ROBERTO MUNIZ GREGORY

ENGENHEIRO CIVIL E GEÓGRAFO

Docente livre da E. N. E. da Universidade do Brasil

Doutor em Ciências Físicas e Matemáticas

Professor Catedrático da Universidade do Brasil

Professor Assistente da Universidade do Brasil

REPRESENTAÇÃO DA LINHA RETA

Il est avantageux à l'éducation nationale de répandre les connaissances qu'on peut tourner au profit des arts.

Monge. Léçons de l'École Normale

Monografia apresentada à Congregação da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil para provimento do cargo de Professor Catedrático da Cadeira de Geometria Descritiva

ROBERTO MUNIZ GREGORY

ENGENHEIRO CIVIL E GEÓGRAFO

Docente livre da E. N. E. da Universidade do Brasil

Doutor em Ciências Físicas e Matemáticas

Professor Catedrático da Universidade do Brasil

Professor Assistente da Universidade do Brasil

À Biblioteca Central da Universidade do Brasil, o autor.
Rio, 20/5/3

REPRESENTAÇÃO DA LINHA RETA

Il est avantageux à l'éducation nationale de répandre les connaissances qu'on peut tourner au profit des arts.

Monge. Léçons de l'École Normale

Monografia apresentada à Congregação da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil para provimento do cargo de Professor Catedrático da Cadeira de Geometria Descritiva

1953-98

4186/30-05-2016

Ao querido netinho

FERNANDO CARLOS CEYLÃO FILHO

com ternura e afetuoso carinho

DEFININDO

Amoroso Costa, em "As Idéias Fundamentais' da Matemática", à página 188 e seguintes, tratando dos grupos de transformação, após definir a *transformação projetiva*, mostra como, dessa transformação mais geral, se derivam as *transformações afins* e as *transformações de semelhança* ou *mudança de escala*, que também chamou de *grupo de dilatações*.

A expressão analítica da *transformação* de *um ponto* é o que se chama em análise, a *introdução de novas variáveis*, sujeita a uma interpretação ativa ou passiva: passivamente, uma mudança no sistema de coordenadas; ativamente, a cada ponto (x-y-z) corresponde ponto (x'-y'-z'), havendo de fato, uma transformação dos pontos do espaço.

Na transformação afim, (x'-y'-z') são funções lineares inteiras de (x-y-z), de modo que a pontos impróprios correspondem pontos impróprios, o que contrasta com a transformação projetiva, mais geral, em que (x'-y'-z') são funções lineares fracionárias, motivo por que certos pontos próprios, podem ser transportados ao infinito.

Na transformação afim, a um feixe de paralelas corresponde um feixe de paralelas; duas retas são semelhantes, isto é, segmentos correspondentes dessas retas se subordinam à mesma razão; e, conclusão de grande relevância na representação de figuras do espaço: se dois planos estão em relação afim, um dêles pode ser considerado como a projeção paralela do outro, em virtude do seguinte teorema geral: "qualquer relação afim entre dois planos pode ser efetuada de infinitos modos, pela combinação de uma transformação de semelhança com uma projeção paralela".

Passa-se fàcilmente agora à representação de figura qualquer do espaço, sôbre um plano, por uma projeção paralela, se admitirmos uma ampliação ou uma redução da representação (alteração) por intermédio de uma transformação de semelhança (mudança de escala), recebendo o processo assim descrito o nome de AXONOMETRIA.

As transformações projetivas são mais gerais, pois são as transformações afins caso particular daquelas; e, por exemplo, o paralelismo de retas ou de planos não mais subsiste como nas transformações afins; pelo contrário, surgem planos de fuga e pontos de fuga, representando a porção do espaço situada no infinito ou, melhor, os pontos impróprios.

Ainda mais, conta-se aqui com valioso *invariante númerico* — a razão anarmônica, chamada *coordenada projetiva,* mais geral que a *coordenada baricêntrica* e que a *coordenada abcissa,* casos particulares daquela, — cujo valor se mantem através das transformações projetivas.

Uma aplicação fecunda das transformações projetivas consiste em representar figura qualquer do espaço, sôbre um plano, utilizando polo à distância finita, problema que importa na generalização da axonometria; pois, nas transformações afins ela resulta da consideração de projeções paralelas e, aqui, como era de esperar, por serem as transformações projetivas mais gerais, da aplicação das projeções centrais, de que as projeções paralelas são caso particular.

Na tradução da 3.ª edição alemã da Obra de Felix Klein, por Hedrick e Noble, da Universidade da Califórnia, intitulada "ELEMENTARY MATHEMATICS' (from an advanced standpoint) e editada por "THE MACMILLAN COMPANY", em 1939 à página 83, lê-se "*Pohlke himself did not define axonometry analytically, but geometrically as a representation of space by means of parallel rays* (together, where necessary, with a similarity transformation)".

Como a figuras do espaço, por meio de transformações projetivas e afins, podem-se fazer corresponder figuras planas, que sejam suas representações, é evidente que cada construção do espaço será traduzida por uma construção plana, isto é: *à solução geométrica corresponderá uma solução plana.* Essa solução plana realizada na representação da figura, chama-se *solução descritiva* e se limita a transportar para o plano o que foi realizado no espaço: *a todo o problema geométrico corresponde um problema descritivo.*

Essa solução descritiva poderá ser *gráfica* ou *analítica.*

Aos distintos métodos de representação gráfica, obtida por intermédio das transformações citadas, grupamos sob a denominação geral de *Axonometria.*

Não podemos nos furtar à transcrição do rodapé (24) da página 319, da 3.ª edição do 1.º volume da famosa "Geometria Descritiva" de Álvaro Rodrigues:

"Theodore Olivier numa das suas memórias de Geometria Descritiva estabeleceu a distinção entre "solução gráfica" e "solução geométrica" de um problema; entre "figura geométrica" e "figura gráfica". Êle chamou de "geométrica" a tudo que *é teòricamente* dado ou obtido em Geometria mediante considerações racionais: e, "gráfica", às figuras ou às operações resultantes dessas considerações realizadas em desenho por meio de instrumentos.

O grande professor Enrico Bompiani, na introdução da sua "Geometria Descritiva", diz:

"Con Monge la Geometria Descrittiva, entra, per rimanervi in modo essenziale, nella formazioni degli ingegneri e degli architetti, non c'é officina o cantiere ove la "lettura" di un disegno, cioé la conoscenza del metodi della Geometria Descrittiva, non s'imponga".

Modernamente, curso qualquer de Geometria Descritiva, para engenheiros ou arquitetos, alunos de belas artes ou de filosofia, químicos ou agrônomos, militares de terra, ar ou mar, etc., não poderá e não deverá deixar de incluir em seu programa, como imposição mínima indispensável,

- AXONOMETRIA
  ANISÓMETRIA
  MONO-DIMETRIA
  ISOMETRIA
  - A–polo próprio (P)
    AXONOMETRIA CÔNICA ou CENTRAL
    - (P) genérico
      - a—1) projeção cônica geral de FIEDLER COUSINERY
      - b- dois dos eixos objetivos com traços IMPROPRIOS
        - 2) dos x e dos z
          - axonometria frontal: PERSPECTIVA LINEAR
        - 3) dos x e dos y
          - axonometria horizontal: PROJEÇOES COTADAS
        - 4) dos y e dos z
          - axonometria de perfil: SEM INTERESSE PRATICO
    - (P) no suporte da dist. principal pertencente à origem objetiva
      - c–5) caso particular de ESTANISLAO VECCHI
  - B–polo impróprio ($P_{/\infty}$)
    AXONOMETRIA CILINDRICA ou PARALELA
    - (P_∞) genérico
      - d–6) eixo dos z com traço IMPRÓPRIO: AXONOMETRIA ISOMÉTRICA A 45°
      - e–dois dos eixos objetivos com traços IMPRÓPRIOS
        - 7) dos x e dos z
          - axonometria frontal: PERSPECTIVA CAVALEIRA
        - 8) dos x e dos y
          - axonometria horizontal: CAVALEIRA MILITAR; SIST. DENISE-GASTÃO GOMES
        - 9) dos y e dos z
          - axonometria de perfil: SEM INTERESSE PRÁTICO
    - (P_∞) ponto impróprio ortogonal do quadro
      - f–10) eixos objetivos com traços PROPRIOS: AXONOMETRIA ORTOGONAL
      - g–dois dos eixos objetivos com traços IMPRÓPRIOS
        - 11) dos x e dos z: VISTA ORTOGRAFICA
        - 12) dos x e dos y VISTA ICNOGRÁFICA
        - 13) dos y e dos z: VISTA DE PERFIL
          - separadamente: PROBLEMA INDETERMINADO
          - 14) conjuntamente: SIST. BI-PROJETIVO ORTOGONAL ou de "GASPAR MONGE"

NOTA : A mesma classificação poderá ser feita considerando o triângulo axonométrico

o estudo dos elementos fundamentais — *ponto, reta* e *plano* — nos diferentes sistemas usuais de representação que integram a Axonometria.

Na 3.ª edição do 1.º volume da erudita obra de Álvaro Rodrigues, já citada, no rodapé (21) da página 308, colhemos o seguinte período:

"Fiedler foi o consagrado renovador da Geometria Descritiva no final do século passado e no começo do atual, sustentando que essa matéria escolar não deve restringir-se aos fundamentos geniais lançados por Gaspar Monge e aperfeiçoados por seus discipulos, porém, abranger todos os métodos de representação: "necessários e imprescindiveis a uma educação técnica perfeita".

Sua idéia foi desde logo aceita e praticada na Alemanha, na Suiça, na Suécia e na Aústria e posteriormente, na Bélgica e na Itália".

Não é mais possível retardar sua adoção no Brasil...

Em trabalho modesto apresentado à Congregação da Escola Nacional de Engenharia da Universidade do Brasil, em 1948, para obtenção do título de livre docente, da cadeira de Geometria Descritiva, daquela Escola, sob a denominação "Ensaios de Axonometria", provamos, por via analítica, serem os usuais sistemas de representação, em Geometria Descritiva, casos particulares da Axonometria.

Com base exclusiva no exposto, apresenta-se o quadro da página anterior, de acôrdo com o qual se procede ao estudo da "*Representação da linha reta*", motivo da monografia que está sendo submetida à douta apreciação da Colenda Congregação da Escola Nacional de Belas Artes da Universidade do Brasil.

NOTAÇÕES EMPREGADAS NA PRESENTE MONOGRAFIA

Bàsicamente adotou-se a *notação cremoneana,* "seguindo a orientação científica do fundador das figuras recíprocas, o notável geômetra italiano Luigi Cremona": nesta escola, uma maïúscula romana representa sempre um ponto; uma minúscula, uma réta e minúsculas gregas, planos. Sendo α_1 um plano, todos os pontos e retas de índice 1 pertencem ao plano, isto é, A_1 , B_1 .... e a_1, b_1 ..... são pontos e retas do plano α_1.

O professor Luis Caetano de Oliveira aconselha escrever α_1 (a_1) para representar uma reta do plano α_1, o que se simplificou adotando a notação $a\ \alpha$, para exprimir que a reta a pertence ao plano α e, para uma série de retas a_1, a_2... se escreveria $a_1\alpha$, $a_2\alpha$,.....

Na notação adotada, elementos paralelos são expressos pela mesma letra, isto é, a_1, a_2 ... são retas paralelas que, podem pertencer a um mesmo plano α_1 ; isto é,

$$a_1\alpha_1 \qquad a_2\alpha_1 \qquad a_3\alpha_1$$

são retas complanares e paralelas.

Si escrevermos:

$$a_1\alpha_1\ ; \qquad b_1\alpha_1\ ; \qquad b_2\alpha_1\ ;$$

interpreta-se que as retas b_1, b_2, são paralelas e que a_1 é transversal a b_1 e b_2.

Formaremos, então, o seguinte quadro de notações:

1 — PONTOS CORRENTES

Pontos próprios objetivos	(A) ,	(B) ,	(C) , ...
Pontos impróprios	A_∞ ,	B_∞ ,	C_∞ , ...
Projeções horizontais — 1as. proj.	A ,	B ,	C , ...
Projeções verticais — 2as. proj.	A' ,	B' ,	C' , ...
Projeções de perfil — 3as. proj.	A" ,	B" ,	C" , ...
Axonometrias verdadeiras ou diretas	A_o ,	B_o ,	C_o ....

2 — RETAS CORRENTES

Retas próprias objetivas	(a) ,	(b) ,	(c) , ...
Retas impróprias	a_∞ ,	b_∞ ,	c_∞ , ...
Projeções horizontais — 1as. proj.	a ,	b ,	c ,
Projeções verticais — 2as. proj.	a' ,	b' ,	c' , ...
Projeções de perfil — 3as. proj.	a" ,	b" ,	c" , ...
Axonometrias verdadeiras ou diretas	a_o ,	b_o ,	c_o , ...

3 — PLANOS CORRENTES

Plano horizontal — 1°. plano	π
Planos horizontais	$\pi_1, \pi_2, \ldots$
Plano vertical — 2.° plano	π'
Planos de frente	$\pi'_1\ \pi'_2, \ldots$
Plano de perfil — 3.° plano	π''
Planos de perfil	$\pi_1'', \pi_2'' \ldots$
Plano do quadro	π_0
Planos paralelos ao quadro	$\pi_{01}, \pi_{02}, \ldots$
Planos próprios objetivos	$\alpha, \beta, \ldots$
Planos próprios paralelos	$\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ \beta_1, \beta_2 \ldots$
Plano impróprio	π_∞
Primeiro bissetor	β_{13}
Segundo bissetor	β_{24}

4 — PONTOS ESPECIAIS

Primeiro rebatimento:

Sôbre π	$(A_1)_\pi$,	$(B_1)_\pi$	...
Sôbre π'	$(A_1)_{\pi'}$,	$(B_1)_{\pi'}$	...
Sôbre π''	$(A_1)_{\pi''}$,	$(B_1)_{\pi''}$	...
Sôbre plano genérico α	$(A_1)_\alpha$,	$(B_1)_\alpha$	...
Sôbre π_o	$(A_1)_0$,	$(B_1)_0$	...

Segundo rebatimento: empregar índices 2 (dois

Terceiro rebatimento: empregar índices 3 (três)

etc.

Pontos de fuga: pertencentes sempre a π_o:

de retas objetivas	$F_o(a)$, $F_o(b)$ ...
das primeiras projeções	F_{oa} , F_{ob} ... 1b
das segundas projeções	F_{oa}' , F_{ob}' ...
das terceiras projeções	F_{oa}'' , F_{ob}'' ...
das principais, perpendiculares a π_o:	$\underline{V_o}\vert \equiv F_o(p)$
das perpediculares a π .	
das perpendiculares a π'	
das perpendiculares a π'' :	
intersecções das verticais principais respectivas, com as linhas do horizonte correspondentes	$F_\pi(p) \equiv \underline{V}\vert$ $F_{\pi'}(p) \equiv \underline{V'}\vert$ $F_{\pi''}(p) \equiv \underline{V''}\vert$
Ponto de vista objetivo próprio	(V)
Ponto de vista impróprio	V_∞
Origem dos eixos coordenados objetivos	(O)

TRAÇOS DE RETAS PRÓPRIAS

Em plano genérico α

$$\begin{cases} \alpha(a) \equiv (\alpha a, \alpha a') \\ \left(T_{(a)}\right)_\alpha \equiv \left[T_{(a)\alpha} \quad T'_{(a)\alpha}\right] \end{cases}$$

No plano horizontal π

$$\begin{cases} \pi(a) \equiv (\pi a, \pi a') \\ \left(T_{(a)}\right)_\pi \equiv \left[T_{(a)\pi}, \quad T'_{(a)\pi}\right] \end{cases}$$

No plano vertical π'

$$\begin{cases} \pi'(a) \equiv (\pi' a, \pi' a') \\ \left(T_{(a)}\right)_{\pi'} \equiv \left[T_{(a)\pi'}, \quad T'_{(a)\pi'}\right] \end{cases}$$

No plano de perfil π''

$$\begin{cases} \pi''(a) \equiv (\pi'' a, \pi'' a') \\ \left(T_{(a)}\right)_{\pi''} \equiv \left[T_{(a)\pi''}, \quad T'_{(a)\pi''}\right] \end{cases}$$

No primeiro bissetor β_{13}

$$\begin{cases} \beta_{13}(a) \equiv \left(\beta_{13} a, \beta_{13} a'\right) \\ \left(T_{(a)}\right)_{\beta_{13}} \equiv \left[T_{(a)\beta_{13}}, \quad T'_{(a)\beta_{13}}\right] \end{cases}$$

No segundo bissetor β_{24}

$$\begin{cases} \beta_{24}(a) \equiv \left(\beta_{24} a, \beta_{24} a'\right) \\ \left(T_{(a)}\right)_{\beta_{24}} \equiv \left[T_{(a)\beta_{24}}, \quad T'_{(a)\beta_{24}}\right] \end{cases}$$

E' aconselhável a primeira forma de notação: até a figura 95, método mongeano, empregamos a segunda forma, como experiência.

No quadro π_o $\quad \pi_o(a)$, $\pi_o(b)$ ...

Traços dos eixos objetivos em π_o ou vértices do triângulo fundamental

$\pi_o(x)$, $\pi_o(y)$, $\pi_o(z)$

Vértices do triângulo dos pontos de fuga Fx_o , Fy_o , Fz_o

Vértices do triângulo das linhas neutras: Jx_o , Jy_o , Jz_o

Projeções axonométricas de traços de reta genérica: πa_o , $\pi' a_o$, $\pi'' a_o$

5 — RETAS ESPECIAIS

Retas principais (perpendiculares ao quadro π_o) (p), (p_1), (p_2) ...

Primeiro rebatimento

Sôbre π	$(a_1)_\pi$, $(b_1)_\pi$ ...
Sôbre π'	$(a_1)_{\pi'}$, $(b_1)_{\pi'}$ ...
Sôbre π''	$(a_1)_{\pi''}$, $(b_1)_{\pi''}$ ...
Sôbre π_o	$(a_1)_o$, $(b_1)_o$ ...
Sôbre plano genérico α	$(a_1)\,\alpha$, $(b_1)\,\alpha$ ...

Segundo rebatimento — empregar índices 2 (dois)

Terceiro rebatimento — empregar índices 3 (três)
etc.

Raios de fuga de retas objetvas: $(f)_{(a)}$, $(f)_{(b)}$ ...

das primeiras projeções	$f_a \equiv (V_1)_o F_a$; $f_b \equiv (V_1)_o F_b$. :
das segundas projeções	$f_{a'} \equiv (V_2)_o F_{a'}$; $f_{b'} \equiv (V_2)_o F_{b'}$
das terceiras projeções	$f_{a''} \equiv (V_3)_o F_{a''}$; $f_{b''} \equiv (V_3)_o F_{b''}$

Eixo objetivo dos x	$(O)\,X_\infty$
Eixo objetivo dos y	$(O)\,Y_\infty$
Eixo objetivo dos z	$(O)\,Z_\infty$

Traços próprios dos planos coordenados objetivos em π_o

do plano dos (xy) .. .. $\pi\,\pi_o \equiv t_\pi$

do plano dos (xz) .. .. $\pi'\,\pi_o \equiv t_{\pi'}$

do plano dos (yz) .. .. $\pi''\,\pi_o \equiv t_{\pi''}$

Traço de plano genérico α , em π	t_α
Traço de plano genérico α , em π'	t'_α
Traço de plano genérico α , em π''	t''_α
Traço de plano genérico α , em π_o	$t_{o\,\alpha}$

Interseção de dois planos genéricos $\begin{cases} \alpha\beta \equiv a\,;\ \gamma\delta \equiv c, \text{ etc.} \\ \alpha_1\ \alpha_2 \equiv \alpha_\infty \end{cases}$

Coordenadas objetivas planas dos traços de reta genérica:

relativas ao plano dos (xy)	$(x)_\pi$ $(y)_\pi$
relativas ao plano dos (xz)	$(x)_{\pi'}$, $(z)_{\pi'}$
relativas ao plano dos (yz)	$(y)_{\pi''}$, $(z)_{\pi''}$

Extremos de coordenadas objetivas planas:

sôbre o eixo dos (x)	$(X)_\pi$, $(X)_{\pi'}$
sôbre o eixo dos (y)	$(Y)_\pi$, $(Y)_{\pi''}$
sôbre o eixo dos (z)	$(Z)_{\pi'}$, $(Z)_{\pi''}$

Traços de fuga: sempre pertencentes a π_o

de planos genéricos α	f_α , f_β
de planos paralelos a π	f_π
de planos paralelos a π'	$f_{\pi'}$
de planos paralelos a π''	$f_{\pi''}$
Si $\pi_o \equiv \pi'$	$f_{\pi'} \equiv f_\infty$

6 — PLANOS ESPECIAIS

1.° Horizontal principal	π_1 (v)
2.° Horizontal principal	π'_1 (v)
3.° Horizontal principal	π''_1 (v)
Plano neutro (paralelo a π_o, por (V):	π_{o1} (v)
Si $\pi_o \equiv \pi'$	π'_1 (v)

Planos principais: são planos pertencentes a (V) e perpendiculares às três linhas de terra respectivamente: suas intersecções com π_o são as verticais principais do quadro.

Plano de fuga de plano genérico α α_1(V)

Em virtude das notações anteriores, teremos:

7 — PONTOS — Ponto principal $F_o(p) \equiv \underline{V_o}|$

Pontos neutros: são as interseções das verticais principais com as linhas neutras.

Rebatimentos do ponto de vista:

sôbre o quadro π_o	$(V_1)_o$, $(V_2)_o \ldots$
Origem dos eixos axonométricos	O_o
Extremos de coordenadas axonométricas	
sôbre o eixo dos x_o	$X_{o\pi}$, $X_{o\pi'}$
sobre o eixo dos y_o	$Y_{o\pi}$, $Y_{o\pi''}$
sôbre o eixo dos z_o	$Z_{o\pi'}$, $X_{o\pi''}$
Extremos de coordenadas axonométricas de ponto genérico (M)	X'_M Y'_M Z'_M

8 — RETAS

Primeira linha de terra	$\pi_0\ \pi$
Segunda linha de terra	$\pi_0\ \pi'$
Terceira linha de terra	$\pi_0\ \pi''$
Si $\pi_0 \equiv \pi'$:	
Primeira linha de terra	$\pi\ \pi'$
Segunda linha de terra	$\pi'\ \pi' \equiv t'_\infty$
Terceira linha de terra	$\pi'\ \pi''$
Primeira linha do horizonte	$\pi_0\ \pi_{1(v)} \equiv f_\pi$
Segunda linha do horizonte	$\pi_0\ \pi'_{(v)_1} \equiv f_{\pi'}$
Terceira linha do horizonte	$\pi_0\ \pi_1''_{(v)} \equiv f_{\pi''}$

Si $\pi_0 \equiv \pi'$, teremos para linhas do horizonte: f_π, f_∞, $f_{\pi''}$

Primeira linha neutra	$(\pi_0)_{1\,(v)}\,\pi \equiv (j)_\pi$
Segunda linha neutra	$(\pi_0)_{1\,(v)}\,\pi' \equiv (j)_{\pi'}$
Terceira linha neutra	$(\pi_0)_{1\,(v)}\,\pi'' \equiv (j)_{\pi''}$
Si $\pi^0 \equiv \pi'$:	
Primeira linha neutra	$\pi'_{1\,(v)}\,\pi \equiv (j)_\pi$
Segunda linha neutra	$\pi'_{1\,(v)}\,\pi' \equiv (j)_\infty$
Terceira linha neutra	$\pi'_{1\,(v)}\,\pi'' \equiv (j)_{\pi''}$
Rebatimentos das linhas neutras sôbre π_0	$j_0\pi$, $j_0\pi'$, $j_0\pi''$
e, no caso particular $\pi_0 \equiv \pi'$	$j_0\pi\ j_\infty\ j_0\pi''$
Distância principal	$(V)\ \underline{V_0}\rfloor$

Verticais principais do quadro: são as três alturas do triângulo dos pontos de fuga: o triângulo órtico desse triângulo, define suas posições. Pertencem à projeção ortogonal de (V) sôbre π_0 isto é, a V_0.

