CARLOS DEL NEGRO

BAIXO-RELÊVO

O método das projeções centrais

Tese de concurso à Cadeira de Modelagem
da Faculdade Nacional de Arquitetura —
Universidade do Brasil

RIO DE JANEIRO — 1949

CARLOS DEL NEGRO

Ao Departamento B.A.R. —
oferece Carlos Del Negro
Rio, 3/5/1982

BAIXO-RELÊVO

O método das projeções centrais

Tese de concurso à Cadeira de Modelagem
da Faculdade Nacional de Arquitetura —
Universidade do Brasil

RIO DE JANEIRO — 1949

JORNAL DO COMMERCIO — Rodrigues & Cia.
Av. Rio Branco, 117 — Rio de Janeiro — 1949

Dedicado aos artístas do Renascimento
— simbolizados pela figura gigantesca
de Leonardo da Vinci — que procurando
solucionar os problemas artísticos, fizeram
também progredir a ciência.

PROGRAMA

I OBJETIVO DA TESE

II INTRODUÇÃO:

1) Definições;
2) Homologia plana;
3) Homologia sólida;
4) Assimilação da homologia sólida ao baixo-relêvo;
5) O baixo-relêvo definido por duas projeções centrais, uma sôbre o quadro e outra sôbre o plano de fuga.

III TESE: BAIXO-RELÊVO. O MÉTODO DAS PROJEÇÕES CENTRAIS.

1) Extensão do método das projeções centrais ao baixo-relêvo:

A) Individuação da reta;
B) Individuação do plano;
C) Individuação do ponto.

2) Representação do baixo-relêvo por meio de uma perspectiva linear; execução do baixo-relêvo:

A) Representação do plano e sua modelagem;
B) Representação da reta e sua localização;
C) Representação do ponto e sua localização.

3) Problemas:

A) Descritivos ou gráficos;
B) Métricos.

4) Sombras;
5) Conclusão prática: construção do baixo-relêvo por uma perspectiva linear.

CONVENÇÕES

BIBLIOGRAFIA

I — OBJETIVO DA TESE

Este é o novo aspecto de nossos estudos sôbre a homologia sólida. Em 1938 apresentamos à Escola Nacional de Belas Artes a tese intitulada "**Desenho e relêvo**" em que exploramos a representação do baixo-relêvo, identificado com a homologia sólida, através do método de MONGE, isto é, com a utilização das projeções horizontal e vertical. Em outra tese intitulada "**O desenho artístico e a perspectiva linear**", apresentada à Escola Nacional de Belas Artes em 1942, por ocasião da abertura do concurso para a segunda cadeira de Desenho, tratamos a perspectiva pelo método das projeções centrais. Nasceu-nos daí o desejo de aplicá-lo à perspectiva-relêvo, isto é, de organizar a representação do baixo-relêvo, desta vez, pelo método das projeções centrais. O seguinte passo da obra de A. NOELLI "**La prospettiva per gli scultori**" abriu-nos o caminho: "**A projeção de uma perspectiva-relêvo sôbre o plano invariável é a perspectiva linear pictórica do objeto original, feita sôbre esse plano por um ponto de vista, posto sôbre o raio principal, à distância do plano invariável igual à do olho ao plano de fuga**". Não conhecemos publicação que trate a matéria por esse método; por isso, constituiu o objetivo de nossa tese.

O assunto foi tratado em suas linhas essenciais, como requer a natureza da cadeira, deixando de lado minúcias e detalhes que o tornariam massante.

Finalmente chegamos à seguinte conclusão prática: desde que tenhamos uma perspectiva linear (feita por qualquer processo) podemos interpretá-la como baixo-relêvo e, sob certas condições, construí-lo. Essa conclusão vem sistematizar e confirmar a velha prática dos escultores que, ao idealizar o baixo-relêvo, começam por esboçar um desenho que é apenas a perspectiva linear do motivo concebido.

II — INTRODUÇÃO

1) DEFINIÇÕES

Da geometria projetiva, em que não se distinguem os elementos por se encontrarem à distância finita ou infinita, introduzimos as seguintes definições que trazem simplificação e uniformidade a muitos enunciados, assim como, em certos casos, permitem reunir em uma só diferentes proposições.

Duas retas são paralelas quando se cortam **em um ponto ao infinito**. Um ponto ao infinito define **uma direção de reta.** Portanto, quando dissermos que duas retas são paralelas, equivale a dizer que têm a mesma direção ou que têm uma direção comum. Para simplificar a linguagem, o ponto ao infinito passa a chamar-se **ponto impróprio**, quando formos obrigados a diferençá-lo do **ponto próprio** ou ponto no significado comum.

Dois planos são paralelos quando se cortam em uma reta ao infinito. Uma reta ao infinito define **uma direção de plano.** Assim, quando dissermos que dois planos são paralelos, equivale a dizer que têm a mesma direção. Como anteriormente, a reta ao infinito terá por nome **reta imprópria**, quando quizermos realçá-la da **reta própria** ou reta no significado comum.

O conjunto dos pontos ao infinito e das retas ao infinito constitui o plano ao infinito, a que denominaremos **plano impróprio**, se o quizermos destacar do **plano próprio** ou plano no significado comum.

2) HOMOLOGIA PLANA

No plano estão representados um ponto O (centro de homologia), uma reta t (eixo de homologia) e um par de pontos $\mathbf{A}$ e A alinhados com o centro de homologia (fig. 1). Os pontos $\mathbf{A}$ e A são denominados **homólogos** ou **correspondentes**. Se unirmos dois pontos **homólogos** a um ponto do eixo de homologia, determinamos duas **retas homólogas** ou **correspondentes**. Todos os pontos do eixo de homologia são homólogos de si mesmos e, por conseguinte, o eixo de homologia também é homólogo de si mesmo (reta unida composta de pontos unidos). Nessa transformação dois **pontos homólogos estão sempre em linha reta com o centro de homologia**. Assim, para qualquer ponto $\mathbf{B}$ colocado fora de $\mathbf{A}$ e A, podemos construir seu homólogo B e para a reta $\mathbf{AB}$, que não passa por O, sua homóloga AB sem sair do plano em que estão situados. De fato, a reta $\mathbf{AB}$ corta o eixo t no ponto T_1; a reta T_1A é a homóloga de $T_1\mathbf{A}$ e o raio $O\mathbf{B}$ corta-a no ponto procurado B. De modo geral, se $\mathbf{A}$ e A são pontos homólogos, ligando-os a um ponto qualquer T_1 do eixo de homologia, obteremos duas retas $T_1\mathbf{A}$ e T_1A homólogas entre si. Todos os raios traçados por O cortam retas homólogas em pontos homólogos.

Os elementos e figuras formados pelos pontos $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, Γ, etc. constituem um sistema; os elementos e figuras formados pelos seus homólogos A, B, C, etc., outro sistema. Para distinguir um do outro, poderíamos ao primeiro denominar **sistema-objeto** e ao segundo, **sistema-imagem**. Ainda podemos supor que cada sistema esteja situado em um plano; mas, que o plano de um sistema coincida com o do sistema homólogo. A esse plano, comum aos dois sistemas, denominamos **plano unido** (não constituido de retas e pontos unidos). E' **unido** todo o elemento que, sendo essencialmente comum aos dois sistemas, coincide com o seu homólogo.

Obtemos o homólogo do ponto impróprio da reta $T_1\mathbf{A}$, se traçarmos por O, a reta paralela a $T_1\mathbf{A}$ até cortar T_1A no ponto F_1; esse ponto será o **ponto limite** da reta T_1A. A reta paralela a t, traçada por F_1, será a **reta limite** do sistema-imagem. Do mesmo modo, obtemos o homólogo do ponto impróprio da reta T_1A, se conduzirmos por O a paralela a T_1A até cortar $T_1\mathbf{A}$ em Φ_1; esse será o **ponto limite** da reta $T_1\mathbf{A}$. A reta φ paralela à t, traçada por Φ_1, será a **reta limite** do sistema-objeto.

A reta limite de um sistema é o lugar geométrico dos pontos correspondentes aos pontos impróprios do outro sistema, ou por outras palavras, ela é homóloga da reta imprópria do outro sistema. Fácil é deduzir que as retas limites devem ser paralelas ao eixo de homologia; com efeito, se supuzéssemos que assim não fosse, cada uma delas encontraria o eixo de homologia num ponto situado à distância finita, homólogo de sí mesmo, o que está em contradição com a definição de reta limite. Para terminar dizemos que **as retas limites se dispõem de modo que uma se afaste do centro de homologia da mesma distância que a outra do eixo de homologia.**

Dois pontos, por exemplo **A** e **B**, servem para determinar uma reta; nessas condições a sua homóloga passaria pelos pontos A e B. E' vantajoso, no entanto, escolhê-los de tal modo, que um esteja sôbre o eixo de homologia e o outro seja o ponto impróprio da reta. O ponto sôbre o eixo de homologia é comum aos dois sistemas; porém ao ponto impróprio de um sistema corresponde o ponto limite do outro sistema. Assim, F_1 do sistema-imagem corresponde ao ponto impróprio da reta $T_1\mathbf{A}$ do sistema-objeto; o ponto Φ_1 do sistema-objeto corresponde ao ponto impróprio da reta T_1A do sistema-imagem. Os ráios OF_1 e $O\Phi_1$ são, respectivamente, as retas que unem O ao ponto impróprio de $T_1\mathbf{A}$ e ao de T_1A. Os pontos sôbre o eixo de homologia devem ser procurados para cada reta (T_1, T_2, etc.); **porém o ponto F_1 é o mesmo para todas as retas do sistema-objeto paralelas a OF_1, isto é, que se cortam em mesmo ponto impróprio. Identicamente, o ponto Φ_1 é o mesmo para todas as retas do sistema-imagem paralelas a $O\Phi_1$ (fig. 1).** Donde concluimos que **às retas paralelas entre si, não paralelas ao eixo de homologia, pertencentes a um sistema, correspondem retas do outro sistema que concorrem a um ponto limite.** Se, entretanto, elas

forem paralelas ao eixo de homologia as suas correspondentes também o serão.

Conhecida, por exemplo, uma reta no sistema-imagem pelos pontos T_1 e F_1, para individuar sua correspondente no outro sistema basta pelo ponto T_1 traçar a paralela ao ráio OF_1. Do mesmo modo procedemos para o sistema-objeto, quando conhecemos uma reta pelos pontos T_1 e Φ_1; sua homóloga é individuada, traçando por T_1 a paralela ao ráio $O\Phi_1$. **Por essa razão, concluimos que a homologia plana também pode ser definida pelo centro O, pelo eixo de homologia t e uma reta limite f ou φ.**

As retas que passam pelo ponto O denominam-se **ráios**. Pela propriedade de estarem situados sôbre um ráio os pontos homólogos, qualquer ráio é comum tanto ao sistema-objeto quanto ao sistema-imagem, porque coincide com o seu homólogo (reta unida, porém não constituida de pontos unidos). Desejamos realçar em um ráio (fig. 1) três de seus pontos: o primeiro, o ponto T coincidente com o seu homólogo (ponto unido), que está situado na intersecção do ráio com o eixo de homologia; o segundo, o ponto F, sôbre a reta limite do sistema-imagem, homólogo do ponto impróprio do ráio coincidente que pertence ao sistema-objeto; o terceiro, o ponto Φ, sôbre a reta limite do sistema-objeto, homólogo do ponto impróprio do ráio coincidente que pertence ao sistema-imagem.

Um ponto dum sistema, por si só, não basta para individuar o seu homólogo do outro sistema, isto é, não basta sabermos que êles estão alinhados com o centro de homologia; é necessário ainda conhecer uma reta, que passe por êle e não passe por O, e a sua homóloga.

RESUMO — Na transformação homológica pontos correspondentes estão em linha reta com o centro de homologia. Às retas paralelas de um sistema correspondem retas que concorrem a um ponto limite no outro sistema; porém às retas paralelas ao eixo de homologia correspondem-lhes outras que lhes são paralelas.

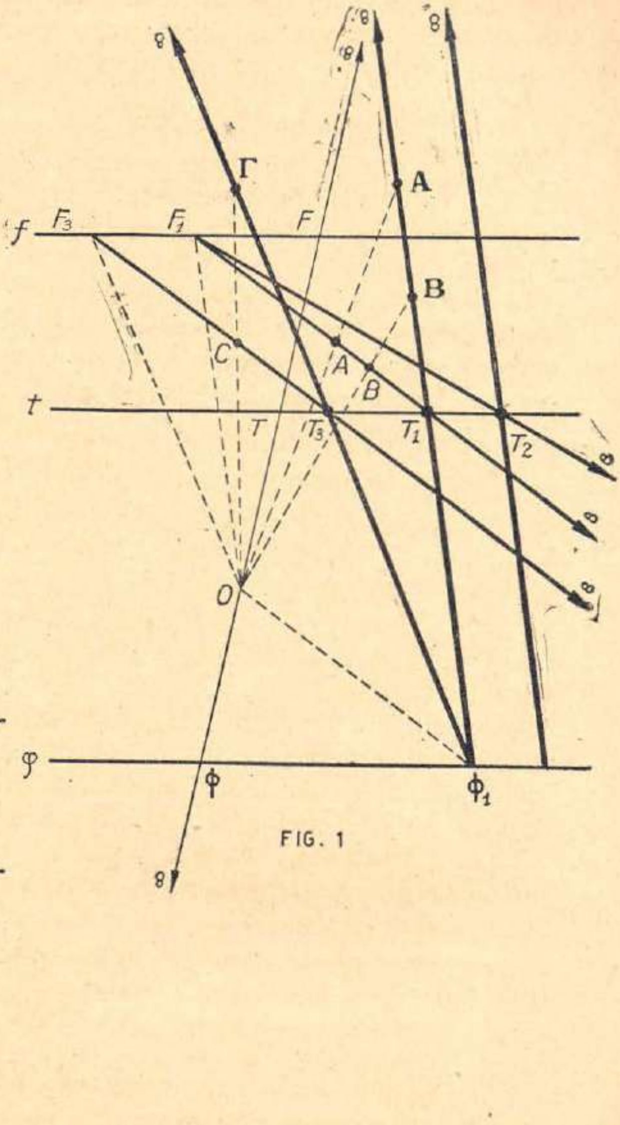

FIG. 1

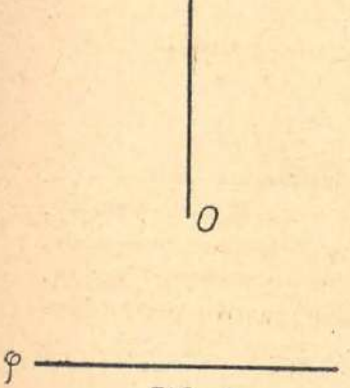

FIG. 2

E' claro que podemos construir o sistema-objeto e seu homólogo, sem sair o plano em que estão situados (plano unido), quando conhecemos uma das condições seguintes:

1) **o centro de homologia, o eixo de homologia e par de pontos ou par de retas correspondentes;**

2) **o centro de homologia, o eixo de homologia e uma reta limite.**

Em determinada homologia plana uma reta individua perfeitamente sua correspondente, se lhe conhecermos o ponto sôbre o eixo de homologia e o ponto limite. Por sua vez um ponto individua seu correspondente no plano, se conhecermos uma reta, que passe por êle e não passe por *O*, e a sua homóloga.

3) HOMOLOGIA SÓLIDA

Suponhamos na fig. 2 a homologia plana determinada pelo centro *O*, o eixo de homologia *t* e a reta limite *f* do sistema-imagem e que o plano da figura gire em tôrno da reta horizontal *OP*, perpendicular a reta limite. Para cada posição sucessiva do plano temos determinada uma homologia plana, porque nesse movimento se conservam todas as propriedades referidas no capítulo anterior. Nessas condições, as retas *t* e *f* geram dois planos verticais; ao primeiro denominaremos **plano de homologia** e ao segundo, **plano limite do sistema-imagem** (fig. 3). Sendo φ a reta limite do sistema-objeto, ela gera também um plano vertical, a que denominaremos **plano limite do sistema-objeto** (não desenhado).

Na homologia sólida a cada ponto, reta e plano corresponde respectivamente um ponto, uma reta, e um plano. A seguir examinaremos apenas a correspondência entre planos, concebendo que as retas sejam intersecções de planos ou pertençam a um plano e os pontos, intersecções de retas. Tomamos por base sempre os planos do sistema-objeto para estabelecer-lhes a correspondência com os planos do sistema-imagem. Para abreviar linguagem, chamaremos ao plano limite do sistema-imagem simplesmente plano limite. Identicamente, à reta limite e ao ponto limite do sistema-imagem, respectivamente reta limite e ponto limite.

a) Plano de homologia

E' gerado pelo conjunto dos eixos de homologia (t, t_1, t_2, etc.) de todas as homologias planas originadas no movimento de rotação, em tôrno de OP. O plano de homologia é homológico de sí mesmo, porque todos os eixos de homologia, que o compõem, são homólogos de sí mesmos (plano unido constituido de retas e pontos unidos).

b) Plano impróprio do sistema-objeto

E' formado por todas as retas e pontos impróprios. O plano homológico do plano impróprio do sistema-objeto é o plano limite do sistema-imagem, gerado pelas retas limites (f, f_1, f_2, etc.) provenientes de todas as homologias planas que se originam na rotação.

c) Plano limite do sistema-objeto

E' gerado por todas as retas limites (φ, φ_1, φ_2, etc.) provenientes de todas as homologias planas que se originam na rotação. O plano homológico do plano limite do sistema-objeto é o plano impróprio do sistema-imagem.

d) Plano que passa por OP (plano projetante que passa por OP)

Cada um desses planos, que serviu para gerar a homologia sólida, constitui uma homologia plana individuada por O e pelas retas t e f, intersecções do plano projetante com o plano de homologia e o plano limite do sistema-imagem respectivamente (fig. 3). As retas t e f são paralelas entre sí e estão situadas em mesmo plano com OP. Como já assinalámos no capítulo anterior, os dois sistemas, objeto e imagem, que compõem a homologia plana, têm como suporte um plano comum. Por isso, o plano projetante e o seu homológico coincidem (plano unido não constituido de retas e pontos unidos).

e) Plano que passa por O, porém não passa por OP (plano projetante)

Corta o plano de homologia e o plano limite do sistema-imagem segundo duas retas t_1 e f_1 paralelas entre sí (fig. 4). Um plano projetante que passa por OP corta, como no caso anterior, o plano de homologia e o referido plano limite segundo t e f respectivamente; sua intersecção com o plano projetante procurado é uma reta que passa por O (ráio projetante). A intersecção de t com t_1 (eixos de homologia) dará T, traço do raio sôbre o plano de homologia e a intersecção de f com f_1 (linhas limites) fornecerá o ponto F. Os pontos T e F pertencem a homologia plana determinada pelo centro O e pelas retas t e f. O referido ráio coincide com o seu correspondente que também passa por T e F (reta unida), sendo T homólogo de sí mesmo e F o homólogo do ponto impróprio do ráio coincidente, que pertence ao sistema-objeto. Esse último encontra o plano limite do sistema-objeto no ponto Φ, que tem por homólogo o ponto impróprio do ráio coincidente, que pertence ao sistema-imagem.

Fazendo girar somente o plano de t e f, em tôrno de OP os pontos T e F descreverão, respectivamente, o novo eixo de homologia t_1, e a nova reta limite f_1 durante a rotação do plano de t e f; por conseguinte, cada reta TF coincide com um ráio projetante do plano estudado. Por esse motivo, ainda nesse caso o plano projetante e seu homológico coincidem (plano unido) e geram uma homologia plana. Assim, dado um plano projetante que não passe por OP, as intersecções com o plano de homologia e o plano limite individuam respectivamente o eixo de homologia t_1 e a linha limite f_1 da homologia plana a que êle pertence.

f) Plano paralelo ao plano de homologia

Na homologia plana uma reta paralela ao eixo de homologia corta-o em um ponto impróprio, o que obriga a sua ho-

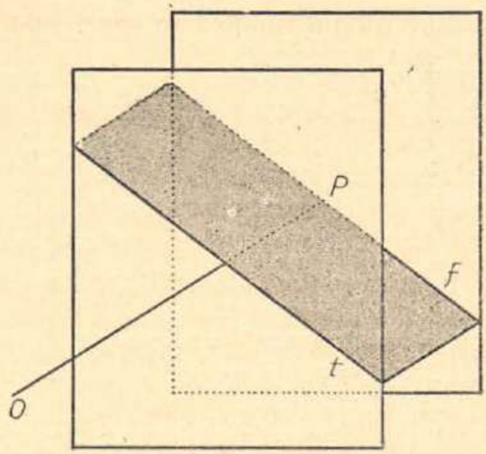

FIG. 3

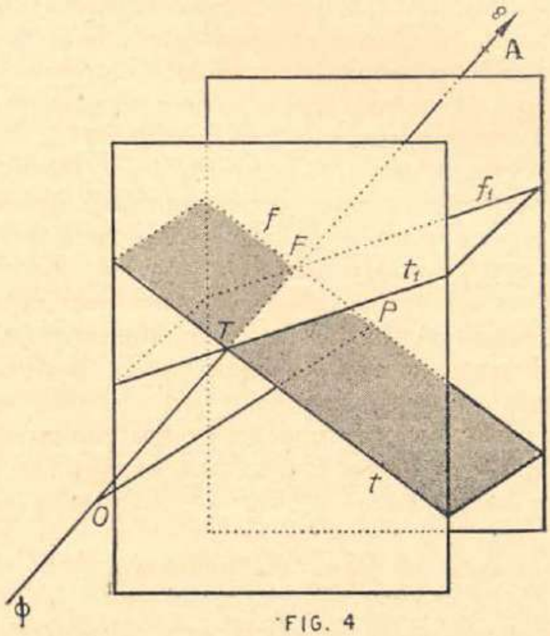

FIG. 4

móloga a lhe ser paralela. Essas duas retas sendo perpendiculares a OP originam, no movimento de rotação, dois planos paralelos entre sí e paralelos ao plano de homologia. Por isso, o plano homológico de um plano paralelo ao plano de homologia é outro plano também paralelo a êle. O traço e a sua reta limite são a reta imprópria do plano de homologia. Para individuá-lo ,além de O, dos planos de homologia e limite, **é necessário conhecer um ponto (próprio) situado sôbre êle e o seu homólogo.**

g) Plano que não passa por *O* e não é paralelo ao plano de homologia (fig. 5)

Um plano objetivo que não passe por O e não seja paralelo ao plano de homologia secciona o plano de homologia segundo a reta t_2, seu eixo de homologia. Um plano tf que passe por OP (plano projetante), corta o plano objetivo segundo a reta T_2M. O ponto T_2 é o traço de T_2M sôbre o plano de homologia.

