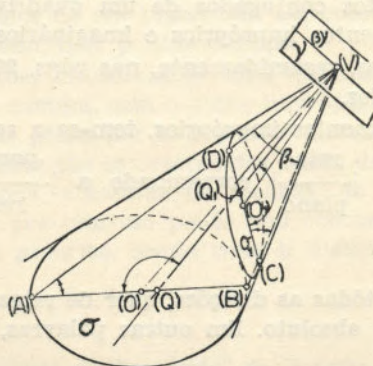


Fig. 19

Seja θ uma superfície cônica do 2.º grau que admite σ e σ_1 como secções planas anti-paralelas β como um de seus planos de simetria e $(V)(Q)$, como seu eixo principal (fig. 19).

Os traços de σ e σ_1 em β são $(A)(B) \equiv \beta_\sigma$ e $(C)(D) \equiv \beta_{\sigma_1}$, respectivamente. Os traços de $(V)(Q)$ em (c) e (c_1) , são, por sua vez: (Q) e (Q_1) .

Fácilmente pode-se concluir que:

$$\sphericalangle (V)(A)(B) = \sphericalangle (V)(C)(D)$$

Do mesmo modo, verifica-se a 3.ª propriedade, qual seja:

$$\sphericalangle (V)(Q)(A) = \sphericalangle (V)(Q_1)(C)$$

visto ser σ_1 paralelo a um simétrico de σ .

Considerando o teorema: "Secções paralelas de uma quádrlica são cônicas homotéticas" (22), e ainda, o conceito que acabamos de apresentar para secções anti-paralelas podemos concluir a seguinte proposição:

"Secções anti-paralelas de uma quádrlica são cônicas semelhantes".

Particularizando:

"Secções anti-paralelas de uma superfície cônica do 2.º grau são cônicas semelhantes".

Secções circulares

Todo plano que corta uma quádrlica segundo secção circular é denominado "plano cíclico".

De modo geral, as quádrlicas admitem três pares de direções de planos cíclicos, podendo ser real apenas um par. No parabolóide hiperbólico não há secções circulares reais.

O raciocínio que permite chegar a essa conclusão baseia-se no estudo dos elementos conjugados de um quadrivértice completo e na noção dos elementos impróprios e imaginários.

Já apresentamos, resumidamente, nas págs. 29 a 47, a noção de elementos conjugados.

Quanto aos elementos impróprios, tem-se a seguinte noção:

— Direção de $\left| \frac{\text{reta}}{\text{plano}} \right|$ corresponde a $\left| \frac{\text{ponto impróprio}}{\text{reta imprópria}} \right|$ ou $\left| \frac{\text{ponto}}{\text{reta}} \right|$ do infinito.

O conjunto de tôdas as direções, quer de retas ou de planos, é o plano impróprio ou absoluto. Em outras palavras, plano absoluto, é

(22) Ver pág. 28, n.º 1.

o lugar geométrico de todos os pontos impróprios e de tôdas as retas impróprias de um espaço.

Pode-se concluir que:

1.º $\left| \begin{array}{l} \text{Uma reta} \\ \text{Um plano} \\ \text{Um espaço} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \text{tem} \\ \text{um} \\ \text{um} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} \text{um} \\ \text{uma} \\ \text{um} \end{array} \right| \text{ e s\~o} \text{mente} \left| \begin{array}{l} \text{um ponto impr\~oprio.} \\ \text{uma reta impr\~opria.} \\ \text{um plano impr\~oprio.} \end{array} \right|$

2.º $\left| \begin{array}{l} \text{O ponto impr\~oprio \u00e9 o centro de uma estr\u00e9la de retas paralelas.} \\ \text{A reta impr\~opria \u00e9 o eixo de um feixe de planos paralelos.} \\ \text{O plano impr\~oprio \u00e9 o lugar de todos os centros e eixos, respec-} \\ \text{tivamente, de estr\u00e9las de retas paralelas e de feixes de} \\ \text{planos paralelos.} \end{array} \right|$

Elementos imagin\u00e1rios

J\u00e1 fizemos refer\u00eancia aos imagin\u00e1rios, em notas de rodap\u00e9 das p\u00e1gs. 12, 14 e 15. (23)

Do ponto de vista do racioc\u00ednio, opera-se com os imagin\u00e1rios como se fossem elementos reais.

Nas propriedades de uma "c\u00f4nica" (p\u00e1gs. 14 e 15, n.º 5) e nas de uma "qu\u00e1drlica" (p\u00e1gs. 18 a 20), verificamos que os pontos imagin\u00e1rios podem ser determinados pelo:

— lugar de pontos comuns a uma $\left| \begin{array}{l} \text{c\u00f4nica} \\ \text{qu\u00e1drlica} \end{array} \right|$ e $\left| \begin{array}{l} \text{uma reta} \\ \text{um plano} \end{array} \right|$ exterior
de seu $\left| \begin{array}{l} \text{plano.} \\ \text{espa\u00e7o.} \end{array} \right|$

Quando a c\u00f4nica \u00e9 um c\u00edrculo e a reta \u00e9 impr\u00f3pria, os pontos imagin\u00e1rios passam a se denominar *pontos c\u00edclicos*.

Todos os c\u00edrculos de um plano t\u00eam em comum, com a reta impr\u00f3pria de seu plano, dois pontos c\u00edclicos.

T\u00f4das as sec\u00e7\u00f5es circulares de uma qu\u00e1drlica, cujos planos s\u00e3o paralelos, t\u00eam em comum, com o plano impr\u00f3prio de seu espa\u00e7o, uma reta impr\u00f3pria que passa por dois pontos c\u00edclicos.

Os pontos c\u00edclicos s\u00e3o os centros dos feixes de retas paralelas denominadas *is\u00f3tropas*, *absolutas* ou *c\u00edclicas*. As retas is\u00f3tropas s\u00e3o retas imagin\u00e1rias que t\u00eam um ponto real comum e s\u00e3o sempre perpendiculares a si pr\u00f3prias, sendo nula a dist\u00e2ncia entre quaisquer de seus pontos.

(23) Ver "Qu\u00e1drlicas de Revolu\u00e7\u00e3o" de Roberto Muniz Gregory, p\u00e1gs. 9 a 12, j\u00e1 citado em nota de roda-p\u00e9 das p\u00e1gs. 13 e 19.

Quando o plano tangente a uma quádrlica é determinado por duas retas isotrópicas, isto é, por duas retas que passam por pontos cíclicos, êsse plano tangente é um plano cíclico. O ponto de contato, ou seja, o ponto real comum às duas retas isotrópicas, é um *círculo de raio nulo*, porque seu plano é paralelo às secções circulares da quádrlica, isto é, às secções que são cortadas pela reta imprópria de seus planos nos dois pontos cíclicos.

O ponto de contato (círculo de raio nulo) é denominado *ponto umbelical* ou *ponto cíclico*. (24)

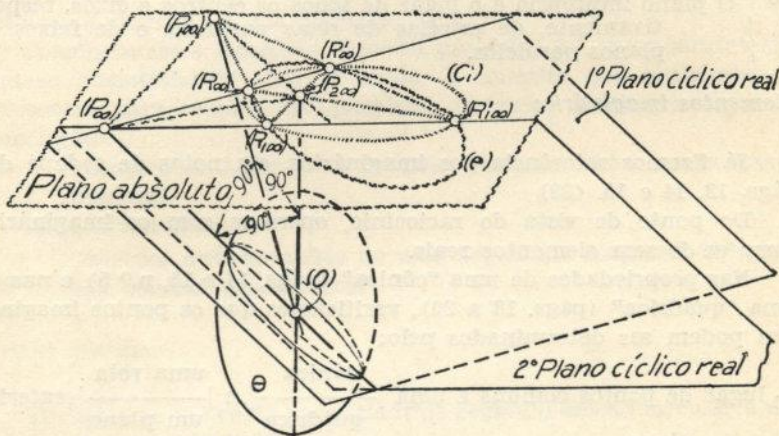


Fig. 20

Na fig. 20, apenas a quádrlica θ pode ser representada. Quanto aos plano absoluto, círculo absoluto (c.) e cônica imprópria (e), do ponto de vista geométrico, não tem sentido sua representação gráfica, razão pela qual adotamos as convenções indicadas na figura para o destaque do plano impróprio (absoluto) e a representação das referidas cônicas. Entretanto, com o propósito de facilitar e esclarecer o raciocínio, tentamos tal representação, apelando para a interpretação do leitor no sentido de fazer as devidas adaptações que a concepção do campo impróprio e dos imaginários exige. Tratando-se de um trabalho elaborado para um concurso numa Escola de Belas-Artes, pensamos ficar perfeitamente justificado êsse nosso esforço, porquanto, tanto para o artista plástico, como para o futuro professor de Desenho de curso de grau médio, é sempre interessante concretizar tudo que de mais abstrato conceba a imaginação humana.

(24) Preferimos não adotar a denominação "ponto cíclico", nêsse caso, para não confundir com a empregada para os pontos comuns a um círculo e a reta imprópria de seu plano, já referidos.

O conjunto dos pontos cíclicos do plano impróprio é um único círculo imaginário do infinito, denominado círculo absoluto ou de pontos cíclicos.

“O lugar dos pontos impróprios de tôdas as secções de uma $\left| \begin{array}{c} \text{quádrlica} \\ \text{esfera} \end{array} \right|$ é $\left| \begin{array}{c} \text{a cônica imprópria} \\ \text{o círculo absoluto} \end{array} \right|$ secção da $\left| \begin{array}{c} \text{quádrlica} \\ \text{esfera} \end{array} \right|$ pelo plano impróprio”.

Justificação dos planos cíclicos de uma quádrlica

No plano impróprio ou plano basoluto (fig. 20), temos duas espécies de cônicas: o círculo absoluto (c_1) e a cônica imprópria (25) de secção da quádrlica por aquêlo plano impróprio, que denominaremos (e).

As duas cônicas (c_1) e (e) têm em comum quatro pontos (26) imaginários e conjugados dois a dois (27), determinando um quadrivértice completo (R_∞) (R'_∞) ($R_{1\infty}$) ($R_{2\infty}$). Como cada um desses quatro pontos são cíclicos, as seis cordas que êles determinam, distribuidas em três pares conjugados dois a dois, serão eixos de feixes de planos cíclicos e contém retas isotropas. Dêsses três pares de feixes de planos cíclicos, um sômente é real: (R_∞) (R'_∞) e ($R_{2\infty}$) ($R'_{1\infty}$) (por hipótese), por que só há dois pares de pontos cíclicos conjugados determinando retas reais e, portanto, sômente duas cordas podem ser reais (28). Daí conclurimos que, numa quádrlica só há dois feixes de planos cíclicos reais.

No quadrivértice, as duas cordas reais (R_∞) (R'_∞) e ($R_{1\infty}$) ($R'_{1\infty}$) determinam um polo impróprio (P_∞), o segundo polo ($P_{1\infty}$), pertence a duas cordas imaginárias (R_∞) ($R_{1\infty}$) e (R'_∞) ($R'_{1\infty}$) e o terceiro polo ($P_{2\infty}$) está na intersecção das outras duas cordas imaginárias (R_∞) ($R'_{1\infty}$) e ($R_{1\infty}$) (R'_∞).

Êsses polos (P_∞), ($P_{1\infty}$) e ($P_{2\infty}$) são os vértices do triângulo auto-polar impróprio, face do tetraedro auto-polar (O) (P_∞) ($P_{1\infty}$) ($P_{2\infty}$) da quádrlica que tem (O) (P_∞) ($P_{2\infty}$), (O) ($P_{1\infty}$) ($P_{2\infty}$) e (O) (P_∞) ($P_{1\infty}$) como planos principais ou planos de simetria da quádrlica, sendo (O) (P_∞), (O) ($P_{1\infty}$) e (O) ($P_{2\infty}$) seus eixos de simetria.

Os planos cíclicos que contiverem, respectivamente, as cordas

(25) Essa cônica pode se apresentar segundo o já referido em “Propriedades das quádrlicas”, págs. 18 e 19, n.º 2, ítem I.

(26) Ver págs. 14 e 15, “Propriedades das cônicas”, n.º 5, ítem II.

(27) Podemos dizer que os quatro pontos, conjugados dois a dois, formam uma involução, porque a correspondência é recíproca entre cada par. A cônica de referência tanto pode ser (c_1), como (e).

reais $(R_\infty)(R'_\infty)$ e $(R_{1\infty})(R'_{1\infty})$ e passarem pelo centro (O) de θ , conterão, também, o polo (P_∞) e, portanto, todo o eixo $(P_\infty)(O)$.

Sendo assim:

- 1.^a) “Os planos cíclicos são perpendiculares a um dos planos de simetria de θ ” (aquêles que contêm os polos $(P_{1\infty})$ e $(P_{2\infty})$, ou seja, os pontos de concurso das cordas imaginárias).

Os planos principais que contêm o eixo, que é aresta do diedro formado pelos dois planos cíclicos, são planos bissetores desse diedro.

Logo:

- 2.^a) “Os planos cíclicos que têm uma reta em comum com um dos planos de simetria de θ , são simétricos com relação a esse plano”.

(No exemplo, a simetria pode se verificar em relação aos planos de simetria $(P_\infty)(P_{2\infty})(O)$ ou $(P_\infty)(P_{1\infty})(O)$).

Em consequência dessa propriedade:

- 3.^a) “Duas secções cíclicas de θ , em direções distintas, são anti-paralelas” (Portanto, gozam das propriedades das secções anti-paralelas, já estudadas nas págs. 50 a 52).

A esfera é cortada pelo plano impróprio, segundo o círculo absoluto. Neste círculo, há uma infinidade de pares de pontos cíclicos conjugados. Portanto, qualquer plano do espaço poderá conter uma corda que passa por dois pontos cíclicos, seccionando a esfera segundo um círculo (29). Daí (considerando ainda o que já foi estudado):

- 4.^a) “Dois círculos de uma quádrlica pertencem a uma mesma esfera”. (30)

Quando a quádrlica θ é de revolução, o plano impróprio corta essa quádrlica segundo um círculo (e), cujo centro coincide com o círculo absoluto e que tem em comum com êle quatro pontos, agora, reunidos dois a dois $(R_\infty) \equiv (R_{1\infty})$ e $(R'_\infty) \equiv (R'_{1\infty})$, formando um duplo contato imaginário. Os planos que contiverem a corda comum desse duplo contato imaginário serão os planos cíclicos da quádrlica de revolução e serão perpendiculares ao seu eixo. Portanto:

(28) “O círculo absoluto e a secção determinada pelo plano impróprio em uma quádrlica, cônica imprópria, têm quatro pontos comuns, que constituem dois pares de pontos imaginários conjugados, pois aquelas duas curvas são representadas por equações de coeficientes reais” (“Quádrlicas de Revolução”, Roberto Muniz Gregory, pág. 55, § 1.º, obra já citada por várias vezes.

(29) Ver pág. 21, letra b.

(30) Ver pág. 28, n.º 5.

5.ª) “Quando a quádrlica é de revolução, as duas direções de planos cíclicos passam a ser coincidentes e perpendiculares ao eixo da superfície”.

Em relação à 4.ª propriedade, podemos observar o seguinte:

- a) na esfera, planos paralelos são perpendiculares ao diâmetro que passa pelo centro das secções circulares;
- b) na quádrlica, tal propriedade só se verifica quando essa superfície é de revolução e os planos são perpendiculares ao eixo; não sendo a quádrlica de revolução, o diâmetro que contém os centros das secções circulares paralelas é oblíquo ao plano dessas secções.

Então: “para que uma esfera e uma quádrlica, não de revolução, tenham em comum dois círculos, êsses círculos nunca poderão ser paralelos”.

Portanto:

“Dois círculos de uma quádrlica pertencem a uma mesma esfera e são sempre anti-paralelos da quádrlica”.

Para determinar secções circulares numa quádrlica qualquer, é importante lembrar os teoremas ns. 3, 4 e 5 da pág. 28.

As secções circulares anti-paralelas auxiliar a determinação do eixo principal de uma quádrlica: “a bissetriz do ângulo formado entre as retas que unem os centros de duas secções circulares paralelas e duas secções circulares anti-paralelas é o eixo principal da quádrlica” (aplicação da 2.ª propriedade).

Além de teoremas como os citados na pág. 28, ns. 3, 4 e 5, que permitem determinar secções circulares numa quádrlica qualquer, com o emprêgo de uma superfície auxiliar, existem outros processos que dispensam o emprêgo de tal superfície. (31)

3.º) SEGMENTO E CÔNICA POLAR (32)

a) *Conceito* —

Consideraremos $\left| \begin{array}{c} \text{segmento polar} \\ \text{cônica polar} \end{array} \right|$ de um ponto $\left| \begin{array}{c} P \\ (P) \end{array} \right|$, exterior a uma $\left| \begin{array}{c} \text{cônica} \\ \text{quádrlica} \end{array} \right|$ e relativamente a ela, a $\left| \begin{array}{c} \text{corda} \\ \text{cônica} \end{array} \right|$ da $\left| \begin{array}{c} \text{cônica} \\ \text{quádrlica} \end{array} \right|$

(31) No caso da superfície cônica do 2.º grau, por exemplo, em A. Taibo Fernandes “Geometria Descritiva”, pág. 434, problema n.º 2, da 2.ª edição, Libreria y Editorial “El Ateneo”, 1947, encontramos interessante processo.

(32) Para maiores esclarecimentos consultar as págs. 29 a 47.

que tem por suporte $\left| \frac{\text{a reta}}{\text{o plano}} \right|$ polar de $\left| \frac{P.}{(P)} \right|$

Assim, na fig. 21, o *segmento polar* da cônica c e correspondente ao polo P , é a corda AB , pertencente à polar p , do referido polo P .

Na fig. 22, a cônica polar da quádrlica θ , correspondente ao polo (P) é a cônica (c) , pertencente ao plano polar α , do referido polo (P) .