Eixo axonométrico dos x_0	$O_0\ X_{0\infty}$
Eixo axonométrico dos y_0	$O_0\ X_{0\infty}$
Eixo axonométrico dos z_0	$O_0\ Z_{0\infty}$

Unidades axonométricas cilíndricas:

relativa ao eixo dos x_0	u_{x0}
relativa ao eixo dos y_0	u_{y0}
relativa ao eixo dos z_0	u_{z0}

Coeficientes de alteração

$$\frac{u_{x0}}{(u)} \qquad \frac{u_{y0}}{(u)} \qquad \frac{u_{z0}}{(u)}$$

Quando, em mesma épura, figurarem projeções, de sistemas diferentes, de mesmo ponto, assim faremos a distinção

Projeção ortogonal	$\underline{A}\rfloor$, $\underline{B'}\rfloor$, $\underline{C''}\rfloor$
Projeção oblíqua	$A/$, $B'/$, $C''/$
Projeção central	A_*, B_*', C_*''

9 — ÂNGULOS — O ângulo de duas retas objetivas (r) e (s) será designado

$$\widehat{(r)\ ,\ (s)}\ ;$$

o diedro de dois planos, α e β

$$\widehat{\alpha,\ \beta}$$

Inclinação do eixo objetivo dos (x), sôbre

a normal ao quadro	$(O)\ \widehat{O_o\ ,\ (O)\ X_\infty}$
Inclinação dos eixos dos y,	$(O)\ \widehat{O_o\ ,\ (O)\ Y_\infty}$
Inclinação do eixo dos z,	$(O)\ \widehat{O_o\ ;\ (O)\ Z_\infty}$

Ângulos dos eixos axonométricos:

do eixo dos y_o com o dos z_o	$\widehat{Y_o\ ,Z_o}$
do eixo dos x_o com o dos z_o	$\widehat{X_o\ Z_o}$
do eixo dos y_o com o dos x_o	$\widehat{Y_o\ X_o}$

$$\widehat{Y_o,\ Z_o} + \widehat{X_o,\ Z_o} + \widehat{Y_o\ X_o} = 2\pi$$

Duas denominações que representem o mesmo elemento separam-se por ($\equiv$)

$$\alpha \equiv (A)\ (B)\ (C)$$

isto é, o plano α é definido pelo pontos (A), (B), (C);

ou $\alpha \equiv (a_1)\ \ (a_2)$

isto é, o plano α é definido pelas retas paralelas (a_1) e (a_2);

ou $\alpha \equiv (r)\ (s)$

em que o plano α é definido pelas retas incidentes (r) e (s)

Dois elementos distintos, de mesmo nome, separam-se por $\neq$, iso é

$$(u) \neq (v)$$

significa que a reta (u) é diferente da reta (v)

Dois elementos de nomes diferentes que se pertençam são anotados

$$(A) \in (a) \equiv (a)\ (A)$$

isto é, o ponto (A) pertence à reta (a) ou a reta (a) pertence ao ponto (A); ou, ainda

$$(A)\ \alpha \equiv (A) \in \alpha \text{ ou } \qquad (a) \in \alpha \equiv (a)\ \alpha$$

que se lêm: o ponto (A) pertence ao plano α e a reta (a) pertence ao plano α.

JUSTIFICANDO

Tomando por base a ementa relativa à *Cadeira de Geometria Descritiva, do Departamento de Ciência,* da Escola Nacional de Belas Artes, da Universidade do Brasil, citada no Capítulo VI — *Didática das Disciplinas* — de seu Regimento Interno, integrando as Matérias dos cursos de Pintura, Escultura, Gravura, Arte Decorativa e Professorado de Desenho, cuja primeira unidade é:

a) — *Noções da teoria das projeções.*
Representação do ponto, da reta e do plano.

entendemos que o estudo da "*teoria das projeções*" se refere a todos os sistemas que integram a *Axonometria,* desde que nenhum deles é particularmente enumerado; e, para assunto do trabalho a ser apresentado à Egrégia Congregação da Escola Nacional de Belas Artes, em obediência ao parágrafo *b* do artigo 3.º do Edital de concurso, para provimento do cargo de professor catedrático de Geometria Descritiva publicado às pags. 8007/08 do "Diário Oficial" de 23 de maio de 1951 e retificação publicada à pág. 8511 do "Diário Oficial de de 4 de junho de 1951, elegemos a — *Representação da Linha Reta* — estritamente dentro do critério acima citado, esperando haver correspondido ao pensamento de sua Douta Congregação. Não se compreenderia mesmo que, em Escola cuja finalidade é "*ministrar o ensino de gráu superior, técnico e estético das artes, que têm como fundamento o Desenho*", os diferentes sistemas de representação, utilizados e empregados correntemente em Geometria Descritiva, não integrassem os conhecimentos a serem ministrados aos alunos, mormente quanto aos elementos fundamentais: *ponto, reta e plano.*

Esta necessidade cresce de vulto em uma Escola de Belas Artes: basta observar o que se passa nos mais afamados centros mundiais de cultura.

O estudo que nos propomos realizar obedece à classificação da linha reta considerando seus traços nos planos de projeção, segundo o esquema, adiante apresentado, demonstrativo das três posições fundamentais que ela poderá ocupar, bem como os casos particulares decorrentes, cuja análise faremos nos principais sistemas de projeção.

Preliminarmente recordaremos ser *traço de reta qualquer,* em plano genérico, o ponto comum à reta e ao plano. Geralmente são empregados três planos de projeção — o *horizontal,* o *vertical* e o de *perfil,* que é

plano simultaneamente perpendicular aos dois primeiros, completando com êles um triedro trirretângulo, ao qual são referidas tôdas as figuras, antes de serem projetadas, nos diferentes sistemas.

Na representação da linha reta faremos sua classificação em relação a seus traços ordinários: *horizontal, vertical* e *de perfil,* pontos comuns à reta e aos planos π, π' e π'' : em alguns sistemas, estudo completo, e, em outros, apenas explicações necessárias à nítida compreensão dos alunos, guardando, porém, a ordem numérica de classificação do quadro sinótico.

Exercícios didáticamente escolhidos e em ordem crescente de dificuldade serão tarefa do professor, em aula: a prática de magistério nos dita esta salutar medida.

ALGUMAS DEFINIÇÕES E TEOREMAS IMPORTANTES

O plano definido, em projeção cônica, pelo polo de projeção e reta genérica, é plano *projetante da reta*; em projeção cilíndrica, êsse plano fica definido pelas projetantes de dois pontos quaisquer da reta.

No sistema mongeano, os planos projetantes de uma reta, sôbre π e π' , são perpendiculares a êsses planos e se denominam: *plano projetante horizontal* e *plano projetante vertical da reta.*

Um plano simultaneamente perpendicular a π e a π' chama-se *plano de perfil,* que também é perpendicular à intersecção $\pi\ \pi'$.

A intersecção de dois planos genéricos denomina-se *traço* de um plano sôbre o outro; a intersseção de π com π' é a primeira *linha de terra,* de π' com π'', a 2.ª e, de π com π'', a 3.ª; as intersecções de plano genérico α, com π e com π' isto é, t_α e t''_α chamam-se respectivamente *traço horizontal* e *traço vertical* do plano genérico; pode-se ainda considerar o terceiro traço, t''_α, obtido sôbre o plano de perfil π'' , e que será o *traço de perfil.* Os traços de um plano de perfil com os planos π e π' se confundem sôbre uma mesma perpendicular a $\pi\ \pi'$.

Figura qualquer pertencente a π ou a π' coincide com sua respectiva projeção, que representará a verdadeira grandeza da figura: a projeção de nome contrário será um segmento retilíneo, coincidente com $\pi\ \pi'$. O mesmo sucederá com figuras pertencentes a planos $\pi_1, \pi_2, \ldots\ \pi'_2, \pi'_2 \ldots$ paralelos respectivamente a π e a π' ; apenas, a projeção de nome contrário pertencerá a uma paralela a $\pi\ \pi'$, de mesma cota ou afastamento que o plano considerado: todos os pontos de plano paralelo a π têm a mesma cota e, dos paralelos a π' , o mesmo afastamento.

TEOREMA: A projeção de reta genérica sôbre plano genérico é uma reta: se o sistema fôr cônico, a exceção será para a reta pertencente ao polo de projeção; sendo cilíndrico, para a reta pertencente à direção das projetantes. Qualquer que seja o número dos planos de projeções, sôbre todos êles, nos dois casos, a projeção da reta será um ponto.

No sistema mongeano , bi-projetivo, em que há duas posições mongeanas diferentes para o observador, correspondendo as direções das projetantes aos pontos impróprios ortogonais dos planos de projeção, se a reta fôr perpendicular a um dêles, não será ao outro, por não poder ser uma reta simultaneamente perpendicular a dois planos genéricos que se cortem; então, uma de suas projeções será um ponto e, a outra, uma reta, de direção *forçosamente perpendicular a* $\pi\ \pi'$, por ser, seu plano projetante sôbre o outro plano de projeção, um plano de perfil, no sistema mongeano.

No caso mais geral do teorema citado, as projetantes dos diferentes pontos de uma reta constituem um plano — *plano projetante da reta*, cuja intersecção com o plano de projeção é a *projeção da reta*.

TEOREMA — Uma projeção apenas não é suficiente para determinar a reta do espaço: o problema é indeterminado.

Será necessário o conhecimento de mais uma projeção, ou em outro plano, ou sôbre o mesmo plano, do mesmo polo, ou de polo diferente, próprio ou impróprio; em qualquer caso, a reta objetiva ficará perfeitamente definida pela intersseção de dois planos projetantes.

No sistema mongeano, a exceção é para a réta cujas projeções são perpendiculares a $\pi\ \pi'$ e pertencentes ao mesmo suporte; esta reta pertencendo a plano de perfil,, suas projeções se confundirão por ser, este, coincidente com os planos projetantes da reta. Cumpre observar que, para tôdas as figuras pertencentes a plano de perfil, subsiste a mesma indeterminação: suas projeções serão segmentos retilíneos pertencentes aos traços do plano de perfil. E' necessário recorrer sempre a uma terceira projeção da figura.

CLASSIFICAÇÃO E TRAÇOS DA LINHA RETA

Sendo uma reta, a projeção geral de uma reta, em sua representação, poderemos utilizar apenas dois de seus pontos, que poderão ser particularmente dois de seus traços ordinários, de preferência, o horizontal e o vertical.

No quadro abaixo, damos a classificação da linha reta por seus dois traços acima referidos, em tôdas as posições que ela poderá ocupar em relação aos planos de projeção.

Posições da linha reta em relação aos planos de projeção

- A) — a reta tem os dois primeiros traços próprios
  - a) — distintos
    - I-1) reta genérica
    - II — reta de perfil
      - 2 — qualquer
      - 3 — perpendicular a $\beta_{1\,3}$
      - 4 — perpendicular a $\beta_{2\,4}$
    - III — reta paralela aos bissetores
      - 5 — paralela a $\beta_{1\,3}$
      - 6 — paralela a $\beta_{2\,4}$
  - b) — confundidos: passa por $\pi\,\pi'$
    - 7 — reta qualquer
    - 8 — reta pertencente a $\beta_{1\,3}$
    - 9 — reta pertencente a $\beta_{2\,4}$
    - 10 — reta perpendicular a $\pi\,\pi'$
- B) — a reta tem um traço próprio e outro impróprio: é paralela a π ou a π'.
  - c) — paralela a π; tem traço vertical próprio
    - IV — forma ângulo qualquer com π'
      - 11 —11 — reta horizontal ou de nível
    - V — é perpendicular a π'
      - 12 — reta de topo ou de ponta
    - VI — caso limite
      - 13 — reta pertencente a π.
  - d) — paralela a π'; tem traço horizontal próprio
    - VII — forma ângulo qualquer com π
      - 14 — reta frontal ou de frente
    - VIII —é perpendicular a π
      - 15 — reta vertical
    - IX — caso limite
      - 16 — reta pertencente a π'
- C) — a reta tem os dois primeiros traços impróprios; é paralela a π e a π' e, portanto, a $\pi\,\pi'$
  - 17 — não pertence a π nem a π'
  - 18 — pertence a $\beta_{1\,3}$ ou a $\beta_{2\,4}$
  - 19 — pertence a π ou a π'
  - 20 — pertence a $\pi\,\pi'$

As mesmas posições da linha reta, nos diferentes diedros, devem ser motivo de múltiplos exercícios, em aula, com os alunos, principalmente no terceiro diedro, consagrado como representação convencional adequada ao Desenho Técnico, que integra o Departamento de Ciência da Escola Nacional de Belas Artes.

CAPÍTULO I

TRAÇOS E TERCEIRA PROJEÇÃO DA RETA

Determinação dos traços de uma reta — Em épura, a determinação dos traços de uma reta é de importância máxima: não só permite localizar os diedros a que pertence e, consequentemente, a aplicação das regras de visibilidade, como também proceder à fácil leitura da épura.

Seja reta genérica (r):

a) *traço horizontal* — é o ponto da reta de *cota nula*: de projeção vertical pertencente a $\pi\pi'$ e, simultaneamente, à projeção vertical r': será $T'_{(r)\pi}$ intersecção de r' com $\pi\pi'$ e, por uma linha de chamada se obterá $T_{(r)\pi}$ sôbre r.

O traço horizontal será o ponto $[T_{(r)\pi}\ T'_{(r)\pi}]$.

b) *traço vertical* — raciocínio análogo conduzirá à determinação do ponto $[T_{(r)\pi'}, T'_{(r)\pi'}]$, de *afastamento nulo*, traço vertical da reta.

c) Sendo utilizado o plano de perfil π'', o terceiro traço ordinário $[T_{(r)\pi''}, T'_{(r)\pi''}]$ seria obtido pelas intersecções das projeções de (r), com os traços de π''. Verifica-se agora, fàcilmente, pertencer (r) aos diedros I, II e III, figura 1 e aos diedros II, I e IV, figura 2.

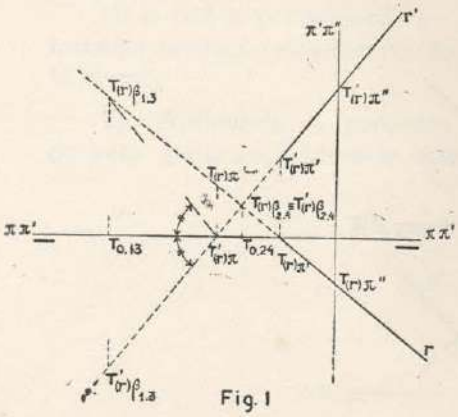


Fig. 1

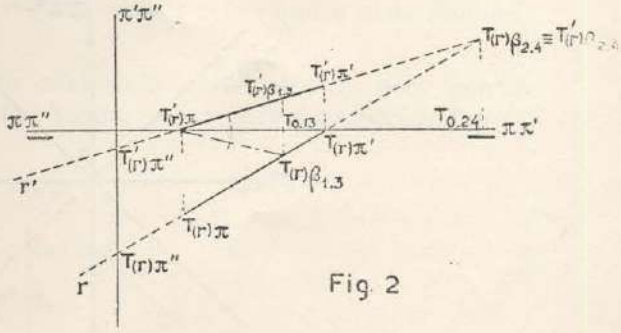


Fig. 2

Reta genérica pertence sempre a três diedros.

Geralmente, determinam-se também os traços principais:

d) *Traço no bissetor* β_{13} — é ponto da reta de projeções simétricas em relação a $\pi\pi'$: simples construção geométrica resolve o problema:

é o ponto $[T_{(r)}\,\beta_{13}\,,\ T'_{(r)}\,\beta_{13}]$ de cota igual ao afastamento, isto é, $[T_{013}\ T_{(r)}\,\beta_{13} = T_{013}\ T'_{(r)}\,\beta_{13}]$

e) *traço no bissetor* β_{24} — é ponto da reta de projeções coincidentes, portanto, o ponto comum às duas projeções $[T_{(r)}\ \beta_{24} \equiv T'_{(r)}\ \beta_{24}]$ e para o qual também se observa $[T_{024}\ T_{0(r)}\ \beta_{24} \equiv T_{024}\ T_{(r)}\beta_{24}]$ isto é, cota igual ao afastamento.

TERCEIRA PROJEÇÃO DE UMA RETA — é a projeção da reta sôbre plano de perfil escolhido como terceiro plano de projeção. Há correlação entre as três projeções de uma reta, de modo que conhecidas duas delas, determina-se imediatamente a terceira.

Para isso, vamos considerar, *por uniformidade*, o plano de perfil rebatido "*sempre sôbre o plano vertical* π' *no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio*, conforme a figura 3.

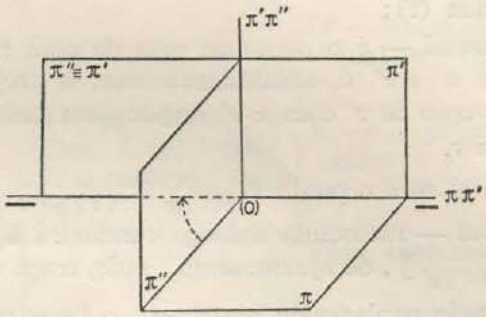


Fig. 3

Na épura correspondente, figura 4 verifica-se que a bissetriz dos quadrantes impares, 1.° e 3.°

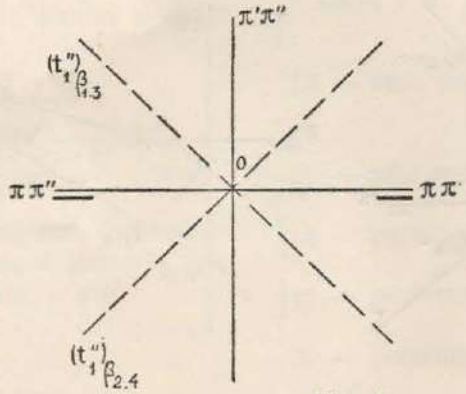


Fig. 4

representa o rebatimento sôbre π', do traço do bissetor dos diedros pares, β_{24} no plano de perfil π'', isto é, $(t_1'')\ \beta_{24}$ e, a bissetriz dos quadrantes pares, o rebatimento do traço do bissetor β_{13} no π'', isto é, $(t_1'')\ \beta_{13}$,

mais ainda, o plano de perfil π'' ficou também rebatido sôbre π', em torno de $\pi'\pi''$, no sentido já determinado.

Em sistema assim disposto, consideremos ponto (M,M') do diedro I: após o rebatimento de π'' sôbre π', a terceira projeção do ponto terá a mesma cota que a segunda M', figura 5,

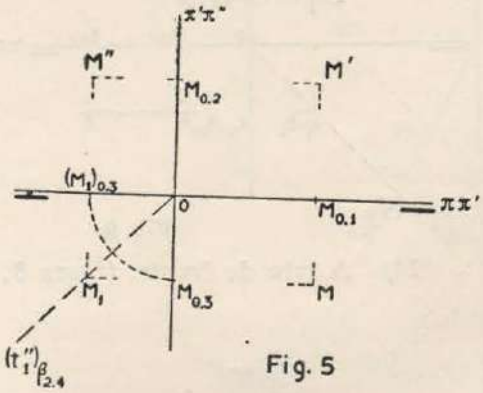


Fig. 5

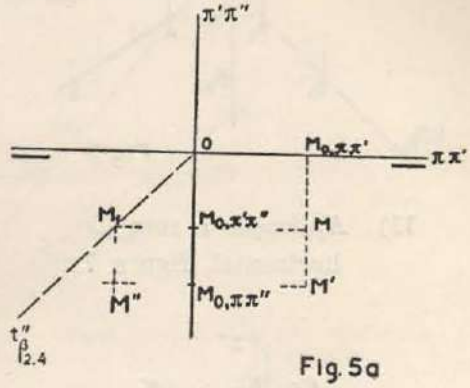


Fig. 5a

o afastamento igual ao de (M) em relação a π'.

E' fácil observar que as perpendiculares baixadas respectivamente de M", sôbre $\pi\pi'$, e, de M, sôbre $\pi\pi''$, se cortam em M_1, pertencente a $(t_1'')\,\beta_{24}$, ficando formado o retângulo

$$M\,M'\,M''\,M_1$$

em que os vértices M, M' e M" são as três projeções de (M), obtidas sôbre π' : a êsse retângulo chamaremos de *retângulo construtor* da terceira projeção do ponto e, com sua utilização, podem ser resolvidos os seguintes problemas: a) dados M e M' determinar M"; b) dados M" e M' determinar M; c) dados M" e M determinar M' (é necessário nesse caso escolher $\pi'\pi''$ de modo que se tenha $M''M_{02} = M\,M_{01}$ para que o problema seja possível).

Si o ponto pertencesse ao diedro IV, figura 5a, a construção de sua terceira projeção obedeceria ao processo estabelecido que é absolutamente geral.

1) Aplicando o processo do retângulo construtor a dois pontos de reta genérica, obtem-se com facilidade, sua terceira projeção, fig. 6:

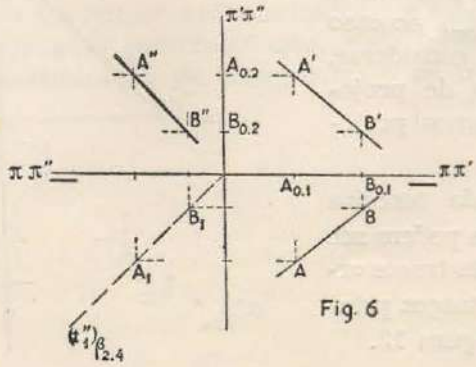


Fig. 6

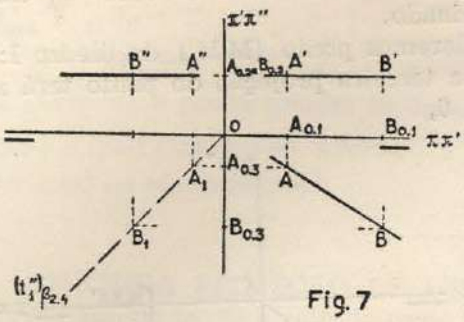


Fig. 7

11) Aplicação a reta horizontal, figura 7.

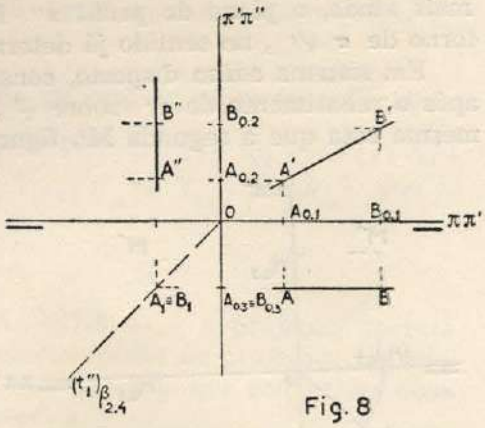


Fig. 8

14) A reta de frente, figura 8.

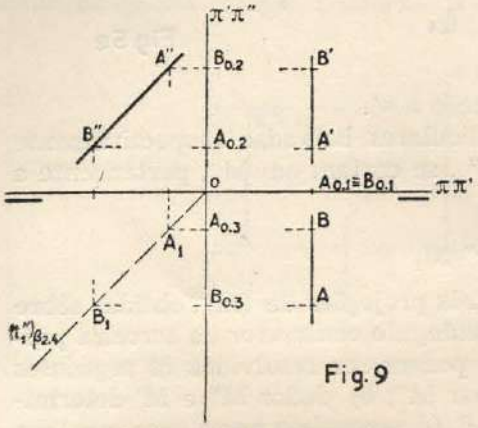


Fig. 9

2) Si a reta for de perfil, figura 9.

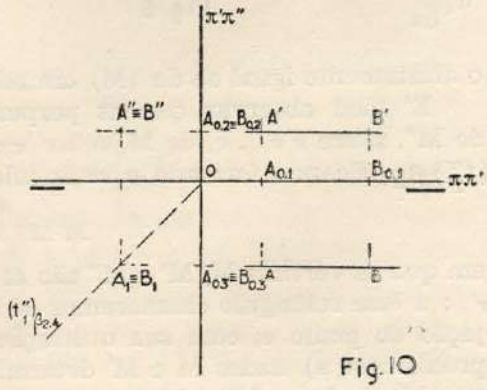


Fig. 10

17) Sendo paralela a $\pi\ \pi'$, figura 10.

