ERNESTO FREDERICO BARANDIER DA CUNHA

ESTUDO SOBRE O PLANO QUALQUER

TESE APRESENTADA À CONGREGAÇÃO DA ESCOLA NACIONAL DE BELAS ARTES DA UNIVERSIDADE DO BRASIL. CONCURSO À CADEIRA DE GEOMETRIA DESCRITIVA.

A.L.M.A.

ERNESTO FREDERICO BARANDIER DA CUNHA

ESTUDO SOBRE O PLANO QUALQUER

TESE APRESENTADA À CONGREGAÇÃO DA ESCOLA NACIONAL DE BELAS ARTES DA UNIVERSIDADE DO BRASIL. CONCURSO À CADEIRA DE GEOMETRIA DESCRITIVA.

À memória de meus inesquecíveis irmãos e amigos Luiz e Frederico, esta insignificante homenagem da minha grande saudade.

Ao deixarmos, por ciscunstâcias alheias à nossa vontade a agradável obscuridade que, no dizer do filósofo, "é o caminho do céu", tão do nosso agrado, não nos move outro intuito que não o de auxiliar a mocidade ávida de conhecimentos, transmitindo-lhe o pouco que sabemos, adquirido pelo estudo e observação em nossos longos anos de magistério.

O PLANO

O PLANO

Iniciando êste pequeno estudo sôbre o que chamamos em descritiva um plano qualquer, observaremos primeiro as duas maneiras em que êle pode apresentar-se em uma épura.

No primeiro caso os traços do plano formam ângulos com a linha de terra numa mesma direção, e pode ser considerado como um plano vertical, no qual fizemos uma rotação em tôrno do seu traço horizontal (P.) para o lado da inclinação do mesmo, fig. 1. (B, P, P'1)

Êste primeiro caso é muito comum e o encontramos em quase todos os compêndios sôbre o assunto, tornando-se portanto desnecessário incluí-lo nêste nosso estudo.

Estudemos, porém o caso em que êle se apresenta em épura com seus traços formando ângulos com a linha de terra em direções opostas, caso que não sncontramos nos livros sôbre a matéria, mas que se apresenta com bastante frequência no decorrer dos estudos sôbre a mesma, perturbando o aluno ou o técnico menos avisado.

Suponhamos na fig. 2 um plano vertical (B, P, P') e façamos uma rotação do mesmo em tôrno do seu traço horizontal (P.) para o lado oposto à inclinação do mesmo, e obteremos assim um plano qualquer, que será representad em épura com os traços formando ângulos com a linha de terra em direções opostas, podendo ainda êstes traços pertencerem a uma mesma réta que corta a linha de terra.

Estudar êste plano, tornando-o útil e dócil no decorrer dos nossos estudos, é a finalidade a que nos propomos, acreditando que assim contribuímos, embora modestamente, para o fascinante estudo da geometria descritiva.

INCLINAÇAO DO PLANO SÔBRE OS PLANOS DE PROJEÇAO.

Como sabemos, para trabalharmos com um plano qualquer, nossos maiores auxiliares são os ângulos que o plano forma com os planos de projeção.

Determinando êsses ângulos, teremos dominado o plano, tornando fácil a resolução de qualquer problema sôbre o mesmo, tais como projeções de figuras ou poliedros situados sôbre o plano, determinações de secções planas, etc.

O ângulo de inclinação de um plano qualquer sôbre o plano horizontal de projeção, como sabemos, nos é dado pelo que chamamos "reta de maior declive", que é a reta formada pela interseção feita num plano qualquer por um plano vertical perpendicular ao plano qualquer, ficando assim o ângulo formado entre esta interseção e a sua projeção horizontal perpendicular ao plano qualquer e ao plano horizontal de projeção, determinando portanto a inclinação do plano qualquer sôbre o plano horizontal, ou a maior inclinação que é a verdadeira fig. 3.

Consideremos a seguir a fig. 4 em épura os traços de um plano qualquer (B, P, P') e determinemos neste plano a interseção feita por um plano vertical, colocado em relação ao plano qualquer dentro das normas para obtenção da reta de maior declive.

A interseção dêstes dois planos pode ser determinada de diversas maneiras; usemos, porém, nêste primeiro caso a interseção dos traços verticais do plano qualquer e do plano vertical num outro quadrante, já que os mesmos não se cortam no primeiro; usemos o terceiro ou o quarto quadrante, pois que o plano vertical inferior de projeção pertence aos dois.

Considerando os traços de um plano qualquer com relação aos quatro quadrantes, observamos que os traços verticais do plano pertencem a uma mesma reta que corta a linha de terra, assim como os traços horizontais pertencem a uma outra reta que corta a linha de terra no mesmo ponto de interseção dos traços verticais; do que se conclui que os traços de um plano qualquer determinados nos quatro quadrantes têm um ponto comum sôbre a linha de terra figs. 5 e 6.

Se atribuirmos ainda às designações 1, 2 e 3 para respectivamente os segundo, terceiro e quarto quadrantes teremos na fig. 6 a épura representativa dos traços de um plano qualquer nos quatro quadrantes.

Voltando, porém, a fig. 4, se prolongarmos o traço (M') do plano vertical e o traço (P') do plano qualquer, teremos determinado em (M') a interseção dos traços verticais no terceiro ou quarto quadrante. No ponto (n) formado pela interseção de (P.) com (M) temos já obtida a projeção horizontal de uma das extremidades da reta de maior declive, extremidade esta que pertence ao plano horizontal de projeção, tendo portanto a sua projeção vertical sôbre a linha de terra (n'), ora a projeção vertical da interseção dos dois planos, que é a reta de maior declive, será a reta que passa pelo cruzamento de (P 1) com (M 1) e pela projeção vertical (n') de (n); claro que, se considerarmos apenas o primeiro quadrante, a projeção vertical da reta de maior declive é representada de (n') para cima, a projeção horizontal da mesma reta se confunde com o traço (M) do plano vertical, pois ela pertence a êste plano.

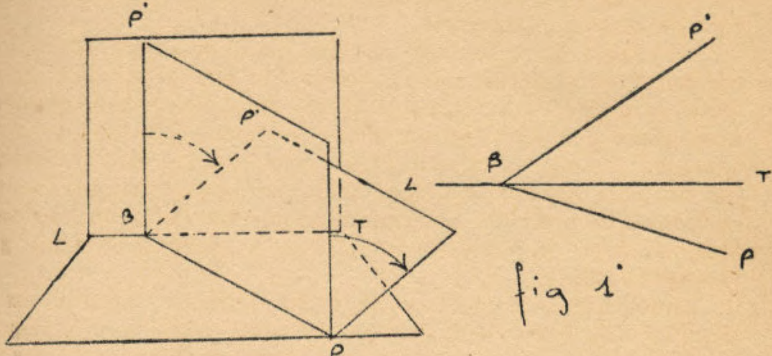

fig 1

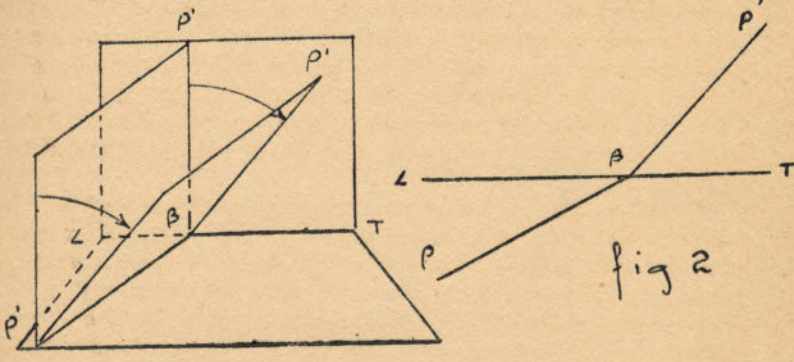

fig 2

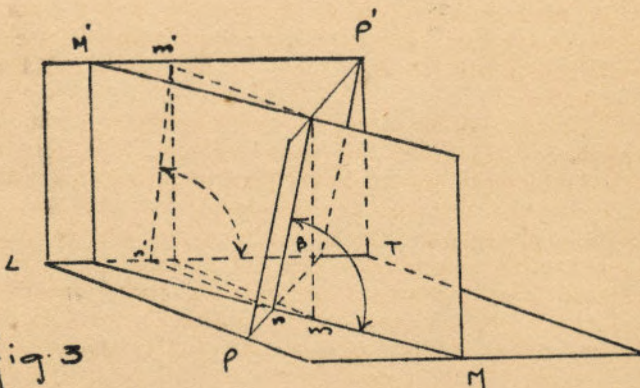

fig 3

B. C. 951

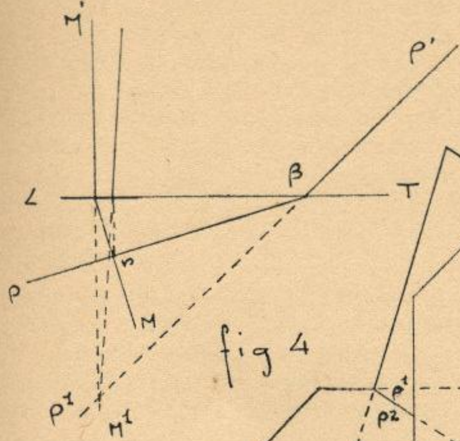

fig 4

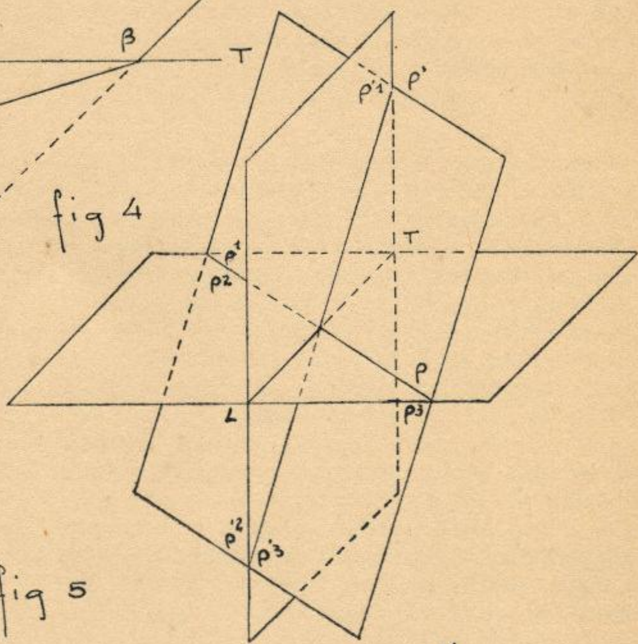

fig 5

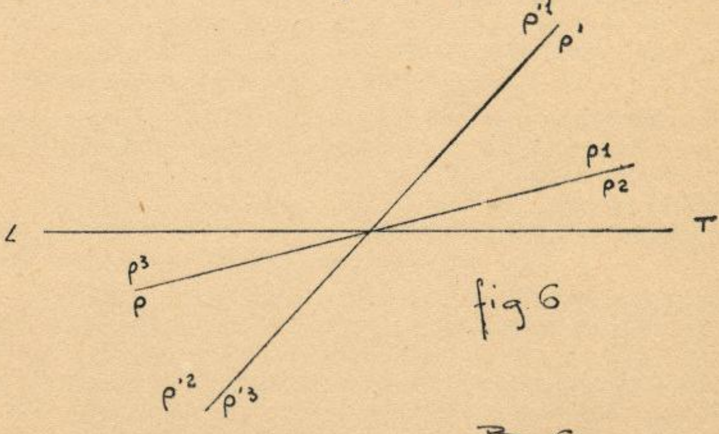

fig 6

B. C. 51

Êste traçado, embora simples e prático, apresenta a nosso ver o defeito de sobrecarregar o plano horizontal de projeção, o que mais tarde pode perturbar-nos na resolução de problemas referentes ao plano qualquer; acontece ainda que esta solução obriga o aluno a um conhecimento mais amplo da matéria, bem assim como uma perfeita compreensão de problemas referentes aos quatro quadrantes, e ainda uma perfeita percepção dos planos no espaço, o que não podemos exigir, pois que os programas para algumas das seções do curso pedem apenas a resolução de casos no primeiro quadrante; procuremos portanto resolvê-lo, utilizando apenas o primeiro quadrante.

