Mendel Coifman

A HIPOPEDA CILINDRICA

ESTUDO DA VARIAÇÃO DA CURVA DE EUDÓXIO DE CNIDE

Estado da Guanabara

1960

DEDICATÓRIA:

À minha esposa ESTHER

e filhos:

HÉLIO e OLGA,

dedico este trabalho.

Mendel Colfman

Tese apresentada por MENDEL COIFMAN à Douta Congregação da Escola Nacional de Belas Artes, para o concurso de provimento da Cátedra de Geometria Descritiva.

Aos ilustres mestres:

Prof. Álvaro José Rodrigues.

Prof. Gerson Pompeu Pinheiro.

Prof. Felippe dos Santos Reis.

Prof. Luiz Caetano de Oliveira.

As homenagens e agradecimentos pelos brilhantes exemplos que deram no antigo Curso de Arquitetura da Escola Nacional de Belas Artes, de cultura, dedicação e entusiasmo pelo ensino.

À memória do ilustre Prof. Roberto Muniz Gregory.

A respeitosa admiração

Do Autor.

INTRODUÇÃO

Submetendo à apreciação da douta Congregação da Escola Nacional de Belas Artes o presente trabalho, para o concurso de provimento da cadeira de Geometria Descritiva, aproveitamos a oportunidade, em que o nosso país se transforma numa potência industrial, de lembrar alguns tópicos do prefácio do primeiro volume da Geometria Descritiva, escrito por Monge seu genial criador, sob o título de "Programme".

Dirigindo-se à Nação Francêsa, apresenta sua obra como base de uma educação técnica da juventude francêsa, educação capaz de tornar sua Pátria independente das indústrias estrangeiras.

E justifica essa nova educação pelo desenvolvimento da faculdade gráfica, formando engenheiros e artistas aptos a conceber mentalmente um projeto de engenharia ou de uma obra de arte e de representá-los numa linguagem acessível àqueles que devem dirigir sua execução e por fim aos operários, que manufaturam suas diversas partes ou peças.

Quiz Monge disciplinar pela sua obra científica, primeiramente a imaginação inventiva no trabalho intelectual de o conceber, dando-lhe uma realidade pelo desenho, que tem sòmente duas dimensões, dos objetos que tem até três, deduzindo da descrição exata dos corpos, tudo o que seja necessário a apresentação de sua forma e de suas respectivas posições.

Nesse sentido a Geometria Descritiva é um meio decisivo na procura da verdade nessa representação, tornando real e objetiva a capacidade de invenção.

Em segundo lugar, deu a Geometria Descritiva ordem e uniformidade ao planejamento na execução de um trabalho e por último a perfeição no acabamento, pelo grau de exatidão em sua confecção, acostumando os operários e os artífices a lêrem e interpretarem essa linguagem no manejo de instrumentos de todos os gêneros, que servem para dar precisão à obra manufaturada.

Dentro desse espírito e da atualidade brasileira, foi nosso propósito nesta tese a apresentação de uma curva revessa idealisada por nós, traçada na superfície de um cilindro circular de geratrizes verticais, que justificasse pelas projeções mongeanas e seus métodos auxiliares, a obtenção de curvas geométricas planas usuais e de aplicação na indústria, bem como o da simplificação dos traçados geométricos de algumas destas curvas.

Tomamos por isso, como ponto de partida neste trabalho, um grupo das curvas de M. Lissajous, que são estudadas em Física.

As figuras de Lissajous, são curvas planas resultantes da combinação de dois movimentos periódicos e simultâneos, cujas trajetórias são normais entre sí.

Quando as freqüências estão entre sí na razão de 2:1, as curvas resultantes apresentam aspectos variáveis, ora uma parábola, ora um oito deformado e ainda podem apresentar a forma característica de um oito (lemniscata).

As figuras de Lissajous, constituem um meio util de calibrar um oscilador elétrico e também para caracterizar os intervalos musicais sem a participação do ouvido humano.

À curva revessa traçada na superfície do cilindro circular de geratrizes verticais e que projetada sôbre um plano paralelo ao eixo do cilindro, reproduz as figuras de Lissajous mencionadas, daremos o nome de HIPOPEDA CILÍNDRICA.

Quando numa certa posição da curva revessa a sua projeção sôbre um plano paralelo ao eixo do cilindro apresenta-se segundo uma quártica plana, com o formato de um oito, daremos à curva obtida o nome de: LEMNISCATA CILÍNDRICA.

Objetivos

Entre os vários, um dêles será o de mostrar que a Hipopeda de Eudóxio de Cnide é caso particular de Hipopeda Cilíndrica.

A hipopeda de Eudóxio de Cnide é atualmente obtida pela interseção de um cilindro circular de geratrizes verticais, com uma esfera cujo eixo é uma geratriz do cilindro, tendo como raio, o diâmetro da base do cilindro.

A hipopeda cilíndrica será obtida inicialmente, por um traçado convencional na superfície do cilindro circular, do qual trataremos mais adiante.

Posteriormente, mediante a projeção da hipopeda cilíndrica de um centro próprio pertencente à curva, poderemos considerar a mesma, como curva resultante da interseção de duas superfícies: a de um cilindro circular de geratrizes verticais e um cône de revolução de duas fôlhas nas seguintes condições:

a) — O eixo do cône é uma geratriz do cilindro.
b) — A distância entre as bases do cône é igual a altura do cilindro.
c) — O vértice do cône é equidistante das bases.
d) — O raio das circunferências das bases do cône, é igual ao diâmetro da diretriz circular do cilindro.

Considerando a particularidade acima descrita, teremos como conseqüência que as parábolas virtuais, inclusive a de Gregoire de Saint-Vinvent, a besácea do mesmo autor e a lemniscata de Gerono também serão casos particulares das curvas obtidas pela projeção da hipopeda cilíndrica sôbre um plano paralelo ao eixo do cilindro.

Determinaremos também a Cissóide de Dioclés, como lugar dos traços das tangentes à hipopeda cilíndrica, sôbre um plano horizontal equidistante das bases do cilindro.

As estrofóides reta e obliqua, obtidas pela projeção cônica de uma hipopeda cilíndrica, quando o vértice das projetantes, pertencer à curva.

Mostraremos a obtenção do trifólio obliquo, o trifólio reto e a fôlha dupla reta, projetando convenientemente a hipopeda cilíndrica de um centro impróprio.

Outra parte de nosso trabalho, se destina a divulgar uma simplificação no traçado geométrico do trifólio obliquo, do trifólio reto e da fôlha dupla reta.

Também para a cissóide de Dioclés apresentamos um processo para construção planimétrica desta curva.

Igualmente para a parábola, quando se conhecem o eixo, o vértice e um ponto da curva.

A Cissóide de Dioclés

Os problemas da quadratura do círculo, da duplicação do cubo e da divisão do ângulo em partes iguais, constituiram por vários séculos o objetivo dos mais eminentes geômetras, muitos dos quais procurando contornar as dificuldades surgidas, adotaram curvas de gênese complexa. Assim originaram-se numerosas classes de curvas: quadratizes, duplicatrizes, etc...

Dioclés geômetra posterior a Arquimedes, idealizou uma curva cuja geração pode ser exposta considerando um círculo de centro O e dois de seus diâmetros AB e CD, perpendiculares entre si (fig. 1).

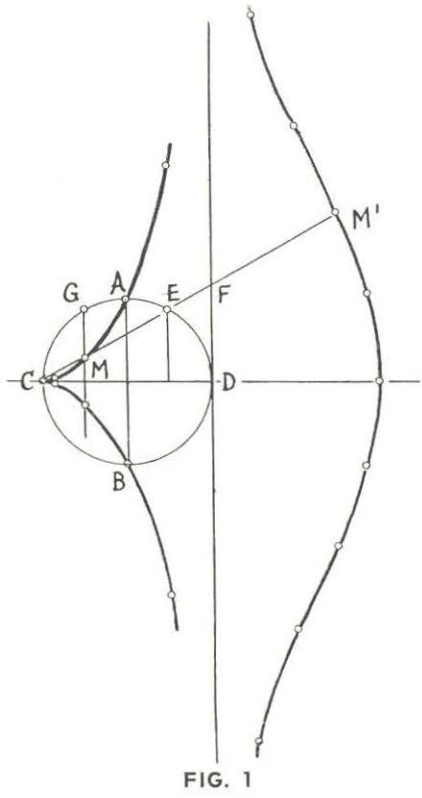

FIG. 1

Se tomarmos na periferia do círculo dois arcos iguais AG = AE e se conduzirmos por G uma paralela ao diâmetro AB, esta corta CE em um ponto M da curva de Dioclés. O lugar dos pontos M apresenta uma certa semelhança com a fôlha de héra.

Há controvérsias quanto ao nome atribuido à curva, todavia ao lugar dos pontos M é dado o nome de Cissóide de Dioclés.

Nota-se que se a reta CE corta em F a tangente ao círculo dado em D, os dois segmentos CE = MF resultam iguais e concluímos que a cissóide pode ser construída mais fàcilmente tomando-se sôbre a reta CF o comprimento FM igual e de sentido contrário a CE e se tomarmos sôbre a mesma reta FM' igual a CE, teremos uma nova curva determinada pelo lugar dos pontos M', denominada: "gêmea da cissóide" ou também ulterior.

A Cissóide de Dioclés é simétrica em relação ao diâmetro CD do círculo gerador e contém os extremos A e B dêste diâmetro.

Embora a curva tenha ramos assintóticos em relação a tangente à circunferência no ponto D, os antigos consideravam sòmente os dois arcos internos ao círculo, que partem de C até os pontos A e B.

Êsses arcos juntamente com a semicircunferência ABD limitam uma região do plano cuja forma lembra uma fôlha de héra, dando a origem do nome da Cissóide.

Isaac Newton apresentou um teorema que permite gerar uma cissóide com um movimento contínuo de um esquadro.

Do ponto de vista teórico, temos alguns métodos de obtenção da cissóide, de uma parábola:

1) — A podária de uma parábola em relação ao seu vértice, é uma Cissóide de Dioclés.

2) — O lugar dos pontos simétricos do vértice de uma parábola em relação à sua tangente, é uma Cissóide de Dioclés.

3) — Se uma parábola rola sôbre outra parábola igual, tocando-a sempre externamente, o vértice desta descreverá uma Cissóide.

A área da porção do plano compreendida entre a Cissóide e sua assintota, é igual ao triplo do círculo gerador.

Esta proposição foi comunicada por Fermat a Carcavy, que transmitindo por sua vez a notícia à Huygens, êste lhe comunica haver demonstrado a proposição acima, quatro anos antes.

O centro de gravidade da Cissóide divide o diâmetro CD em duas partes tais, que a mais próxima do cúspide é quintupla da outra.

O volume gerado pela rotação de uma Cissóide em tôrno de sua assíntota, é igual à do anel gerado pela rotação do círculo gerador. Esta é uma bela proposição de R. de Sluse.

A Estrofóide

A estrofóide entrou na literatura matemática na metade do séc. XVIII quando em 1857 foi publicado o vol. IV do INSTITUTI BNONIESIS COMMENTARII intitulado "De Conicorum Sertonium Focis" e dedicado à estrofóide.

"A estrofóide é a podária de uma parábola em relação ao ponto em que a diretriz corta o eixo".

FOCAL DE QUETELET OU ESTROFÓIDE OBLIQUA
LOGOCÍCLICA DE BOOTH OU ESTROFÓIDE RETA

Assim denomina Gino Loria a Focal de Quetelet e à Logociclica de Booth, no Vol. I do livro Curve Piane Speciali Algébriche e Transcendenti, à pag. 69, cap. VIII.

Considerando um cône de revolução, sendo "g" uma geratriz e uma tangente "t" perpendicular à mesma, um plano α conduzido por "t" corta o cône segundo uma cônica cujos focos são M_1 e M_2. O lugar desses focos quando o plano α gira em torno de "t" é uma curva plana contida no plano que contém a geratriz e o eixo do cône. É a "focal de Quetelet".

Segundo o teorema de Dandelin-Quetelet, para se determinar os focos M_1 e M_2 da cônica, basta determinar os pontos de contato das duas esferas inscritas no cône e tangentes ao plano secante α.

Se ao invés de um cône considerarmos um cilindro reto, raciocinando como no caso anterior, o lugar dos focos de uma seção produzida nêste cilindro por um plano α conduzido pela tangente "t" perpendicular à uma geratriz "g", é uma curva plana contida no plano que passa pelo eixo e por "g". É a Logocíclica de Booth.

Um processo para construir planimétricamente as curvas acima citadas, é o de Gino Loria o qual é detalhadamente exposto em sua obra, à pags. 70-71 e do qual faremos referência mais adiante, sendo bastante divulgado nos livros especializados.

Trifólio Obliquo

O trifólio oblíquo, assim denominado por G. de Longchamps e usado por Brocard, autor de uma monografia "Le Trifolium" (Journal de Mathem. Spéciales, 1891) pag. 17.

Esta curva plana é podária de uma hipociclóide tricuspide em relação a um ponto do círculo tritangente.

G. de Longchamps a define de um modo geral da seguinte maneira:

"Dada uma circunferência, um ponto P da mesma e uma reta fixa "r", se conduzirmos por P (fig. 2) uma corda arbitrária PD, em seguida uma circunferência de centro D e raio PD corta a paralela traçada por D a "r", em dois pontos M e M' cujo lugar é um trifólio oblíquo".