Na determinação dos traços de uma reta, a exceção diz respeito à reta de perfil: é preciso recorrer à terceira projeção, voltando à posição primitiva, como na figura 11.

O retângulo construtor do traço vertical, pela disposição adotada na épura 11, se reduz a um *ponto*, pois convém, no caso da reta de perfil, considerar, como terceiro plano de projeção, um de seus planos projetantes.

Pelo emprêgo da terceira projeção de uma reta podem ser determinados seus três traços ordinários e seus dois traços principais, conforme a figura 12.

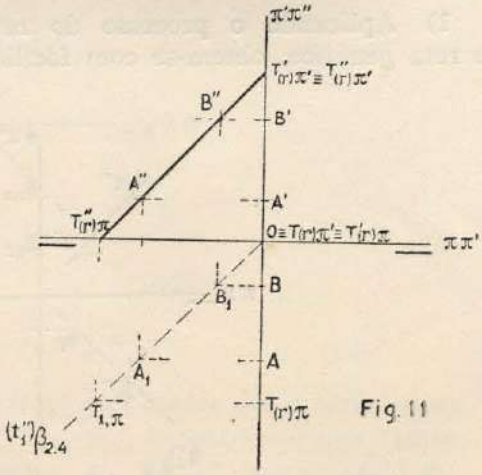
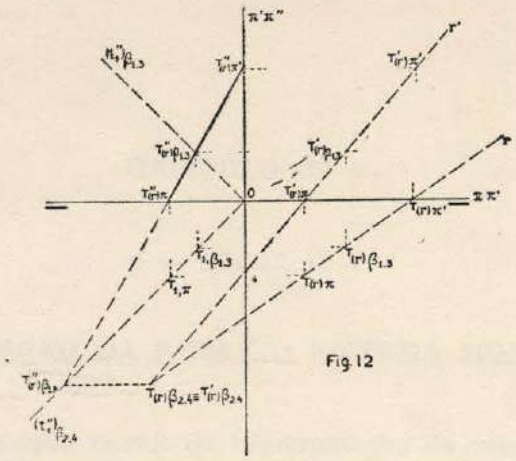


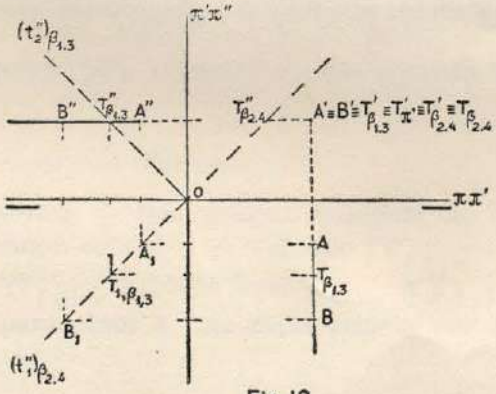
Fig. 11

As terceiras projeções dos traços principais são as intersecções dos rebatimentos dos traços dos planos β_{13} e β_{24} no plano de perfil, com a terceira projeção da reta.

Na determinação de todos os traços da reta de topo, o problema fica



bem facilitado, pelo emprêgo da terceira projeção, o mesmo sucedendo com a reta vertical e a reta de perfil. Épura referente à reta de topo, figura 13:



Com alguns exercícios sistematizados, os alunos se habituarão ao emprêgo *do retângulo construtor* que, mais tarde, será vantajosamente utilizado na determinação do terceiro traço de um plano.

CAPÍTULO II

g — 11, 12 13

REPRESENTAÇÃO DA RETA NO SISTEMA MONGEANO

Justifica-se o estudo inicial da representação da reta, pelo sistema de Gaspar Monge, por ser o mais simples e mais usual, embora seja um sistema bi-projetivo ortogonal; além do mais, por *servir de base* ao estudo da reta nos demais sistemas estudados em Geometria Descritiva, fato que não deixa de ser extranhável, pois êsse procedimento coloca " o *geral* na dependência do *particular*": é imposição didática que vem resistindo à critica, através dos tempos, e à qual nos submetemos.

A) *A reta é definida pelo primeiro e pelo segundo traços ordinários próprios*:

a) *os dois traços são distintos*:

I — 1) *Reta genérica* — tem posição qualquer no espaço, forma ângulos quaisquer com π e π' ; dados $[T_{(r)\pi}, T'_{(r)\pi}]$ e $[T_{(r)\pi'}, T''_{(r)\pi'}]$, basta ligar $T_{(r)\pi}$ a $T_{(r)\pi'}$ e $T'_{(r)\pi}$ a $T'_{(r)\pi'}$ para obter a reta representada por suas projeções r e r' figura 14.

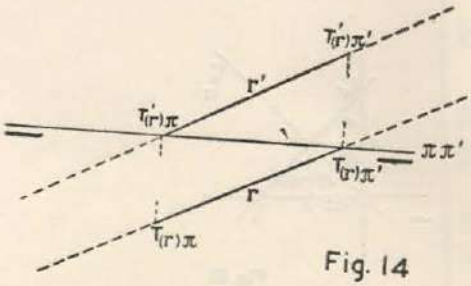


Fig. 14

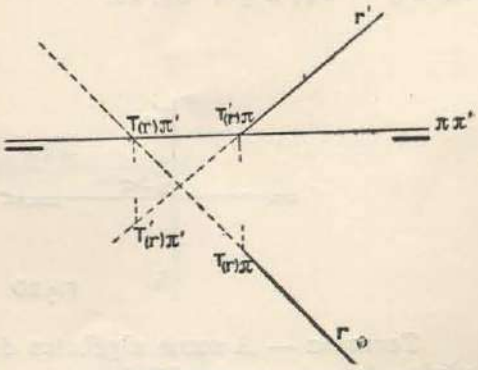


Fig. 15

A reta da figura 14 pertence ao II, I e IV diedros, podendo apresentar o aspecto da figura 15, em que a reta pertence aos diedros I, II e III.

Como exercício, se executarão épuras de retas pertencentes aos diedros II, III, e IV e também a I, II e IV, pois já vimos pertencer reta genérica a três diedros.

A reta genérica pode ainda ser definida por dois quaisquer de seus pontos, pertencentes a mesmo diedro ou a diedros diferentes, como nas figuras 16 e 17:

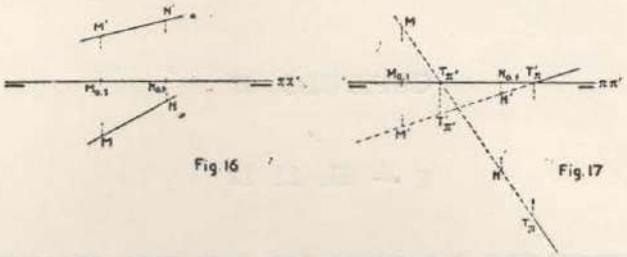


Fig. 16 Fig. 17

e, em outros exercícios que deverão ser praticados em aula.

No fim dêste capítulo estudaremos outros meios de definir a reta genérica.

II — *Reta de perfil* — pertencente a plano de perfil, ambas projeções perpendiculares a $\pi\,\pi'$.

2 — *Reta qualquer de perfil* — dados os traços T_π e $T'_{\pi'}$, a simples ligação dêsses dois pontos, pertencentes a uma mesma perpendicular a $\pi\,\pi'$, permite a representação da reta, por suas projeções, figura 18; si fossem dados dois pontos (A, A') e (B, B') a épura seria a da figura 19.

Fig. 18 Fig. 19

Exercícios em todos os diedros serão indispensáveis.

3 — *Reta perpendicular* a β_{13} — é reta de perfil que precisa ser caracterizada: seus traços são simétricos em relação a $\pi\,\pi'$ isto é: $T_\pi\,T'_\pi = T_\pi,\ T'_{\pi'}$, fig. 20.

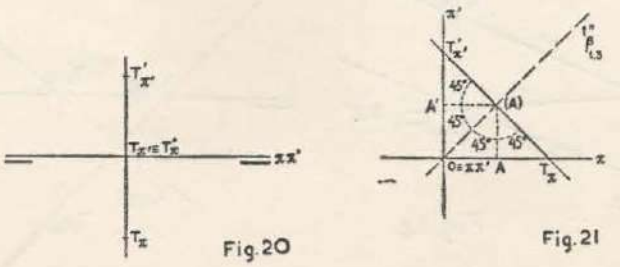


Fig. 20 Fig. 21

Teorema — A soma algébrica da cota e do afastamento de ponto genérico de reta perpendicular a β_{13} é igual à cota de seu traço vertical ou ao afastamento de seu traço horizontal.

A reta $T_\pi\,T'_{\pi'}$, sendo perpendicular a β_{13} figura 21,

o triângulo retângulo T_π (O) $T'_{\pi'}$ é isósceles, pois a cota (O) $T'_{\pi'}$, do traço vertical é igual ao afastamento (O) T_π do traço horizontal e, tem-se:

cota do ponto (A) = (A) A = (O) A'

afastamento do ponto (A) = (A) A' = (O) A

somando, membro a membro:

$$(A)A + (A)A' = (O)A' + (O)A$$

e, como os ângulos formados em torno de (A), do mesmo lado da reta considerada, são todos de 45°, resulta:

$$(A)A' = (O)A = A'T'_{\pi'}.$$

Então:

(1) — $(A)A + (A)A' = (O)A' + A'T'_{\pi'} = (O)T'_{\pi'}$,

cota do traço vertical da reta em estudo.

Si considerarmos

$$(A)A = (O)A' = A\,T_\pi$$

virá

(2) — $(A)\,A + (A)A' = (O)A + AT_\pi = (O)T_\pi$, afastamento do traçado horizontal da reta em estudo.

(1) e (2) demonstram o teorema.

Como interessante aplicação — podemos agora construir as projeções de segmento (AB), perpendicular a β_{13}: tomam-se $T'_{\pi'}$ ' e T_π simétricos em relação a $\pi\pi'$ figura 22.

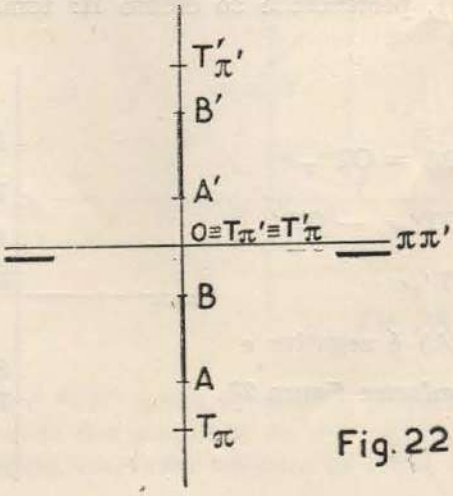


Fig. 22

Para ponto genérico (A) da reta de perfil, sabe-se que

$$OT'_{\pi'} = AO + A'O$$

logo, a partir de A, escolhido arbitràriamente sôbre a projeção horizontal da reta, marca-se

$$A\,A' = OT'_{\pi'} = OT_{\pi}$$

A partir de outro ponto B, escolhido para outro extremo do segmento. em projeção horizontal, tomando-se

$$B\,B' = OT'_{\pi'} = OT_{\pi}$$

ter-se-á um segmento (AB) perpendicular a β_{13}

Conclusões importantes — 1.ª Como

$$A\,O + A'O = O\,T'_{\pi'}$$

$$B\,O + + B'O = O\,T'_{\pi'}$$

subtraindo, membro a membro vem:

$$AO - BO + OA' - OB' = O = \text{zero}$$

ou

$$AB = A'\,B'$$

isto é, segmento qualquer perpendicular a β_{13} tem suas duas projeções de mesma grandeza.

2.º) Como, a partir de A e de B, $OT'_{\pi'}$ foi tomado no mesmo sentido, os dois segmentos iguais, AB e A'B', têm o mesmo sentido de A para B e de A' para B'.

Ainda outra interessante aplicação: Sôbre perpendicular a β_{13} tomemos ponto (A), pertencente ao diedro II: tomando A', arbitràriamente. deve-se ter:

$$OA' + OA = OT'_{\pi'}$$

donde

$$OA = OT'_{\pi'} - OA'$$

e. como

$$OA' > OT'_{\pi'}$$

o afastamento de (A) é negativo e igual a $A\,T'_{\pi'}$, conforme figura 23.

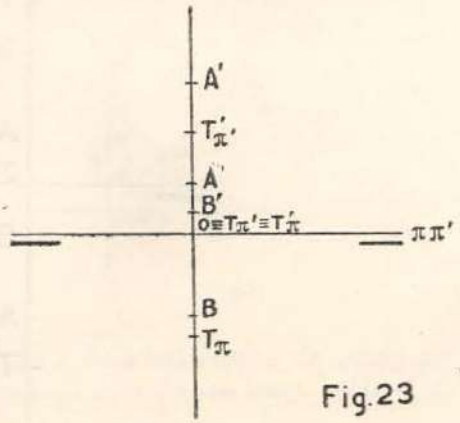


Fig.23

Tomando, agora, B' também arbitràriamente, para o ponto (B), deve-se ter:

$$OB' + OB = OT'_{\pi'}$$

donde

$$OB = OT'_{\pi'} - OB'$$

e, como

$$OT'_{\pi'} > OB'$$

o afastamento de (B) será positivo e igual a

$$B'T'_{\pi'}$$

Deve resultar $A'B' = AB$;

de fato:

$$OA' - OA = OT'_{\pi'}$$

$$OB' + OB = OT'_{\pi'}$$

e, subtraindo membro a membro:

$$OA' - OB' = OA - OB$$

Isto é,

$$A'B' = AB$$

4) *Reta perpendicular a* β_{24} — pode ser dado o mesmo tratamento que à reta perpendicular a β_{13}, chegando-se a conclusões equivalentes.

Para segmento genérico seria constatada a igualdade dos segmentos representativos de suas projeções, sendo apenas contrários os sentidos.

De fato, a figura 24

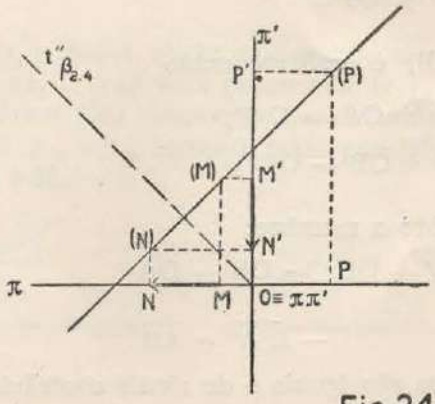


Fig. 24

mostra serem $\overline{MN}$ e $\overline{M'N'}$ iguais e, quando se rebater π sôbre π', no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio, ficarão MN e M'N', de sentidos contrários, conforme indicam as setas, e coincidentes, isto é, $NM \equiv M'N'$.

A épura de segmento perpendicular a β_{24} seria a da figura 25:

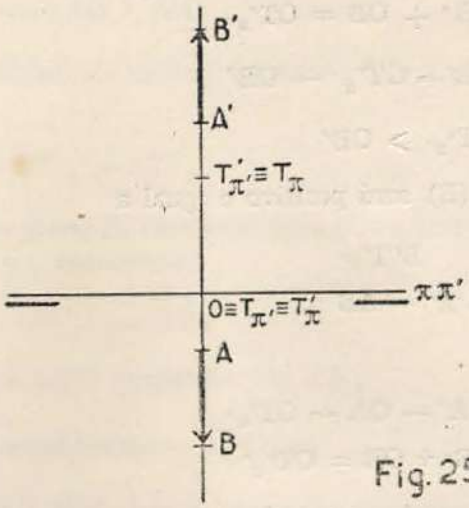


Fig. 25

Para ponto (A) no diedro I, ter-se-ia, tomando A', arbitràriamente:

$$OA' + OA = OT'_{\pi'}$$

donde

$$OA = -OA' + OT'_{\pi'}$$

e, como

$$OA' > OT'_{\pi'}$$

o afastamento de (A) é positivo; para outro ponto (B), do diedro I também, escolhendo B' arbitràriamente, viria

$$OB = -OB' + OT'_{\pi'}$$

e, como

$$OB' > OT'_{\pi'}$$

o afastamento de (B) é positivo; então

$$OA' + OA = OT'_{\pi'}$$

$$OB' + OB = OT'_{\pi'}$$

e, subtraindo, membro a membro:

$$OA' - OB' = OB - OA$$

isto é

$$-\overline{B'A'} = AB$$

os segmentos são iguais e de sinais contrários.

III — *Retas paralelas aos bissetores* β_{13} e β_{24} : sua representação tem fundamento no seguinte teorema de geometria elementar:

"*quando uma reta é paralela a um plano é paralela a uma reta dêsse plano*".

Os bissetores β_{13} e β_{24} pertencem ao feixe de planos de que $\pi\,\pi'$ é eixo; portanto, qualquer reta dos bissetores tem os traços confundidos em ponto de $\pi\pi'$, próprio ou impróprio.

Como os pontos pertencentes aos bissetores são caracterízados por terem cota igual ao afastamento, si a reta pertencer a β_{13} terá projeções simétricas em relação a $\pi\pi'$ e, si pertencer a β_{24} terá projeções coincidentes, segundo as figuras 26 e 27, das épuras representativas correspondentes às posições b - 8 e b - 9 do quadro de classificação da reta pelos traços.

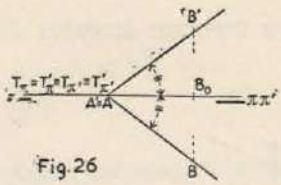


Fig. 26

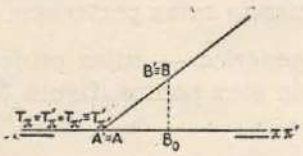


Fig. 27

E' o momento de resolver o seguinte problema:

"por ponto genérico, traçar paralela a uma reta"

Por emquanto diremos que retas paralelas têm projeções homônimas paralelas, por terem planos projetantes paralelos.

Para traçar por ponto (M), figura 28

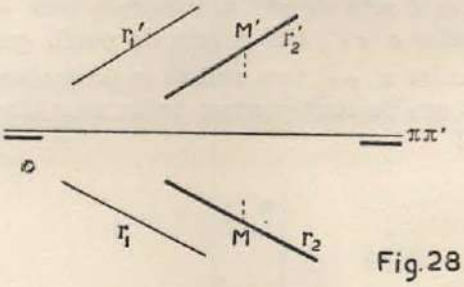


Fig. 28

reta (r_2), paralela a (r_1), basta, então, traçar, por M', r_2' paralela a r_1' e, por M, r_2 paralela a r_1 : (r_2) será paralela a (r_1).

Si, por ponto genérico (M) traçarmos paralelas às retas das figuras 26 e 27, pertencentes a β_{13} e β_{24} teremos retas paralelas a β_{13} e β_{24} como mostram as figuras 29 e 30,

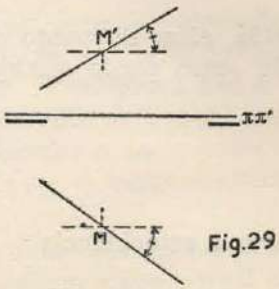


Fig. 29

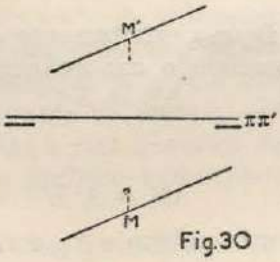


Fig. 30

representativas dos casos III-5 e III-6, do quadro já citado. Na figura 29, ambas projeções formam mesmo ângulo com $\pi\pi'$ e, na figura 30, as pro-

jeções da reta são entre si paralelas; ainda, no primeiro caso, a diferença entre cota e afastamento de ponto qualquer é sempre constante; no segundo, é constante a respectiva soma. Assim, si a diferença entre as coordenadas descritivas de dois pontos, de uma reta, for a mesma, ela pertencerá a plano paralelo a β_{13}; si for constante a soma das referidas coordenadas, pertencerá a plano paralelo a β_{24}.

b) *os dois traços são coincidentes*: qualquer reta incidente com $\pi\pi'$ tem seus dois primeiros traços ordinários confundidos; além dos dois casos b-8) e b-9) quando retas pertencem aos bissetores, há considerar:

7) *reta genérica* — cujas projeções formam ângulos diferentes com $\pi\pi'$, em um de seus pontos, figura 31.

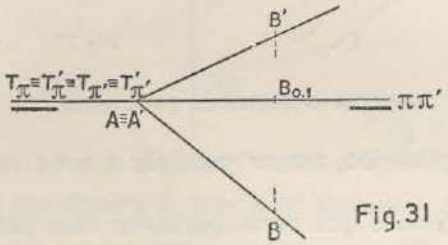


Fig. 31

10) *reta perpendicular a* $\pi\pi'$ — E' preciso não confundir *reta perpendicular a* $\pi\pi'$, que é reta de perfil, incidente com $\pi\pi'$, com reta *cuja direção é perpendicular a* $\pi\pi'$, que é reta de perfil genérica.

A reta perpendicular a $\pi\pi'$ tem ambas as projeções perpendiculares a $\pi\pi'$, é incidente em um de seus pontos: todos seus traços coincidem com êsse ponto, figura 32

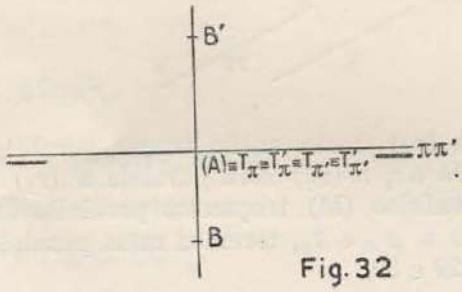


Fig. 32

Para que fique perfeitamente definida, além do ponto de incidência em $\pi\pi'$ é necessário o conhecimento de outro ponto qualquer da reta; de modo geral $AB \neq A'B'$

Mas si

$$AB = A'B'$$

a reta pertencerá também a β_{13} e si houver a coincidência

$$B \equiv B'$$

pertencerá a β_{24}.

Conforme se verifica da figura 33,

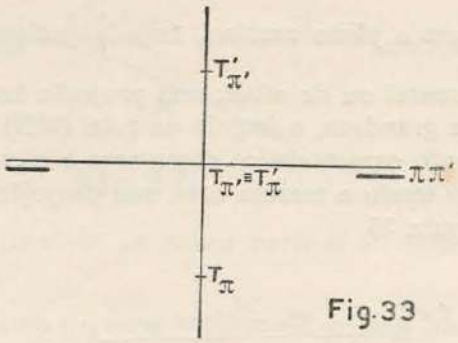


Fig. 33

a reta de direção perpendicular a $\pi\pi'$, reta genérica de perfil, tem seus traços distintos.

Traçada a terceira projeção de reta perpendicular a $\pi\pi'$ esta formará com $\pi\pi'$, em verdadeira grandeza, o ângulo formado pela reta objetiva com π, sendo o complemento dêsse ângulo, o que a reta objetiva forma com π' figura 34

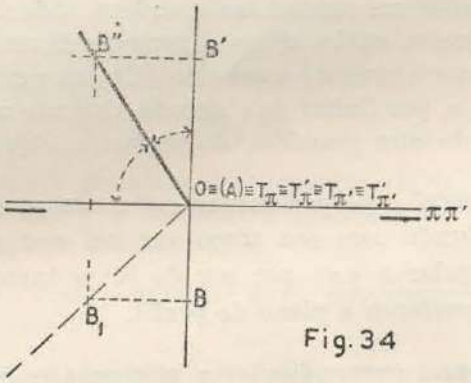


Fig. 34

Pelo recíproco do *teorema das três perpendiculares*:

> "*Quando duas retas são entre si perpendiculares, a projeção de uma delas sôbre plano perpendicular à outra, é perpendicular a essa outra*".