Nos pontos $\left| \frac{A \text{ e } B}{\text{pertencentes à cônica } (c)} \right|$, as cordas determinadas na $\left| \frac{\text{cônica } c}{\text{quádrlica } \theta} \right|$ pelos raios polares são nulas, visto serem tangentes a $\left| \frac{c}{\theta} \right|$ os raios polares $\left| \frac{PA \text{ e } PB}{(P) (A), (P) (B), \text{ etc.}} \right|$ (posição limite dos raios polares).

b) *Círculo como caso particular de cônica polar*

A cônica de contato (c) , cônica polar (fig. 22), será um círculo: “quando o raio polar que passa pelo centro do círculo for perpendicular ao seu plano”

Isso poderá se verificar “sòmente na hipótese da quádrlica de referência ser de revolução e o polo pertencer ao eixo de revolução”

a) A exigência de ser “o raio polar que passa pelo centro do círculo perpendicular ao seu plano” resulta do fato de que

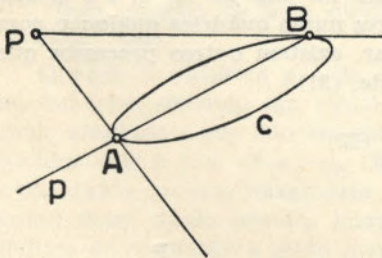


Fig. 21

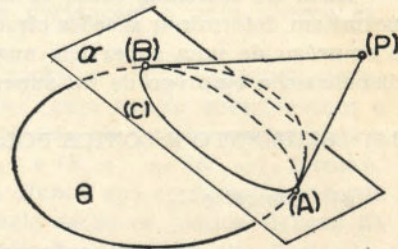


Fig. 22

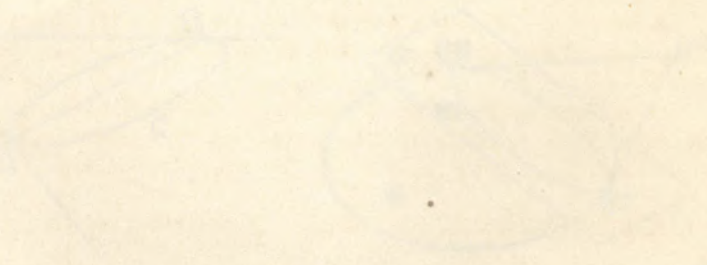
a superfície dos raios polares que circunscreve uma quádrlica é uma superfície cônica do 2.º grau (pág. 34, n.º 2). Nessa superfície, os planos cíclicos, quando são distintos não são perpendiculares ao eixo principal; quando são coincidentes, é porque a superfície cônica é de revolução (4.ª e 5.ª propriedades das págs. 56 e 57).

- b) A exigência de ser de revolução a quádrlica de referência decorre dessa mesma observação, pois não sendo a quádrlica de revolução, não admitirá *círculo polar*, isto é, círculo de contato entre a quádrlica e os raios polares que lhe sejam tangentes, porque êstes raios polares pertencem à superfície cônica do 2.º grau circunscrita à quádrlica, superfície esta que não admite secções circulares por planos perpendiculares ao eixo principal, a não ser que seja de revolução (págs. 52 a 57). Mas, se a superfície cônica do 2.º grau fôr de revolução, ela só será circunscritível numa quádrlica de revolução, se tiver em comum com a quádrlica seu eixo principal.

Faint, illegible text at the top of the page, possibly bleed-through from the reverse side.

Second block of faint, illegible text.

Third block of faint, illegible text.



Final block of faint, illegible text at the bottom of the page.

VI — HOMOLOGIA PLANA E ESPACIAL

1) CONCEITO DE HOMOLOGIA

Segundo Poncelet, homologia é uma correspondência entre duas figuras obedecendo às seguintes condições:

- 1.^a — Retas que unem pontos correspondentes devem concorrer a um único ponto do espaço (centro de homologia).
- 2.^a — Qualquer reta de uma figura terá sua correspondente na outra figura, dita sua homóloga e os pares de retas homólogas concorrem numa única reta (eixo de homologia) ou único plano (plano de homologia ou plano central), se as figuras correspondentes são planas ou do espaço, respectivamente.

A homologia plana se verifica entre duas figuras situadas no mesmo plano, podendo ser considerada como resultante de uma homologia do espaço, por uma operação de projeção, secção ou rebatimento dessa homologia do espaço.

A homologia do espaço se verifica sempre que se pode relacionar duas figuras planas, que não são complanares, ou duas figuras não planas.

Como consequência da 2.^a condição, podemos concluir que: seccionando uma das figuras não planas por um plano, seu homólogo seccionará a outra figura e as secções serão homólogas.

2) ELEMENTOS FUNDAMENTAIS — PROPRIEDADES

Raios de homologia — centro de homologia — pares de pontos homólogos —

Raios de homologia são retas convergentes num único ponto, denominado *centro de homologia* ou *polo*. Os raios de homologia ficam determinados por *pares de pontos*, numa correspondência chamada bi-únivoca, isto é, numa correspondência que associa um ponto de uma figura a um e somente um ponto da outra figura e vice-versa. Assim, o conjunto de raios constitui um feixe de raios (homologia

plana) ou estrêla de raios (homologia do espaço), cujo centro é o *centro de homologia*. Os *pares de pontos homólogos* são, também, denominados *correspondentes*, não havendo um ponto de uma figura sem ter seu correspondente na outra e reciprocamente

Os pontos de uma figura, considerada de referência, são denominados pontos da 1.^a figura e os da outra figura, referida àquela 1.^a, são chamados pontos da 2.^a figura.

Retas homólogas —

Dois pontos da 1.^a figura determinam uma reta cuja homóloga fica conhecida pelos dois pontos homólogos da 2.^a figura.

Assim, os pontos (A_1) e (B_1) da 1.^a figura (fig. 23) determinam a reta $(A_1)(B_1)$ cuja homóloga é a reta $(A_2)(B_2)$, determinada pelos pontos (A_2) e (B_2) homólogos, respectivamente, dos pontos (A_1) e (B_1) .

Planos homólogos —

Três pontos da 1.^a figura (não colineares), determinam um plano cujo homólogo fica conhecido pelos três pontos homólogos da 2.^a figura.

Assim, os pontos (A_1) , (B_1) , (C_1) (fig. 23), determinam o plano α_1 cujo homólogo α_2 fica determinado pelos pontos (A_2) , (B_2) , (C_2) , homólogos, respectivamente, dos pontos (A_1) , (B_1) , (C_1) .

O mesmo se verifica para quaisquer três pontos da 1.^a figura em relação a quaisquer três pontos da 2.^a figura que lhes correspondam.

Eixos de homologia (eixos centrais ou eixos de pontos unidos) —

Um plano e seu homólogo se interceptam segundo uma reta, lugar geométrico dos pontos comuns aos dois planos ou dos pontos cujos homólogos são êles próprios. Por essa razão, denominamos a reta comum aos dois planos homólogos de *eixo de pontos unidos*. Entretanto, ela é mais conhecida sob a denominação de *eixo de homologia*.

Verificamos que qualquer eixo de homologia fica determinado pelos pontos de intersecção de dois pares de retas homólogas. Assim: $(A_1)(B_1) - (A_2)(B_2)$ se encontram no ponto $(1_1) \equiv (1_2)$ e $(B_1)(C_1) - (B_2)(C_2)$ no ponto $(2_1) \equiv (2_2)$; a reta $(1_1) \equiv (1_2) - (2_1) \equiv (2_2)$ é um eixo de homologia.

Planos do centro de homologia —

Todos os planos determinados por dois raios de homologia denominamos *planos do centro de homologia*. Assim, na fig. 23, os raios

$(V)-(A_1)(A_2)$, $(V)-(B_1)(B_2)$, determinam um plano do centro de homologia. O conjunto de todos os planos do centro de homologia é uma estrêla de planos cujo centro é o centro (V) de homologia.

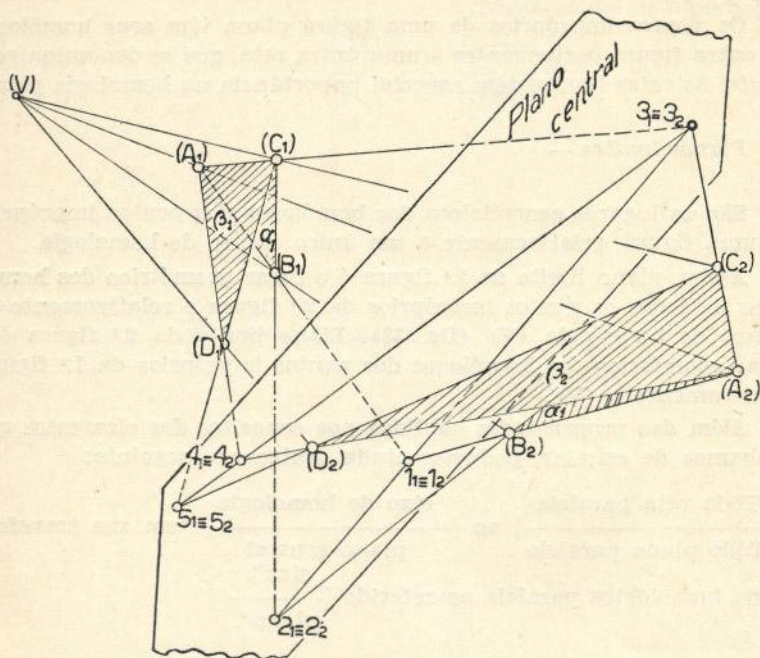


Fig. 23

Podemos verificar, também, que os planos do centro de homologia ficam determinados por pares de retas homólogas como $(A_1)(B_1)$ e $(A_2)(B_2)$, $(B_1)(C_1)$ e $(B_2)(C_2)$, $(C_1)(D_1)$ e $(C_2)(D_2)$, etc..

Plano central ou plano de pontos unidos —

Os eixos de homologia (eixos centrais ou eixos de pontos unidos) são complanares e o plano suporte de todos estes eixos é o *plano central* ou *plano de pontos unidos*.

Podemos verificar que este plano é um plano reguado, formado por todos os eixos de pontos unidos, ou seja, é suporte de tôdas as retas de intersecções dos infinitos pares de planos homólogos. Do mesmo modo, êle pode ser, também, considerado um plano pontilhado de pontos unidos, determinado pelos concursos dos infinitos pares

de retas homólogas. Daí, denominarmos a êsse plano de "plano de pontos unidos".

Retas limites —

Os pontos impróprios de uma figura plana têm seus homólogos na outra figura pertencentes a uma única reta, que se denomina *reta limite*. As retas limites têm especial importância na homologia plana.

Planos limites —

São os lugares geométricos dos homólogos dos pontos impróprios de uma figura, relativamente a um único centro de homologia.

Assim, plano limite da 1.^a figura é o lugar geométrico dos homólogos de todos os pontos impróprios da 2.^a figura e relativamente ao centro de homologia (V) (fig. 23). Plano limite da 2.^a figura é o lugar geométrico dos homólogos dos pontos impróprios da 1.^a figura, relativamente a (V).

Além das propriedades contidas nos conceitos dos elementos que acabamos de estudar, podemos ainda destacar a seguinte:

"Tôda reta paralela ao eixo de homologia
"Todo plano paralelo ao plano central eixo".
mada homológica paralela ao referido plano".

3) DEFINIÇÃO DE UM SISTEMA DE HOMOLOGIA

De um modo geral, um sistema de homologia $\left| \frac{\text{plano}}{\text{especial}} \right|$ fica definido pelo centro de homologia, par de pontos homólogos e eixo de homologia.

$\left| \frac{\text{plano central}}{\text{plano}} \right|$

Não nos deteremos em indicar outros modos de definir um sistema de homologia, por não termos necessidade de empregá-los.

4) TRANSFORMAÇÕES HOMOLÓGICAS DO CÍRCULO E DA ESFERA

A transformação homológica $\left| \frac{\text{do círculo}}{\text{da esfera}} \right|$ é $\left| \frac{\text{uma elipse, parábola}}{\text{um elipsóide, para-}} \right|$

la ou hipérbole bolóide ou hiperbolóide	se	$\frac{\text{a reta}}{\text{o plano}}$	limite, lugar dos homólogos
dos pontos impróprios		$\frac{\text{dessa elipse, parábola ou hipérbole}}{\text{dêsse elipsóide, parabolóide ou hiperbolóide}}$	
fôr exterior, tangente ou secante		$\frac{\text{ao círculo.}}{\text{à esfera.}}$	

The first part of the book is devoted to a general history of the United States from its discovery to the present time.

The second part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The third part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The fourth part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The fifth part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The sixth part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The seventh part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The eighth part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The ninth part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The tenth part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

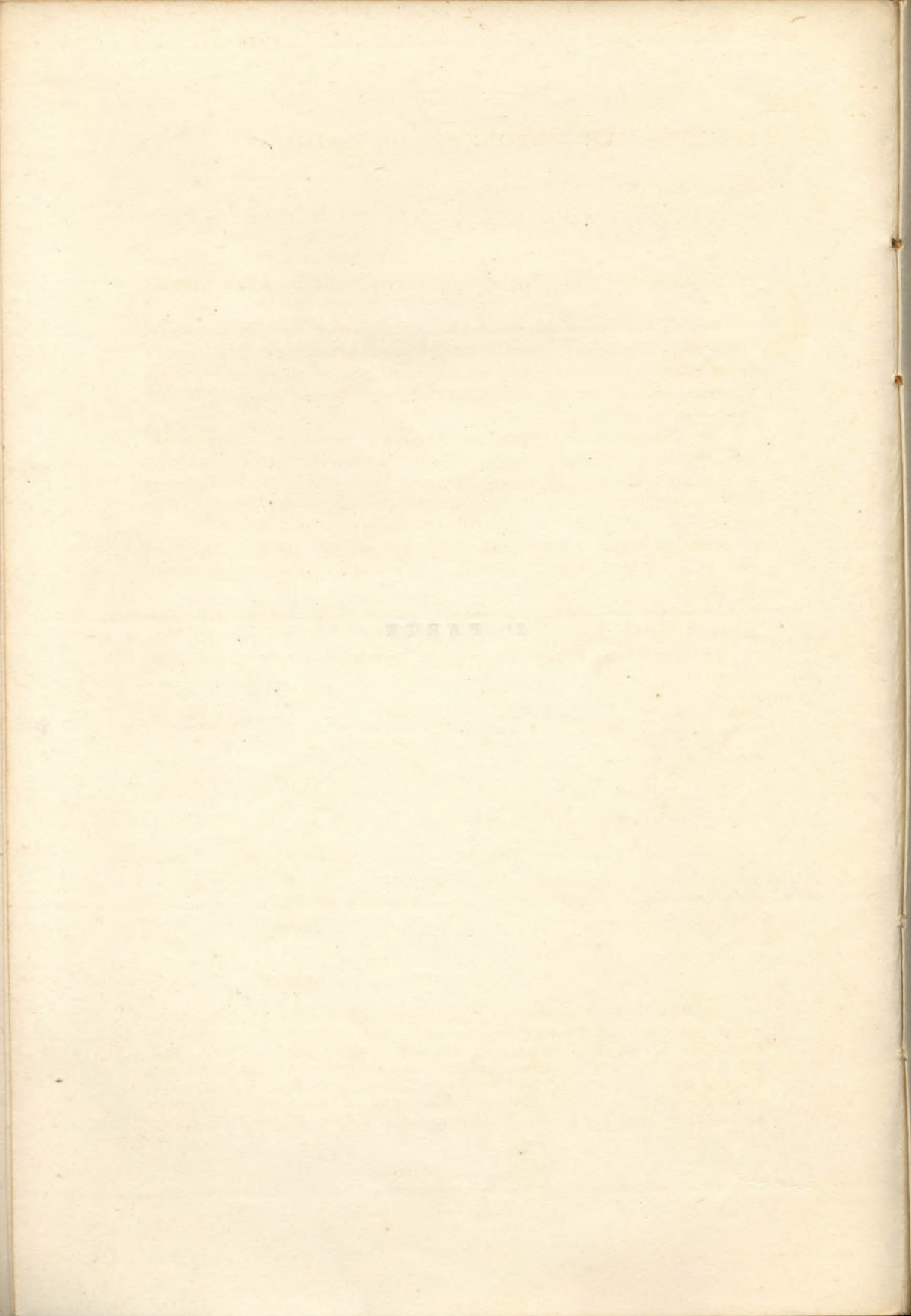
The eleventh part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The twelfth part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The thirteenth part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The fourteenth part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.

The fifteenth part is devoted to a detailed history of the United States from the discovery of the continent to the present time.



VII — PROJEÇÕES DA ESFERA

1) CONCEITO DE PROJEÇÃO E DE SECÇÃO APLICADOS A ESFERA

Se, de um ponto qualquer (V), próprio (fig. 24) ou impróprio (fig. 25), denominado centro projetivo, construirmos uma estrêla cujos raios projetantes tocam os inúmeros pontos da esfera e seccionarmos essa estrêla por um plano, temos na secção o que se chama “*projeção da esfera*”.

Em Geometria Projetiva, os vocábulos “projetar” e “projeção” têm, via de regra, significados distintos. Assim, no caso da projeção cônica ou cilíndrica da esfera, *projetar* êsse sólido, se restringe a construir a estrêla de raios projetantes da esfera, cujo centro, polo ou vértice é um ponto (V), por hipótese exterior à esfera. *Cortando-se* a estrêla projetiva (cônica ou cilíndrica) por um plano π ; a curva da secção c obtida, seria o contôrno da *projeção* cônica ou cilíndrica da esfera.