Consideremos na fig. 7 os traços (B, P, P') de um plano qualquer, e cortemos a seguir o plano por um plano vertical a fim de obter a reta de maior declive. No ponto (n) resultante do cruzamento dos traços horizontais (M) e (P), como já vimos, temos a projeção horizontal da extremidade da reta de maior declive que pertence ao plano horizontal, ou o vértice do ângulo que nos dá a incdinação do plano qualquer sôbre o plano horizontal; se projetarmos (n) sôbre o plano vertical, obteremos (n') determinando assim as duas projeções do vértice do ângulo; sabemos ainda que a projeção horizontal dêste mesmo ângulo se confunde com o traço horizontal (M) do plano vertical, marquemos portanto sôbre a projeção horizontal da reta de maior declive um ponto qualquer (m) e consideremos êste ponto como pertencendo a uma reta de nível do plano (B, P, P'), fácil se tornando portanto determinar a projeção vertical dêste ponto, pois se um ponto tem a sua projeção horizontal sôbre a projeção horizontal de uma reta de nível fatalmente terá sua projeção vertical sôbre a projeção vertical da mesma reta. Seguindo êste raciocínio, obtivemos a projeção vertical (m') e ainda a projeção vertical da reta de maior declive (n', m') que ainda representa a projeção vertical de um lado estando a projeção do outro lado sôbre a linha de terra, pois que êle pertence ao plano horizontal de projeção.

As duas projeções, porém, daquele ângulo não o representam em verdadeira grandeza, pois que o mesmo é oblíquo ao vertical e perpendicular ao horizontal, tornando-se portanto necessário determinar-lhe a verdadeira grandeza, o que faremos por meio da rotação do ângulo de inclinação do plano qualquer sôbre o plano horizontal, do mesmo em tôrno de um dos seus lados.

Se observarmos a fig. 3 que é a reta de maior declive, a projeção horizontal desta mesma reta e a projetante horizontal do ponto (m) formam um triângulo retângulo, do qual um cateto (n,m) pertence ao plano horizontal de projeção, para rebatermos êste triângulo sôbre o plano horizontal de projeção, nada mais temos a fazer que a rotação de um triângulo retângulo em tôrno de um dos seus catetos, no caso aquele que pertence ao plano horizontal.

Do que acima ficou dito se conclui que, para determinar o ângulo de inclinação que o plano B, P, P' forma com o plano horizontal de projeção (fig. 7) nada mais temos a fazer do que levantar uma perpendicular a (M) pelo ponto (m) e marcar sôbre a mesma a partir de (m) a cota dêste ponto, que é ainda o segundo cateto do aludido triângulo, obtendo assim o ângulo (c) inclinação do plano qualquer sôbre o plano horizontal de projeção, em verdadeira grandeza.

Para que êste plano se torne útil no decorrer dos nossos estudos, necessário se torna rebatê-lo em tôrno de um dos seus traços a fim de, colocando-o de frente, determinarmos com exatidão a parte útil do plano, que é a parte do mesmo compreendida entre o plano vertical (M' M,) plano vertical de projeção e plano horizontal de projeção (fig. 3).

Se observarmos (fig. 7) que a parte do plano (B, P, P') limitada pelos traços do plano (P) e (P'), pelo plano vertical que determinou a reta de maior declive, e pela reta de nível por nós usada, está representada por um trapésio retângulo, em que a base superior é a reta de nível, a base inferior o traço (P), o lado que forma os ângulos retos a reta de maior declive e finalmente o lado oposto é o traço (P') do plano (B, P, P'). A rotação da parte útil do plano qualquer em tôrno do seu traço horizontal (P, se resume na rotação de um trapézio em tôrno da base que pertence ao plano horizontal de projeção, a reta de maior declive na sua rotação se confunde com o traço (M,) de (n) a (c2) tomamos a verdadeira grandeza da parte por nós limitada sôbre a reta de maior declive (n, c1), em (c2) traçamos uma paralela a (P) obtendo a posição da base superior do trapésio, ora se a parte (B,d) do traço vertical (P') representa um lado do trapésio em verdadeira grandeza, com centro em (B) levamos (d) para a última paralela traçada e temos assim rebatida a parte útil do plano (B, P, P') sôbre o plano horizontal de projeção, por meio da rotação do plano em tôrno do seu traço horizontal, determinando ainda o ângulo (y) que é o ângulo plano do plano qualquer (B, P, P').

Podemos ainda fazer a rotação da parte útil do plano em tôrno da reta de maior declive, o que em inúmeros traçados é mais vantajoso como adiante veremos.

Para obtermos a rotação do plano qualquer em tôrno da sua reta de maior declive, pelos pontos (n) e (c1) traçamos duas paralelas perpendicular àquela reta, do ponto (n) sôbre a perpendicular marcamos a distância (n, B), e do ponto (c1) a distância (c2) (d1); ligando enfim as extremidades B 1 e d2) teremos rebatido a parte útil do plano qualquer (B, P, P') em tôrno da sua reta de maior declive.

Vejamos a seguir como determinar as projeções de um ponto situado sôbre êste plano (fig. 8), obtida a rotação do plano qualquer

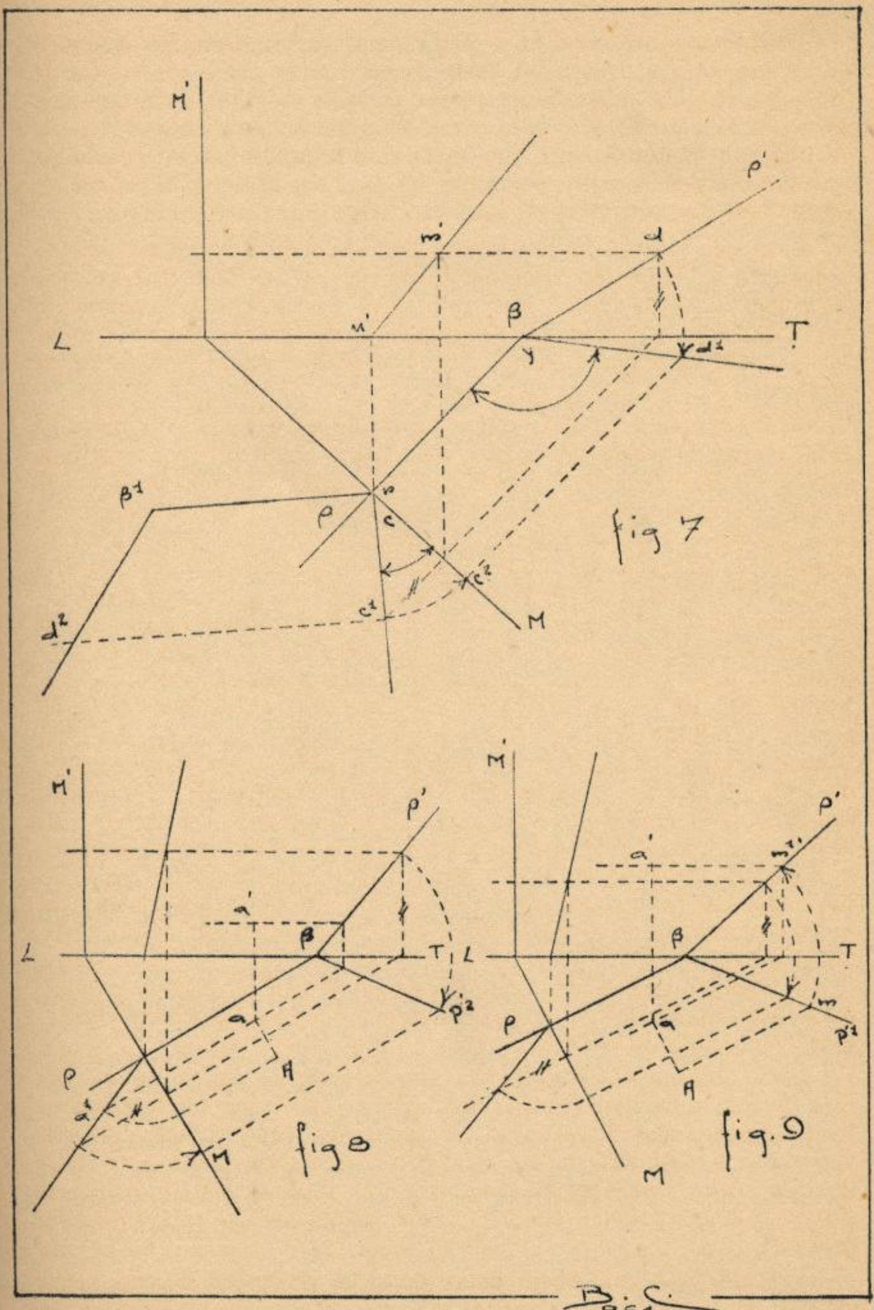
fig 7
fig 8
fig. 9
L
T
M
β
B. C.
951

em tôrno do seu traço horizontal (P), da maneira como fizemos na fig. 7; marquemos sôbre o rebatimento um ponto (A) que pertence ao plano (B, P, P'); se considerarmos o plano vertical que determinou a reta de maior declive como um plano de projeção substituto do plano vertical, teremos o plano qualquer transformado num plano de tôpo neste segundo sistema de projeções, em que o traço (M) é a linha de terra, a reta de maior declive o traço vertical e (P) o traço horizontal, logo as projeções do ponto (A) nêste segundo sistema de projeções e resumem nas projeções de um ponto (A) que pertence a um plano de tôpo, aplicando o traçado para obtenção das projeções de um ponto situado sôbre um plano de tôpo, obtemos as projeções (a 1) (a) considerando a seguir a projeção horizontal (a) como a projeção de um ponto que pertence a uma reta de nível do plano (B, P, P') fácil se torna determinar a projeção vertical (a') de acôrdo com o traçado já por nós exposto.

Como, porém, nossa finalidade deve ser sempre simplificar o mais possível os nossos traçados para maior clareza e compreensão dos problemas nêles expostos, procuremos nas épuras que se seguem alcançar êste objetivo. Na fig. 9 considerando o ponto (A) como um ponto situado sôbre uma reta de nível, abandonamos a reta de maior declive, e levando o ponto (m) sôbre o traço (P') determinamos a projeção vertical daquela reta, determinada a projeção vertical da reta de nível, fácil se torna determinar a projeção horizontal da mesma reta e as duas projeções do ponto.