A reta em estudo, perpendicular a $\pi\pi'$, de projeções pertencentes a mesmo ponto de $\pi\pi'$ tem, portanto, essas projeções perpendiculares a $\pi\pi'$ nesse ponto. A recíproca não é verdadeira: si a reta tiver ambas projeções perpendiculares a $\pi\pi'$, pertencentes ao mesmo suporte, pode não ser perpendicular a $\pi\pi'$: basta atentar à reta genérica de perfil que não passa por $\pi\pi'$: o perpendicularismo perfeito exige ponto de incidência em $\pi\pi'$.

B) *A reta tem apenas um dos dois primeiros traços ordinários*: é paralela ao plano sôbre o qual não possue traço e, sua projeção nesse plano, forma com $\pi\pi'$, em verdadeira grandeza, o ângulo que a reta objetiva forma com o outro plano.

c) *a réta é paralela ao plano horizontal* π :
tem apenas traço vertical:

IV — *forma, com o plano vertical, ângulo qualquer*:

11 — *reta horizontal ou de nível*: sua projeção horizontal forma com $\pi\,\pi'$, em verdadeira grandeza, o ângulo da reta (MN) com o plano vertical π' ; outro elemento característico dessa reta é a *cota*, em relação a π: todos os seus pontos tendo a mesma cota, sua projeção vertical é paralela a $\pi\pi'$, conforme épura 35

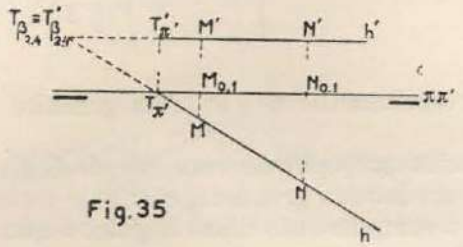


Fig. 35

Sabe-se, projetar-se em verdadeira grandeza, tôda figura paralela a um dos planos de projeção; então, sôbre a projeção horizontal, de uma *horizontal*, pode-se tomar segmento qualquer MN em verdadeira grandeza, a partir do ponto M, e, por linhas de chamada, deduzir sua projeção vertical M'N': MN é a verdadeira grandeza do segmento objetivo (MN).

V — *a horizontal é perpendicular a* π' : sua projeção vertical é um *ponto* que se confunde com seu traço vertical e a projeção horizontal torna--se perpendicular a $\pi\pi'$ por ser de 90° o ângulo da reta objetiva com π' : esta reta pertence a plano de perfil.

12 — *a horizontal perpendicular a* π' chama-se de *topo ou de ponta* e sua épura representativa é a da figura 36.

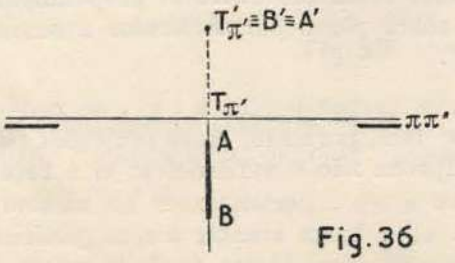


Fig. 36

VI — *No caso limite*, quando a horizontal pertencer ao plano π , todos os seus pontos serão de cota nula e, portanto, sua projeção vertical coincidirá com $\pi\,\pi'$ e, também, seu traço vertical, na intersecção com a projeção horizontal.

13 — a épura representativa será a da figura 37.

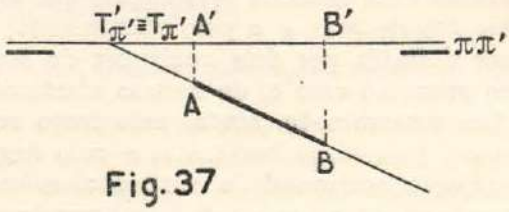


Fig. 37

d) *A reta é paralela ao plano vertical* π', tem apenas traço horizontal:

VII — *forma, com o plano horizontal, ângulo qualquer*:

14 — *reta frontal ou de frente*: a ela se aplica "*mutatis, mutandis*", o mesmo raciocínio desenvolvido para a *horizontal*: a figura 38 é sua épura representativa.

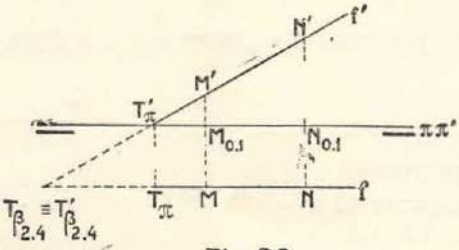


Fig. 38

M'N' é a verdadeira grandeza do segmento (MN) e o ângulo da projeção vertical com $\pi\pi'$ é a verdadeira grandeza do ângulo que a reta objetiva faz com o plano horizontal.

VIII — a *frontal é perpendicular a* π : considerações análogas as que foram feitas para a reta *V*.

15 — *essa frontal é chamada vertical* e a figura 39 é sua épura:

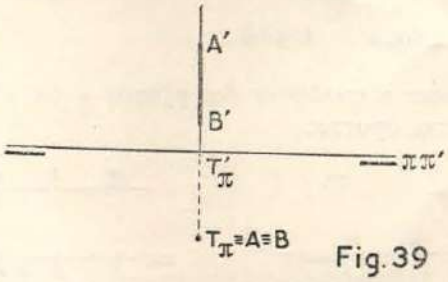


Fig. 39

IX — *No caso limite*, teremos épura inversa da posição VI, aplicando o mesmo raciocínio:

16 — a figura 40, dá a representação dessa reta

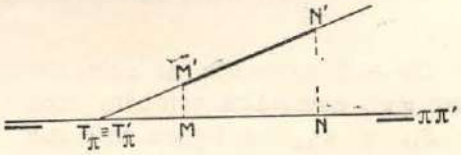


Fig. 40

Resumindo o que foi especificado para as posições c) e d): 1.°) uma horizontal fica perfeitamente definida pelo ângulo que forma com π' e pela cota; a frontal, pelo ângulo com π e pelo afastamento; 2.°) qualquer das duas retas pode ser definida por dois quaisquer de seus pontos: ambos de mesma cota, no primeiro caso e, de mesmo afastamento, no segundo; 3.°) a horizontal fica determinada, ainda, pelo traço vertical e pelo ângulo com π'; a frontal, pelo traço horizontal e pelo ângulo formado com π ; 4.°) sôbre a projeção horizontal da horizontal e, vertical da frontal, podem ser tomados segmentos, em verdadeira grandeza.

C) A reta tem os dois primeiros traços ordinários impróprios: é tanto paralela a π como a π' e, portanto, paralela à intersecção $\pi\pi'$ que é a linha de terra: chama-se *fronto-horizontal*: por participar das propriedades das frontais, tem a projeção horizontal paralela a $\pi\,\pi'$ e, por partilhar das propriedades das horizontais tem a projeção vertical também paralela a $\pi\pi'$: portanto, a projeção horizontal é paralela à projeção vertical e, ambas, paralelas a $\pi\pi'$.

17 — *a reta não pertence a* π , *nem a* π': a figura 41 é sua épura:

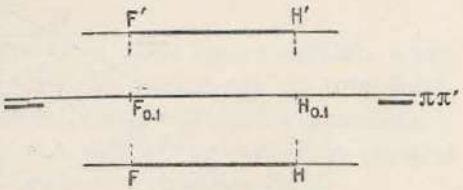


Fig. 41

18 — poderá pertencer a β_{13} ou β_{24} conforme figuras 42 e 43.

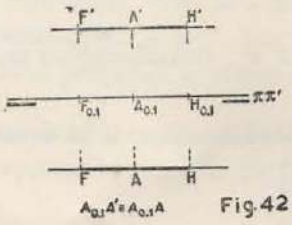


Fig. 42

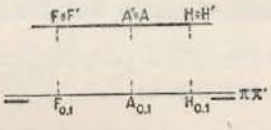


Fig. 43

19 — Si pertencer a qualquer dos planos π ou π' , as figuras 44 e 45 corresponderão a suas épuras:

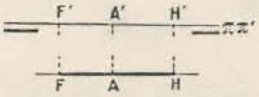


Fig. 44

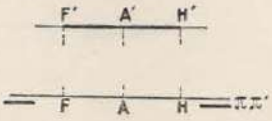


Fig. 45

20 — Finalmente, si coincidir com $\pi\pi'$, coincidirá também com $\pi\pi'$ β_{13} e β_{24} : a figura 46 é sua épura.

Fig. 46

Resumindo o que foi especificado para as posições c) e d): 1.°) uma horizontal fica perfeitamente definida pelo ângulo que forma com π' e pela cota; a frontal, pelo ângulo com π e pelo afastamento; 2.°) qualquer das duas retas pode ser definida por dois quaisquer de seus pontos: ambos de mesma cota, no primeiro caso e, de mesmo afastamento, no segundo; 3.°) a horizontal fica determinada, ainda, pelo traço vertical e pelo ângulo com π'; a frontal, pelo traço horizontal e pelo ângulo formado com π ; 4.°) sôbre a projeção horizontal da horizontal e, vertical da frontal, podem ser tomados segmentos, em verdadeira grandeza.

C) A reta tem os dois primeiros traços ordinários impróprios: é tanto paralela a π como a π' e, portanto, paralela à intersecção $\pi\pi'$ que é a linha de terra: chama-se *fronto-horizontal*: por participar das propriedades das frontais, tem a projeção horizontal paralela a $\pi\,\pi'$ e, por partilhar das propriedades das horizontais tem a projeção vertical também paralela a $\pi\pi'$: portanto, a projeção horizontal é paralela à projeção vertical e, ambas, paralelas a $\pi\pi'$.

17 — *a reta não pertence a* π , *nem a* π': a figura 41 é sua épura:

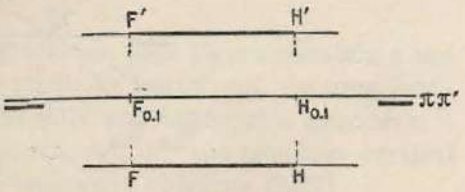


Fig. 41

18 — poderá pertencer a β_{13} ou β_{24} conforme figuras 42 e 43.

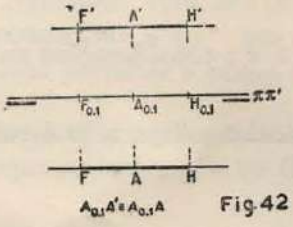


Fig. 42

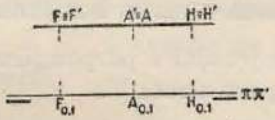


Fig. 43

19 — Si pertencer a qualquer dos planos π ou π' , as figuras 44 e 45 corresponderão a suas épuras:

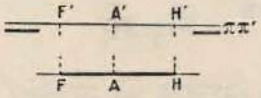


Fig. 44

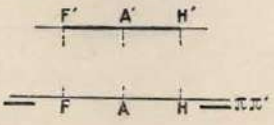


Fig. 45

20 — Finalmente, si coincidir com $\pi\pi'$, coincidirá também com $\pi\pi'$ β_{13} e β_{24} : a figura 46 é sua épura.

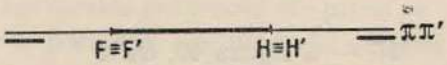


Fig. 46

deduzindo-se imediatamente

$$\frac{NR}{MR} = \frac{N'R'}{M'R'}$$

condição para que o ponto (R) pertença à reta (r) ≡ (MN).

Outra solução bem interessante, para o mesmo problema, basea-se no princípio de serem as duas projeções mongeanas de um ponto, *figuras afins*, cuja *direção de afinidade* é a da linha de chamada, sendo o *eixo de afinidade* pertencente ao segundo bissetor. (1).

Definida reta de perfil pelos pontos (M) e (N) e ligando-se ponto qualquer objetivo (0) aos pontos (M) e (N), figura 49,

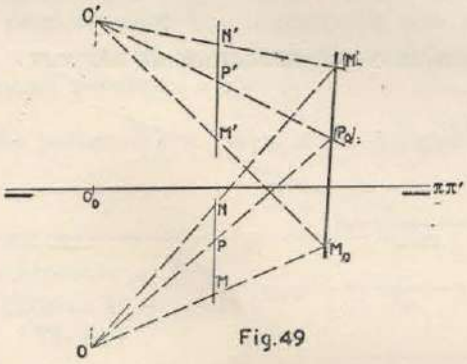


Fig.49

ficam construidas as retas (OM) e (ON) que encontram o segundo bissetor nos pontos (M_0) e (N_0) que definem o eixo de afinidade (M N): ponto qualquer (P_0) do eixo de afinidade, ligado a (0), encontra a reta de perfil no ponto (P) que é ponto a ela pertencente, pelas considerações já expendidas.

RESUMO: reta genérica pode ser definida:

a) pelos traços;
b) por dois pontos quaisquer;
c) por um ponto e pelos ângulos de suas projeções com $\pi\pi'$
d) por um ponto e pelos ângulos que faz com π e π' .

a) O primeiro problema já foi convenientemente tratado no começo do presente capítulo. Geralmente, os traços são dados por suas coordenadas descritivas.

b) Sendo cota e afastamento as coordenadas descritivas, para que se defina a posição relativa de dois pontos, é preciso introduzir uma terceira coordenada — *a abscissa* — contada sôbre $\pi\pi'$, a partir de traço de plano de perfil, préviamente escolhido, para terceiro plano de projeção.

---

(1) Ao iniciar o estudo do ponto, em Geometria Descritiva, torna-se obrigatório o estudo da *homologia plana*.

Exemplo: seja construir reta (r) definida pelos pontos

$$M \begin{cases} \text{cota} & (+2) \\ \text{afastamento} & (-1) \\ \text{abscissa} & (-2) \end{cases} \quad e \quad (N) \begin{cases} (-3) \\ (+2) \\ (+3) \end{cases}$$

A figura 50 é a épura representativa dessa reta.

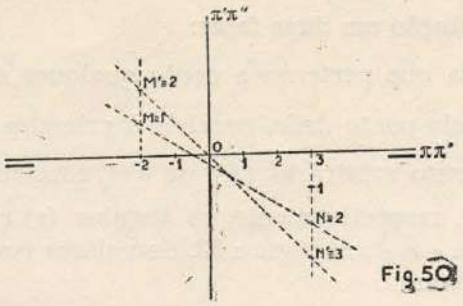


Fig. 50

(Figura 50)

c) Construir reta (r) pertencente ao ponto

$$(R) \begin{cases} +\ 2 \\ +\ 3 \\ +\ 1{,}5 \end{cases}$$

e cujas projeções formam com $\pi\ \pi'$ os seguintes ângulos:

projeção horizontal (+ 40°)

projeção vertical (— 30°)

OBSERVAÇÃO — Tanto na locação de retas, como de planos, os autores costumam contar os ângulos no sentido contrário ao trigonométrico, isto é, no sentido do movimento dos ponteiros de relógio, em relação a $\pi\pi'$; então, contados para baixo de $\pi\pi'$, os ângulos são positivos e, para cima, negativos. Evidentemente, o problema comporta duas soluções, representadas pelas épuras 51 e 52.

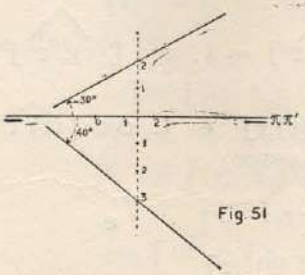


Fig. 51

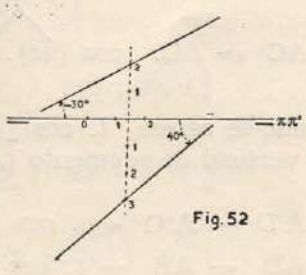


Fig. 52

e, é fácil constatar, que as soluções são realmente quatro, pela consideração das épuras simétricas correspondentes.

d) Construir reta genérica (r), pertencente a ponto (M), que faça com o plano horizontal π, ângulo dado $(\widehat{r})$, r, em valor, e, com o plano vertical π' também ângulo dado $(\widehat{r})$, r'.

Tem que ser resolvido problema métrico, de emprêgo corrente em Geometria Descritiva, para o qual apresentamos solução de fácil compreensão para alunos de curso ginasial, baseada em elementares conhecimentos de geometria clássica.

Dividimos a solução em duas fases:

1.ª *fase*: reta que pertença a ponto qualquer de $\pi\pi'$;

2.ª *fase*: pelo ponto dado, paralela à primeira reta.

A partir de ponto arbitrário (A) de $\pi\pi'$, construam-se, para cima e para baixo de $\pi\pi'$, respectivamente, os ângulos $(\widehat{r})$,r e $(\widehat{r})$,r' que a reta deverá formar, com π e π', na figura 53, de valores respectivamente iguais aos dados do problema.

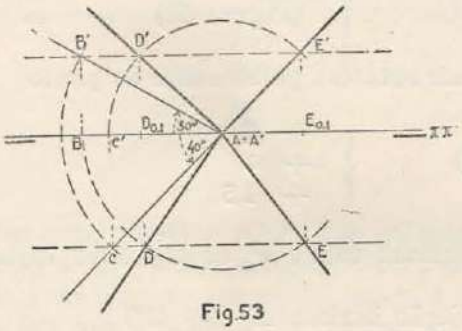


Fig.53

Sôbre os lados dêsses ângulos, diferentes de $\pi\pi'$, marquem-se os segmentos

$$\overline{A'B'} = \overline{AC} = l;$$

projete-se B' em B, sôbre $\pi\pi'$ e C, em C', formando os triângulos A'BB, e ACC', dos quais se tira

$$A'B = A'B' \cos [\widehat{(r), r}] = l. \cos [\widehat{(r), r}]$$

$$AC' = AC. \cos [\widehat{(r), r'}] = l. \cos [\widehat{(r), r'}]$$

Verificando-se serem $l. \cos [(\widehat{r}),r]$ e $l. \cos [(\widehat{r}),r']$ as projeções horizontal e vertical do segmento l, como

$$A'D' = A'C' = l. \cos [(\widehat{r}), r'] \quad \text{e}$$
$$AD = AB = l. \cos [(\widehat{r}), r]$$

em virtude das construções gráficas executadas na figura 53, deduz-se serem $\overline{AD}$ e $\overline{A'D'}$ as projeções horizontal e vertical de l; e, portanto,

D e D', projeções horizontal e vertical de mesmo ponto (D): então a reta (r) ≡ (AD) forma com os planos de projeção, π e π', os ângulos dados.

E' fácil ver que a reta (AE) é outra solução do problema: é a posição simétrica de (AD). Combinando AD com A'E', têm-se uma terceira solução e, AE com A'D', uma quarta.

Traçando, agora, pelo ponto (M) dado, retas paralelas às das quatro soluções acima enumeradas, chega-se às quatro soluções do problema proposto, na figura 54

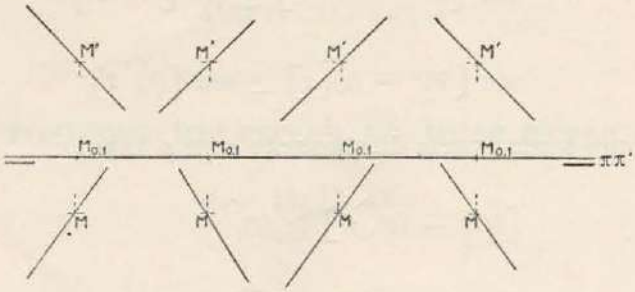


Fig. 54

Condições de possibilidade do problema —

Vimos serem

$$A'D' = l \,.\, \cos\,[\widehat{(r)}, r'] \qquad \text{e}$$

$$AD = l.\ \cos\,[\widehat{(r)}, r]$$

Para que as paralelas a $\pi\,\pi'$ traçadas por B' e C, respectivamente, sejam cortadas por $\overline{A'D'}$ e $\overline{AD}$ é necessário se tenha:

$$l.\ \cos\left[\widehat{(r)}, r'\right] \geq \overline{BB'}$$

$$l.\ \cos\left[\widehat{(r)}, r\right] \geq \overline{CC'}$$

mas

$$\overline{BB'} = l.\ \text{sen}\left[\widehat{(r)}, r\right]$$

e

$$\overline{CC'} = l.\ \text{sen}\left[\widehat{(r)}, r'\right]$$

então, deve-se ter:

$$l.\ \cos\left[\widehat{(r)}, r'\right] \geq l.\ \text{sen}\left[\widehat{(r)}, r\right]$$

e

$$l.\ \cos\left[\widehat{(r)}, r\right] \geq l.\ \text{sen}\left[\widehat{(r)}, r'\right]$$

ou

$$\cos\left[\widehat{(r)}, r'\right] \geq \text{sen}\left[\widehat{(r)}, r\right]$$

e

$$\cos\left[\widehat{(r)}, r\right] \geq \text{sen}\left[\widehat{(r)}, r'\right]$$

porém

$$\cos\left[\widehat{(r), r'}\right] = \operatorname{sen}\left[90^\circ - \widehat{(r), r'}\right]$$

e

$$\cos\left[\widehat{(r), r}\right] = \operatorname{sen}\left[90^\circ - \widehat{(r), r}\right]$$

então

$$\operatorname{sen}\left[90^\circ - \widehat{(r), r'}\right] \geq \operatorname{sen}\left[\widehat{(r), r'}\right]$$

e

$$\operatorname{sen}\left[90^\circ - \widehat{(r), r}\right] \geq \operatorname{sen}\left[\widehat{(r), r}\right]$$

e, como o seno varia diretamente com o ângulo:

$$\left[90^\circ - \widehat{(r), r'}\right] \geq \widehat{(r), r'}$$

e

$$\left[90^\circ - \widehat{(r), r}\right] \geq \widehat{(r), r}$$

donde

$$90^\circ \geq \widehat{(r), r} + \widehat{(r), r'}$$

$$90^\circ \geq \widehat{(r), r'} + \widehat{(r), r}$$

isto é: o problema é possivel, quando a soma dos ângulos que a reta forma com os planos de projeção é menor, e no máximo, igual a 90.°; sendo menor, haverá quatro soluções; igual, a reta será de perfil, e haverá uma única solução; sendo nula a soma, a reta será paralela a $\pi\pi'$

OBSERVAÇÃO — A tradução geométrica das paralelas a $\pi\pi'$, por B' e C, só poderá ser perfeitamente entendida, posteriormente, com o adiantamento do programa.

CAPÍTULO III

POSIÇOES RELATIVAS DE DUAS RETAS

g — 11, 12, 13

Duas retas do espaço podem ser incidentes (complanares) ou revessas (não complanares); no primeiro caso o ponto de incidência poderá ser próprio — *retas concorrentes,* ou impróprio — *retas paralelas.*

Retas incidentes — a) PONTO DE INCIDENCIA PRÓPRIO: o ponto pertencendo simultaneamente às duas retas, *pelo postulado da pertinência,* deverá ser o ponto comum às suas projeções, separadamente, e, portanto, sôbre a mesma linha de chamada: a épura é a da figura 55.

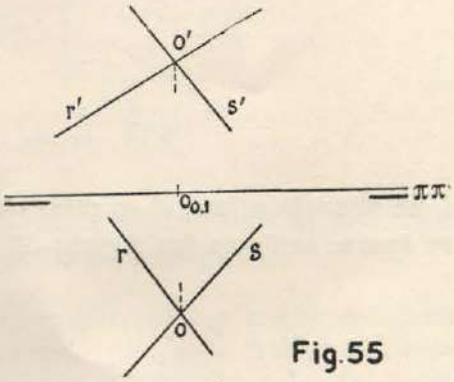


Fig.55

Si tiverem o mesmo plano projetante, sôbre o plano vertical ou sôbre o plano horizontal, as projeções correspondentes serão superpostas, como mostram as figuras 56 e 57.

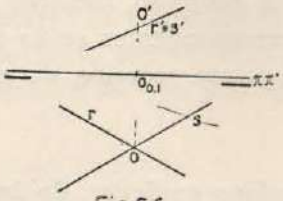


Fig.56

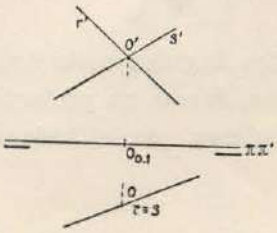


Fig.57

O plano projetante comum, sendo horizontal ou de frente, as épuras respectivas são as das figuras 58 e 59.