Dentro dêsse conceito, *projeção* e *secção* se confundem em Geometria Projetiva. (33)

Em Geometria Descritiva adota-se, também, a mesma distinção

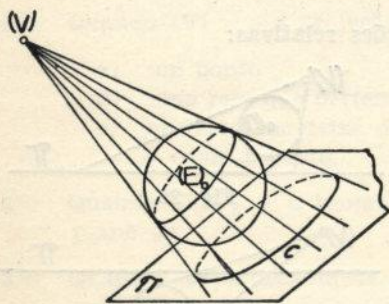


Fig. 24

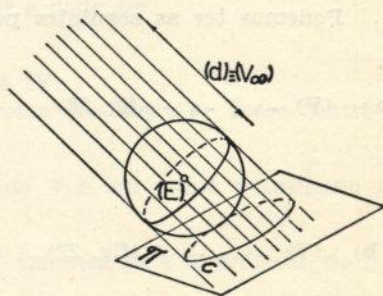


Fig. 25

(33) Ver: Guido Castelnuovo “Lecciones de Geometría Analítica, Geometría Analítica del Plano y del Espacio — Conceptos Fundamentales de Geometría Projectiva — Curvas y Superfícies de Segundo Orden”, pág. 181, § 3.º da Primeira Edición Castellana, traducida de la Séptima Edición Italiana Editorial “Mundo Científico” — C. Calomino — Buenos Aires - Argentina — 1955; e Luigi Cremona “Elementos de Geometria Projectiva”, versão portuguesa por C. G. S. Shalders, pág. 2, Casa Duprat — S. Paulo — 1918.

entre os vocábulos “projetar” e “projeção”, porém, relativamente à “projeção” e “secção”, razões de ordem didática e muitas vèzes, de aplicação técnica, fazem distinguir “projeção” de “secção”. É verdade que não há distinção de conceituação teórica, isto é, ambos são traços de linha (retas ou não) numa superfície, mas do ponto de vista prático, “projeção” é a figura resultante do corte numa estrêla de retas projetantes e “secção” é a figura resultante do corte numa outra figura cuja superfície é formada ou não de linhas retas (que, geralmente, não são consideradas projetantes, e sim geratrizes ou linhas da superfície seccionada).

Entretanto, na Projetiva ou na Descritiva, “projeção” pode ter também, um sentido mais amplo abrangendo as operações *projetar* e *seccionar*.

2) POSIÇÕES DELATIVAS DO SISTEMA: CENTRO PROJETIVO — ESFERA — PLANO DE PROJEÇÃO

Esta pesquisa é de ordem geral e se aplica ao estudo da projeção de qualquer figura.

Seja: (V) = centro projetivo, polo ou vértice de projeção

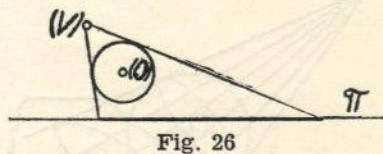
θ = esfera de centro (O)

π = plano de projeção

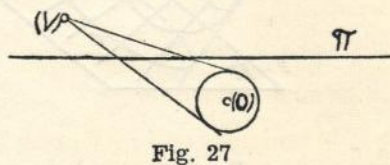
1.^a HIPÓTESE — (V), θ e π são elementos distintos.

Podemos ter as seguintes posições relativas:

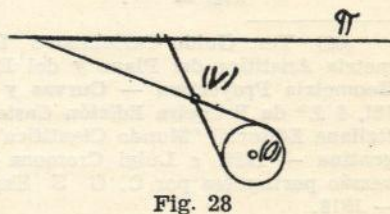
a) (V) \rightarrow θ \rightarrow π (fig. 26)



b) (V) \rightarrow π \rightarrow θ (fig. 27)



c) π \rightarrow (V) \rightarrow θ (fig. 28)



- d) $(V_\infty) \rightarrow \pi \rightarrow \theta$
 ou
 $(V_\infty) \rightarrow \theta \rightarrow \pi$ (fig. 29)



Fig. 29

Por não haver denominação especial para a posição *a*, ela é chamada simplesmente *projetiva* (de projeção, que é a denominação geral); a posição *b* é chamada *perspectiva*; a *c*, *virtual*; finalmente a posição *d* é denominada *paralela*. Para êsse caso, do ponto de vista teórico, não importa a posição relativa entre (V_∞) , θ e π . Esta posição pode ser considerada caso particular das duas primeiras.

Para quaisquer dessas posições, verifica-se sempre que os raios que pertencem à superfície de projetantes da esfera constituem uma superfície de revolução, cônica ou cilíndrica (cônica de vértice impróprio), para a qual o plano de projeção π é sempre secante e, portanto, a projeção será sempre uma cônica.

2.^a HIPÓTESE — (V) , θ e π apresentam-se parcialmente confundidos.

Podem-se verificar os casos, que reunimos no quadro da pág. 72: Verifica-se, pelo quadro dessa página, o seguinte:

- 1.^o) Quando $(V) \varepsilon \pi$ a projeção de θ pode ser:
 - a) um ponto
 - b) uma reta que pertence a (V)
 - c) um setor do feixe de retas que têm (V) como centro e π como suporte.
- 2.^o) Quando $(V) \varepsilon \theta$ a projeção de θ é um plano pontilhado (o plano π).
- 3.^o) Quando (V) é distinto de π e também de θ a projeção de θ é uma cônica.
- 1.^o) — Quando (V) pertence a π ($(V) \varepsilon \pi$), 1.^o ao 3.^o caso do quadro da pág. 72, verifica-se que a estrêla de raios projetantes de θ que tem (V) como centro é cortada por π com a condição de π passar sempre por (V) . Se a estrêla de raios projetantes da esfera só tiver em comum com π o ponto (V) , a projeção se reduzirá a êste ponto, mas se além de conter (V) , o plano π contiver, também, um ou inúmeros dos raios da estrêla, então a projeção da esfera será constituída pelo setor do feixe de raios projetantes contidos em π .

N.º do caso	Esquema gráfico do conjunto	Posição relativa entre (V), θ e π	Figura projeção de θ
1.º		<p>(V) ε π θ tg. π em (V) ou (V) ε π, θ exterior π</p>	<p>Ponto \equiv (V)</p>
2.º		<p>(V) ε π θ tg. π em ponto \neq (V)</p>	<p>Reta que passa por (V)</p>
3.º		<p>(V) ε π π secante θ</p>	<p>Setor do feixe de retas projetantes que têm (V) como centro. (A projeção é constituída do ponto (V) e das retas projetantes de θ que pertencem a π e que passam por (V).</p>
4.º		<p>(V) distinto π (V) ε θ (V) pode ser um ponto da superfície de θ ou de seu interior)</p>	<p>Plano pontilhado (A projeção é constituída de todos os pontos de π, inclusive seus pontos impróprios).</p>
5.º		<p>(V) distinto π podendo ser (V_∞) (V) distinto θ Não importa a posição relativa entre π e θ, podendo ser π secante, tangente ou exterior a θ.</p>	<p>A projeção será uma cônica determinada do mesmo modo que para a 1.ª HIPÓTESE.</p>

(V) = centro projetivo
(O) = centro de uma esfera θ
 π = plano de projeção

- 2.º) — Quando (V) pertence a θ ($(V) \in \theta$), seja à superfície ou ao interior de θ . 4.º caso do quadro da pág. 72, verifica-se que a estrêla de raios projetantes da esfera será constituída por tôdas as retas do espaço que têm (V) como centro. O plano π será sempre um plano secante a essa estrêla, logo a projeção obtida será o plano pontilhado, ou seja, o lugar geométrico de todos os pontos que pertencem ao plano π , inclusive seus pontos impróprios.

Esse caso só tem interêsse para o estudo da projeção de figuras pertencentes à superfície esférica, como a loxodrômica da esfera. Como não pretendemos desenvolver nosso trabalho nesse setor, não nos interessa considerar tal posição.

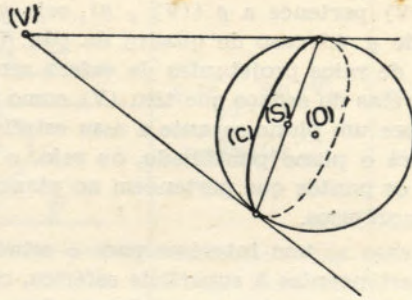
Também não apresentam interêsse para o nosso estudo os casos correspondentes à suposição de que $(V) \in \pi$ (1.º ao 3.º caso).

- 3.º) — Quanto ao 5.º caso, em que (V) é distinto de π e de θ , verifica-se que a estrêla de raios projetantes da esfera relativamente aos raios que tangenciam a esfera, formará uma superfície cônica de revolução (se (V) estiver a uma distância finita de π) ou uma superfície cilíndrica de revolução (se (V) estiver a uma distância infinita de π). Como (V) não está contido em π , o plano π será sempre secante aos raios projetantes da esfera, logo: “a projeção obtida será sempre uma cônica”, qualquer que seja a posição de π relativamente a θ . Sendo assim, recaímos na 1.ª HIPÓTESE, que será objeto de estudo mais minucioso.

3) NATUREZA E REPRESENTAÇÃO DA SUPERFÍCIE PROJETANTE DA ESFERA

De acôrdo com o estudo feito em “Posições relativas do sistema: centro projetivo — esfera — plano de projeção”, podemos considerar a 1.ª HIPÓTESE, no caso a , ou seja quando a posição do sistema é $(V) \rightarrow \theta \rightarrow \pi$, a básica para o estudo de tôdas as demais, a posição para a qual utilizamos a denominação geral de “projetiva”. Estudada, esta posição, tôdas as outras seguem o mesmo raciocínio. Analisemos, então, a natureza e representação da superfície projetante da esfera quando o centro projetivo (V) é um ponto próprio e a esfera está compreendida entre êle e o plano de projeção:

Seja a esfera θ , de centro (O) e eixo vertical (e) . Seja (V) o centro projetivo ou polo pelo qual passarão as projetantes da esfera θ , (fig. 30, espaço e fig. 31 é pura).



— 30 —

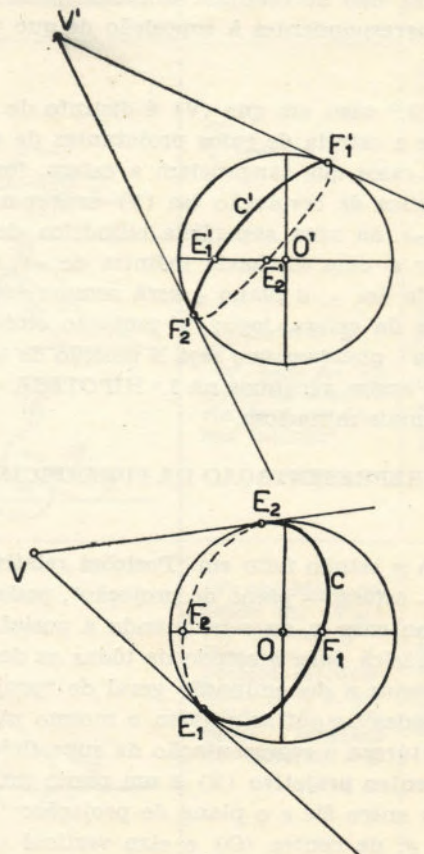


Fig. 31

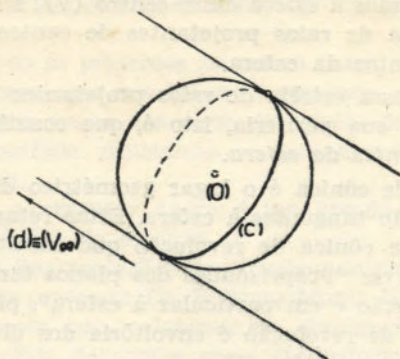


Fig. 32

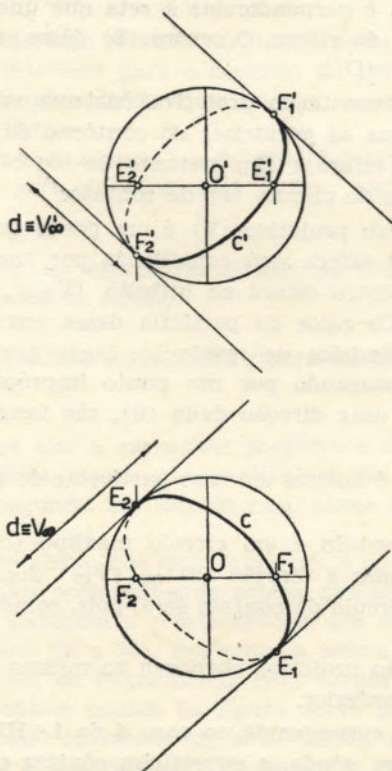


Fig. 33

Para projetarmos a esfera dêsse centro (V), será suficiente construirmos a estrêla de raios projetantes de centro (V) que passam pelos diversos pontos da esfera.

Estudemos nessa estrêla de raios projetantes da esfera, aqueles que pertencem a sua periferia, isto é, que constituem a *superfície cônica de projetantes da esfera*.

Essa superfície cônica é o lugar geométrico das retas que, passando por (V), são tangentes à esfera. Estas retas são as geratrizes de uma superfície cônica de revolução que admite (V) por vértice e θ por diretriz (ver "Propriedades dos planos tangentes a uma superfície de revolução e em particular à esfera", págs. 24 a 26). Essa superfície cônica de revolução é envoltória dos diversos planos tangentes à esfera que contém (V).

Pelo teorema n.º 4 da pág. 26, verifica-se que os diversos pontos de contato entre as duas superfícies pertencem a um, e somente um círculo, cujo plano é perpendicular à reta que une o ponto exterior (V) ao centro (O) da esfera. O centro (S) dêsse círculo pertence ao raio projetante (V)(O).

Fizemos a representação projetiva (sistema mongeano, fig. 31), considerando apenas as geratrizes do contôrno da superfície cônica de projetantes da esfera e a projetante de seu centro. Destacamos ainda, as projeções do círculo (c) de contato.

Quando o centro projetivo (V) é um ponto impróprio, a superfície projetante da esfera será constituída por uma estrêla de raios projetantes cujo centro estará no infinito, (V_{∞}) , fig. 32 — espaço; fig. 33 — épura. Os raios da periferia dessa estrêla pertencerão a uma superfície cilíndrica de revolução, lugar geométrico dos raios projetantes que, passando por um ponto impróprio (V_{∞}) , isto é, sendo paralelos a uma direção dada (d), são tangentes à esfera de centro (O).

Esse problema é apenas um caso particular do anterior (ns. 4 e 5, pág. 26).

A curva de contato é um círculo máximo (c) da esfera, cujo plano é perpendicular à direção (d) $\equiv (V_{\infty})$ dos raios projetantes. O centro (S) do círculo de contato será, pois, coincidente com o centro (O) da esfera.

A representação projetiva obedeceu ao mesmo critério observado para o problema anterior.

Este problema corresponde ao caso *d* da 1.ª HIPÓTESE, os casos *b* e *c* correspondem, ainda, a superfícies cônicas envolventes da esfera. Essas superfícies pertencem à família das superfícies do 2.º grau ou de 2.ª ordem.

4) NATUREZA E TRAÇADO DAS PROJEÇÕES DA ESFERA

Tem-se estudado as projeções da esfera como uma secção cônica da superfície de revolução envolvente e seguindo o processo clássico de determinação dos traços dos raios da estrêla de projetantes tangentes àquela superfície, utilizando-se, para êsse fim, o método bi-projetivo de Monge.

O que vamos apresentar agora é um estudo das projeções da esfera, pelo seu círculo de contato.

Na apreciação das projeções do círculo, adotamos muito do processo aplicado pelo professor Dr. Roberto Muniz Grégory.

Pretendemos, com isso, colaborar na divulgação de um método baseado em raciocínio de ordem geral (transformadas homológicas do círculo), que oferece recursos interessantes.

Êsse método, que resulta da associação entre a figura no espaço e sua projeção, permite:

- 1 — determinar, com relativa facilidade, retas e pontos que apresentam interesse para o desenho da projeção, possibilitando construção rápida e, por vêzes, economizando construções auxiliares;
- 2 — depender muito pouco do sistema bi-projetivo, (apenas o necessário para determinação de um par de pontos homólogos).

Passemos, pois, ao estudo do *círculo de contato* da superfície cônica de projetantes da esfera.

a) *O círculo de contato como única figura da esfera necessária à sua projeção*

Já verificamos que a superfície projetante da esfera é sempre cônica (ou cilíndrica, como caso particular) de revolução, tangenciando a esfera segundo um círculo cujo plano é perpendicular ao eixo da superfície cônica.

Verificamos, também, que essa superfície é constituída pelo lugar geométrico dos raios projetantes da esfera, que são tangentes àquela superfície (vide "Natureza e representação das superfícies projetantes da esfera", págs. 73 a 76). Portanto, a esfera fica envolvida por êsses raios, que são os responsáveis pelo contôrno da projeção do sólido. Todos os outros pontos da figura serão projetados mediante raios secantes a ela, apresentando seus traços, no plano de projeção, interiores aos traços dos raios da periferia, ou seja, ao daqueles raios que constituem a superfície cônica de projetantes.

Então, tem particular importância o *círculo de contato*, ou seja,

o lugar geométrico dos pontos de tangência dos raios projetantes da esfera, pois a projeção dele é responsável pelo contôrno da projeção da esfera.

Lembrando que o centro projetivo de uma esfera é, também, o polo do círculo de contato, relativamente à esfera, podemos formular o seguinte TEOREMA: "*Projetar uma esfera é projetar o círculo cujo polo é o centro projetivo da esfera*".

Assim, não poderemos sempre afirmar que: "Tôda superfície projetante de um círculo é superfície projetante de uma esfera"; porque:

1.º — O centro projetivo pode não pertencer à reta perpendicular ao plano do círculo que passa pelo centro dêste círculo.

Se o centro projetivo pertencer a uma reta que, passando pelo centro do círculo, é oblíqua ao seu plano, podemos afirmar que a superfície cônica que tem por vértice aquele centro projetivo e por diretriz o círculo, "*não é de revolução*", pois "*as superfícies de revolução, do 2.º grau, só admitem secções circulares por planos perpendiculares ao seu eixo*". (34)

Sabe-se, também, que: "As secções feitas numa superfície de revolução por planos perpendiculares ao eixo são sempre circulares". (35)

Não sendo possível ter secções circulares oblíquas ao eixo, examinemos:

"se é possível uma superfície cônica de revolução tangenciar uma esfera, sem ser segundo um círculo".

Pelo teorema n.º 4 da pág. 26, verifica-se ser impossível tal hipótese, logo:

"não é possível uma superfície cônica de revolução tangenciar uma esfera, sem ser por um círculo, cujo plano é perpendicular ao eixo comum às duas superfícies".