Na fig. 10 considerando ainda como na fig. 8 (M) como linha de terra e reta de maior declive como traço vertical e (P) como traço horizontal de um plano de tôpo, fizemos uma rotação do plano (B, P, P') em tôrno de sua reta de maior declive, ou uma rotação do plano de topo em tôrno do seu traço vertical (reta de maior declive), obtendo as projeções (a 1) e (a) e, para simplificar, considerando que as cotas para dois planos verticais são sempre iguais tomamos a cota de (a 1) para determinarmos (a').

Como a projeção vertical da reta de maior declive pode em alguns casos apresentar-se sobreposta à projeção vertical de uma reta, uma figura, ou um corpo assente sôbre o plano qualquer, o que poderá dificultar a interpretação da épura, tentemos suprimir a projeção vertical da reta de maior declive. Na fig. 11 dado um plano qualquer representado pelos seus traços (B, P, P'), tracemos o plano vertical (M, M) para determinar sua reta de maior declive, como já observamos nos casos anteriores a interseção (n) de (P) com (M) nos dá a extremidade daquela reta que pertence ao plano horizontal de projeção, marquemos a seguir um ponto qualquer (m) sôbre a projeção horizontal da mesma reta, claro está que a cota de (m) é igual à cota do plano de nível a que êle pertence, na perpendicular (m 1, m 2) levantada a linha de terra teremos a cota do aludido plano, para determinarmos o ângulo de inclinação de (B, P, P') sôbre o plano horizontal de projeção basta que transportemos a distância (m 1, m 2) para (m 3), aproveitamos ainda esta épura para determinarmos a projeção de uma reta situada sôbre o plano (B, P, P').

Considerando ainda que as próprias projeções vertical e horizontal da reta de nível podem ser dispensadas na determinação do ângulo formado entre o plano qualquer e o horizontal de projeção, tracemos a fig. 12 os traços (B, P, P') e o plano vertical (M, M') sôbre o traço vertical (P') marquemos um ponto qualquer (m'), baixando uma perpendicular dêste ponto à linha de terra, teremos determinado a cota (m', m) do plano de nível; se traçarmos uma paralela a (P) pelo ponto (m), teremos a projeção horizontal da reta de nível; porém, para simplificar, ainda tracemos esta paralela de (M) para a esquerda, marcando a partir de (M) a cota (m, m'), resultando desta maneira o ângulo (c) que é a inclinação do plano (B, P, P') sôbre o plano horizontal de projeção. Aproveitamos ainda êste traçado para determinarmos as projeções da figura plana, usando a rotação do plano qualquer em tôrno da reta de maior declive, por acharmos que se torne mais claro êste procedimento.

Como último caso nêste estudo para a determinação da reta de maior declive, e rotação do plano em tôrno do plano horizontal de projeção, vejamos o caso em que o traço M) od plano vertical não encontra a linha de terra nos limites da folha do papel (fig. 13), como já observamos a interseção de (P) com (M) nos dá a extremidade da reta de maior declive que pertence ao plano horizontal, e a projeção horizontal do ângulo de inclinação do plano (B, P, P') se confunde com o traço (M) do plano vertical, num ponto qualquer (m) tomado arbitràriamente sôbre o traço (M) tracemos uma paralela a (P) que representará a projeção horizontal de uma reta de nível do plano (B, P, P') na interseção (m 1) com a linha de terra levantemos uma perpendicular à mesma que limitada pelo traço vertical (P') nos dará a cota (m 1, m 2) do plano de nível, que transportaremos para (m, m3), (c) é o ângulo de inclinação de (B, P, P') sôbre o plano horizontal de projeção, a rotação do plano qualquer em tôrno do traço horizontal será feito como nos casos anteriores.

Aliás o que fizemos nas figuras 12 e 13 foi apenas uma substituição do plano vertical de projeção, usando para substituí-lo o plano vertical para determinar a reta de maior declive, tornando portanto o plano (B, P, P') um plano de topo em que o ângulo de inclinação do plano sôbre o plano horizontal de projeção nos é dado pelo ângulo formado entre o traço vertical e a linha de terra.

Acreditando ter preparado o plano qualquer nêste caso particular, para que nos possa servir nas múltiplas aplicações que encontraremos no decorrer de nossos estudos, passemos a seguir a algumas destas aplicações.

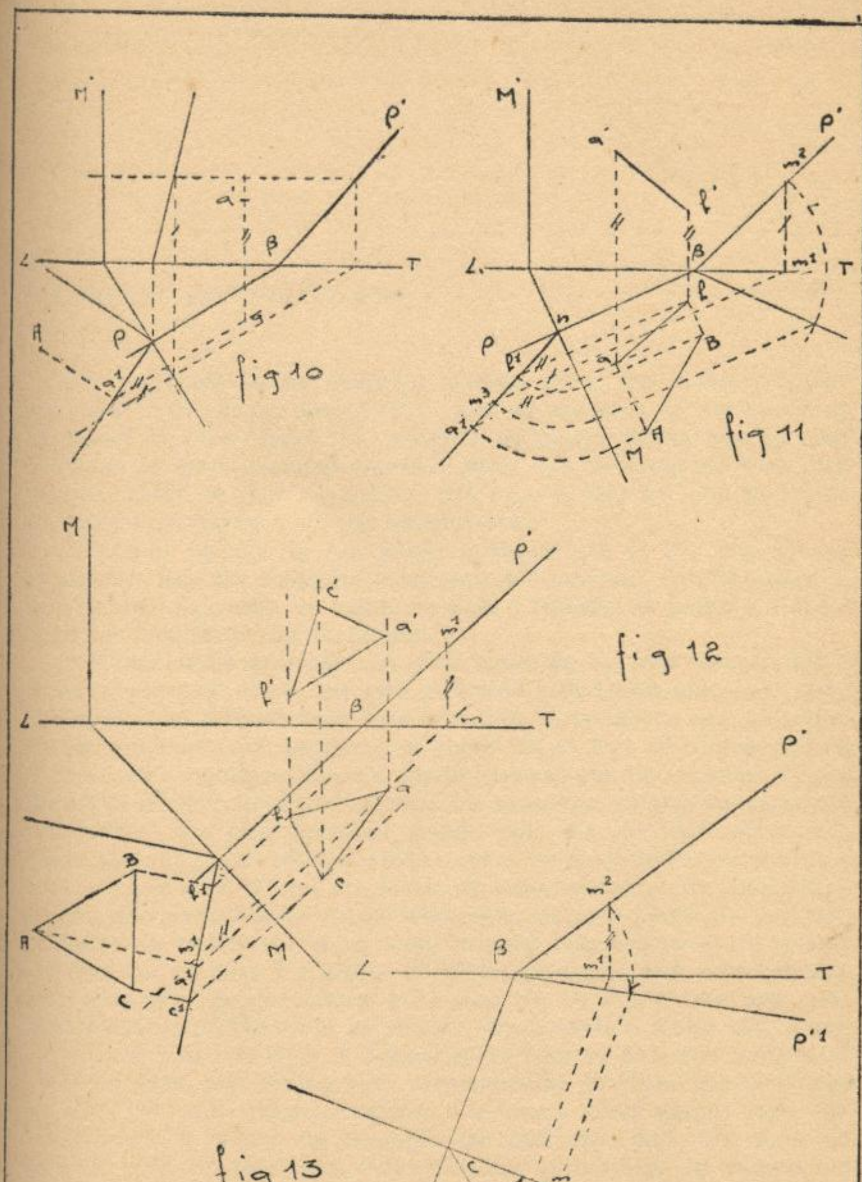
fig 10
fig 11
fig 12
fig 13
B. C.
951

PROJEÇÕES DOS POLIEDROS

As projeções de um poliedro assente sôbre um plano qualquer se tornam fáceis se observarmos que as mesmas se resumem às projeções de uma figura que pertence ao plano, figura que no caso é a base do corpo ou uma das suas faces, e à projeção de uma reta perpendicular ao plano qualquer, que é ou o eixo de uma pirâmide ou as arestas laterais de um prisma reto.

Vejamos na fig. 14 um plano qualquer (B, P, P') em que já efetuamos um dos traçados estudados no capítulo anterior para a determinação da reta de maior declive, e rotação do plano a fim de determinar a parte útil do mesmo.

Estudemos as projeções de uma pirâmide de reta assente sôbre o plano, digamos ainda que esta pirâmide reta tenha uma base quadrangular; as projeções da base portanto se resumem nas projeções de um quadrado que pertence ao plano (B, P, P'); se considerarmos o corpo se projetando sôbre o plano vertical que determinou a reta de maior declive, teremos a verdadeira grandeza do eixo da pirâmide entre (v 1) e a reta de maior declive pois que, ao considerarmos o traço (M) do plano vertical (M'M) como linha de terra transformamos o plano B, P, P' em um plano de topo, deixamos de determinar a projeção completa do corpo sôbre êste segundo plano de projeção por achá-la desnecessária ao nosso traçado, pois necessitamos apenas do eixo que no caso é a altura da pirâmide e esta está representada por uma reta perpendicular ao plano (B, P, P') e tem uma das extremidades pertencendo ao mesmo, considerando ainda (M) como uma nova linha de terra, a colocação do eixo na projeção horizontal se torna fácil, pois tôda a reta perpendicular ao plano qualquer tem as suas projeções perpendiculares aos traços dêsse plano; logo, determinando o centro da projeção da base, que pode ser feito da mesma maneira pela qual determinamos os vértices da mesma, ou por meio das diagonais da figura que representa a projeção horizontal do quadrado de base como aliás fizemos, tracemos por êste centro uma perpendicular ao traço (P) e ainda como as duas projeções de um ponto estão situadas sempre sôbre uma mesma perpendicular à linha de terra, tiremos por (v 1) uma perpendicular ao traço (M) a interseção dessas duas perpendiculares nos dará justamente a projeção horizontal do vértice da pirâmide em questão. Determinada a projeção horizontal, fácil se torna a determinação da projeção vertical, pois que as cotas para dois planos verticais são iguais.

No caso que acabamos de expôr, usamos para determinação do ângulo de inclinação do plano (B, P, P') sôbre plano horizontal e rotação do plano qualquer em tôrno da reta de maior declive o processo por nós exposto a fig. 12, e para a determinação das projeções da pirâmide o traçado da fig. 10.

Poderíamos ainda resolver o problema pela rotação do plano qualquer (B, P, P') em tôrno do seu traço horizontal (P), a fim de determinar-lhe a parte útil se não o fizemos, foi por achar que se torna mais rápido e também mais compreensível a épura, sendo feita pelo traçado exposto à fig. 14.

Consideremos a seguir a fig. 15 um prisma reto de base triangular assente sôbre um plano qualquer, dado pelos seus traços (B, P, P'); as projeções da base que pertencem ao plano qualquer serão determinadas da mesma maneira que usamos para a base da pirâmide do caso anterior, considerando que se trata de um prisma reto, teremos as arestas laterais iguais, considerando ainda que tôdas elas formam ângulos iguais com os planos de projeção; portanto, se projetam sôbre os dois planos iguais; logo, quando determinarmos a projeção sôbre o plano vertical que determinou a reta de maior declive, para marcarmos a verdadeira grandeza da altura do prisma, desnecessário se torna que projetemos tôdas, basta projetarmos uma para que depois de determinada sua grandeza relativa na projeção horizontal tomemos a seguir as outras iguais à primeira.