Se fizermos passar por O um plano paralelo ao plano objetivo, êle corta o plano limite segundo f_2 paralela a t_2; sua intersecção com o plano tf é OF_2, paralela a T_2M. Na homologia plana definida por O, e pelas retas t e f, T_2M têm por homóloga a reta T_2F_2, sendo T_2 o traço de T_2M e F_2 (ponto limite do sistema-imagem) homólogo do ponto impróprio de T_2M. O ponto Φ_2 em que T_2M encontra o plano limite do sistema-objeto tem por homólogo o ponto impróprio de T_2F_2.

Este raciocínio está a provar que, não só na homologia plana mas também no espaço, podemos utilizar os pontos T_2 e F_2 para individuarmos a reta. Sua intersecção com o plano de homologia fornece-nos T_2; a intersecção, com o plano limite, do ráio projetante paralelo à reta, determina o ponto F_2. Assim conhecidos T_2 e F_2, individuamos a reta fazendo passar pelo ponto T_2 a paralela ao ráio OF_2.

Se fizermos girar apenas o plano de tf em tôrno de OP, os pontos T_2 e F_2 descreverão, respectivamente, as retas t_2 e f_2 nas infinitas homologias planas assim geradas. Portanto, a cada reta do plano objetivo corresponde-lhe outra que se apoia sôbre o plano definido por t_2f_2 ; as retas que se cor-

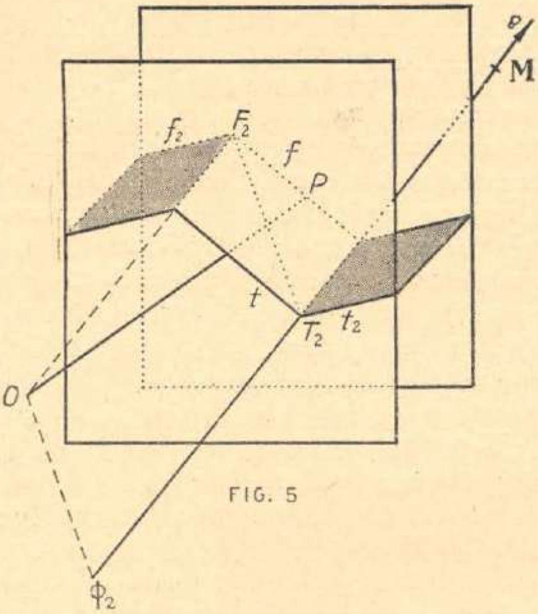

FIG. 5

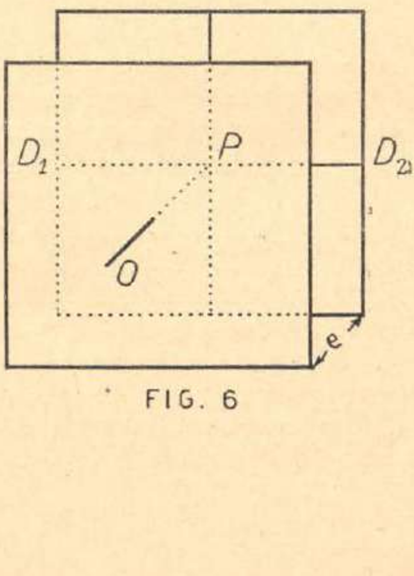

FIG. 6

respondem, cortam-se sôbre o eixo de homologia e estão situadas em dois planos homólogos entre si. O plano homólogo do plano objetivo passa por t_2 e f_2; ficando perfeitamente individuado por essas duas retas.

Assim, dado um plano objetivo, que não passe por O e não seja paralelo ao plano de homologia, sua intersecção com o plano de homologia fornecerá o eixo de homologia t_2 dos dois planos correspondentes entre sí e a intersecção do plano projetante, paralelo ao plano objetivo, com o plano limite fornecerá a reta limite f_2. A reta f_2 é homóloga da reta imprópria do plano objetivo. Finalmente o plano homólogo do plano objetivo passa pelas retas t_2 e f_2.

Resumo — Para determinar a homologia sólida bastam, por exemplo:

O centro, o plano de homologia e o plano limite.

Numa homologia sólida bastam para determinar:

a) **o plano objetivo: o eixo de homologia** (sua intersecção com o plano de homologia) **e a linha limite** (a intersecção, com o plano limite, do plano projetante paralelo ao plano objetivo).

b) **a reta objetiva: o traço** (sua intersecção com o plano de homologia) e o **ponto limite** (intersecção, com o plano limite, do raio projetante paralelo à reta objetiva).

c) **a reta objetiva** (concebida como intersecção de dois planos): **seu traço** (intersecção dos eixos de homologia dos dois planos) **e o ponto limite** (intersecção das retas limites dos dois planos).

d) **a reta objetiva** (situada em um plano): **seu traço** (sôbre o eixo de homologia do plano) **e o ponto limite** (sôbre a reta limite do plano.

4) ASSIMILAÇÃO DA HOMOLOGIA SÓLIDA AO BAIXO-RELÊVO

Chamaremos: **centro de projeção, ponto de vista** ao centro de homologia; **quadro, plano invariável** ou **primeiro plano** ao plano de homologia. No sistema-imagem denominaremos **plano de fuga** ao seu plano limite; **linhas de fuga** às suas retas limites e **pontos de fuga** aos seus pontos limites. Identicamente, no sistema-objeto denominaremos **plano neutro** ao seu plano limite; **linhas neutras** às suas retas limite e **pontos neutros** aos seus pontos limites. A projeção ortogonal do centro de homologia sôbre o plano de fuga em P é o **ponto principal de fuga** ou simplesmente **ponto principal**; OP a **distância principal**.

A intersecção do plano horizontal, que passa pelo ponto de vista (plano do horizonte), com o plano de fuga é a **linha do horizonte**. Os pontos D_1 e D_2 situados sôbre a linha do horizonte, afastados do ponto principal (P) da distância principal (OP) são os **pontos principais de distância** ou simplesmente **pontos de distância** (fig. 6).

O plano perpendicular ao plano do horizonte e ao plano de fuga, que passa pelo ponto de vista, é o **plano principal**. Sua intersecção com o plano de fuga é **a linha principal**. O plano que passa pelo centro de homologia é um **plano projetante**; identicamente, a reta que passa pelo referido ponto é um **ráio projetante**. Um eixo de homologia passará a denominar-se **traço de plano** e um ponto sôbre o referido eixo **traço de reta**.

Limitando nosso estudo ao baixo-relêvo artístico, seu característico fundamental — transformação da figura objetiva na figura correspondente — consiste em representar os elementos ponto, reta e plano impróprios no espaço limitado por dois planos paralelos entre sí. O afastamento entre o quadro e plano de fuga, será a espessura do material em que se localizarão as figuras correspondentes às figuras objetivas, postas à frente do observador desde o quadro até o plano impróprio. A espessura das figuras em baixo-relêvo sofrem degradação, tanto mais pronunciada quanto mais se afastam do quadro os objetos que lhes correspondem. Quando o plano de fuga coincidir com o quadro, isto é, quando a espessura do baixo-relêvo fôr zero, recairemos na perspectiva linear.

No baixo-relêvo as figuras correspondentes às figuras objetivas são denominadas também **perspectiva-relêvo**; na perspectiva linear simplesmente **projeção** ou **imagem**.

5) O BAIXO-RELÊVO DEFINIDO POR DUAS PROJEÇÕES CENTRAIS, UMA SÔBRE O QUADRO E OUTRA SÔBRE O PLANO DE FUGA

E' nosso intento extender ao baixo-relêvo o método das projeções centrais, isto é, a perspectiva independente cuja idéia já se constituira completamente na Geometria-Perspectiva de COUSINERY (1828). Caracteriza-se o método pela realização de todas as suas operações diretamente feitas sôbre o quadro, sem que haja subordinação ou recurso ao método de MONGE.

Se de um centro *O* projetarmos sôbre um plano, denominado quadro, uma figura situada sôbre outro plano, a figura assim obtida é a perspectiva da primeira (*). Inversamente, a primeira figura é também a perspectiva da segunda se tivermos por quadro o plano da primeira. Por êsse motivo, essas figuras são denominadas **perspectivas**, isto é, referidas mediante uma projeção feita por um ponto externo.

Na homologia sólida vimos que um plano se transforma em outro plano, uma reta em outra reta e um ponto em outro ponto. A figura situada em um plano e sua homológica são referidas mediante a projeção feita pelo centro de homologia sôbre planos homólogos. Assim são perspectivas: as figuras situadas sôbre o quadro e as mesmas figuras objetivas situadas sôbre o plano que coincide com o quadro (idênticas entre sí) e vice-versa; as figuras situadas sôbre

(*) Projetar de um centro *O* um ponto *M* significa construir a reta *OM*, denominada ráio projetante. Cortar com um plano fixo uma reta qualquer é procurar o ponto comum à reta e ao plano. Portanto, projetar de um centro *O* sôbre um plano, significa projetar de *O* e depois cortar com o plano os raios projetantes.

o plano de fuga e as figuras objetivas correspondentes situadas no plano impróprio e vice-versa; as figuras da perspectiva-relêvo situadas no plano impróprio e as figuras objetivas correspondentes situadas no plano neutro e vice-versa; identicamente, as figuras situadas sôbre um plano paralelo ao quadro e as figuras correspondentes situadas sôbre o plano paralelo que lhe é homológico e vice-versa.

Se imaginarmos a superposição de uma infinidade de planos verticais cujo primeiro é o quadro e o último o plano de fuga, o baixo-relêvo constituir-se-á da superposição das projeções centrais, feitas sôbre cada um dêles, imagens das respectivas secções do objeto, obtidas por planos verticais que são os homólogos dos planos do baixo-relêvo.

Porém, bastam-nos as projeções centrais sôbre dois planos, uma sôbre o **quadro**, outra sôbre o **plano de fuga**, para construirmos perfeitamente o baixo-relêvo. Com efeito, como vimos no parágrafo anterior, há dois pontos dignos de menção capazes de individuar a reta objetiva: um, o seu traço, ponto T_1 (intersecção da reta com o quadro), que coincide com sua projeção sôbre o quadro; outro, o seu ponto de fuga F_1, (intersecção com o plano de fuga da paralela à reta objetiva que passa pelo ponto de vista), projeção sôbre o plano de fuga do ponto impróprio da reta. Se imaginarmos um baixo-relêvo de espessura e, em que estejam desenhadas as projeções T_1 sôbre o quadro e F_1 sôbre o plano de fuga, a perspectiva-relêvo da reta passará por êsses dois pontos (fig. 7). Inversamente, dada a reta do baixo-relêvo definida pelas projeções T_1 e F_1, individuamos-lhe a correspondente do objeto, fazendo passar por T_1, a parálela ao ráio projetante OF_1. Todas as retas paralelas entre si têm uma única projeção sôbre o plano de fuga (mesmo ponto de fuga), já que pelo ponto de vista só podemos fazer passar uma única reta paralela ao mesmo tempo a todas elas, isto é, aquelá que une o ponto O ao ponto impróprio em que elas se cortam. Por isso, o ponto F_1 é a projeção de uma direção de reta, definida pela projetante OF_1. De passagem lembramos ainda, que o ponto principal é a projeção da direção de todas as perpendiculares ao quadro.

Identicamente, para o plano não paralelo ao quadro e que não passe por O, o traço t_1 e a linha de fuga f_1 são respectivamente as projeções do seu traço e da sua reta imprópria, situadas a primeira sôbre o quadro e a segunda sôbre o plano de fuga. Construimos facilmente sua perspectiva-relêvo por essas duas retas paralelas (fig. 8). Inversamente, o plano objetivo correspondente ao plano do baixo-relêvo definido por t_1 e f_1, localiza-se fazendo passar por t_1 o plano paralelo ao plano projetante Of_1. Todos os planos paralelos entre sí têm uma única projeção sôbre o plano de fuga (mesma linha de fuga), porque só podemos fazer passar pelo ponto de vista um plano paralelo à êles, isto é, o plano que passa pelo ponto de vista O e pela reta imprópria em que êles se cortam. Portanto, f_1 é a projeção de uma direção de plano, definida pelo plano projetante Of_1. E' interessante lembrar que a linha do horizonte é a projeção da direção de todos os planos horizontais.

Essas considerações valem igualmente para os ráios projetantes, bem como para os planos projetantes. Nesse caso, as projeções T do traço e F do ponto imprópio do ráio projetante são respectivamente as intersecções do ráio projetante com o quadro e com o plano de fuga (fig. 7). Identicamente, as projeções t do traço e f da reta imprópria do plano projetante são respectivamente as intersecções do plano projetante com o quadro e com o plano de fuga (fig. 8). A perspectiva-relêvo do ráio projetante coincide com o ráio projetante; anàlogamente a perspectiva-relêvo do plano projetante coincide com o plano projetante.

O ponto objetivo situado sôbre o quadro ou pertencente ao plano impróprio projeta-se, no primeiro caso, sôbre o quadro, no segundo caso, sôbre o plano de fuga. Um ponto qualquer do objeto, por sí só, não tem projeção em nenhum dêsses dois planos; para localizá-lo no baixo-relêvo (fig. 9), usaremos a intersecção de duas retas ou de uma reta e um plano, não paralelos ao quadro, que o contenham e sejam definidos pelas respectivas projeções T e T_1 ou T e t_1 sôbre o quado, F e F_1 ou F e f_1 sôbre o plano de fuga. Essas projeções permitem-nos construir as perspectivas-relêvo das duas retas ou da reta e do plano em que êle está situado e o ponto de

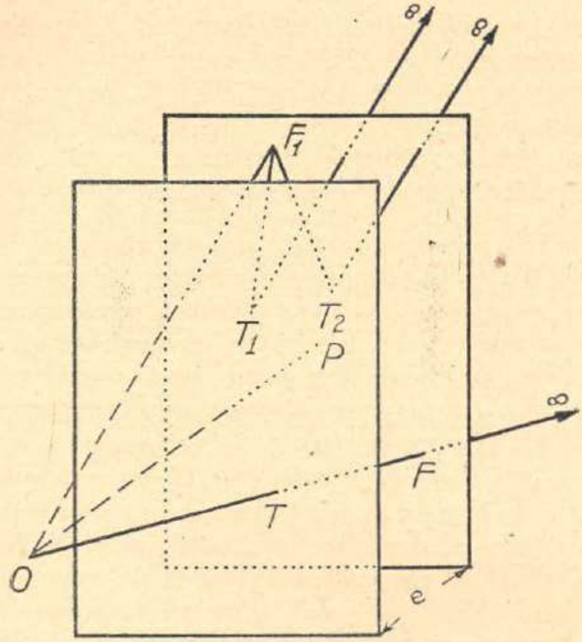

FIG. 7

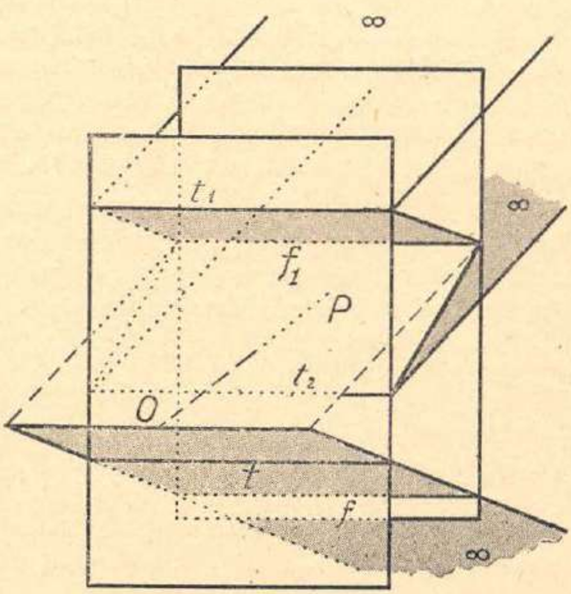

FIG. 8

intersecção, localizá-lo no baixo-relêvo. Uma das retas usadas de preferência para individuá-lo, é o raio que projeta o ponto. Inversamente, o ponto do baixo-relêvo situado na intersecção das perspectivas-relêvo de duas retas ou de uma reta e um plano, não paralelos ao quadro, tem assegurado, sem ambiguidade, a individuação do ponto objetivo.

Da mesma maneira procedemos para os planos e retas paralelos ao quadro; já que suas projeções sôbre o quadro e o plano de fuga são respectivamente a reta imprópria e o ponto impróprio. Basta-nos localizar um de seus pontos (próprios) no baixo-relêvo para construirmos o plano; no caso da reta paralela, além do ponto, é ainda necessário definir o seu ponto de fuga (ponto impróprio).

A perspectiva linear é um caso particular em que, por ser nula a espessura do baixo-relêvo, não só os dois planos (quadro e plano de fuga) coincidiram, mas também todos os outros que serviriam para compôr o baixo-relêvo. Nesse caso, o quadro sendo a fusão de uma infinidade de planos, as projeções que estariam situadas em cada um deles, estão todas sôbre o plano do quadro; razão por que nele se projetam todos os pontos do objeto. As considerações feitas acima valem também para a perspectiva linear; entretanto, não há perspectiva-relêvo. As duas projeções T_1 e F_1, no caso da reta (fig. 10), ou t_1 e f_1, no caso do plano, estão postas sôbre o quadro. Quando se tratar de ráio projetante ou de plano projetante coincidem respectivamente as projeções T e F ou t e f.

Assim, as projeções que apresentamos na perspectiva-relêvo são desdobradas — **os traços de retas e de planos são postos sôbre o quadro (primeiro plano) do baixo-relêvo; os pontos de fuga e linhas de fuga, sôbre o plano de fuga (último plano). A distância entre o quadro e o plano de fuga é a espessura do baixo-relêvo.**

Resumo — Sôbre um plano do baixo-relêvo só se pode obter a projeção central das figuras situadas em outro plano, que lhe é correspondente. No quadro obtemos a projeção das figuras objetivas situadas no plano que coincide com o quadro; as figuras são idênticas entre sí e coincidentes. No plano de

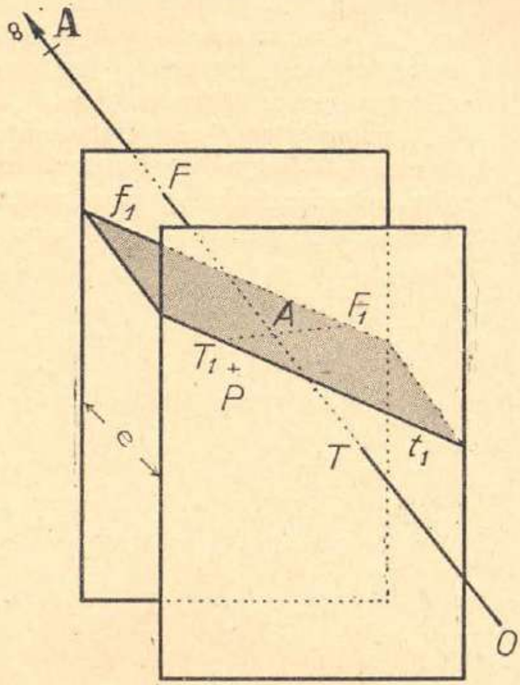

FIG. 9

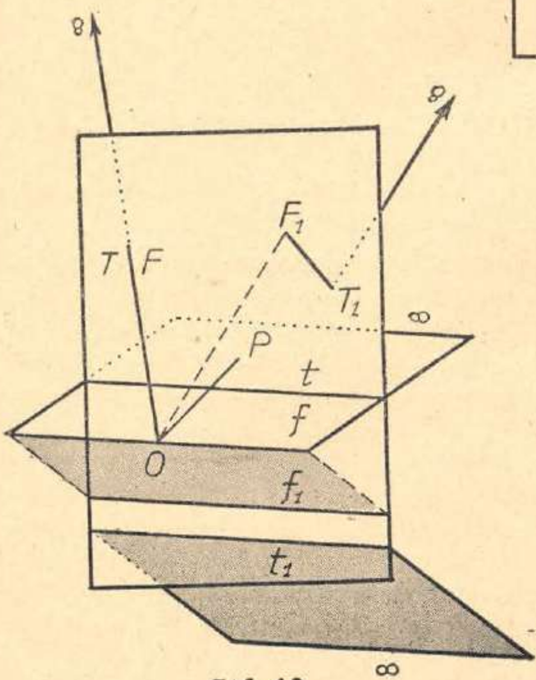

FIG. 10

fuga obtemos a projeção das figuras objetivas situadas no plano impróprio. As projeçõeõs feitas sôbre os dois planos — quadro e plano de fuga — bastam para, num baixo-relêvo, realizar a sua construção.

A perspectiva linear é um caso particular em que todos os planos do baixo-relêvo coincidiram num só. As duas projeções acima referidas estão postas sôbre o quadro; ainda mais, todos os pontos do objeto se projetam nele.

TESE

BAIXO-RELÊVO

O método das projeções centrais

BAIXO-RELÊVO

O método das projeções centrais

1) EXTENSÃO DO MÉTODO DAS PROJEÇÕES CENTRAIS AO BAIXO-RELÊVO

O baixo-relêvo fica determinado por dois planos paralelos e verticais. Fixemos os planos de modo que sejam separados pela distância *e*; a um deles chamaremos **quadro** ou **primeiro plano** e ao outro, **plano de fuga** ou **último plano**.