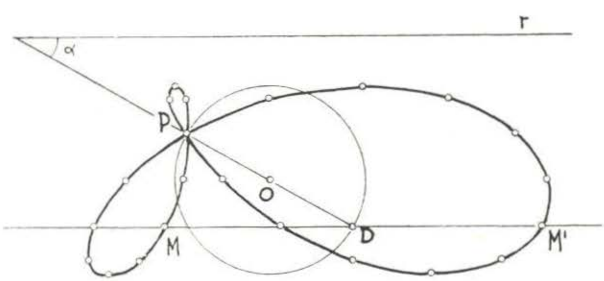

FIG. 2

Observação: — É fácil verificar que construção equivale a uma transformação especial geométrica, efetuada sôbre a circunferência dada.

O trifólio é uma curva de 4.ª ordem da qual o ponto P é um ponto triplo.

Chamando-se de α o ângulo formado pelo eixo polar P O D com a direção "r", podemos ter dois casos particulares:

$$(1) \quad \alpha = 0 \qquad \text{e} \quad (2) \qquad \alpha = \frac{\pi}{2}$$

As curvas que correspondem a $\alpha = 0$ e $\alpha = \frac{\pi}{2}$ foram denominadas por G. de Longchamps respectivamente de:

TRIFÓLIO RETO e FOLHA DUPLA RETA

TRIFÓLIO RETO

G. de Longchamps determinou um método especial para gerar o trifólio reto que é o seguinte:

"Dado um segmento retilíneo O O' = d , tracemos por O uma reta arbitrária sôbre a qual baixamos uma perpendicular O'M (fig. 3).

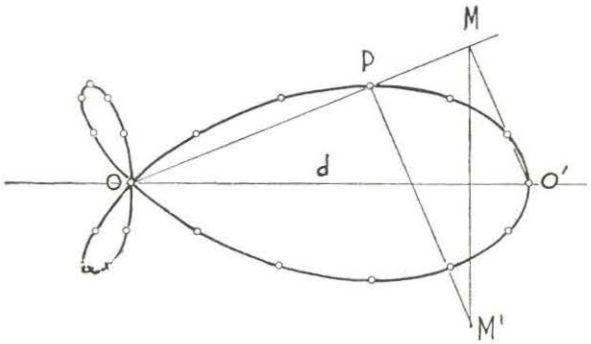

FIG. 3

Seja M' o simétrico de M em relação a O O' e P o pé da perpendicular traçada de M' a O M. O lugar dos pontos P, é um trifólio reto.

A curva é constituida por três folhas, duas das quais simétricas em relação a O O' e a terceira simétrica em relação à mesma reta.

Fôlha dupla: Oblíqua e Reta

Dado um ângulo reto AOB sôbre cujos lados são tomados dois pontos A e B, uma reta qualquer conduzida por B e a perpendicular traçada por A, determinam um ponto M. Se por M traçarmos M H perpendicular a O A e por H, H P pependicular a A M, o lugar dos pontos P é uma fôlha dupla oblíqua (fig. 4).

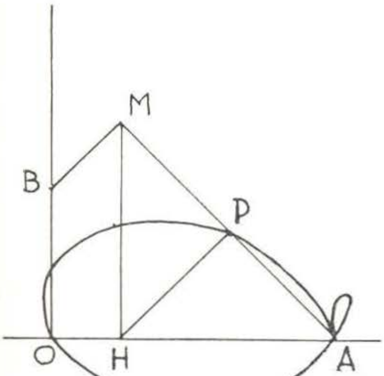

FIG. 4

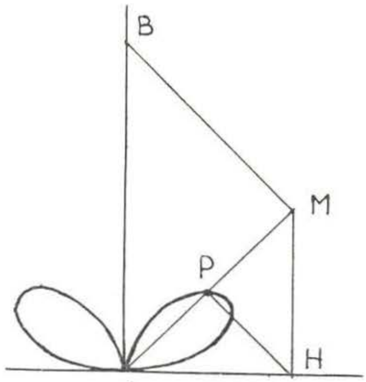

FIG. 5

Quando o ponto A coincide com o vértice O do ângulo reto, a curva é constituida por dois ramos simétricos, daí o nome de: fôlha dupla reta, (fig. 5) que pertence à classe das quárticas planas simétricas.

Parábolas Virtuais

Gino Loria denomina de "parábolas virtuais" (Curve Piane Speciali Pags. 224 e 225) a um grupo de curvas de 4º gráu e cuja construção planimétrica é a seguinte:

a) — Dado um círculo de centro C , tomemos um ponto qualquer A da circunferência e uma reta "g" qualquer passando por A . Se conduzirmos por êste ponto uma corda arbitrária A G e por G uma perpendicular a "g" segundo GH, si tomarmos sôbre esta HP = AG, o lugar dos pontos P é uma parábola virtual (fig. 6).

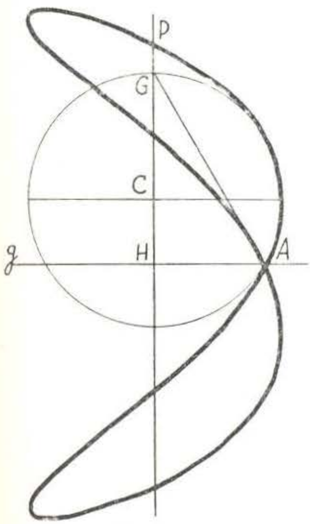

FIG. 6

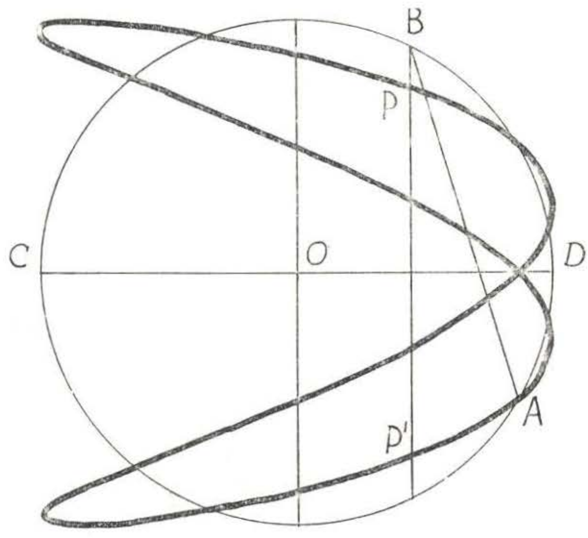

FIG. 7

b) — Dado um círculo de diâmetro CD e um ponto A de sua periferia (fig. 7), se conduzirmos por A uma corda AB qualquer e sôbre a perpendicular conduzida por B ao diâmetro CD, o segmento de reta P P' = A B de modo que P P' fique dividido ao meio por CD, o lugar dos pontos P e P' é uma parábola virtual.

Besácea de "Gregoire de Saint-Vincent"

É uma quártica plana resultante da projeção vertical de uma quártica revessa, obtida pela interseção de uma esfera com um cilindro circular de geratrizes verticais, que tangencía interiormente a esfera, no caso em que o raio da esfera é igual ao diâmetro do cilindro, estando os eixos das superfícies localizados em um plano vertical cujo traço horizontal inclina-se de 45° com a linha de terra. Sua construção planimétrica pode ser obtida à partir de uma circunferência de centro O (fig. 8) e diâmetro MN.

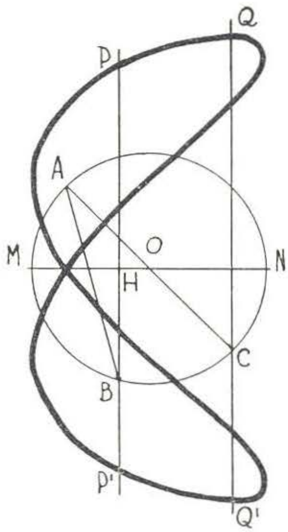

FIG. 8

Tomando-se um ponto A situado na extremidade de um diâmetro A C inclinado de 45° com M N e conduzindo uma corda qualquer A B. Sôbre a perpendicular a M N traçada por B, os comprimentos H P = H P ' = AB, determinam P e P', cujo lugar é a Besácea de Gregoire de Saint-Vincent.

Parábola virtual de Gregoire de Saint - Vincent

É um caso especial da besácea, podendo ser obtida pela mesma disposição anterior, estando porém os eixos do cilindro e da esfera contidos no mesmo plano de frente.

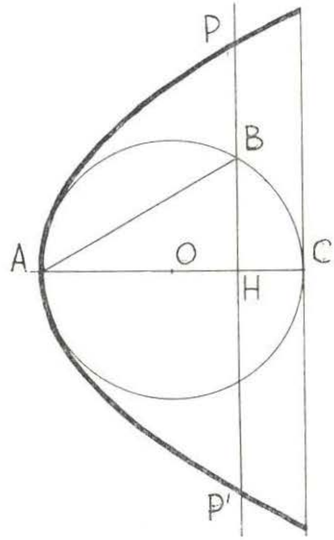

FIG. 9

Quanto à sua construção planimétrica, basta considerar o ponto A na extremidade do diâmetro horizontal AC. Procedendo como da forma anterior, isto é, traçando-se uma corda AB e conduzindo sôbre a perpendicular a AC traçada por B, os comprimentos: HP = HP' = AB, o lugar dos pontos P é denominado: Parábola virtual de Gregoire de Saint-Vincent (fig. 9).

Lemniscata de Gerono

É uma quártica plana obtida pela projeção vertical da interseção de uma esfera e um cilindro circular de geratrizes verticais que tangencía interiormente a esfera e cujo raio é igual ao diâmetro da base do cilindro, quando os eixos das duas superfícies estão contidos no mesmo plano de perfil.

Sua construção planimétrica é obtida pelo traçado de uma circunferência de centro O (fig. 10) e um ponto A situado na extremidade de um diâmetro vertical.

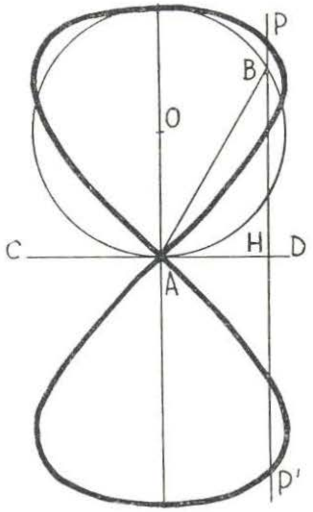

FIG. 10

Seja CD a tangente à circunferência no ponto A.

Conduzindo por A uma corda qualquer AB e sôbre a perpendicular à CD traçada por B, os comprimentos HP = HP' = AB determinam P e P' cujo lugar é a lemniscata de Gerono.

A Hipopeda Cilíndrica

Desejamos inicialmente apresentar duas modalidades para construção da curva revessa (hipopeda cilíndrica) traçada na superfície de um cilindro circular de geratrizes verticais.

(1) Primeiramente consideremos um cilindro dado por suas projeções em épura (fig. 11). Chamemos de "r" o raio da diretriz circular e "a" a altura do cilindro considerado.

Consideremos o dôbro do desenvolvimento da superfície lateral do cilindro dado, que será constituido pelo retângulo de base $4 \pi r$ e altura "a". Êste retângulo poderá portanto ser enrolado por duas vezes na superfície do cilindro dado.

Se imaginarmos o referido retângulo como contôrno aparente vertical de novo cilindro circular de geratrizes verticais, que tenha como diâmetro da nova diretriz circular, a altura "a" do cilindro inicialmente dado, podemos determinar nêste contôrno aparente, a projeção vertical de uma espira de uma hélice cilíndrica normal traçada em sua superfície.

Para obtenção da senóide, dividiremos portanto a semi-circunferência de diâmetro "a" em 12 partes iguais, o que corresponderá à divisão da base em 24 partes, porque o contorno aparente vertical comporta 24 divisões justificadas pela razão do duplo enrolamento na superfície do cilindro inicial.

A projeção da senóide resultante é dada na figura pelos pontos: I' II' .... XII' e I'_1 II'_1 ...... XII'_1.

Ao efetuarmos o enrolamento do retângulo do contorno aparente no qual se acha desenhada a senóide, o mesmo efetua duas voltas ao redor da superfície do cilindro inicial e poderemos obter os pontos A' B' ... L' e A'_1 B_1 ... L'_1, cuja projeção horizontal será A B ..... L. A curva

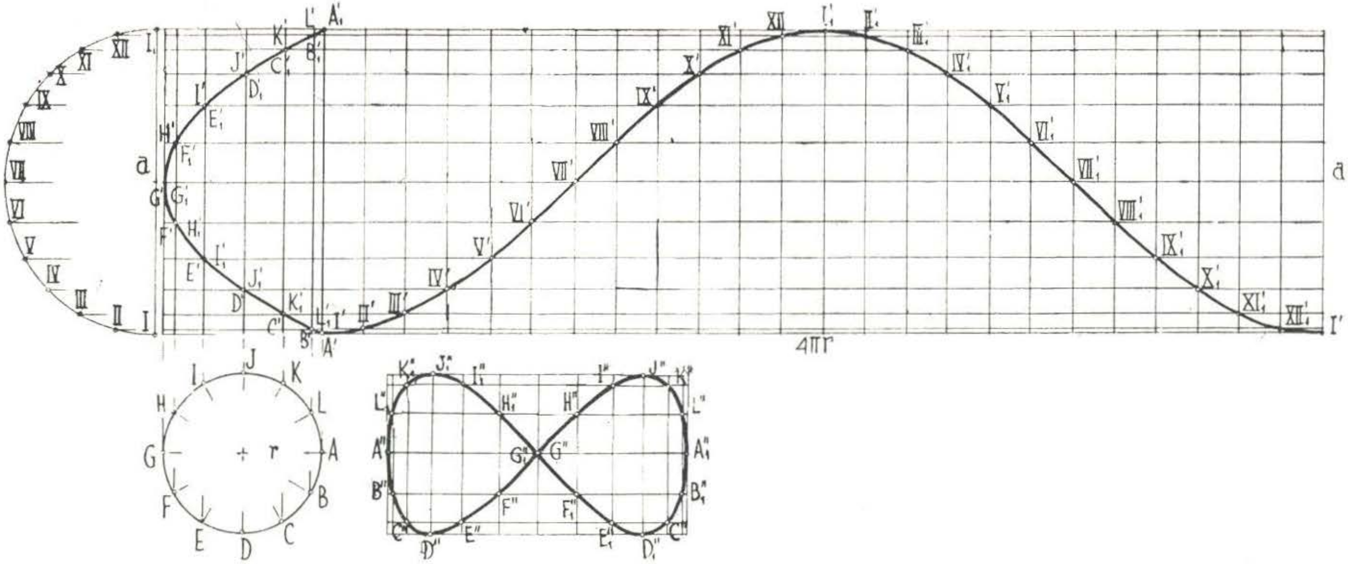

FIG. 11

revessa que determina os pontos indicados corresponderá à Hipopeda Cilíndrica.