Resta-nos, agora, verificar:

"se é possível inscrever uma esfera numa superfície cônica do 2.º grau, que não seja de revolução".

Pelo teorema n.º 5 da pág. 26, verifica-se que isso não é possível, logo:

"*Sòmente a superfície cônica ou cilíndrica (cônica de vértice impróprio) de revolução é circunscritível numa esfera*".

(34) Ver Cap. III "Breve apreciação sôbre superfícies" págs. 17 a 22, e "Secções circulares das quádricas", págs. 52 a 57.

(35) Ver "Propriedades de uma superfície de revolução", n. 3, ítems 1, 2 e 9, págs. 20 e 21.

Sendo assim:

“se a superfície cônica ou cilíndrica do 2.º grau não é de revolução, não é circunscritível numa esfera”.

2.º — Mesmo que o centro projetivo pertença à reta perpendicular ao plano do círculo, levantada pelo seu centro, isto é, que o centro projetivo seja vértice de uma superfície cônica de revolução, à qual pertence o círculo, pode não ser verdadeira a afirmativa: “Tôda superfície projetante de um círculo é superfície projetante de uma esfera”, porque a superfície cônica de revolução pode ser secante à esfera. Sômente se essa superfície fosse tangente à esfera, tal afirmativa seria verdadeira.

Então, valendo-nos do estudo que acabamos de fazer sôbre o teorema da pág. 78, podemos formular tal teorema, também, com a seguinte redação:

“Tôda superfície projetante de um círculo é superfície projetante de uma esfera que admite êsse círculo como linha de contato”.

b) *Natureza e traçado das projeções de um círculo*

Analisemos o sistema: (V), (c), π , no qual:

(V) = centro projetivo,

(c) = círculo a ser projetado, cujo plano é σ

π = plano de projeção.

Considerando a pesquisa feita nas págs. 70 a 73, e adaptando-a ao caso do círculo, podemos ter:

1.ª HIPÓTESE

a) (V) \rightarrow (c) \rightarrow π (fig. 34)

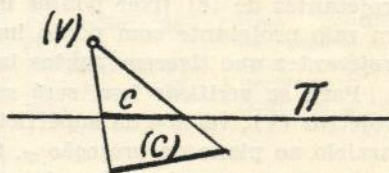


Fig. 34

b) (V) \rightarrow π \rightarrow (c) (fig. 35)

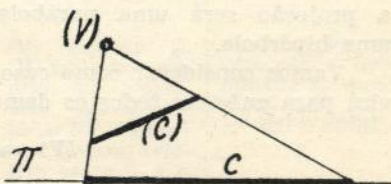


Fig. 35

c) $\pi \rightarrow (V) \rightarrow (c)$ (fig. 36)

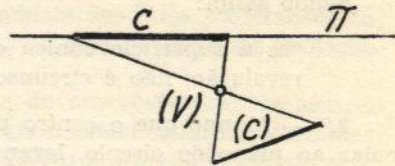


Fig. 36

d) $(V_\infty) \rightarrow \pi \rightarrow (c)$
ou
 $(V_\infty) \rightarrow (c) \rightarrow \pi$ (fig. 37)

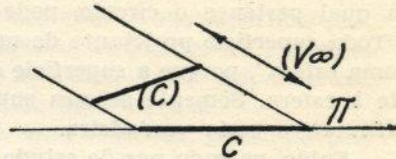


Fig. 37

Em qualquer desses casos teremos sempre o círculo como diretriz circular de uma superfície cônica de projetantes (se (V) é próprio, como nos casos *a*, *b* e *c*) ou cilíndrica (se (V) é impróprio, como no caso *d*) do 2.º grau.

A projeção desse círculo (c) é a curva de secção, pelo plano π , da referida superfície de projetantes do 2.º grau.

Pelos estudos de secções cônicas, em torno do teorema de Apolônio, é possível prever a natureza da secção obtida nessa superfície retilínea do 2.º grau, que sabemos ser, de modo geral, uma cônica. (36)

A natureza dessa secção cônica, ou seja, da curva que chamaremos *c* e que corresponde à projeção de (c) , depende da posição relativa entre π e os raios projetantes de (c) .

Assim, a projeção de (c) em π será, respectivamente, “uma elipse (ou círculo), uma parábola ou uma hipérbole — se nenhum dos raios projetantes de (c) tiver pontos impróprios em π , se houver, apenas um raio projetante com ponto impróprio, ou se forem dois os raios projetantes que tiverem pontos impróprios no plano π ”.

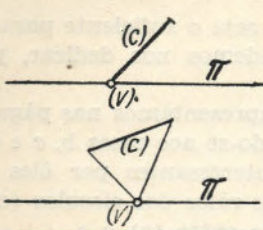
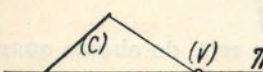
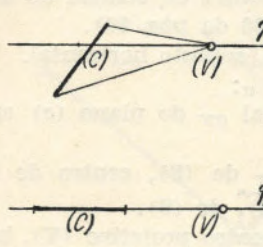
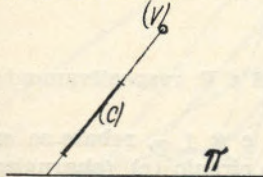
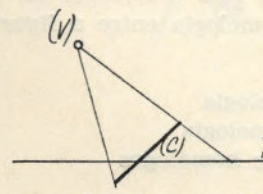
Para se verificar isso, será suficiente fazer passar pelo centro projetivo (V) , vértice da superfície cônica de projetantes, um plano paralelo ao plano de projeção π . Se esse plano paralelo a π só tiver em comum com a superfície de projetantes o vértice (V) , a projeção de (c) será uma elipse; se for tangente à superfície de projetantes, a projeção será uma parábola; se for secante, a projeção será uma hipérbole.

Vamos considerar como caso básico, isto é, como aquele que servirá para enfeixar todos os demais, o relativo à posição:

$$(V) \rightarrow (c) \rightarrow \pi$$

(36) Ver item n.º 2 (pág. 18).

2.ª HIPÓTESE, adaptado a uma figura plana

N.º do caso	Gráfico do conjunto	Posição relativa entre (V), (c) e π	Figura projeção de (c)
1.º		<p>(V) \in π (c) tg. π em (V) ou (V) \in π (c) distinto π</p>	<p>Ponto \equiv (V)</p>
2.º		<p>(V) \in π (c) tg. π em ponto \neq (V)</p>	<p>Reta que passa por (V)</p>
3.º		<p>(V) \in π (c) secante a π ou (c) \in π</p>	<p>Setor do feixe de retas projetantes que têm como centro (V). (A projeção é constituída do ponto (V) e das retas projetantes de (c), que pertencem a π e que passam por (V))</p>
4.º		<p>(V) distinto de π (V) \in σ (V) pode ser próprio ou impróprio.</p>	<p>Reta pontilhada ou segmento de reta pontilhada, pertencente ao traço de σ em π.</p>
5.º		<p>(V) distinto π, (V) pode ser próprio ou impróprio. (V) distinto σ. Não importa a posição relativa entre σ e π</p>	<p>A projeção será uma cônica determinada do mesmo modo que para a 1.ª HIPÓTESE.</p>

(V) = centro projetivo

(c) = círculo a ser projetado, sendo σ seu plano

π = plano de projeção

ou seja, o caso *a* da 1.^a HIPÓTESE, que chamamos *projetiva* (ver pág. 71).

Julgamos que o estudo dêse caso seja o suficiente para o entendimento de todos os demais. Pretendemos nos dedicar, principalmente, a êle.

Por essa razão, no esquema que apresentamos nas págs. 88, 89 e 90, 91, focalizaremos o caso *a*, referindo-se aos casos *b*, *c* e *d* somente para destacar particularidades interessantes por êles apresentadas, como sejam: a relação entre os raios dos círculos (*c*) e *c*, ou as relações de semelhança e afinidade entre (*c*) e *c*.

Projeções do círculo qualquer

1.^o — Projeção cônica do círculo — ou seja, do círculo quando (*V*) é próprio.

Tomemos, como exemplo, a resolução do seguinte

Problema: “Determinar a projeção cônica ou central de um círculo (*c*) num plano π ” (fig. 38 da pág. 83).

Dados: — 1.^o — Plano de projeção π , suposto horizontal.

2.^o — Círculo (*c*) de plano α :

I — traço horizontal $\alpha\pi$ do plano (*c*) em π

II — raio (*r*)

III — projeção em π de (*S*), centro de (*c*), bem como cota $\overline{S(S)_1}$ de (*S*).

3.^o — Projeção em π do (centro projetivo (*V*), bem como sua cota $\overline{M(V)_1}$.

Resolução na épura

Sejam: $\alpha\pi$ o traço de (*c*) em π , *S* e *V*, respectivamente, as projeções ortogonais de (*S*) e (*V*) em π .

Com auxílio de um plano $\beta \perp \alpha\pi$ e $\beta \perp \pi$, rebate-se em (*S*)₂ o centro (*S*) do círculo e com êle todo o círculo (*c*) (charneira $\alpha\pi$).

Por processo semelhante, rebate-se (*V*) em (*V*)₂, tendo como charneira o traço em π de um plano que contém (*V*) $\not\parallel \alpha$.

Determina-se o traço *S*₁ em π do raio projetante de (*S*).

Tem-se, assim, um sistema de homologia entre a figura (*c*) rebatida e sua projeção cônica, sendo:

$$\begin{aligned} \alpha\pi &= \text{eixo de homologia} \\ (V)_2 &= \text{centro de homologia} \\ (S)_2 \text{ e } S_1 &= \text{par de pontos homólogos} \end{aligned}$$

Com aplicação do método de homologia, determina-se, facilmente, a projeção cônica do círculo (*c*), em *c* (destacado em linha grossa).

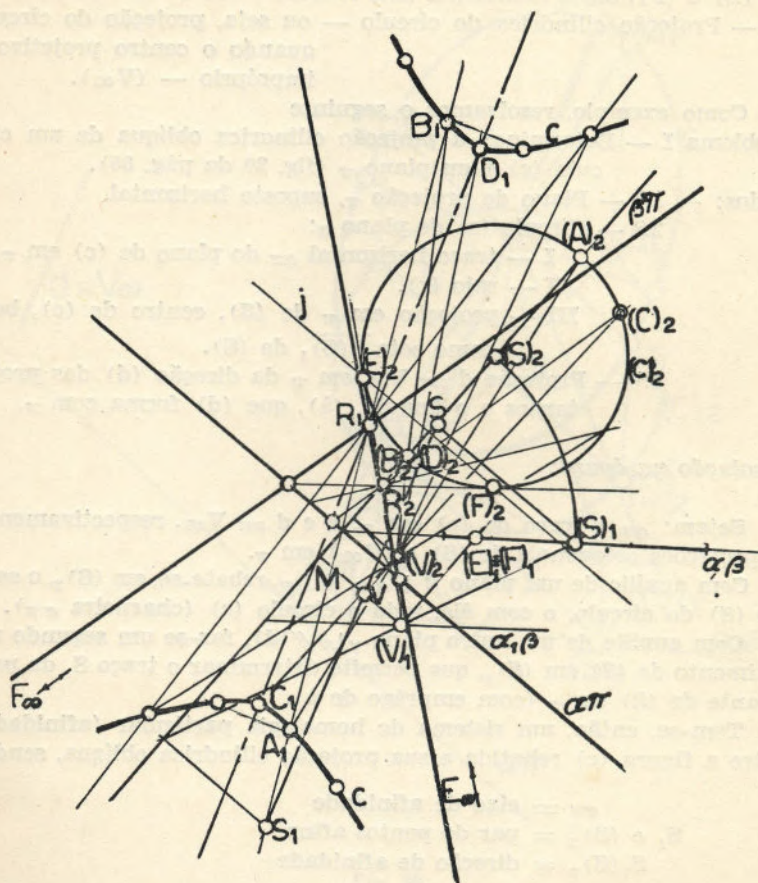


Fig. 38

No exemplo da pág. 82, fig. 38, a projeção cônica do círculo é uma hipérbole, porque duas projetantes (V) (E) e (V) (F) têm traços impróprios em π .

A natureza da projeção fica previamente determinada passando por (V) um plano $\parallel \pi$, conforme ficou dito nas págs. 79 e 80.

Esse plano corta o plano de (c) segundo a reta limite da 1.^a figura (círculo (c)), ou seja, reta j , que determina em (c) os pontos (E) e (F), cujos homólogos são, conforme sabemos, impróprios.

2.^o — Projeção cilíndrica do círculo — ou seja, projeção do círculo quando o centro projetivo é impróprio — (V_∞).

Como exemplo, resolvamos o seguinte

Problema I — Determinar a projeção cilíndrica oblíqua de um círculo (c) num plano π (fig. 39 da pág. 85).

Dados: — 1.^o — Plano de projeção π , suposto horizontal.

2.^o — Círculo (c) de plano α :

I — traço horizontal $\alpha\pi$ do plano de (c) em π ,

II — raio (r),

III — projeção em π de (S), centro de (c), bem como cota $\overline{S(S)}_1$ de (S).

3.^o — Projeção $d \equiv V_\infty$ em π da direção (d) das projetantes e o ângulo, (\hat{a}), que (d) forma com π .

Resolução na épura:

Sejam: $\alpha\pi$ o traço de (c) em π , S e $d \equiv V_\infty$, respectivamente, as projeções ortogonais de (S) e (V_∞) em π .

Com auxílio de um plano $\beta \perp \alpha\pi$, $\beta \perp \pi$, rebata-se, em (S)₂, o centro (S) do círculo, e com êle, todo o círculo (c) (charneira $\alpha\pi$).

Com auxílio de um outro plano $\gamma \perp \pi // (d)$, faz-se um segundo rebatimento de (S) em (S)₃, que permite determinar o traço S₁ da projetante de (S) em π (com emprêgo de \hat{a}).

Tem-se, então, um sistema de homologia particular (afinidade) entre a figura (c) rebatida e sua projeção cilíndrica oblíqua, sendo:

$\alpha\pi$ = eixo de afinidade

S₁ e (S)₂ = par de pontos afins

S₁(S)₂ = direção de afinidade

Considerando a afinidade, determina-se a projeção cilíndrica de (c) em π (destacado por meio de uma linha grossa).

Problema II — Determinar a projeção ortogonal de um círculo (c) num plano π (fig. 40, pág. 86).

Dados: — 1.^o — Plano de projeção π , suposto horizontal.

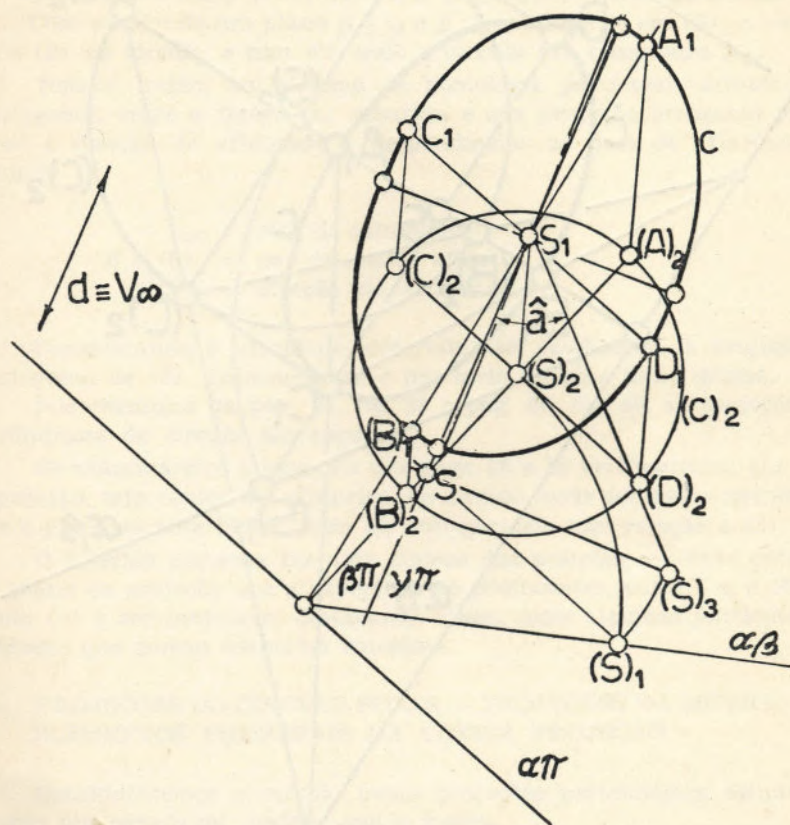


Fig. 39

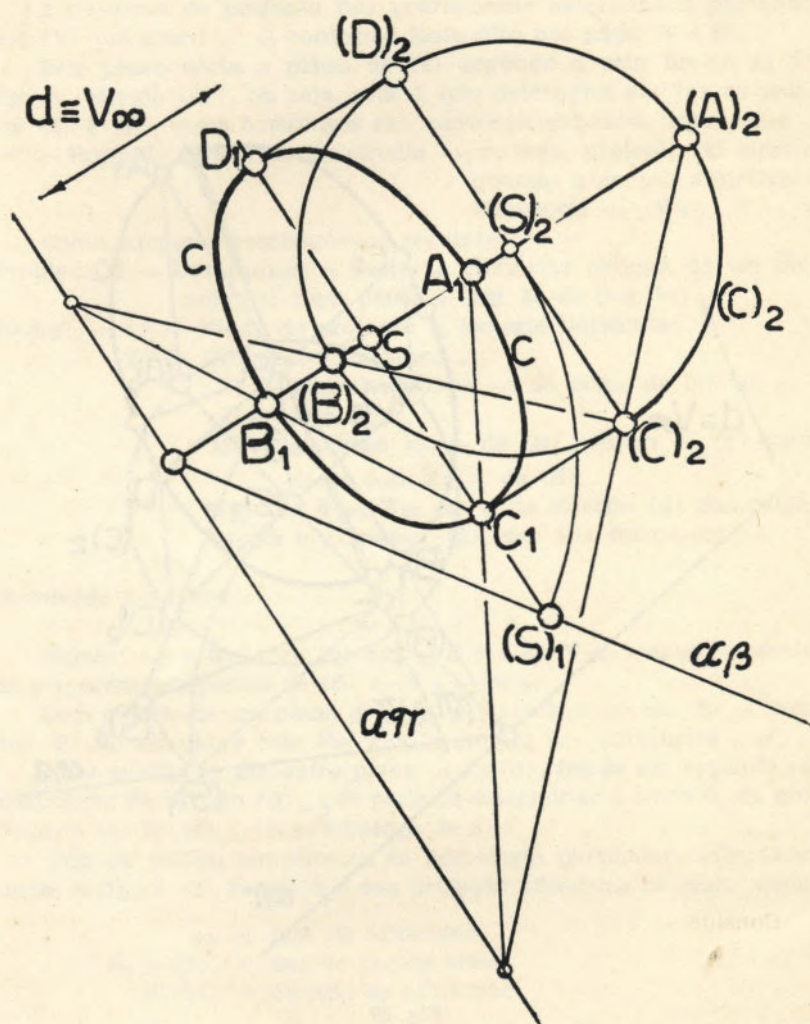


Fig. 40

2.º — Círculo (c) do plano α :

- I — traço horizontal $\alpha\pi$ do plano de (c) em π ,
- II — raio (r),
- III — projeção em π de (S), centro de (c), bem como cota $\overline{S(S)}_1$ de (S).