Diante do plano de fuga e fóra dele, escolhamos um ponto (próprio) *O* que será o **centro de projeção**. A perpendicular abaixada de *O* sôbre o plano de fuga encontra-o num ponto *P*, chamado **ponto principal**; à circunferência de centro *P* e ráio *OP* sôbre o plano de fuga denominaremos **circunferência de distância**; serve para fixar bem a posição do centro de projeção *O*, sabendo-se que êle fica diante do plano de fuga.

Todo ponto **A** do objeto, diferente de *O*, ao ser projetado por *O*, gera um ráio projetante que individua um ponto *T* sôbre o quadro e um ponto *F* sôbre o plano de fuga (fig. 9). O ponto *T* é a **projeção**, a **imagem** de um ponto **especial** de *O***A** sôbre o quadro. O ponto *F* a projeção de outro ponto **especial** de *O***A** sôbre o plano de fuga. Qualquer ponto do ráio *O***A** projetado por *O*, geraria as mesmas projeções *T* e *F*, respectivamente sôbre o quadro e o plano de fuga.

Vimos pela introdução que o ráio projetante é uma reta comum ao objeto e ao baixo-relêvo. A reta *TF* é a perspectiva-relêvo do ráio projetante *O***A** e coincide com êle (reta unida não constituida de pontos unidos). Vimos também que os pontos *T* e *F* da perspectiva-relêvo são respectivamente a projeção do mesmo ponto *T* e a do ponto impróprio do ráio projetante *O***A**. Por isso, podemos dizer que o ráio projetante é individuado pelos pontos *T* e *F* respectivamente **seu traço** e **ponto de fuga**.

O plano neutro seciona o ráio projetante no ponto Φ, correspondente ao ponto impróprio de sua perspectiva-relêvo (fig. 11).

A espessura do baixo-relêvo, que é definida pela distância entre o quadro e o plano de fuga pode variar muito. Quando ela fôr nula, que é o caso da perspectiva linear, os dois planos acima referidos estão coincididos e, assim também as duas projeções *T* e *F* do ráio projetante; nesse caso, todos os pontos do ráio projetante têm a imagem sôbre o quadro num ponto único e não ha perspectiva-relêvo. Todavia, dois pontos de *O***A** podem ser individuados, uma vez conhecida a sua pro jeção (coincidência de *T* e *F*): um, o seu traço e outro, o ponto impróprio do ráio projetante *O***A** (fig. 12).

Inversamente, conhecidos os pontos *T* e *F* respectivamente no quadro e plano de fuga, como êles estão sôbre um ráio projetante, a reta *TF* é a sua perspectiva-relêvo e coincide com êle; além disso, os pontos *T* e *F* da perspectiva-relêvo são respectivamente as projeções do traço do ráio projetante no quadro e do seu ponto impróprio. Os pontos *T* e *F* bastam, pois, para individuar o ráio projetante *O***A**.

Ainda pelo que expuzemos na introdução, decorre que pontos e retas do quadro são a projeção de pontos e retas objetivos do plano que coincide com o quadro. Identicamente, pontos e retas do plano de fuga são a projeção de pontos e retas do plano impróprio do objeto.

Assim como no método de Monge, uma projetante não individua um ponto do objeto, no método das projeções centrais o ráio projetante *O***A** também não individua o ponto **A**. De modo geral, como adiante veremos, para obtermos o ponto *A* correspondente ao ponto objetivo **A**, necessitamos além da perspectiva-relêvo *TF* do ráio projetante *O*A, também da perspectiva-relêvo de uma reta ou de um plano que passe por A e não passe por *O* (fig. 9). No caso inverso, isto é, conhecido *A* sôbre a perspectiva-relêvo *TF* de *O*A, enquanto no baixo-relêvo é possível ainda escolher a perspectiva-relêvo de uma reta ou de um plano que passe por *A*, para individuar o ponto A do objeto, na perspectiva linear, em virtude da fusão das projeções de todos os pontos do ráio projetante num só, essa escolha é impossível; nesse caso, é obrigatório estar representada no quadro a imagem de um plano ou de uma reta (que passa por A e não passa por *O*) para individuá-lo no espaço.

A) Individuação da reta

Se a reta, não fôr paralela ao quadro e passar por *O*, as projeções *T* e *F*, estarão situadas sôbre um ráio projetante e sua perspectiva-relêvo coincidirá com êle (fig. 11).

No caso particular da perspectiva linear, a imagem do ráio projetante se reduzirá a um ponto (próprio), que é ao mesmo tempo traço e ponto de fuga, e serve ainda para individuá-lo no espaço (fig. 12).

O ponto *F* do baixo-relêvo é a projeção de uma direção de reta; êle é comum a todas as retas paralelas ao ráio projetante. Dessa propriedade deduzimos um meio para encontrar as projeções de uma reta (própria) que não passe por *O* e não seja paralela ao quadro. O ponto em que ela encontra o quadro dá-nos o ponto T_1 e o ráio projetante que lhe é paralelo dá-nos F_1 em sua intersecção com o plano de fuga. Esse último é denominado **ponto de fuga da reta**. Sob as restrições impostas, êsses pontos são próprios e distintos; por êles passa a perspectiva-relêvo da reta objetiva. Por isso podemos dizer, que a perspectiva-relêvo da reta é determinada mediante seu traço e ponto de fuga (fig. 11). O plano neutro, corta a reta objetiva no ponto Φ_1, que corresponde ao ponto impróprio de sua perspectiva-relêvo. Essas mesmas considerações valem para a perspectiva linear; nêsse caso, as projeções T_1 e F_1 estão sôbre um mesmo plano (quadro). A imagem do ponto Φ_1 é então o ponto impróprio da reta T_1F_1 (fig. 12).

Inversamente, dois pontos T_1 e F_1 respectivamente sôbre o quadro e plano de fuga do baixo-relêvo, escolhidos arbitrariamente, são sempre o traço e o ponto de fuga de uma reta objetiva não paralela ao quadro; ela é a paralela ao ráio OF_1 que passa por T_1 (fig. 11). Na perspectiva linear, os dois pontos T_1 e F_1 estão situados no quadro e se êles coincidem a reta passa pelo centro de projeção (fig. 12).

Se a reta α fôr paralela ao quadro, seu traço coincide com o ponto de fuga, porém em um ponto impróprio (sua direção) que não serve mais para individuá-la, porque define igualmente todas as retas que lhe são paralelas. Na perspectiva linear, nem basta para individuá-la, dar também sua projeção (salvo se ela se reduzir a um ponto impróprio quando passar por O), pois todas as paralelas a α no plano $O\alpha$ estão igualmente representadas. Nesses casos excepcionais considerados, basta fixar-lhes um ponto (próprio) para completar a projeção.

Se a projeção da reta, no baixo-relêvo, estiver toda sôbre o quadro, ela coincide com a sua projeção; anàlogamente, se a projeção estiver toda sôbre o plano de fuga, a reta objetiva estará situada no plano impróprio.

B) Individuação do plano

Se o plano não fôr paralelo ao quadro (fig. 13), porém passar por O, as retas t e f são respectivamente as intersecções do plano projetante com o quadro e o plano de fuga; sua perspectiva-relêvo coincide com êle (plano unido).

O plano neutro corta o plano projetante na reta φ que corresponde à reta imprópria da sua perspectiva-relêvo (fig. 13).

No caso da perspectiva linear o traço e a linha de fuga estão situados sôbre o quadro e assim sendo, a imagem do plano se reduzirá a uma reta, coincidência de t e f (fig. 14).

A reta f do baixo-relêvo é a projeção de uma direção de plano; ela é comum a todos os planos paralelos ao plano

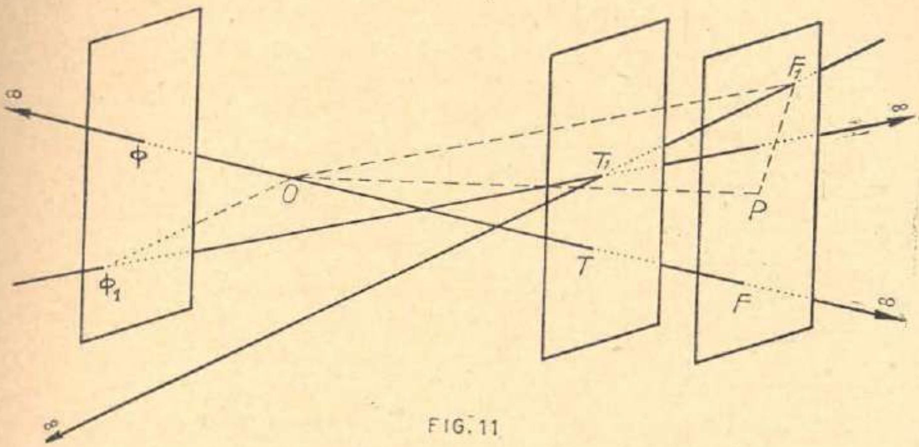

FIG. 11

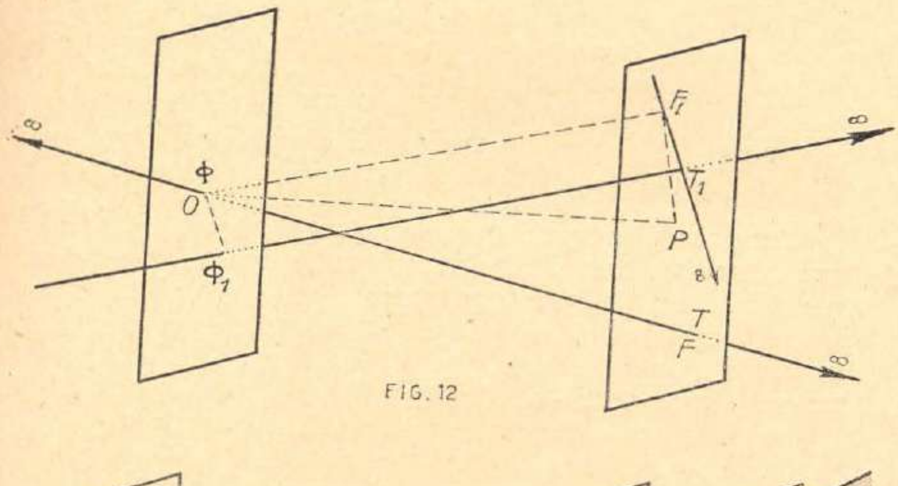

FIG. 12

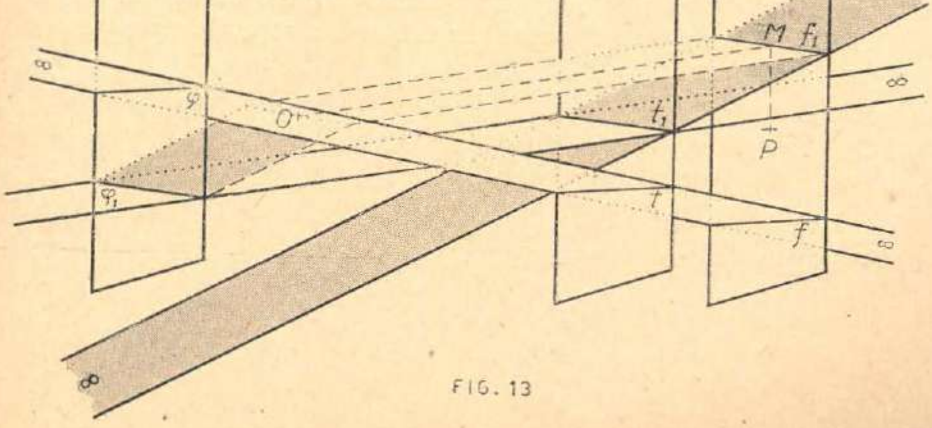

FIG. 13

projetante. Deduzimos daí um meio para obter as projeções de um plano (próprio), que não passe por O e não seja paralelo ao quadro. A reta em que êle encontra o quadro dá-nos t_1 e o plano projetante, que lhe é paralelo, dá-nos f_1 na sua reta de intersecção com o plano de fuga. Essa última é denominada **linha de fuga do plano**. A perspectiva-relêvo do plano passa por essas duas retas, que bastam para individuá-lo. O plano neutro corta o plano objetivo na reta φ_1, que corresponde à reta imprópria da sua perspectiva-relêvo (fig. 13).

Essas considerações valem para o caso da perspectiva linear, com a particularidade de estarem as retas t_1 e f_1 situadas sôbre o quadro. A imagem da reta φ_1, nesse caso, coincide com a reta imprópria do quadro (fig. 14).

Inversamente, conhecidas as retas (próprias) t_1 e f_1 respectivamente sôbre o quadro e o plano de fuga do baixo-relêvo, existe um determinado plano objetivo que passa por t_1 e é paralelo ao plano Of_1, o qual por isso é definido, sem ambiguidade, pelo seu traço e sua linha de fuga (fig. 13). No caso da perspectiva linear, as retas t_1 e f_1 estão situadas sôbre o quadro (fig. 14).

Para um plano paralelo ao quadro, o traço e a linha de fuga coincidem com a reta imprópria do quadro que define igualmente todos os planos paralelos a êle. Por isso, um plano paralelo ao quadro não fica mais determinado mediante o seu traço e linha de fuga; basta porém fixar-lhe um ponto (próprio) para definí-lo.

Se um plano corta o quadro segundo uma reta t_1 (seu traço), todas as retas do plano têm o traço sôbre a reta t_1; igualmente, qualquer reta paralela ao plano, traçada por O, encontra o plano de fuga num ponto situado sôbre a sua linha de fuga f_1. As mesmas considerações se aplicam a perspectiva linear.

C) Individuação do ponto

Um ponto **A** do objeto fica determinado na intersecção do seu ráio projetante com uma reta ou um plano, que passe por êle e não passe por O. No baixo-relêvo a individuação do

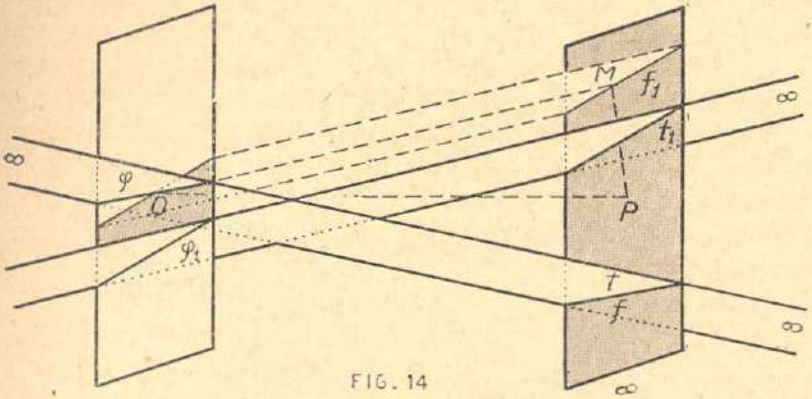

FIG. 14

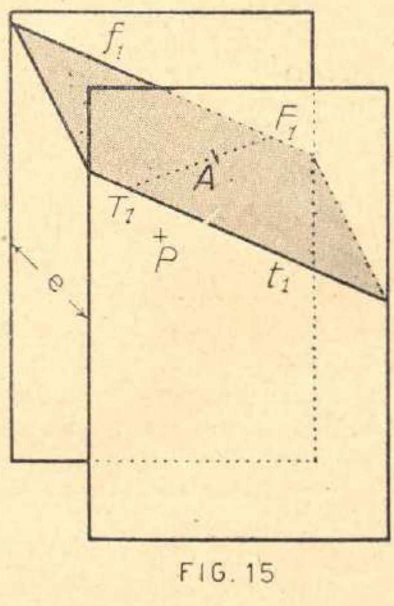

FIG. 15

ponto objetivo é feita sempre colocando seu **ponto correspondente** sôbre a perspectiva-relêvo de uma reta ou de um plano (nas condições enunciadas acima); o que dispensa a presença dos pontos T e F do raio projetante, mesmo porque no caso da perspectiva linear êles coincidem com a projeção do ponto. Assim, dados no baixo-relêvo um ponto A e as perspectivas-relêvo de uma reta (T_1,F_1) ou um plano (t_1,f_1), em que êle esteja situado, o ponto objetivo fica perfeitamente individuado, na intersecção do ráio projetante que passa pelo ponto A com a correspondente reta ou plano objetivo que lhe serve de suporte (fig. 15). Na perspectiva linear o ponto A é dado sôbre a imagem de uma reta (T_1,F_1) ou de um plano (t_1,f_1).

Uma reta paralela ao quadro pode individuar-se determinando um ponto (próprio) e além disso, definindo a sua direção ou ainda, na perspectiva linear, a sua imagem.

Um plano paralelo ao quadro fica completamente determinado com a individuação de um dos seus pontos (próprios).

2) REPRESENTAÇÃO DO BAIXO-RELÊVO POR MEIO DE UMA PERSPECTIVA LINEAR

Suponhamos (fig. 16) desenhada uma secção perpendicular ao quadro que passa pelo centro de projeção; ela nos mostra o quadro t e o plano de fuga f coincididos e que a perspectiva linear é feita de um ponto O_0 situado à distância p. Imaginemos que o plano de fuga se destaque e se desloque paralelamente ao quadro sem haver movimento de rotação, de maneira a se manterem fixos o plano do horizonte e o plano principal, arrastando o ponto de vista que se move sôbre a perpendicular elevada do ponto principal. Os baixos-relêvos assim originados, desde que o centro de projeção não se coloque do outro lado do quadro, têm espessura que pode ir de *zero* (perspectiva linear) até p, mantendo-se invariável a distância principal (fig. 16, 16a e 16b). Nesse movimento o plano neutro φ, o quadro t e o objeto ficam imóveis; o ponto de vista pode deslocar-se até a distância p, vindo localizar-se sôbre o quadro em O_p, porém sempre sôbre a perpendicular elevada do ponto principal. Dizemos que êsses baixos-relêvos (espessura *zero* a p) apresentam idêntica projeção sôbre o quadro e também afirmamos que a projeção sôbre o plano de fuga é a mesma para todos eles; assim que, escolhida a espessura e podemos individuar um dêsses baixos-relêvos. Pois bem, em virtude da posição do quadro não se modificar em relação ao objeto, a projeção sôbre o quadro não se altera para todos êsses baixos-relêvos e ainda, por se conservar invariável a distância principal, não varia também a projeção sôbre o plano de fuga.

Se supuzermos que se dê o movimento de translação inverso e juntarmos êsses dois planos, a projeção obtida sôbre o plano de fuga transportar-se-á para o quadro por meio das perpendiculares de seus pontos e aí aparecerá em verdadeira grandeza, como se fosse uma perspectiva linear em que o quadro e o plano de fuga coincidissem. **Portanto, quando tivermos adicionado ao quadro a projeção obtida sôbre o plano de fuga, todos êsses baixos-relêvos geram uma mesma perspectiva linear, cuja distância principal é igual a p**; na realidade, as referidas projeções estão separadas pela espessura do baixo-relêvo. Dizemos que essa perspectiva linear é suficiente para definir um dêsses baixos-relêvos. Assim, dada sua espessura e (desde *zero* a p), todos os pontos de fuga se transportarão, sôbre as perpendiculares levantadas pelos pontos de fuga da perspectiva linear, ao plano de fuga situado à distância e do quadro. As duas projeções assim desdobradas, sôbre o quadro e plano de fuga determinam completamente o baixo-relêvo. Ainda mais, **qualquer ponto da perspectiva-relêvo está situado sôbre a perpendicular levantada do ponto de igual nome da perspectiva linear**. Com efeito, no movimento de translação os pontos de fuga se deslocam ao longo de perpendiculares ao quadro e as perspectivas-relêvo das retas sôbre planos perpendiculares ao quadro, porque seus traços são fixos. Por essa razão, um ponto estando na intersecção de duas retas, as perspectivas-relêvo do ponto, na translação que gera os diferentes baixos-relêvos, se deslocam sôbre a intersecção de dois planos perpendiculares ao quadro, isto é, sôbre uma perpendicular ao quadro (fig. 17). Pontos e retas da perspectiva-relêvo, correspondentes respectivamente à pontos e retas situados no plano neutro, representam-se em pontos e retas impróprios do quadro. Na figura 17 mostramos apenas os segmentos das perspectivas-relêvo das retas, compreendidos entre o quadro e o plano de fuga.

As mesmas conclusões são válidas, quando a espessura do baixo-relêvo ultrapassar a distância p; essa condição leva o centro de projeção a localizar-se entre o quadro e o plano de fuga. Já tivemos ocasião de afirmar que o objeto, o quadro e o plano neutro se mantêm invariáveis em todos êsses baixos-relêvos; portanto, a distância entre o quadro e o plano neutro é fixa (p). Como nos baixos-relêvos a espessura é igual à distância entre o quadro e o plano de fuga, ela será agora $p + x$, a mesma que separa o plano neutro do centro de projeção. Entretanto, x não pode assumir valor infinitamente grande, o que levaria o centro de projeção a ser um ponto impróprio e então a projeção não seria mais central.

Resumo — Assim como o método das projeções ortogonais (Monge), utiliza projeções sôbre dois planos ortogonais e faz rotação dos mesmos para representá-las sôbre um plano, o método das projeções centrais, para definir o baixo-relêvo, usará duas projeçõeõs — uma sôbre o quadro, que é a projeção das figuras objetivas situadas sôbre o plano que coincide com o quadro e outra sôbre o plano de fuga, que é a projeção das figuras objetivas situadas sôbre o plano impróprio — e mediante um movimento de translação fará coincidir o plano de fuga com o quadro para definir uma perspectiva linear. Qualquer dos baixos-relêvos, acima referidos, cuja distância principal é p, fica individuado pela perspectiva linear que tem a mesma distância principal e pela espessura *e*, escolhida dentre os valores que vão de *zero* a $p + x$. Finalmente os pontos de suas perspectivas-relêvo se deduzem dos pontos de igual nome da perspectiva linear por meio de perpendiculares ao quadro.