Pela situação do ponto origem A situado sôbre a extremidade de um diâmetro paralelo à linha de terra, a curva apresenta pontos cujas projeções verticais B' e L'_1, C' e K'_1 e outros, coincidem dois a dois.

Verifica-se que a curva que une os pontos obtidos, apresenta a forma da uma parábola, e corresponde à projeção vertical da curva revessa (hipopeda cilíndrica) traçada na superfície do cilindro circular.

Efetuemos uma mudança de plano vertical de sorte que o ponto origem A fique situado num plano de perfil que passa pelo eixo. As novas projeções verticais dos pontos serão A'' B'' ... L'', e permitirão o traçado de uma curva com a forma de um oito a qual denominamos de "lemniscata cilindrica".

---

(2) Podemos obter a curva à partir do desenvolvimento da superfície lateral de um cilindro circular de geratrizes verticais (fig. 12). Considerando o retângulo como contôrno aparente vertical de um novo cilindro cujo diâmetro da base é a altura do cilindro inicial, podemos determinar a projeção vertical de duas semi-senóides idênticas e simétricas em relação ao eixo comum, e teremos pontos como I' II' ... XII' e I'_1 II'_1 ... XII'_1.

Ao efetuarmos o enrolamento do retângulo na superfície do cilindro, teremos os pontos A' B' ... L' e A'_1 B'_1 ...... L'_1.

Como na figura, o ponto A pertence a um plano de perfil que passa pelo eixo do cilindro, a curva que une os pontos acima determinam a lemniscata cilíndrica.

A curva obtida apresenta um ponto duplo real em G' G'_1. Passemos ao traçado das projeções da tangente à curva nêste ponto. Com efeito, a tangente à senóide no ponto duplo VII' VII'_1 terá seu traço horizontal no segundo cilindro, determinada pelo comprimento do arco I VII, segundo VII M_1 cuja projeção vertical será VII' M'_1. Esta corta a base do retângulo no ponto P'_1. Transportando O'_1 P'_1 para O' P', podemos traçar as projeções da tangente à lemniscata no ponto duplo G' G'₁ que serão: G P G'₁P'.

Observando a figura vemos que o traço horizontal P da tangente, pode ser obtido pelo traçado de um arco de circunferência de centro G e raio AG (diâmetro da base do cilindro).

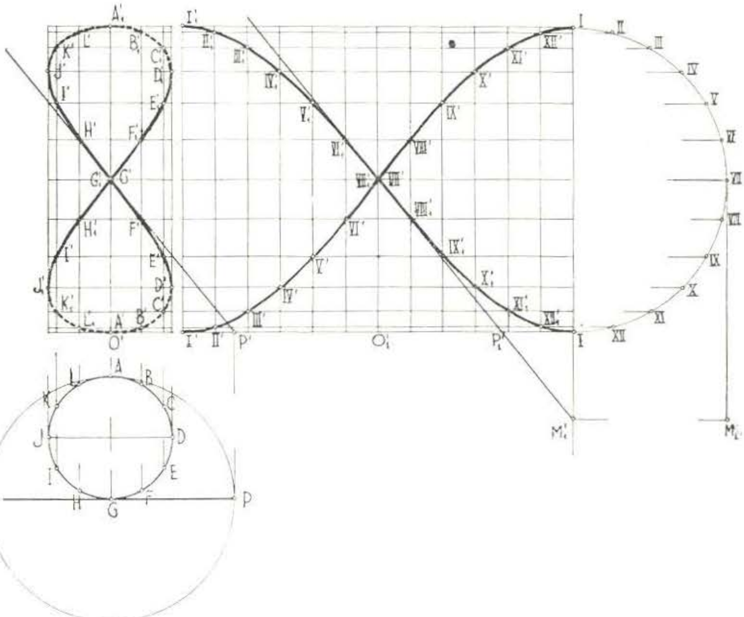

FIG. 12

Em relação à circunferência traçada com este raio faremos observação interessante mais adiante.

Para finalizar podemos simplificar a construção da projeção vertical da hipopeda cilíndrica, dividindo a base do cilindro em 12 partes iguais e também traçar uma semi circunferência de diâmetro igual à altura do cilindro dado, a qual também dividimos em 12 partes iguais. As projeções verticais das geratrizes e as perpendiculares às mesmas geratrizes traçadas pelos pontos de divisão da semi circunsferência, determinam pontos que correspondem à projeção vertical da hipopeda.

Tangente à um ponto qualquer da hipopeda cilíndrica

Na figura 13 vemos um cilindro circular de geratrizes verticais dado por suas projeções em épura.

Tracemos as projeções da hipopeda cilíndrica para cuja obtenção dividiremos a circunferência da base em 12 partes iguais, para obtermos A B .... L, à partir de um ponto situado num plano de frente que passa pelo eixo do cilindro e tracemos as projeções verticais das geratrizes.

Dividindo igualmente em 12 partes iguais a semi circunferência cujo diâmetro é igual a altura do cilindro dado, e pelos pontos de divisão I II....XII, perpendiculares às geratrizes determinam os pontos A' B' C'...L' e A'_1 B'_1 ...L'_1.

Pela situação da origem A a curva se projeta verticalmente segundo uma parábola.

Determinemos igualmente a nova projeção vertical da curva sôbre um plano de perfil e a hipopeda se projetará segundo a lemniscata formada pelos pontos A'' B'' C''...L'' e A''_1 B''_1 ....L''_1.

Suponhamos que o ponto pelo qual se deseja traçar uma tangente, seja E E'_1. A projeção horizontal da mesma, tangencía a circunferência em E e sua projeção vertical tangencía em E'_1 a parábola e sua determinação pode ser efetuada, aplicando-se a propriedade da subtangente, obtendo-se o ponto Q' em que a mesma corta o eixo da parábola.

O ponto Q' é também o traço da tangente sôbre um plano horizontal α que passa pelo ponto duplo (G) da curva, sendo Que a sua projeção horizontal.

A tangente à curva na projeção auxiliar sôbre o plano de perfil poderá ser fàcilmente obtida, pois o ponto (Q) projeta-se agora em Q'' e a reta Q'' E''_1 representa a projeção da tangente.

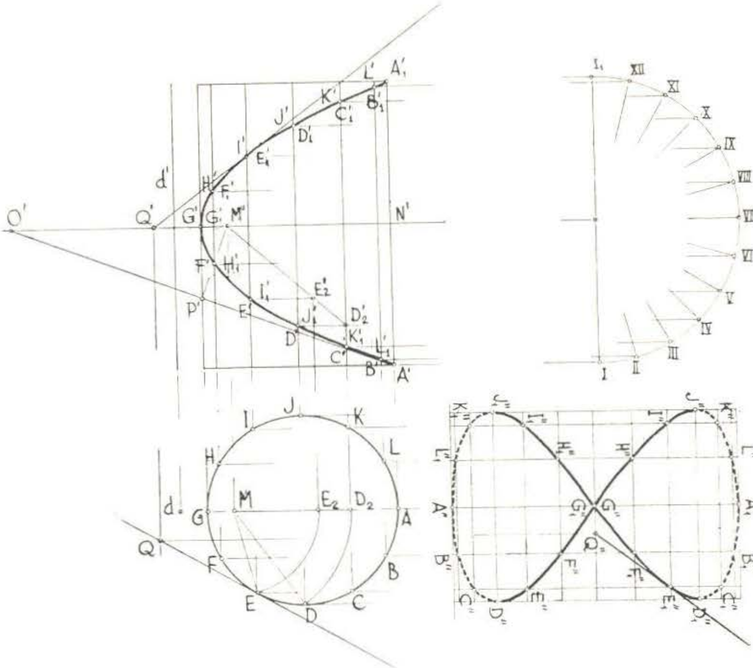

FIG. 13

Desta maneira podemos determinar as projeções da tangente em qualquer ponto da curva, com a observação de que a tangente no ponto (A) será paralela ao plano α.

LUGAR GEOMÉTRICO

Observando a figura 13 podemos verificar que a hipopeda se projeta segundo uma parábola.

Ora uma parábola é o lugar dos pontos de um plano, que equidistam de um ponto fixo "foco" e de uma reta fixa "diretriz".

A parábola projetada verticalmente pela hipopeda, admite um foco M' e uma diretriz d' que se projetam no plano horizontal segundo M e d respectivamente.

Verifiquemos que um ponto (E) quarquer da curva, é equidistante do foco (M) e da diretriz (d). Com efeito, determinemos a verdadeira grandeza das distâncias do ponto (M) à diretriz (d) e ao foco (M).

A verdadeira grandeza do segundo retilíneo M E M'E' é igual ao segmento de reta $M'E'_2$. A distância do ponto (E) à diretriz (d) é dada na projeção horizontal por d E. A igualdade entre dE e $M'E'_2$ era o que desejavamos focalizar. A mesma igualdade verificamos existir entre $M'D'_2$ e d D para um outro ponto qualquer (D) da curva.

Constatamos assim que os pontos da curva revessa (hipopeda cilíndrica) gozam da propriedade de serem equidistantes de um ponto fixo (M) interior à superfície do cilindro e de uma reta fica (d) exterior à superfície e paralela às suas geratrizes.

Fica portanto estabelecido um lugar geométrico de pontos na superfície de um cilindro de revolução, que resulta da aplicação ao espaço da definição da parábola que é uma curva plana e aberta, resultando numa curva revessa fechada: a hipopeda cilíndrica.

A Cissóide de Dioclés

"A Cissóide normal ou regular, é o lugar dos traços das tangentes à hipopeda cilíndrica, sôbre um plano horizontal que passa pelo ponto duplo da curva".

Seja um cilindro circular de geratrizes verticais, dado em épura por suas projeções (fig. 14). Determinemos as projeções da hipopeda traçada em sua superfície e para tal, dividimos a diretriz circular em 12 partes iguais de A a L, tendo como origem A um ponto situado num plano frontal que contém o eixo do cilindro.

Dividindo a semi circunferência que possui como diâmetro a altura do cilindro e traçando pelos pontos de divisão perpendiculares às geratrizes do cilindro, teremos a projeção vertical da hipopeda que nessas condições se apresenta segundo uma parábola.

Determinemos a seguir as tangentes aos diversos pontos da hipopeda, cujas projeções horizontais tangenciam a diretriz nos respectivos pontos e cujas projeções verticais serão obtidas pela aplicação da propriedade da subtangente da parábola.

O plano horizontal que passa pelo ponto duplo da hipopeda, apresenta em épura o traço vertical confundido com o eixo da parábola e os pontos em que as tangentes cortam êste eixo, representam os traços das mesmas sôbre o plano horizontal referido.

Represente-mo-los por $M'M'_1$, $N'N'_1$, $O'O'_1$ $P'P'_1$ e Q' Q'_1 cujas projeções horizontais se localizam sôbre as tangentes à diretriz circular na projeção horizontal, traçadas por H e F, I e E, J e D, K e C, L e B respectivamente nos pontos M e M_1, N e N_1, O e O_1, P e P_1, Q e Q_1.

Êstes pontos estão sôbre uma curva plana que é a Cissóide de Dioclés.

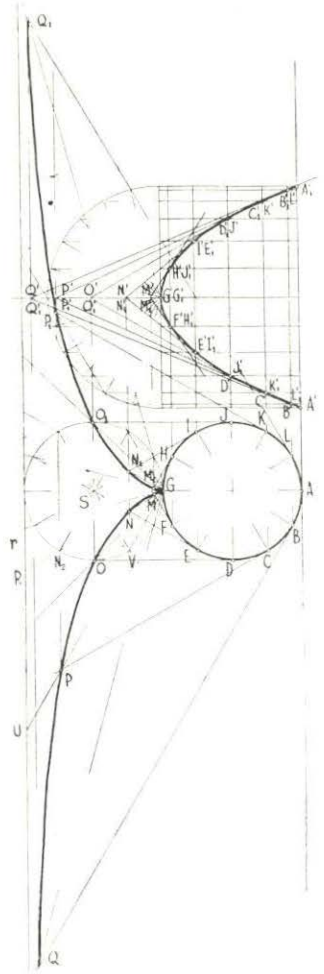

FIG. 14

A tangente à hipopeda em A A'$_1$ é paralela ao plano horizontal e representa um ponto impróprio da Cissóide, cuja assintota é a reta "r".