Resolução na é pura:

Sejam: $\alpha\pi$ o traço de (c) em π S a projeção ortogonal de (S) em π .

Com auxílio de um plano $\beta \perp \alpha$ e $\beta \perp \pi$, rebata-se em (S)₂ o centro (S) do círculo, e com êle, todo o círculo (c) (charneira $\alpha\pi$).

Tem-se, então, um sistema de homologia particular, afinidade ortogonal, entre a figura (c) rebatida e sua projeção ortogonal em que a direção de afinidade é perpendicular ao eixo de afinidade, sendo:

$$\begin{aligned} \alpha\pi &= \text{eixo de afinidade} \\ S \text{ e } (S)_2 &= \text{par de pontos afins} \\ S(S)_2 &= \text{direção de afinidade.} \end{aligned}$$

Considerando a afinidade, determina-se, facilmente, a projeção ortogonal de (c), destacando-se c por meio de uma linha grossa.

Nos exemplos da pág. 85, fig. 39 e pág. 86, fig. 40, as projeções cilíndricas do círculo são elipses.

Se examinarmos o esquema das págs. 88 e 89 verificaremos que a projeção, seja cônica ou cilíndrica, do círculo, pode ser outro círculo,, se o plano secante fôr paralelo ou anti-paralelo com relação a (c).

O referido esquema faz uma síntese das posições relativas entre o plano de projeção π e a superfície de projetantes, entre π e o círculo (c) a ser projetado, destacando ainda, mais algumas particularidades que podem despertar interesse.

5) PROJEÇÕES DO CÍRCULO POLAR — PROJEÇÕES DA ESFERA — ELEMENTOS PRINCIPAIS DA CÔNICA PROJEÇÃO

Consideraremos o círculo cujas projeções pretendemos estudar como um *círculo de contato* com a esfera.

Sendo assim, admitiremos que o raio projetante do centro desse círculo seja sempre perpendicular ao seu plano, o que não invalida a generalização do raciocínio feito e permite uma imediata aplicação às projeções da esfera, que é nosso objetivo atingir (ver págs. 77 e 78), o que se segue ao título "Natureza e traçado das projeções da esfera").

Por ser o círculo de contato da esfera um círculo polar do cen-

ESQUEMA REPRESENTATIVO DAS PRO

(V) ou (V _∞)	Posição relativa entre os raios projetantes e π	Particularidades entre π e (c)	Posição do sistema (V), (c), π
	Projetantes têm traços próprios		Sem interesse
(V)	em π	$\pi //$ (c) ou π anti-paralelo (c)	1.º (V) \rightarrow (c) \rightarrow π 2.º (V) \rightarrow π \rightarrow (c) 3.º $\pi \rightarrow$ (V) \rightarrow (c)
(V)	Uma projetante tem traço impróprio em π ($g_1 // \pi$)		Sem interesse
(V)	Duas projetantes têm traços impróprios em π ($g_1, g_2 // \pi$)		Sem interesse
(V) _∞	Projetantes têm traços próprios em π	$\pi //$ (c) ou π anti-paralelo (c)	Independente

(V) ou (V_∞) = centro projetivo próprio ou impróprio.

c = projeção de (c); quando esta projeção for círculo, seu raio = r_c .

JEÇÕES DE UM CÍRCULO QUALQUER

Relação entre (c) e c	Gráfico da posição do conjunto	Espécie da projeção c
Homologia geral		Elipse
$r_c > r_{(c)}$ $r_c < r_{(c)}$ $r_c \nabla r_{(c)}$ Semehança se $\pi \parallel (c)$ Homologia geral se π anti-paralelo (c)		ou Círculo como caso particular
Homologia geral		Parábola
Homologia geral		Hipérbole
Afinidade		Elipse
$r_c = r_{(c)}$ Congruência, se $\pi \parallel (c)$ Homologia geral, se π antiparalelo (c)		ou Círculo como caso particular

(c) = círculo no espaço, cujo raio = $r_{(c)}$.

π = plano de projeção.

g = projetante.

ESQUEMA REPRESENTATIVO DAS PROJEÇÕES

Limites dos valores de \hat{a} e \hat{v} (P) ou (P ∞)	Posição relativa entre \hat{a} e \hat{v}		Posição do sistema (V), (p), π
	$\hat{a} \leq 90^\circ$; $\hat{v} < 90^\circ$	Particularidades entre π e (p)	
(P) = ponto próprio	$\hat{a} > \hat{v}$		Sem interesse
	$\hat{a} = 90^\circ$ como caso particular	$\pi // (p)$	1. ^o (V) \rightarrow (p) \rightarrow π 2. ^o (V) \rightarrow π \rightarrow (p) 3. ^o π \rightarrow (V) \rightarrow (p)
	$\hat{a} = \hat{v}$		Sem interesse
	$\hat{a} < \hat{v}$		Sem interesse
(P ∞) = ponto impróprio	$\hat{a} < 90^\circ$		Independente
$\hat{a} = 90^\circ$ como caso particular	$\pi // (p)$		

\hat{a} = ângulo de π com (P) (S), sendo sempre $90^\circ \geq \hat{a} \gtrsim \hat{v}$
 e $\hat{a} > 0$
 (P) ou (P ∞) = polo próprio ou impróprio
 p = projeção de (p); quando esta projeção fôr círculo, seu raio = r_p

DE UM CÍRCULO POLAR COM RELAÇÃO A ESFERA

Relação entre (p) e p	Gráfico de posição do conjunto	Espécie da projeção p
Homologia geral		
<p>1.º) $r_n > r_{(n)}$</p> <p>2.º) $r_n < r_{(n)}$</p> <p>3.º) $r_n \approx r_{(n)}$</p> <p>Semelhança (homotetia) nos 3 casos</p>	<p>1º)</p> <p>2º)</p> <p>3º)</p>	<p>Elipse</p> <p>ou</p> <p>Círculo</p> <p>como caso particular</p>
Homologia geral	<p>4º)</p>	Parábola
Homologia geral	<p>5º)</p>	Hipérbole
Afinidade	<p>6º)</p>	<p>Elipse</p> <p>ou</p>
<p>$r_n = r_{(n)}$</p> <p>Congruência</p>	<p>7º)</p>	<p>Círculo</p> <p>como caso particular</p>

π = plano de projeção

$\hat{\alpha}$
 \hat{v} = semi-ângulo da superfície cônica de revolução de projetantes

(p) = círculo polar de (P), relativo a uma esfera; $r_{(p)}$ = raio;

(S) = centro

tra projetivo ou polo, denominaremos êsse círculo de (p) , sendo (P) o seu polo e p sua projeção em π . Chamaremos (S) ao centro de (p) e θ à esfera de centro (O) , em relação à qual foram considerados (P) e (p) .

Sendo a superfície de projetantes sempre de revolução, é interessante considerar a inclinação do plano secante, ou plano de projeção π , em relação ao eixo da superfície, ou seja, a reta projetante do centro (S) do círculo (p) . Essa reta, $(P)(S)$ ou $(P)(O)$, formará com o plano de projeção π um ângulo $(\hat{\alpha})$, e com qualquer projetante da superfície de projetantes (ou geratriz da superfície de revolução), outro ângulo $(\hat{\nu})$.

No esquema das págs. 90 e 91, organizado segundo o mesmo critério já apresentado para o "esquema representativo das projeções de um círculo qualquer", das págs. 88 e 89, levamos em consideração a relação entre $\hat{\alpha}$ e $\hat{\nu}$, por se tornar mais simples, visto se tratar do caso particular de uma superfície de revolução. Estaremos, com isso, fazendo uma aplicação direta do teorema de Apollonius, nos termos em que êle é geralmente apresentado.

Êsse teorema foi, posteriormente, generalizado e aplicado a uma superfície cônica qualquer do 2.º grau. Baseados nessa generalização, organizamos o esquema das págs. 88 e 89.

Então, aplicando o teorema de Apollonius à projeção de um círculo polar (p) , poderemos ter, de um modo geral, a projeção p , segundo uma:

$$\begin{aligned} \text{elipse, se } \hat{\alpha} &> \hat{\nu} \\ \text{parábola, se } \hat{\alpha} &= \hat{\nu} \\ \text{hipérbole, se } \hat{\alpha} &< \hat{\nu} \end{aligned}$$

Os casos particulares estão previstos no esquema das págs. 90 e 91 (1.ª HIPÓTESE) ou nos esquemas das págs. 72 e 81 que correspondem à 2.ª HIPÓTESE. Como êsses casos não oferecem dificuldades maiores, não faremos estudo especial dêles, a não ser para o caso da projeção cilíndrica (quando (V) é impróprio) em que p é uma elipse, por uma questão de coerência com a orientação seguida, já que analisamos a projeção cilíndrica e a ortogonal de um círculo qualquer (ver págs. 85 e 86, figs. 39 e 40). Nosso propósito, ao analisar tais casos é, apenas, o de salientar a perfeita identidade com as projeções de uma esfera que tem (p) como círculo de contato.

1.º) *Projeção cônica de (p)*

Problema: Determinar a projeção cônica p de um círculo (p) polar de um ponto (P) com relação à esfera θ (fig. 41, pág. 93; fig. 42, pág. 94; fig. 43, pág. 95).

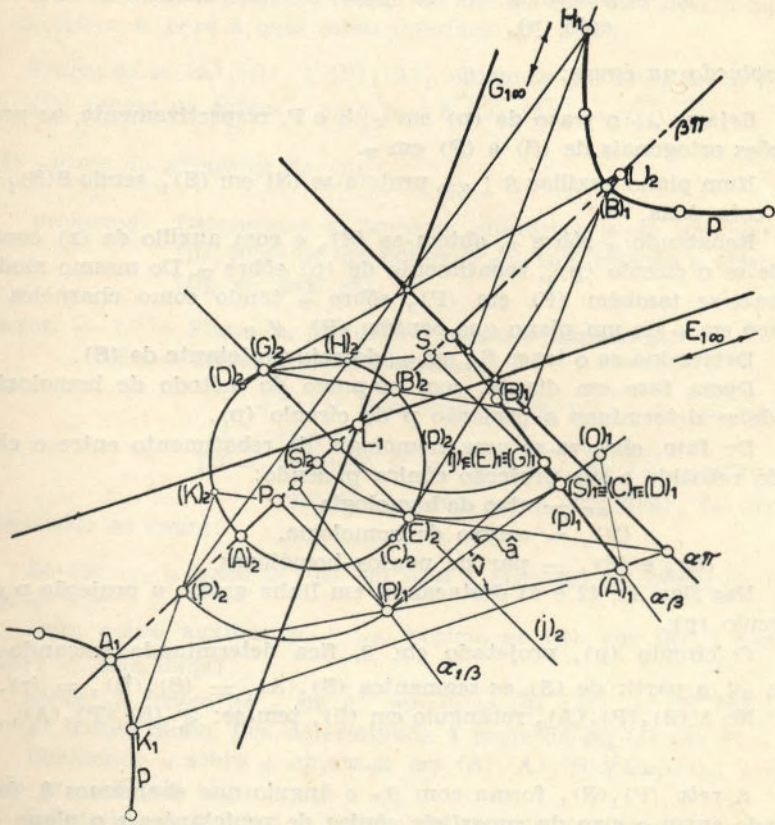


Fig. 43

- Dados: 1.º — Plano de projeção π , suposto horizontal.
 2.º — Círculo (p) de plano α :
 I — traço horizontal $\alpha\pi$ do plano de (p) em π ,
 II — raio (r),
 III — projeção em π de (S), centro de (p), bem como cota $\overline{S(S)}_1$ de (S).
 3.º — Distância (l) do polo (P) ao centro (S) do círculo (p).

Resolução na épura:

Sejam: $\alpha\pi$ o traço de (p) em π . S e P, respectivamente, as projeções ortogonais de (S) e (P) em π .

Num plano auxiliar $\beta \perp \alpha\pi$, projeta-se (S) em $(S)_1$, sendo $\overline{S(S)}_1 =$ cota dada.

Rebatendo α sobre π , obtem-se $(S)_2$ e com auxílio de (r) constrói-se o círculo $(p)_2$, rebatimento de (p) sobre π . Do mesmo modo, rebate-se também (P) em $(P)_2$ sobre π tendo como charneira o traço em π de um plano que contém (P) // α .

Determina-se o traço S_1 , em π , do raio projetante de (S).

Dessa fase em diante, com emprêgo do método de homologia, pode-se determinar a projeção p do círculo (p).

De fato, observa-se uma homologia de rebatimento entre o círculo rebatido e sua projeção cônica p, sendo:

$\alpha\pi =$ eixo de homologia,

$(P)_2 =$ centro de homologia,

$(S)_2$ e $(S)_1 =$ par de pontos homólogos.

Nas figs. 41, 42 e 43 destacamos em linha grossa a projeção p do círculo (p).

O círculo (p), projetado em β , fica determinado traçando-se em $\alpha\beta$, a partir de (S) os segmentos $\overline{(S)_1(A)_1} = \overline{(S)_1(B)_1} = (r)$.

No $\Delta (S)_1(P)_1(A)_1$ retângulo em (S), tem-se: $\sphericalangle (S)_1(P)_1(A)_1 =$
 $= \hat{\nu}$

A reta $(P)_1(S)_1$ forma com $\beta\pi$ o ângulo que chamamos $\hat{\alpha}$, formado entre o eixo da superfície cônica de projetantes e o plano de projeção (ver págs. 87, 90 e 91).

Conforme já foi exposto, pela comparação entre êsses dois ângulos, podemos reconhecer previamente a natureza da projeção p.

No desenho da pág. 93, fig. 41, p é uma elipse, porque $\hat{\alpha} > \hat{\nu}$; no da pág. 94, fig. 42, temos p = parábola, verificando-se que $\hat{\alpha} = \hat{\nu}$ e

finalmente, na pág. 95, fig. 43, $\hat{\alpha} < \hat{\nu}$, caso em que p = hipérbole.

No caso em que p é uma elipse, a reta limite j (da 1.ª figura) é

exterior ao círculo rebatido (de centro $(S)_2$; no da parábola, ela é tangente, e no da hipérbole ela é secante ao referido círculo.

Note-se que $j \equiv \alpha\pi_1 =$ traço em α de um plano $\pi_1 // \pi$, confirmando-se, assim, o princípio já referido de reconhecimento prévio da natureza da projeção (ver pág. 80, § 6.º).

Projeção cônica da esfera

Determinada a projeção cônica do círculo (p) , está determinada a da esfera θ , para a qual estão referidos (p) e (P) .

Traçando-se $(A)_1(O)_1 \perp (P)_1(A)_1$, obtem-se em $(P)_1(S)_1$ o ponto $(O)_1$ centro da esfera θ cujo raio é $\overline{(O)_1(A)_1} = \overline{(O)_1(B)_1}$.

2.º *Projeção cilíndrica de (p)*

Problema: Determinar a projeção cilíndrica p de um círculo (p) polar de um ponto (P_∞) com relação à esfera θ (fig. 44, pág. 98).

Dados: — 1.º — Plano de projeção π , suposto horizontal.

2.º — Círculo (p) de plano α :

- I — Traço horizontal $\alpha\pi$ do plano de (p) em π ,
- II — raio (r) ,
- III — projeção S , no plano π , de (S) , centro do círculo (p) , bem como cota $\overline{S(S)}_1$ de (S) .

Resolução na écura:

Sejam: $\alpha\pi$ o traço de (p) em π , S a projeção ortogonal de (S) em π .

Num plano auxiliar $\beta \perp \alpha\pi$, projeta-se (S) em $(S)_1$, (sendo $\overline{S(S)}_1 =$ cota dada).

Sobre $\alpha\beta$ (traço de α em β), marca-se $\overline{(S)_1(A)_1} = \overline{(S)_1(B)_1} = (r)$. Dêsse modo, fica determinada a projeção de (c) em β .

Rebatendo α sobre π , obtém-se em $(S)_2(A)_2(B)_2(C)_2(D)_2$, o círculo (p) rebatido sobre π .

Determina-se o traço S_1 , em π , do raio projetante de (S) , sendo $(P_\infty)(S)_1 \perp \alpha$. Logo $(P_\infty)_1 \perp \alpha\beta$ e $P_\infty \perp \alpha\pi$, que correspondem às projeções, respectivamente, em β e em π da direção de todos os raios projetantes de (p) , visto tratar-se de projeção cilíndrica.

Dessa fase em diante, com emprêgo do método de homologia, pode-se determinar a projeção p do círculo (p) .

De fato, observa-se um caso particular de homologia, afinidade ortogonal, entre a figura (p) rebatida e sua projeção cilíndrica, ambas no plano π , sendo a direção de afinidade perpendicular a $\alpha\pi$.