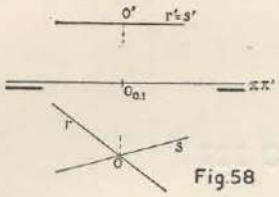


Fig.58

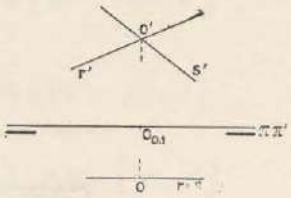


Fig.59

e o ângulo formado pelas projeções distintas mede o ângulo das duas retas objetivas.

Uma das retas sendo horizontal ou frontal ter-se-ão as épuras 60 e 61

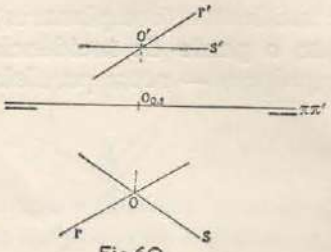


Fig.60

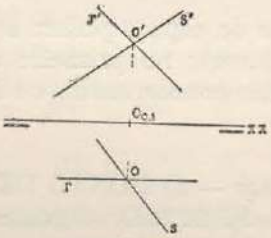


Fig.61

e, na situação acima, si as retas objetivas forem entre si perpendiculares, as épuras serão as das figuras 62 e 63.

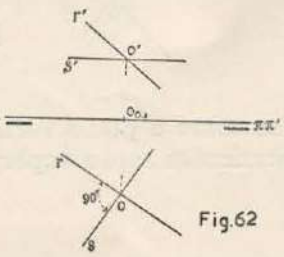


Fig.62

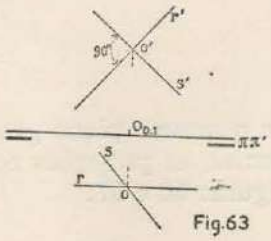


Fig.63

em que os ângulos assinalados, em projeção, medirão o ângulo das retas objetivas, isto é, as projeções correspondentes serão também entre si perpendiculares, em virtude do seguinte teorema de geometria elementar:

> "*A projeção ortogonal, sôbre plano qualquer, de ângulo reto que lhe tenha um lado paralelo, é ainda um ângulo reto*".

Uma das retas sendo de topo ou vertical, as figuras 64 e 65 seriam as épuras representativas.

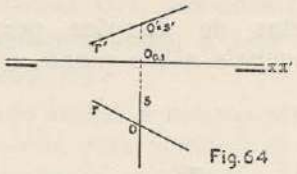


Fig. 64

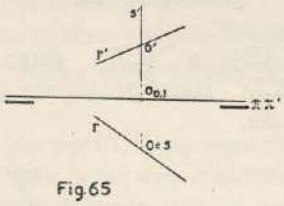


Fig. 65

No caso de uma das retas ser de perfil, será necessário recorrer às terceiras projeções, para verificação da incidência das duas retas, conforme mostra a figura 66,

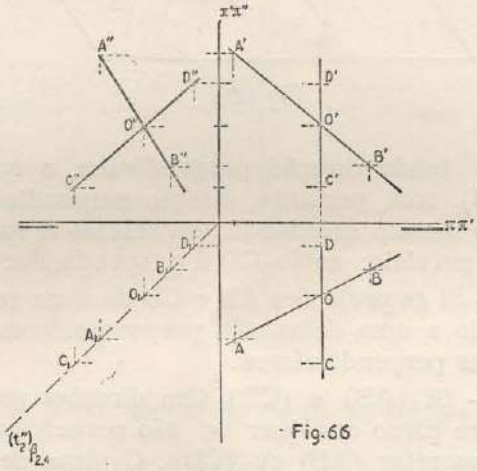


Fig. 66

onde é necessário que o'', o' e o pertençam a três vértices de um retângulo construtor, para que (O) seja o ponto de incidência.

A solução poderá ser dada pela determinação dos traços ordinários das duas retas: ligadas suas projeções homônimas, será obtida reta, cujas projeções deverão incidir em ponto próprio ou impróprio de $\pi'\pi$, conforme mostra a figura 67.

Na épura 67, as retas $[T'_{(r)\pi'}\ T'_{(s)\pi'}]$ e $[T_{(r)\pi}, T_{(s)\pi}]$ concorrem em mesmo ponto U da linha de terra: as retas (r) e (s) são portanto incidentes, isto é, pertencem a mesmo plano.

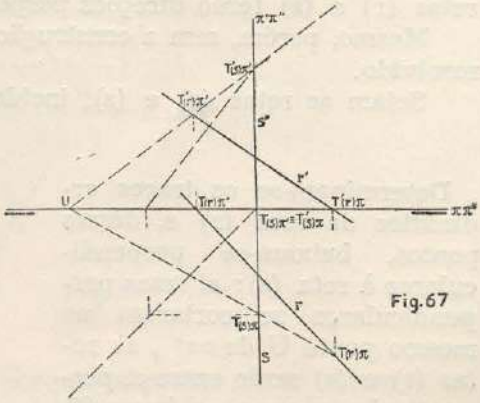


Fig. 67

TEOREMA: *As projeções de duas retas de direções perpendiculares, sôbre plano paralelo a uma delas, são retas perpendiculares.*

Sejam (AB) e (CD) duas retas de direções perpendiculares, sendo AB e CD suas projeções ortogonais sôbre plano π , paralelo a (CD), figura 68.

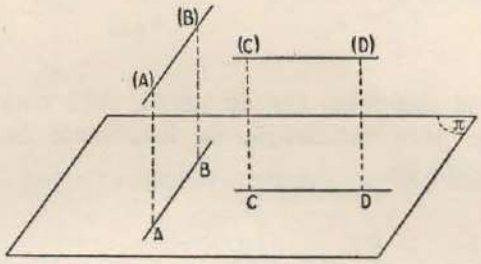


Fig.68

A reta (CD), tendo direção perpendicular a qualquer projetante (A)A da reta (AB), terá, portanto, direção perpendicular ao plano projetante de (AB), o mesmo sucedendo, em relação à sua projeção ortogonal CD, que lhe é paralela: então CD é perpendicular a AB.

1.ª recíproca — Si as projeções AB e CD de duas retas (AB) e (CD), sôbre plano paralelo a uma delas, são perpendiculares, as retas (AB) e (CD) terão direções perpendiculares.

2.ª recíproca — Si (AB) e (CD) têm direções perpendiculares e si suas projeções, sôbre plano qualquer π são perpendiculares, o plano π é paralelo a uma das retas (AB) ou (CD). O plano de projeção não será perpendicular a qualquer das retas e êste teorema não difere do *teorema das três perpendiculares.*

Além dessa situação especial, não é fácil, a simples vista, verificar si duas retas, representadas por suas projeções ortogonais, têm ou não direções perpendiculares: o problema fica na dependência do perpendicularismo entre reta e plano.

Primeiramente, poder-se-ia, por uma das retas, (r) por exemplo, traçar plano α perpendicular à outra, (s); si fôr possivel o problema, as retas (r) e (s) terão direções perpendiculares.

Mesmo, porém, sem a construção do plano α, o problema poderá ser resolvido.

Sejam as retas (r) e (s), incidentes no ponto (O); figura 69.

Determinam-se os traços ordinários da reta (r) e, dêsses pontos, baixam-se perpendiculares à reta (s): si essas perpendiculares se cortarem no mesmo ponto U de $\pi\pi'$, as retas (r) e (s) serão entre si perpendiculares, como na épura 69.

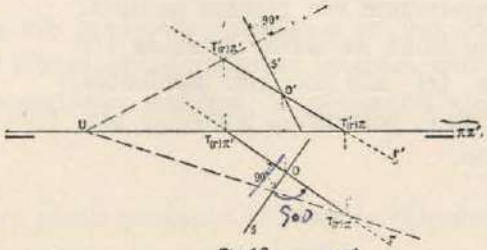


Fig.69

$r, s = 90°$

E' possivel, agora, o traçado de retas quaisquer incidentes, entre si perpendiculares: basta determinar os traços ordinários de uma das retas, ligar ponto arbitrário U de $\pi\pi'$ aos traços da reta e, das projeções do ponto de incidência (O), das duas retas, baixar perpendiculares $aUT'_{(r)\pi'}$ e $UT_{(r)\pi}$ respectivamente: a reta (s) assim constituida será perpendicular à primeira (r).

Pertencendo ambas a mesmo plano de perfil, é necessário recorrer às terceiras projeções, para verificar si as duas retas são incidentes em ponto próprio ou impróprio: a situação é indeterminada por se superporem as projeções das duas retas. Na figura 70 está a solução do problema:

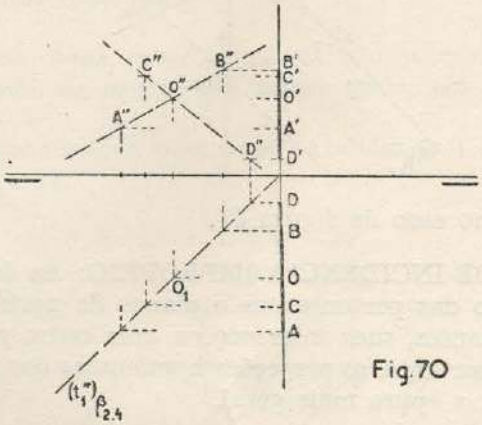


Fig.70

as duas retas (AB) e (CD), ambas de perfil, se cortam no ponto (O).

Si as projeções horizontais e verticais das duas retas não se cortarem, separadamente, dentro dos limites da épura, para verificação da incidência, recorre-se a outras duas retas auxiliares, apoiando-se nas duas primeiras: si as projeções das retas auxiliares se cruzarem, separadamente, em mesmo ponto (O), as duas retas primitivas serão incidentes; caso contrário, não, conforme sucede na figura 71,

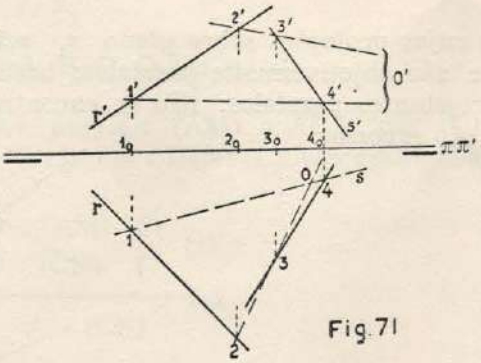


Fig.71

em que (r) e (s) não são incidentes porque os pontos de cruzamento de (1-4, 1'-4') e (2-3, 2'-3') não pertencem à mesma linha de chamada.

Uma das retas, (r), sendo qualquer e a outra de perfil, (s) ≡ (AB), figura 72,

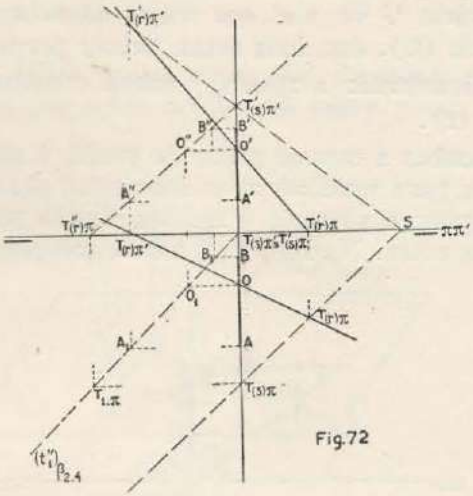


Fig.72

procede-se como no caso da figura 67.

b) PONTO DE INCIDÊNCIA IMPRÓPRIO: As duas retas são paralelas, com exceção das pertencentes a planos de perfil. Sendo paralelos seus planos projetantes, suas intersecções, com outro plano qualquer, são retas paralelas e, portanto, as projeções homônimas das retas são paralelas, sendo a figura 73, a épura mais geral.

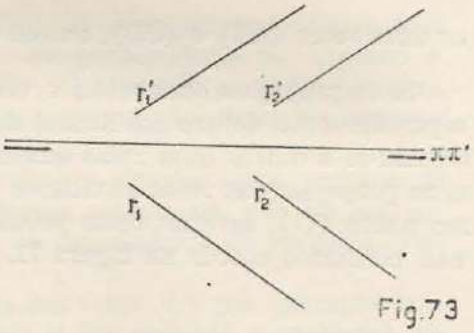
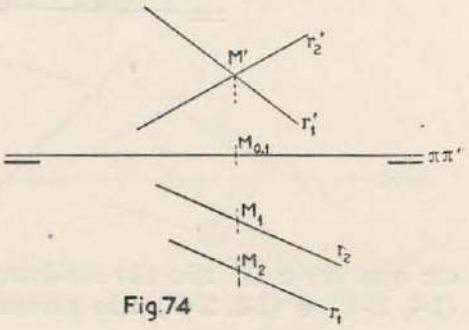


Fig.73

A recíproca nem sempre é verdadeira:

"retas cujas projeções sôbre plano π_1 sejam paralelas, nem sempre, são objetivamente paralelas: basta que tenham planos projetantes paralelos: não se encontram nem são paralelas: são *revessas*.



A épura seria a da figura 74,

Fig.74

em que M' é a projeção vertical da reta de topo (M_1 M_2) que encontra (r) e (s).

E' bom acentuar não ser a recíproca verdadeira para um plano apenas, mas havendo dois planos de projeção, como no sistema mongeano, o mesmo para dois planos, formando diedro qualquer, é *plenamente verdadeira* e, o recíproco do teorema primitivo, pode ser enunciado:

> "*Quando, as projeções de duas retas sôbre planos que formem diedro qualquer, são paralelas, as retas objetivas são paralelas.*"

Outro interessante teorema:

> "*Quando duas retas objetivas são paralelas, as projeções ortogonais, de segmentos dessas retas, são proporcionais*".

Projetemos ortogonalmente duas retas paralelas (r_1) e (r_2) sôbre plano π, em r_1 e r_2; figura 75.

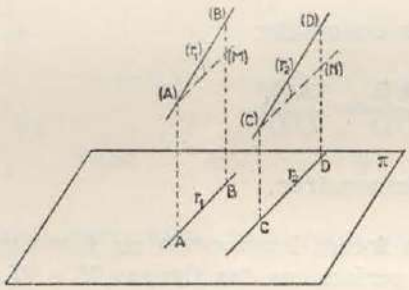


Fig.75

Temos

$$(r_1) \equiv (AB) \;//\; (r_2) \equiv CD$$

e, portanto

$$r_1 \;//\; r_2$$

Os ângulos em A, B, C, D são retos.

Tire-se, por (A), paralela (AM) a AB e, por (C) paralela (CN) a CD; as figuras AB (M) (A) e CD (N) (C) são retângulos e, portanto:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \;\#\; (AM) \\ \overline{CD} \;\#\; (CN) \end{array}\right\} \quad (1)$$

e

também $\quad (AM) \;//\; (CN)$

resultando

$$\widehat{(B)(A)(M)} = \widehat{(D)(C)(N)}$$

Os triângulos retângulos,

(A) (M) (B) e (C) (N) (D)

que têm um ângulo agudo igual, são semelhantes; então

$$\frac{(A)\,(M)}{(C)\,(N)} = \frac{(A)\,(B)}{(C)\,(D)}$$

e, em virtude das igualdades (1)

$$\frac{(A)\,(B)}{(C)\,(D)} = \frac{AB}{CD} \qquad (2)$$

Si $\pi_1 \equiv \pi$ seria verificada a igualdade (2) e, para π', teríamos também

$$\frac{(A)\,(B)}{(C)\,(D)} = \frac{A'B'}{C'D'} \qquad (3)$$

e, de (2) e (3) seria concluido:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}$$

como se pretendia demonstrar.

Si as duas retas forem horizontais ou frontais, pertencentes a mesmo plano, as épuras seriam as das figuras 76 e 77.

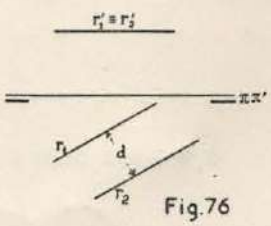


Fig.76

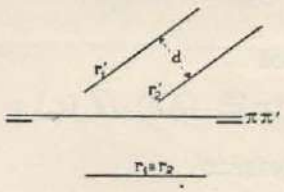


Fig.77

A perpendicular comum às projeções distintas medirá a distância entre as duas retas.

Na situação anterior, si pertencerem a planos diferentes, ter-se-ão as épuras 78 e 79.

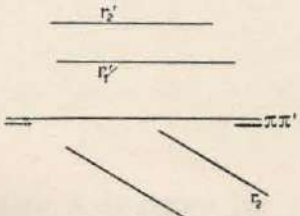


Fig.78

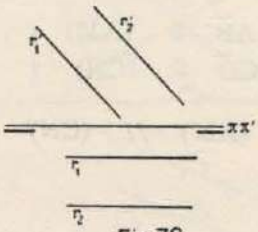


Fig.79

Si forem de topo ou verticais, serão as épuras 80 e 81

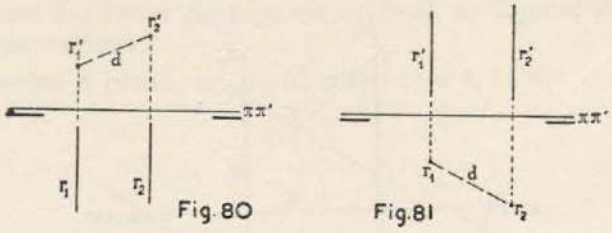


Fig. 80 Fig. 81

A distância entre as duas retas será medida pelo segmento que ligar as projeções reduzidas a um ponto.

Como anteriormente, mas pertencentes a mesmo plano de perfil, serão representadas pelas épuras 82 e 83

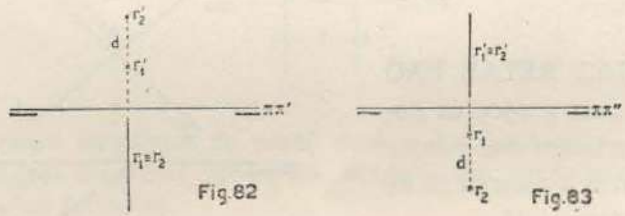


Fig. 82 Fig. 83

onde *d* medirá a distância entre elas: na terceira projeção as retas estariam destacadas.

Pertencendo ao mesmo plano projetante vertical ou horizontal, serão representadas pelas épuras 84 e 85.

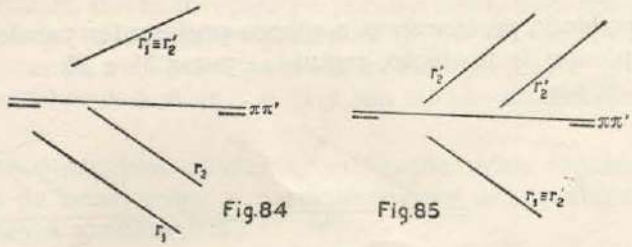


Fig. 84 Fig. 85

No caso de pertencerem a planos de perfil diferentes π_1'' e π_2'', o parelelismo e verificado pela construção das terceiras projeções, segundo figura 8.

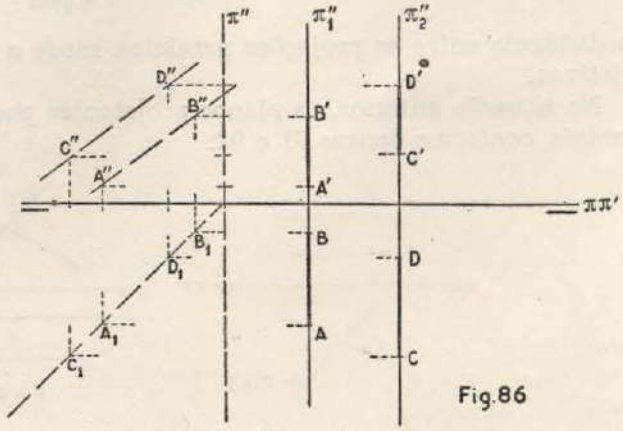


Fig. 86

podendo-se também adotar a solução habitual do caso em que as projeções de duas retas não se cortem nos limites da épura, figura 87.

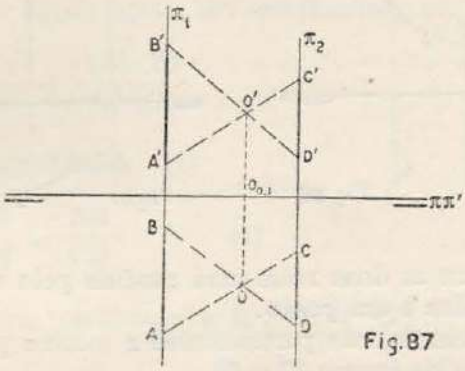


Fig.87

c) AS DUAS RETAS SÃO REVESSAS: suas projeções homônimas se cruzam em pontos não pertencentes à mesma linha de chamada, figura 88,

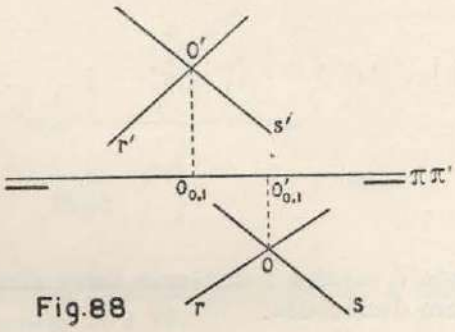


Fig.88

podendo pertencerem a planos projetantes paralelos, em relação a um dos planos de projeção, segundo épuras 89 e 90

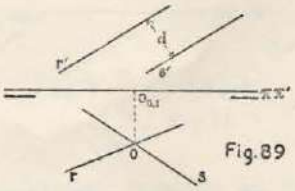


Fig.89

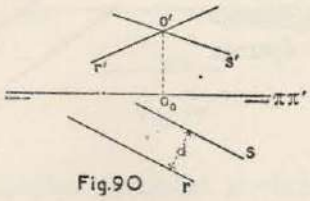


Fig.90

e a distância entre as projeções paralelas, mede a distância entre as retas objetivas.

Na situação anterior, os planos projetantes poderão ser horizontais ou frontais, conforme épuras 91 e 92:

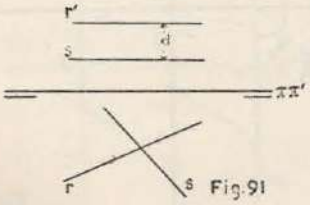


Fig.91

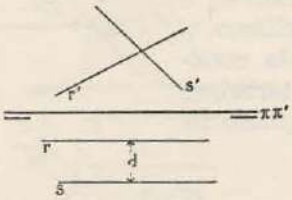
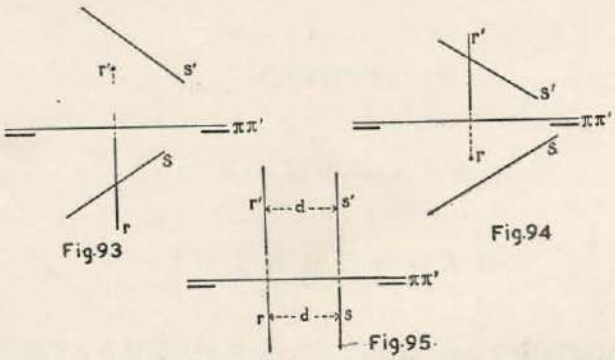


Fig.92

o ângulo das duas retas é, em verdadeira grandeza, o ângulo formado pelas projeções que se cruzam.

Sendo uma das retas de topo ou vertical, as figuras 93 e 94 serão as épuras representativas.

Si pertencerem a planos de perfil diferentes π_1'' e π_2'', conforme mostra a figura 95,



a distância entre os planos de perfil será a distância entre as duas retas e, construidas as terceiras projeções, surgirá, em verdadeira grandeza, o ângulo por elas formado.

Sabe-se que, quando duas retas são revessas, se obtem o ângulo que formam, traçando por ponto genérico do espaço, paralelas às retas: o ângulo dessas retas incidentes é o ângulo das retas revessas.

Si for necessário verificar, terem direções perpendiculares, duas retas revessas (r) e (s), por ponto (O), tirem-se paralelas (r_1) e (s_1) a (r) e (s) respectivamente: aplicando, em épura, às retas incidentes (r_1) e (s_1) a verificação já estudada, saber-se-á si (r_1) e (s_1) são ou não de direções perpendiculares.