A assintota "r" é uma reta que dista da circunferência diretriz do cilindro, de um comprimento igual ao seu diâmetro.

Com efeito a tangente à parábola em A' e A'$_1$ corta o eixo da mesma a uma distância do vértice, igual ao diâmetro da circunferência diretriz.

Na projeção horizontal podemos observar que a Cissóide obtida pelos traços das tangentes, corresponde à que se poderia obter geomètricamente em relação à circunferência de centro S, tangente à diretriz do cilindro, com o mesmo raio e a tangente "r".

Se traçarmos por G uma secante qualquer GN, esta corta a circunferência em N_2 e a tangente "r" em R. Notamos a igualdade entre N_2R e GN.

Outra secante GP, determina U e V, de modo que GP = UV, de sorte que a construção planimétrica da cissóide fica bem caracterisada.

Em função desta épura, apresentaremos mais adiante um processo para construção da cissóide de Dioclés.

Equações da parábola e da lemniscata cilíndrica, resultantes da projeção da hipopeda cilíndrica sôbre um plano paralelo ao eixo do cilindro.

Corroborando com a nossa solução gráfica, o ilustre Prof. Luiz Caetano de Oliveira, apresenta a solução analitica da obtenção da parábola e da lemniscata cilíndrica.

A PARÁBOLA

Na figura 15 representada pelas projeções de uma hipopeda cilíndrica traçada na superfície de um cilindro de diretriz circular e geratrizes verticais, o ponto origem da curva na base, pertence a uma geratriz contida em um plano de frente que passa pelo eixo do cilindro, resultando a projeção vertical da hipopeda numa parábola limitada pelas geratrizes do contorno aparente do cilindro.

Seja "a" à altura do cilindro e "r" o raio da circunferência de base. As coordenadas cilíndricas de um ponto (M), qualquer da curva, serão dadas por:

$$\begin{cases} x = r - r \cos \theta . & (1) \\ y = \dfrac{\alpha}{2} \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} & (2) \end{cases}$$

De (1) obtemos: $x = r\ (1 - \cos \theta)$

porém $1 - \cos \theta = 2 \operatorname{sen}^2 \dfrac{\theta}{2}$

$$x = 2\ r \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} \qquad (3)$$

De (2) obtemos:

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{2y}{a}$$

Elevando ao quadrado: $\operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{4y^2}{a^2}$ (4)

Substituindo (4) em (3), temos:

$$x = \frac{8 r y^2}{a^2}$$

$$\text{ou } y^2 = \frac{a^2}{8r} \cdot x .$$

Equação da forma $y^2 = 2p \cdot x$ (parábola)

$$\text{na qual } 2p = \frac{a^2}{8r}$$

A distância do foco ao vértice da parábola será dada por

$$\delta = \frac{a^2}{32r}$$

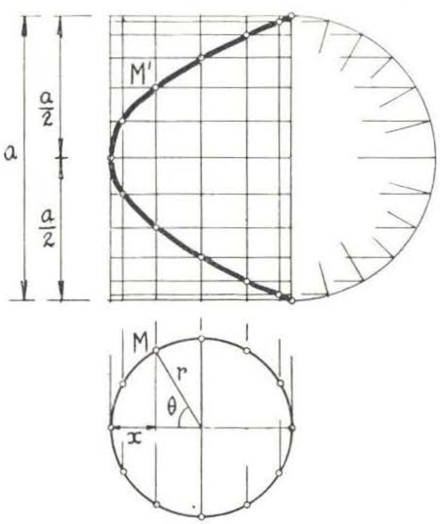

FIG. 15

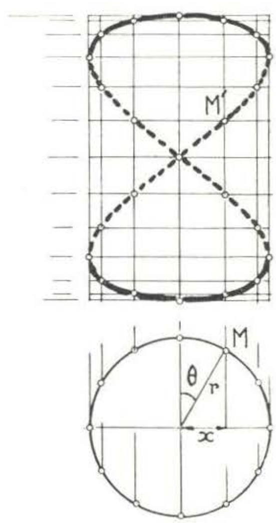

FIG. 16

Na fig. 16 vemos as projeções de uma hipopeda cilíndrica traçada na superfície de um cilindro circular de geratrizes verticais, cujo ponto origem pertence a uma geratriz contida em um plano de perfil que passa pelo eixo do cilindro.

Nestas condições a projeção vertical da hipopeda apresenta o aspecto de um oito.

Chamando de "a" a altura do cilindro e por "r" o raio da circunferência da base, as coordenadas cilíndricas de um ponto (M) da curva são dadas por:

$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} \theta & (1) \\ y = \dfrac{a}{2} \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} & (2) \end{cases}$$

De (1) temos: $\operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \dfrac{\theta}{2} \cos \dfrac{\theta}{2}$

ou $$\operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \qquad (3)$$

De (2) obtemos:

$$\operatorname{sen} \frac{\theta}{2} = \frac{2y}{a} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{4y^2}{a^2} \qquad (4)$$

Substituindo (4) e (3) em (1) temos:

$$x = 2r \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \sqrt{1 - \frac{4y^2}{a^2}}$$

$$\text{ou:} \quad x = \frac{4ry}{a} \sqrt{1 - \frac{4y^2}{a^2}}$$

Elevando ao quadrado:

$$x^2 = \frac{16\, r^2 y^2}{a^2} \left(1 - \frac{4\, y^2}{a^2} \right)$$

ou: $$x^2 = \frac{16\, r^2 y^2}{a^2} - \frac{64\, r^2 y^4}{a^2}$$

Equação do quarto gráu representando a lemniscata.

A logocíclica de Booth ou estrofóide reta e a focal de Quetelet ou estrofóide obliqua, como projeções cônicos da hipopeda ciliindrica.

Gino Loria no volume I do livro "Curve Piane Specialli" denomina a Logocíclica de Booth e a Focal de Quetelet, respectivamente por Estrofóide reta e oblíqua. (pags. 69, 70 e 71).

Estas curvas planas são obtidas como lugar dos focos das cônicas obtidas no cilindro e no cône de revolução, por feixes de planos que passam por uma reta tangente à superfície e perpendicular a uma geratriz. (Teorema de Dandelin-Quetelet).

Admitem uma construção planimétrica que para a estrofoide reta ou logocícielica de Booth, é obtida traçando-se de um ponto M situado no prolongamento do lado de um ângulo reto AOB (fig. 17), transversais M1, M2, M3, ... M8, etc. A seguir marcamos os comprimentos 01, 02, 03, ... à partir de 1, 2, 3, ... sôbre as respectivas transversais, obtendo os pontos I e I_1, II e II_1, III e III_1 e assim por diante. A curva que une os pontos I e II III. .. etc. e I_1 II_1 III_1 ... etc., passando por 0 e pelo ponto M, é a estrofóide reta.

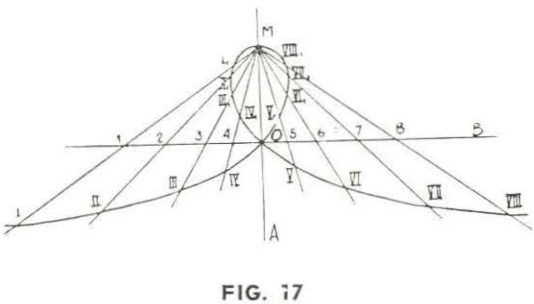

FIG. 17

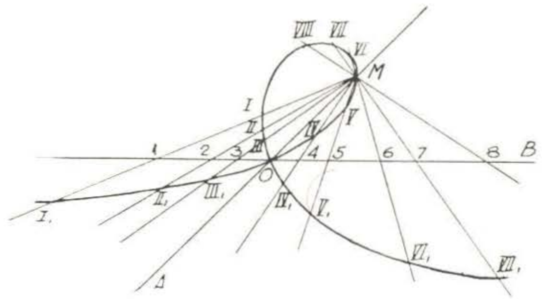

FIG. 18

Se o ângulo AOB fôr agudo, procedendo de igual modo, teremos pontos de uma curva que é a estrofóide oblíqua, vista na figura 18.

A LOGOCÍCLICA DE BOOTH OU ESTROFÓIDE RETA

"A projeção de uma hipopeda cilíndrica, sôbre um plano horizontal que passa pelo ponto duplo, é uma logocíclica de Booth ou estrofóide reta, quando o vértice das projetantes cônicas pertence ao ponto de maior cota da curva".

Com efeito, seja um cilindro circular de geratrizes verticais dado por suas projeções em épura. Dividindo a circunferência da base em 12 partes iguais à partir de um ponto "A" situado sôbre uma geratriz contida num plano de perfil que passa pelo eixo do cilindro, determinemos as projeções verticais das geratrizes que passam pelos pontos de divisão: B, C,... L.

Tracemos na projeção vertical uma semicircunferência de diâmetro igual a altura do cilindro, que também dividimos em 12 partes iguais e pelos pontos de divisão perpendiculares às geratrizes determinam A′ B′ C″ ....L′ e A'_1 B'_1 C'_1 ... L'_1 pelos quais passa a curva correspondente à lemniscata cilíndrica, projeção vertical da hipopeda cilíndrica. (fig. 19).

Tomemos como vértice das projetantes cônicas o ponto cujas projeções A A'_1 correspondem ao de maior cota da curva.

Projetemos do vértice a A'_1 os pontos da curva, determinando os traços das projetantes sôbre um plano horizontal α que passa pelo ponto duplo G G′.

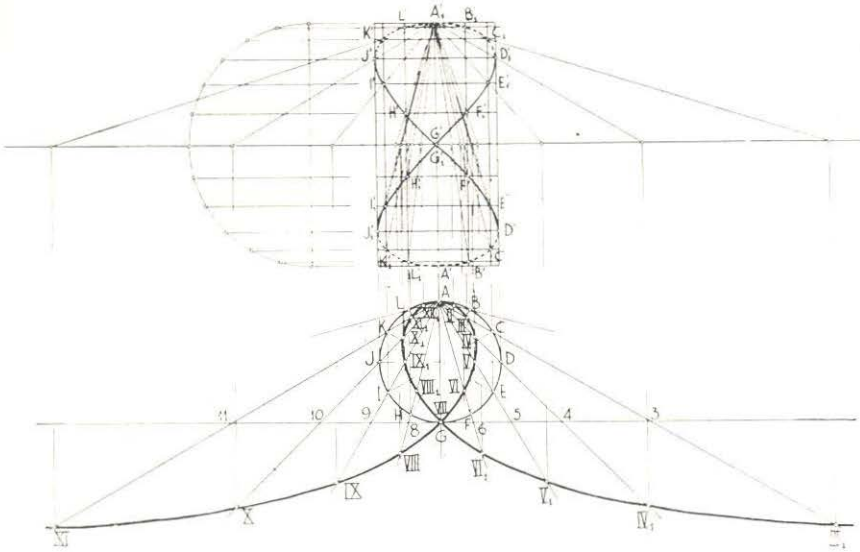

FIG. 19

A projetante AB A'_1 B' terá seu traço sôbre o plano horizontal num ponto cuja projeção horizontal é o ponto II. Do mesmo modo, as projetantes que passam pelos pontos C C'_1, D D', E E' ..... K K', determinam no plano horizontal os traços cujas projeções horizontais são III, IV, ...XI.

O traço da projetante A L A'_1 L' acha-se fora dos limites da nossa épura. A projetante que passa pelo vértice, constituida pela própria tangente à curva nêste ponto, é paralela ao plano horizontal, tendo como traço um ponto impróprio dêste plano.

Igual raciocínio faremos para os pontos L'_1 K'_1 J'_1 .. C'_1 cujas projetantes determinam sôbre o plano horizontal os traços representados pelos pontos XI_1, X_1, IX_1... III_1. O ponto B B'_1 dará uma projetante que terá seu traço fora dos limites da épura.

A curva que une os pontos II III IV .... . XI, A, XI_1 X_1 ....III_1, é uma logocíclica de Booth ou estrofóide reta.

Podemos confirmar o resultado, verificando que o diâmetro AG e a tangente à circunferência da base do cilindro no ponto G, formam entre sí um ângulo reto. As transversais que partem de A e passam por B C D,... etc, cortam a tangente à circunferência em G, nos pontos 3 4 5,.... 11. As distâncias G6, G5, G4, são respectivamente iguais a 6 VI e 6 VI_1, 5 V e 5 V_1, 4 IV e 4 IV_1 e assim sucessivamente, vemos pois que o resultado da épura coincide com a construção planimétrica da curva.

A Focal de Quetelet ou estrofoide obliqua

"A projeção de uma hipopeda cilíndrica sôbre um plano horizontal que passa pelo ponto duplo, é uma focal de Quetelet ou estrofóide oblíqua, quando o vértice das projetantes cônicas encontra-se em um ponto qualquer da curva, exclusão feita do ponto de maior cota e do ponto duplo".

Seja um cilindro de diretriz circular e geratrizes verticais (fig. 20) dado por suas projeções em épura. Dividindo a circunferência da base em 12 partes iguais à partir de um ponto A situado sôbre uma geratriz contida num plano de perfil que passa pelo eixo do cilindro, determinemos as projeções verticais das geratrizes que passam pelos pontos de divisão: B, C, D, ... L.

Na projeção vertical, tracemos uma semi circunferência de diâmetro igual a altura do cilindro, a qual dividimos em 12 partes iguais e pelos pontos de divisão tracemos perpendiculares às geratrizes cujas interseções com as mesmas determinam A', B', C', . . . L' e A'_1, B'_1 . . . . L'_1, pelos quais passa a curva que representa a lemniscata cilíndrica, projeção vertical da hipopeda cilíndrica.