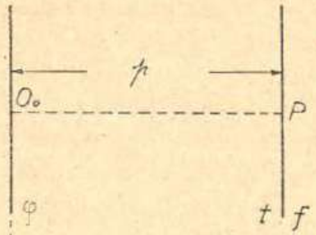

FIG. 15

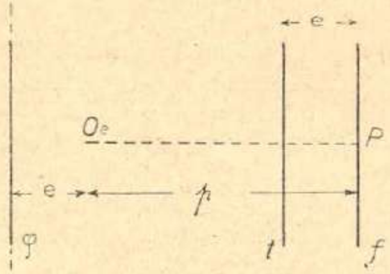

FIG. 16 a

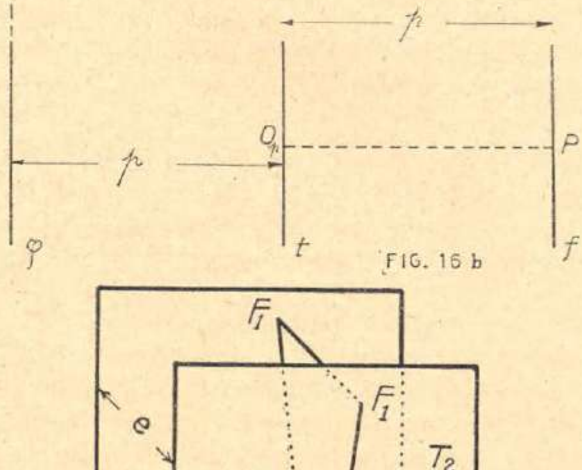

FIG. 16 b

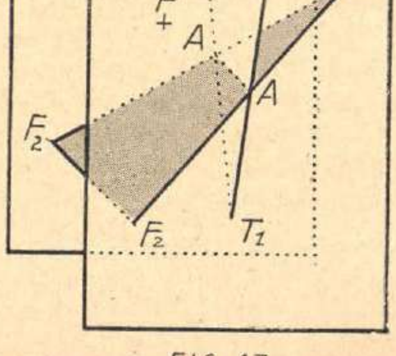

FIG. 17

Projeções centrais	Projeções ortogonais
Sôbre um mesmo plano só se projetam os pontos e retas das figuras situadas em outro plano que lhe é homológico.	Sôbre um plano projetam-se as figuras situadas no espaço.
Dentre as projeções que se podem obter sôbre uma infinidade de planos do baixo-relêvo, bastam as projeções sôbre dois dêles — o quadro e o plano de fuga — para individuar as figuras objetivas.	As projeções sôbre dois planos ortogonais bastam para individuar as figuras objetivas.
Mediante translação o plano de fuga coincide com o quadro e as projeções representam-se sôbre um plano (perspectiva linear). Não só os pontos da projeção sôbre o plano de fuga, mas também os da projeção sôbre qualquer dos planos que constituem o baixo-relêvo, deduzem-se dos de igual nome da perspectiva linear — gerada pela translação — por meio de perpendiculares ao quadro (linhas de chamada).	Mediante rotação de 90° em torno da linha de terra as projeções representam-se sôbre um plano. Qualquer ponto tem a projeção horizontal e a vertical situadas sôbre uma perpendicular à linha de terra (linha de chamada).
Desde que se conserve a posição do quadro, do plano neutro, do plano do horizonte e do plano principal em	Desde que se conserve a posição dos planos horizontal, vertical e de um terceiro plano de perfil em relação ao ob-

relação ao objeto, todos os baixos-relêvos de distância principal p, cuja espessura varie de *zero* a $p + x$, têm invariável a sua representação (perspectiva linear).

jeto, sua representação é invariável.

Sob as restrições impostas (posição fixa do quadro, do plano neutro, do plano do horizonte e do plano principal em relação ao objeto) preferimos doravante êste meio de representação porque é geral e as construções geométricas apresentadas para uma distância principal escolhida p servirão indiferentemente para os baixos-relêvos, que satisfaçam as duas condições:

a) **ter a mesma distância principal** (p);

b) **ter espessura variável de** *zero* **a** $p + x$, **não podendo entretanto** x **assumir valor infinitamente grande.**

Nota — Podemos incluir ainda os baixos-relêvos, cuja espessura varia de *zero* a —(p + x). As espessuras são contadas a partir do quadro, sendo positivas quando o plano de fuga não está do mesmo lado do plano neutro em relação ao quadro e negativas, no caso contrário.

A perspectiva linear tem evidentemente todas as suas linhas representadas sôbre o quadro; por isso, não necessita maiores esclarecimentos.

Execução do baixo-relêvo — Se devêssemos esculpir o baixo-relêvo em pedra, as figuras que apresentamos, seriam desenhadas sôbre o quadro, como aliás decorre naturalmente da exposição anterior. Porém, o processo mais generalizado atualmente, consiste em modelá-lo em argila. A execução do desenho sôbre o quadro, obrigar-nos-ia a colocar na prancheta toda a argila para depois escavá-la. Além da perda de trabalho, que resultaria em colocar toda a argila para depois retirá-la parcialmente, haveria também perda de grande parte do desenho feito sôbre o quadro. Se desenharmos as figuras sôbre o plano de fuga, então o baixo-relêvo construir-se-á por adição de material; os traços de planos e de retas adicionados de seus afastamentos (espessura do baixo-relêvo), permitir-nos-ão, como adiante veremos, construir-lhes imediatamente a perspectiva-relêvo. **Por essa razão, supomos sempre as figuras desenhadas sôbre o plano de fuga.**

Na concepção plástica os planos limitam os volumes, as retas resultam da intersecção de planos, ou então, são traçados feitos sôbre um plano; por sua vez os pontos resultam da intersecção de retas ou de retas com planos. O traço do plano localiza-se sôbre o quadro fixando estiletes com a espessura do baixo-relêvo, perpendicularmente ao plano de fuga, em dois pontos de sua representação; a perspectiva-relêvo do plano passa assim pelo traço posto sôbre o quadro e pela sua linha de fuga. Identicamente, para a reta basta apenas um estilete colocado, nas condições anteriores, sôbre a representação de seu traço desenhado sôbre o plano de fuga; a perspectiva-relêvo da reta passa pelo seu traço posto sôbre o quadro e pelo seu ponto de fuga. Apresentaremos, algumas vezes, ao lado da representação, um desenho auxiliar em linhas tracejadas, só para melhor esclarecer a execução do baixo-relêvo.

A) Representação do plano e sua modelagem

Consideremos os seguintes casos do plano objetivo não paralelo ao quadro:

a) O plano que não passa pelo ponto de vista

Fica representado por seu traço t_1 e linha de fuga f_1 que devem ser paralelos (fig. 18).

Passamos da representação para o baixo-relêvo da seguinte maneira: se acrescentarmos a dois pontos da reta t_1 seus afastamentos iguais a espessura do baixo-relêvo, tê-la-emos sôbre o plano do quadro. Modelamos facilmente por essas duas retas a perspectiva-relêvo do plano. A figura tracejada mostra, deitado sôbre o plano de fuga, o plano que projeta ortogonalmente o ponto de vista e é perpendicular a f_1.

b) O plano que passa pelo ponto de vista do baixo-relêvo (plano projetante)

Para uma determinada espessura e do baixo-relêvo, o plano que passa pelo seu ponto de vista deve em sua representação (fig. 19) satisfazer, além das condições anteriores, a seguinte que se estabelece com os segmentos interceptados por t e f sôbre um ráio projetante do plano, a espessura

e a distância principal: $\dfrac{TF}{PF} = \dfrac{e}{p}$

Sua execução no baixo-relêvo é idêntica à anterior. A figura tracejada mostra, deitado sôbre o plano de fuga, o plano que projeta ortogonalmente o ráio projetante TF.

c) O plano que passa pelo ponto situado à distância p do quadro sôbre a perpendicular do ponto principal (ponto de vista Oo no caso da perspectiva linear)

Representa-se por uma reta (fig. 20), que é, ao mesmo tempo, seu traço e linha de fuga (coincidência de t_1 e f_1).

No caso da perspectiva linear, isto é, quando escolhermos a espessura do baixo-relêvo igual a zero, ela será a representação de um plano projetante cuja imagem sôbre o quadro se reduzirá a uma reta.

Para passarmos da representação ao baixo-relêvo, basta elevarmos dois de seus pontos com a espessura e, a fim de a desdobrarmos e situarmos t_1 sôbre o quadro. Por essas duas retas paralelas modelamos a perspectiva-relêvo do plano. A figura tracejada mostra, deitado sôbre o plano de fuga, o plano que projeta ortogonalmente o ponto de vista e é perpendicular à f_1.

Nota — Em qualquer plano objetivo não paralelo ao quadro podemos tomar as seguintes medidas: **a largura** e **a inclinação** (fig. 13 e na perspectiva linear fig. 14).

A largura do plano é a distância entre as retas t_1 e φ_1, interceptadas respectivamente pelo quadro e pelo plano neutro. E' também a distância entre o ponto de vista e a linha de fuga f_1 (fig. 13).

A inclinação do plano é o ângulo agudo que êle forma com o quadro. E' também igual ao ângulo agudo que forma com o plano de fuga, o plano que lhe é paralelo traçado pelo ponto de vista (fig .13).

Planos paralelos têm a mesma largura e também a mesma inclinação.

O triângulo *OPM* contido no plano que projeta ortogonalmente sôbre o plano de fuga o ponto de vista e é perpendicular a f_1 dá as seguintes relações:

$$\text{A largura do plano} = OM =$$

$$= \sqrt{OP^2 + PM^2} = \sqrt{p^2 + PM^2}$$

$$\text{A inclinação do plano} = \widehat{OMP}$$

$$OM = \frac{p}{\text{sen } \widehat{OMP}} = \frac{PM}{\cos \widehat{OMP}}$$

$$\text{sen } \widehat{OMP} = \frac{p}{OM} \qquad \text{tg } \widehat{OMP} = \frac{p}{PM}$$

Concluimos que a largura e a inclinação do plano não dependem da espessura do baixo-relêvo e para uma mesma distância principal *p* todos os planos de igual largura têm a mesma inclinação e vice-versa. Suas linhas de fuga tangen-

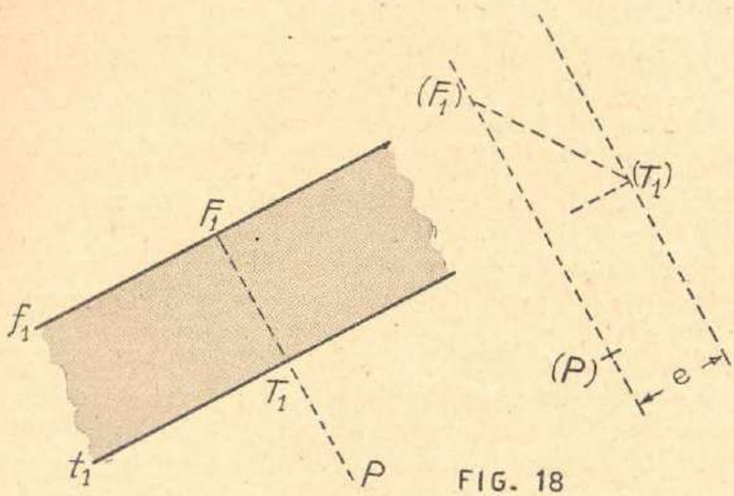

FIG. 18

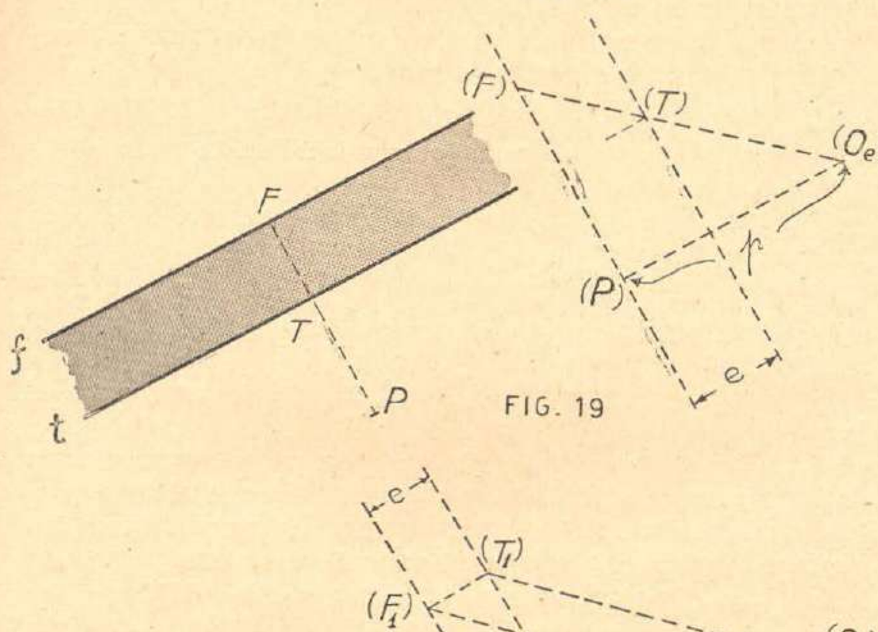

FIG. 19

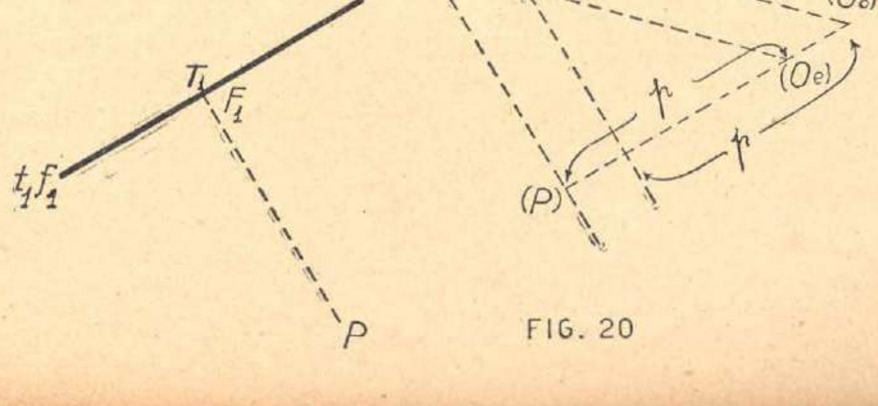

FIG. 20

ciam a circunferência de inclinação, cujo centro é o ponto principal e cujo raio é igual a $p.cotg\ \widehat{OMP}$.

A circunferência de distância confunde-se com a circunferência de inclinação, se o ângulo $\widehat{OMP}$ fôr igual a 45°. Quando $\widehat{OMP}$ fôr igual a 90°, a circunferência de inclinação se reduzirá ao ponto principal e a largura dos planos será igual a p. Se $\widehat{OMP}$ fôr igual a zero, poderemos considerar a reta imprópria do plano de fuga como a circunferência de inclinação.

Assim, se a linha de fuga de um plano cortar a circunferência de distância, sua inclinação será maior do que 45°; se a tangenciar será igual a 45° e se não a cortar, sua inclinação será menor que êsse ângulo.

B) Representação da reta e sua localização

Vejamos os seguintes casos da reta objetiva não paralela ao quadro:

a) A reta que não passa pelo ponto de vista

É representada por seu traço T_1 e pelo seu ponto de fuga F_1 (fig. 21).

Obtemos a sua localização no baixo-relêxo acrescentando à T_1 a espessura e. Por êsses dois pontos, um sôbre o quadro e outro sôbre o plano de fuga, passa a perspectiva-relêvo da reta. A figura tracejada, idêntica às anteriores, foi obtida pelo plano que projeta ortogonalmente a reta T_1F_1.

b) A reta que passa pelo ponto de vista do baixo-relêvo (raio projetante)

Para uma determinada espessura e do baixo-relêvo, a reta que passa pelo seu ponto de vista deve satisfazer na

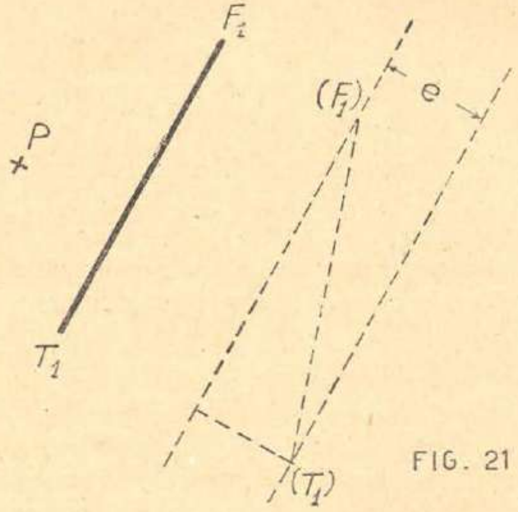

FIG. 21

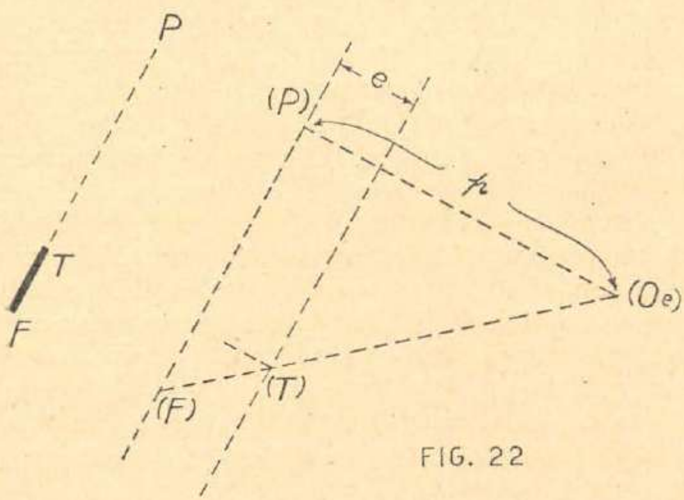

FIG. 22

sua representação (fig. 22), além das condições anteriores, as seguintes:

1.º) passar pelo ponto principal;

2.º) satisfazer a igualdade $\dfrac{TF}{PF} = \dfrac{e}{p}$.

Localização no baixo-relêvo idêntica a anterior.

c) **A reta que passa pelo ponto situado a distância p do quadro sôbre a perpendicular do ponto principal (ponto de vista Oo no caso da perspectiva linear)**

Representa-se por um ponto (coincidência de T_1 e F_1) que é ao mesmo tempo seu traço e ponto de fuga (fig. 23).

Quando escolhermos a espessura do baixo-relêvo igual a zero, que será o caso da perspectiva linear, êle será a representação de um raio projetante, cuja imagem sôbre o quadro se reduzirá a um ponto.

Basta elevarmos a perpendicular do ponto com a espessura do baixo-relêvo para o desdobrarmos e situarmos sôbre o quadro o traço da reta. A perspectiva-relêvo da reta passará por êsses dois pontos. A figura tracejada mostra, deitado sôbre o plano de fuga, o plano que projeta ortogonalmente o ponto de vista e passa pelos pontos T_1 e F_1.

Nota — As seguintes medidas podem ser feitas em qualquer reta do objeto, não paralela ao quadro: **seu comprimento** e **sua inclinação**.

O comprimento da reta é o segmento compreendido entre os pontos T_1 e Φ_1, interceptados respectivamente pelo quadro e plano neutro. E' igual ainda ao segmento compreendido entre o ponto de vista e o ponto de fuga F_1 (fig. 11 e na perspectiva linear fig. 12).

A inclinação é o ângulo que ela forma com o quadro. E' igual também ao ângulo que forma, com o plano de fuga, a reta que lhe é paralela traçada pelo ponto de vista.

Retas paralelas têm a mesma inclinação e o mesmo comprimento.

Entre o comprimento e a inclinação existem as seguintes relações:

O comprimento da reta $= T_1\Phi_1 = OF_1 =$

$$= \sqrt{OP^2 + PF_1^2} = \sqrt{p^2 + PF_1^2}$$

A inclinação da reta $= \widehat{OF_1P}$

$$OF_1 = \frac{p}{sen\ \widehat{OF_1P}} = \frac{PF_1}{cos\ \widehat{OF_1P}}$$

$$\text{sen}\ \widehat{OF_1P} = \frac{p}{OF_1} \qquad \text{tg}\ \widehat{OF_1P} = \frac{p}{PF_1}$$

Concluimos dessas relações que o comprimento e a inclinação da reta não dependem da espessura do baixo-relêvo e para uma distância principal p tôdas as retas de igual comprimento têm a mesma inclinação e vice-versa. Seus pontos de fuga estão sôbre a circunferência de inclinação, que tem por centro o ponto principal e cujo raio é igual a $p.cotg\ \widehat{OF_1P}$.

A circunferência de distância confunde-se com a circunferência de inclinação, quando $\widehat{OF_1P}$ fôr igual a 45°. Nesse caso, o comprimento da reta é igual a $p\sqrt{2}$. Quando $\widehat{OF_1P}$ fôr igual a 90°, a circunferência de inclinação se reduzirá ao ponto principal e o comprimento da reta será igual a p. Se $\widehat{OF_1P}$ fôr igual a zero, ainda poderemos considerar a reta imprópria como circunferência de inclinação, porém o comprimento da reta não fica determinada.

Por êsse raciocínio, se o ponto de fuga de uma reta cair dentro da circunferência de distância, sua inclinação será maior do que 45°; se cair sôbre a circunferência de distância será igual a 45° e se cair fora da referida circunferência será menor do que êsse ângulo.

C) Representação do ponto e sua localização

Consideremos a representação do ponto objetivo que não está situado no plano neutro e sua aplicação à representação do plano de frente e da reta de frente.

a) O ponto

Representa-se sem ambiguidade situando seu ponto correspondente A sôbre a representação de um plano t_1f_1 ou de uma reta T_1F_1, que passe por êle e não passe pelo ponto de vista (fig. 24 e fig. 25).

Para passarmos da representação ao baixo-relêvo basta construirmos a perspectiva-relêvo do plano ou, no outro caso, da reta e depois elevarmos a perpendicular do ponto A até encontrar seu suporte (perspectiva-relêvo do plano ou da reta). A figura tracejada do n.° 24, idêntica às anteriores, foi obtida pelo plano que projeta ortogonalmente o ponto A e é perpendicular a f_1. Identicamente, a figura tracejada do n.° 25 foi obtida pelo plano que projeta ortogonalmente os pontos T_1, A e F_1.