O estudo dos métodos descritivos conduz a verificações mais rápidas, bem como a construções de retas, entre si perpendiculares, em qualquer dos sistemas que integram a axonometria.

CAPÍTULO IV

a — 1; b — 2, 3, 4.

INTRODUÇÃO

A PERSPECTIVA LINEAR E O SISTEMA DE PROJEÇÕES COTADAS SÃO CASOS MÉTRICOS PARTICULARES DA AXONOMETRIA CENTRAL

Projetando-se de polo genérico (V), figura qualquer (F), sôbre quadro genérico π_0, sabe-se ser indeterminado o problema inverso — *problema da restituição.*

Ponto objetivo (P) será determinado por sua projeção central P_0, considerando-se plano auxiliar π', a êle pertencente: será a intersecção da projetante (V) P_0, com o plano auxiliar π'.

Reta objetiva genérica (r) ficará determinada pela construção de dois de seus pontos: traço principal $T_{(r)\pi_0}$. e traço auxiliar $F'_{(r)\pi'}$.

O par de pontos $[T_{(r)\pi_0}, F'_{(r)\pi'}]$ é determinado por (r) e vice-versa.

Pode-se substituir o traço $F'_{(r)\pi'}$ por sua projeção central $F_{(r)\pi_0}$, estabelecendo-se uma correspondência bi-unívoca entre as retas (r) do espaço e os pares ordenados de pontos $[T_{(r)\pi_0}, F_{(r)\pi_0}]$ do quadro, figura 96

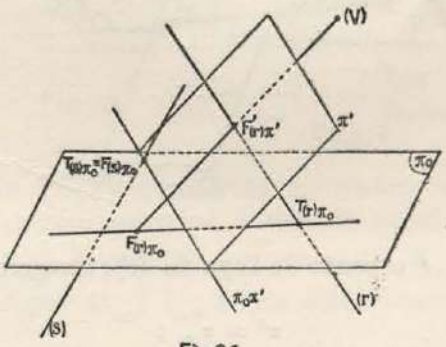


Fig.96

Haverá exceção para as retas pertencentes à intersecção $\pi_0\pi'$ para as quais, evidentemente

$$T_{(s)\pi_0} \equiv F_{(s)\pi_0}$$

Os planos do espaço serão representados de modo análogo, por seus traços: seja o plano α, de traço principal $t_{0\alpha}$ e traço auxiliar f'_α. Projetado f'_α, de (V), sôbre π_0, dá $f_{0\alpha}$: observe-se que $t_{0\alpha}$ e f'_α pertencem ao mesmo ponto de $\pi_0\pi'$; evidentemente, $f_{0\alpha}$ pertencerá também ao mesmo ponto, pois $t_{0\alpha}$, f'_α e $f_{0\alpha}$ são arestas de mesmo triedro. Há, pois, como no caso da linha reta, uma correspondência bi-unívoca entre os planos α do espaço e os pares de retas $(t_{0\alpha}, f_{0\alpha})$, com exceção feita dos planos pertencentes ao eixo $\pi_0\pi'$.

Podemos, então, referir a representação de ponto genérico (P), não só a um plano, como a uma reta a êle pertencente.

O método exposto é o da *projeção central generalizada de Fiedler Cousinery,* que se confunde plenamente com o *processo axonométrico central,* em que reta genérica fica determinada pela construção de seus traços em dois dos planos axonométricos e, sua axonometria, em qualquer dêsses planos, pelo traço a êle pertencente e pela projeção central, de um dos outros traços, sôbre o eixo axonométrico respectivo, pertencente ao plano considerado.

De método estudado se derivam, como *casos métricos particulares*:

a) o da *perspectiva linear,* quando o polo (V) é próprio e o pla- auxiliar π', impróprio;

b) o *das projeções cotadas,* quando π', é paralelo a π_0 e (V) $\equiv V_\infty$, é o ponto impróprio ortogonal de π_0.

No primeiro caso, relativamente à reta genérica (r), figura 97,

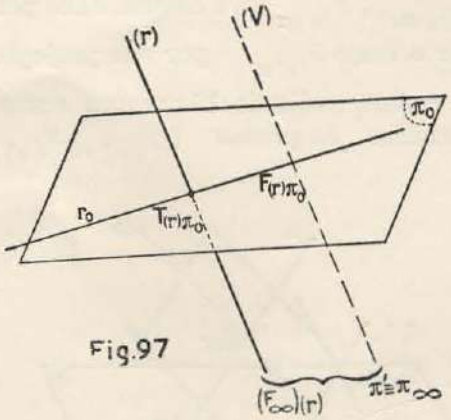


Fig.97

é fácil ver que $F_{(r)\pi_0}$ é o ponto de fuga de (r), imagem de $(F_\infty)_{(r)}$

visto ser $\pi' \equiv \pi_\infty$;

a projetante de $(F_\infty)_{(r)}$ é paralela a (r): é o raio de fuga do ponto impróprio de (r) e, portanto, $F_{(r)\pi_0}$ será o ponto de fuga de (r).

A reta

$$r_o \equiv T_{(r)\pi_0} F_{(r)\pi_0}$$

é o que se chama *a perspectiva de (r)*.

Considerando plano genérico α, chegaremos à conclusão de que $f_{o\alpha}$ será seu traço de fuga e paralelo a $t_{o\alpha}$: intersecções de dois planos paralelos, α e $\alpha_{1(v)}$ com um terceiro, π_o.

O segundo caso merecerá detalhada análise, *por ser a tese pouco conhecida*: planos π_0 e π' entre si paralelos e o polo de projeção V_∞, sendo o ponto impróprio ortogonal do quadro π_o.

Reta genérica (r) encontra π_0 e π' em pontos próprios distintos $T_{(r)\pi_o}$ e $F'_{(r)\pi'}$ que são seus traços naqueles planos.

Projetando-se ortogonalmente $F'_{(r)\pi'}$ em $F_{(r)\pi_0}$, o par $[T_{(r)\pi_0}, F_{(r)\pi_0}]$ fica definido por (r) e vice-versa.

Si $\quad T_{(r)\pi_0} \equiv F_{(r)\pi_0} \equiv R_\infty$

a reta (r) será paralela a π_0; si $T_{(r)\pi_o}$ for próprio e ocorrer

$$T_{(r)\pi_o} \equiv F_{(r)\pi_o}$$

a reta (r) será perpendicular a π_o, isto é, uma projetante.

$T_{(r)\pi_o} F_{(r)\pi_o} \equiv r_o$ é a projeção ortogonal de (r) sôbre π_0, figura 98.

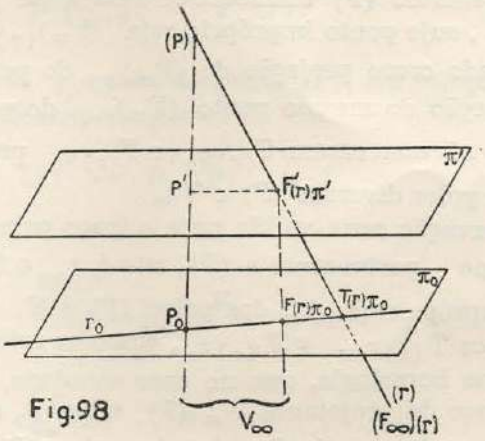


Fig.98

Sendo α, plano genérico, referido ao mesmo sistema anterior, seus traços $t_{o\alpha}$ e f'_α serão paralelos, o mesmo sucedendo ao par de retas $(t_{o\alpha}, f_{o\alpha})$, sendo $f_{o\alpha}$ a projeção ortogonal de f'_α de π' sôbre π_0. Dado o plano α, o par $(t_{o\alpha}, f_{o\alpha})$ fica determinado e, vice-versa; isto é,

consideradas, sôbre π_0, duas retas paralelas $t_{o\alpha}$ e $f_{o\alpha}$ fica determinado o plano α de que elas são o traço principal e a projeção ortogonal do traço auxiliar respectivamente: as exceções ,agora, se referem à coincidência de $t_{o\alpha}$ e $f_{o\alpha}$ com a reta imprópria de π_0 circunstância em que α será paralelo a π_0 e a π'; e, si $t_{o\alpha} \equiv f_{o\alpha}$, a distância finita, o plano α será perpendicular a π_0, isto é, um plano projetante.

Então, ponto genérico (*P*) ficará determinado por sua projeção ortogonal P_0 e reta $[T_{(r)\pi_0} F_{(r)\pi_0}]$, a êle pertencente, ou plano $(t_{o\alpha}, f_{\alpha o})'$ nas mesmas condições.

Vejamos como o método descrito se identifica com o das *projeções cotadas.*

Admita-se *como unidade de medida,* a distância entre π_0 e π' e que π, tenha cota positiva em relação a π_0 : para reta genérica (r) os traços $T_{(r)\pi_0}$ e $F'_{(r)\pi'}$ correspondem a pontos de *cota zero* e *cota unitária;* então, conhecidos, $F_{(r)\pi_0}$ projeção ortogonal de $F'_{(r)\pi'}$ e a representação do ponto de (r), de *cota zero,* isto é, $T_{(r)\pi_0}$, poder-se-á graduar a reta r_0 e, partindo desta, graduar a reta objetiva (r), conforme procedimento em geometria cotada.

O mesmo fato ocorrerá para plano genérico α : o traço principal $t_{o\alpha}$ será sua *horizontal de cota zero,* enquanto $f_{o\alpha}$, a projeção ortogonal da *horizontal de cota zero,* donde se poder graduar a *escala de declividade* do plano α e , desta partindo, graduar a *linha de maior declive,* cuja projeção ortogonal é a própria *escala de declividade.*

HOMOTETIA RELATIVA À REPRESENTAÇÃO DE UM PONTO

Dado ponto genérico (P) considere-se reta a êle pertencente (r) $\equiv [T_{(r)\pi_0}, F_{(r)\pi_0}]$, cujo ponto impróprio seja $(F_\infty)_{(r)}$: o traço $T_{(r)\pi_0}$ pode ser considerado como projeção de $(F_\infty)_{(r)}$, do polo (*P*), emquanto $F_{(r)\pi_0}$ seria projeção do mesmo ponto $(F_\infty)_{(r)}$ do polo V_∞ , sôbre π_0 também: importa afirmar serem $T_{(r)\pi_0}$ e $F_{(r)\pi_0}$ projeções do mesmo ponto $(F_\infty)_{(r)}$, de polos diversos (*P*) e V_∞.

A mesma observação seria válida para o traço principal $t_{o\alpha}$ e o traço de fuga $f_{o\alpha}$ de plano α pertencente a (*P*), isto é, $t_{o\alpha}$ e $f_{o\alpha}$ seriam as projeções, da reta imprópria $(f_\infty)_\alpha$ dos polos (*P*) e V.

Todos os pontos $T_{(r)\pi_0}$, e $F_{(r)\pi_0}$, como as retas $t_{o\alpha}$ $f_{o\alpha}$ se correspondem em uma homologia, que no caso estudado, é uma homotetia, cujo centro é o traço da projetante V_∞ (*P*), sôbre π_0 e, portanto, P_0 .

Conhecido P_0 , a homotetia fica determinada por dois elementos homologos: traço principal $T_{(r)\pi_0}$ e ponto de fuga $F_{(r)\pi_0}$ de uma reta (r) ou traço principal $t_{o\alpha}$ e traço de fuga $f_{o\alpha}$ de um plano α, pertencentes, em ambos os casos, a (*P*) .

Reciprocamente, dois pontos ou duas retas, correspondentes na homotetia, podem ser considerados como ponto principal e ponto de fuga de uma

reta ou traço principal e traço de fuga de um plano, de estrela de centro (P).

A coincidência $(P) \equiv P'$ sôbre π', indicaria terem as retas, pertentencentes a (P), seus traços coincidentes com (P), enquanto poderem pertencer seus traços de fuga a quaisquer pontos do quadro; analogamente, (P) pertencerá aos traços principais dos planos da estrela de centro (P). Nestas condições, a dupla projeção, sôbre quadro π_0 de polos (P) e V_∞, dos pontos e retas do plano impróprio, não mais se corresponderão bi-univocamente.

Concluindo: os traços principais e os traços de fuga, de retas pertencentes a ponto genérico (P),constituem pares de pontos homólogos de uma homotetia K_p, cujo centro é P_0 projeção de (P) sôbre o quadro. Nesta homotetia, se corresponderão também os traços principais e os traços de fuga dos planos pertencentes a (P). A esta homotetia K_p, dá-se o nome de *homotetia relativa à representação do ponto* (P) *ou homotetia de representação do ponto* (P) e diz-se, ainda, ser a homotetia K_p, representativa do ponto (P).

Considerando ainda a figura 98, fácil é observar que os triângulos $P_0\,P\,T_{(r)\pi_0}$ e $P'\,P\,F'_{(r)\pi'}$ retângulos em P_0 e P' são diretamente homotéticos, sendo,

$$\frac{P_0\,T\,(r)_{\pi_0}}{P'\,F'_{(r)\,\pi'}} = K_p$$

a razão de hometetia e, como $F'_{(r)\pi'} \cdot F_{(r)\pi_0} = 1$ (unidade de medida), pode-se escrever:

$$\frac{P_0\,T_{(r)\,\pi_0}}{P'\,F'_{(r)\,\pi'}} = \frac{P_0\,(P)}{P'\,(P)} = K_p,$$

fazendo $P_0\,(P) = q_p$, cota do ponto (P), em relação ao *plano de referência* π_0 e, verificando-se que

$$P'\,(P) = P_0\,(P) - 1$$

vem:

$$\frac{P_0\,(P)}{P_0\,(P)-1} = K_p$$

ou

$$\frac{q_p}{q_p - 1} = K_p$$

de onde resulta

$$q_p = (K_p\,q_p) - K_p$$

ou

$$q_p\,(K_p - 1) = K_p$$

donde

$$\boxed{q_p = \frac{K_p}{K_p - 1}}$$

relação que liga a cota do ponto (P) à razão de homotetia relativa ao mesmo ponto.

O problema que vimos de estudar é de capital importância em geometria cotada, pois, dada, no plano de referência π_0, a projeção ortogonal P_0 de ponto objetivo (P), considerada como centro de um feixe de retas e, a razão de homotetia K_p, é possivel, pela fórmula

$$q_p = \frac{K_p}{K_p - 1}$$

determinar a cota do ponto (P), centro de uma estrela de raios e de planos, subordinados à homotetia K_p e graduar tôdas as retas do feixe de centro P_0, bem como construir as *escalas de declividade* dos planos, pertencentes ao ponto objetivo (P).

A — a. 1 — AXONOMETRIA CENTRAL

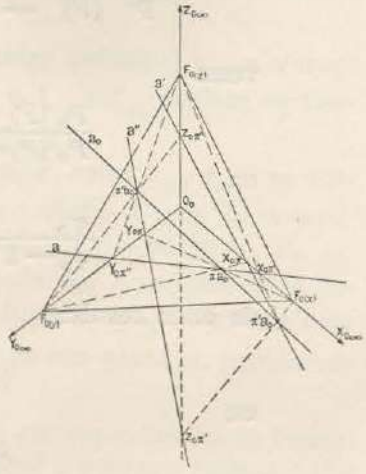
Passamos agora ao estudo da axonometria cônica ou central da linha reta, iniciando pelo problema de representação mais geral, quando os traços dos três eixos objetivos são próprios. O polo de projeção sabe-se, também, ser próprio.

1) AXONOMETRIA CENTRAL DE RETA GENÉRICA — a) *definida por seus traços*: não só será determinada a *axonometria verdadeira ou direta da reta* bem como a 1.ª, 2.ª e 3.ª projeções axonométricas, partindo de seus traços nos planos axonométricos respectivos, cujas coordenadas supomos conhecidas (geralmente fornecidas pelas projeções mongeanas).

A solução do problema depende do conhecimento dos pontos de fuga $F_0(x)$, $F_0(y)$, $F_0(z)$ dos eixos axonométricos, bem como da axonometria central O_0 do vértice do triedro objetivo e das semi retas $O_0X_{0\infty}$, $O_0Y_{0\infty}$, $O_0Z_{0\infty}$ — eixos axonométricos; figura 99.

O ortocentro do triângulo dos pontos de fuga — projeção ortogonal do ponto de vista (V) — polo de projeção — será o ponto principal do sistema — V_0.

Da épura mongeana recolhem-se as coordenadas $(x)_\pi$ e $(y)_\pi$ do traço horizontal da reta π_a, que serão levadas aos eixos axonométricos respectivos, após sofrerem as alterações das respectivas escalas: obtidos $X_{0\pi}$ e $Y_{0\pi}$, as



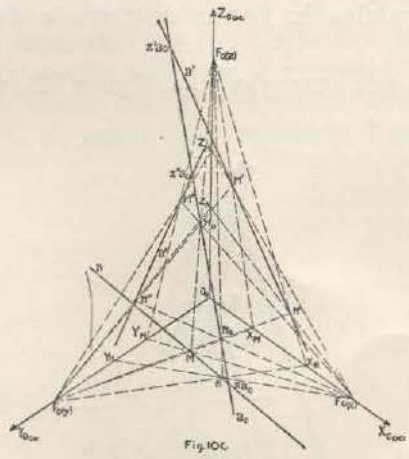
(Figura 99)

paralelas aos eixos, traçadas por esses pontos extremos, convergirão para os respectivos pontos de fuga e darão, por sua intersecção, πa_0.

As coordenadas $(y)_{\pi''}$ e $(z)_{\pi''}$ do traço de perfil da reta permitirão, como anteriormente, ligando seus extremos $Y_{0\pi''}$ e $Z_{0\pi''}$ aos pontos de fuga $F_{0(z)}$ e $F_{0(y)}$, respectivamente, a determinação de $\pi''a_0$. O traço $\pi'a_0$ pode ser diretamente determinado, na épura, pela construção da segunda projeção axonométrica da reta; de fato, a projeção central de πa_0 sôbre o eixo dos x é o extremo $X_{0\pi}$ e, a de $\pi''a_0$ sôbre o eixo dos z_0, $Z_{0\pi''}$: então, $X_{0\pi}$, $Z_{0\pi''}$ será a segunda projeção axonométrica da reta, que encontrará sua axonometria verdadeira — πa_0. $\pi''a_0$ — no ponto $\pi'a_0$ procurado. A primeira projeção axonométrica se obtem projetando conicamente $\pi''a_0$ em $Y_{0\pi''}$ e $\pi'a_0$ em $X_{0\pi'}$: $Y_{0\pi''}$ $X_{0\pi'}$, será a primeira projeção axonométrica, pertencente forçosamente a πa_0.

A terceira projeção axonométrica seria $Y_{0\pi}$. $Z_{0\pi'}$ pertencente a $\pi' a_0$.

b) O caso da reta, indefinida ou limitada, definida por dois de seus pontos, carece de importância, pois êsses pontos seriam axonometricamente construidos por suas coordenadas, obtendo-se suas perspectivas diretas ou verdadeiras, bem como suas primeiras, segundas e terceiras projeções axonométricas, que ligadas, duas a duas, respectivamente, dariam as projeções da reta. As intersecções dessas projeções com a axonometria direta da reta forneceriam os respectivos traços, conforme mostra a épura 100.



(Figura 100)

O problema da graduação dos eixos axonométricos centrais, básico para os problemas que acabamos de resolver, é problema simples que o aluno deve ter sempre presente, quer utilizando o rebatimento de (V) ou não: é a construção de *uma escala harmônica* ou *fugitiva de Desargues.* Com aproveitamento dessa graduação, determina-se o ponto principal V_0 e a distância principal — *afastamento do observador.* O ponto principal V_0 pertence à reta que liga a origem axonométrica ao ortocentro do triângulo dos traços, sendo êsse triângulo de grande utilidade na solução

dos *problemas métricos,* mas dispensável na apreciação dos *problemas gráficos* ou de *posição,* como os de representação da linha reta.

Em axonometria central, não podem deixar de ser considerados, os três seguintes problemas:

a) determinação do triângulo das linhas neutras;
b) traço π_0 (a) de reta genérica;
c) ponto de fuga F_0 (a) de reta genérica.

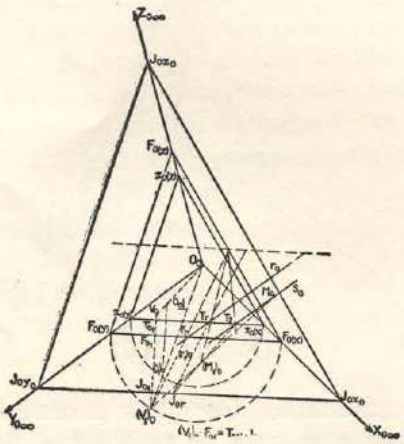
a) O triângulo das linhas neutras $j_{o\pi}$, $j_{o\pi'}$, $j_{o\pi''}$ é homotético do triângulo fundamental, e, também, do triângulo dos pontos de fuga e sua determinação é importante, por facilitar a solução de inúmeros problemas em axonometria central, como sejam: tangentes a curvas, paralelas a uma direção dada; transformação de feixes de retas, de centro próprio, em feixes de retas paralelas; e, de modo geral, nos problemas da axonometria central de elevação, para figuras apoiadas nos planos axonométricos.

O princípio utilizado, para essa determinação, é o mesmo conhecido da homologia plana, para determinação das *retas-limite* da primeira e da segunda figuras, como, também, da perspectiva linear, para o traçado das linhas neutras; isto é:

> "O rebatimento da linha neutra dista da linha de terra, da mesma distância que o rebatimento do ponto de vista, da linha do horizonte".

Traçada uma das linhas neutras, as outras duas são construidas por homotetia: são paralelas às linhas de terra e do horizonte, correspondentes.

Para uma delas, por exemplo, $j_{o\pi}$, figura 101, rebate-se (V) em $(V_1)_o$



(Figura 101)

e toma-se a distância $(V_1)_o \cdot F_{o1}$, de (V_{o1}), à linha do horizonte f_π, a partir de T_{o1}, na linha de terra t_π, obtendo-se J_{o1}, que é o ponto neutro relativo a $j_{o\pi}$ procurada.

V_o $(V_1)_o$ é a primeira vertical principal, à qual também pertence J_{o1}: a intersecção de V_o $(V_1)_o$ com f_π, isto é, o ponto F_{o1}, é o ponto de fuga das perpendiculares a π, ou seja a primeira projeção do ponto principal — V_o.

Como exercício elementar, dada a reta r_o e o rebatimento $(M_1)_o$ de ponto (M), traçar por seu correspondente axonométrico M_o, reta paralela a r_o.

O traço de r_o é T_r, em t_π e seu ponto de fuga, F_r, em f_π: $(V_1)_o$ Fr. é seu raio de fuga: então, o rebatimento de r_o é $(r_1)_{or} \equiv TJ_{or}$, paralela a $(V_1)_o$. F_r.

O rebatimento $(r_1)_o$ encontra $j_{o\pi}$ em J_{or} e tôdas as retas pertencentes a J_{or} terão axonometrias paralelas a r_o; nessas condições, J_{or}. $(M_1)_o$ encontrando t_π em T_s, êste ponto será o traço de s_o, paralela a r_o.

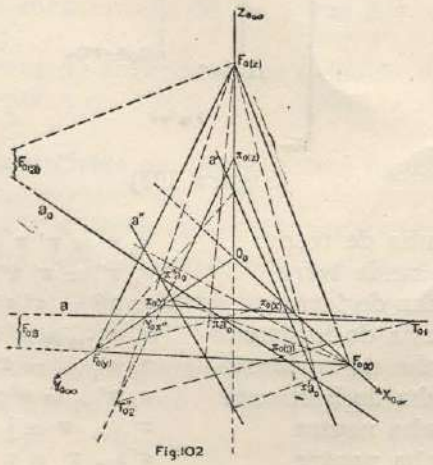
A projetante $(V_1)_o$. $(M_1)_o$ determinará sôbre s_o, o ponto M_o que é o correspondente axonométrico de $(M_1)_o$.

---

b) Seja reta (a), de axonometria central verdadeira a_o, cujo traço π_o (a) queremos determinar.