Assim temos:

$$\begin{aligned} \alpha\pi &= \text{eixo de afinidade} \\ (S)_1 \text{ e } (S)_2 &= \text{par de pontos afins} \\ (S)_1(S)_2 &= \text{direção de afinidade} \end{aligned}$$

Determina-se, facilmente, pela afinidade, a projeção p , destacada em linha grossa.

Projeção cilíndrica da esfera

Tratando-se de projeção cilíndrica, o polo de (p) é impróprio, de modo que, para a esfera θ de referência, que tem (O) como centro, (p) será um círculo máximo; portanto, (S) e (O) são coincidentes. Logo: raio $\theta =$ raio de $(p) = \overline{(S)_1(A)_1}$.

Elementos principais da cônica p projeção de (p)

Pelo teorema de Daudelin-Quetelet, assim enunciado:

- “A secção de um cone circular, por um plano tangente a uma esfera inscrita nesse cone, é uma cônica que tem um foco no ponto de contato e , para diretriz correspondente, a intersecção do plano secante e do plano da circunferência de contato da esfera e do cone”,

verifica-se que:

1.º — *Eixo focal* —

o eixo focal da cônica p pertence a β , ou seja ao plano que, sendo plano de simetria da superfície cônica de projetantes, é perpendicular a α e a π (porque deve conter os dois raios da esfera que são, respectivamente, perpendiculares a π e a α). Portanto, o “eixo focal das cônicas pertence a $\beta\pi$ ”.

2.º — *Focos e diretriz* —

- a — Quando π é tangente à esfera θ , um dos focos de p , bem como sua diretriz, ficam determinados imediatamente pelo teorema já citado de Daudelin-Quetelet;
- b — Se π não for tangente à esfera θ , será paralelo a um plano π_1 , tangente a θ , que determina na superfície cônica de projetantes uma segunda cônica p_1 , homotética da primeira (37). O foco e a

(37) Ver pág. 28.

diretriz da cônica p pertencerão, respectivamente, aos traços projetantes do foco e da diretriz da cônica p_1 , em π e relativamente a (P) .

Se (P) fôr impróprio (como é o caso da fig. 44, pág. 98), tudo que ficou observado relativamente aos elementos da cônica p , ainda é verdadeiro, visto que do ponto de vista teórico, a superfície cilíndrica é um caso particular da superfície cônica.

6) CASOS PARTICULARES DE PROJEÇÃO DA ESFERA

Comparando os quadros das págs. 88 e 90, verifica-se, na coluna Particularidades entre π e (c) ", pág. 88 ou "Particularidades entre π e (p) ", pág. 90, que na primeira está prevista a posição:

$\pi // (c)$ ou π anti-paralelo de (c)

enquanto que, na segunda, somente se apresenta:

$\pi // (p)$

Isto é consequência de serem circulares, nas superfícies cônicas ou cilíndricas de revolução, somente as secções feitas por planos perpendiculares ao eixo da superfície (págs. 77 a 79).

Assim, enquanto na superfície cônica ou cilíndrica do 2.º grau, não de revolução, é possível obter duas direções de planos cíclicos (anti-paralelos), as de revolução só apresentam uma direção.

Sabe-se que, na superfície cônica ou cilíndrica de revolução, as secções anti-paralelas que são circulares têm a mesma direção e, portanto, passam a ser paralelos (págs. 52 a 57).

Como podemos concluir, o cone de revolução é um caso particular do cone geral do 2.º grau ou seja, aquêle que admite secção perpendicular ao 1.º eixo de simetria (eixo principal), na forma de um círculo (quando, no caso geral é sempre uma elipse). (38)

Como o esquema da pág. 90, estuda o círculo polar, ou seja aquêle cujas projetantes (raios polares) determinam uma superfície cônica ou cilíndrica de revolução, nêle não interessa especificar o caso das secções anti-paralelas.

Assim por essa razão, concluimos que:

"A projeção cônica ou cilíndrica de uma esfera só será um círculo, se o círculo de contato fôr paralelo ao plano de projeção, ou: se a projetante do centro do círculo de contato fôr perpendicular ao plano de projeção".

(38) Ver págs. 47 e 48 (Teorema).

VIII — CONCLUSÕES

1.ª) RELATIVAMENTE ÀS PROJEÇÕES DE UMA QUÁDRICA:

“Projetar uma quádriga é projetar a cônica polar
 |—————| “A projeção de cujo polo é o centro dêsse sólido” a projeção da

— Quando a quádriga é uma esfera:

a) “Projetar uma esfera é projetar o círculo
 |—————| “A projeção de a projeção do

polar, cujo polo é o centro projetivo dêsse sólido”.

b) “A projeção de uma esfera é a transformação homológica espacial do círculo polar da esfera, sendo seu polo correspondente, o centro de homologia; o eixo de homologia é a reta de interseção entre o plano do círculo polar e o plano de projeção”.

c) Com exceção dos casos apresentados na pág. 72:

“A projeção de uma esfera será uma elipse (círculo como caso particular), parábola ou hipérbole, segundo o raio projetante (raio polar) do seu centro forme com o plano de projeção um ângulo

$$\hat{\alpha} \begin{matrix} > \\ \geq \\ < \end{matrix} \hat{\nu}$$

sendo $\hat{\nu}$ o ângulo formado por êste mesmo raio com qualquer dos raios da periferia”.

d) “A perspectiva de uma esfera é um círculo desde que o centro dessa esfera pertença ao raio visual principal”.

2.ª) RELATIVAMENTE À ASSOCIAÇÃO ENTRE O SISTEMA “CÍRCULO POLAR DE UMA ESFERA” E O SISTEMA “CÔNICA POLAR DE UMA QUÁDRICA”:

“O sistema cônica polar de uma quádriga pode ser considerado como transformada homológica espacial do sistema círculo polar da esfera”. (39)

(39) A particularização para a esfera é conveniente, por ser êsse sólido padrão.

Um cone de 2.^o grau, não de revolução, não é circunscritível numa esfera, mas, do mesmo modo que uma esfera pode se transformar, pela homologia, num elipsóide, parabolóide ou hiperbolóide, "um cone de revolução circunscrito numa esfera, pode se transformar, pela homologia, num cone do 2.^o grau, não de revolução, circunscrito num elipsóide, parabolóide ou hiperbolóide, em que se transforma a esfera",

A título de divulgação, faremos em "APLICAÇÕES", pág. 104, uma iniciação desse estudo, no caso particular da transformação homológica do sistema: "esfera-cone de revolução circunscrito" em sistema: "elipsóide-cone geral do 2.^o grau, não de revolução", ou seja, da relação entre o cone de revolução e o cone do 2.^o grau não de revolução, quando a esfera inscrita no primeiro se transforma em elipsóide inscrito no segundo.

Entretanto, esclarecemos que o estudo comporta amplitude muito maior e somente êle daria lugar a nova tese.

IX — APLICAÇÕES

1) NO CAMPO DA PERSPECTIVA E SOMBRA, DA GEOMETRIA DESCRITIVA E PROJETIVA

A — Na resolução de problemas de sombra da esfera:

a) Determinação da linha separatriz de luz e sombra (págs. 73 a 76).

b) Determinação da sombra projetada:

A posição é $(V) \rightarrow \theta \rightarrow \pi$ (pág. 70, posição *a*), considerados os casos estudados nos quadros das págs. 72 e 90, 91, e dos problemas das págs. 87 a 100.

Esta aplicação abrange a hipótese da sombra proveniente de foco luminoso natural ou artificial (sombra cilíndrica ou cônica).

B — Na resolução de problemas de perspectiva da esfera isolada ou em conjunto com outras figuras:

A posição do sistema é $(V) \rightarrow \pi \rightarrow \theta$ (pág. 70, posição *b*)

a) Se a esfera está isolada, sua perspectiva é um círculo desde que o raio visual principal passe pelo seu centro (pág. 90, e item *d* da pág. 101).

b) Se a esfera pertence a um conjunto de várias figuras, de modo que o raio visual principal não passe mais pelo seu centro, sua perspectiva terá um dos aspectos focalizados no quadro da pág. 90. Para resolução do problema, empregar raciocínio equivalente ao utilizado para os problemas estudados nas págs. 87 a 100, adaptados ao sistema $(V) \rightarrow \pi \rightarrow \theta$

C — Como método de raciocínio auxiliar na resolução de problemas de Geometria Descritiva, como sejam: tangência, secções planas, contórno aparente, intersecções, etc..

a) Construção de planos tangentes: a duas ou três esferas, à esfera e a uma outra quádrlica qualquer, etc..

- b) Determinação da secção plana de uma quádrlica qualquer, etc..
- c) Contorno aparente da esfera e de inúmeros outros sólidos.
- d) Vários problemas de intersecções de quádrlicas.

NOTA — Nos itens A, B e C, limitamo-nos a indicar algumas das inúmeras aplicações do estudo feito sobre "Projeções da esfera", porque tais aplicações são divulgadas em muitos livros especializados nesses assuntos; entretanto, no que diz respeito à associação entre o sistema círculo polar da esfera e cônica polar de uma quádrlica, encontramos na bibliografia que consultamos matéria geral de fundamentação e, como aplicação, algumas indicações sobre a transformação homológica da esfera. Por esta razão, demos maior desenvolvimento a essa associação. Esclarecemos, porém, mais uma vez, que o assunto comporta amplo estudo, do qual fazemos, apenas, uma introdução.

D — *No estudo da transformação homológica do sistema: "Superfície cônica de revolução circunscrita na esfera" em sistema: "Superfície cônica do 2.º grau, não de revolução, circunscrita num elipsóide em que se transforma a esfera".*

- a) *Estudo da transformação homológica da superfície cônica de revolução em uma superfície cônica geral do 2.º grau, não de revolução:*

Seja a superfície cônica de revolução de vértice (V) cuja diretriz circular (c) de centro (O) tem $\overline{(O)(A)} \equiv \overline{(O)(B)}$ como raio (fig. 45, pág. 105).

Admitamos que esta superfície seja representada dentro do sistema mongeano com seu eixo (V)(O) vertical, sua diretriz circular (c) pertence a π .

Para se conseguir fazer a transformação homológica desta superfície de revolução numa superfície cônica geral do 2.º grau, não de revolução, bastará que se tenha como dados:

- 1.º — o centro (P) de homologia;
- 2.º — o plano central ou plano de pontos unidos μ , suposto de tópo;
- 3.º — o homólogo (T_1) de um ponto qualquer (T) da diretriz circular (c).

Para facilitar a construção suporemos complanares (P) e (c),

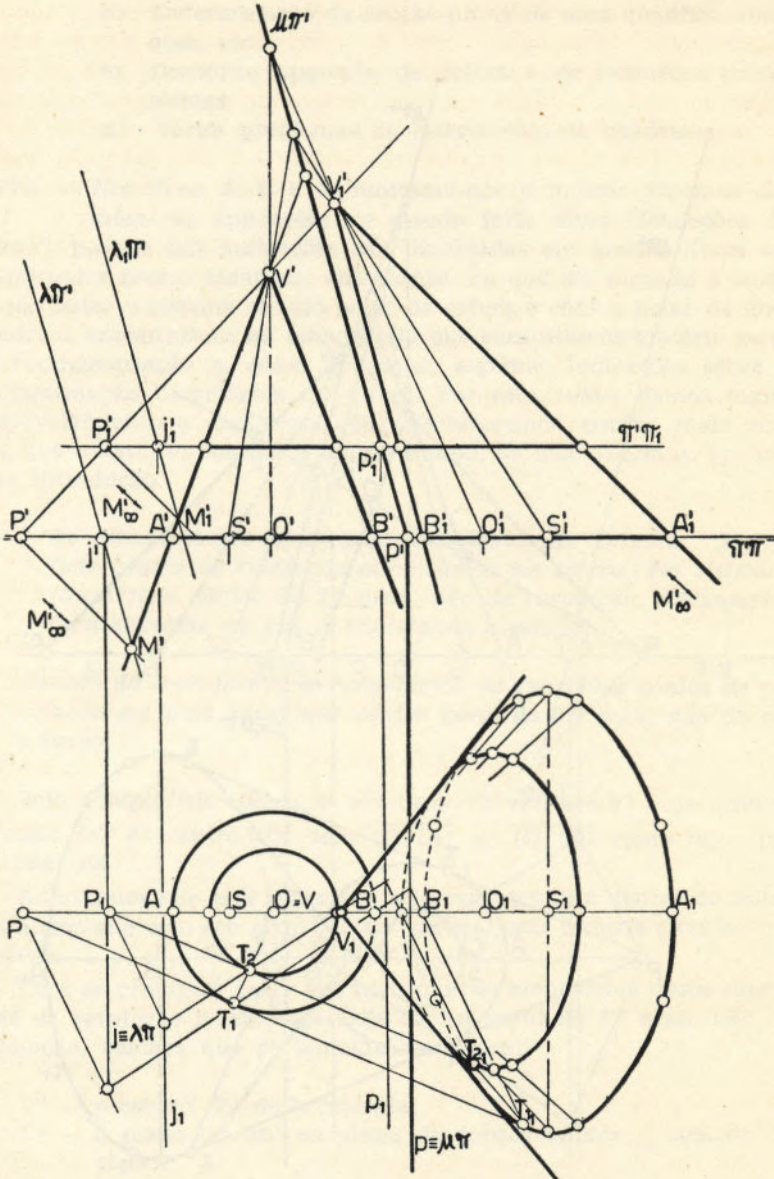


Fig. 46

sendo esta última determinada pelo plano π na superfície cônica. Logo o plano π é plano do centro de homologia para o sistema superfície cônica de revolução superfície geral do 2.º grau não de revolução no qual π , secante a ambas as superfícies é ainda, o suporte da homologia plana que permite determinar a cônica diretriz da 2.ª superfície. Esta cônica (no exemplo, elipse) é a transformada homológica do círculo (c), sendo eixo de homologia o traço (p) $\equiv \mu\pi$ de μ em π .

Construída a diretriz (c_1), homóloga de (c) para determinar (V_1) homólogo de (V) bastará determinar a homóloga (V_1) (A_1) de uma geratriz (V) (A) por exemplo, da superfície cônica de revolução. O vértice (V_1) pertence ao raio de homologia (P) (V).

Os planos limites (λ) e (ι), este último não representado nas figs. 45 e 46 (págs. 105 e 106) são paralelos ao plano central e contêm as retas limites do sistema de homologia plana círculo (c) elipse (c_1).

Propriedades — (deduzidas das propriedades gerais de homologia no espaço).

- 1.ª) — Todo plano do centro de homologia secciona ambas as superfícies segundo figuras planas homólogas que admitem (P) como *centro de homologia*; o traço do plano do centro de homologia no plano central, como *eixo* de homologia; os traços do plano do centro de homologia nos planos limites como retas limites.
- 2.ª) — O raio de homologia (P) (V) é o lugar geométrico dos centros de homologia dos diversos sistemas de homologia plana que permitem associar as duas superfícies.

Cada centro de homologia contido em (P) (V) funciona como centro de uma estrela de planos que cortam ambas as superfícies segundo curvas homólogas que têm o eixo de homologia na intersecção de seu plano com o plano central, mas cujas retas limites não pertencem mais aos planos limites do sistema que admite (P) como centro.

Verifica-se que cada centro de homologia tem seus planos limites distintos, embora sejam todos paralelos entre si (visto serem paralelos ao plano central).

Na fig. 46, para o sistema que tem (P) como centro, os planos limites são λ e ι (este último não representado na figura), para o sistema que tem R^1 como centro, os planos limites são λ^1 e ι^1 (não representado) e, assim por diante.

Então podemos destacar os seguintes lugares geométricos:

Reta (P)(V) — lugar geométrico dos centros de homologia que permitem associar as duas superfícies cônicas do 2.º grau;

Plano central — lugar geométrico de todos os eixos de homologia dos inúmeros sistemas planos cujos centros pertencem a (P)(V);

Planos limites — relativos a um centro de homologia, são os lugares geométricos das retas limites de todos os sistemas planos da estrêla que admite como centro, o centro de homologia.

Para cada centro de homologia, teremos um par de planos limites.

b) *Estudo da transformação homológica de uma superfície cônica de revolução circunscrita numa esfera em superfície cônica do 2.º grau circunscrita num elipsóide em que se transforma a esfera:*

Por transformação homológica do espaço, pode-se admitir que um sistema de esfera e cone de revolução nela circunscrito se transforme num sistema elipsóide e cone geral do 2.º grau nele circunscrito.

Seja o cone de revolução de vértice (V) circunscrito numa esfera de centro (O), fig. 47 (pág. 111). O círculo (c) (da base dêsse cone), cujo plano é π tem (S) por centro, sendo portanto: (S)(V) \perp π .

Façamos o estudo da transformação homológica dêste sistema, adotando como método de representação auxiliar o do sistema mon-geano, conforme já procedemos no item a.

Sejam dados, ainda, os seguintes elementos que permitem realizar a operação de transformação homológica:

- 1 — Ponto (P) — centro de homologia — que suporemos pertencer a π .
- 2 — Plano μ — plano central — que suporemos de tópo e passando por (V).
- 3 — Plano λ — plano limite da 1.ª figura; seu traço em π suporemos exterior a (c) a fim de que a transformada (c_1), de (c), seja uma elipse, para mais facilmente se perceber a superfície cônica que se pretende obter.

Se, por hipótese, são complanares (P) e (c), $\varepsilon \pi$, a transformada homológica de (c) pertence também a π e temos a homologia plana que relaciona a diretriz circular (c), do cone de revolução com a diretriz elíptica (c_1) do cone do 2.º grau, não de revolução.

Nessa homologia plana, temos:

- 1 — (P) — centro de homologia dos dois sistemas (plano e sólido).
- 2 — $p \equiv \mu\pi$ eixo de homologia — resultante da intersecção de μ com π .
- 3 — $j \equiv \lambda\pi$ reta limite da 1.^a figura, que por hipótese é exterior a (c).