Nota — A reta escolhida pode ser de topo ao quadro; nesse caso, seu ponto de fuga é o ponto principal e o seu traço é a projeção ortogonal do ponto sôbre o quadro.

Localização idêntica à referida anteriormente.

b) O plano de frente

O plano de frente tem por traço e linha de fuga a reta imprópria do quadro. Sua perspectiva-relêvo é também um plano de frente. Basta representar um de seus pontos para

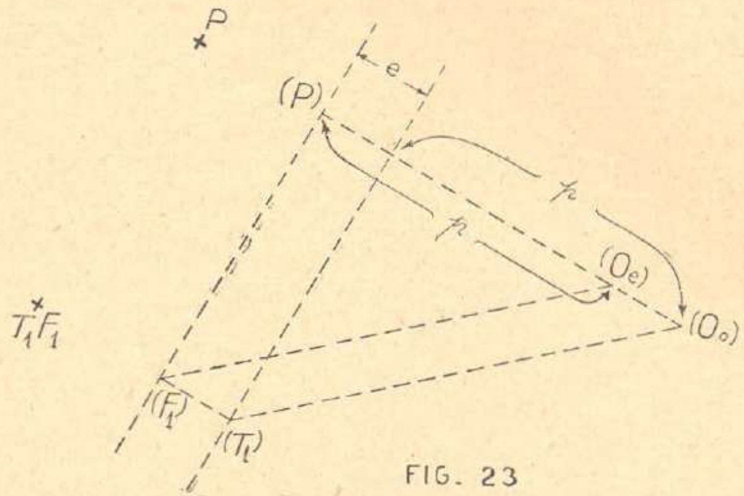

FIG. 23

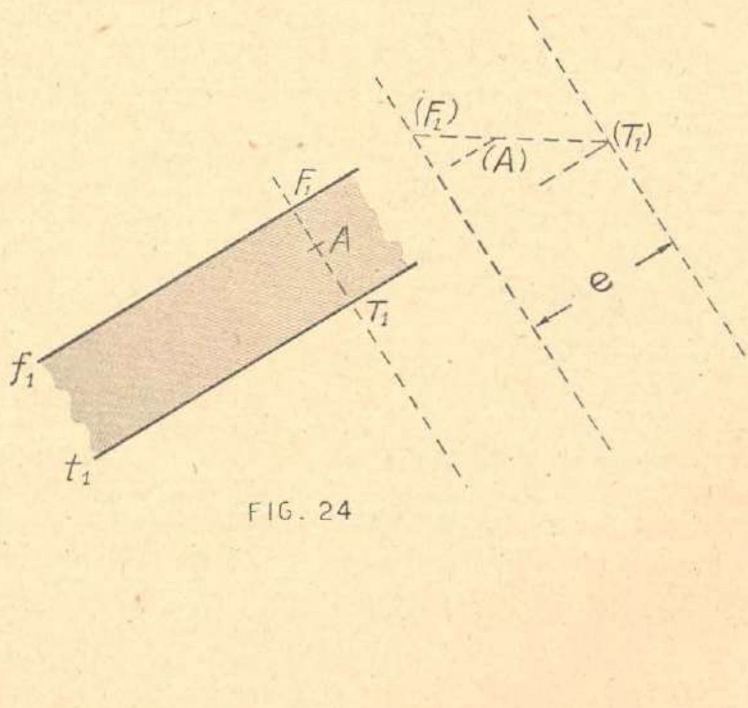

FIG. 24

definir completamente sua situação em relação ao quadro e plano de fuga (fig. 26). Se o fizermos tomando o ponto sôbre um plano $t_1 f_1$, satisfazendo as restrições impostas anteriormente, fica também conhecida a representação da intersecção do plano de frente com êsse plano auxiliar, que é a paralela à t_1.

A perspectiva-relêvo do plano auxiliar $t_1 f_1$ serve para localizar o ponto A. O afastamento do plano de frente, igual ao de A, é sempre o mesmo em toda a extensão do plano de frente.

A figura tracejada, idêntica às anteriores, foi obtida pelo plano que projeta ortogonalmente o ponto A e é perpendicular a f_1.

c) A reta de frente

A reta de frente (paralela ao quadro) tem por traço e ponto de fuga um ponto impróprio do quadro. Sua perspectiva-relêvo é também uma reta de frente. Basta na sua representação individuar um de seus pontos ou então, tendo sido individuado um de seus pontos basta conhecer-lhe o ponto de fuga, que é dado pelo ponto impróprio da representação de uma reta de frente b, para definir-lhe a situação em relação ao quadro e ao plano de fuga (fig. 27).

Uma vez modelado o plano $t_1 f_1$ para localizar o ponto A e determinar seu afastamento, este se aplica a todos os pontos de sua representação. A figura tracejada, idêntica às anteriores, foi obtida pelo plano que projeta ortogonalmente o ponto A e é perpendicular a f_1.

3) PROBLEMAS

Classificam-se os problemas em duas categorias: **os descritivos ou gráficos** e **os métricos**. Os primeiros ocupam-se da situação relativa dos elementos ponto, reta e plano. Dispensam o emprêgo da circunferência de distância; por isso, neles omitiremos propositadamente êsse dado fundamental por desnecessário à resolução dos problemas. Os segundos

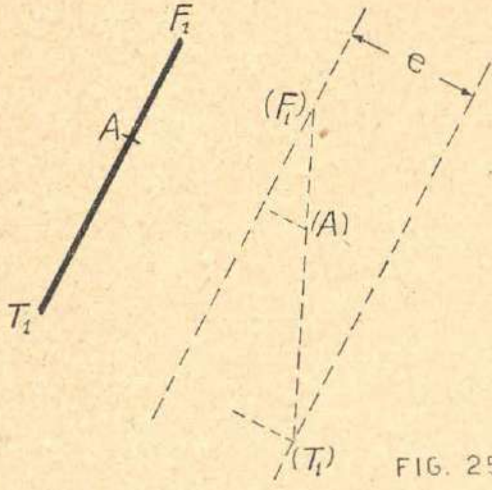

FIG. 25

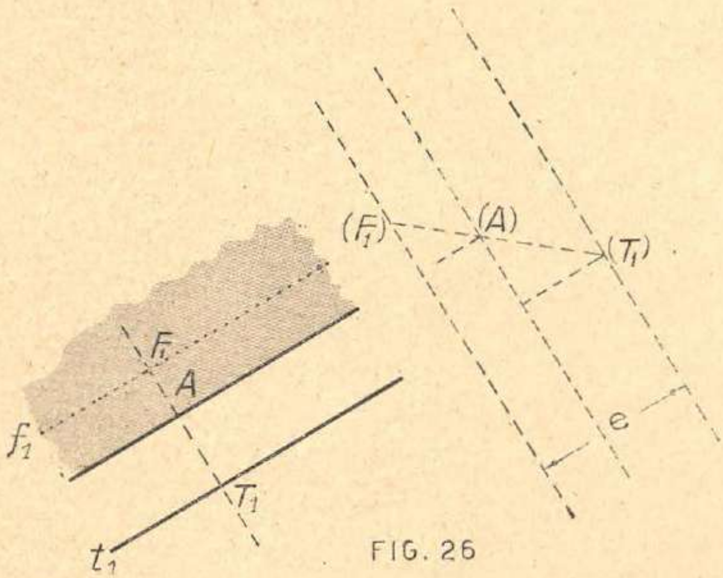

FIG. 26

ocupam-se da medida de ângulos e de comprimentos. Não se resolvem sem o auxílio da circunferência de distância.

Aquí apresentaremos apenas alguns problemas que possam interessar ao artista em suas realizações, sem termos a preocupação de desenvolver geometria pura.

A) Problemas descritivos

a) *Determinar o plano e o ponto de intersecção de duas retas que se cortam (fig. 28).*

Sejam T_1F_1 e T_2F_2 as representações de duas retas cujos traços e pontos de fuga são respectivamente T_1, T_2 e F_1, F_2. As retas t_1 e f_1 que unem respectivamente os traços T_1, T_2 das retas e seus pontos de fuga F_1, F_2 representam o traço e a linha de fuga do plano procurado.

Quando passarmos da representação ao baixo-relêvo, basta elevarmos os pontos T_1, T_2 com a espessura do baixo-relêvo para modelar a perspectiva-relêvo do plano. Em seguida, desenhamos sôbre ela as retas T_1F_1 e T_2F_2, cujo ponto de intersecção fornece A, perspectiva-relêvo do ponto procurado.

Condição para que duas retas estejam no mesmo plano.

A reta que une os traços (T_1,T_2) das retas representadas deve ser paralela à que une seus pontos de fuga (F_1,F_2).

b) *Representar a reta de intersecção de dois planos (fig. 29).*

Sejam t_1, t_2 e f_1, f_2 respectivamente os traços e as linhas de fuga dos planos. A reta de intersecção pertence ao mesmo tempo aos dois planos; seu traço T_1 está na intersecção de t_1 e t_2, o ponto de fuga F_1, no encontro de f_1 e f_2.

Passamos da representação ao baixo-relêvo, elevando apenas três pontos com a espessura e, o primeiro sôbre T_1, e escolhidos a vontade, o segundo sôbre t_1 e o terceiro sôbre t_2, para modelar as perspectivas-relêvo dos dois planos e da reta de intersecção.

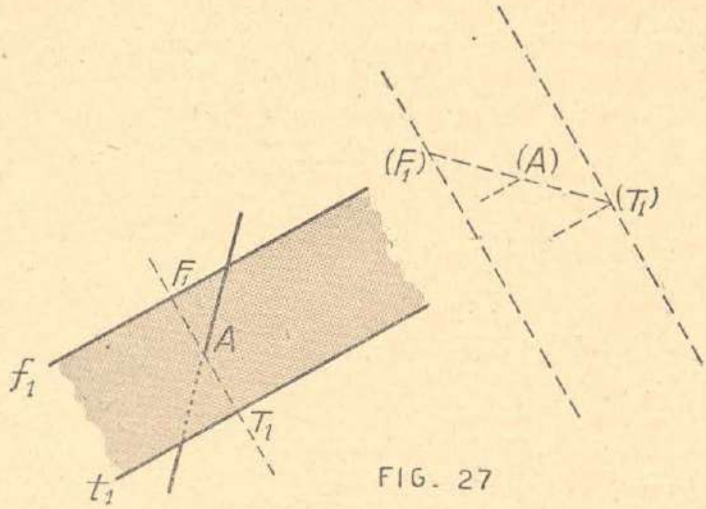

FIG. 27

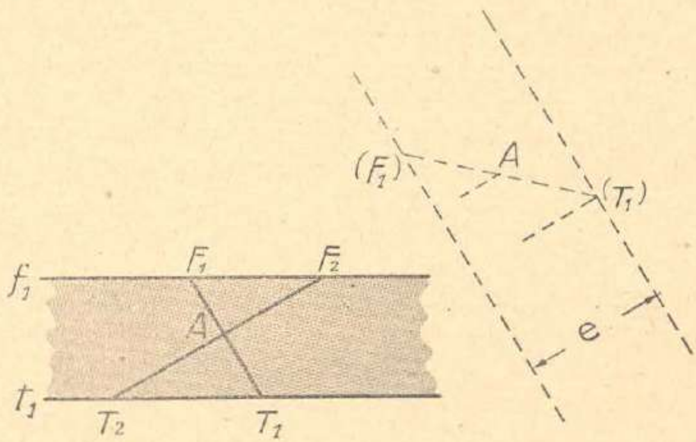

FIG. 28

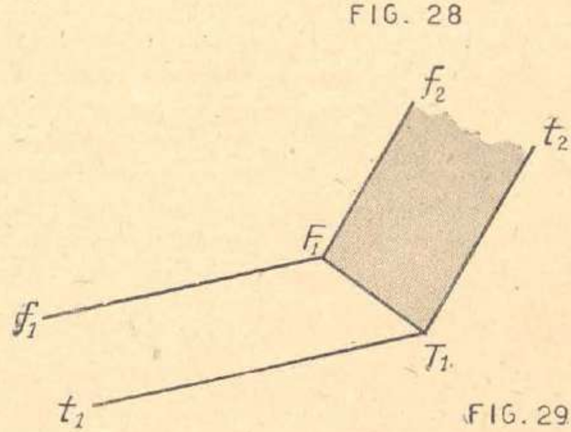

FIG. 29

CASO PARTICULAR

α) *Um dos planos é paralelo ao quadro* (*fig. 30*).

O plano paralelo é individuado por um de seus pontos A situado sôbre um plano t_1f_1, o outro é representado por seu traço t_2 e pela sua linha de fuga f_2. A representação da reta de intersecção será paralela a t_2; para desenhá-la basta encontrarmos um de seus pontos. A intersecção do plano t_1f_1 com t_2f_2 é a reta T_1F_1.

Entretanto, se o ponto A fôsse dado sôbre uma reta T_2F_2 seria fácil fazermos passar por ela um plano arbitrário e recairíamos no primeiro caso.

O plano paralelo ao quadro encontra o plano t_1f_1 segundo uma reta paralela a t_1 que passará por A. O ponto B pertencendo ao mesmo tempo aos três planos é o ponto procurado por onde passa a paralela a t_2.

Da representação construimos o baixo-relêvo, modelando as perspectivas-relêvo dos planos pelas retas t_1f_1, t_2f_2, localizando sua intersecção e o ponto A; em seguida, traçamos paralelas a t_1 e t_2 respectivamente por A e por B, retas por onde passa a perspectiva relêvo do plano paralelo ao quadro cujos pontos têm o afastamento de A.

c) *Determinar a reta que passa por dois pontos* (*fig. 31*).

Os pontos A e B estão representados respectivamente sôbre os planos t_1f_1 e t_2f_2. Se estivessem situados sôbre retas poderíamos fazer passar por cada uma delas um plano e recairíamos nos primeiros dados do problema.

Procuremos a intersecção T_1F_1 dos dois planos. Se unirmos T_1 a A e B obteremos respectivamente sôbre f_1 e f_2 os seus pontos de fuga F_2 e F_3. A reta F_2F_3 é a linha de fuga do plano que contém T_1A, T_1B e AB. Se quizermos achar o ponto de fuga da reta AB basta prolongá-la até encontrar F_2F_3 em F_4. Do mesmo modo para acharmos seu traço T_4 basta prolongá-la até encontrar a paralela à F_2F_3 traçada por T_1.

Elevando o ponto T_1 com espessura do baixo-relêvo, construimos as perspectivas-relêvo do plano que contém as retas T_1F_2 e T_1F_3; em seguida, localizamos sôbre elas respectivamente os pontos A e B, por onde passará a perspectiva-relêvo da reta procurada.

CASO PARTICULAR

α) *Os pontos são representados pelos seus correspondentes e suas projeções ortogonais sôbre o quadro.*

Neste caso, os pontos representados situam-se sôbre retas que têm por ponto de fuga o ponto principal e por traços, as projeções ortogonais dos pontos. Essas retas representam duas perpendiculares ao quadro e determinam um plano. A reta AB pertence ao plano ABP cujo traço é a reta T_1T_2 e cuja linha de fuga é a paralela à T_1T_2 traçada por P. Os pontos T_3 e F_3 são respectivamente o traço e o ponto de fuga da reta que passa por A e B.

Passamos do desenho ao baixo-relêvo elevando os pontos T_1 e T_2 com a espessura do baixo-relêvo, a fim de modelar a perspectiva-relêvo do plano. Sôbre ela traçamos as retas PT_1, PT_2 e T_3F_3 que fornecem os pontos A e B.

d) *Achar o ponto de intersecção de uma reta com um plano (fig. 33).*

A reta é representada por T_1F_1 e o plano por t_2f_2. Situemos a reta T_1F_1 sôbre um plano arbitrário t_1f_1. Na intersecção dos dois planos está o ponto A que fornece a solução, pois pertence ao mesmo tempo aos dois planos e à reta.

Construimos, como de costume, o baixo-relêvo modelando a perspectiva-relêvo do plano representado por t_1f_1 e desenhando sôbre ela a reta T_1F_1; em seguida, construimos a perspectiva-relêvo do plano representado por t_2f_2 e sua intersecção com a do plano t_1f_1, o que nos fornece o ponto A.

CASOS PARTICULARES

α) *Intersecção de uma reta paralela ao quadro com um plano qualquer (fig. 34).*

A representação da reta paralela ao quadro é feita pela reta b e pela individuação de um de seus pontos A situado sôbre o plano t_1f_1; por outro lado, o plano é definido por seu traço t_2 e sua linha de fuga f_2. Escolhamos uma reta T_1F_1 que passe pelo ponto A e esteja situado no plano t_1f_1. Se traçarmos as paralelas a b pelos pontos T_1 e F_1 obteremos um plano que passa por A e contêm a reta b'. Denominaremos t_3 e f_3 respectivamente o seu traço e linha de fuga. As intersecções de t_2 com t_3 e f_2 com f_3 dão respectivamente T_2 e F_2, reta que está situada ao mesmo tempo no plano t_2f_2 e t_3f_3. A intersecção de b com T_2F_2 fornece-nos o ponto procurado B.

Elevando os pontos T_1, T_2 e um ponto de t_2 com a espessura do baixo-relêvo, construimos fàcilmente as perspectivas-relêvo dos planos definidos por t_3f_3, t_2f_2 e das intersecções T_1F_1 e T_2F_2. Localizamos o ponto A e traçamos a reta b que fornece o ponto B.

β) *Intersecção de uma reta qualquer com um plano paralelo ao quadro (fig. 35).*

O plano paralelo ao quadro é individuado pelo ponto A situado sôbre o plano t_1f_1. A reta é individuada pelo seu traço T_2 e ponto de fuga F_2. Se fizermos passar pela reta T_2F_2 um plano qualquer definido por seu traço t_2 e linha de fuga f_2, sua intersecção com t_1f_1 é a reta T_3F_3. O plano paralelo ao quadro secciona o plano t_1f_1 segundo AM paralela ao seu traço t_1 e o plano t_2f_2 segundo MB paralela a t_2. A reta MB pertence ao mesmo tempo ao plano paralelo ao quadro e ao plano t_2f_2 em que está T_2F_2. O ponto B representa a intersecção procurada.

Construimos, como de costume, as perspectivas-relêvo dos planos individuados por t_1f_1 e t_2f_2 e sua intersecção T_3F_3.

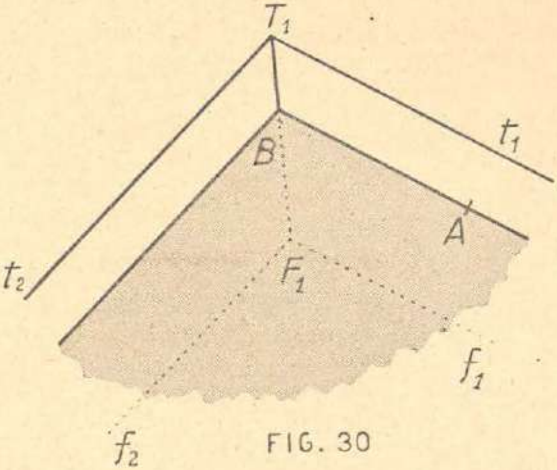

FIG. 30

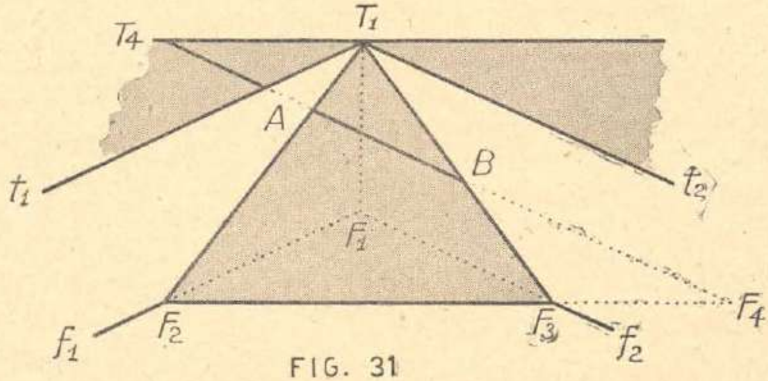

FIG. 31

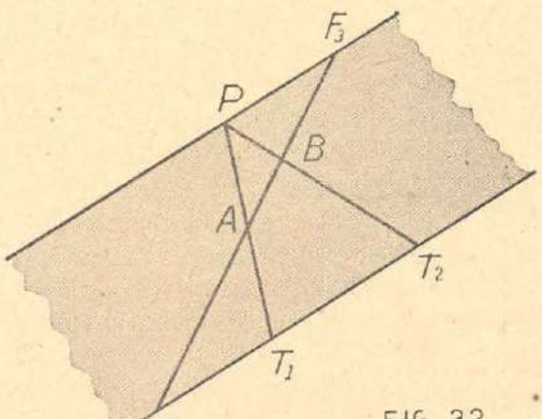

FIG. 32

No baixo-relêvo localizamos sôbre o plano t_1f_1 o ponto A e sôbre o plano t_2f_2 a reta T_2F_2. Finalmente traçamos as retas AM e MB que servem para modelar o plano paralelo ao quadro e localizar o ponto B.

e) Determinar o plano que passa por um ponto e por uma reta dada (fig. 36).

Estejam representados o ponto A situado sôbre o plano t_1f_1 e a reta T_3F_3. Se o ponto estivesse situado sôbre uma reta faríamos passar por ela um plano qualquer e recairiamos nos dados acima referidos. Situemos a reta T_3F_3 sôbre um plano arbitrário t_2f_2. A intersecção dos dois planos dá um ponto B que é comum a reta e ao plano que contem A. Determinam as retas AB e T_3F_3 o plano procurado. Seu traço e linha de fuga são respectivamente T_3T_4 e F_3F_4.