Sendo πa_o, seu traço em π e π''_{ao}, em π'', a primeira projeção axonométrica será a $\equiv \pi a_o . Y_o\pi''$, sendo $Y_o\pi''$ a projeção cônica do traço $\pi''a_o$ de Fz_o sôbre o eixo dos y_o.

Interpretemos o significado de a $\equiv \pi_{ao}$. $Y_o\pi''$ e Fz_o. $Y_o\pi''$: o plano projetante de (a), sôbre π é paralelo ao eixo dos (z); portanto, seus traços sôbre π'' e π' serão paralelos ao eixo dos (z) e, em axonometria central, dirigidos para o ponto de fuga Fz_o o eixo dos (z); o terceiro traço dêsse plano projetante se confundirá com a primeira axonometria *a*, no plano π. A intersecção desse plano projetante com o quadro será T_{o1} T''_{o2}, que encontra r_o no ponto $\pi_o a$ procurado, figura 102.



(Figura 102)

c) O ponto de fuga de a $\equiv \pi a_o . Y_o{}_\pi''$, é F.a: um plano paralelo ao plano projetante de *a*, traçado por (V) terá traço sôbre π, pertencente a

F.a e, sôbre , *traço de fuga,* dirigido para Fz_0: F a. Fz_0, traço de fuga, cortará r_0 em F_0 (a) que é o ponto de fuga procurado; figura 102.

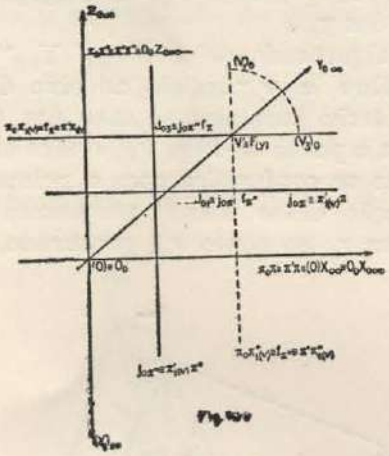
Exercícios sôbre retas especiais completarão o parágrafo A — a. 1), deste capítulo IV.

A — b — 2) — PERSPECTIVA LINEAR

A finalidade deste parágrafo é dar à *perspectiva cônica,* também denominada *perspectiva linear,* o mesmo tratamento geral da axonometria central, procedendo à determinação da perspectiva linear verdadeira ou direta de uma reta, bem como de suas primeiras, segundas e terceiras projeções, dados dois de seus traços ordinários ou dois de seus pontos genéricos.

Deixaremas, inteiramente de lado, o tratamento habitual dessa perspectiva, *dependente inteiramente do sistema mongeano de projeções,* quando elementos definidores da épura, ficam totalmente desapercebidos do aluno, para considerá-la, apenas, caso particular da axonometria central, quando $\pi_0 \equiv \pi'$, isto é, quando o plano dos (xz) coincide com o quadro.

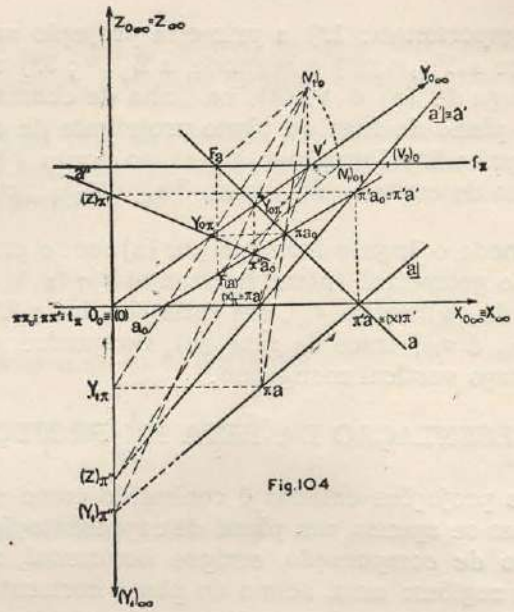
Nestas condições, é facil verificar que, (figura103):



(Figura 103)

Primeira linha de terra	$\pi_0\ \pi \equiv \pi'\ \pi \equiv O_0\ X_{0\infty}$
Segunda linha de terra	$\pi_0\ \pi' \equiv \pi'\ \pi' \equiv p'_\infty$
Terceira linha de terra	$\pi_0\ \pi'' \equiv \pi'\ \pi'', \equiv O_0\ Z_{0\infty}$
Primeira linha do horizonte	$\pi_0\ \pi_{1(v)} \equiv \pi'\ \pi_{1(v)} \equiv f_\pi$
Segunda linha do horizonte	$\pi_0\ \pi'_{1\ (v)} \equiv \pi'\ \pi'_{1(v)} \equiv p'_\infty$
Terceira linha do horizonte	$\pi_0\ \pi'_{(v)} \equiv \pi'\ \pi''_{1(v)} \equiv f_{\pi''}$
Primeira linha neutra	$\pi'_{1(v)} \cdot \pi \equiv j_{0\pi}$
Segunda linha neutra	$\pi'_{1\ (v)}\ \pi' \equiv p'_\infty$
Terceira linha neutra	$\pi'_{1(v)} \cdot \pi'' \equiv j_{0\pi''}$

cumprindo observar que a primeira linha neutra dista da primeira linha de terra, da distância principal e a terceira, da terceira linha de terra, também da mesma distância.



Na épura perspectiva, conforme figura 104, sabe-se que o eixo dos (y), sendo perpendicular ao quadro π', tem sua perspectiva dirigida para V', que coincide com o ponto de fuga das principais.

Definido, então, o sistema, por seus elementos fundamentais estudados apreciemos a determinação da perspectiva linear de reta genérica, conhecidas as coordenadas objectivas de dois de seus traços ordinários, isto é $(x)_\pi$, $(y)_\pi$ e $(x)_{\pi'}$, $(z)_{\pi'}$.

Marcadas axonometricamente essas coordenadas, a projeção central de, $(Y_1)_\pi$ é $Y_{o\pi}$, sôbre o eixo dos y_o e a projeção central da reta $(Y_1)_\pi$. $^\pi a$ $Y_{o\pi}$. $^\pi a_o$), paralela a $O_o X_{o\infty}$, visto ser impróprio o ponto de fuga do eixo dos x_o.

πa projetado conicamente dá πa_o que é a axonometria do primeiro traço da reta (a).

A axonometria do segundo traço coincide com o próprio traço vertical da reta no plano do quadro π' — será $\pi' a' \equiv \pi' a_o$ dado por suas coordenadas.

A axonometria, direta de (a) se obterá ligando os dois traços já obtidos; isto é será $a_o \equiv \pi a_o$. $\pi' a_o$.

Ligando πa a $\pi' a$, ter-se-á a projeção mongeana horizontal da reta, $\underline{a}|$ e, a projeção vertical correspondente, ligando $\pi a'$ a $\pi' a'$.

A primeira perspectiva é π' a.Fa $\equiv$ a, perspectiva linear da projeção horizontal $\underline{a}|$; a segunda, $a' \equiv \underline{a'}|$, a própria projeção mongeana vertical e, a terceira é obtida, prolongando-se as projeções mongeanas $\underline{a}|$ e $\underline{a'}|$ até o traço do plano dos yz, afim de determinar as projeções $(Y_1)_{o\pi'}$, e $Z_{o\pi''}$ de seu traço de perfil. A projeção central de $(Y_1)_{o\pi''}$ é $Y_{o\pi''}$ e a paralela traçada, por êsse ponto, ao eixo dos z_o, que tem ponto de fuga impróprio, vai encontrar a projeção central da paralela, traçada por $Z_{o\pi''}$, ao eixo dos (y), em $\pi'' a_o$, que é o traço de perfil procurado.

A terceira perspectiva de (a) é $a'' \equiv Y_{o\pi}$. $\pi'' a_o$.

Verificações importantes: 1.ª) a primeira projeção axonométrica central deve pertencer a $Y_{o\pi}''$; 2ª) a segunda, a $Z_{o\pi}''$; 3.ª) a terceira, a $Y_{o\pi}$ 4.ª) o ponto de fuga de (a) é F_o (a), na linha de chamada de Fa, pois o traço de fuga, do plano de fuga do plano projetante de *a*, é dirigido para Fz_o que é impróprio; 5.ª) ligando-se F_o(a) ao ponto $(V_1)_{o1}$, obtido pela intersecção do arco de centro Fa e raio Fa. $(V_1)_o$, com f_π, o ângulo $\widehat{f_\pi (V_1)_{o1} F_o}$ (a) mede o ângulo formado por (a) com o primeiro horizontal principal ou com o geometral (plano horizontal π) : $(a_1)_o \equiv F_o$ (a). $(V_1)_o$ é o rebatimento de (a) sobre π_o , em torno de f π ; 6.º) o encontro de F (a). π a, com a_o é πa_o traço da reta (a), no quadro π', que, já vimos, coincidir com o traço vertical mongeano.

A—b—3) REPRESENTAÇÃO DA RETA EM PROJEÇÕES COTADAS

O método das projeções cotadas é conhecido como *método de representação mista*: usa-se apenas, um plano de representação — *plano de referência ou plano de comparação*, sempre *horizontal*, ficando o espaço dividido em duas regiões: uma, acima do plano horizontal, (quadro), positiva, onde as cotas são contadas positivamente e na qual se supõe sempre o observador; outra, abaixo do quadro, negativa, onde as cotas se consideram negativamente. As figuras pertencentes ao plano de comparação são de *cota nula*.

Sendo (*P*) o ponto objetivo, P_o *sua* projeção cotada e q_p sua cota, sabe-se que o par (P_o, q_p), constituido pelo ponto P_o e pelo número q_p representa a projeção cotada do ponto (*P*); reconhece-se, ainda, existir uma correspondência bi-unívoca, entre o par (P_o, q_p) e o ponto objetivo (*P*), podendo-se escrever $(P) \equiv (P_o, q_p)$.

Na representação da reta, como se trate de projeção ortogonal sôbre quadro horizontal — *sua projeção cotada é uma reta*, o que permite sua representação, conhecidos dois de seus pontos.

Si a reta fôr perpendicular ao plano de comparação, sua projeção cotada será um *ponto*, que representará todos seus pontos objetivos — *reta vertical*; si for paralela ao quadro, todos seus pontos terão a mesma cota — *reta horizontal*.

São estas as três posições distintas de uma reta em relação ao plano de comparação.

O ângulo da reta (r) com sua projeção cotada r_o, isto é, $\widehat{(r) r_o}$, mede sua *inclinação; distância horizontal* de dois pontos é o segmento que une suas projeções; *distância vertical, diferença de cota, diferença de nivel* ou *desnivel* de dois pontos é a diferença entre as suas cotas; assim sendo *d* a distância horizontal de dois pontos, *h*,sua distância vertical a relação

$$p = \frac{d}{h}$$

é o que chama — *declive da reta objetiva*, sendo fácil verificar que $\frac{h}{d} = \text{tg} \left[\widehat{(r) r_o} \right]$. o que se enuncia:

"o declive de uma reta é a tangente trigonométrica do ângulo que ela fórma com sua projeção cotada".

Fácil verificar ser *nulo* o declive de uma *horizontal* e, *infinito*, o de uma *vertical*, ou melhor, o declive de uma vertical "*não é mais definido*".

Intervalo de uma reta ou módulo é o número que mede a distância horizontal de dois pontos cujas cotas diferem de uma unidade. Verifica-se, agora, serem declive e intervalo números inversos; sendo *m* o modulo, como

$$p = \frac{h}{d}$$

para h = 1, teremos d = m e, portanto:

$$p = \frac{1}{m}$$

ou

$$m = \text{cotg}\ [\widehat{(r), r_0}]$$

isto é:

"o módulo de uma reta é igual à cotangente do ângulo que ela forma com sua projeção cotada".

Na prática, não se cogita de declive ou módulo de uma horizontal ou de uma vertical.

Deixamos de *repetir* os problemas usuais sôbre a reta, por se encontrarem suficientemente esclarecidos em qualquer tratado de "Geometria Descritiva".

Graduar uma reta é marcar, sôbre sua projeção cotada, as projeções dos pontos de *cota redonda*: a reta r_0, com essa escala sôbre ela construida, diz-se a *imagem graduada* da reta objetiva (r).

Há mencionar a observação de alguns autores:

> A escala gráfica de r_0, denomina-se *impròpriamente*, de escala gráfica de (r) e, ao intervalo de r_0, se chama também de intervalo de (r).
> A escala gráfica de r_0 resulta da projeção ortogonal da escala gráfica sôbre (r), que tem, como sentido positivo, o de (r); como origem, seu traço $T_{0\,(r)}$ — *ponto de cota zero* —, que é a mesma origem da escala gráfica de r_0 e cujos pontos de divisão são os de cota *um, dois, três,* etc: o intervalo desta escala é medido por

$$\frac{1}{\text{sen}\ [\widehat{(r), r_0}]} = \sqrt{1 + \frac{1}{p^2}}$$

Para graduar uma reta, não é necessário recorrer ao rebatimento de seu plano projetante, em torno de sua projeção cotada.

Sejam $q_{(A)}$ e $q_{(B)}$ as cotas correspondentes aos pontos (A) e (B), de reta (r), de projeções cotadas A_0 e B_0.

Si $\quad q_{(A)} \angle q_{(B)}$

o sentido crescente da escala gráfica de r_0 é de A_0 para B_0. Sendo, $q_{(A)}$ e $q_{(B)}$ números inteiros, o número, que mede o segmento A_0 B_0, dividido pela diferença

$$q_{(B)} - q_{(A)}$$

dá o intervalo ou unidade

$$m = \frac{1}{p}$$

da escala e, repetindo o intervalo, a partir de qualquer dos extremos do segmento, a reta fica graduada. Caso $q_{(A)}$ e $q_{(B)}$ não sejam inteiros, são tornados inteiros, pela multiplicação por conveniente potência de 10: seja 10^n.

Dividindo o número que mede o segmento A_0 B_0 por 10^n $(q_{(B)} - q_{(A)})$, ter-se-á o submúltiplo, de ordem n, do intervalo procurado, recaindo o problema no anterior.

Pertinência entre reta e ponto — A condição necessária e suficiente para que ponto (*P*) pertença a (r) é que sua projeção cotada P_0, sôbre a imagem graduada r_0 de (r), caia no ponto da escala gráfica de mesmo índice que a cota do ponto (*P*).

Retas incidentes — a) *em ponto próprio.* A condição necessária e suficiente para que duas retas, (r) e (s), que se cortam em épura, sejam concurrentes no espaço, é que o ponto comum às suas imagens graduadas, tenha o mesmo índice nas escalas gráficas construidas sôbre as duas retas. As retas que unem os pontos das duas escalas, de mesmos índices, são paralelas e, vice-versa, de modo que um segundo modo de verificação se obtem, unindo os pontos de mesmo índice das duas escalas gráficas: si as retas resultantes forem paralelas, as duas retas objetivas serão incidentes.

b) *em ponto impróprio* — 1) Duas horizontais são paralelas quando suas projeções cotadas são paralelas.

2) duas verticais são paralelas como perpendiculares ao quadro.

3) *Caso geral*: Para que duas retas objetivas (r) e (s) sejam paralelas, suas projeções cotadas, r_0 e s_0, devem ser paralelas, seus intervalos devem ser iguais e as escalas gráficas devem ter o mesmo sentido: nessas condições, as retas que unem os pontos das duas escalas gráficas, de mesmos índices, são entre si paralelas.

Perpendiculares — *Teorema*: Tôda reta perpendicular a uma horizontal tem sua projeção cotada perpendicular a da horizontal.

De fato, já demonstramos, ao tratar do sistema mongeano se projetar, ortogonalmente, em verdadeira grandeza, sôbre plano genérico, o ângulo reto que lhe tem um lado paralelo. A recíproca desse teorema é verdadeira.

A condição necessária e suficiente para que duas retas (r) e (s), pertencentes a mesmo plano projetante, sejam perpendiculares, ou pertencentes a planos projetantes paralelos, tenham direções perpendiculares

é que suas projeções cotadas coincidam ou sejam paralelas e que suas escalas gráficas tenham sentido oposto e intervalos inversos.

Si (r) é perpendicular a (s), cortam-se em ângulo reto, em ponto (*P*), que admitimos de cota unitária, e do triângulo retângulo objetivo $T_{o(r)}$. (P) $T_{o(s)}$ (sendo $T_{o(r)}$ e $T_{o(s)}$, respectivamente os traços das duas retas no plano de comparação), tira-se, sendo P_o a projeção de (*P*):

$$T_{o(r)}\, P_o \times T_{o(s)}\, P_o = 1$$

Admitindo que $T_{o(r)}$ e $T_{o(s)}$ são as origens das escalas gráficas de r_o e s_o, fica provado que as escalas gráficas têm sentidos opostos e também intervalos inversos por ser seu produto igual à unidade.

Inversamente, sendo P_o interno aos traços $T_{o(r)}$ e $T_{o(s)}$, as duas retas (r) e (s) são entre si perpendiculares.

Propositadamente, tratamos genéricamente da representação cotada da linha reta, sem épuras, para provar que o assunto, por sua simplicidade, em seus problemas mais gerais e usuais, pode perfeitamente dispensar as soluções gráficas respectivas e o nosso objetivo único, ao tratar desse sistema de representação era provar que êle se integra perfeitament na axonometria, conforme demonstração na "*Introdução*" deste capítulo.

A —c — 5) CASO PARTICULAR DE ESTANISLAO VECCHI

Quando o ponto de vista pertence à perpendicular ao quadro traçada pela origem objetiva, teremos caso particular de axonometria central, estudado por Estanislau Vecchi. As escalas lineares de Desargues serão determinadas como no caso geral, as condições do problema se assemelhando as do caso axonométrico ortogonal. Deixamos de estudar qualquer detalhe deste sistema, por se encontrar minuciosamente considerado no esplendido compêndio do Prof. Alvaro Rodrigues — "*Perspectiva Paralela*", Imprensa Nacional, 1948 — Rio de Janeiro.

CAPÍTULO V

(B — d — 6; c — 7; e — 8)

AXONOMETRIA OBLÍQUA

AXONOMETRIA CAVALEIRA DA LINHA RETA OU PERSPECTIVA CAVALEIRA

Estudaremos a perspectiva cavaleira, do ponto de vista axonométrico, como paradigma das axonometrias cilíndricas ou paralelas.

Na axonometria oblíqua, fixado o quadro, adota-se direção visual, não perpendicular ao quadro e os traços dos eixos objetivos podem ser todos próprios, um impróprio ou dois impróprios, dando lugar à classificação adotada no quadro geral do ínicio desse trabalho.

Si os três eixos objetivos tiverem traços próprios, o triângulo axonométrico, de vértices também próprios, gosará das seguintes propriedades:

a) será acutângulo;

h) seu ortocentro coincidirá com a projeção ortogonal da origem objetiva;

c) o segmento da projetante ortogonal do vértice do triedro objetivo, compreendido entre êsse vértice e o quadro será média proporcional entre os segmentos em que o ortocentro divide as alturas do triângulo axonométrico;

d) os ângulos formados pelas projeções ortogonais dos eixos objetivos, em torno do ortocentro, serão obtusos e ter-se-á:

$$\widehat{Y_{0'} Z_0} + \widehat{X_{0'} Z_0} + \widehat{X_{0'} Y_0} = 2\pi$$

Projetada oblíquamente a origem objetiva, a origem axonométrica não mais corresponderá ao ortocentro, podendo ser ponto genérico de π_0, que, dada a diversidade das direções visuais, poderá ser fixada arbitráriamente e não mais subsistirão as condições definidas pelas desigualdades.

$$\widehat{Y_0, Z_0} > \frac{\pi}{2} \; ; \; \widehat{X_0, Z_0} > \frac{\pi}{2} \; ; \; \widehat{Y_0, X_0} > \frac{\pi}{2} \, .$$

Fixado o triângulo fundamental dos traços, a origem axonométrica e a unidade objetiva, as unidades axonométricas serão definidas por suas equações características, com a observação de que, se tratando de projeção oblíqua, qualquer dessas unidades, ou tôdas poderão ser maiores que a unidade objetiva, quando os *coeficientes de alteração,* forem maiores do que 1 (um).

A disposição do sistema é orientada pelo teorema fundamental de Pohlke, cujo enunciado relembramos:

"Fixados sôbre o quadro, a partir de ponto genérico, três segmentos de grandezas arbitrárias, contanto que um deles não seja nulo, nem também, mais de um dos ângulos por êles formados, dois a dois, êstes segmentos poderão ser sempre considerados como projeções paralelas de três segmentos objetivos pertencentes a um ponto do espaço, iguais e entre si perpendiculares, dois a dois".

Com fundamento neste teorema, para definir sistema axonométrico oblíquo, basta escolher, a partir de um ponto do quadro, três semi-eixos axonométricos positivos e, sôbre êles, unidades axonométricas arbitrárias.

Observe-se, porém, que êsses elementos, assim arbitráriamente escolhidos, poderão conduzir a uma representação da figura objetiva que fuja ao caráter de imagem perspectiva.

Dois tipos de sistemas axonométricos dão perspectivas oblíquas de fácil execução e de efeito satisfatório:

B — d — 6 —AXONOMETRIA ISOMÉTRICA A 45°

Um primeiro é aquêle em que se coloca o quadro paralelamente a um dos eixos objetivos — *precisamente o dos* (z) — resultando ser a unidade axonométrica u_{oz} igual à unidade objetiva: obtêm-se imagens bastante expressivas, dispondo o eixo dos (x) e o dos (y) simétricamente inclinados em relação ao dos (z); de 97°, dirigidos para o observador, no caso de se desejar um *vista de cima* e de 83°, para uma *vista de baixo.* O sistema sofre ligeira modificação e torna-se isométrico quando as projetantes são igualmente inclinadas sôbre π e sôbre o eixo dos (z): demonstra-se então que, as paralelas aos eixos dos (x) e dos (y), se conservam entre si perpendiculares, acarretando ficarem inalteradas as figuras geometrais e, como também não se deformem as alturas, o sistema isométrico fica definido: *sistema isométrico a* 45°.

Em trabalho nosso, "Ensaios de Axonometria", página 35 e seguintes, fizemos um estudo desse sistema.

B — e — 7) PERSPECTIVA CAVALEIRA

Um segundo sistema, também bastante empregado, de axonometria obliqua, é obtido colocando-se o quadro paralelamente a um dos planos objetivos, ou com êle coincidente — geralmente o dos xz, de modo que

$$u_{ox} = u_{oz} = (u) \, ,$$

resultando dimétrico o sistema.

Em épura, o eixo dos y_0 pode ser escolhido arbitràriamente, convindo para obtenção de boas imagens, ser a unidade

$$u_{oy} < (u).$$

Habitualmente, toma-se

$$u_{oy} = \frac{1}{2}(u)$$

ou

$$u_{oy} = \frac{1}{3}(u).$$

e o sistema denomina-se *perspectiva cavaleira.*

Como seja

$$u_{oy} = tg\left[\widehat{(O)\ Y_\infty\ .\ (O)\ O_0\ /}\right]$$

para o valor $\frac{\pi}{4}$, resultará

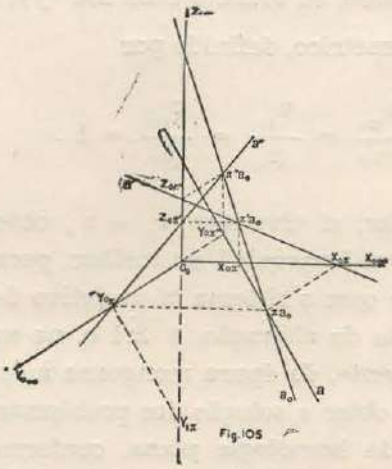
$$u_{oy} = (u)$$

e o sistema passará a ser isométrico: as dimensões lineares da figura ficam inalteradas e, por analogia, com o anterior, o sistema é denominado — *perspectiva cavaleira isométrica,* a 45.°, sôbre quadro vertical.

Na perspectiva cavaleira, considera-se, apenas, a região real e a virtual.