Imediatamente determina-se (c_1), elipse homóloga de (c) e a reta $i = \iota\pi$, reta limite da 2.^a figura. O plano ι , limite da 2.^a figura $\parallel \lambda \parallel \mu$ passa por i.

Se (V) $\varepsilon\mu$, (V^1) \equiv (V).

Conhecidos a diretriz elíptica (c_1) e o vértice (V^1), está determinado o cone do 2.^o grau, não de revolução, homólogo do cone de revolução dado. Esses dois cones definem duas superfícies cônicas que lhes pertencem e que podem ser consideradas, a segunda como resultante da primeira, por transformação homológica, dentro do sistema determinado.

Conforme já verificamos (item a), (P) (V) é a reta dos centros de homologia de tôdas as *homologias planas* que permitem associar as secções planas da superfície cônica de revolução às da superfície cônica do 2.^o grau não de revolução (situadas, conseqüentemente, no mesmo plano secante que é o plano em que se verifica a homologia plana).

Daí: — “O plano secante a duas superfícies cônicas do 2.^o grau, entre si homólogas, determina nessas superfícies curvas cônicas, também entre si homólogas, cujo centro e eixo de homologia são os traços, respectivamente, da reta dos centros de homologia e do plano central no plano secante”.

De fato (fig. 46), observa-se que os planos que passam por esta reta (P) (V) formam um feixe de planos que poderemos chamar “feixe dos planos de pares das geratrizes homólogas”. Se cortarmos esse feixe por um plano π^1 , resultará um feixe de retas, traços dos diversos planos do feixe em π^1 e cujo centro é o traço, R^1 , de (P) (V) no plano π^1 . Sobre essas retas, estarão os traços das diversas geratrizes (e demais retas) homólogas, sendo portanto, pares de pontos homólogos.

Note-se que o eixo de homologia (p_1) deverá pertencer à intersecção do plano central com π^1 , visto constituir este plano o lugar geométrico dos pontos de intersecção e das retas de intersecção de tôdas as retas e planos homólogos, respectivamente.

Já analisamos, no item a, que se o plano das figuras homólogas não pertencer ao centro de homologia (P) suas retas limites não pertencerão ao plano limite λ , conservando-se, entretanto, paralelas a esse plano. Onde:

1) — “O plano limite da 1.^a figura, λ está em função do centro (P) e é paralelo ao plano central μ , contendo a reta limite, j do sistema plano de homologia que passar por (P) (no exemplo da fig. 47 é o plano π)”.

2) — “Se o plano de homologia não contiver (P), sua reta limite também não pertencerá ao plano limite λ , conservando-se entretanto, paralela a esse plano”.

Portanto, se varia o centro de homologia de (P) para (R¹) a reta limite passará de (j) para (j_1) (fig. 46).

Conclusão:

O plano limite λ (1.^a figura) é determinado em função da homologia do espaço relativa a um *único* centro de homologia, sendo o lugar geométrico das retas limites como (j), das homologias planas que passam pelo centro de homologia.

Se o centro de homologia do espaço for (R¹), o plano limite se deslocará de λ para λ^1 , porque para esse centro, uma das retas limites das homologias planas que passam por (P¹) é (j^1).

Na fig. 46, a título de verificação, quanto à posição do plano limite λ (1.^a figura), procuramos determinar o homólogo de um ponto impróprio M_∞ da geratriz (V¹) (A¹), traçando por (P) um raio (P) (M) paralelo a (V¹) (V _{∞}) ou (V¹) (A). Este raio determina em (V) (A) o ponto (M) que pertence a λ .

A esfera de centro (O) inscrita na superfície cônica de revolução se transforma no elipsóide inscrito na superfície cônica do 2.^o grau não de revolução. Isso, porque o plano limite da 1.^a figura λ não corta a esfera. De fato, a reta limite j do sistema círculo (c) — elipse (c₁) é o traço de λ em π , sendo λ plano limite da 1.^a figura. Este plano, paralelo a μ , só poderá ser exterior a esfera de centro (O) porque ela está compreendida entre (V) e (c).

c) *Determinação do elipsóide transformada homológica da esfera* — (fig. 47)

Sendo a tangência uma propriedade que se transfere por projeção, podemos encontrar os elementos determinantes do elipsóide com o emprêgo do recurso da tangência.

Determinemos a transformada homológica do círculo de contato entre a superfície cônica de revolução e a esfera. O plano α deste círculo encontra o plano μ , segundo uma reta $\alpha\mu \equiv \alpha_1\mu$ por onde passará o plano α_1 homólogo de α . O plano α^1 conterá a transformada homológica do círculo de contato, que será a curva de contato entre o elipsóide e a superfície cônica do 2.^o grau não de revolução. O

plano α^1 será um plano de tópo, visto $\alpha_\mu \equiv \alpha_1\mu$ ser de tópo. Para determinar α^1 será suficiente conhecer o homólogo de um ponto como $3'$ ou $4'$, pertencente ao círculo de contato. Para isso, bastará traçar os raios de homologia relativos a P' , visto serem facilmente conhecidos os pares de geratrizes homólogas, como $V'A'$ e $V_1'A_1'$; $V'B'$ e $V_1'B_1'$. Assim, o raio $P'3'$ determina em $V_1'A_1'$ o ponto $3'_1$, homólogo de $3'$ e o raio $P'4'$, em $V_1'B_1'$, o ponto $4'_1$, homólogo do $4'$. O plano α^1 conterá $\alpha^1\mu$ e $3'$, bem como todos os pontos homólogos dos pontos contidos em α .

Com o emprêgo do mesmo raciocínio utilizado para os pontos $3'_1$, $4'_1$, determina-se todos os demais pontos da curva, que será uma elipse (pois seus raios projetivos não têm pontos impróprios) e pertence, conforme já vimos, ao plano α_1 , homólogo de α com relação ao plano μ .

O elipsóide tangenciará a superfície cônica do 2.º grau não de revolução segundo a elipse que passa pelos pontos $3'_1, 4'_1$.

Para a construção de outros pontos do elipsóide, podemos traçar na 1.ª figura (sistema superfície cônica de revolução-esfera) um plano β , tangente à esfera em $T'T$. Seu homólogo β_1 conterá T'_1T_1 (homólogo de $T'T$), ponto de tangência do elipsóide com β_1 .

Para facilitar a construção do plano β_1 , fizemos que β passasse por $R'R$, traço do raio $P'V'$ - PV em α , de modo que β_1 pertence à reta β_μ e ao ponto $R'R^1$ (homólogo de $R'R$).

d) *O elipsóide de contato apresenta secções circulares paralelas ao plano de homologia*

“A transformada homológica de uma 1.ª figura plana, paralela ao plano μ é uma 2.ª figura plana semelhante à 1.ª”.

Realmente, sabemos que os planos homólogos dessas duas figuras vão encontrar o plano central, μ , segundo uma reta imprópria. Assim, para a estrêla de raios projetivos das duas figuras, os planos dessas duas figuras, sendo paralelos, determinam secções semelhantes.

Então: “A transformada homológica dos círculos da esfera cujos planos são paralelos a μ são círculos do elipsóide”.

Se a reta que une o centro (P) de homologia ao centro da esfera fôr perpendicular ao plano μ , o elipsóide será de revolução, porque a transformada homológica do diâmetro da esfera que se apoia em (P) (O) será também perpendicular ao plano μ e, portanto, perpendicular aos planos dos círculos paralelos ao plano μ . Logo, êsses círculos passam a ser paralelos do elipsóide.

Para determinar as extremidades da transformada homológica do diâmetro da esfera perpendicular à μ tracemos os planos τ_1 e τ_2 tangentes à esfera e paralelos a μ . Os pontos de contato serão 5'5

e $6'6$ que determinam o diâmetro $5'6'-56$ cuja transformada homológica será $5'_15_1, 6'_16_1$ pontos de contato dos planos tangentes ao elipsóide (planos estes homólogos dos planos tangentes à esfera).

O segmento $5'_16'_1-5_16_1$ será diâmetro do elipsóide e, conforme já fizemos referência, será eixo se $(P)(O) \perp \mu$. Nesta hipótese, pode-se determinar o círculo da esfera que se transforma no círculo equador do elipsóide, que será elipsóide de revolução.

e) *O elipsóide tangencia o plano β_1 , num ponto T'_1T_1 que não é mais o foco da cônica de secção do plano β_1 na superfície cônica geral do 2.º grau:*

Pelo teorema de Quetelet e Daudelin, sabemos ser $T'T$, ponto de contato entre a esfera inscrita na superfície cônica e o plano secante β , o foco da secção plana produzida na superfície cônica pelo plano β .

Mas, sabemos também não serem projetivas as propriedades dos focos e, conseqüentemente, dos eixos e centro de uma cônica. De fato, o ponto T'_1T_1 de contato entre β_1 e o elipsóide não tem qualquer relação com o foco da cônica de secção de β_1 no cone geral do 2.º grau. Esta cônica tem $1'_12'_1-1_12_1$ como eixo menor e $9'_110'_1-9_110_1$ como eixo focal.

Determinação de planos diametrias e do centro do elipsóide (fig. 48, pág. 113).

Dado o sistema superfície cônica de revolução circunscrita numa esfera de centro (E) e determinado o sistema superfície cônica do 2.º grau não de revolução circunscrita num elipsóide em que se transforma a esfera, para conhecer um plano diametral do elipsóide bastará estender o raciocínio já aplicado para o conhecimento de secções circulares (item d).

Assim, na esfera de centro (E) traçamos diâmetro $(M)(N) \perp \mu$.

A transformada homológica $(M_1)(N_1)$ de $(M)(N)$ é linha diametral do elipsóide, portanto seu ponto médio, R'_1 , será o centro do elipsóide. Qualquer plano que contenha R'_1 será um plano diametral deste sólido. Por transformada homológica, determina-se a elipse de secção de qualquer plano diametral. Basta atentar para o homólogo de (R_1) , que é (R) (1.ª figura).

O plano diametral, paralelo a μ , será circular.

Nas figuras 47 e 48 não levamos em consideração o problema da visibilidade nas respectivas projeções verticais, a fim de dar maior destaque às relações de homologia.

2) NO CAMPO DAS ARTES PLÁSTICAS EM GERAL

O estudo de projeções da esfera assume particular importância pelas suas inúmeras aplicações na representação das superfícies curvas e na interpretação de tudo que delas depender; quer no efeito do claro escuro (sombras; própria e projetada), auxiliando o problema do relêvo (método dedutivo), quer na melhor compreensão dos diversos aspectos do contorno aparente de muitas figuras do espaço. Permite, também, melhor compreensão das relações entre tais figuras e os planos sobre as quais elas são representadas (método indutivo).

As transformações homológicas talvez auxiliem para melhor compreender a harmonia de certas composições da chamada "Arte Moderna". Como sugestão, no presente trabalho fazemos breve apreciação associativa e em caráter particular, entre cônicas e entre quádradas. Tanto umas como outras, em nossos dias têm desempenhado importante papel no campo das Ciências, das Técnicas e, em especial, na da Arquitetura, despertando de modo geral maior atenção de nossos artistas.

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
 LIBRARY
 540 EAST 57TH STREET
 CHICAGO, ILL. 60637

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
 LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
 LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
 LIBRARY

THE UNIVERSITY OF CHICAGO
 LIBRARY

BIBLIOGRAFIA

- 1 — A. JAVARY — “Traité de Géométrie Descriptive” — 9.^a ed., 1 a 175, 379-445, Librairie Ch. Delagrave, Paris, 1901.
- 2 — A. MANNHEIM — “Cours de Géométrie Descriptive” — Págs. 114-145, 223-229, 261-266, Gauthier-Villars, 1886, Paris.
- 3 — A. CAPPELLONI — “Trattato Generale dell’Arte dell’Ingegnerre. Applicazioni di Geometria Descrittiva” — Págs. 25-38, 71-83, Casa Editrice Dottor Francesco Vallardi, Milano, 1934.
- 4 — ÁLVARO J. RODRIGUES — “Geometria Descritiva” — Vol. I, 3.^a ed., Págs. 307-340, Livraria Agir, Rio de Janeiro, 1950.
- 5 — ÁLVARO J. RODRIGUES — “Geometria Descritiva”. Projeitividades, curvas e superficies — 3.^a ed., págs. 73-98, 107-170, 365-390, Ao Livro Técnico Ltda., Rio de Janeiro, 1960.
- 6 — ÁLVARO J. RODRIGUES — “Perspectiva Paralela” — Págs. 1-57. Imprensa Nacional, Rio de Janeiro, 1948.
- 7 — ANASAGASTI — “Perspectiva Artística” — Págs. 20-40, 115-120. Editorial Labor S. A., 1945.
- 8 — ANGEL TAIBO FERNANDEZ — “Tratado de Geometria Descritiva” — 2.^a ed., págs. 27-44, 345-372, 421-441, 445-462, 485-505, 547-624, 649-660. Libreria y Editorial “El Ateneo”, 1947.
- 9 — ANNIBALE COMESSATTI — “Elementi della Teoria Generale delle Coniche” — 2.^a ed., págs. 1-40, 73-105. Cedam. Casa Editrice Dott. Padova, 1939-XVII.
- 10 — ANNIBALE COMESSATTI — “Lezione de Geometria Descritive” — Págs. 150-202, 422-461. Cedam. Casa Editrice Dott. Padova, 1946. Antonio Milani.
- 11 — ARMAND CASSAGNE — “Traité Pratique de Perspective” — Págs. 9-24, 107-149. H. Laurens, 1945, Paris.
- 12 — C. F. A. LEROY — “Traité de Géométrie Descriptive” — Vol. I, 13.^a ed., págs. 70-205, 217-284. Gauthier-Villars et fils, Paris, 1888.
- 13 — C. GUICHARD — “Traité de Géométrie” — Vols. I, II, 5.^a ed. I) 459 segts., II) 106 segts., págs. 319-437. Paris, Librairie Vulbert, 1923.
- 14 — C. ROUBAUDI revue e mise à jours par A. THYBAUT — “Traité de Géométrie Descriptive” — Págs. 16-19, 148-207, 267-297, 308-334, 407-417. Masson et Cie., 1926, Paris.
- 15 — CARLOS DEL NEGRO — “Baixo-Relêvo. O método das projeções centrais”. Tese de concurso à cadeira de Modelagem da Facul-

- dade Nacional de Arquitetura da U. Brasil — Págs. 9-43, Rio de Janeiro, 1949.
- 16 — CARLOS DEL NEGRO — “Considerações sôbre a Perspectiva de Euclides e a Perspectiva Linear”. (Aula inaugural dos Cursos da Faculdade Nacional de Arquitetura da U. do Brasil no ano letivo 1957) — Págs. 17-23, 32-33.
- 17 — CARLOS DEL NEGRO — “Desenho e Relêvo”. Tese de concurso à cadeira de Desenho da Escola Nacional de Belas-Artes da Universidade do Brasil, 1938 — Págs. 5-14, 29-31. Tipografia Mercantil, Rua da Quitanda 47, Rio de Janeiro.
- 18 — CARLOS SUSSEKIND — “Geometria Descritiva” — Págs. 40-78. Imprensa Naval, Rio de Janeiro, 1924.
- 19 — EMILE MARTIN & FELIX PERNOT — “Cours de Géométrie Descriptive” — Págs. 1-27, 58-78, 188-215, 234-290. Librairie de Sciences Generales, H. Bécus-Directeur, Paris.
- 20 — ENRIQUE CERCEAU — “Geometria Descritiva y Perspectiva” — 1.ª ed., págs. 109-138, 322-346. Assandri. Cordoba, Argentina, 1951.
- 21 — ERHARD GULL — “Perspectiva” (Versión española de la 3.ª edición alemana) — Págs. 53 e segts. Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1948.
- 22 — ERNEST DUPORCQ — “Premiers Principes de Géométrie Moderne” — 3.ª ed., págs. 1-14, 48-110. Gauthier-Villars Imprimeur-Libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique. Quai des Grans-Augustins, 55, 1938.
- 23 — ERNEST SONGAYLO — “Traité de Géométrie Descriptive” — Págs. 141-222, 275-319, 745-755. Bibliothèque de Kurnik, Paris, 1882.
- 24 — ESTEBAN QUAINTENNE — “Tratado Metódico de Perspectiva” — Págs. 237-243. Libreria “El Ateneo”, Buenos Aires, 1944.
- 25 — EUGÈNE ROUCHÉ et CH. COMBEROUSSE — “Traité de Géométrie” — Vol. I, 7.ª ed., págs. 237-245. Vol. II, 7.ª ed., págs. 90-93, 156-192, 216-227, 295-359, 367-493. Gauthier-Villars Imprimeur-Librairie de l'École Polytechnique, du Bureau des Longitudes, Paris, 1900.
- 26 — F. G. M. — “Exercices de Géométrie” — 5.ª ed., págs. 455-615, 1015-1049. Maison A. Mame & Fils. J. de Gigord, Paris.
- 27 — F. I. C. adaptação de EUGENIO DE BARROS RAJA GABAGLIA — “Elementos de Geometria” — Págs. 249-256, 345-365. Livraria Garnier, Rio de Janeiro.
- 28 — F. I. C. adaptação de E. DE RAJA GABAGLIA — “Elementos de Geometria Descritiva” — Págs. 163-221. Livraria Garnier, Rio de Janeiro, 1936.
- 29 — F. J. — “Éléments de Géométrie Descriptive” — 3.ª ed., págs. 169-244, 282-287, 328-385. Alfred Mame & Fils Poussielgue Frères Tours, Paris.
- 30 — F. J. — “Exercices de Géométrie Descriptive” — 3.ª ed., págs.