As perspectivas-relêvo dos planos definidos por t_1f_1 e t_2f_2 constroem-se como de costume. Localizamos os pontos A e B sôbre o plano t_1f_1 e traçamos as retas BAF_4, BF_3. O plano modela-se pelas três retas BAF_4, BF_3 e F_3F_4.

CASO PARTICULAR

α) Determinar o plano que passa por um ponto e por uma reta paralela ao quadro (fig. 37).

Sejam A o ponto situado sôbre o plano t_1f_1 e a reta b de frente individuada pelo ponto B situado sôbre o plano t_2f_2. O traço e a linha de fuga do plano procurado são paralelos a reta b; portanto, o problema recai em encontrar a reta que passa pelos pontos A e B e traçar paralelas a b pelo seu traço e ponto de fuga.

Modelamos as perspectivas-relêvo dos planos individuados por t_1f_1 e t_2f_2 como de costume e localizamos neles os pontos A e B respectivamente. A perspectiva-relêvo do plano procurado passa pelos pontos acima referidos, pela reta t_3 posta sôbre o quadro e pela reta f_3.

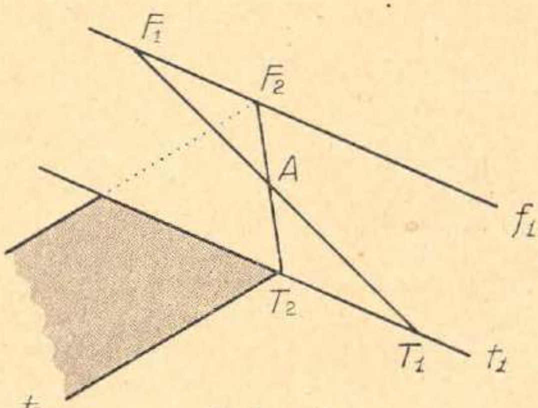

FIG. 33

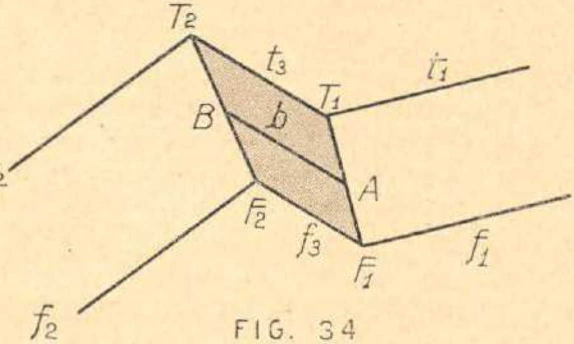

FIG. 34

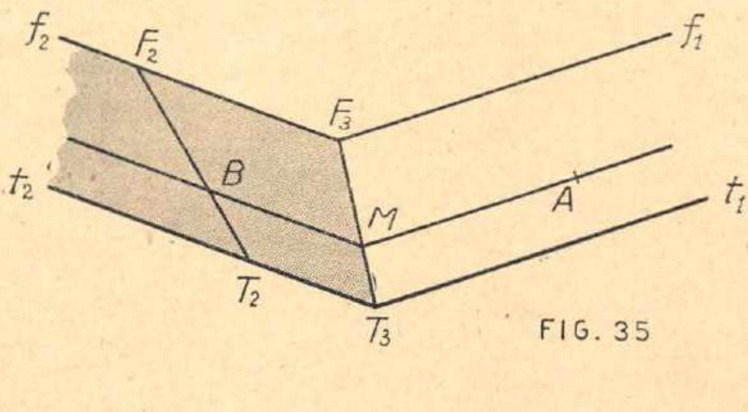

FIG. 35

f) Determinar o plano que passa por três pontos.

Sejam A, B e C as representações dos pontos definidos respectivamente sôbre os planos t_1f_1, t_2f_2 e t_3f_3. Êste problema recai num dos precedentes; no problema (*c*), por exemplo. Se determinarmos as retas que passam pelos pontos A e B e pelos pontos B e C, obteremos duas retas do plano. Basta portanto desenhar a reta que une os seus traços e a que junta os seus pontos de fuga para têrmos o traço e linha de fuga do plano procurado.

g) Representar o plano que passa por uma reta e é paralelo a outra reta (fig. 38).

É um caso particular do problema (*e*), em que o ponto considerado é impróprio. A reta pela qual pretendemos traçar o plano é representada por seu traço T_1 e ponto de fuga F_1; da outra, basta-nos representar-lhe o ponto de fuga F_2 (situado sôbre o plano de fuga). O plano procurado tem por linha de fuga a reta F_2F_1 e por traço a reta que lhe é paralela traçada por T_1. Denominaremos t_1 seu traço e f_1 sua linha de fuga.

Sôbre a perspectiva-relêvo do plano individuado por t_1f_1, construida como temos explicado anteriormente, desenhamos a reta T_1F_1.

CASOS PARTICULARES

α) Representar o plano que passa por uma reta e é paralelo a uma frontal (fig. 39).

Seja a reta T_1F_1; o ponto de fuga da reta frontal é representado pelo ponto impróprio de b. O plano procurado encontramo-lo, traçando as paralelas a b pelos pontos T_1 e F_1. Denominaremos t_1 seu traço e f_1 sua linha de fuga.

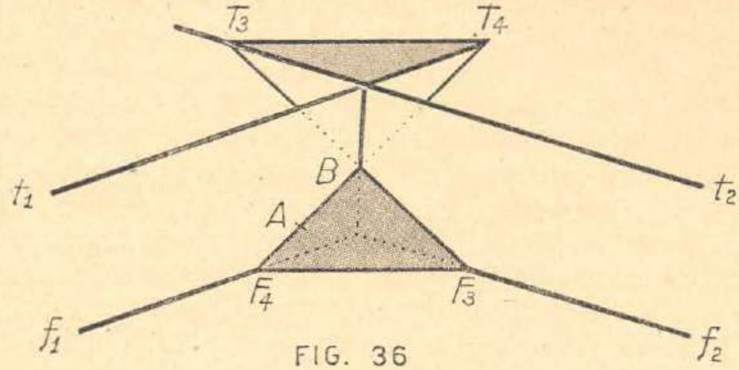

FIG. 36

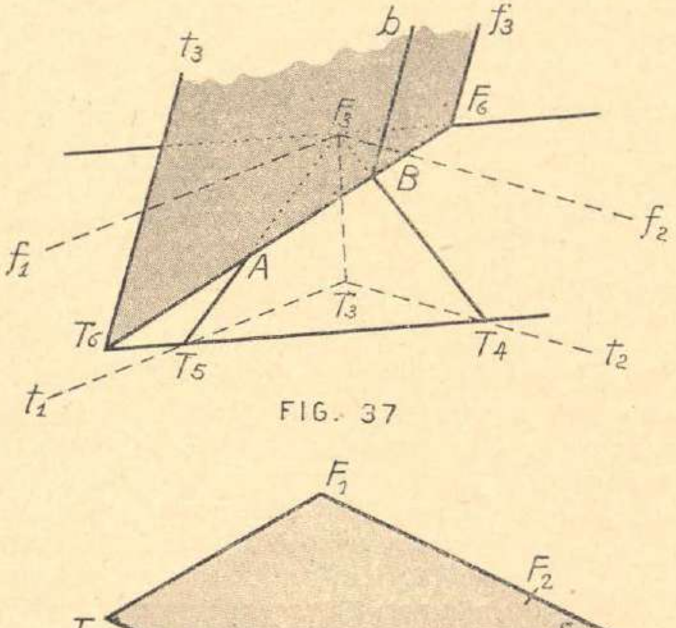

FIG. 37

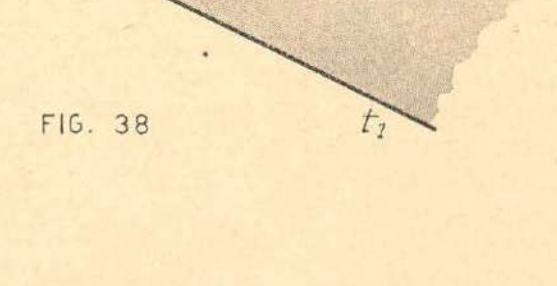

FIG. 38

Como de costume, uma vez construida a perspectiva-relêvo do plano individuado por t_1f_1, traçamos a reta T_1F_1.

β) *Representar o plano que passa por uma frontal e é paralelo a uma reta (fig. 40).*

O ponto impróprio da reta b é o ponto de fuga da frontal; ela é individuada pelo ponto A situado sôbre o plano t_1f_1. A reta dada tem por ponto de fuga F_2. A linha de fuga do plano procurado passa pelo ponto F_2 e é paralela à b. Sua intersecção com f_1 determina o ponto F_1. A reta F_1A pertence ao mesmo tempo aos dois planos e tem seu traço em T_1. A paralela a b traçada por T_1 é o traço do plano procurado. Denominaremos t_2 o seu traço e f_2 sua linha de fuga.

Construimos, como de costume, a perspectiva-relêvo do plano definido por t_1f_1 e localizamos o ponto A. Basta-nos elevar um outro ponto de t_2 para construirmos fàcilmente a perspectiva-relêvo do plano procurado.

h) *Representar o plano que passa por um ponto e é paralelo à outro dado (fig. 41).*

E' um caso particular do problema (*e*), em que a reta pela qual passa o plano é uma reta imprópria.

Seja o ponto A situado sôbre o plano t_1f_1 e f_2 a linha de fuga do plano, isto é, a projeção de sua direção. O ponto F_1, intersecção de f_2 com f_1 define o ponto de fuga de uma reta paralela ao plano f_2; como está situada também sôbre o plano t_1f_1, a reta AF_1 têm seu traço em T_1. A reta t_2 paralela a f_2, traçada por T_1, representa o traço do plano que passa por A e é paralelo à direção individuada por f_2.

Depois de construida a perspectiva-relêvo do plano individuado por t_1f_1 e localizado o ponto A, traçamos a reta T_1AF_1. Elevando mais um outro ponto de t_2 com a espessura do baixo-relêvo, modelamos fàcilmente a perspectiva-relêvo do plano definido por t_2f_2.

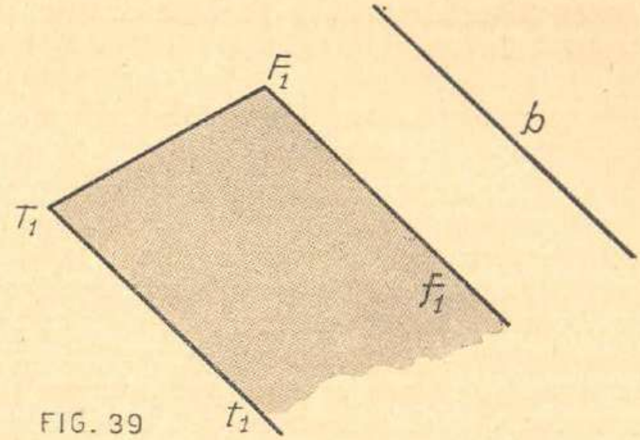

FIG. 39

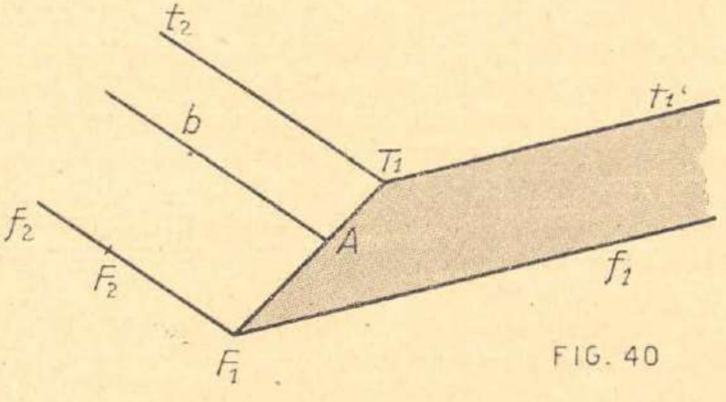

FIG. 40

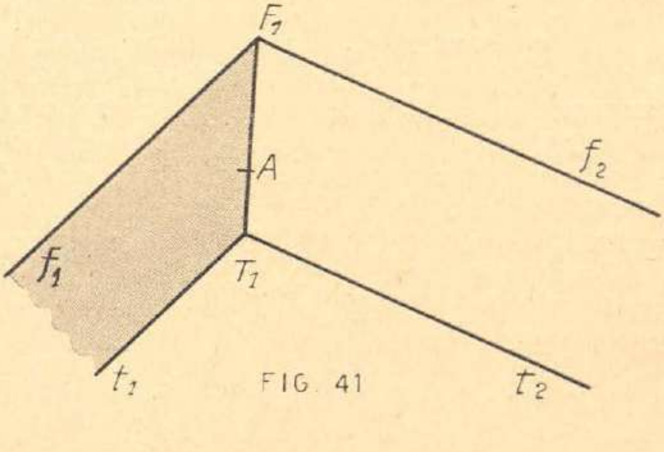

FIG. 41

i) Representar uma reta que passa por um ponto e é paralela à outra (fig. 42).

Êsse problema é um caso particular do problema (c), em que um dos pontos é impróprio.

Sejam o ponto A situado sôbre o plano t_1f_1 e F_2 o ponto de fuga da reta dada; êste último suficiente para definir-lhe a direção. No plano t_1f_1 traçamos a reta T_1F_1 que passa pelo ponto A. A reta F_1F_2 e a sua paralela que passa por T_1 são respectivamente a linha de fuga e o traço de um plano que contem a reta T_1F_1, o ponto A e a paralela procurada. Denominaremos f_2 a linha de fuga desse plano e t_2 o seu traço. A representação da paralela a reta dada passa por A, por F_2 e seu traço encontra-se em T_2.

Modelamos a perspectiva-relêvo do plano individuado por t_2f_2, localizamos o ponto A e finalmente traçamos sôbre ela a reta T_2AF_2.

Nota — Se a reta dada fôr paralela ao quadro, seu ponto de fuga é o ponto impróprio de b, e o problema se resolve traçando por A, T_1 e F_1 paralelas à b (fig. 43).

Uma vez construida a perspectiva-relêvo do plano individuado por t_2f_2, localizamos o ponto A e traçamos por êle a paralela à reta b.

j) Conhecido um segmento dividí-lo em partes iguais (fig. 44).

Seja AE a representação do segmento situado sôbre a reta, cujo traço e ponto de fuga são respectivamente T_1 e F_1. Se fizermos passar por T_1F_1 um plano t_1f_1, poderemos dividir o segmento em partes iguais cortando-o por uma série de paralelas igualmente espaçadas. Escolhamos um ponto de fuga F_2 arbitrário e unâmo-lo a A e E ; obtemos respectivamente sôbre a reta t_1 os pontos G e J. Dividindo o segmento GJ em partes iguais, por exemplo três, e unindo-as a F_2 obtemos sôbre a reta T_1F_1 os pontos B e C que dividem o segmento AE em três partes iguais.

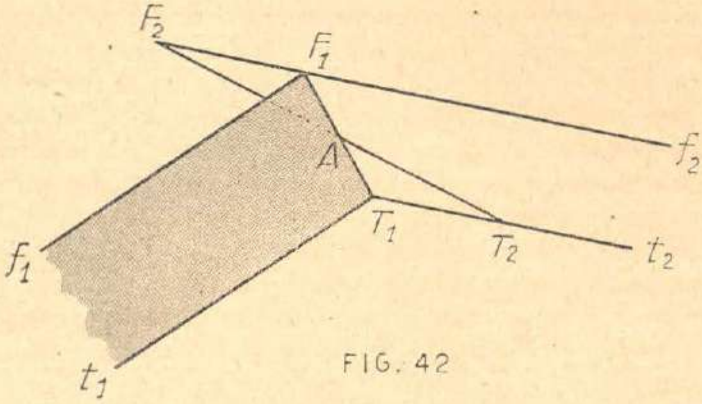

FIG. 42

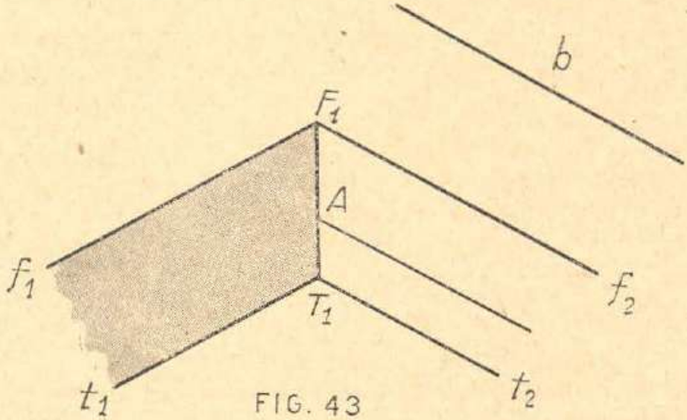

FIG. 43

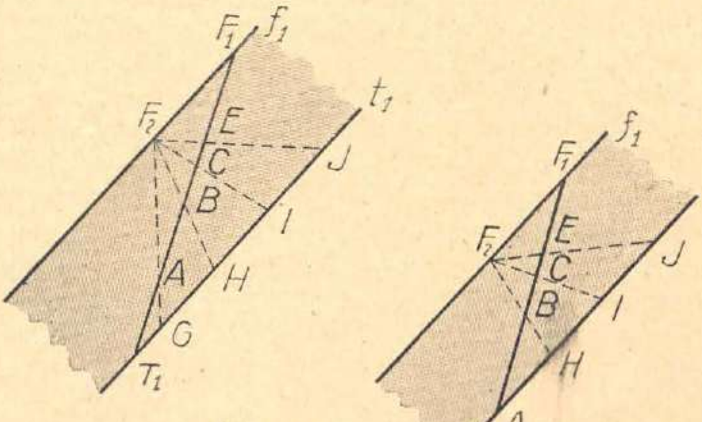

FIG. 44

Se conhecessemos o afastamento de A, não necessitaríamos do traço T_1 para efetuar as construções. Nesse caso, bastaria traçarmos uma frontal por A e uma paralela a ela pelo ponto de fuga F_1. A seguir marcaríamos três pontos igualmente espaçados sôbre a frontal e unindo J à E determinaríamos o ponto de fuga F_2 que ligado aos pontos H e I fornecer-nos-iam os pontos B e C.

Para passarmos da representação ao baixo-relêvo construimos a perspectiva-relêvo do plano individuado por t_1f_1. Localizamos os pontos T_1, G, H, I, e J com o afastamento igual a espessura do baixo-relêvo e traçamos as retas T_1F_1, GF_2, HF_2, IF_2 e JF_2 que determinam os pontos A, B, C e E.

No segundo caso, conhecemos o afastamento de A que será aplicado aos pontos da frontal H, I e J. Traçamos HF_2, IF_2 e JF_2 que na intersecção com AF_1 determinam os pontos B, C e E.

B) Principais problemas métricos

a) Rebatimento do ponto de vista sôbre o plano de fuga em tôrno da linha de fuga de um plano (fig. 45).

Êste problema é fundamental para a resolução de todos os problemas métricos. Embora na representação o plano de fuga coincida com o quadro, desejamos realçar que, nesse problema bem como nas suas aplicações *b*, *c* e *d*, não só os dados mas também as soluções pertencem ao plano de fuga.

Estejam representados o ponto principal P, a circunferência fundamental e a linha de fuga f. Se imaginarmos o plano projetante de f (plano que passa pelo ponto de vista O e pela reta f) e cortarmo-lo por um plano perpendicular a reta f, o qual também projete ortogonalmente o ponto de vista, êle secciona o plano de fuga segundo a reta PF e no espaço, o plano projetante segundo OF. As retas OF e PF são perpendiculares a f (teorema das três perpendiculares) e estão situadas em um mesmo plano com a projetante OP do ponto de vista. Deitando êsse plano sôbre o plano de fuga, o triângulo OPF representa-se em verdadeira grandeza. Traçamos então a reta PF normal a f, o ponto de vista vem em (O) sôbre a circunferência de distância na direção $P(O)$ normal a PF. A distância do ponto de vista a F é representada em verdadeira grandeza em $F(O)$. No rebatimento em tôrno de f a posição do ponto de vista se coloca no plano de fuga sôbre PF, perpendicularmente à f, em (O_1) ou (O_2) conforme o sentido do rebatimento. Na execução tiraremos partido da possibilidade de rebater num ou noutro sentido para evitar superposição de linhas no desenho.

Para passarmos da representação à execução no baixo-relêvo, o desenho inteiramente feito sôbre o plano de fuga resolve o problema.

b) *Achar o ângulo de duas retas dadas (fig. 46).*

Sejam F_1 e F_2 os pontos de fuga das duas retas. Estejam ainda representados o ponto principal P e a circunferência de distância. Os raios projetantes OF_1 e OF_2 são respectivamente paralelos a tôdas as retas que têm o ponto de fuga em F_1 e F_2. Basta portanto rebatermos o plano projetante de F_1F_2 em tôrno de F_1F_2. O ponto de vista vêm colocar-se em (O_1) e unindo-o aos pontos fixos F_1 e F_2, obtemos o verdadeiro ângulo, representado em $F_1(O_1)F_2$.

Para passarmos da representação à execução no baixo-relêvo, o desenho feito sôbre plano de fuga resolve completamente o problema.

c) *Conhecida a linha de fuga de um plano determinar o ponto de fuga das retas que lhe são perpendiculares (fig. 47).*

Estejam representados o ponto principal, a circunferência de distância e a linha de fuga f_1 do plano. Esta última define uma direção de plano; é a linha de fuga de uma infinidade de planos paralelos entre si. Tôdas as perpendiculares a êsses planos são paralelas entre si e concorrem portanto a um ponto de fuga F_1 que depende sòmente de f_1. Êle está contido num plano, que passa pela reta OP e é perpendicular a f_1. Seu traço no quadro é PM e secciona o plano Of_1 segundo a reta OM; deitando-o sôbre o plano de fuga, o ponto de vista se coloca em (O) sôbre a circunferência de distância normalmente a PM e a reta OM em $(O)M$. A perpendicular passa normalmente à $M(O)$ e seu ponto de fuga está no ponto F_1 onde encontra PM. F_1 é o ponto de fuga de tôdas as retas perpendiculares aos planos paralelos à Of_1. Inversamente, sendo dado o ponto de fuga F_1 de uma reta, com a mesma construção em sentido inverso, deduziremos a linha de fuga f_1 dos planos perpendiculares a essa direção.