No caso presente, usamos o traçado exposto à fig. 13 para determinação do ângulo de inclinação e rotação do plano em tôrno da reta de maior declive, e para as projeções do prisma seguimos a mesma orientação que usamos na fig. 14.

A fim de não alongarmos êste nosso pequeno estudo e considerando que para qualquer corpo o procedimento é sempre o mesmo, variando apenas a base que poderá ser um polígono qualquer, veremos apenas mais dois casos, em que o corpo, poderemos dizer estar colocado numa posição inversa a dos traçados por nós vistos às figuras 14 e 15.

Assim sendo, consideremos nas figuras 16 e 17 uma pirâmide reta de base quadrangular e um prisma reto de base triangular assentes sôbre um plano qualquer (B, P, P'); as projeções das bases dêsses poliedros não apresentam dificuldades, pois continuam a ser as projeções de figuras planas situadas sôbre um plano qualquer, quanto ao eixo da pirâmide ou as arestas laterais do prisma reto, teremos é claro que tomar-lhes a verdadeira grandeza nas suas projeções sôbre o plano vertical que determinou a reta de maior declive, num sentido inverso ao que tomamos às figuras 14 e 15.

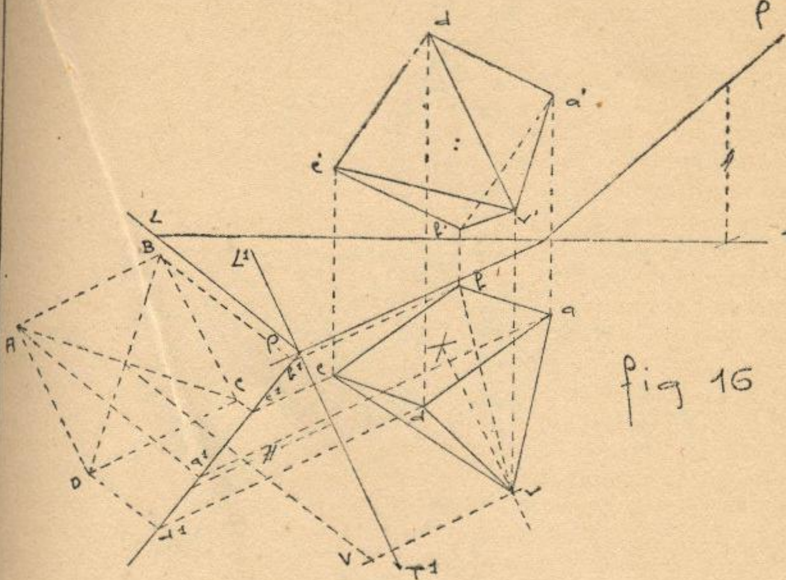

fig 16

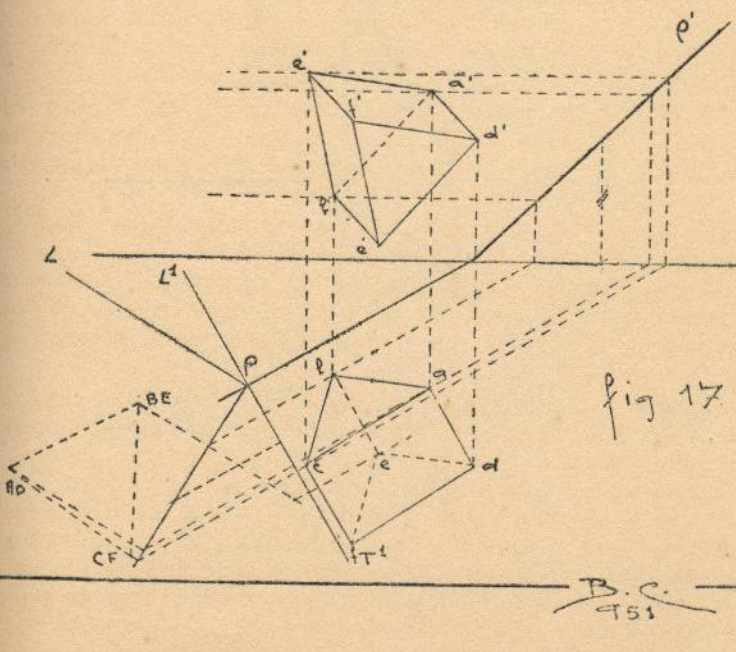

fig 17

B. C.
951

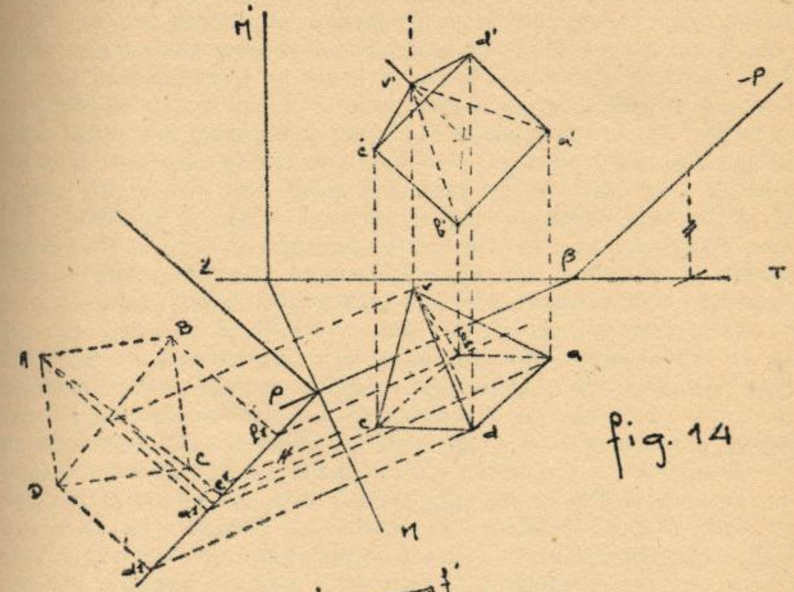

fig. 14

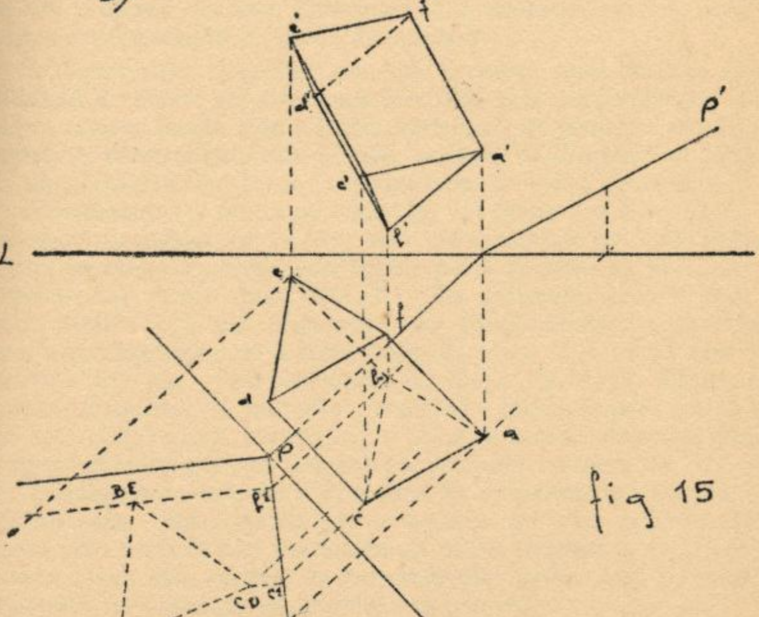

fig 15

B. C.
951

Consideremos à fig. 18 o plano (B, P, P') as duas projeções (b) e (b') de um ponto (B) que pertence a êsse plano; consideremos ainda que aquêles pontos representam as projeções da extremidade de uma perpendicular ao plano qualquer que toca o mesmo. Tendo as projeções da extremidade para termos as projeções da perpendicular basta que levantemos perpendiculares a (P) e (P'), claro que até aqui temos as perpendiculares com tamanho ilimitado, digamos porém que a sua verdadeira grandeza nos é dada pelo segmento (X). Sôbre a projeção vertical da perpendicular marquemos um ponto (m') de (m') determinamos (m) projeção horizontal do ponto, ficando assim limitada às projeções de um segmento da referida perpendicular, limite êste porém que não representa as dimensões por nós desejada, se fizermos uma rotação do segmento (m,b) em tôrno de um eixo vertical que passa pela sua extremidade (b) tornando-o frontal, teremos o mesmo representado em verdadeira grandeza na projeção vertical; se marcarmos de (b') para (a') o tamanho do segmento (X), teremos o limite por nós dado sôbre a perpendicular tornada frontal, considerando ainda que a rotação de uma reta em tôrno de um eixo frontal não lhe modifica as cotas para obtermos (a'1) levamos paralelamente à linha de terra o ponto (a') para a perpendicular indefinida, obtendo dêste cruzamento o limite (X) na projeção vertical, determinada a projeção vertical fácil se torna a determinação da projeção horizontal.

Se desejarmos conseguir por um processo mais prático o que acabamos de expôr, consideremos que tôda reta perpendicular a um plano qualquer forma com o plano horizontal de projeção um ângulo invariável, determinado êste ângulo, teremos determinado a inclinação da perpendicular tornada frontal na projeção vertical.

Consideremos a fig. 19 os traços de um plano qualquer (B, P, P') e as duas projeções (b) e (b') das extremidades de uma perpendicular ao plano e procuremos traçar pelos mesmos as projeções da perpendicular numa dimensão (X). Se determinarmos a reta de maior declive e a ela traçamos uma perpendicular, a interseção desta perpendicular com a nova linha de terra (L 1 T 1) nos dará o ângulo (n) que a perpendicular ao plano (B, P, P') forma com o plano horizontal de projeção. Traçando portanto pelo ponto (b') uma reta oblíqua num ângulo (n) a linha de terra, teremos a posição da perpendicular tornada frontal na projeção vertical, de (b') para (a') marcamos a verdadeira grandeza da perpendicular pedida (X), e finalmente, considerando que a rotação de uma reta em tôrno de um eixo vertical não lhe altera as cotas, obteremos (a'1), determinada a projeção vertical da perpendicular pedida não teremos dificuldades na obtenção da projeção horizontal.

Como podemos observar nas figs. 20 e 21, o segmento perpendicular ao plano qualquer B, P, P', é, no caso da pirâmide reta, o eixo da mesma, e, no caso do prisma reto, suas arestas laterais.