Consideremos o vértice das projetantes cônicas represntado pelo ponto (J) cujas projeções são J J'.

Determinemos os traços das diversas projetantes sôbre um plano horizontal que passa pelo ponto duplo da curva.

A projetante JA J'A' terá seu traço sôbre o plano referido, num ponto cuja projeção horizontal corresponde a I.

A projetante JB e J'B' terá seu traço correspondente em II. JC J'C' no ponto III e assim sucessivamente.

A projeção cônica do vértice (J) será dada pela tangente à curva nêste ponto e cujo traço será o ponto X.

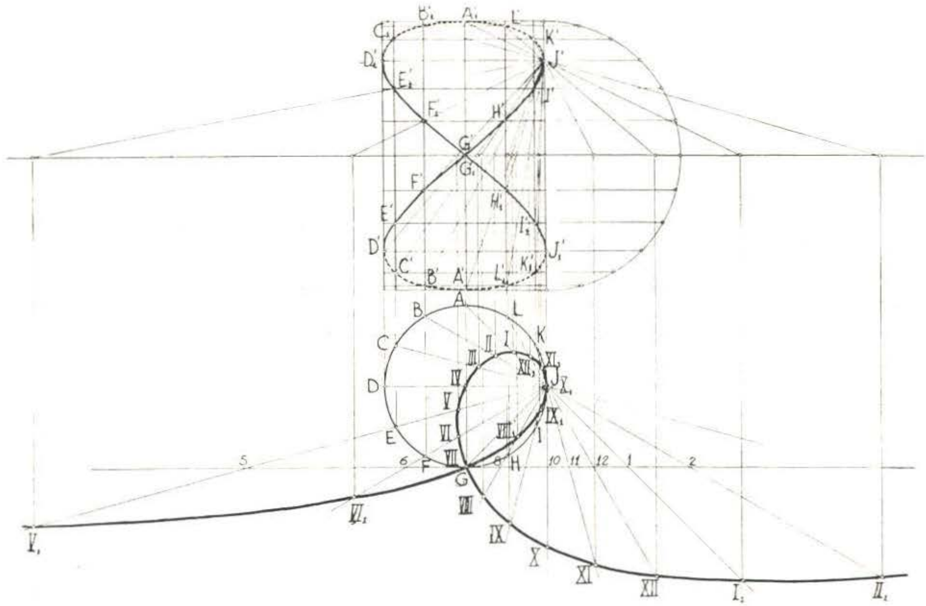

FIG. 20

Do mesmo modo as projetantes JA J'A'$_1$ e JB J'B'$_1$ determinam os traços I$_1$ e II$_1$.

A projetante JD J'D'$_1$ sendo paralela ao plano, terá como traço um ponto impróprio dêste plano.

Completadas as determinações dos traços das projetantes, a curva que une os mesmos, corresponderá à focal de Quetelet ou estrofóide oblíqua.

Para verificarmos a exatidão da curva obtida, observemos que a corda J G e a tangente à circunferência no ponto G formam um ângulo agudo. As transversais traçadas por G, cortam a tangente à circunferência nos pontos 1, 2, 3, 5, 6, etc. Os comprimentos G1 G2 G5 G6, são respectivamente iguais a 1 I e 1 I$_1$, 2 II e 2 II$_1$, 5 V e 5V$_1$, 6V e 6V$_1$, etc.

Portanto, o resultado a que chegamos na épura, coincide exatamente com a construção planimétrica da curva.

A circunferência

"A projeção cônica de uma hipopeda cilíndrica, sôbre o plano da diretriz do cilindro, quando o vértice das projetantes cônicas encontra-se no ponto duplo da curva, é uma circunferência cujo raio é igual ao diâmetro da base do cilindro".

Consideremos um cilindro de diretriz circular de geratrizes verticais (fig. 21), dado por suas projeções em épura. Tomando como ponto origem da hipopeda, um ponto da base pertencente a uma geratriz contida num plano de frente que passa pelo eixo do cilindro, determinemos a projeçãovertical da curva que se apresenta segundo uma parábola real, limitada pelas geratrizes do contôrno aparente do cilindro.

Efetuemos a divisão da circunferência da base em 12 partes iguais, determinando as projeções verticais das geratrizes que passam pelos pontos de divisão: A, B, C .... L.

Em seguida traçamos na projeção vertical uma semi circunferência cujo diâmetro seja igual a altura do cilindro e dividindo-a em 12 partes iguais, traçamos por estes pontos perpendiculares às geratrizes do cilindro que determinam os pontos A' B' C' ... L' e A'_1, B'_1 C'_1 ....L'_1. A curva que une os pontos obtidos é uma parábola representativa da projeção vertical da hipopeda.

Tomemos o ponto duplo (G) da hipopeda, como vértice das projetantes cônicas e efetuemos o traçado das projeções de cada projetante.

As projeções horizontais das projetantes concorrem ao ponto G e as respectivas projeções verticais ao ponto G' G'_1.

Determinemos os traços das projetantes, sôbre o plano da base do cilindro, obtendo os pontos: II, III, IV, ... XII e I_1, II_1, III_1, IV_1, ... XII_1. Verifiquemos que os mesmos, se situam numa circunferência cujo centro é a projeção horizontal "G" do vértice das projetantes e cujo raio é igual ao diâmetro da circunferência da base do cilindro.

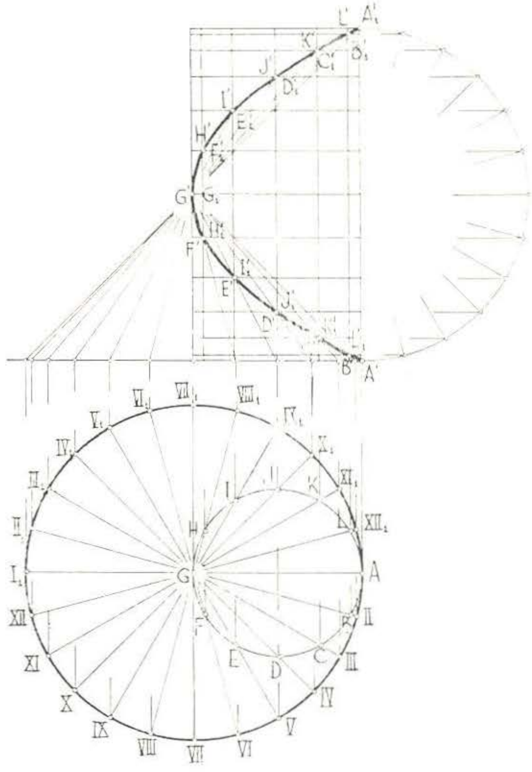

FIG. 21

A obtenção da circunferência resultante da projeção cônica da hipopeda, leva-nos à conclusão de que a mesma é diretriz de um cône de resolução cujo vértice é (G) e cujas diretrizes, são as projetantes cônicas que acabamos de traçar.

A observação da figura mostra que cada ponto da hipopeda como por exemplo: o ponto cujas projeções são D D', é a interseção da geratriz G IV G' IV' do cône, com a superfície do cilindro.

Igualmente, o ponto cujas projeções são E E', é a interseção da geratriz do cône GV G'V' com a superfície do cilindro dado.

Podemos afirmar portanto, que a hipopeda cilindrica é a *curva de interseção de um cilindro circular de geratrizes verticais, com um cône de revolução de duas fôlhas cuja distância entre as bases é igual a altura do cilindro, seu eixo é uma geratriz do cilindro, seu vértice é equidistante das bases e o raio das mesmas é igual ao diâmetro da base do cilindro.*

Projeções cilindricas obliquas da hipopeda

O TRIFÓLIO OBLÍQUO

O TRIFÓLIO RETO

A FOLHA DUPLA RETA

"A projeção de uma hipopeda sôbre um plano perpendicular ao eixo do cilindro e paralelamente à uma direção frontal que forma com o eixo do cilindro um ângulo igual ao formado pela tangente à curva no ponto duplo, é um trifólio oblíquo, um trifólio reto ou uma folha dupla reta, segundo o ponto duplo da curva acha-se respectivamente numa geratriz contida em um plano que passando pelo eixo do cilindro, inclina-se de 30° com o plano vertical de projeção, é paralelo ao mesmo (plano frontal) ou é perpendicular ao mesmo (plano de perfil)".

O TRIFÓLIO OBLÍQUO

Como já vimos, o trifólio oblíquo pode ser considerado como uma transformação especial efetuada numa circunferência.

Seja um cilindro de geratrizes verticais, dado por suas projeções em épura (fig. 22).

Efetuemos a divisão da circunferência da base em 12 partes iguais, considerando o ponto origem situado numa geratriz pertencente a um plano vertical passando pelo eixo e inclinado de um ângulo de 30° com o plano vertical de projeção. A projeção horizontal da hipopeda será a circunferência dada pelos pontos A, B, C, ... L.

Determinemos as projeções verticais das geratrizes que passam pelos pontos de divisão da base do cilindro e tracemos uma semi circunferência na projeção vertical, de diâmetro igual a altura do cilindro, a qual dividiremos em 12 partes iguais, e por cujos pontos conduzimos perpendiculares às geratrizes do cilindro que darão A', B' C' ....L', e A'_1 B'_1, C'_1 .... L'_1. A curva que une os pontos obtidos na projeção vertical, será a projeção correspondente da hipopeda.

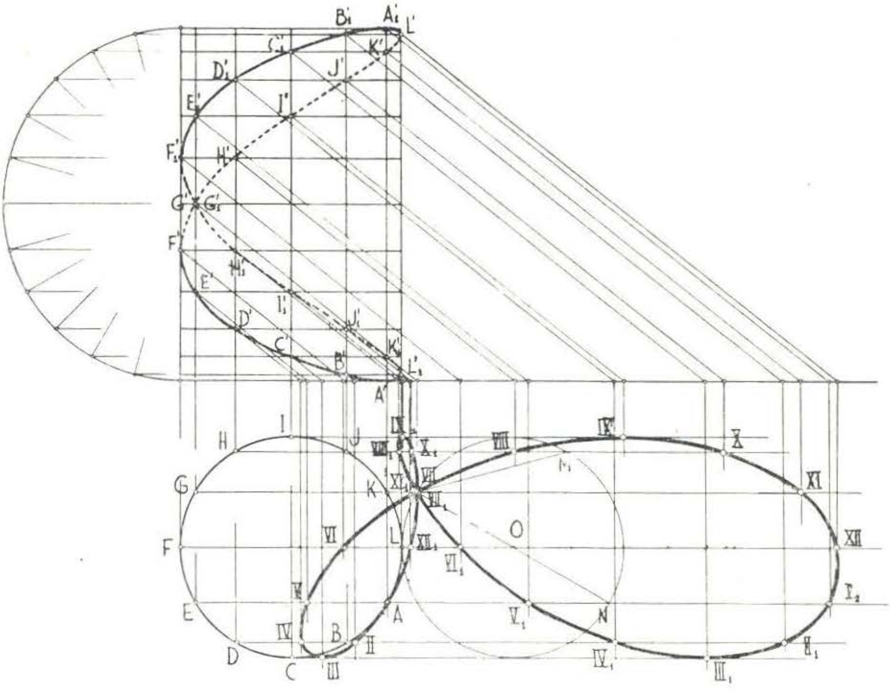

FIG. 22

Tracemos pelas projeções dos pontos da curva, projetantes frontais e paralelas à direção da tangente à curva no ponto duplo, determinando seus traços no plano da base do cilindro.

Com efeito, as projetantes que passam pelos pontos cujas projeções são B B', C C', D D' ... etc., terão seus traços em II, III, IV, etc.

A projetante que passa pelo ponto duplo G $G'G'_1$, também passa pelo ponto K K'_1 e seu traço no plano da base do cilindro será um ponto triplo VII VII_1 XI_1.

A curva que une os traços das projetantes, apresenta o aspecto de um trifólio oblíquo e possui o ponto triplo VII VII_1 XI_1 mencionado.

Procuremos verificar se a curva obtida apresenta realmente as propriedades indicadas para o trifólio oblíquo:

Com efeito, tracemos uma circunferência de centro O e passando pelo ponto triplo da curva, cujo raio seja igual ao da diretriz circular do cilindro dado, veremos ser possível a seguinte construção:

Do ponto triplo, traçamos uma corda qualquer VII M, observemos que os comprimentos VII M, M X_1 e M X, são iguais entre si. Outra corda qualquer VII N, permite verificar a igualdade entre VII N e N I e N I_1.

A propriedade se repetirá para todos os pontos da curva, somos levados a concluir que o resultado da épura, coincide com a construção planimétrica da curva.

Mais adiante proporemos um processo para a construção planimétrica da curva, deduzido da épura que ora apresentamos.

O TRIFÓLIO RETO

"A projeção de uma hipopeda cilíndrica sôbre um plano perpendicular ao eixo do cilindro e paralelamente à uma direção frontal que forme com o eixo, ângulo igual ao que a tangente no ponto duplo da curva forma com o mesmo, quando o ponto origem se encontra sôbre uma geratriz contida num plano de frente que passa pelo eixo, é um trifólio reto".

Consideremos um cilindro circular de geratrizezs verticais (fig. 23) e diretriz circular, dado por suas projeções em épura. Dividindo a circunferência da base em 12 partes iguais, tendo como origem um ponto A situado sôbre uma geratriz contida em um plano de frente que passa pelo eixo, teremos pontos: B, C, D, E, ... L, da projeção horizontal da hipopeda.