Para passarmos da representação à execução no baixo-relêvo, êsse desenho feito inteiramente sôbre o plano de fuga resolve o problema.

d) Conhecidas as linhas de fuga de dois planos, achar o ângulo que êles fazem entre si (fig. 48).

Estejam representados o ponto principal, a circunsferência de distância e as linhas de fuga f_1 e f_2. Os dois planos perspectivos Of_1 e Of_2 cortam-se no espaço segundo o raio projetante OM. O plano normal à OM, que passa por O, secciona os planos Of_1 e Of_2 segundo duas retas que dão a medida do ângulo dos dois planos. Deitando sôbre o plano de fuga o plano que projeta ortogonalmente o ponto de vista e o ponto M, aparecem o ponto de vista e o raio projetante respectivamente em (O) e $(O)M$. A normal à $(O)M$ traçada por (O), fornece um dos pontos de fuga F do plano normal a OM, cuja linha de fuga AB é perpendicular a PM. Finalmente ao rebatermos o plano OAB em tôrno de AB, o ponto de vista vem colocar-se em (O_1); unindo-o aos pontos A e B, que se mantêm fixos no rebatimento, obtemos o triângulo $A(O_1)B$. Êle fornece o ângulo desejado cujo vértice está em (O_1).

Para passarmos da representação à execução no baixo-relêvo, o desenho feito inteiramente sôbre o plano de fuga resolve o problema.

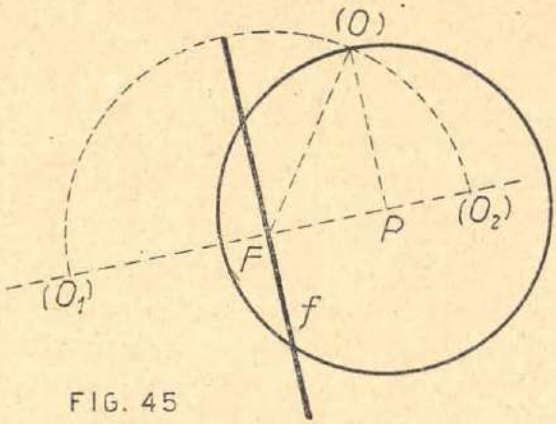

FIG. 45

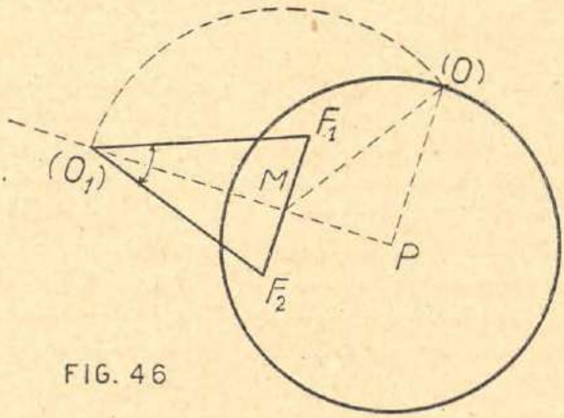

FIG. 46

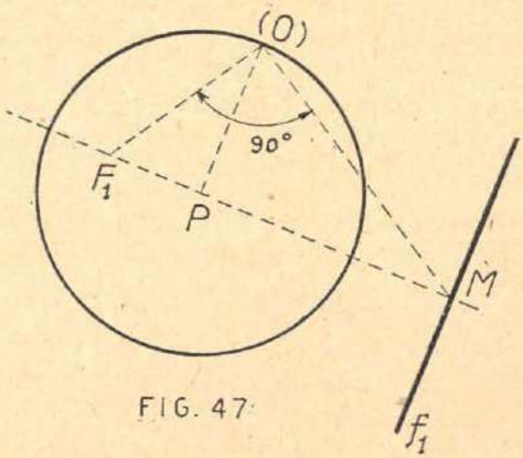

FIG. 47

e) Rebatimento de um plano oblíquo ao quadro (fig. 49).

Seja a fig. 49 uma secção obtida no baixo-relêvo pelo plano que passa pelo ponto de vista e é normal ao traço t_1 de um plano objetivo. Vemos a secção do quadro em $T_1(\mathbf{A})$, do plano de fuga em $F_1(O_1)$, do plano objetivo em $\mathbf{A}T_1$, do plano que passa pelo ponto de vista e lhe é paralelo em OF_1, e da perspectiva-relêvo do plano objetivo em T_1F_1. No rebatimento, o plano gira em tôrno de seu traço e vem colocar-se sôbre o quadro em $(\mathbf{A})T_1$. Nesse movimento, se o ponto de vista O girar também concomitantemente em tôrno da linha de fuga, nas posições sucessivas assumidas pelo ponto de vista e pelo plano objetivo, os raios projetantes deslocar-se-ão no espaço, porém manter-se-á constante a sua perspectiva-relêvo e na posição final o plano está rebatido sôbre o quadro e o ponto de vista sôbre o plano de fuga. Para provar essa asserção, basta considerar que na posição inicial temos a homologia determinada pelo centro O pelo quadro $T_1(\mathbf{A})$ e plano de fuga $F_1(O_1)$ cuja espessura do baixo-relêvo é e. Na posição final a homologia seria determinada pelo centro (O_1), pelo plano de fuga F_1O e quadro $T_1\mathbf{A}$ separados pela espessura e_1. Nessas duas homologias conservam-se inalterados o traço e a linha de fuga do plano objetivo e consequentemente também sua perspectiva-relêvo. Qualquer linha do referido plano tem, nessas duas homologias, inalterados o seu traço e ponto de fuga, o que condiciona a sua perspectiva-relêvo não variar. Um ponto da perspectiva-relêvo do plano, estando situado na intersecção de duas retas invariáveis nessas duas homologias, fica também invariável. Chamamos a atenção para o paralelismo existente entre o plano objetivo e o plano que projeta sua linha de fuga nas duas homologias, isto é, na posição inicial e na final. A mesma coisa acontece entre uma reta do plano objetivo e o raio que projeta o seu ponto de fuga.

Variando a espessura do baixo-relêvo (o a $p + x$) e mantendo as restrições impostas à pág. 43, a representação do rebatimento do plano objetivo conservar-se-á sempre a mes-

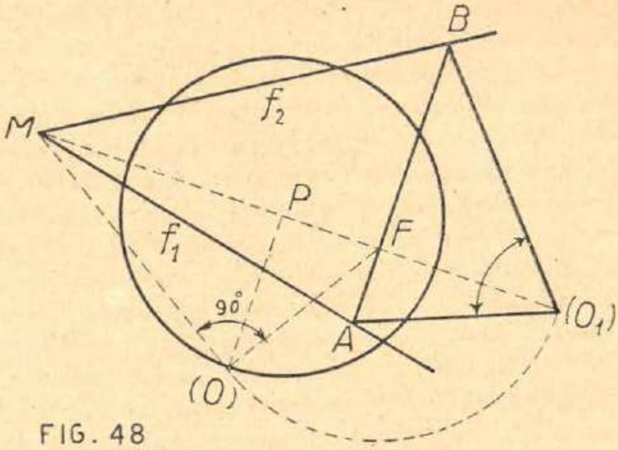

FIG. 48

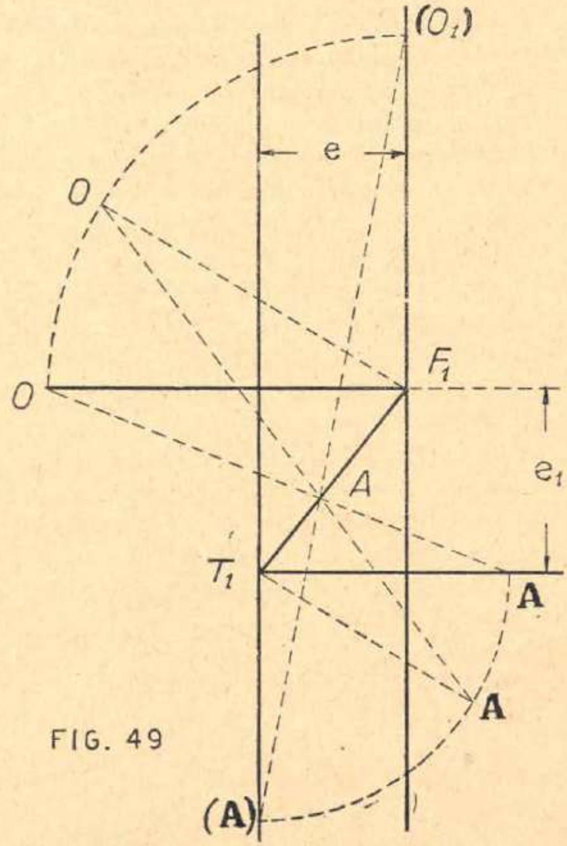

FIG. 49

ma, idêntica à da perspectiva linear e que obtemos levando o plano de fuga a coincidir com o quadro.

O ponto em sua representação está em linha reta com as representações do rebatimento do ponto de vista e do ponto do plano que lhe corresponde (êste representa-se sôbre o pé da perpendicular ao traço do plano, em que está situado, com a verdadeira distância). O rebatimento do ponto de vista é independente do traço t_1, efetua-se em tôrno da linha de fuga f_1; serve para todos os planos paralelos entre si, que tenham essa linha de fuga. Sua representação faz-se em (O_1) como no caso do rebatimento do plano projetante (fig. 50).

Assim quando no baixo-relêvo o ponto de vista tiver se colocado no plano de fuga, o plano objetivo girando em tôrno de seu traço coincidiu com o quadro. Na representação um ponto e o seu correspondente rebatido concorrem a (O_1). Escolhamos o ponto A situado sôbre a reta T_1F_1; a reta $(O_1)F_1$ é paralela a $T_1(\mathbf{A})$. O rebatimento do ponto A encontra-se em $(\mathbf{A})$ na intersecção do raio $(O_1)A$ com a paralela $T_1(\mathbf{A})$ à $(O_1)F_1$, traçada por T_1 (ponto sôbre a reta fixa do rebatimento do plano). E' preciso notar que há duas possibilidades de rebatimento. Escolhida a direção de rebatimento do ponto de vista em relação à reta f_1, um ponto do objeto não estando do mesmo lado do quadro com o ponto de vista, rebater-se-á em direção oposta em relação a t_1.

Resumo

Para realizar o rebatimento de um plano objetivo qualquer:

1) O ponto de vista (centro da homologia) gira em tôrno da linha de fuga do plano até colocar-se sôbre o plano de fuga;

2) O plano objetivo gira em tôrno de seu traço, que é uma reta fixa do rebatimento (eixo da homologia), até coincidir com o quadro.

Na representação do rebatimento, quando levamos o plano de fuga a coincidir com o quadro:

1) A linha que une o ponto de vista rebatido ao ponto de fuga de uma reta do plano (ponto situado sôbre a linha de

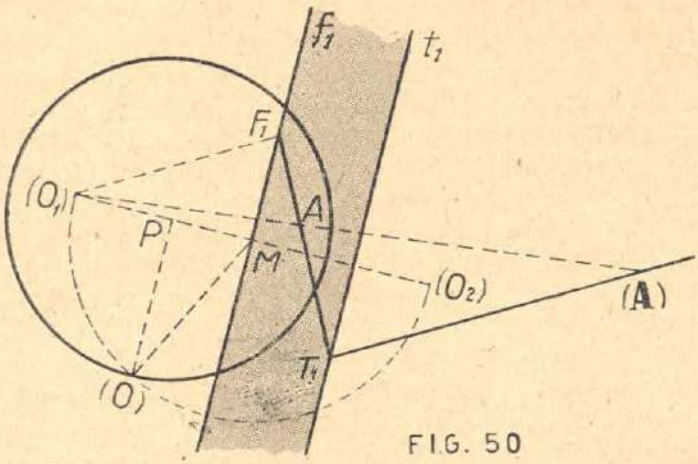

FIG. 50

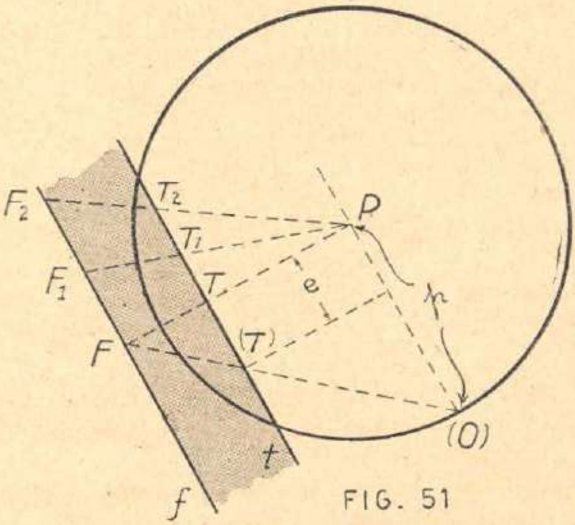

FIG. 51

fuga) dá a direção do rebatimento dessa reta; e ela rebatida passa pelo seu traço (ponto situado sôbre o eixo da homologia);

2) O ponto e seu correspondente rebatido estão alinhados com o ponto de vista rebatido.

Finalmente passamos da representação do plano à sua perspectiva-relêvo como temos anteriormente explicado.

CASOS PARTICULARES

α) *O rebatimento do plano projetante do baixo-relêvo (fig. 51).*

Entre tôdas as espessuras possíveis do baixo-relêvo, pode acontecer que, para uma delas, um plano dado por seu traço e linha de fuga seja um plano projetante do baixo-relêvo: nesse caso, essas linhas interceptam segmentos sôbre raios projetantes do plano que devem satisfazer a seguinte proporção:

$$\frac{TF}{PF} = \frac{T_1F_1}{PF_1} = \frac{T_2F_2}{PF_2} = \frac{e}{p}$$

O problema do rebatimento é idêntico ao caso geral.

β) *O rebatimento do plano que passa pelo ponto situado à distância* p *do quadro sôbre a perpendicular do ponto principal (ponto de vista O_0 no caso da perspectiva linear).*

Tem o seu traço e linha de fuga superpostos (também tôdas as suas retas). Quando a espessura do baixo-relêvo fôr igual a zero, é o conhecido problema de perspectiva linear: *rebater o plano projetante sôbre o quadro.* Rebate-se, como de costume, o ponto de vista em torno de f_1 e o plano em tôrno de t_1 que, nesse caso, estão superpostos (fig. 52).

Para passarmos da representação ao baixo-relêvo, a reta t_1 situa-se sôbre o quadro elevando dois de seus pontos com

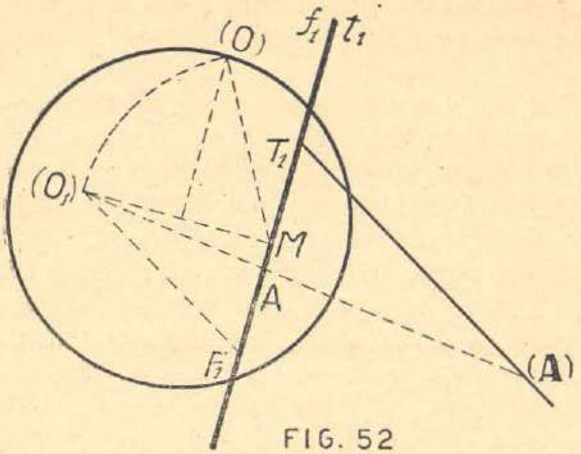

FIG. 52

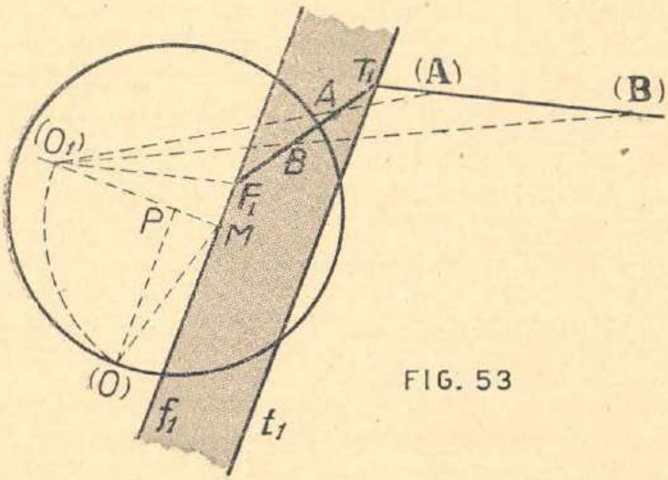

FIG. 53

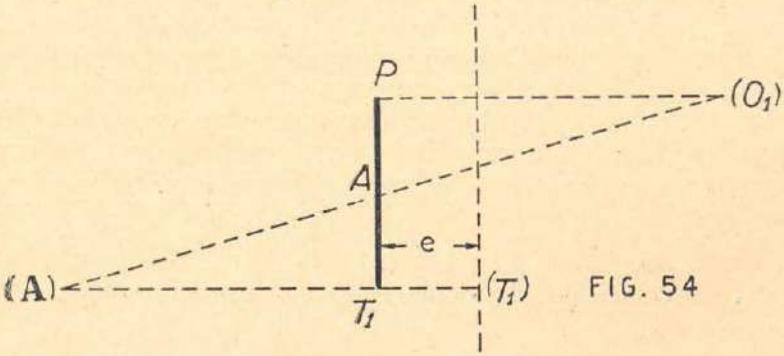

FIG. 54

espessura do baixo-relêvo; o ponto A sôbre a perspectiva-relêvo da reta definida por T_1F_1.

f) Achar a distância entre dois pontos (fig. 53).

Os pontos podem ser individuados pelos seus correspondentes situados sôbre o plano t_1f_1 ou sôbre a reta T_1F_1. No primeiro caso rebatemos o plano t_1f_1 e procuramos a verdadeira distância entre os dois pontos, representada pelo rebatimento da reta T_1F_1 que passa por êles. O segundo caso (fig. 53) recai no primeiro fazendo passar pela reta T_1F_1 um plano qualquer t_1f_1.

CASO PARTICULAR

α) Distância de um ponto ao plano de fuga (fig. 54).
O ponto **A** é representado pelo seu correspondente A sôbre uma reta de topo ao quadro T_1P. O plano que projeta ortogonalmente a reta T_1P dá-nos fàcilmente a solução. Deitando-o sôbre o plano de fuga, o ponto de vista coloca-se perpendicularmente a T_1P, sendo $P(O_1)$ igual à distância principal. O ponto (**A**) coloca-se sôbre T_1(**A**) paralela à $P(O_1)$. Os pontos (**A**) e A estão alinhados com o centro (O_1). Os comprimentos T_1(**A**) e (T_1)(**A**) representam respectivamente as distâncias do ponto ao plano de fuga e ao quadro.

g) Representar uma figura situada no plano horizontal (fig. 55).

Estejam representados os dados fundamentais: o ponto principal P e a circunferência de distância. A linha de fuga do plano é a linha do horizonte h. O rebatimento do ponto de vista faz-se, neste caso, em (O_1) sôbre a circunferência de distância e perpendicularmente à linha do horizonte. A figura que pretendemos representar é conhecida na sua forma, grandeza e posição em relação ao traço do plano t_1. Para simplificar suporemos ser ela o triângulo (**A**), (**B**),

(Γ) rebatido sôbre o quadro, na escala escolhida e na posição que ocupa no plano em relação a t_1. Se adotassemos o outro ponto simétrico de (O_1) em relação a h, o triângulo $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, (Γ) deveria ser representado na outra posição possível simétrica em relação a reta t_1. Os pontos $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, (Γ) e seus correspondentes A, B, C estão em linha reta com (O_1).

Se traçarmos a reta $(O_1)F_1$ paralela a $(\mathbf{A})(\mathbf{B})$, F_1 representa o ponto de fuga da reta $(\mathbf{A})(\mathbf{B})$; seu traço é o ponto T_1 onde ela encontra a reta t_1. Os pontos correspondentes à $(\mathbf{A})$ e $(\mathbf{B})$ representam-se respectivamente em A e B sôbre a reta T_1F_1 e nas intersecções com os raios $(O_1)(\mathbf{A})$ e $(O_1)(\mathbf{B})$.

Da mesma maneira procedemos com a reta $(\mathbf{A})(\Gamma)$ cujo traço é T_2 e o ponto de fuga F_2. O ponto correspondente à (Γ) representa-se em C sôbre a reta T_2F_2 e na intersecção com o raio $(O_1)(\Gamma)$. Por fim desenharemos o triângulo ABC.

Idênticas construções geométricas resolvem o problema inverso, isto é, dada a representação de uma figura no plano horizontal achar a sua verdadeira grandeza. Conhecemos neste caso os dados fundamentais, o traço do plano horizontal e a representação da figura em perspectiva-relêvo.

Da representação passamos, como de costume, à construção do baixo-relêvo. Localizamos os pontos A, B e C sôbre a perspectiva-relêvo do plano horizontal e desenhamos finalmente o triângulo.

h) *Representar uma figura situada num plano oblíquo ao quadro (fig. 56).*

Estejam representados os dados fundamentais, o traço t_1 e a linha de fuga f_1 do plano.