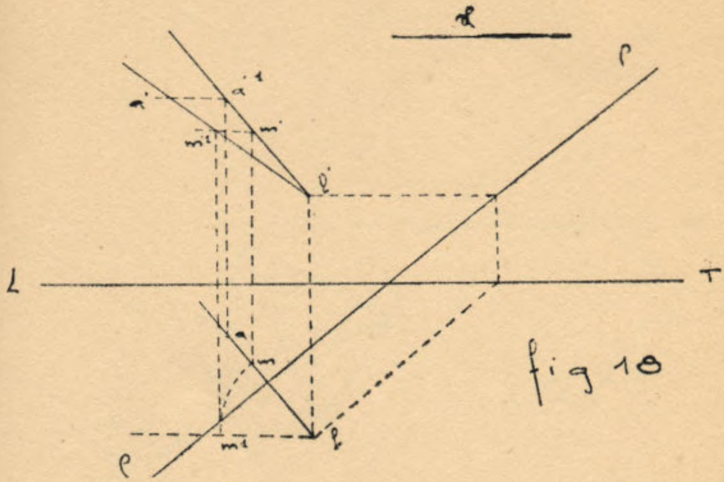

fig 18

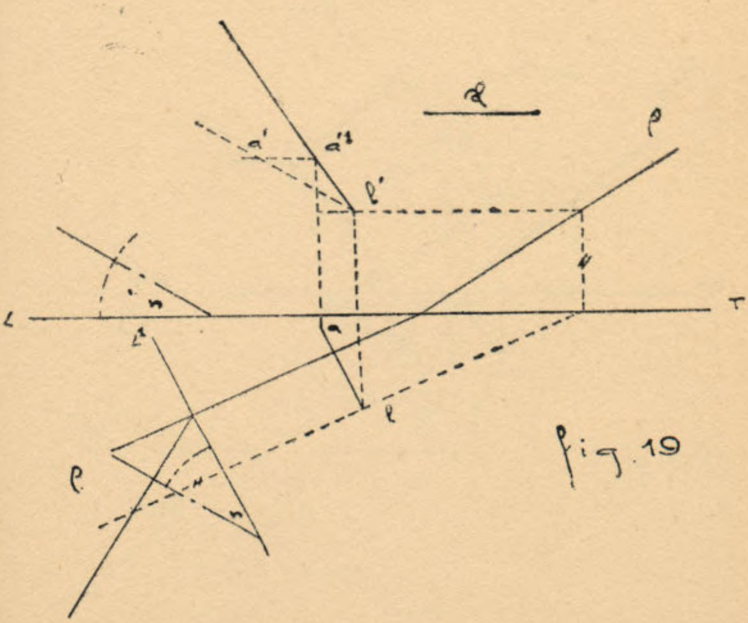

fig. 19

B. C. 951

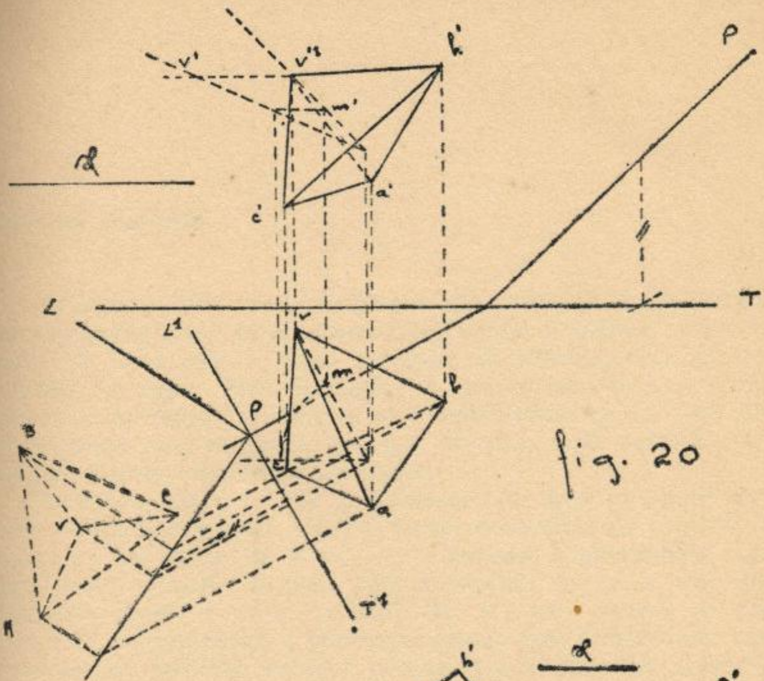

fig. 20

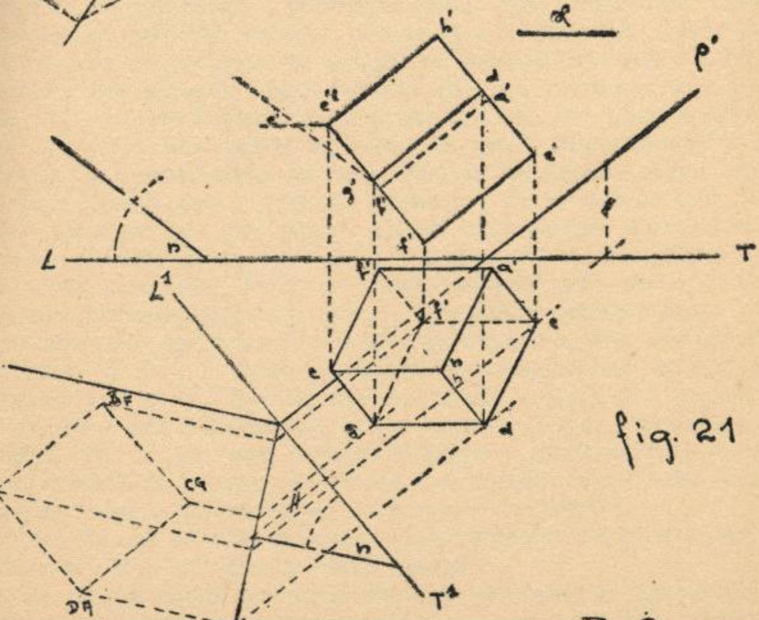

fig. 21

B.C.
951

SEÇÕES PLANAS

As secções feitas num corpo por um plano qualquer podem ser determinadas como já o sabemos por várias maneiras. Pela interseção de retas com o plano qualquer, se consideramos as arestas laterais do corpo. Pela interseção de planos com planos, se considerarmos as faces do sólido e pela substituição de um dos planos de projeção que, ao nosso ver, é o processo mais prático e o que melhor clareza representa na épura.

Consideremos a fig. 22 as projeções de uma pirâmide reta de base retangular assente sôbre o plano horizontal de projeção e os traços de um plano (B, P, P') que a seciona, e procuremos resolver êste nosso primeiro traçado pela interseção de retas com planos, tracemos então o plano vertical (M' M) que cortem as arestas (Vb, Vd), determinando a interseção destas duas arestas com o plano qualquer na projeção vertical, pontos (1 e 2) teremos determinado dos vértices do polígono de secção na projeção vertical. A seguir tracemos um segundo plano vertical (N) que contenha as arestas (Va, Vc), o traço horizontal do plano vertical (N) não encontra a linha de terra nos limites da folha de papel, impossibilitando-nos portanto a determinação do traço vertical do mesmo plano, consideremos, porém, que a projeção horizontal de interseção feita num plano qualquer por um plano vertical está sempre sôbre o traço horizontal dêste plano, do que resulta que (N) é a projeção horizontal de interseção feita no plano qualquer pelo plano vertical, tomemos portanto sôbre o traço (N) dois pontos arbitrários (e) e (f) e consideremos que êstes dois pontos pertencem a uma reta de nível do plano (B, P, P'), assim fàcilmente determinaremos as projeções verticais (e') e (f') que ligadas nos darão a projeção vertical da interseção e por consequência os dois pontos (3 e 4) interseções das arestas (Va) e (Vc) com o plano qualquer e ainda vértices de projeção vertical do polígono de secção, determinada a projeção vertical fácil se torna a determinação da projeção horizontal.

Nas figuras 23 e 24 traçamos separadamente as interseções dos planos M', M e (N) com o plano qualquer.

Na fig. 25 vamos encontrar ainda as projeções de uma pirâmide reta de base retangular assente sôbre o plano horizontal secionado por um plano qualquer (B, P, P'). Consideremos nêste segundo caso as faces laterais do corpo e determinemos os traços dos planos que contêm estas faces, tomemos a face (V, a, b), o traço horizontal do plano que contém esta face conterá a aresta (a,b) da base, pois que êle pertence ao plano horizontal de projeção, determinado desta maneira o traço (M) observemos que (V) e (V') são as duas projeções de um ponto que pertence ao plano (M), logo a determinação do traço vertical do plano (M) se reduzirá a um traçado preliminar qual seja "dado o traço horizontal de um plano qualquer e as duas projeções de um ponto que pertence a êste plano determinar o traço vertical" determinada a projeção vertical da interseção do plano (M' M com o plano qualquerquer (B, P, P') pela interseção dos traços (P') e (M') no terceiro quadrante teremos determinado os pontos (1 e 2) que ligados nos dará a interseção da face lateral (V, a, b) com o plano qualquer, um lado portanto da projeção vertical do polígono de secção.

Tomemos a seguir a face (V, c, d), pelas mesmas razões que na face já estudada o traço horizontal (N) conterá a aresta (c,d). O ponto (v) pertence às duas faces, os traços horizontais (M) e (N) são paralelos em virtude das arestas (a,b e (c,d) da base o serem, logo as retas de nível com relação aos dois planos se confundem, portanto mesmo ponto na projeção vertical para determinar a inclinação de (N'), achada a interseção de (N',N) com (B, P, P') pela interseção ainda de (P') e (N') no terceiro quadrante teremos determinado os pontos (3 e 4) que ligados nos dará a interseção da face (V, c, d) com o plano B, P, P', sendo (2,3) interseção da face (V, b, d) e (1,4) da face (V, a, c) claro está que as projeções verticais das interseções das quatro faces com o plano qualquer fatalmente nos dará a projeção vertical da secção feila na pirâmide pelo plano qualquer.

Tanto no traçado da fig. 25 como no da fig. 22 deixamos de projetar as interseções dos planos sôbre o plano horizontal, por acharmos que se tornaria mais clara e mais compreensível a épura desde que para determinação da projeção horizontal da secção considerassemos apenas que as "duas projeções de um ponto estão sempre situadas sôbre uma mesma perpendicular a linha da terra".

Como no caso anterior nas figuras 26 e 27 traçamos separadamente as interseções dos planos (M) e (N) com o plano qualquer.

Estudemos a seguir a seção feita numa pirâmide reta de base pentagonal por um plano qualquer por meio da substituição do plano vertical de projeção e tracemos à fig. 28 as duas projeções do corpo e os traços (B, P, P') do plano qualquer. A seguir usando a linha de terra (L 1, T 1) tornemos o plano qualquer um plano de topo, determinando assim um terceiro traço (P'1) que é também reta de maior declive, ou a inclinação do plano qualquer sôbre o plano horizontal de projeção, projetemos a seguir o sólido sôbre o plano vertical que substituiu o primitivo, e teremos assim o traçado