Tracemos as projeções verticais das geratrizes que passam pelos pontos de divisão da base e em seguida uma circunferência de diâmetro igual a altura do cilindro, a qual dividimos em 12 partes iguais. Pelos pontos de divisão desta, as perpendiculares às geratrizes determinam os pontos A', B', C', D', ... L' e A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, ... L'_1 que darão a projeção vertical da hipopeda, segundo um parábola real.

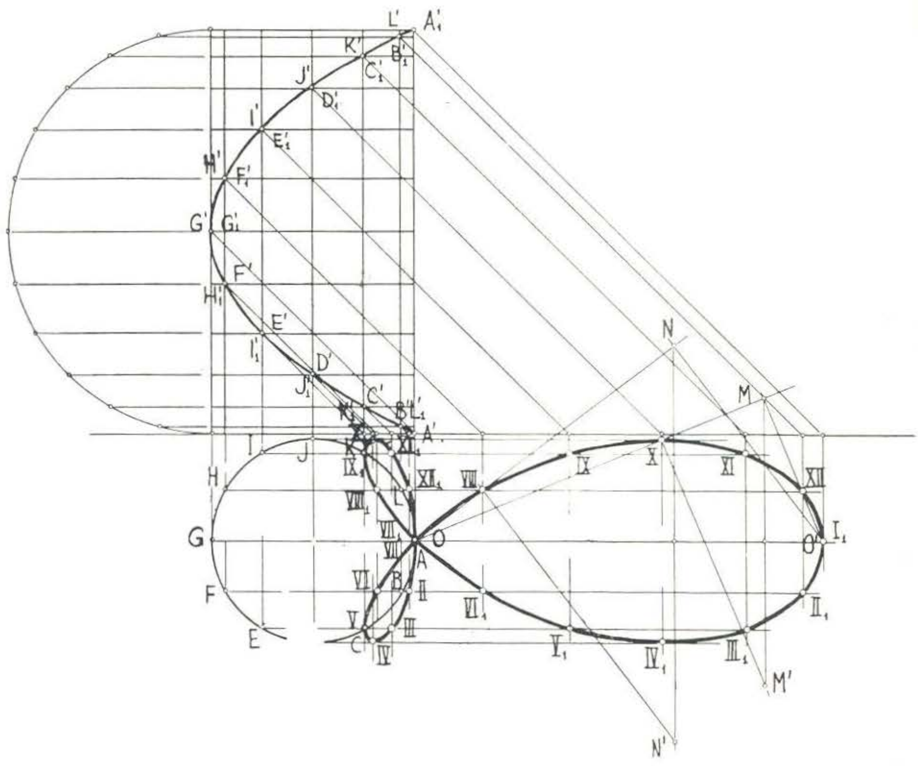

FIG. 23

Nessas condições, a tangente no ponto duplo tornada frontal, passa pelo ponto origem A A'. Tracemos pois pelos pontos da hipopeda, projetantes paralelas a G A G' A'. Os traços das referidas projetantes sôbre o plano da base do cilindro, determinam pontos: II, III, IV, V, ... XII, eI_1, II_1, III_1 ... XII_1. A curva que une os pontos achados, corresponde a um trifólio reto.

Com efeito, observemos a figura , consideremos os pontos O , O' e tomemos o ponto X como exemplo.

Tracemos por O a reta OX e a perpendicular traçada por O' encontra a mesma prolongada em M.

A perpendicular a OM tirada por M' simétrico de M em relação a OO', determina o ponto X, do trifólio reto.

A mesma construção pode ser verificada para o ponto VIII.

Verificamos portanto, que a construção planimétrica da curva, coincide com a curva obtida em nossa épura.

Mais adiante, daremos outra construção para o trifólio reto em função da épura que obtivemos, pois como pode-se observar a construção existente é pouco precisa e trabalhosa.

A FOLHA DUPLA RETA

"A projeção de uma hipopeda cilíndrica sôbre o plano da base do cilindro e paralelamente a uma direção frontal cuja inclinação com o eixo do cilindro seja igual ao que a tangente no ponto duplo da curva forma com o mesmo eixo, quando o ponto duplo da hipopeda pertencer a um plano de perfil que contem o eixo do cilindro, é uma fôlha dupla reta".

Imaginemos um cilindro circular de geratrizes verticias e dividindo a base em 12 partes iguais tendo como origem o ponto A situado sôbre uma geratriz contida em um plano de perfil que passa pelo eixo, obtemos: B, C, D, ... L pontos da projeção horizontal da hipopeda (fig. 24).

Nestas condições a projeção vertical da hipopeda será uma lemniscata cilíndrica obtida pela divisão da semicircunferência que tem para diâmetro a altura do cilindro. O traçado de perpendiculares às geratrizes do cilindro que passam pelas divisões da base, determinam sôbre as mesmas os pontos A'_1, B'_1, C'_1, ... L'_1 e A', B', C', ... L'.

Determinemos em seguida, as projeções da tangente à curva no ponto duplo G G'. Na projeção horizontal tracemos com abertura de compasso G A e centro em G a semicircunferência que corta a tangente à circunferência no ponto VII, o qual corresponde ao traço da tangente, no plano da base do cilindro. A projeção vertical desta tangente será G'VII'.

Traçando-se pelos demais pontos da curva projetantes paralelas a tangente no ponto duplo e determinando seus traços no plano da base do cilindro, obtemos os pontos II, III, IV,...XII e I_1, II_1, III_1, IV_1 ....XII_1.

A curva que une os pontos obtidos apresenta um ponto de reversão em VII e corresponde à fôlha dupla reta.

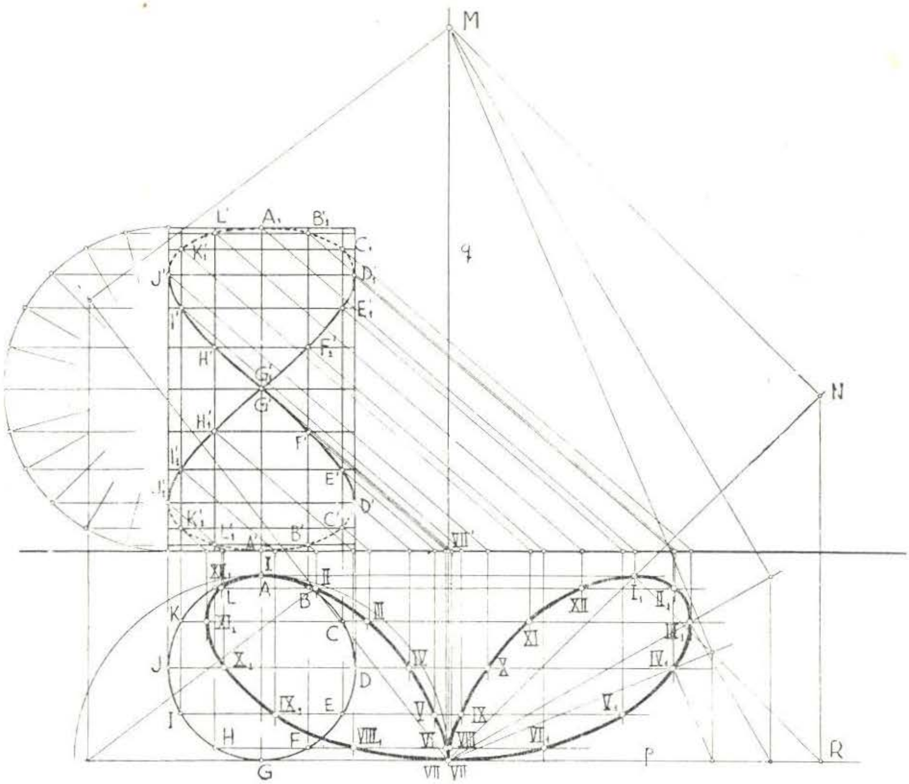

FIG. 24

A fôlha dupla reta citada por Gino Loria, apresenta uma construção planimétrica a qual coincide com a curva obtida em nossa épura.

Com efeito, designando por "p" e "q" respectivamente a tangente à circunferência da base do cilindro no ponto G e a tangente à fôlha dupla no ponto de reversão e considerando o ponto M sôbre a reta "q", podemos verificar o seguinte traçado:

Pelo ponto VII conduzimos uma reta que passa por I_1. Traçamos por M uma perpendicular M N a esta reta. Seja R o pé da perpendicular traçada de N à reta "p". Finalmente conduzindo por R uma perpendicular a VII N, obtemos o ponto I_1. Vemos pois que o ponto I_1 satisfaz a condição de pertencer à curva. Na épura acham-se indicadas as obtenções de alguns pontos de acôrdo com o mesmo princípio e o lugar dos pontos obtidos pelo mesmo processo, é uma fôlha dupla reta.

Mais adiante, darems um processo para a construção planimétrica da fôlha dupla reta,. o qual foi deduzido das propriedades encontradas na épura.

Gino Loria em sua obra: "Curve Piane Speciali", 1.º vol., à pag. 224 denomina de parábolas virtuais a curvas do 4º grau, cuja construção planimétrica fizemos referência no início dêste trabalho.

É de nosso desejo mostrar agora, que as curvas citadas por Gino Loria, correspondem a projeções verticais de hipopedas cilíndricas traçadas na superfície de cilindros circulares de geratrizes verticais.

Seja um cilindro de diretriz circular e geratrizes verticais dado por suas projeções em épura e cuja altura seja o dôbro do diâmetro da base. (fig. 25).

Dividindo a circunferência da base em 12 partes iguais à partir de um ponto A situado sôbre uma geratriz que é contida num plano vertical cujo traço horizontal é inclinado de 30º com a linha de terra, obtendo os pontos B, C, D, ...L da projeção horizontal da hipopeda.

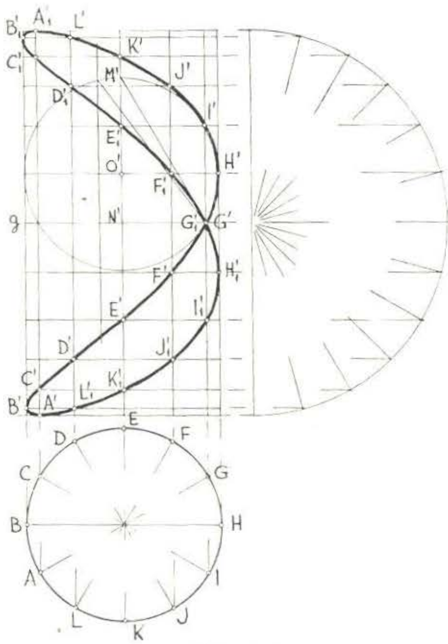

FIG. 25

Traçando na projeção vertical e dividindo em 12 partes iguais a semi circunferência de diâmetro igual a altura do cilindro e tirando pelos pontos de divisão perpendiculares às geratrizes do cilindro, teremos os pontos A', B', C', D'. . . . L' e A'_1, B'_1, C'_1 . . . L'_1 que permitem o traçado de uma curva, a qual apresenta as propriedades citadas por Gino Loria.

Para verificá-las, tracemos na projeção vertical uma circunferência de centro O' tangente às geratrizes de contôrno aparente do cilindro e passando pelo ponto duplo G' G'_1. Seu raio será igual ao da diretriz circular do cilindro.

Seja "g" a corda que passa por G' e paralela ao diâmetro horizontal da circunferência.

Se traçarmos por G' uma corda qualquer G'M' e por M a perpendicular a "g" segundo M'N', verificamos a igualdade entre os comprimentos:

$$G'M' = N'K' = N'K'_1$$

Esta propriedade se repetirá em relação a qualquer outra corda traçada por G'.

Outra parábola virtual citada por Gino Loria à pag. 225 pode ser obtida pela projeção vertical de uma hipopeda traçada na superfície de um cilindro circular, cuja altura é igual ao diâmetro da base.

Com efeito, seja na fig. 26 um cilindro circular de geratrizes verticais dado por suas projeções em épura e cuja altura é igual ao diâmetro da base.

Efetuemos a divisão da circunferência da base em 12 partes iguais à partir de um ponto A situado sôbre uma geratriz contida num plano vertical que passando pelo eixo, possui o traço horizontal inclinado de 30° com a linha de terra.

Na projeção vertical, a semicircunferência de diâmetro igual a altura do cilindro, dividida em 12 partes iguais, permite obter por meio de perpendiculares às geratrizes do cilindro, tiradas pelos pontos de divisão, os pontos: A', B', ... L' e A'_1, B'_1 . . . . L'_1, que determinam a projeção vertical da hipopeda.

À seguir com centro em O descrevemos uma circunferência de diâmetro M' N' tangente ao quadrado do contôrno aparente vertical do cilindro.

Sendo I'_1 um dos pontos de interseção da circunferência com a parábola virtual, tracemos pelo mesmo ponto, uma corda qualquer I'_1 P'. Conduzindo por P' uma perpendicular ao diâmetro M' N', esta corta a curva em dois pontos R' e R'_1.

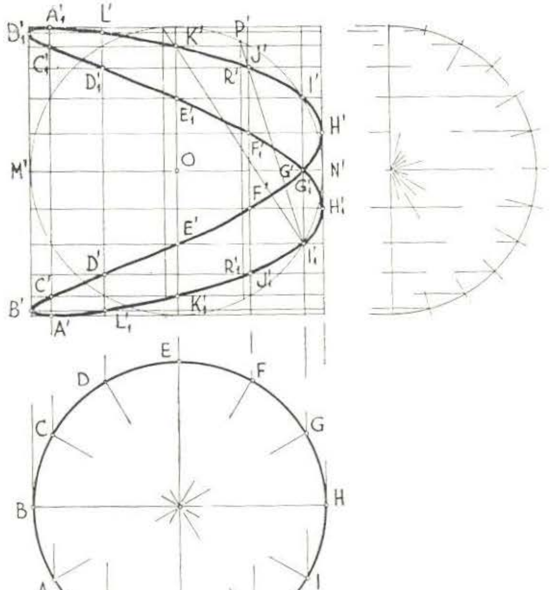

FIG. 26

Podemos verificar que a distância R' R'_1 é igual a corda I'_1 P' e fica dividida ao meio pelo diâmetro M' N' da circunferência de centro O'.