Conforme procedimento em perspectiva linear — Capítulo IV — a perspectiva cavaleira pode ter tratamento axonométrico e definiremos, então, a linha reta por dois de seus pontos genéricos ou por dois de seus traços ordinários.

Seja reta genérica (a) definida pelos dois primeiros traços ordinários, figura 105, a ser representada no sistema O_0-$X_{0\infty}\ Y_{0\infty}\ Z_{0\infty}$, na escala de alteração 1 : 2



(Figura 105)

$X_{o\pi}$ se obtem tomando $(x)\pi$ diretamente sôbre o eixo dos x_o e, $Y_{o\pi}$, depois de submeter $(y)_\pi$ à escala de alteração: fica determinado o primeiro traço πa_o e, com grande facilidade, por intermédio das escalas dos x_o' e dos z_o, o segundo traço $\pi' a_o$. A perspectiva cavaleira direta ou verdadeira de (a) será $\pi a_o . \pi' a_o$.

A primeira axonometria será $\pi a_o . X_{o\pi'}$, que, encontrando o eixo dos y_o, em $Y_{o\pi''}$, determinará uma das coordenadas do terceiro traço; a outra coordenada é definida pelo encontro da segunda axonometria $\pi' a_o . X_{o\pi}$, com o eixo dos z_o em $Z_{o\pi''}$: $\pi'' a_o$ será o terceiro traço. A terceira axonometria deverá pertencer a $Y_{o\pi}$ e $Z_{o\pi'}$: $Y_{1\pi} . Y_{o\pi}$ é o que se chama *a direção de afinidade* da axonometria.

Si a reta fosse definida por dois de seus pontos, o procedimento seria análogo, determinando-se, além de suas axonometrias, também seus traços axonométricos.

Retas, em posições particulares, deverão ter o mesmo tratamento, como indispensáveis exercícios para os alunos. Pode ainda ser de grande utilidade o estabelecimento da perspectiva cavaleira direta, partindo das projeções mongeanas, como habitualmente se procede.

B — e — 8) CAVALEIRA MILITAR

SISTEMA DENISE — GASTÃO GOMES

Na perspectiva cavaleira, sôbre plano vertical $\pi' \equiv \pi_o$, que vimos ser uma axonometria oblíqua dimétrica, quando as projetantes eram inclinadas de $\frac{\pi}{4}$ sôbre o quadro, ou sôbre o eixo dos (y), tinhamos sua transformação em sistema isométrico, definido por

$$\frac{u_{xo}}{(u)} = \frac{u_{yo}}{(u)} = \frac{u_{zo}}{(u)} = 1 .$$

Nesse caso particular, si tivermos $\pi_o \equiv \pi$, obteremos, exatamente, uma *perspectiva cavaleira horizontal*, ou melhor, *perspectiva militar*, que se identifica plenamente com o sistema bi-projetivo de "Denise — Gastão Gomes", adotada a escala de alteração $\sqrt{2}:1$ e, na solução de cujos problemas, passa-se, fàcilmente, da épura mongeana à épura de "Gastão Gomes", podendo ainda se obter a solução dos problemas, sôbre quadro horizontal, com o auxílio da homologia plana, conforme habitual procedimento, em perspectiva cavaleira, sôbre quadro vertical.

A épura abaixo, figura 106

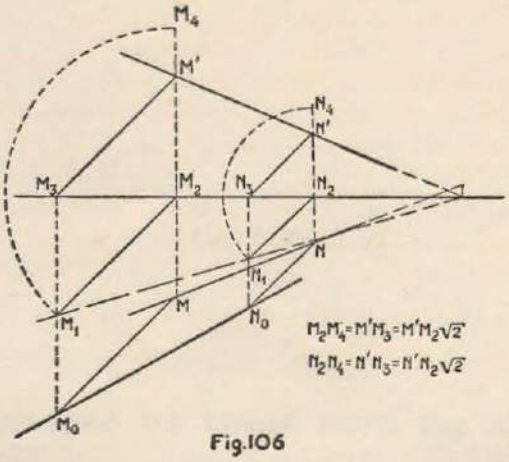


Fig.106

esclarece devidamente o assunto; por isso mesmo desnecessário o estudo destes sistemas, em detalhe: exercícios bem escolhidos deverão ser apresentados, em aula.

Dada a representação mongeana da reta, por dois pontos (M) e (N), figura 106, a projeção "Denise-Gastão Gomes" se obtem pela projeção obliqua a 45°, sôbre π e verifica-se coincidir M_0 N_0 com a perspectiva cavaleira militar da mesma reta, na escala $\sqrt{2} : 1$.

CAPÍTULO VI

B — f — 10

REPRESENTAÇÃO DA LINHA RETA EM AXONOMETRIA ORTOGONAL

O problema não difere do que já tratamos, em relação à axonometria cavaleira, considerada paradigma para os problemas de axonometria oblíqua: aqui, apenas, as projetantes são perpendiculares ao quadro, a origem axonométrica coincide com o ortocentro do triângulo fundamental e a escala objetiva se altera para todos os três eixos axonométricos, sendo de fato, essa alteração, *uma redução*, na proporção dos cosenos dos ângulos dos eixos objetivos com o quadro.

Quer uma reta genérica seja definida por dois de seus pontos ou dois de seus traços ordinários, reduzem-se as coordenadas desses elementos nas escalas respectivas, e obtidas as axonometrias diretas dos dois pontos ou de dois dos traços, ligações convenientes darão a axonometria ortogonal verdadeira da reta e suas três projeções axonométricas, conforme épura 107:

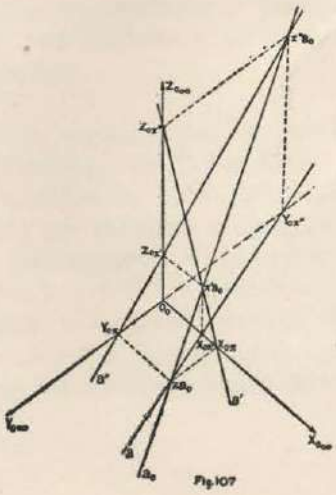


Fig.107

Habitualmente, os melhores compêndios estudam, com detalhes, apenas a axonometria ortogonal, muitos deles restringindo a definição de axonometria à axonometria ortogonal e as aplicações quasi se restringem ao caso isométrico, de grande divulgação no desenho técnico e caracterizado pela igualdade dos *coeficientes de encurtamento*, mesma inclinação dos eixos objetivos sôbre o quadro, eixos axonométricos formando entre si ângulos iguais e escalas axonométricas iguais.

Os sistemas axonométricos ortogonais são geralmente classificados, em tabelas, em função de seus elementos característicos, como a que se observa à página 22 de "*A axonometria Ortogonal e sua aplicação ao desenho técnico*" de Paulo Rodrigues Lima.

Os problemas fundamentais admitem sempre solução analítica e solução gráfica como, por exemplo: dado um sistema dimétrico 1 : m : n = 6 : 5 : 6, a disposição dos eixos pode ser determinada, em função desses números, por fórmulas que exprimem os cosenos dos ângulos que êles formam entre si, ou, práticamente, por intermédio de solução dada pelo teorema de Schlömilch.

Qualquer que seja o sistema de projeção considerado, o triângulo fundamental pode ser definido *em axonometria ortogonal*, e, a êle referidos, por qualquer sistema de coordenadas, os elementos determinantes do sistema.

CONCLUSÕES

1.ª) No ensino da Geometria Descritiva é indispensável apresentar ao aluno todos os sistemas que se grupam sob a denominação geral de *Axonometria,* para que êle não forme a *falsa idéia* de que sistema mongeano, projeções cotadas, axonometria ortogonal, perspectiva linear, perspectiva cavaleira, etc., sejam assuntos *completamente diversos,* em face do tratamento independente que habitualmente é dado no ensino de tão importante disciplina.

2.ª) Como condição imediatamente complementar da 1.ª conclusão, uma notação geral para todos os sistemas é imposição metodológica a que o professor não poderá se furtar: por isso, tentamos a aplicação generalizada da *notação cremoneana,* com a apresentação de um quadro das notações mais usuais em um curso médio de Geometria Descritiva: uma experiência detalhada foi feita na presente monografia, aguardando-se a crítica construtiva dos mestres consagrados e dos alunos estudiosos.

3.º) A experiência, de quasi um quarto de século de magistério, nos aconselha o tratamento axonométrico de todos os sistemas, a princípio, no estudo dos elementos fundamentais: *ponto, reta e plano,* para depois então, firmar os conceitos particulares e peculiares a cada um dêles quando o aluno já tiver sedimentado a *idéia de unidade* que preside à generalização da Axonometria.

4.ª) Estamos realmente convencidos de que o estudo da "Geometria Descritiva" em um curso normal de Belas-Artes, não pode prescindir da apresentação de todos os sistemas habituais de representação que integram a Axonometria, para que mestres e alunos encontrem campo indefinido de pesquizas e estudos, segundo o notável exemplo do insigne Prof. Dr. Carlos del Negro, em sua tese de concurso *"Baixo Relevo"* , o método das projeções centrais,", — trabalho cuja originalidade e cuja profundidade atestam o carinho e a importância, do tratamento da Geometria Descritiva, na Escola Nacional de Belas Artes.

BIBLIOGRAFIA

1) — ALBANESE, GIACÔMO — *Lezioni di Geometria Descritiva* — Vallerini — Editore — Pisa — Roma, 1945ª 4.ª edição.

2) — ABBOTT, B. A. — *Teach Yourself Geometry* — Hodder & Stoughton Limited, Londres.

3) — ANTOMARI, X — *Cours de Géométrie Descriptive* — Librairie Vuibert, Paris — 5.ª edição.

4) — ABBOTT, W. — *Fundamentos do desenho técnico* — Tradução de Nelson L. Rodrigues, Editora Gertum Carneiro, (3 volumes), Rio, 1950.

5) — APARICI, R — *Lecciones de Geometria Descriptiva* — Editorial Nelson, Buenos-Aires, 1945 (2 vols.).

6) — AMALDI, UGO — *Lizioni di Geometria Descrittiva* — La litotipo, Editrice Universitária, Padova, 1920.

7) — BOMPIANI, Prof. EURICO — *Geometria Descrittiva* — Romolo Pioda, Roma, 1944/45, (2 vols.).

8) — BELL, ROBERT J. T. — *An elementary Treatise on Coordenate Geometry of three dimensions.* — Macmillan and Co. Limited, Londres, 1944, 3.ª edição.

9) — BARTLETT and JOHNSON — *Engineering Descriptive Geometry and Drawing,* — John Wilson & Sons, 1951.

10) — BRICARD, R. — *Géométrie Descriptive,* — Octave Doin & Fils, Éditeurs, Paris, 1911.

11) — BRISSE, CH, et H. PIQUET — *Géométrie Descriptive* — Bandey & Cie — Editeurs, Paris, 1898.

12) — BRUNSCHVICG, LEON — *Las etapes de la filosofia matemática;* tradução de Cora Ratto de Sadoski, Zantaro, Buenos Aires.

13) — BUBB, FRANK W — *Descriptive Geometry* — The Macmillan Company, New York, 1935.

14) — CARDOSO, ARMANDO — *Projeções Ortogonais* — Edições Lopes da Silva, Porto, 1942/44 (2 vols.).

15) — CATALAN, E. — *Traité de Géométrie Descriptive* (du point, de la droite et du plan) Vve. Dunod, éditeur, Paris.

16) — CHISINI, O. e BIGGIOGERO, G. MASOTTI — *Lezioni di Geometria Descrittiva* — Cesare Tamburini, Milão, 1946, 4.ª Edição.

17) — CAJATY, HEITÔR — *Desenho Projetivo* — Gráfica Sauer, Rio de Janeiro (2.ª edição correta e aumentada).

18) — CHOLLET & MINEUR — *Traité de Géométrie Descriptive* — Libraire Vuibert, Paris, 1926.

19) — CAGNAC & COMMISSAIRE — *Géométrie Descriptive* (lêr fascicule) — Masson & Cie, Editeurs — Paris, 1949.

20) — De FOURCY — *Géométrie Descriptive* — Gauthier Villars, Librairie de l'École Polytechnique, Paris, 1881.

21) — DEL NEGRO, CARLOS — Baixo Relêvo — *O método das projeções cônicas* — Rio de Janeiro, 1949 (Tese de Concurso).

22) — DESBATS J. — *Géométrie Descriptive et Géométrie Cotée* — Les Éditeurs de l'École. Paris.

23) — DESPORTES, E — *Éléments de Géométrie Descriptive* — Librairie Armand Colier, Paris, 1906.

24) — ENRIQUES, F — *Lecciones de Geometria Descriptiva* — Tradução de T. R. Bachiller, Alfa, Madrid.

25) — EYROLLES, M. LÉON — *Cours de Géométrie Descriptive*, — École Spéciale des Travaux Publics — Paris, 1929.

26) — FRENCH, THOMAS E. — *A manual of engineering drawing* — Mac Graw-Hill Book Company, Inc. New York and London, 1941: 6.ª edição.

27) — FANO GINO; TURACINI, ALLESANDRO — Lezioni di Geometria Analitica e proiettiva. — G. B. Parovic Cia. — Roma.

28) — FRENCH, THOMAS E — *Desenho Técnico*, Tradução de Soveral Ferreira de Souza e Paulo de Barros Ferlini, Editora Globo. Rio de Janeiro, Pôrto Alegre, S. Paulo.

29) — F. G. M. — *Exercices de Géométrie Descriptive*, Paris — 1909 — (4.ª Edição).

30) — FRANCIA, GIOVANNI — *Elementi ed esercisi di Geometria Descrittiva* — Edizioni L. U. P. A. Genova — Genova.

31) — GEFFROY, J. — *Traité Practique de Géométrie Descriptive* — Colection Armand Colin — Librairie Armand Colin, Paris, 1921.

32) — GARCIA, VICENTE INGLIDA — *Métodos par la resolucion de las problemas geométricos* — Editorial Dorsat, S. A. 1948, Madrid .

33) — GOUILLY, A. — *Géométrie Descriptive* — Gauthier Villars et Fils, Paris

34) — GOMES, M. E. CANDIDO — *Desenho projetivo.*

35) — GOMES, GASTÃO — *Lições de Geometria Descritiva* — Henrique Malta & Cia. — Livraria Mineira, Ouro Preto, 1926.

36) — GROUTEL, E — *Lecture du dessin industriel* — Foucher, Paris. millan Company, New àork, 7.ª edição.

37) — GIESECKE, MITCHEL, SPENCER — *Technical Drawing* — The Mac-Millan Company, New York, 7.ª edição.

38) — GREGORY, ROBERTO MUNIZ — *Ensaios de Axonometria* — Rio de Janeiro, 1947,. Of. Colégio 28 de Setembro (Tese de concurso).

39) — HOOD GEORGE J. — *Geometry of Engineering Drawing* — Mac-Graw Hill Book Company Inc. New York, 1933.

40) — HOELSCHER, SPRINGER, POHLE — *Industrial Production Illustration*, Mc Graw Hill Book Company, Inc. — New York and London — 1946.

41) — HAUSSNER, DR. RÖBERT — *Geometria Descrittiva* — Tradução de Carlos Brunet — Editorial Labor, S. A. Barcelona, Buenos-Aires, 1928.

42) — HOLMES, JÖHN — *Applied Perspective*, Sir Isaac Pitman & Sons, Ltd. — Londres, 1949.

43) — INCE, E. L. *Principles of Descriptive Geometry* — Edward Arnold & Co., Londres, 1933.

44) — JAVARY A. — *Géométrie Descriptive* — Librairie Ch. Lelegreve, (2 vols), Paris, 1886 — 2.ª edição.

45) — SHENISON, ERVIN, E BRADLEY, HARRY CYRUS — Descriptive Geometry — The Mac-Millan Company, New York, Enlarged Edition.

46) — KIOES, J.*Traité Élémentaire de Géométrie Descriptive* — Librairie Hachette & Cie, Paris, 1882. 7.ª edição, (4 vols.).

47) — LAWSON, PHILIP, J. — *Pratical Percepctive Drawing* — Mc. Graw — Hill Book Company, Inc. London, 1943.

48) — LA GOURNERIE, T. — Traité de Géométrie Descriptive — Gauthier Villars, Paris, 1910.

49) — LEROY, C. F. A. — *Traité de Géométrie Descriptive* — Gauthier Villars, Imprimeur, Libraire — Paris, 1887 (2 vols).

50) — LIMA, PAULO RÖDRIGUES — Axonometria ortogonal e sua aplicação ao *desenho técnico* — Rio de Janeiro, 1950.

51) — LORIA, GINO — *Metodi di Geometria Descrittiva* — Ulrico Hoepli, Milano, 1909.

52) — LIMA E SANTOS, ANTÔNIO JOAQUIM — *Desenho Industrial* — Livraria Rodrigues & Cia. Lisboa, 1909.

53) — MINEUR, P. — *Problémes et épures de Géométrie Descriptive* — Librairie Vuibert, Paris, 1926, 2.ª edição.

54) — MONGE, GASPAR — *Géométrie Descriptive* — Mms. Ve. Courier, Imprimeur — Paris, 1820 (extraite des papiers de l'auteur par M. Brisson).

55) — MILNE JOHN J. — *An Elementary Treatise on Cross Ratio Geometry* — Cambridge at the University Press, 1911.

56) — MANFREDI, LUIZ — *Elementos de Geometria Descritiva* — Editores: Augusto Galli — Buenos-Aires.

57) — MELLO E CUNHA, G. — *Curso de Perspectiva Linear* — Imprensa Naval, 1922 — 1.ª edição.

58) — MILLER, H. W. — *Descriptive Geometry* — John Wiley & Sons Inc. New York, 1940, 7.ª edição.

59) — MÜLLER KRUPPA — *Darstellende Geometric* — B. G. Teubner, Leipzig, Berlim, 1936 — 4.ª edição.

60) — MÜLLER, DR. EMIL — *Lehrbur der Darstellende Geometrie* — Leipzig Berlim, 1920 (2.ª edição).

61) — MARTIN ET PERNOT — *Cours de Géométrie Descriptive* — Librarie des Sciences Générales, Paris (2 vols.).

62) — MALTINGLY & SCROGIN — *Applied Drawing and Design* — New York — 1950.

63) — PEGADO, LUIZ PORFIRIÕ DA MOTTA — *Curso de Geometria Descritiva da Escola Politécnica — Tip. da Academia Real de Ciências* — Lisboa, 1899 (2 vols).

64) — PINHEIRO, THOMAZ BÔRDALO — *Elementos de Projeções* — Livraria Francisco Alves & Co. Rio de Janeiro, (2.ª edição).

65) — PINHEIRO, GERSON POMPEU — *A prática da Perspectiva para arquitetos. O método dos pontos medidores*, 1945 — (Tese de Concurso).

66) — PILLET, J. — *Traité de Géométrie Descriptive* — Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1921.

67) — PORTO, MAURO; ROCHA, MARTINS — *Problemas de Geometria Descitiva*, Editora do E. M. de Rezende.

68) — PILLET J. — *Traité de Perspective Linéaire* — Librairie Cientifique Albert Blanchard, Paris, 1921.

69) — PIRRO, GIUSEPPINA — *Método de Denise* — Gastão Gomes — Rio de Janeiro, 1948 (Tese de Concurso).

70) — ROEVER, WILLIAM HENRY — *The Mongean Method of Descriptive Geometry* — The Macmillan Company, New York, 1933.

71) — RODRIGUES, J. ALVARO — *Geometria Descriptiva* — Imprensa Nacional (I, II e III volumes) Rio de Janeiro, 1941-195, 1.ª, 2.ª e 3.ª Edições.

72) — REEKIE, R. FRASER — *Draughtsmanship* — Edward Arnold & Co., Londres.

73) — RANELLETTI, C. — *Elementos de Geometria Descriptiva* — Gustavo Gali, Editor — Barcelona, 1937 (2 vols.).

74) — RHODES, PAUL HUNTHER — *Tratado teórico-prático de Perspectiva y Sombras* — Editorial Hobby, S. R. L. Buenos-Aires.

75) — ROUBAUDI, CHARLES — *Traité de Géométrie Descriptive* — Masson et Cie. Editeurs, Paris, 1935.

76) — RANGEL, ALCYR PINHEIRO — *Axonometria (graduação dos eixos)*, Rio de Janeiro, 1950 (Tese de concurso).

77) — ROVERSI PRÔF. ARTURO — *Geometria Descritiva, Prospectiva, Assonometria, Ombre*. Editore Hoepli, Milano, 1946 (2.ª edição ampliada).

78) — SOTO HIDALGO, JOAQUIM DEL — *Geometria Descriptiva y Sombras* — Madrid, 1945, (1.ª edição).

79) — SONGAYLO, ERNEST — *Traité de Géométrie Descriptive* — Edité par la Bibliotheque de Kurvik — Paris, 1882 (2 vols.).

80) — SCHUMANN, CHARLES H. — *Descriptive Geometry* — D. Van Mostrand Company, Inc. New York, 1930.

81) — SELLER, GIOVANNI — *Geometria Descritiva, Ulrico Hoepli* — Milano, 1949, (4.ª edição).

82) — SUSSEKIND CARLOS — *Geometria Descritiva* — Livraria Editora Freitas Bastos, Rio de Janeiro, 1923.

83) — SAMPAIO, CARLOS — *Geometria Aplicada* — Domingos Magalhães, Editora, Rio de Janeiro, 1849.

84) — TAIBO, A. PROF. ING. — *Geometria Descriptiva y sus aplicaciones* — Madrid — 1943 — (2 vols.).

85) — VERGNAUD A. D. — *Nouveau Manuel complet de Perspective* — La Librairie encyclopédique de Roret, Paris, 1859.

86) — VALLÉE, L. L. — *Ttraité de la science du dessin*. Mme. Vve. Courcier, Libraire pour les sciences, Paris, 1821.

87) — WARNER, FRANK M. — *Applied Descriptive Geometry* — Mac Graw Hill Book Company. Inc. New York, 1946.

89) — WELLMANN, B. LEIGHTON — *Technical Descriptive Geometry* — Mac Graw Hill Book Company, Inc., 1948 (1.ª edição).

90) — WALTERS, W. C. — *Three-dimensional Engineering Drawing* — Pen-in-Hand, Oxford, 1949.

91) — WINSTANLEY, H. H. — *Junior Technical Drawing*. Edward Arnold & Co. London, 1944.

ÎNDICE

Páginas

DEDICATORIA 3

DEFININDO 5

Notações empregadas na presente monografia 7
Quadro de classificação da Axonometria 8

JUSTIFICANDO 17

Algumas definições e teoremas importantes 18
Classificação e traços da linha reta 19

CAPITULO I :

Terceira projeção de uma reta 22

CAPITULO II : g-11,12,13

Representação da reta no sistema mongeano 27
Pertinência entre o ponto e a reta 39
Resumo 40

CAPITULO III : g-11, 12, 13

Posições relativas de duas retas 45
RETAS INCIDENTES: a) — ponto de incidência próprio 45
b) — ponto de incidência impróprio 50
c) — as duas retas são revessas 54

CAPITULO IV : a-1; b-2, 3, 4.

INTRODUÇAO

A perspectiva linear e o sistema de projeções cotadas são casos métricos particulares da axonometria central 57
Homotetia relativa à representação de um ponto 60
A-a-1) Axonometria central 62
A-b-2) Perspectiva linear 66
A-b-3) Representação da reta em projeções cotadas 68
A-c-5) Caso particular de Estanilao Vecchi 71

CAPITULO V : B-d-6; e-7; e-8

AXONOMETRIA OBLIQUA :

Axonometria cavaleira da linha reta ou prespectiva cavaleira 73
B-d-6) Axonometria isométrica a 45° 74
B-e-7) Perspectiva cavaleira 74
B-e-8) Cavaleira Militar — Sistema "Denise-Gastão Gomes" 76

CAPITULO VI : B-f-10)

Representação da linha reta em axonometria ortogonal 79

CONCLUSÕES 81

BIBLIOGRAFIA 83

UNIVERSIDADE DO BRASIL
SEÇÃO
DE
REGISTRO
BIBLIOTECA CENTRAL