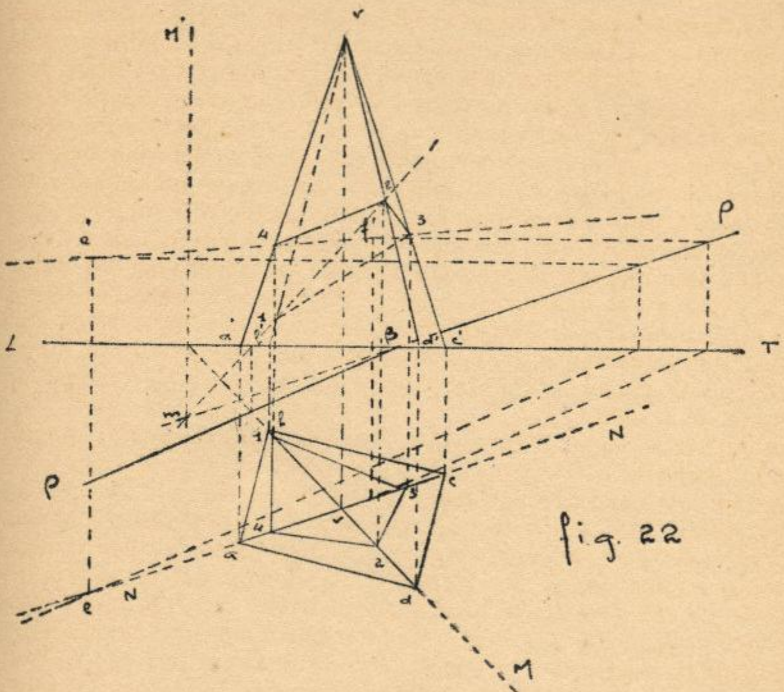

fig. 22

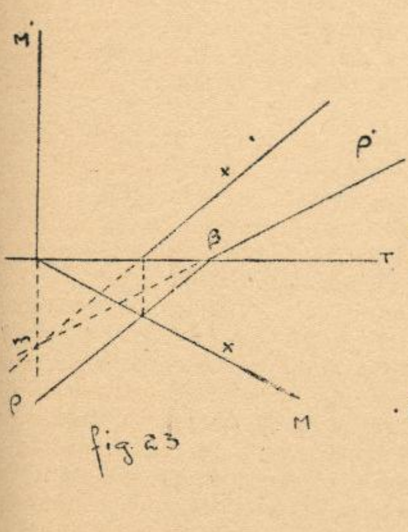

fig. 23

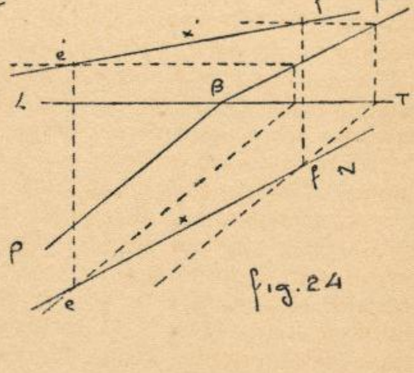

fig. 24

B. C.
951

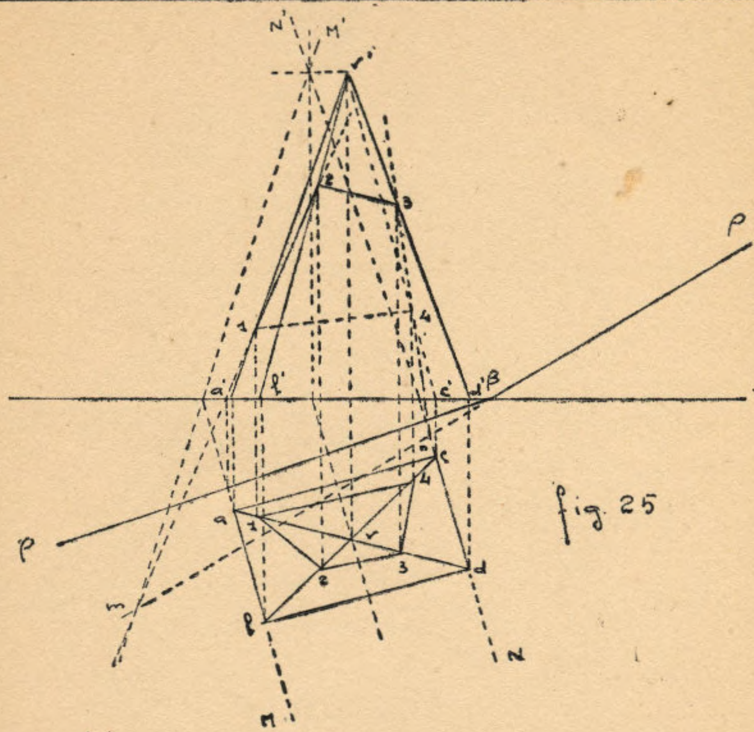

fig. 25

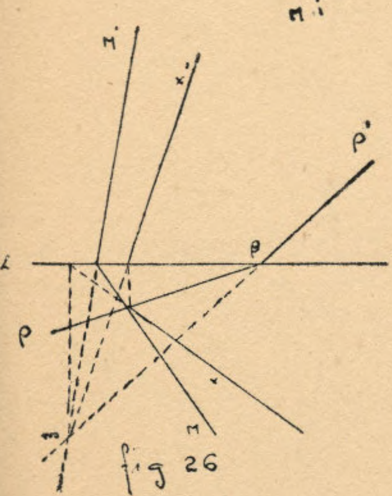

fig 26

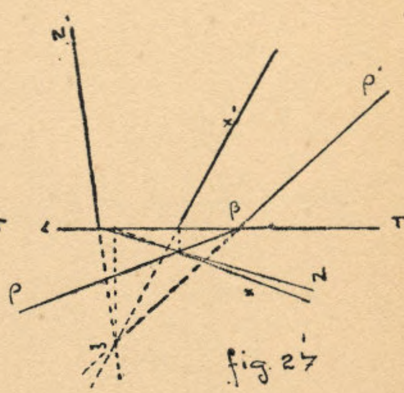

fig. 27

B. C.
951

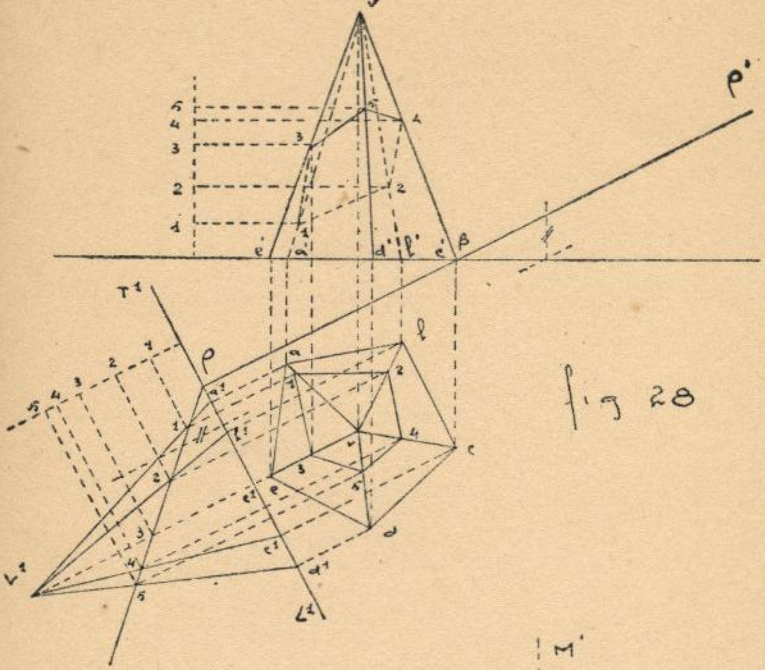

fig 28

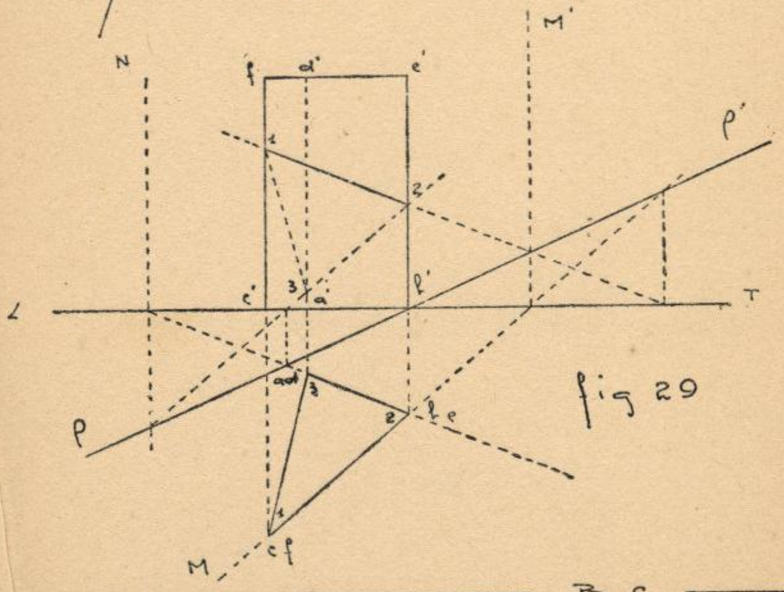

fig 29

B. C.
951

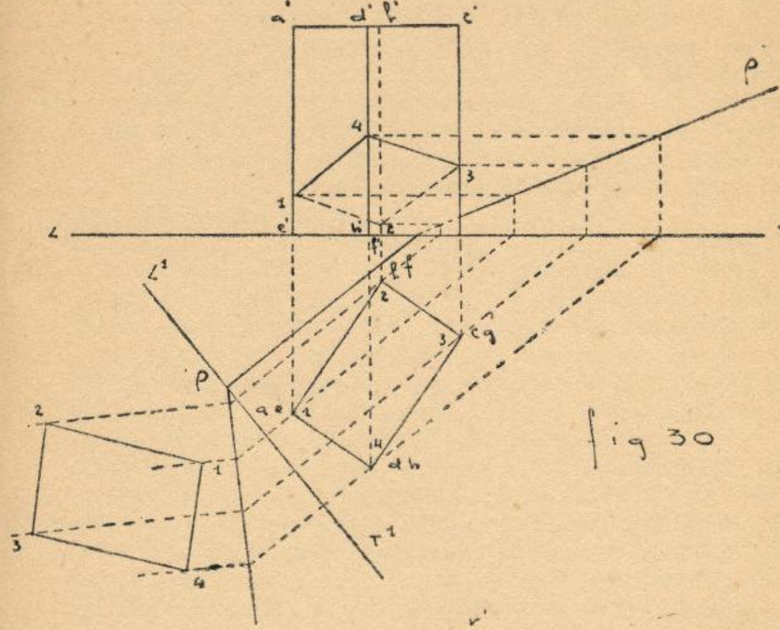

fig 30

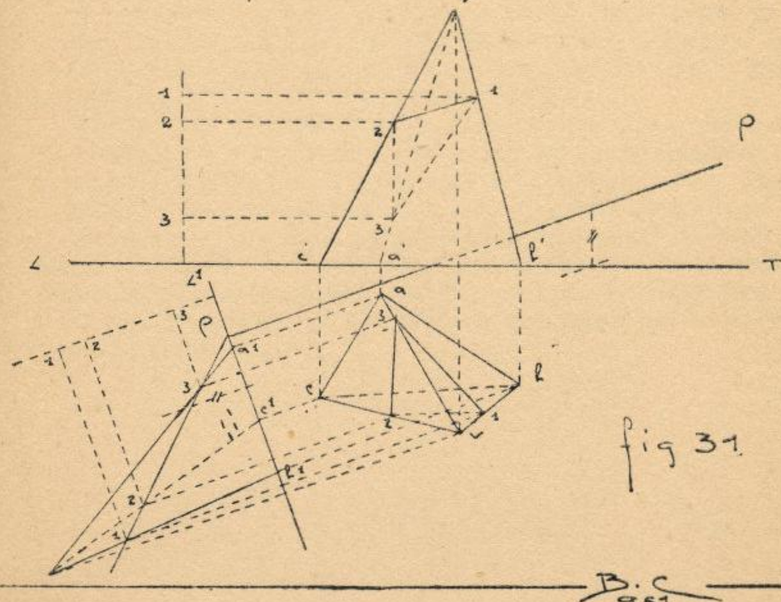

fig 31

B. C 951

considerado em relação (L 1 T 1) como a secção feita numa pirâmide reta por um plano de topo, a projeção vertical desta secção claro está que será representada por uma reta resultante da interseção do traço vertical do plano de topo com a projeção vertical da pirâmide, pois que a mesma pertence ao plano e ao corpo. Para determinação da projeção vertical da secção basta que consideremos os pontos (1,2,3,4,5) vértices da projeção horizontal da secção como pontos situados sôbre retas de nível, porém como já temos as cotas dêsses pontos mais prático se torna transportá-las para projeção vertical das arestas da pirâmide.