Esta propriedade pode ser constatada para outros pontos da curva, portanto nestas condições a projeção vertical da hipopeda, é precisamente a parábola virtual citada por Lino Loria.

A BESÁCEA DE GREGOIRE DE SAINT-VINCENT

O ilustre Prof. Dr. Álvaro Rodrigues cita a Besácea de Gregoire de Saint-Vincent, como sendo a projeção vertical da hipopeda de Eudóxio de Cnide que é a curva obtida pela interseção entre um cilindro circular de geratrizes verticais, com uma esfera (o cilindro tangencía interiormente a esfera, o raio da esfera é igual ao diâmetro da base do cilindro) quando os eixos das duas superfícies estão contidos num plano vertical cujo traço horizontal inclina-se de 45° com a linha de terra.

Nossa intenção será obter a Besácea de Gregoire de Saint-Vincent simplesmente pela projeção vertical de uma hipopeda cilíndrica, traçada na superfície de um cilindro circular.

Com efeito, consideremos um cilindro de diretriz circular e de geratrizes verticais, dado por suas projeções em épura fig. 27 cuja altura é o dobro do diâmetro da base.

Dividindo a circunferência da base em 12 partes iguais, a partir de um ponto situado numa geratriz contida em um plano vertical que passando pelo eixo do cilindro, possue o traço horizontal inclinado de 45^{o} com a linha de terra, os pontos A B C, D, ... L, determinam a projeção horizontal da hipopeda.

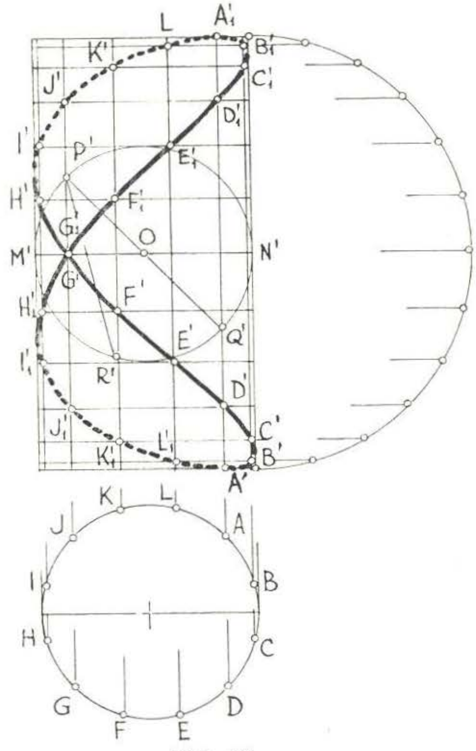

FIG. 27

Determinando a projeção vertical das geratrizes que passam pelos pontos de divisão da base, traçamos nesta projeção uma semi-circunferência cujo diâmetro seja a altura do cilindro. Dos pontos de divisão da semicircunferência em 12 partes iguais, perpendiculares às geratrizes permitem localizar A', B', C', . . . L' e A'_1, B'_1, C'_1, ... L'_1 pontos pelos quais traçamos a curva que corresponde à projeção vertical da hipopeda cilíndrica e também representa a "beséeca de Gregoire de Saint-Vincent".

Para verificarmos, tracemos na projeção vertical uma circunferência de centro O, tangente às geratrizes do contôrno aparente do cilindro, cujo diâmetro horizontal passe pelo ponto duplo G' G'$_1$. Seja P' o ponto em que a circunferência corta a projeção da geratriz que passa pelo ponto duplo da curva.

Tracemos por P' duas cordas quaisquer P'Q' e P'R' e por Q' e R' perpendiculares ao diâmetro M'N' da circunferência.

Podemos verificar que aplicando as distâncias P'R' e P'Q' sôbre as respectivas perpendiculares, à partir do diâmetro M'N' obtemos os pontos K' K'$_1$ e A' A'$_1$ respectivamente.

Vemos portanto, que o resultado da nossa épura, coincide perfeitamente com a construção planimétrica da besácea de Gregoire de Saint-Vincent, e que esta pode ser considerada como caso particular da curva que apresentamos.

A PARÁBOLA VIRTUAL DE GREGOIRE DE SAINT-VINCENT

Esta é um caso especial das besáceas do respectivo autor, sendo obtida pela projeção vertical da curva de interseção entre um cilindro circular de geratrizes verticais e uma esfera cujo raio é igual ao diâmetro da base do cilindro, este tangenciando interiormente a esfera, estando os eixos das duas superfícies contidos no mesmo plano de frente.

A construção planimétrica da parábola virtual de Gregoire de Saint-Vincent, se efetua, quando numa circunferência de diâmetro A B que será considerado como eixo de simetria da curva, tomamos como origem o ponto A. Traçando-se uma corda qualquer AM e de sua extremidade M uma perpendicular ao eixo, marcamos na perpendicular de um e de outro lado do diâmetro A B, o comprimento da corda AM, obtemos P e P', cujo lugar é a parábola virtual de Gregoire de Saint-Vincent. (fig. 28-A)

É desejo nosso, focalizar a parábola virtual, como caso particular da hipopeda cilíndrica, traçada na superfície de um cilindro circular de geratrizes verticais, que tenha como altura o dôbro do diâmetro da base e o ponto origem na base, pertence a uma geratriz contida em um plano frontal que passa pelo eixo do cilindro.

Nessas condições, consideremos um cilindro circular, dado por suas projeções em épura (fig. 28-B) e partindo de um ponto A da base satisfazendo a condição acima imposta, a divisão da circunferência em 12 partes iguais: A, B, C, ... determinam a projeção horizontal da curva. (Observação: — para simplificação do nosso desenho, dividimos sòmente a semicircunferência em 6 partes iguais).

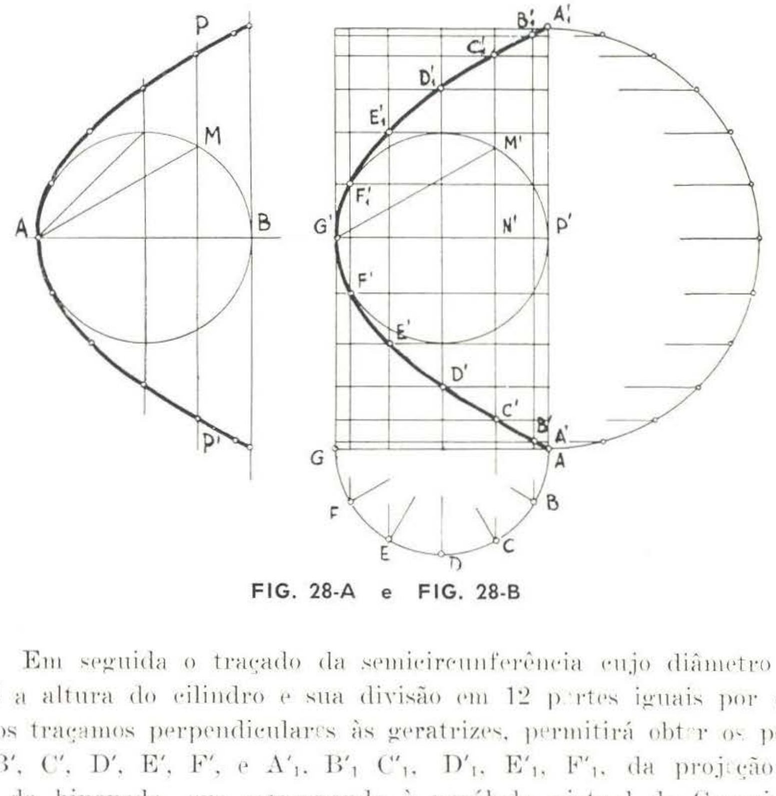

FIG. 28-A e FIG. 28-B

Em seguida o traçado da semicircunferência cujo diâmetro seja igual a altura do cilindro e sua divisão em 12 partes iguais por cujos pontos traçamos perpendiculares às geratrizes, permitirá obter os pontos A', B', C', D', E', F', e A'_1, B'_1 C'_1, D'_1, E'_1, F'_1, da projeção vertical da hipopeda, que corresponde à parábola virtual de Gregoire de Saint-Vincent.

Podemos fazer tal afirmação, pois se traçarmos pelo ponto G' uma circunferência de diâmetro G'P' que tangencía o contôrno aparente vertical do cilindro e uma corda qualquer G'M', a perpendicular M'N' ao diâmetro, permitirá verificar a igualdade existente entre N'C' = $N'C'_1$ = G'M'.

A propriedade se verifica para qualquer ponto da curva.

Desejamos assinalar que a obtenção da curva foi feita pelo raciocínio geral estabelecida para a hipopeda cilíndrica que corresponde à interseção do cilindro circular, com a superfície de um cône de revolução de duas fôlhas.

A LEMNISCATA DE GERONO

A lemniscata de Gerono é apresentada como resultante da interseção entre a superfície de um cilindro circular e uma esfera, cujo raio é igual ao diâmetro da base do cilindro, o qual tangencía interiormente a esfera e os eixos das duas superfícies estão contidos num mesmo plano de perfil.

Como a besácea de Gregoire de Saint-Vincent, a lemniscata de Gerono será focalisada como caso particular da lemniscata cilíndrica. Basta que consideremos um cilindro de diretriz circular e geratrizes verticais cuja altura seja o dôbro do diâmetro da base e a projeção vertical da hipopeda cilíndrica cujo ponto duplo pertencer a um plano de perfil que passe pelo eixo do cilindro, se apresentará segundo a lemniscata de Gerono.

Consideremos por um cilindro de diretriz circular e geratrizes verticais, cuja altura é igual ao diâmetro da base, dado por suas projeções em épura (fig. 29).

Dividindo a circunferência da base em 12 partes iguais à partir de um ponto A situado numa geratriz contida num plano de perfil que passa pelo eixo, teremos os pontos: B, C, D, ...L, da projeção horizontal da hipopeda.

Traçando na projeção vertical um semicircunferência de diâmetro igual a altura do cilindro, e pelos pontos de divisão, perpendiculares às projeções verticais das geratrizes, obtemos os pontos A', B', C',...L' e A'_1, B'_1, C'_1 ..... L'_1, pelos quais passa a curva que corresponde à lemniscata cilíndrica e também representa a lemniscata de Gerono.

Para verificarmos, tracemos na projeção vertical uma circunferência de centro O', tangente às geratrizes de contôrno aparente do cilindro e passando pelo ponto duplo G' G'_1.

De um ponto qualquer P' da circunferência, tracemos uma perpendicular P'Q' à reta que tangencía a circunferência no ponto duplo G' G'_1. Sôbre a perpendicular, tomamos os comprimentos G'P' e G'Q' à partir do ponto R', de um e do outro lado, para obtermos os pontos C' C'_1 e E' E'_1.

Vemos portanto que o resultado da nossa épura, coincide exatamente com a construção planimétrica da lemniscata de Gerono e que podemos desta forma, considerá-la como caso particular da lemniscata cilíndrica.

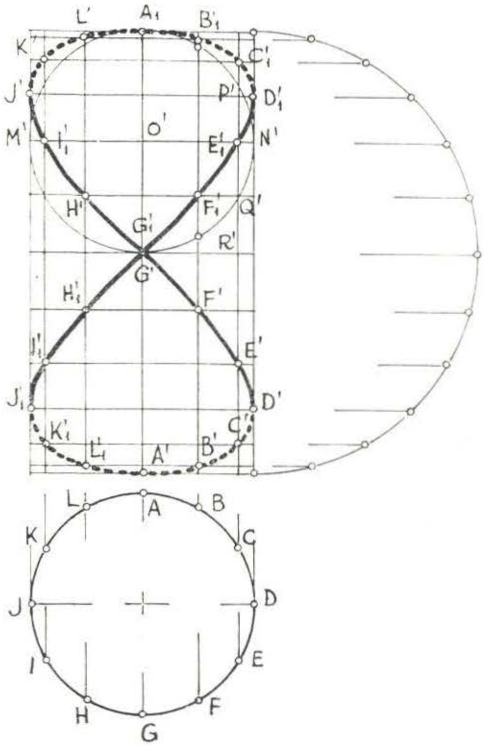
L'
A₁
B'₁
K'
C'₁
J'
P'
D'₁
M'
I'₁
O'
E'₁
N'
H'
F'₁
Q'
G'₁
R'
G'
H'₁
F'
I'₁
E'
J'₁
D'
K'₁
C'
L'₁
A'
B'
L
A
B
K
C
J
D
I
E
H
G
F

FIG. 29

Conclusão

É nosso desejo inicial, considerar a Hipopeda Cilíndrica como uma curva de caráter geral, porque a mesma pode ser traçada na superfície de qualquer cilindro de diretriz circular e de geratrizes verticais.

A hipopeda cilíndrica admite como caso particular, a hipopeda de Eudóxio de Cnide, quando o cilindro sôbre a qual fôr traçada apresenta como altura, o dobro do diâmetro da base.