O rebatimento do ponto de vista vem em (O_1) como de costume. A figura a representar será, por simplicidade, o triângulo $(\mathbf{A})$, $(\mathbf{B})$, (Γ), que está desenhado sôbre o quadro na escala escolhida e em posição que ocupa no plano dado relativamente ao traço t_1. Os rebatimentos adequados do ponto de vista e do plano realizam-se sempre em direção oposta em relação às suas charneiras quando o ponto de vista e o ponto rebatido não estão do mesmo lado do quadro. Os pontos (**A**), (**B**), (Γ) e seus correspondentes A, B e C estão em linha reta com o ponto (O_1). As paralelas $(O_1)F_1$ e $(O_1)F_2$ respectivamente à (**A**)(**B**) e (**A**)(Γ) dão sôbre a reta f_1 os pontos de fuga F_1 e F_2 dêsses lados. As retas correspondentes à (**A**)(**B**) e (**A**)(Γ) representam-se respectivamente em T_1F_1 e T_2F_2. A reta T_1F_1 é cortada pelos raios (O_1)(**A**) e (O_1)(**B**) respectivamente nos pontos A e B. Da mesma maneira a reta T_2F_2 é cortada pelos raios (O_1)(**A**) e (O_1)(Γ) respectivamente nos pontos A e C. Finalmente podemos traçar o triângulo ABC correspondente ao triângulo **AB**Γ situado no plano objetivo.

Construções geométricas idênticas resolvem o problema inverso: *dada a representação de uma figura situada em plano oblíquo ao quadro achar sua verdadeira grandeza.*

São conhecidos os dados fundamentais, o traço, a linha de fuga do plano e a representação da figura em perspectiva-relêvo.

Modelamos, como de costume, a perspectiva-relêvo do plano individuado por t_1f_1 e localizamos os pontos A, B e C. Finalmente traçamos o triângulo ABC.

4) SOMBRAS

O problema da sombra diferencia-se, em se tratando de baixo-relêvo ou perspectiva linear. O quadro exposto à luz, em oposição ao baixo-relêvo, não produz sombras; elas já fazem parte da representação da obra artística. Quando se expõe o baixo-relêvo à luz solar, sua iluminação faz-se por meio de raios paralelos.

Na perspectiva linear, conhecido o ponto de fuga que é a imagem da direção dos raios luminosos, o problema fundamental se resume em achar a sombra de um ponto sôbre um plano (fig. 57). Seja o ponto A individuado pela reta T_1F_1; se fôsse individuado por um plano bastaria traçarmos uma reta nesse plano e recairíamos no primeiro caso. A imagem

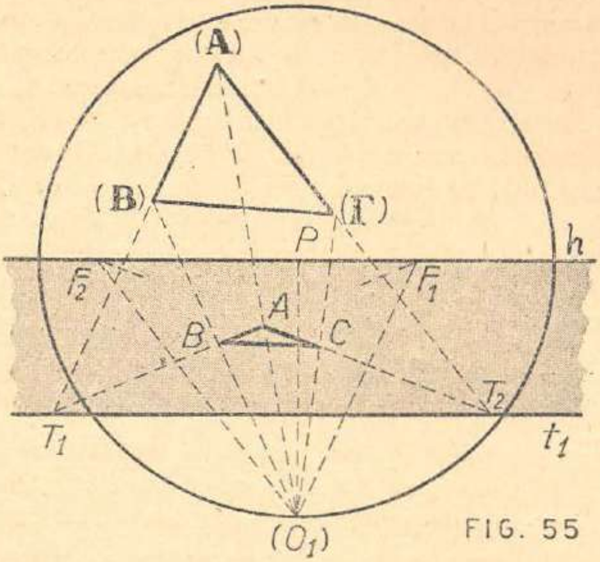

FIG. 55

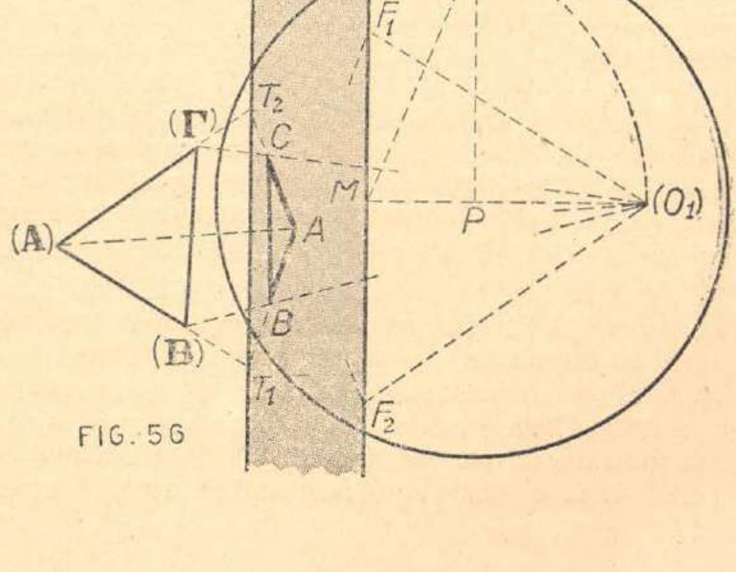

FIG. 56

da direção dos raios luminosos é dada pelo ponto de fuga F_2. Procuremos a sombra da reta T_1F_1 sôbre o plano t_1f_1. Se traçarmos por T_1F_1 o plano paralelo aos raios luminosos, a sombra de T_1F_1 sôbre t_1f_1 representa-se pela intersecção dos dois planos. Para fazermos passar por T_1F_1 o plano paralelo aos raios luminosos, isto é, seu plano de sombra, basta unirmos F_1 a F_2 e teremos encontrado a linha de fuga dêsse plano; seu traço é a paralela a F_1F_2 que passa por T_1. Achada a intersecção T_3F_3 representamos os raios luminosos T_1F_2 e AF_2 que dão respectivamente as sombras de T_1 e de A em B e C na intersecção com T_3F_3. A sombra de T_1F_1 sôbre o plano de fuga é representada pela linha de fuga F_1F_2; porém o ponto F_3 limita a parte que realmente cai sôbre o plano de fuga.

No baixo-relêvo, como já dissemos, os raios luminosos serão paralelos entre si, quando êle fôr exposto a luz solar. Sabemos que retas paralelas do baixo-relêvo correspondem a retas objetivas que concorrem a um ponto Φ_1, situado sôbre o plano neutro (fig. 11). O raio luminoso é representado pela reta T_1F_1, que se localiza no baixo-relêvo situando T_1 sôbre o quadro e F_1 sôbre o plano de fuga. Assim que, escolhida a espessura do baixo-relêvo, êle fica completamente determinado. Seu comprimento compreendido no baixo-relêvo e sua inclinação são iguais aos do segmento que vai do ponto de vista ao ponto Φ_1, pelo qual passam tôdas as retas correspondentes aos raios luminosos (fig. 11). O ponto Φ_1 situado sôbre o plano neutro corresponde ao ponto impróprio da reta T_1F_1, de modo que todos os raios luminosos são paralelos entre si, igualmente inclinados sôbre o plano de fuga e, por conseguinte, também são iguais seus comprimentos compreendidos entre o quadro e o plano de fuga.

Estejam representados, pois, no baixo-relêvo, o ponto A individuado pela reta T_1F_2 e o plano t_1f_1 (fig. 58). O raio luminoso T_1F_1 e a reta T_1F_2, por terem um pouto comum, determinam o plano de sombra cuja linha de fuga é F_1F_2. Por isso, F_1F_2 é a sombra de T_1F_2 sôbre o plano de fuga. Êsse plano tem por traço a reta T_1T_3 paralela a F_1F_2 que passa por T_1. A sombra de T_1F_2 sôbre o plano t_1f_1 obtem-se

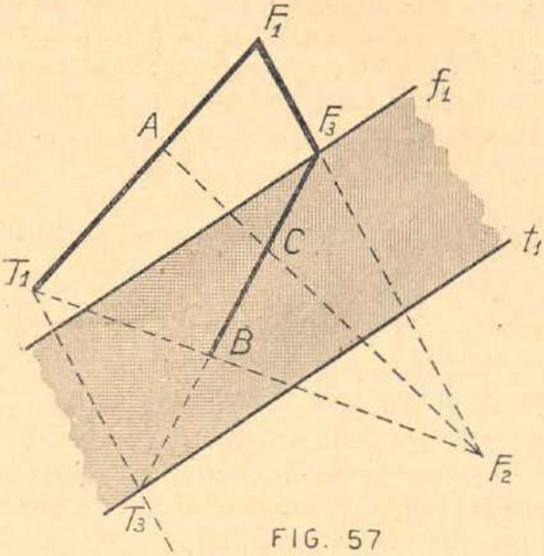

FIG. 57

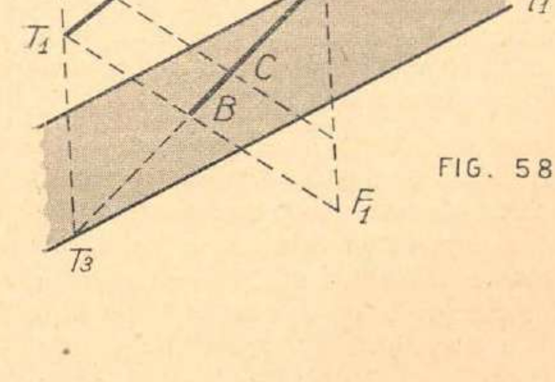

FIG. 58

procurando sua intersecção com o plano de sombra, a qual se representa em T_3F_3. Para delimitá-la basta representarmos o raio luminoso que passa por T_1 cuja sombra vem em B. A sombra em F_3 corresponde ao raio luminoso que passa por E. Obtemos pelo mesmo processo a sombra do ponto A, que provem do raio luminoso que passa por T_4. O segmento F_2F_3 é a sombra de T_1F_2 que cai sôbre o plano de fuga.

5) CONCLUSÃO PRÁTICA

Construção do baixo-relêvo por uma perspectiva linear

Em virtude de serem idênticas a representação do baixo-relêvo e da perspectiva linear, desde que sejam satisfeitas as restrições impostas, a realização do baixo-relêvo pode ser dividida em duas partes. Na primeira, escolhemos a distância principal p e estabelecemos a perspectiva linear do motivo; na segunda, escolhemos a espessura do baixo-relêvo (desde *zero* até $p + x$) e passamos da sua representação à construção do baixo-relêvo. Nesta tese não quizemos tratar deliberadamente do problema da escolha da distância principal e da espessura do baixo-relêvo; assunto, aliás, que muito tem sido estudado pelos autores.

Se a perspectiva linear fôr feita pelo artista, tem êle conhecimento completo da situação dos volumes que entram na composição, sendo por isso, fácil encontrar traços e linhas de fuga dos planos e também traços e pontos de fuga das retas, o que permite a construção do baixo-relêvo como anteriormente temos dado exemplo para cada problema.

Entretanto, se a perspectiva linear não foi feita pelo artista ou se tratar de perspectiva de observação, então poderá faltar-lhe elementos para a construção do baixo-relêvo. Um exemplo elucidar-nos-á fàcilmente a posição do problema. Porém, devemos primeiramente acentuar que da precisão da perspectiva de observação depende a justeza da localização dos planos do baixo-relêvo.

A fig. 59 é a reprodução de uma tela do pintor Nicolau Del Negro, em que aparece no primeiro plano o antigo Pavilhão de Caça e Pesca e no fundo o Mercado Municipal. Como temos feito sempre, supomos a fig. 59 desenhada sôbre o plano de fuga. O traço t_1 do plano horizontal, que representa a superfície do mar, é dado pelo bordo inferior do quadro. Depois de traçada a linha do horizonte h pela procura dos pontos de fuga das retas horizontais, escolhemos a espessura e do baixo-relêvo (desde *zero* até $p+x$). A perspectiva-relêvo do plano da superfície dágua passa pelo seu traço t_1 posto sôbre o quadro e pela sua linha de fuga situada sôbre o plano de fuga. As linhas de intersecção, visíveis, dos planos verticais do pavilhão, estacas e cais com a superfície dágua permitem construir-lhes imediatamente a perspectiva-relêvo, elevando perpendiculares dos pontos de intersecção até encontrar a perspectiva-relêvo do plano da superfície dágua.

Para mostrar a situação dos principais planos verticais em relação ao quadro e ao plano de fuga apresentamos na parte inferior da estampa uma secção feita por plano horizontal perpendicular ao quadro, deitada sôbre o plano de fuga; se supuzermos os planos verticais prolongados indefinidamente para cima e para baixo, a secção pode ser escolhida indiferentemente em qualquer altura do baixo-relêvo.

Na estampa são visíveis na superfície dágua os alinhamentos das estacas, do pavilhão e do cais; no entanto não são accessíveis seus traços e pontos de fuga. Por isso, seccionamos o plano horizontal da superfície dágua pelos planos verticais cujos traços passam pelas verticais dos pontos T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, e T_{10} e cujas linhas de fuga passam tôdas pela vertical do ponto P. Na secção êsses planos são representados pelas suas respectivas intersecções T_1F_1, T_2F_1, T_3F_1, T_4F_1, T_5F_1, T_6F_1, T_7F_1 e $T_{10}F_1$. Os pontos da secção estão situados sôbre as verticais dos pontos de igual nome da estampa. O ponto F_1 está na vertical de P. As linhas de intersecção dos planos verticais com o plano da superfície dágua cortam os referidos alinhamentos em pontos que se transportam para a secção do baixo-relêvo por meio de verticais. Para cada reta usamos, no mínimo, dois pontos em seu traçado. Apresentamos também o alinhamento da tôrre;.

o das cumieiras foi obtido por meio do eixo de simetria do pavilhão.

O edifício posterior tem sua linha de intersecção no plano horizontal dágua desconhecida. A falta de dados sôbre a sua situação, êle poderá ainda ser construido no baixo-relêvo, se lhe conhecermos, o que aliás não é difícil, a dimensão real de uma janela, da altura de um andar ou outro qualquer detalhe. Assim, a verdadeira altura da janela está determinada em T_{12} e T_{13} por duas paralelas sôbre o traço de um plano vertical, na mesma escala que fornece sôbre o traço do plano vertical que passa por T_7, a verdadeira altura da barra do pavilhão T_8T_9. Os planos verticais têm por linha de fuga a vertical do ponto P (não traçada). Marcando ainda sôbre a vertical de T_{12} as alturas dos dois telhados em T_{14} e T_{15}, as horizontais que passam por êsses traços indicam respectivamente os pontos por onde elas passam nos telhados. Na perspectiva linear as verticais dêsses pontos dão sôbre a reta $T_{11}P$ um ponto do alinhamento do edifício, um ponto do plano vertical que limita o telhado inferior e outro do plano vertical que passa pela cumieira do telhado superior. Repetindo a operação em outro lugar do edifício (o que não está desenhado para não sobrecarregar a perspectiva linear) obtemos mais um ponto de cada um dêsses planos verticais, o que nos permite traçar as suas intersecções com o plano horizontal dágua (não desenhadas).

Na secção do baixo-relêvo, transportam-se por meio de verticais sôbre $T_{11}F_1$ os pontos pertencentes às intersecções, com o plano da superfície dágua, dos planos verticais que passam pela fachada, pela cumieira do telhado superior e que limita a linha mais alta do telhado inferior.

Agora a construção total do baixo-relêvo é possível; aliás, é compreensível que um artista, ao procurar realizar um baixo-relêvo, esteja senhor do assunto que pretenda desenvolver, isto é, conheça-lhe os detalhes.

Resumo — Para finalizar concluimos que ao fazer a perspectiva linear o artista disporá dos conhecimentos necessários a construção do baixo-relêvo. Por outro lado, se pretendemos

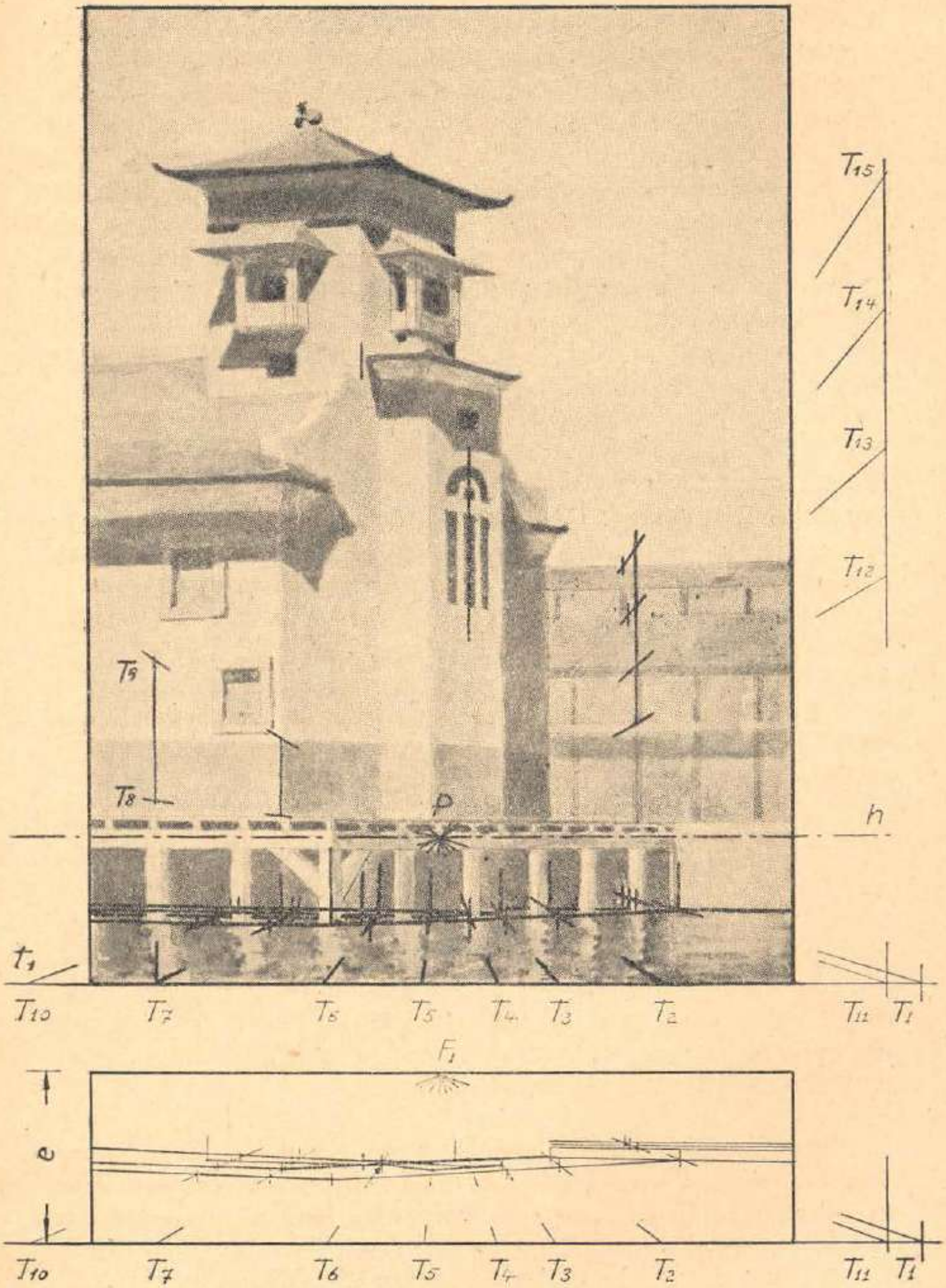

FIG. 59

realizar um baixo-relêvo por meio de perspectiva de observação ou aproveitar uma perspectiva linear existente, seremos obrigados a conhecer o assunto (dimensões reais, situação dos volumes, etc.) para poder suprir certas omissões que ocorrem no desenho.

Rio de Janeiro, outubro de 1948.

CARLOS DEL NEGRO.

CONVENÇÕES

P	— o ponto principal;
p	— a distância principal;
O	— o ponto de vista no espaço e quando quizermos especificá-lo:
O_o	— o ponto de vista da perspectiva linear situado à distância p do quadro (espessura zero);
O_e	— ponto de vista do baixo-relêvo cuja distância principal é p com espessura igual a e;
O_p	— ponto de vista do baixo-relêvo cuja distância principal e espessura são iguais a p.
e	— espessura do baixo-relêvo;
T_1, T_2, T_3, etc.	— traços de retas;
F_1, F_2, F_3, etc.	— pontos de fuga;
$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, Γ, etc.	— pontos objetivos;
A, B, C, etc.	— pontos correspondentes aos pontos objetivos;
$(\mathbf{A})$, (Γ), (O_e), etc.	— pontos rebatidos sôbre o plano de fuga;
D_1, D_2, D_3, D_4	— pontos de distância;
Reta AB, CD	— reta que passa pelos pontos A e B; reta CD a que passa pelos pontos C e D e assim por diante;
Plano ABC, BCD	— o plano que passa pelos pontos A, B e C; plano BCD o que passa pelos pontos B, C e D e assim por diante;

Triângulo ABC, BCE	— o triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C; triângulo BCE é aquele cujos vértices são os pontos B, C e E e assim por diante;
Reta TF, T_1F_1	— a reta representada pelo seu traço T e pelo seu ponto de fuga F; reta T_1F_1, pelo seu traço T_1 e pelo seu ponto de fuga F_1 e assim por diante;
h	— a linha do horizonte;
α, β, γ, etc.	— retas objetivas;
a, b, c, etc.	— retas correspondentes às retas objetivas;
f, f_1, f_2, etc.	— linhas de fuga;
t, t_1, t_2, etc.	— traços de planos;
Plano tf, t_1f_1	— o plano representado pelo seu traço t e pela sua linha de fuga f; plano t_1f_1, pelo seu traço t_1 e pela sua linha de fuga f_1 e assim por diante;
Plano Of, Of_1	— plano que passa pelo ponto de vista e pela linha de fuga f (plano projetante); o plano Of_1, o que passa pelo ponto de vista e pela linha de fuga f_1, e assim por diante.

BIBLIOGRAFIA

ASCHIERI, F. — Geometria projettiva del piano e della stella.

ASCHIERI, F. — Geometria projettiva dello spazio.

BRICARD, R. — Petit traité de perspective.

ENRIQUES, F. — Lezioni di geometria projettiva.

ENRIQUES, F. — Lezioni di geometria descrittiva.

LORIA, G. — Il passato e il presente delle principali teorie geometriche.

LORIA, G. — Metodi di geometria descrittiva.

NOELLI, A. — La prospettiva per gli scultori.

PASCALI, J. — Geometria projetiva.

Jornal do Commercio — Rodrigues & Cia.
Av. Rio Branco, 117 — Rio de Janeiro — 1949