- 10-65, 367-482, 492-593, 614-740, 793-820. Alfred Mame et Fils. Ch. Poussielgue Frères. Tours, Paris.
- 31 — F. T. D. (Collecção) — “Geometria elementar” (Curso Médio) — Págs. 177-190. Livraria Paulo de Azevedo, Rio de Janeiro, 1925.
- 32 — F. T. D. (Collecção) — “Noções de Perspectiva Exacta” — Págs. 50-54, 63-85. Livraria Paulo de Azevedo, Rio de Janeiro, 1936.
- 33 — F. T. D. (Collecção) — “Perspectiva de observação” - Págs. 39-78. Livraria Alves, Paulo de Azevedo & Cia., Rio de Janeiro, 1936.
- 34 — F. T. D. — “Perspectiva — Tratado Práctico” — 4.^a ed., pgs. 65-81, 161-176. Gustavo Gili S. A., Barcelona, MCMXLII.
- 35 — FEDERIGO ENRIQUES — “Lezioni di Geometria Proiettiva” — 4.^a ed., págs. 198-386. Nicola Zanichelli, Bologna, MCMXXVI.
- 36 — FRANCESCO SEVERI — “Elementos de Geometria” — Vol. II, 2.^a ed., págs. 275-285, 333-349, 395-507. Editorial Labor, 1940.
- 37 — FRANCESCO SEVERI — “Geometria Proiettiva” — Págs. 41-48, 124-149, 174-194, 258-262. La Litotipo - Editrice Universitária, Padova, 1921.
- 38 — FRANK M. WARNER — “Applied Descriptive Geometry With Drafting-rom Problems” — 3.^a ed., págs. 92-147. McGraw-Hill Book Company, Inc., New York and London, 1946.
- 39 — G. CAGNAC, H. COMMISSAIRE — “Cours de Mathématiques Spéciales” — Vol. V, fasc. 1.^o, pgs. 1-11, 107-125, 140-208. Librairie Masson et Cie., Paris, 1949; “Géométrie Descriptive” — Vol. V, 2.^o fasc., págs. 1-93, 227-274. Librairie Masson et Cie., Paris, 1951.
- 40 — G. MAHLER — “Geometria del Plano” — 2.^a ed., págs. 102-105. Editorial Labor S. A., Espanha, 1940.
- 41 — GERSON POMPEU PINHEIRO — “A Prática da Perspectiva”. Tese de concurso para provimento da Cadeira de Perspectiva, Sombras e Estereotomia da Faculdade Nacional de Arquitetura da Universidade do Brasil. — Págs. 11-21, 66-80. Oficina Gráfica Jornal do Comércio, Rio de Janeiro, 1945.
- 42 — GERSON POMPEU PINHEIRO — “Perspectiva e Composição”. Tese de concurso para provimento da Cadeira de Perspectiva, Sombras e Estereotomia da Escola Nacional de Belas-Artes da Universidade do Brasil. — Págs. 26-35, 99-108. Oficina Gráfica Jornal do Comércio, Rio de Janeiro, 1949.
- 43 — GINO FANO, - ALESSANDRO TERRACINI — “Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva” — 2.^a ed., págs. 296-322, 246-594. Paravia & C., Torino, 1948.
- 44 — GINO LORIA — “Storia della Geometria Descrittiva” — Pág. 9. Manuali Hoepli, Milano, 1921.
- 45 — GINO LORIA — “Metodi di Geometria Descrittiva” — 3.^a ed., págs. 146-266. Ulrico Hoepli, Milano, 1925.

- 46 — GIOVANNI SELLER — "Geometria Descrittiva" — 4.^a ed., págs. 110-134. Ulrico Hoepli, Milano, 1949.
- 47 — GIUSEPPINA MASOTTI BIGGIOGERO — "Lezioni di Geometria Proiettiva" — 2.^a ed., págs. 45-96, 138-237. Libreria Editrice Politecnica Cesare, Tamburini, Milano, 1945.
- 48 — GUIDO CASTELNUOVO — "Lecciones de Geometría Analítica. Geometría analítica del plano y del espacio. Conceptos fundamentales de geometría proyectiva. Curvas y superficies de segundo orden" — 1.^a cast., 7.^a ed. ital., págs. 180-194, 369-440, 495-554, 587-592. Mundo Científico C. Calomino, Eva Peron (Pcia. Buenos Aires, Argentina, 1955.
- 49 — GUSTAVO HOLZMULLER — "Tratado metódico de Matemáticas elementales" — T. II, 3.^a ed., págs. 302-358, Editorial Labor S. A., 1941; T. III, 4.^a ed., pgs. 1-112, 144-161, 267-294. Editorial Labor S. A., 1941.
- 50 — HÉCTOR CEPPE y ALEJO M. FOURNIER — "Geometría Proyectiva" — Págs. 1-124, 141-198. Editorial Guillermo Kraft Ltda., B. Aires, 1951.
- 51 — J. J. PILLET — "Traité de Perspective Linéaire" — 3.^a ed., págs. 1-29, 148-156, 228-250. Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1921.
- 52 — J. KIAES — "Traité Elementaire de Géométrie" — Vol. I, 8.^a ed., págs. 104-120, 209-250, Librairie Hachette et Cie, Pairs, 1888; Vol. II, 5.^a ed., págs. 41-138. Librairie Hachette et Cie, Paris, 1882.
- 53 — JOSÉ CAVALLIN — "Método de Projeção Central" (Lições de Geometria Descritiva) — 1.^a ed., págs. 84-116. João Haupt e Cia. Curitiba, 1958, Brasil.
- 54 — JULES DE LA GOURNERIE — "Traité de Géométrie Descriptive" — 3.^a ed., arts. 110 a 212 e 328 a 421. Gauthiers-Villars et Fils., Paris, 1891.
- 55 — JULES DE LA GOURNERIE — "Traité de Perspective Linéaire" — 3.^a ed., I/XXVI. Gauthier-Villars et Fils., Paris, 1898.
- 56 — JUSTO PASCALI — "Geometria Projectiva" — 2.^a ed., págs. 126-368. Buenos Aires Distribuidores "El Ateneo", 1952.
- 57 — JULES PILLET — "Traité de Géométrie Descriptive" — Págs. 1-3, 22-25, 32-34, 65-70, 115-142, 263-265. Librairies H. Lesoudier (Leipzig) Ch. de Lagavre, Paris, 1887.
- 58 — L. BERZOLARI — "Geometria Analítica" Curve e Superficie del Secondo Ordine — Vol. II, 3.^a ed., págs. 8-50, 237-430. Ulrico Hoepli, Milano, 1942-XX.
- 59 — L. BERZOLARI, VIVANTI, GIGLI — "Enciclopedia Delle Matematiche Elementari" — Vol. II, P. I, págs. 327-424, P. II, págs. 81-93, 145-304, 311-375. Ullrico Hoepli, Milano, 1937-38.
- 60 — L. SANCHEZ-MARMOL M. PEREZ-BEATO — "Geometria Métrica,

- Proyectiva y Sistemas de Representación" — Vol. I, 2.^a ed., págs. 144-198, 337-364, 404-419, 545-655; Vol. II, 2.^a ed., págs. 657-745, 788-827, 874-994, 1178 sgts. S.A.E.T.A. (Sociedade Anonima Española de Tradutores y Autores), 1945-1957, Madrid.
- 61 — LEOPOLDO CRUSAT y M. DAURELLA — "Geometria Descriptiva" — Págs. 423-507. Bosch Casa Editorial, Barcelona, 1950.
- 62 — LÉA SANTOS DE BUSTAMANTE — "Casos em que os eixos dos triédros são lugares geométricos dos centros das secções triangulares". Tese para concurso de Docente Livre da cadeira de Geometria Descriptiva da Escola Nacional de Belas-Artes da U. B. — Págs. 67-85.
- 63 — LUIGI CREMONA (Versão portuguesa por C. G. S. SHALDESS) — Págs. 1-37, 48-51, 55-59, 91-121. Casa Duprat, S. Paulo, 1918.
- 64 — LUIS MAUFREDI — "Geometria Proyectiva y Descriptiva" — P. 3.^a, págs. 1-50, 85-182, 211-259. Libreria Científica y Casa Editora de Augusto Galli, 1917.
- 65 — LUIZ PORFIRIO DA MOTTA PEGADO — "Curso de Geometria Descriptiva" — Vols. I e II, págs. I-XL, 122-218, 273-294. Academia Real da Sciencia, Lisboa, 1899.
- 66 — M. CHASLES — "Aperçu historique sur l'origine et le développement des Methodes en Géométrie" — Págs. 334-384, 586-687, 695-805. Gauthier-Villars, Paris, Successeur Mallet-Bachelier, 1875.
- 67 — MANUEL GUIU CASANOVA — "Geometria Plana y del Espacio" — 7.^a ed., págs. 77-80, 306-312, 326-327, 420-452, 468-483. Bosch - Casa Editorial, Barcelona, 1942.
- 68 — MARIO CORSETTI — "Elementi di Geometria Descrittiva e sue applicazioni" — 2.^a ed., págs. 142-146, G. B. Paraiva, Itália, 1950.
- 69 — MAURICE D'OCAGNE — "Cours de Géométrie" — Vol. I, págs. 1-45, 61-83. Gauthier-Villars et Cie., Paris, 1917.
- 70 — MOEMA M. SÁ CARVALHO — "Introdução à Geometria Projativa" — 1.^a ed., págs. 145-169. Faculdade de Filosofia da Universidade do Brasil, Rio de Janeiro.
- 71 — OSCAR CHISINI — "Esercizi di Geometria Analitica e Proiettiva" — Págs. 169-263, 300-315. Libreria Editrice Politecnica, Milano, 1946.
- 72 — OSCAR CHISINI — "Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva" — págs. 342 sgts., 429-482. Nicola Zanichelli, Bologna, 1948.
- 73 — PIERRE OLMER — "Perspective Artistique" — Págs. III-VII, 1-12. Librairie Plon, Paris, 1943.
- 74 — ROBERT GLASER — "Geometria del Espacio" — Págs. 50-55, 78-82, Editorial Labor S.A., Barcelona, 1927.
- 75 — ROBERT HAUSSNER — "Geometria Descriptiva" — 2.^a ed., págs. 13-68, 227-365. Editorial Labor S.A., Barcelona, 1942.
- 76 — ROBERT MUNIZ GREGORY — "Quádricas de Revolução". Tese de

- concurso à cadeira de Complementos de Geometria Descritiva, Elementos de Geometria Projetiva, Perspectiva-Aplicações Técnicas da Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil, Rio, 1949 — Págs. 3-13, 25-75, 83-112.
- 77 — ROBERT MUNIZ GREGORY — “Representação da linha reta”. Tese de concurso à cadeira de Geometria Descritiva da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil. Rio — Págs. 9-19.
- 78 — T. CHOLLET et P. MINEUR — “Traité de Géométrie Descriptive” — 1.^a parte, 17.^a ed., págs. 64-227. Librairie Vuibert, Boulevard Saint Germain, Paris, 1926.
- 79 — X. AN TOMARI — “Cours de Géométrie Descriptive” — Págs. 10-14, 187-335, 368-515. Librairie Vuibert, Paris.

Revistas

- 80 — FELIPE DOS SANTOS REIS — Revista do Clube de Engenharia. Agosto de 1960 — N. 288 “Os números pluridirigidos”, págs. 17-20, Engenharia Editôra S.A., Rio; Revista Municipal de Engenharia, julho-dezembro, 1959 — Ns. 3 e 4 “Os fundamentos filosóficos das representativas gráficas das grandezas dos imaginários”, págs. 133-135. Secretaria Geral de Viação e Obras.

ÍNDICE

1.ª PARTE

I — INTRODUÇÃO

<i>Notações</i>	10
-----------------------	----

II — BREVE APRECIACÃO SOBRE CURVAS CÔNICAS

1) <i>Cônica como lugar geométrico</i>	13
2) <i>Cônica como resultante da secção plana de uma superfície</i>	13
3) <i>Cônica como resultante da intersecção de duas superfícies</i>	14
4) <i>Cônica como resultante da projeção de outra cônica ou de uma curva reversa</i>	14
5) <i>Propriedades das cônicas</i>	14

III — BREVE APRECIACÃO SOBRE SUPERFÍCIES

1) <i>Superfícies — Superfícies de revolução</i>	17
2) <i>Quádricas</i>	17
a) <i>Apreciação geral</i>	17
b) <i>Propriedades</i>	18
3) <i>Propriedades de uma superfície de revolução</i>	20
4) <i>Esfera</i>	21
a) <i>Apreciações gerais</i>	21
b) <i>Propriedades das superfícies esféricas</i>	21

IV — TANGÊNCIA E SECÂNCIA

1) <i>Considerações gerais</i>	23
2) <i>Planos tangentes — conceito; determinação</i>	23
3) <i>Propriedades dos planos tangentes a uma superfície de revolução e, em particular à esfera</i>	24
a) <i>Superfície de revolução</i>	24
b) <i>Esfera</i>	26
4) <i>Esquema dos seis aspectos clássicos dos problemas de planos tangentes aplicados à esfera</i>	26
5) <i>Tangência e secância entre quádricas</i>	28

V — POLARIDADES NO PLANO E NO ESPAÇO

1) <i>Polo e polar no plano</i>	29
a) Conceito	29
b) Elementos conjugados	30
c) Triângulo auto-polar	31
d) Polos e polares com relação a uma cônica c — Triângulo auto-polar, sua importância em relação às cônicas	31
2) <i>Polo e polar no espaço</i>	34
a) Conceito	34
b) Elementos conjugados	35
c) Tetraedro auto-polar, sua importância em re- lação às quádricas — propriedades	36
d) Triedro auto-polar, sua importância para a su- perfície cônica do 2.º grau	41
e) Secções principais das quádricas e, em par- ticular, das superfícies cônicas do 2.º grau	48
3) <i>Segmento e cônica polar</i>	57
a) Conceito	57
b) Círculo como caso particular de cônica polar ..	58

VI — HOMOLOGIA PLANA E ESPACIAL

1) <i>Conceito de homologia</i>	61
2) <i>Elementos fundamentais — Propriedades</i>	61
3) <i>Definição de um sistema de homologia</i>	64
4) <i>Transformações homológicas do círculo e da esfera</i>	64

2.ª PARTE

VII — PROJEÇÕES DA ESFERA

1) <i>Conceito de projeção e de secção aplicados à esfera</i>	69
2) <i>Posições relativas de sistema: centro projetivo — esfera — plano de projeção</i>	70
3) <i>Natureza e representação da superfície projetante da esfera</i>	73
4) <i>Natureza e traçado das projeções da esfera</i>	77
a) O círculo de contato como única figura da es- fera necessária à sua projeção	77
b) Natureza e traçado das projeções de um círculo	79

5) <i>Projeções do círculo polar — projeções da esfera — elementos principais da cônica projeção</i>	87
6) <i>Casos particulares de projeção da esfera</i>	100

VIII — CONCLUSÕES

1. ^a) <i>Relativamente às projeções de uma quádriga</i>	101
2. ^a) <i>Relativamente à associação entre o sistema círculo polar de uma esfera e o sistema cônica polar de uma quádriga</i>	101

IX — APLICAÇÕES

1) <i>No campo da Perspectiva e Sombra, da Geometria Descritiva e Projetiva</i>	103
A — Na resolução de problemas de sombra da esfera	103
B — Na resolução de problemas de perspectiva da esfera isolada ou em conjunto com outras figuras	103
C — Como método de raciocínio auxiliar na resolução de problemas de Geometria Descritiva, como sejam: tangência, secções planas, contorno aparente, intersecções, etc.	103
D — No estudo da transformação do sistema: “Superfície cônica de revolução circunscrita na esfera” em sistema: “Superfície cônica do 2.º grau, não de revolução, circunscrita num elipsóide em que se transforma a esfera” ...	104

2) <i>No campo das Artes Plásticas em geral</i>	115
---	-----

X — BIBLIOGRAFIA	117
------------------------	-----

VI — CONCLUSIONES

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200



Composto e impresso
na Oficina Gráfica da
Universidade do Brasil

ERRATA

Pág.	Linha	Onde se lê	Leia-se
29	21	RR'	R_1R'
32	Fig. 4	P_1	R_1
37	9	p, p_1 , z, r, s	p, p_1 , p_2 , z, r, s
37	Fig. n.º 10	(e)	(c)
42	Fig. n.º 12		colocar letra (c) denominando a curva da base do cone
42	Fig. n.º 13	(e)	(c)
43	Fig. n.º 14	e' (na projeção vertical)	c' (na projeção vertical)
43	Fig. n.º 14	e (na projeção horizontal)	c (na projeção horizontal)
45	16	(8)	(18)
46	22 e 23	Resulta da intersecção ... (plano da grande secção)	Suprimir as duas linhas relativas ao texto indicado na coluna "Onde se lê". Colocar (o) no centro da secção e σ no seu plano.
46	Fig. n.º 17		
47	21	(B_1) (V) (A)	(B_1) (V) (B)
55	10	basoluto	absoluto
55	23	conclurimos	concluímos
57	20	auxiliar	auxiliam
70	14	DELATIVAS	RELATIVAS
79	26	Fig. 34	Fig. 35
79	27	Fig. 35	Fig. 34
87	7	em π S	em π , S
96	25	$(S)_2$ e $(S)_1$	$(S)_2$ e S_1
96	30	retângulo em (S)	retângulo em $(S)_1$
96	34	(ver págs. 87, 90 e 91)	(ver págs. 90, 91 e 92)
97	10	raio	raio
99	3	$(S)_1$	S_1
99	4	$(S)_1$ $(S)_2$	S_1 $(S)_2$
100	23	paralelos	paralelas
109	31	π^1	π_1
109	32	π^1	π_1
109	33	π^1	π_1
109	37	π^1	π_1
110	8	(R^1)	(P_1)
110	15	(R^1)	(P_1)
110	17	(P^1) é (j^1)	(P_1) é (j_1)
110	20	M_∞ da geratriz	(M_∞) da geratriz
		(V^1) (A^1)	(V_1) (A_1)
110	21	(V^1) (V_∞) ou (V^1) (A)	(V_1) (M_∞) ou (V_1) (A_1)
112	1	α^1	α_1
112	2	α^1	α_1
112	5	V^1A^1 V^1B^1	$V_1'A_1$ $V_1'B_1$
112	6	$V^1 A^1$	$V_1' A_1$
112	7	α^1	α_1
112	8	$\alpha^1\mu$	$\alpha_1\mu$
112	23	$R^1 R^1$	$R_1' R_1$



Composto e impresso
na Oficina Gráfica da
Universidade do Brasil