A hipopeda cilíndrica como vimos pode ser obtida pela interseção da superfície de um cilindro circular de geratrizes verticais, com a de um cône de revolução de duas fôlhas, quando o eixo dêste, coincide com uma geratriz do cilindro, a distância entre as bases é igual a altura do cilindro e o raio da base do cône é igual ao diâmetro da circunferência diretriz do cilindro.

A hipopeda no entanto vem sendo obtida pela interseção de um cilindro circular de geratrizes verticais, com uma esfera de raio igual ao diâmetro da base do cilindro e o cilindro tangencía interiormente a esfera.

Vimos também que a hipopeda projetada sôbre um plano paralelo ao eixo do cilindro permite a obtenção de duas parábolas virtuais, de acôrdo com determinada posição da geratriz que contém o ponto duplo e que são citadas por Gino Loria.

A besácea de Gregoire de Saint-Vincent, obtida nas mesmas condições, tendo o ponto duplo sôbre uma geratriz contida em um plano vertical que passando pelo eixo, forma ângulo de 45° com o plano vertical de projeção, e a altura do cilindro é igual ao diâmetro da base.

A projeção cônica da hipopeda traçada em qualquer cilindro de diretriz circular e geratrizes verticais, sôbre um plano horizontal que passa pelo ponto duplo da curva, estando o vértice das projetantes localizado no ponto de maior cota da curva, é uma Logocíclica de Booth, ou estrofóide reta.

Quando o vértice das projetantes cônicas, é um ponto qualquer da curva, exclusão feita ao ponto duplo, a projeção da curva sôbre o plano horizontal que passa pelo ponto duplo, é a Focal de Quetelet, ou estrofóide oblíqua.

Se o vértice das projetantes coincide com o ponto duplo da curva, a projeção cônica da curva sôbre o plano da base do cilindro é uma circunferência, cujo raio é igual ao diâmetro da base do cilindro, tendo como centro a projeção do ponto duplo sôbre a base.

A projeção cilíndrica oblíqua da hipopeda, feita sôbre o plano da base do cilindro, paralelamente a uma direção frontal que forma com o eixo do cilindro, ângulo igual ao que a tangente no ponto duplo forma com o mesmo eixo, é um trifólio oblíquo, um trifólio reto ou uma fôlha dupla reta, segundo o ponto duplo da curva acha-se sôbre uma geratriz contida em um plano vertical que passa pelo eixo e seu traço horizontal é respectivamente inclinado de um ângulo de 30° com a linha de terra, é paralelo a linha de terra (frontal) ou perpendicular à mesma linha de terra (de perfil).

Com esta projeção oblíqua, a família das curvas planas obtidas por projeções de curvas revessas, fica ampliada com as três que citamos acima.

Vimos também que o lugar dos traços das tangentes a uma hipopeda traçada na superfície de qualquer cilindro circular de geratrizes verticais, sôbre um plano horizontal que passa pelo ponto duplo, é uma Cissóide de Dioclés.

Simplificação do traçado planimétrico de três curvas geométricas planas

Entre as nossas conclusões, uma das mais importantes que consideramos, é a simplificação e uniformização do traçado planimétrico de três curvas planas, cuja construção clássica que apresentamos no início de nosso trabalho, devida a Gino Loria (Curve Piani Speciali). Podemos verificar que cada curva: trifólio oblíquo, trifólio reto e a fôlha dupla reta, possue uma construção própria e complexa cuja precisão se torna duvidosa.

Após obtê-las em nossas épuras, por meio da projeção cilíndrica da hipopeda, observando-as cuidadosamente conseguimos deduzir um processo geral para construí-las de modo contínuo e que passaremos a apresentar:

O TRIFÓLIO OBLÍQUO

Seja uma circunferência de centro O e raio arbitrário, a qual dividimos em 12 partes iguais e pelos pontos de divisão traçamos retas paralelas ao diâmetro horizontal. (fig. 30).

Sôbre o diâmetro horizontal e à partir do centro, tomemos o comprimento $1\ 1_1$ igual ao dôbro do diâmetro da circunferência.

Em seguida, projetemos sôbre $1\ 1_1$ os pontos que dividem em 12 partes iguais, uma semi-circunferência cujo diâmetro é o segmento de reta $1\ 1_1$. Obtemos pontos que numeramos: 2, 3, 4, 5,... 12 e em seguida em ordem inversa: 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, ... 12_1.

Considerando o primeiro ponto do trifólio oblíquo "A" situado na circunferência e sôbre um raio inclinado de 30°, com abertura de compasso igual ao raio da circunferência e com centro nos pontos 2, 3, 4, 5, ... 12, cortamos as paralelas que passam pelos pontos de divisão da circunferência, nos pontos: B, C, D, E, ...L, respectivamente.

Continuando com a mesma abertura e com centro em 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, 5_1, ... 12_1 determinamos os pontos: A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 ......

L_1. A curva que une os pontos obtidos, apresenta um ponto triplo em G G_1 e K_1, é um trifólio oblíquo, pois suas propriedades podem ser verificadas na própria figura, apresenta continuidade na construção, é mais preciso e a construção que apresentamos assemelha-se à de uma ciclóide, com a diferença que nesta, os pontos de divisão sôbre o diâmetro horizontal são equidistantes, enquanto na construção do trifólio oblíquo, os pontos sôbre o diâmetro horizontal, resultam da projeção de arcos iguais.

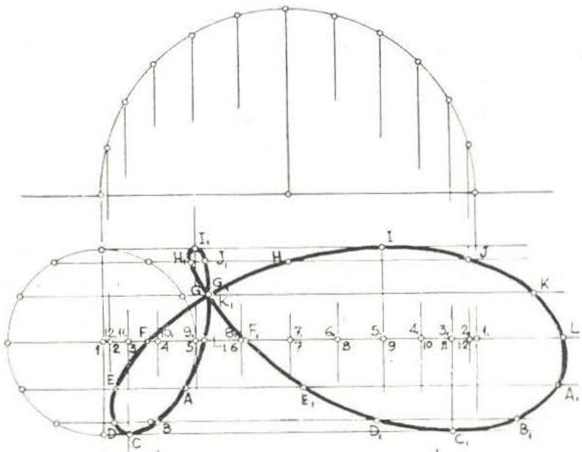

FIG. 30

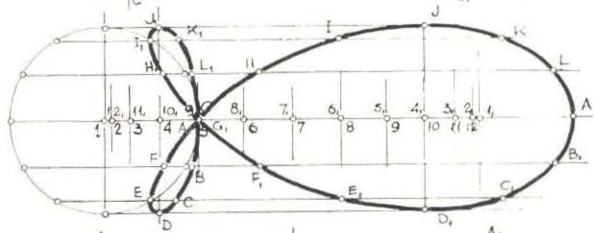

FIG. 31

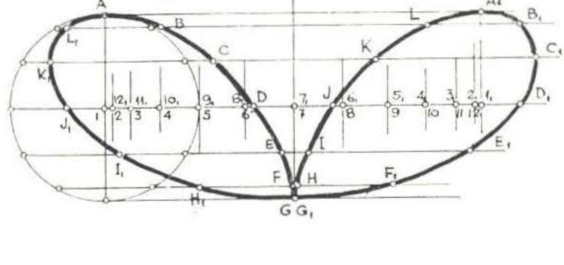

FIG. 32

O TRIFÓLIO RETO

Igual disposição pode ser aplicada na obtenção do trifólio reto. (fig. 31).

Basta que tomemos o primeiro ponto "A" na circunferência, situado sôbre o diâmetro horizontal.

Com abertura do compasso igual ao raio da circunferência e com centro nos pontos: 2, 3, 4, ... 12 e 1_1, 2_1, 3_1, 4_1, ...12_1 obtemos respectivamente: B, C, D, ... L e A_1, B_1, C_1, D_1, ...L_1.

A curva que une os pontos obtidos, coresponde ao trifólio reto, cujas propriedades podem ser veriifcadas na figura.

A FÔLHA DUPLA RETA

Procedendo de maneira análoga, podemos obter a fôlha dupla reta, bastando que o primeiro ponto seja tomado na circunferência, situado sôbre um raio perpendicular ao diâmetro horizontal. (fig. 32)

Com centro de compasso nos pontos 2, 3, ... 12 e 1_1, 2_1, 3_1.... 12_1 e com abertura igual ao raio da circunferência os pontos obtidos: B, C,...L e A_1, B_1, C_1,... L_1, permitem o traçado de uma fôlha dupla reta, a qual apresenta um ponto de reversão em G G_1, e cujas propriedades podem ser verificadas na própria figura.

A Cissóide de Dioclés

Desejamos apresentar uma construção planimétrica, para obter a cissóide de Dioclés, ou cissóide normal, derivada da épura na qual a mesma curva foi obtida pelos traços das tangentes à hipopeda cilíndrica, sôbre um plano horizontal que passa pelo ponto duplo da curva.

Da observação da épura, concluimos que a cissóide pode ser obtida pelo processo que apresentamos a seguir:

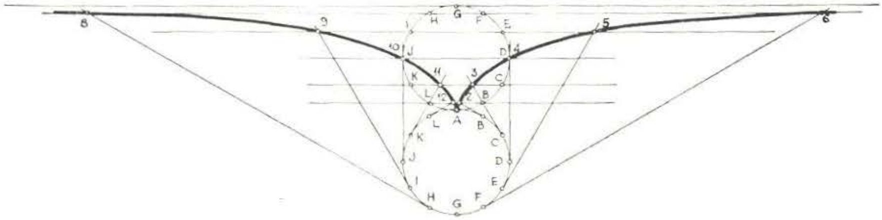

FIG. 33

Sejam duas circunferências de mesmo raio e tangentes entre si. (fig. 33)

Dividindo-as em 12 partes iguais à partir de um diâmetro vertical comum, sejam A, B, C, D, ... L os pontos de divisão da primeira circunferência num sentido, colocamos as mesmas letras na segunda circunferência porém em sentido contrário.

Unindo dois a dois H a F, I a E, J a D, K a C, L a B os pontos da segunda circunferência por meio de retas perpendiculares ao diâmetro vertical comum, traçamos na primeira circunferência tangentes aos pontos de divisão.

Estas tangentes cortam as retas que passam pelas letras correspondentes na segunda circunferência, em pontos que pertencem a cissóide de Dioclés.

Assim, as tangentes em B e L, cortam a reta L B nos pontos 2 e 12. As tangentes em C e K, cortam a reta C K nos pontos 3 e 11, e assim por diante, obtemos os pontos 4 e 10, 5 e 9, 6 e 8.

A curva que une os pontos obtidos, é uma cissóide normal, cujas propriedades podem ser verificadas na figura.

A parábola

Em virtude da projeção vertical de uma hipopeda cilíndrica se apresentar segundo uma parábola limitada pelas geratrizes do contôrno aparente vertical do cilindro, quando o ponto origem da curva pertencer a uma geratriz contida num plano de frente que passa pelo eixo do cilindro, podemos apresentar um processo para construir uma parábola qaundo são conhecidos: o vértice, a direção do eixo e um ponto M da curva.

Com efeito, sejam os elementos conhecidos: V o vértice, "e" o eixo da parábola e M um ponto da curva. (fig. 34)

Determinemos o ponto simétrico M' do ponto M da curva, traçando a perpendicular ao eixo segundo M P, tomando PM' = MP.

Em seguida com diâmetros respectivamente iguais a V P e M M', descrevemos duas semi-circunferências. A primeira dividimos em 6 par-

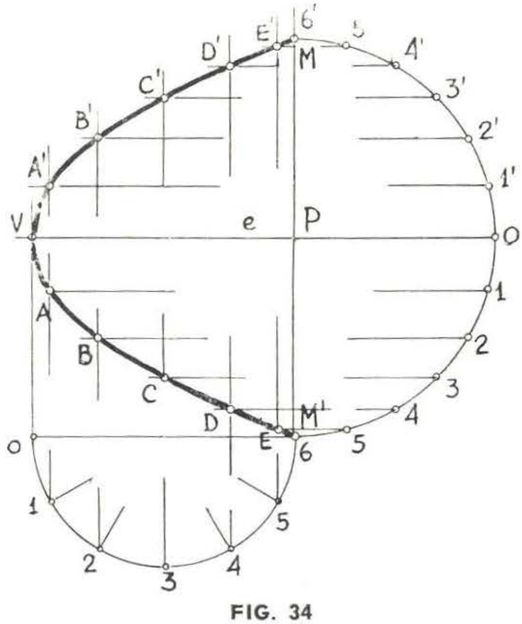

FIG. 34

tes iguais que numeramos de 0 a 6. e a segunda em 12 partes iguais cuja numeração efetuamos de 0 a 6 e de 0 a 6' em sentido opostos.

Se traçarmos pelos pontos de divisão da primeira circunferência perpendiculares ao eixo e pelos pontos de divisão da segunda circunferência, paralelas ao eixo, as retas que partem de pontos cujos números se correspondem, determinam A,B, C, D, E e A', B', C', D', E'.

A curva que une os pontos obtidos, passando pelo vértice "V", corresponde a uma parábola.

BIBLIOGRAFIA:

STORIA DELLE MATEMATICAE — Gino Loria.

ENCICLOPEDIA DELLE MATEMATICHAE.

ELEMENTARI E COMPLEMENTI — L. Berzolari - G. Vivanti - D. Gigli.

CURVE PIANE SPECIALI — Gino Loria.

GEOMETRIA DESCRITIVA — 2.º vol. — Álvaro J. Rodrigues.

Editado, composto e impresso por
ARTES GRÁFICAS URUGUAY S/A.
Rua Aristides Lôbo n.º 243
Tiragem de 1.000 exemplares
NOVEMBRO — 1960
Rio de Janeiro Brasil