Na fig. 29 encontramos as duas projeções de um prisma reto de base triangular assente sôbre o plano horizontal de projeção e os traços de um plano qualquer (B, P, P') que o seciona. Escolhendo as fases laterais (C.B.E.F.) e (C.A.D.F.) determinamos os traços dos planos verticais (M', M) e (N', N) que as contém, pelas interseções dêstes planos com o plano qualquer teremos determinada a projeção vertical da secção, quanto à projeção horizontal da mesma como já o sabemos se confunde com a base do corpo.

O traçado que acabamos de expôr à fig. 29 poderia ser resolvido de outra maneira pois considerando que "tôda secção feita num prisma reto assente sôbre o plano horizontal, tem como projeção horizontal a própria base" poderemos considerar os vértices da base como pontos situados sôbre retas de nível ou frontais do plano (B, P, P') como aliás fizemos no traçado exposto (fig. 30).

Na fig. 31 determinamos ainda a secção feita numa pirâmide obliqua de base triangular assente sôbre o plano horizontal de projeção, a secção feita por um plano qualquer (B, P, P') usando a substituição do plano vertical de projeção.

Diante dos traçados expostos, acreditamos que a determinação da secção feita num corpo qualquer por um plano qualquer, o processo mais prático e o de mais fácil leitura numa épura seja o da substituição do plano vertical, pois como podemos observar na fig. 28 se usassemos a interseção de plano com plano precisariamos de três planos quaisquer que contivessem pelo menos três faces laterais da pirâmide, e se quisessemos usar a interseção de retas com planos nada menos de cinco planos verticais pois cinco são as arestas laterais do corpo.

INCLINAÇÃO SOBRE O PLANO VERTICAL DE PROJEÇÃO

Nos capítulos anteriores, tendo apresentado o plano em cogitação em nosso pequeno estudo, vimos, a seguir, a determinação da sua inclinação com relação ao plano horizontal de proteção, resolvendo a seguir problemas relativos ao mesmo.

Nas linhas que se seguem trataremos da determinação da inclinação do mesmo em relação ao plano vertical de projeção, as aplicações desta são as mesmas que as da estudada anteriormente, porém dada as características do problema usa-se um ou outro, atendendo sempre a uma apresentação mais clara e compreensível da épura.

A inclinação de um plano qualquer sôbre o plano vertical de projeção nos é dada, como sabemos, pela reta de maior inclinação, que é a reta resultante da interseção feita num plano qualquer por um plano de topo perpendicular àquele, esta reta pode ser determinada pela intersção de planos ou pla simples substituição do plano horizontal de projeção, tornando o plano qualquer um plano vertical.

Consideremos portanto a fig. 32 os traços de um plano qualquer (B, P, P') e determinemos a reta de maior inclinação pela interseção de um plano de topo (M, M') colocado na posição exigida para determinação da mesma, claro está que a projeção vertical (x') da reta de maior inclinação se confunde com o traço (M') do plano de topo, pois que a mesma pertence ao plano de topo, na interseção de (P') com (M') teremos a projeção vertical da extremidade da reta que toca o plano vertical, sendo que ainda a projeção horizontal desta está sôbre a linha de terra, para determinarmos a projeção horizontal da reta de maior inclinação, considerando que o traço (M') contém a projeção vertical da mesma, marquemos sôbre aquela projeção um ponto qualquer (m') que representará a projeção vertical de um ponto (M) situado sôbre a referida reta, se considerarmos ainda êste ponto (M) como situado sôbre uma reta frontal do plano (B, P, P') fácil se torna a determinação da projeção horizontal (m) de (M) pois ela estará sôbre a projeção horizontal daquela reta frontal, determinada a projeção horizontal da extremidade da reta de maior inclinação que toca o plano vertical, e ainda a projeção horizontal (m) de um de seus pontos temos determinada a direção da projeção horizontal da mesma.

O ângulo que o plano qualquer forma com o plano vertical de projeção é o ângulo que a reta de maior inclinação forma com a sua projeção vertical, êste ângulo, como observámos, porém, tem a sua projeção vertical representada por uma reta em virtude de ser perpendicular ao plano; logo torna-se necessário fazer a rotação do mesmo em tôrno de um dos seus lados a fim de, colocando-o de frente, determinar-lhe a verdadeira grandeza. Se observarmos que a reta de maior inclinação, sua projeção vertical, e a projetante vertical do ponto (M) formam um triângulo retângulo, em que, a projeção vertical é um cateto, a projetante vertical do segundo cateto e finalmente a reta de maior inclinação é a hipotenusa, para rebatermos êste triângulo sôbre o plano vertical nada mais temos a fazer que rebatê-lo em tôrno do cateto que pertence ao plano, portanto tracemos uma perpendicular ao traço (M') e pelo ponto (m') marquemos o afastamento de (m), obtendo assim um ângulo (n') que é a inclinação do plano qualquer (B, P, P') sôbre o plano vertical de projeção.

Para rebatermos o plano qualquer (B, P, P') em tôrno do seu traço vertical (P') a fim de, tornando-o de frente, determinar-lhe a parte útil em verdadeira grandeza basta que consideremos que esta parte útil está representada por um trapésio retângulo em que as bases são: a reta frontal e parte do traço vertical (P'), e os lados, a reta de maior inclinação e parte do traço horizontal (P); assim sendo, levemos (m'1) sôbre o traço (M'), a seguir pelo ponto (m 2) tracemos uma paralela ao traço vertical (P') que representará o rebatimento sôbre o plano vertical da reta frontal, e com centro em (B) levaremos o ponto (d) sôbre aquela paralela determinando assim a parte útil do plano qualquer em verdadeira grandeza, e ainda o ângulo (y) que é o ângulo plano do plano qualquer.

A determinação das projeções da reta de maior inclinação poderiam ser efetuadas de uma maneira mais simples pois, como podemos observar à fig. 32 A, os traços horizontais dos planos em questão cortam-se no segundo quadrante. Deixamos no entanto de usar êste traçado na fig. 32, por se tornar necessária a fixação do ponto (m') sôbre a reta de maior inclinação, não só para a determinação do ângulo de inclinação em verdadeira grandeza, como para a seguir usando o plano frontal que contém aquêle ponto, conseguirmos a parte útil do plano qualquer e o ângulo plano do mesmo.

Consideremos a seguir à fig. 33 os traços de um plano qualquer (B, P, P') e procuremos determinar a inclinação do mesmo sôbre o plano vertical de projeção usando a substituição do plano horizontal, tornemos então o plano qualquer um plano vertical usando um plano de topo perpendicular àquele, obtendo na épura uma segunda linha de terra (L 1, T 1), a seguir sôbre o traço (P) fixemos um ponto (m) que terá sua projeção vertical sôbre a linha de terra

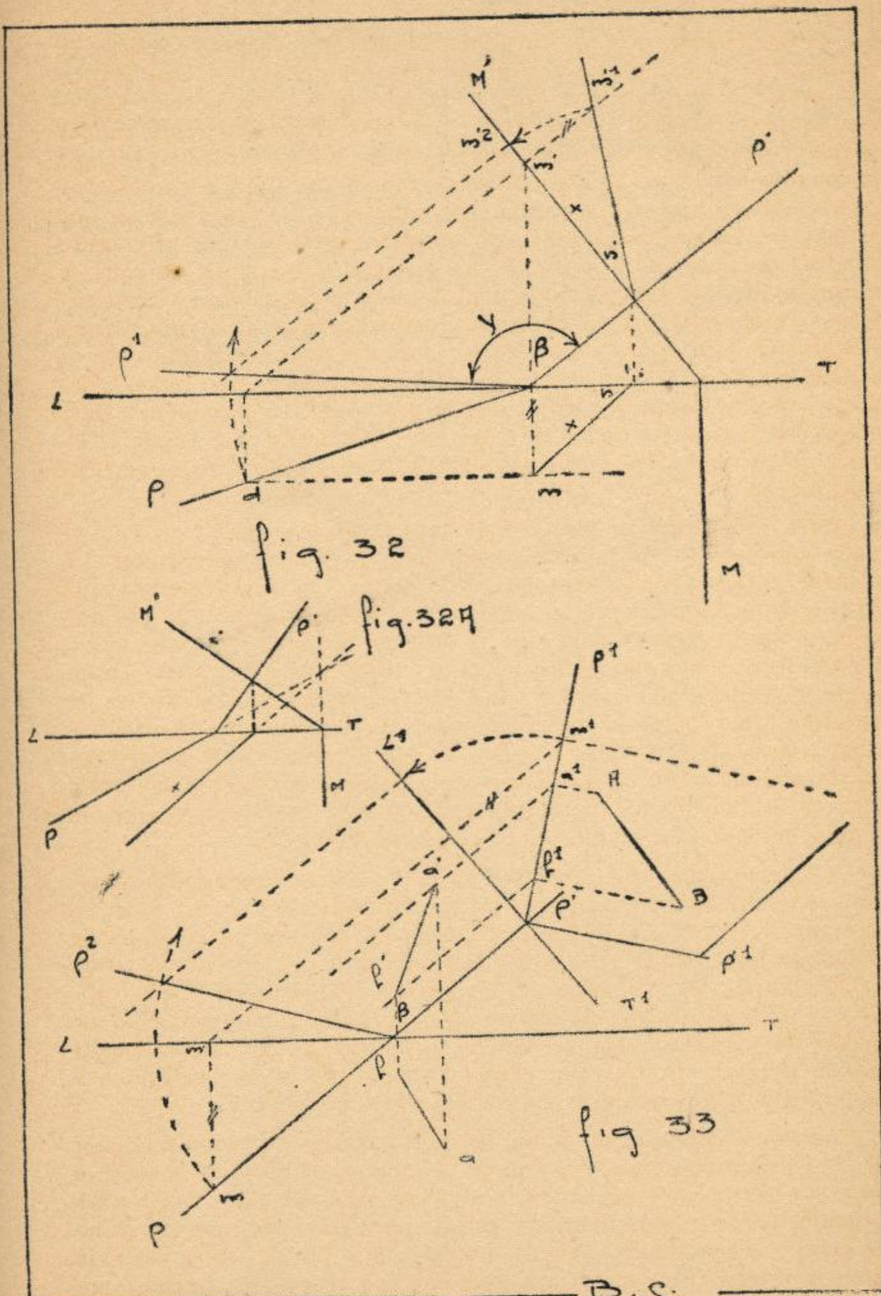

fig. 32

fig. 32A

fig 33

(L,T), se projetarmos êste ponto (m) ainda sôbre o plano de topo, obteremos uma segunda projeção horizontal (m 1) e por consequência um terceiro traço (P 1) do plano qualquer tornado vertical, sendo portanto a inclinação do plano qualquer sôbre o plano vertical o ângulo (n) que aliás está representado em verdadeira grandeza.

Nêste traçado determinamos a parte útil do plano, pela rotação do mesmo em tôrno do seu traço vertical (P'), e ainda pela rotação em tôrno da reta de maior inclinação. Para as projeções da reta (A,B) que pertence ao plano usamos a parte útil determinada pela rotação em tôrno da reta de maior inclinação, por acharmos que maior vantagem apresenta no caso.

PROJEÇÕES DOS POLIEDROS E SECÇÕES PLANAS

Para determinarmos as projeções de um corpo considerado assente sôbre um plano qualquer, usando a reta de maior inclinação, o melhor processo é determiná-la por meio da substituição do plano horizontal de projeção tornando o plano qualquer um plano vertical, e usar o rebatimento do plano qualquer em tôrno da sua reta de maior inclinação, a fim de determinar-lhe a parte útil, para que a projeção vertical não se apresente superposta, à verdadeira grandeza da base, o que de uma maneira geral dificulta a clareza da épura.

Consideremos a fig. 34 os traços de um plano qualquer (B, P, P') e projetemos uma pirâmide reta de base quadrangular assente sôbre o mesmo.

Tornemos primeiro com auxílio da nova linha de terra (L 1 T 1) o plano qualquer um plano vertical, e façamos a rotação do plano em tôrno da reta de maior inclinação. Tornando portanto neste segundo sistema de projeções com relação a (L 1 T 1), o caso com uma simples projeção de uma pirâmide assente sôbre um plano vertical, logo sôbre a parte útil do plano, teremos a base do corpo em verdadeira grandeza, a projeção horizontal desta base, claro está que se confunde com o traço horizontal do plano vertical (reta de maior inclinação), para a determinação da projeção vertical tomamos os afastamentos dos vértices da base com relação ao plano de topo que substituiu o plano horizontal de projeção, e para a projeção horizontal os afastamentos dos vértices da base com relação ao plano vertical de projeção.

Quanto à altura da pirâmide ou o eixo da mesma no caso, como sabemos, é uma perpendicular ao plano (B, P, P') e tem por consequência suas projeções perpendiculares aos traços dêste plano, sendo ainda a sua projeção sôbre o plano de topo representada em verdadeira grandeza (v 1), baixando uma perpendicular de (v 1) a (L 1, T 1) até obter a interseção da mesma com a perpendicular a (P) traçada pelo centro da projeção vertical da base, teremos o vértice da projeção vertical da pirâmide, considerando ainda "que as duas projeções de um ponto estão sempre situadas sôbre uma mesma perpendicular à linha da terra", tracemos uma perpendicular a (L T) pelo ponto (v'), obtendo na interseção desta com a perpendicular a (P) traçada pelo centro da projeção horizontal da base o vértice (v) da projeção horizontal da pirâmide.

Na fig. 35 consideramos os traços de um plano qualquer (B,P,P') e determinamos as projeções de um prisma reto de base triangular, assente por uma das suas bases sôbre o plano qualquer.

O processo usado nêste traçado foi o mesmo que usamos no caso anterior, apenas como as bases do corpo eram paralelas, sendo portanto suas arestas laterais iguais, fizemos o traçado da verdadeira grandeza apenas para uma aresta lateral (f 1, e 1), ainda porque possuindo as mesmas inclinações com relação aos planos de projeção projetam-se iguais sôbre os mesmos.

Terminando êsse nosso pequeno estudo sôbre o plano qualquer procuremos ainda determinar a secção feita num corpo por um plano qualquer, usando a reta de maior inclinação.

Consideremos a fig. 36 as duas projeções de uma pirâmide reta de base quadrangular assente sôbre o plano horizontal, e os traços (B, P, P') de um plano qualquer que a seciona, determinemos a seguir a reta de maior inclinação tornando o plano qualquer um plano vertical pela substituição do plano horizontal, projetemos sôbre o plano de topo o corpo, obtendo assim nêste segundo sistema de projeções com relação (L 1, T 1), como traçado inicial a determinação da secção feita numa pirâmide reta por um plano vertical, que tem o seu traço vertical representado por (P'), e como traço horizontal a reta de maior inclinação, logo a projeção horizontal da secção já está determinada pela interseção da reta de maior inclinação com a segunda projeção horizontal do corpo (pontos 1,2,3 e 4), determinada esta projeção fácil se torna a determinação das outras pelos traçados habituais.

Na fig. 37 consideramos as duas projeções de um prisma reto de base triangular assente sôbre o plano horizontal, e os traços de um plano qualquer (B, P, P') que o corta. Para determinarmos a secção nêste segundo caso usamos o mesmo processo do caso anterior.

Tanto no traçado exposto a fig. 36 como no exposto a fig. 37, para a determinação da verdadeira grandeza da secção usamos a substituição do plano vertical de projeção, tornando o plano qualquer (B, P, P') um plano de topo, não só por o acharmos um processo mais prático como ainda por tornar mais clara a interpretação das épuras.

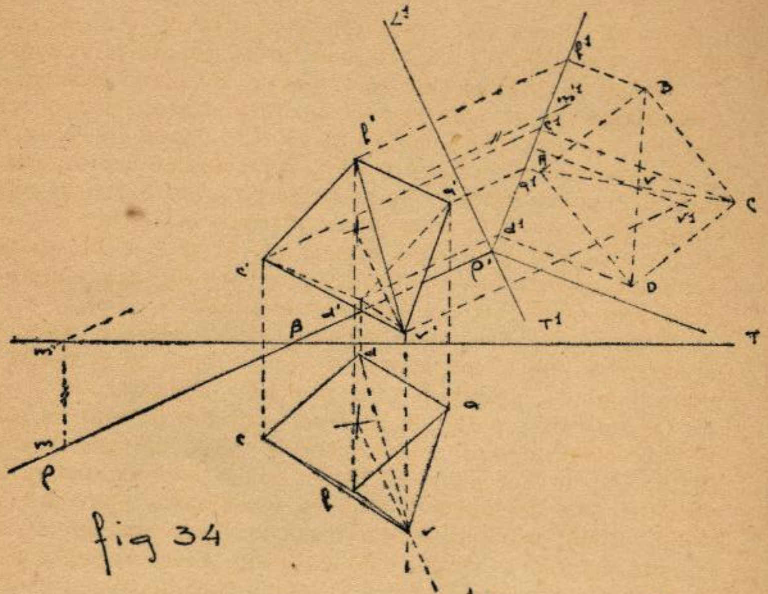

fig 34

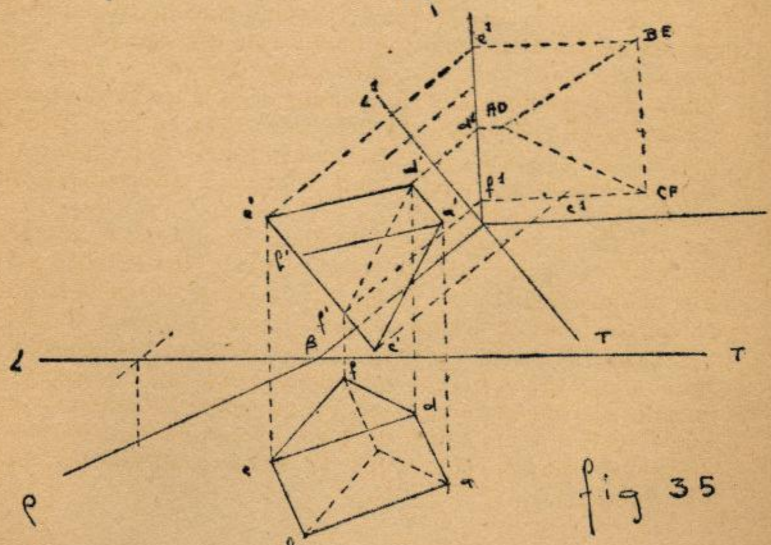

fig 35

B. C
951

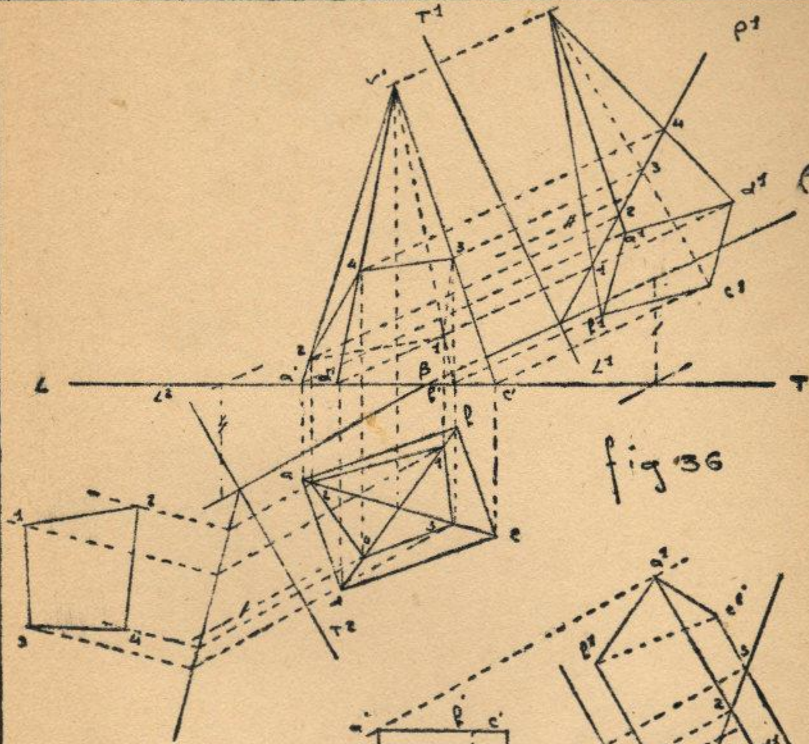

fig 36

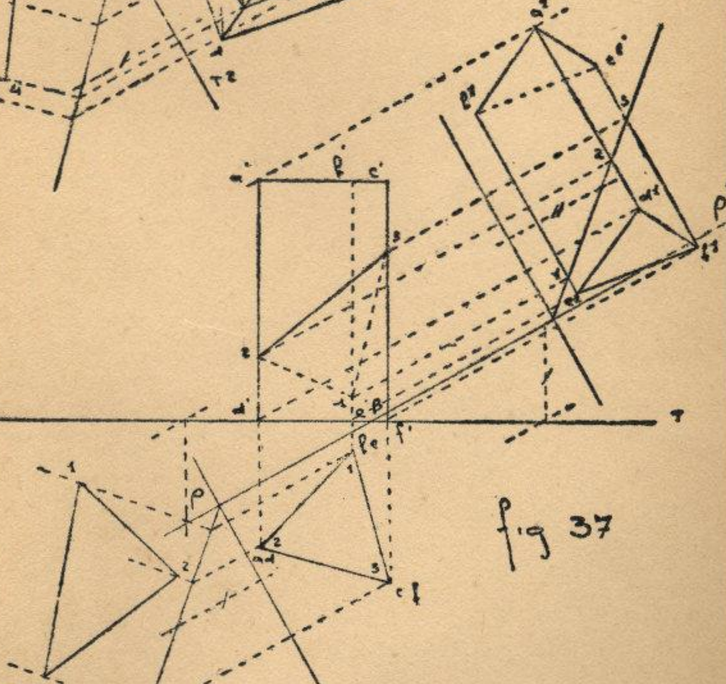

fig 37

Impresso nas Oficinas Gráficas da
— TRIBUNA DA IMPRENSA —
Rua do Lavradio, 98 — Tel.: 32-8185